Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Matemática

EXTENSÕES DA ÁLGEBRA SIMPLÉTICA: SUBESPAÇOS MULTILAGRANGENOS E DECOMPONÍVEIS

Dayana Cristine dos Santos

Itajubá, fevereiro de 2016

Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Matemática

EXTENSÕES DA ÁLGEBRA SIMPLÉTICA: SUBESPAÇOS MULTILAGRANGENOS E DECOMPONÍVEIS

Dayana Cristine dos Santos

Orientador: Prof. Dr. Leandro Gustavo Gomes

Dissertação submetida ao Programa de Pós–Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Matemática

Área de Concentração: Análise Matemática

Itajubá – MG
fevereiro de 2016

Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Matemática

EXTENSÕES DA ÁLGEBRA SIMPLÉTICA: SUBESPAÇOS MULTILAGRANGENOS E DECOMPONÍVEIS

Dayana Cristine dos Santos

Dissertação aprovada por banca examinadora em 25 de fevereiro de 2016, conferindo ao autor o título de **Mestre em Ciências em Matemática**.

Banca Examinadora:
Prof. Leandro Gustavo Gomes (Orientador)
Prof. Luis Fernando de Osório Mello
Prof. Mário Otávio Salles

Itajubá – MG
fevereiro de 2016

Dedico este trabalho à minha mãe,

Maria Isabel dos Santos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus, que me ouviu nos momentos difíceis, me confortou e me deu forças para chegar onde estou.

Quero agradecer a minha família, principalmente minha mãe, Maria Isabel, pois acredito que sem o apoio deles seria muito difícil vencer esse desafio.

Agradeço aos meus amigos e colegas que sempre torceram por mim e me apoiaram no decorrer deste curso.

Agradeço a todos os professores que me auxiliou durante todo o Mestrado e aos funcionários do departamento.

Agradeço ao meu orientador, Leandro Gustavo Gomes, que auxiliou na elaboração desta dissertação, mostrando paciência e compreensão, sendo assim de suma importância.

"Suba o primeiro degrau com fé. Não
é necessário que você veja toda a
escada. Apenas de o primeiro passo."
(Martin Luther King)

Resumo

O objetivo desta dissertação é estudar, do ponto de vista linear, certos tipos de subespaços isotrópicos maximais de $(n+1)$-formas. Estes são fundamentais tanto na teoria das formas simpléticas quanto na teoria das formas multissimpléticas. Iniciaremos estudando algumas propriedades e definições da Álgebra Simplética, seguido de algumas características básicas dos subespaços lagrangeanos. Em seguida estenderemos a noção de tais subespaços para o contexto de $(n+1)$-formas, que chamaremos de subespaços multilagrangeanos. Estes são caracterizados por serem maximais isotrópicos e por terem uma dimensão também maximal. Com isto é possível mostrar a decomposição direta do espaço vetorial em dois subespaços, sendo um isotrópico e o outro n-isotrópico, o que é uma extensão imediata da polarização de um espaço simplético em dois subespaços lagrangeanos. Por fim, enfraquecemos a hipótese de sua dimensão maximal e a trocamos pela noção de decomposibilidade. Esta é mais geral que a anterior, mas ainda assim suficientemente restritiva para que garanta uma decomposição direta do espaço em uma parte isotrópica e outra n-isotrópica.

Palavras–chave: Subespaço maximal isotrópico, Subespaço Multilagrangeano, Subespaço Decomponível.

Abstract

The aim of this dissertation is to study, from de linear point of view, some types of maximal isotropic subspaces of $(n + 1)$-forms. Theses are important in the theory of sympletic forms just as in the theory of multisympletic ones. We begin with studing some proprieties and definitions of the sympletic algebra, followed by basic characteristics of lagrangean subspaces. After that, we extend the notion of such subspace to the context of $(n+1)$-forms, which we call multilagrangean subspaces. Theses are maximal isotropic and have a dimension that turns out to be also maximal. It is possible to show a direct decomposition of the vector space in two subspaces, one isotropic and other n-isotropic, which is an extention of the polarization in sympletic spaces by two lagrangean subspaces. Finally, we weaken the hypothesis of maximal dimension and change it by the notion of decomposibility. This is more comprehensive than the former, but it is still restrictive in order to ensure the direct decomposition of the vector space in one isotropic part and another n-isotropic one.

Keywords: Maximal isotropic subspace, multilagrangean subspace, Decomposible subspace.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Há muito tempo o formalismo hamiltoniano na física tem servido como fonte de inspiração para a definição e investigação de importantes estruturas geométricas na matemática. Este é o caso da geometria simplética, que aparece naturalmente no estudo da mecânica clássica, em dimensão finita, e estabelece uma relação geométrica com as equações de Hamilton. O teorema central que garante esta conexão é o teorema de Darboux: localmente existem coordenadas para as quais a forma simplética, e portanto as equações de movimento, tomam sua forma canônica.

No entanto, quando passamos da mecânica para a teoria dos campos, i.e., de um sistema de EDO's para um sistema de EDP's, surgem novas e diferentes estruturas geométricas denominadas de "polissimpléticas" ou "multissimpléticas" (veja [**?**, 3]). Da mesma maneira, um teorema de Darboux é apresentado tal que nessas coordenadas canônicas as equações da dinâmica dos campos clássicos, chamada de equações de de Donder–Weyl [6, 1], assumem sua forma canônica [4].

O objetivo deste trabalho é estudar, do ponto de vista linear, certos tipos de subespaços isotrópicos maximais de $(n+1)$-formas, uma vez que estes são fundamentais para provar os teoremas tipo "Darboux" tanto para formas simpléticas quanto multissimpléticas. De maneira mais precisa, dada uma $(n+1)$-forma ω em um espaço vetorial W, um subespaço

$L \subset W$ é isotrópico maximal relativo a ω se

- L é isotrópico, i.e., para quaisquer vetores $u, v \in L$

$$i_{u\wedge v}\omega = 0 \quad .$$

- L é maximal com a propriedade de isotropia acima, i.e., se L' é isotrópico e $L \subset L'$ então $L = L'$.

Para uma forma simplética, ou seja, uma 2-forma não-degenerada no espaço vetorial W, sabemos que este se decompõe na soma direta de dois subespaços isotrópicos maximais de dimensões iguais. Já para $(n+1)$-formas, $n > 1$, a historia é bem mais complicada. Neste caso, por exemplo, não existe tal decomposição de W, exceto no caso trivial da forma nula. O desejado é que W se decomponha na soma direta de um espaço maximal isotrópico L e outro n-isotrópico F, i.e., para quaisquer vetores $u_0, u_1, \ldots, u_n \in F$ temos

$$\omega(u_0, u_1, \ldots, u_n) = 0 \quad .$$

Porém, não devemos esperar este resultado relativo a uma $(n+1)$-forma qualquer, necessitando que mais hipóteses sejam feitas. A seguir ilustramos este fato.

Sejam W, V, T espaços vetoriais de dimensão finita com $\dim T = n$ e ρ uma projeção de W em T, de tal maneira que obtemos a seguinte sequência exata:

$$V \longrightarrow W \xrightarrow{\rho} T \quad . \tag{1.1}$$

Na hipótese de ω se anular sempre que contraída com três vetores em V, se existir um subespaço $L \subset V$ isotrópico maximal, chamado de multilagrangeano, com

$$\dim L = 1 + nN \qquad \text{, sendo que} \qquad \dim(V/L) = N \quad ,$$

então W é escrito como a soma direta de L e um subespaço n-isotrópico F,

$$W = L \oplus F \quad ,$$

enquanto V é escrito como a soma direta de dois subespaços isotrópicos maximais,

$$V = L \oplus L_1 \quad , \quad L_1 = F \cap V \quad .$$

Como veremos no capítulo 3, este resultado é fundamental na teoria das formas multissimpléticas.

Esta dissertação está estruturada como segue: no capítulo 2 inserimos a notação e os conceitos básicos que serão utilizados ao longo deste trabalho. Ali é introduzida a noção de Álgebra Simplética, terminando com o Teorema da representação de uma forma simplética em coordenadas canônicas. No capítulo 3 introduzimos o conceito de subespaço multilagrangeano, generalizando o de subespaço lagrangeano do capítulo 2. Vemos que esse subespaço maximal isotrópico é fundamental para a obtenção de uma base canônica multissimplética, o que é demonstrado posteriormente. No capítulo 4 enfraquecemos a hipótese de dimensão maximal de um subespaço multilagrageano, substituindo-a pela noção de subespaço maximal isotrópico e decomponível. Como veremos, isto nos permite abandonar a hipótese de dimensão maximal e ainda assim garantir a decomposição de W em um parte isotrópica e a outra n-isotrópica. Por último estudamos suas aplicações na existência de possíveis "bases canônicas".

Capítulo 2

Álgebra Linear Simplética

Este capítulo tem como objetivo principal inserir a notação e os conceitos básicos que serão utilizados ao longo deste trabalho. Iniciaremos com algumas propriedades e definições da Álgebra Simplética, seguido de algumas características básicas dos subespaços langrageanos. Encerraremos com a representação de uma forma simplética em coordenadas canônicas.

2.1 Álgebra Simplética

Seja $\{e_i\}$ uma base de E com dual $\{e^i\}$. Dado $u \in E$ e $\alpha \in E^*$ denotamos $\langle \alpha, u \rangle$ como sendo seu emparelhamento natural. Esta é uma expressão mais natural tendo em vista a dualidade entre E e E^*, uma vez que os espaços vetoriais E^{**} e E são canonicamente isomorfos.

Sabemos que todo elemento $u \in E$ é escrito da forma

$$u = u^i \, e_i \quad ,$$

e que para $j = 1, 2, ..., n$, os funcionais lineares e^j são definidos por

$$u \longmapsto \langle e^j, u \rangle = u^j \quad .$$

Em outras palavras,

$$\left\langle e^j, e_i \right\rangle = \delta_i^j \quad . \tag{2.1}$$

Assim, dado $\alpha \in E^*$ temos

$$\langle \alpha, u \rangle = \alpha(u^i e_i) = u^i \langle \alpha, e_i \rangle = \langle \alpha, e_i \rangle \langle e^i, u \rangle \quad .$$

Portanto

$$\alpha = \langle \alpha, e_i \rangle \, e^i \quad . \tag{2.2}$$

De maneira análoga podemos escrever

$$u = \left\langle e^i, u \right\rangle e_i \quad . \tag{2.3}$$

Seja L um subespaço de E. Denotamos seu **aniquilador** por $L^\perp$, que é o subespaço de E^* definido por

$$L^\perp = \{\alpha \in E^* : \langle \alpha, u \rangle = 0, \ \forall \, u \in L\} \quad . \tag{2.4}$$

Uma propriedade imediata que obtemos a partir desta definição é a seguinte.

Proposição 2.1.1. $\dim E = \dim L + \dim L^\perp$.

Demonstração. Assuma que $\dim L = m$. Seja uma base de L dada por $\{e'_1, e'_2, ..., e'_m\}$ e completada como uma base de E por $\{e'_1, e'_2, ..., e'_m, e_1, ..., e_{n-m}\}$. Sendo sua base dual dada por $\{e'^1, e'^2, ..., e'^m, e^1, ..., e^{n-m}\}$, sabemos que $\{e^1, e^2, ..., e^{n-m}\} \subset L^\perp$. Agora, dado $\alpha \in L^\perp$ temos

$$\alpha = a_1 e'^1 + a_2 e'^2 + ... + a_m e'^m + b_1 e^1 + b_2 e^2 + ... + b_{n-m} e^{n-m} \quad .$$

Pela fórmula (2.2), vale $a_1 = \langle \alpha, e'_1 \rangle = 0, \ldots, a_m = \langle \alpha, e'_m \rangle = 0$. Logo α está no subespaço gerado por $\{e^1, e^2, ..., e^{n-m}\}$, i.e., $L^\perp$ é de fato gerado por estes elementos. Portanto, $\dim L^\perp = n - m = \dim E - \dim L$.

□

Uma forma bilinear em E é uma aplicação bilinear $\omega : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que ela é **não-degenerada** se, dado $u \in E$, $u \neq 0$, existe $v \in E$ com

$$\omega(u, v) \neq 0 \quad .$$

Seguem algumas definições que serão utilizadas ao longo do texto:

(a) Dado $\{e_i\}$ base de E com dual $\{e^i\}$, definindo $\omega_{ij} = \omega(e_i, e_j)$, obtemos sua representação nestas coordenadas:

$$\omega = \omega_{ij}\ e^i \otimes e^j \quad . \tag{2.5}$$

(b) A **transposta** de ω é a forma bilinear ω^t definida por

$$\omega^t(e_i, e_j) = \omega(e_j, e_i) \quad . \tag{2.6}$$

(c) Dizemos que ω é **simétrica** se $\omega^t = \omega$. Se $\omega^t = -\omega$, ela é dita ser **anti-simétrica**.

(d) A aplicação linear $\omega^\flat : E \longrightarrow E^*$ é definida por

$$\omega^\flat(u) \cdot v = \left\langle \omega^\flat(u), v \right\rangle = \omega(u, v) \quad ,$$

onde $u, v \in E$. Note que a matriz de $\omega^\flat$ relativa às bases $\{e_i\}$ e $\{e^j\}$ é exatamente (ω_{ij}), isto é,

$$\omega^\flat(e_i) = \omega_{ij} e^j \quad . \tag{2.7}$$

Proposição 2.1.2. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) ω *é não-degenerada;*

(ii) $\omega^\flat : E \to E^*$ *é um isomorfismo;*

(iii) A matriz (ω_{ij}) *é não singular;*

(iv) ω^t *é não-degenerada.*

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ *(ii)*: Se ω é não-degenerada, pela definição, dado $e_1 \in E$, com $e_1 \neq 0$, existe $e_2 \in E$ com $\omega(e_1, e_2) \neq 0$, o que implica que $\ker \omega^\flat = \{0\}$. Do fato de $\dim E = \dim E^*$ segue que $\omega^\flat$ é bijetora, ou seja, um isomorfismo.

(ii) $\Longleftrightarrow$ *(iii)*: De fato, pois a matriz (ω_{ij}) representa $\omega^\flat$ em coordenadas.

(iii) $\Rightarrow$ *(iv)*: Por hipótese a matriz (ω_{ij}) é não singular, então em coordenadas, isto decorre de

$$\omega^t_{ij} = \omega^t(e_i, e_j) = \omega(e_j, e_i) = \omega_{ji} \quad .$$

Logo, temos que a matriz (ω^t_{ij}) é não singular. Portanto, ω^t é não-degenerada.

(iv) $\Rightarrow$ *(i)*: De fato, pela definição temos que se ω^t é não-degenerada, então dado $e_1 \in E$, $e_1 \neq 0$, existe $e_2 \in E$ com $\omega^t(e_1, e_2) \neq 0$. Mas sabemos que $\omega^t(e_1, e_2) = \omega(e_2, e_1) \neq 0$. Portanto, ω é não-degenerada. □

Definição 2.1.1. *Denotamos* $\bigwedge^2 E^*$ *como o conjunto das formas bilineares anti-simétricas em* E*. Dizemos que* $\omega \in \bigwedge^2 E^*$ *é uma* ***forma simplética*** *se for não-degenerada. O par* (E, ω) *é denominado* ***Espaço Vetorial Simplético****.*

2.2 Forma Simplética Canônica

Seja L um espaço vetorial e L^* seu dual de dimensão finita $\dim L = \dim L^* = n$. Defina o novo espaço vetorial E por

$$E = L \oplus L^* \quad . \tag{2.8}$$

Assim L é um subespaço de E e L^* um subespaço complementar a L em E. O par $(v, \alpha) \in E$ é formado por $v \in L$ e $\alpha \in L^*$.

Definição 2.2.1. *A função* $\omega_0 : E \times E \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$\omega_0(u + \alpha, v + \beta) \; = \; \langle \alpha, v \rangle \; - \; \langle \beta, u \rangle \quad ,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *é o pareamento em* $L \oplus L^*$*. Dizemos que* ω_0 *é uma forma simplética em* E*, denominada a* **forma simplética canônica** *em* E*.*

Proposição 2.2.1. *Provemos que* ω_0 *como dada acima é realmente uma forma simplética.*

Demonstração. Para tanto, precisamos mostrar que ω_0 é bilinear, anti-simétrica e não-degenerada.

- ω_0 é anti-simétrica:

  De fato, temos por definição que

$$\omega_0(u + \alpha, v + \beta) = \langle \alpha, v \rangle - \langle \beta, u \rangle \quad .$$

Se trocarmos as posições dos vetores (u, α) e (v, β) obtemos

$$\omega_0(v + \beta, u + \alpha) = \langle \beta, u \rangle - \langle \alpha, v \rangle \quad .$$

Logo, $\omega_0(u + \alpha, v + \beta) = -\omega_0(v + \beta, u + \alpha)$ e, portanto, ω_0 é anti-simétrica.

- ω_0 é bilinear:

  De fato, sejam $u, u', v, v' \in L$ e $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in L^*$. Assim,

$$\begin{aligned} \omega_0(u + u' + \alpha + \alpha', v + \beta) &= \langle \alpha + \alpha', v \rangle - \langle \beta, u + u' \rangle \\ &= \langle \alpha, v \rangle + \langle \alpha', v \rangle - (\langle \beta, u \rangle + \langle \beta, u' \rangle) \\ &= \langle \alpha, v \rangle + \langle \alpha', v \rangle - \langle \beta, u \rangle - \langle \beta, u' \rangle \\ &= \langle \alpha, v \rangle - \langle \beta, u \rangle + \langle \alpha', v \rangle - \langle \beta, u' \rangle \\ &= \omega_0(u + \alpha, v + \beta) + \omega_0(u' + \alpha', v + \beta). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_0(\lambda(u + \alpha), v + \beta) &= \omega_0((\lambda u + \lambda \alpha), v + \beta) \\ &= \lambda(\langle \alpha, v \rangle - \langle \beta, u \rangle) \\ &= \lambda \omega_0(u + \alpha, v + \beta). \end{aligned}$$

  Portanto, temos que ω_0 é bilinear.

- ω_0 é não-degenerada:

  De fato, dado $(u + \alpha) \in E$ com $(u + \alpha) \neq 0$, existe $(v + \beta) \in E$ tal que

$$\omega_0(u + \alpha, v + \beta) = \langle \alpha, v \rangle - \langle \beta, u \rangle \neq 0 \quad .$$

  Se ocorrer $\alpha \neq 0$, tomemos $v \in L$ de modo que $\langle \alpha, v \rangle \neq 0$ e $\beta = 0$. De maneira análoga, se ocorrer $u \neq 0$, basta tomar $\beta \in L^*$ tal que $\langle \beta, u \rangle \neq 0$ e $v = 0$. Assim mostramos que ω_0 é não-degenerada.

□

Para um melhor entendimento no que se segue, denotaremos $v + \alpha \in E$ com $v \in L$ e $\alpha \in L^*$ por (v, α). Tome uma base qualquer de L dada por $\{e_1,\ e_2, ...,\ e_n\}$ e sua respectiva dual em L^* dada por $\{e^1,\ e^2, ...,\ e^n\}$. Assim, construímos uma base de E

$$\left\{(e_1, 0),\ (e_2, 0),\ ...,\ (e_n, 0), (0, e^1), (0, e^2),\ ..., (0, e^n)\right\} \quad .$$

Por outro lado, a base dual de E^* é

$$\{(e^1,0),\ (e^2,0),\ ...,\ (e^n,0),(0,e_1),(0,e_2),\ ...,(0,e_n)\} \quad .$$

Para simplificar a notação, reescrevemos

$$\begin{cases} \tilde{e}_i = (e_i, 0) \\ \tilde{f}^i = (0, e^i) \\ \tilde{e}^i = (e^i, 0) \\ \tilde{f}_i = (0, e_i). \end{cases}$$

Assim, a base de E e sua respectiva dual em E^* ficam na forma

$$\left\{\tilde{e}_1,\ \tilde{e}_2,\ ...,\ \tilde{e}_n,\ \tilde{f}^1,\ \tilde{f}^2,\ ...,\ \tilde{f}^n\right\}$$
$$\left\{\tilde{e}^1,\ \tilde{e}^2,\ ...,\ \tilde{e}^n,\ \tilde{f}_1,\ \tilde{f}_2,\ ...,\ \tilde{f}_n\right\}.$$

As componentes de ω_0 relativo à base acima:

$$\begin{aligned} \omega_{ij} &= \omega_0(\widetilde{e}_i, \widetilde{e}_j) = \omega_0((e_i,0),(e_j,0)) = 0. \\ \bar{\omega}_i^j &= \omega_0(\widetilde{f}^j, \widetilde{e}_i) = \omega_0((0,e^j),(e_i,0)) = \langle e^j, e_i \rangle = \delta_i^j. \\ \widetilde{\omega}_i^j &= \omega_0(\widetilde{e}_i, \widetilde{f}^j) = -\bar{\omega}_i^j = -\delta_j^i. \\ \omega^{ij} &= \omega_0(\widetilde{f}^i, \widetilde{f}^j) = \omega_0((0,e^i),(0,e^j)) = 0. \end{aligned}$$

Para todo $u \in E$ escrevemos $u = u^i\widetilde{e}_i + u_j\widetilde{f}^j$ e $v = v^i\widetilde{e}_i + v_j\widetilde{f}^j$. Da bilinearidade de ω_0, obtemos:

$$\begin{aligned} \omega_0(u,v) &= u^iv^j\ \omega_0(\widetilde{e}_i, \widetilde{e}_j) + u^iv_j\ \omega_0(\widetilde{e}_i, \widetilde{f}^j) + u_jv^i\ \omega_0(\widetilde{f}^j, \widetilde{e}_i) + u_iv_j\ \omega_0(\widetilde{f}^i, \widetilde{f}^j) \\ &= u^iv^j\ \omega^{ij} + u^iv_j\ \widetilde{\omega}_i^j + u_jv^i\ \bar{\omega}_i^j + u_iv_j\ \omega_{ij} \\ &= u^iv_j\ \widetilde{\omega}_i^j + u_jv^i\ \bar{\omega}_i^j \\ &= (u_jv^i - u^iv_j)\bar{\omega}_i^j \\ &= (u_jv^i - u^iv_j)\delta_i^j \\ &= u_iv^i - u^iv_i. \end{aligned}$$

Por outro lado, definimos o produto exterior de α e β em E^* por $\alpha\wedge\beta \in \bigwedge^2 E^*$ com

$$(\alpha\wedge\beta)(u,v) = \begin{vmatrix} \alpha(u) & \alpha(v) \\ \beta(u) & \beta(v) \end{vmatrix}.$$

Assim temos

$$(\widetilde{f}_i \wedge \widetilde{e}^i)(u,v) = \begin{vmatrix} \widetilde{f}_i(u) & \widetilde{f}_i(v) \\ \widetilde{e}^i(u) & \widetilde{e}^i(v) \end{vmatrix} = (u_i v^i - u^i v_i).$$

Portanto, obtemos a forma simplética canônica em coordenadas canônicas:

$$\omega_0 = \widetilde{f}_i \wedge \widetilde{e}^i \quad . \tag{2.9}$$

2.3 Subespaços Lagrangeano

Queremos mostrar que, em certo sentido, toda forma simplética é como a forma simplética canônica. Para tanto começamos com o estudo de alguns subespaços de espaços vetoriais simpléticos.

Definição 2.3.1. *Sejam $\omega \in \bigwedge^2 E^*$ simplética e $L \subset E$ subespaço. O ω-**complemento ortogonal** de L é o subespaço definido por*

$$L^\omega = \{e_1 \in E : \omega(e_1, e_2) = 0, \, \forall \, e_2 \in L\} \quad . \tag{2.10}$$

Dizemos

*(i) L é **isotrópico** se $L \subset L^\omega$, isto é, $\omega(e_1, e_2) = 0$ para todo $e_1, e_2 \in L$.*

*(ii) L é **lagrangeano** se L é isotrópico e tem um complemento isotrópico, isto é, $E = L \oplus L'$, quando L' é isotrópico.*

*(iii) L é **simplético** se ω restrito a $L \times L'$ é não-degenerada.*

A partir dessas definições vejamos algumas propriedades importantes.

Proposição 2.3.1. *Sejam $\omega \in \bigwedge^2 E^*$ simplético e $L, G \subset E$ subespaços, então*

(i) $L \subset G$ implica $G^\omega \subset L^\omega$.

(ii) $L^\omega \cap G^\omega = (L+G)^\omega$.

(iii) $L = (L^\omega)^\omega$.

(iv) $(L \cap G)^\omega = L^\omega + G^\omega$.

Demonstração. *(i)* Seja $e_1 \in G^\omega$. Então $\omega(e_1, e) = 0$, $\forall e \in G$. Isto implica que $\omega(e_1, e_0)$ $= 0$, $\forall\ e_0 \in L$. Portanto, $e_1 \in L^\omega$.

(ii) Como L e G são subespaços de $L + G$, por *(i)* temos

$$L \subset L + G \ \Rightarrow (L + G)^\omega \subset L^\omega \quad .$$

$$G \subset L + G \ \Rightarrow (L + G)^\omega \subset G^\omega \quad .$$

Logo, $(L + G)^\omega \subset L^\omega \cap G^\omega$.

Por outro lado, sabemos que se $e_0 \in L^\omega$ e $e_0 \in G^\omega$, então

$$e_0 \in L^\omega \Rightarrow \omega(e_0, e_1) = 0, \forall\ e_1 \in L \quad ,$$

$$e_0 \in G^\omega \Rightarrow \omega(e_0, e_2) = 0, \forall\ e_2 \in G \quad .$$

Vamos mostrar que $e_0 \in (L + G)^\omega$. De fato, seja $v \in L + G$, temos que v é da forma $v = v_1 + v_2$ onde $v_1 \in L$ e $v_2 \in G$ e

$$\omega(e_0, v) = \omega(e_0, v_1 + v_2) = \omega(e_0, v_1) + \omega(e_0, v_2) = 0 \quad .$$

Portanto, $e_0 \in (L + G)^\omega$. Assim $L^\omega \cap G^\omega \subset (L + G)^\omega$. Concluímos então que $L^\omega \cap G^\omega =$ $(L + G)^\omega$.

(iii) $L \subset (L^\omega)^\omega$: Sabemos que dado $e_0 \in L$ teremos

$$\omega(e_0, e) = 0 \quad \forall \ \ e \in L^\omega \quad .$$

Chamemos L^ω de F. Temos então que $\forall\ e \in F$, $\omega(e_0, e) = 0$. Pela definição, temos que $e_0 \in F^\omega$. Desta forma, $e_0 \in (L^\omega)^\omega$ e portanto $L \subset (L^\omega)^\omega$.

$(L^\omega)^\omega \subset L$: Seja $e_0 \in (L^\omega)^\omega$, i.e., $\omega(e_0, e_1) = 0$ para todo $e_1 \in L^\omega$, por outro lado, se $e_1 \in L^\omega$ pela definição, $\omega(e_1, e_0) = 0\ \forall\ e_0 \in L$. Portanto, $(L^\omega)^\omega \subset L$.

(iv) Note que utilizando os itens *(ii)* e *(iii)* obtemos

$$(L \cap G)^\omega = ((L^\omega)^\omega \cap (G^\omega)^\omega)^\omega = ((L^\omega + G^\omega)^\omega)^\omega = L^\omega + G^\omega.$$

$\square$

Teorema 2.3.1. *Seja $\omega \in \bigwedge^2 E^*$ simplética. Dado um subespaço $L' \subset E$ isotrópico relativo a ω, existe um subespaço Lagrangeano L tal que $L' \subset L$. Ainda, são equivalentes as afirmações:*

(i) *L é Lagrangeano.*

(ii) *$L = L^\omega$.*

(iii) *L é isotrópico e $\omega^\flat(L) = L^\perp$.*

(iv) *L é isotrópico e $\dim L = \frac{1}{2}\dim E$.*

Demonstração. *(i) ⇒ (ii)*: De fato, temos que se L é Lagrangeano, então pela definição L é isotrópico e portanto $L \subset L^\omega$. Basta mostrar que $L^\omega \subset L$. Se $e \in L^\omega$ e escrevemos $e = e_0 + e_1$, onde $e_0 \in L$ e $e_1 \in L'$ e L' é dada pela Definição 2.3.1. Mostremos que $e_1 = 0$. Com efeito, como L' é isotrópico, então $L' \subset L'^\omega$ e portanto $e_1 \in L'^\omega$ e de maneira similar obtemos $e_1 = e - e_0 \in L^\omega$, pois $e_0 \in L \subset L^\omega$. Assim $e_1 \in L'^\omega \cap L^\omega = (L' + L)^\omega = (E)^\omega = \{0\}$, pois ω é não-degenerada.
(ii) ⇒ (iii): Temos que $L = L^\omega$. Primeiramente vamos mostrar que $\omega^\flat \subset L^\perp$. De fato, se $\alpha \in \omega^\flat(L)$, então existe $e \in L$, tal que $\omega(e, .) = \alpha$. Portanto $\forall\ e_1 \in L$, $0 = \omega(e, e_1) = \alpha(e_1)$, isto é, $\alpha \in L^\perp$.
Reciprocamente, se $\alpha \in L^\perp \subseteq E^*$, então existe e $\in E$ tal que $\omega^\flat(e) = \omega(e, .) = \alpha$, já que $\omega^\flat$ é bijetivo. Como $\alpha \in L^\perp$ temos que $\forall\ e_1 \in L,\ 0 = \alpha(e_1) = \omega(e, e_1)$, o que implica que e $\in L^\omega = L$.
(iii) ⇒ (iv): Sabemos que L é isotrópico por hipótese. Por outro lado sabemos que $\omega^\flat(L) = L^\perp$;

$$\dim \omega^\flat(L) = \dim L^\perp \quad ,$$

$$\dim L = \dim L^\perp \quad .$$

Sabemos que

$$\dim E = \dim L + \dim L^\perp = 2 \dim L \quad .$$

Portanto, $\dim L = \frac{1}{2}\dim E$.
(iv) ⇒ (i): De fato, temos por hipótese que L é isotrópico e $\frac{1}{2}\dim E = \dim L$, sabemos

pela Proposição 2.1.1 que $\dim E = \dim L + \dim L^{\perp}$, logo temos que $\dim E = 2\dim L$, ou seja, $\dim L = \dim L^{\perp}$. Como L é isotrópico, então sabemos que $L \subset L^{\omega}$ o que implica que $\omega^{\flat}(L) \subset L^{\perp}$, como $\omega^{\flat}$ é um isomorfismo, temos que $\dim \omega^{\flat} = \dim L = \dim L^{\perp}$, portanto temos $\omega^{\flat}(L) = L^{\perp}$. Vamos mostrar que todo subespaço isotrópico está contido num subespaço Lagrangeano. De fato, seja L' um subespaço isotrópico de E. Se $L' = L^{\omega}$, temos que L é Lagrangeano e a prova termina. Se $L \subset L^{\omega}$, sabemos que existe um vetor não nulo $e_0 \in L^{\omega}$ tal que $e_0 \notin L$. Seja $\langle e_0 \rangle = F$, temos que F é isotrópico pela definição de ω, assim $F \subset F^{\omega}$ e sabemos que $F \subset L^{\omega}$ portanto

$$F \subset L^{\omega} \cap F^{\omega} \quad . \tag{2.11}$$

Mas, como $F \subset L^{\omega}$ pela Proposição 2.3.1 itens *(i)* e *(iii)* temos que $L \subset F^{\omega}$ e temos por hipótese que L é isotrópico, assim obtemos

$$L \subset L^{\omega} \cap F^{\omega} \quad . \tag{2.12}$$

Temos das expressões (2.11) e (2.12) que

$$L + F \subset L^{\omega} \cap F^{\omega} = (L+F)^{\omega} \quad .$$

Portanto, temos que $L + F$ é isotrópico. A prova continua por indução até construir um subespaço Lagrangeano contendo L. □

Teorema 2.3.2. *Se $\omega \in \bigwedge^2 W^*$ for simplética então existe uma base de W,*

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_N, f^1, f^2, \ldots, f^N\} \quad ,$$

com dual

$$\{e^1, e^2, \ldots, e^N, f_1, f_2, \ldots, f_N\} \quad ,$$

tal que

$$\omega = e^i \wedge f_i \quad .$$

Neste caso, $L_1 = \langle e_1, e_2, \ldots, e_N \rangle$ e $L_2 = \langle f^1, f^2, \ldots, f^N \rangle$ são subespaços Lagrangeanos e

$$W = L_1 \oplus L_2 \quad .$$

Em particular, $\dim W = 2N$.

Demonstração. Primeiramente escolhemos vetores não nulos $e_1,\ f^1 \in W$, tais que $\omega(e_1, f^1) \neq 0$, o que é possível se $\omega \neq 0$. Multiplicando e_1 por um escalar podemos supor, sem perda de generalidade, que $\omega(e_1, f^1) = 1$.

Considere o plano S gerado por $\{e_1, f^1\}$ e seu ω-ortogonal S^ω

$$S^\omega = \{v \in W : \omega(v,u) = 0,\ \forall\ u \in S\} \quad .$$

Note que $S \cap S^\omega = \{0\}$. Por outro lado, $S + S^\omega = W$. De fato, se $v \in W$, então

$$v - \omega(v, f^1)e_1 + \omega(v, e_1)f^1 \ \in \ S^\omega \quad .$$

Portanto $S \oplus S^\omega = W$. Podemos então repetir o processo para S^ω indutivamente.

$\square$

Capítulo 3

Álgebra Multissimplética

Neste capítulo estendemos a noção de subespaço Lagrangeano para o de Multilagrangeano. Enquanto o primeiro está associado com 2-formas, o último é definido relativo a uma n-forma. Diferentemente do capítulo anterior, vamos trabalhar com sequências exatas de espaços vetoriais e precisamos de hipóteses novas como o de graus superiores de isotropia desses subespaços e grau de verticalidade da forma. Ao final provamos a decomposição do espaço vetorial W em dois subespaços, sendo um isotrópico e outro n-isotrópico.

3.1 Graus Superiores de Isotropia e Verticalidade

Sejam W espaço vetorial, $V \subset W$ um subespaço e a projeção canônica π de W sobre $T \cong W/V$. Obtemos a seguinte sequência exata de espaços vetoriais:

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow W \stackrel{\pi}{\longrightarrow} T \longrightarrow 0 \quad . \tag{3.1}$$

Neste trabalho vamos nos referir a W como o **espaço total**, V como o **espaço vertical** e T como o **espaço base**. Uma k-forma $\alpha \in \bigwedge^k W^*$ é dita ser no máximo s-**vertical** com relação a π, $0 \leq s \leq k-1$, se quando contraída com $s+1$ vetores verticais ela se anula, isto é, para todo $v_1,\ v_2\ \ldots,\ v_{s+1} \in V$

$$i_{v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_{s+1}} \alpha = 0 \quad . \tag{3.2}$$

Denotamos por $\bigwedge_s^k W^*$ o conjunto das k-formas em W^* no máximo s verticais. É fácil ver que $\bigwedge_s^k W^*$ é um subespaço de $\bigwedge^k W^*$.

No que se segue, denotamos ω por uma $(n+1)$-forma no máximo 2-vertical em W, i.e.,

$$\omega \in \bigwedge\nolimits_2^{n+1} W^* \quad , \quad \text{onde} \quad n = \dim T \quad . \tag{3.3}$$

Definição 3.1.1. *Seja L um subespaço de W e k um número inteiro satisfazendo $0 \leq k \leq n$. O k-**complemento ortogonal** de L em W com relação a ω é o subespaço de W dado por*

$$L^{\omega,k} = \{v \in W | i_{v\wedge v_1 \wedge \ldots \wedge v_k}\omega = 0 \ \ \text{para todo} \ \ v_1, v_2 \ldots, v_k \ \in \ L\} \tag{3.4}$$

No caso em que $k = 0$ temos $L^{\omega,0} = ker\omega$. O subespaço L é dito ser, relativamente a ω,

*(i) k-**isotrópico** quando $L \subset L^{\omega,k}$. Para $k = 1$ dizemos apenas **isotrópico**;*

*(ii) k-**maximal isotrópico** se L é k-isotrópico e não é um subespaço próprio de outro subespaço L' k-isotrópico, i.e.,*

$$L \subset L' \quad \Rightarrow \quad L = L'.$$

Definimos por **contração** com ω em W a aplicação linear

$$\begin{aligned} \omega_W^\flat : \ \ W \ &\longrightarrow \ \bigwedge\nolimits_2^n W^* \\ w \ &\longmapsto \ i_w\omega \ \ . \end{aligned}$$

Utilizando a restrição desta aplicação linear ao subespaço vertical V, obtemos

$$\begin{aligned} \omega_V^\flat : \ \ V \ &\longrightarrow \ \bigwedge\nolimits_1^n W^* \\ v \ &\longmapsto \ i_v\omega \ \ . \end{aligned}$$

Definimos o subespaço $\bigwedge^n L^\perp$ por

$$\bigwedge\nolimits^n L^\perp = \left\{\alpha \in \bigwedge\nolimits^n W^* / \ \forall \, v \in L \quad i_v\alpha = 0\right\} \quad .$$

Para qualquer subespaço L de V denotamos,

$$\bigwedge\nolimits_k^n L^\perp = \bigwedge\nolimits^n L^\perp \cap \bigwedge\nolimits_k^n W^* \quad .$$

Teorema 3.1.1. *A partir da definição acima, podemos concluir que:*

- *Todo subespaço L de W é isotrópico se, e somente se, vale a inclusão*

$$\omega_W^\flat(L) \subset \textstyle\bigwedge_2^n L^\perp \quad .$$

- *Em particular, o subespaço $L \subset V$ é isotrópico se, e somente se, vale*

$$\omega_V^\flat(L) \subset \textstyle\bigwedge_1^n L^\perp \quad .$$

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar que se $L \subset W$ é isotrópico então $\omega_W^\flat(L) \subset \bigwedge_2^n L^\perp$. De fato, pela definição de subespaço isotrópico, $L \subset L^\omega$, i.e., para todo $v_1 \in L$

$$v_2 \in L \quad i_{v_2}(i_{v_1}\omega) = i_{v_1 \wedge v_2}\omega = 0 \quad .$$

Dessa forma, podemos concluir que $i_{v_1}\omega \in \bigwedge_2^n L^\perp$ e portanto $\omega_W^\flat(L) \subset \bigwedge_2^n L^\perp$.

Reciprocamente se $\omega_W^\flat(L) \subset \bigwedge_2^n L^\perp$, temos

$$\forall v_1, v_2 \in L : \quad i_{v_1}\omega \in \textstyle\bigwedge_2^n L^\perp \quad \Rightarrow \quad i_{v_2}(i_{v_1}\omega) = 0 \quad ,$$

provando que $L \subset W$ é isotrópico.

Para o segundo item, basta observar que, como $L \subset V$, quando realizarmos a contração de ω com um vetor de V estamos diminuindo um grau de verticalidade, de tal forma que

$$\omega_V^\flat(L) \subset \textstyle\bigwedge_1^n L^\perp \quad .$$

□

3.2 A Forma Multissimplética canônica

Nesta seção analisaremos a forma multissimplética canônica, que é a referência fundamental deste capítulo. Na próxima seção iremos dar condições sobre certos subespaços maximais isotrópicos que garantam a existência de coordenadas canônicas, como as descritas abaixo.

Sejam F_0 espaço vetorial de dimensão $N + n$ e $E_0 \subset F_0$ subespaço de dimensão N. Denotando o espaço quociente F_0/E_0 por T, de modo que $\dim T = n$, e a projeção canônica de F_0 em T por π, obtemos a seguinte sequência exata de espaços vetoriais:

$$0 \longrightarrow E_0 \longrightarrow F_0 \xrightarrow{\pi} T \longrightarrow 0 \quad . \tag{3.5}$$

Definimos

$$W_0 = F_0 \oplus L_0 \qquad\qquad V_0 = E_0 \oplus L_0 \quad , \tag{3.6}$$

onde o subespaço L_0 é dado por $\bigwedge_1^n F_0^*$, ou seja, o espaço das n-formas no máximo 1 verticais em F_0^*. Obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow V_0 \longrightarrow W_0 \xrightarrow{\rho_0} T \longrightarrow 0 \quad , \tag{3.7}$$

onde $\rho_0(u + \alpha) = \pi(u)$ com $u \in F_0$ e $\alpha \in L_0$.

Definição 3.2.1. *Com W_0 e V_0 como definidos acima, a **forma Multissimplética canônica** é a $(n+1)$-forma em W_0 no máximo 2-vertical relativo a ρ_0 dada por*

$$\begin{aligned} \omega_0(v_0 + \alpha_0, \ \ldots, \ v_n + \alpha_n) \ &= \ \alpha_0(v_1, v_2, \ldots, v_n) - \alpha_1(v_0, v_2, \ldots, v_n) + \\ &\quad \ldots + (-1)^n \alpha_n(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}) \quad , \end{aligned}$$

ou, representada na forma de somatório,

$$\omega_0(v_0 + \alpha_0, \ \ldots, \ v_n + \alpha_n) \ = \ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \alpha_k(v_0, v_1, \ldots, \hat{v}_k \ldots, v_n) \quad ,$$

com $v_i \in F_0$ e $\alpha_i \in L_0$ para $i = 1, 2, 3, \ldots, \ n$.

Seja uma base de F_0 dada por $\{f_1, \ldots, \ f_N, t_0, \ldots, \ t_{n-1}\}$ com $\{f_1, \ldots, \ f_N\}$ e $\{t_0, \ldots, \ t_{n-1}\}$ bases de E_0 e T, respectivamente. Denotamos a base dual de F_0^* por $\left\{f^1, \ldots, \ f^N, t^0, \ldots, \ t^{n-1}\right\}$. Dessa forma, as n-formas

$$e_0 = t^0 \wedge t^1 \wedge t^2 \wedge \ldots \wedge t^{n-1} \quad \text{e} \quad e^i_\mu = f^i \wedge \hat{t}_\mu \quad ,$$

formam uma base de L_0, onde $\hat{t}_\mu$ é definido por

$$\begin{aligned}
\hat{t}_0 &= i_{t_0}\left(t^0\wedge\ldots\wedge t^{n-1}\right) = t^1\wedge\ldots\wedge t^{n-1}\\
\hat{t}_1 &= i_{t_1}\left(t^0\wedge\ldots\wedge t^{n-1}\right) = -t^0\wedge t^2\wedge\ldots\wedge t^{n-1}\\
&\vdots\\
\hat{t}_{n-1} &= i_{t_{n-1}}\left(t^0\wedge\ldots\wedge t^{n-1}\right) = (-1)^\mu t^0\wedge\ldots\wedge t^{n-2}.
\end{aligned}$$

Uma base para V_0 e sua respectiva base dual são dadas por

$$\begin{gathered}
\{f_1,\ldots,\ f_N\}\cup\left\{e_0,e^i_\mu\right\}\big|^{i=1,2,\ldots,N}_{\mu=0,1,2,\ldots,n-1}\\
\left\{f^1,\ldots,\ f^N\right\}\cup\left\{e^0,e^\mu_i\right\}\big|^{i=1,2,\ldots,N}_{\mu=0,1,2,\ldots,n-1}\quad .
\end{gathered}$$

Podemos denotar as bases de W_0 e W_0^* por

$$\begin{gathered}
\{f_1,\ldots,\ f_N,t_0,\ldots,\ t_{n-1}\}\cup\left\{e_0,e^i_\mu\right\}\big|^{i=1,2,\ldots,N}_{\mu=0,1,2,\ldots,n-1}\\
\left\{f^1,\ldots,\ f^N,t^0,\ldots,\ t^{n-1}\right\}\cup\left\{e_0,e^i_\mu\right\}\big|^{i=1,2,\ldots,N}_{\mu=0,1,2,\ldots,n-1}\quad .
\end{gathered}$$

Vamos analisar as componentes de ω_0 na base de W_0 acima. Primeiramente vamos analisar os elementos de L_0.

- Para e^i_μ observe que,

$$\begin{aligned}
i_{e^i_\mu}\omega_0(v_1+\alpha_1,\ldots,v_n+\alpha_n) &= \omega_0(e^i_\mu,v_1+\alpha_1,\ldots,v_n+\alpha_n)\\
&= e^i_\mu(v_1,\ldots,v_n)\\
&= f^i\wedge\hat{t}_\mu(v_1,\ldots,v_n)\quad .
\end{aligned}$$

O que implica que $i_{e^i_\mu}\omega_0 = f^i\wedge\hat{t}_\mu\in\bigwedge^n L_0^\perp$.

- Para e_0 temos,

$$\begin{aligned}
i_{e_0}\omega_0(v_1+\alpha_1,\ldots,v_n+\alpha_n) &= \omega_0(e_0,v_1+\alpha_1,\ldots,v_n+\alpha_n)\\
&= e_0(v_1,\ldots,v_n)\\
&= t^0\wedge\ldots\wedge t^{n-1}(v_1,\ldots,v_n)\quad .
\end{aligned}$$

Assim, temos que $i_{e_0}\omega_0 = t^0\wedge\ldots\wedge t^{n-1}\in\bigwedge^n L_0^\perp$. Portanto, L_0 é isotrópico.

Se contrairmos vetores de F_0 em ω_0 obtemos

- Para dois vetores f_1 *e* $f_2 \in E_0$ obtemos,

$$\begin{aligned}\omega_0(f_1, f_2,\ v_2+\alpha_2, \ldots,\ v_n+\alpha_n) &= 0(f_2, v_2, v_3, \ldots, v_n) - 0(f_1, v_2, v_3, \ldots, v_n) + \\ &+ \alpha_2(f_1, f_2, v_3, \ldots, v_n) - \alpha_3(f_1, f_2, v_2, \ldots, v_n) \\ &+ \ldots + (-1)^n \alpha_n(f_1, f_2, v_2, \ldots, v_{n-2})\end{aligned}$$

  Sabemos que $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n \in L_0 = \bigwedge_1^n F_0^*$, logo se contrairmos um dos α_i com dois vetores de E_0 teremos,

$$\begin{aligned}\alpha_2(f_1, f_2, v_3, \ldots, v_n) &= 0 \\ &\vdots \\ (-1)^n \alpha_n(f_1, f_2, v_2, v_3, \ldots, v_{n-2}) &= 0.\end{aligned}$$

  Isto implica que,

$$\omega_0(f_1, f_2,\ v_2+\alpha_2, \ldots,\ v_n+\alpha_n) = 0 \quad .$$

  Logo, temos que E_0 é isotrópico. Desta forma, como sabemos que $V_0 = E_0 \oplus L_0$, temos que V_0 é 2-isotrópico.

  Como T possui dimensão n, temos que T é n-isotrópico.

- Se contrairmos n-vetores de T e um vetor f_i de E_0 temos

$$\begin{aligned}\omega_0(f_i, t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) &= 0(t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) - 0(f_i, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) + \\ &+ \ldots + 0(-1)^n(f_i, t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{n-2}) \\ &= 0 \quad .\end{aligned}$$

  O que implica que o subespaço F_0 é n-isotrópico e $E_0 = V_0 \cap F_0$.

Assim, obtemos a forma multissimplética canônica dada por

$$\omega_0 = e_i^\mu \wedge f^i \wedge \hat{t}_\mu \ +\ e^0 \wedge t^0 \wedge t^1 \wedge t^2 \wedge \ldots \wedge t^{n-1} \quad . \tag{3.8}$$

3.3 Subespaços Multilagrangeano

Definição 3.3.1. *Sejam W, V e T espaços vetoriais como na sequência exata (3.1) com $\dim T = n$, e seja ω uma $(n+1)$-forma em W no máximo 2-vertical com relação a π. Dizemos que L subespaço de V é **multilagrangeano** se ocorre,*

$$\omega_V^\flat(L) = \bigwedge\nolimits_1^n L^\perp \quad . \tag{3.9}$$

*Se ω é não-degenerada, dizemos que ω é a **forma multissimplética**.*

Teorema 3.3.1. *Sejam W, V, T e ω não-degenerada como na definição acima. Dado um subespaço L de V, denotando $N = \dim(V/L)$, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- *$L \subset V$ é Multilagrangeano;*
- *$L \subset V$ é isotrópico e $\dim L = Nn + 1$.*

Demonstração. Temos por hipótese que $L \subset V$ é Multilagrangeano, ou seja, $\omega_V^\flat(L) = \bigwedge_1^n L^\perp$. Por outro lado, pelo Teorema 3.1.1, a inclusão $\omega_V^\flat(L) \subset \bigwedge_1^n L^\perp$ é válida se, e somente se, o subespaço L de V é isotrópico. Portanto, $L \subset V$ é isotrópico.
Para calcularmos $\dim L$, basta observar que $\omega_V^\flat$ é uma aplicação linear injetora, portanto leva base de um espaço vetorial em base do outro, dessa forma,

$$\dim L = \dim \omega_V^\flat(L) = \dim \bigwedge\nolimits_1^n L^\perp \quad .$$

Assim, podemos mostrar que $\dim \bigwedge_1^n L^\perp = Nn + 1$. Para isso, introduzimos uma base de W

$$\{e_0,\ ..., e_l, f_1,\ ..., f_N, t_0,\ ..., t_{n-1}\} \quad ,$$

na qual, $\{e_0,\ ..., e_l\}$ e $\{f_1,\ ..., f_N\}$ formam uma base para L e L', respectivamente, sendo que este último é complementar a L em V. Por último $\{t_0,\ ..., t_{n-1}\}$ forma uma base para T. Sua base dual é denotada por

$$\left\{e^0,\ ..., e^l, f^1,\ ..., f^N, t^0,\ ..., t^{n-1}\right\} \quad .$$

O Aniquilador $L^{\perp}$ de L é gerado pelos f^i's e t^{μ}'s com $i = 1, \ldots, N$ e $\mu = 0, \ldots, n-1$, onde este último gera uma base para $V^{\perp}$. Portanto, uma base para $\bigwedge_1^n L^{\perp}$ é dada por

$$\begin{cases} t^0 \wedge t^1 \wedge t^2 \wedge \ldots \wedge t^{n-1} \\ f^i \wedge \hat{t}_{\mu} \end{cases}$$

Logo, concluímos que $\dim \bigwedge_1^n L^{\perp} = nN + 1$.

Reciprocamente, se $L \subset V$ é isotrópico e $\dim L = Nn+1$, a partir do Teorema 3.1.1 temos que $\omega_V^{\flat}(L) \subset \bigwedge_1^n L^{\perp}$. Como visto anteriormente, $\omega_V^{\flat}(L)$ é uma aplicação linear injetora, então

$$Nn + 1 = \dim L = \dim \omega_V^{\flat}(L) \leq \dim \bigwedge_1^n L^{\perp} = Nn + 1 \quad .$$

Assim, $\omega_V^{\flat}(L) = \bigwedge_1^n L^{\perp}$, isto é, L é Multilagrangeano. □

Teorema 3.3.2. *Sejam V e T espaços vetoriais com $\dim T = n$ e ω uma $(n+1)$- forma em V no máximo 2-vertical relativo a π com subespaço Multilagrangeano L e $N = \dim(V/L)$. Então existe um subespaço isotrópico E de V complementar a L, i.e.,*

$$V = E \oplus L. \tag{3.10}$$

Demonstração. A demonstração deste teorema será realizada por indução. De fato, seja E_0 um subespaço de V de dimensão N' que é isotrópico e tal que $E_0 \cap L = \{0\}$, isto é possível, desde que $N \geq 1$. Se $N' = N$ temos que o teorema já está demonstrado. Caso contrário, definimos uma base $\{f_1, f_2, \ldots, f_N\}$ de um subespaço de V complementar a L tal que os N' primeiros vetores formam uma base de E_0. Denotamos uma base dual a esta em $L^{\perp}$ por $\left\{f^1, f^2, \ldots, f^N\right\}$. Provemos agora que existe um vetor $u \in V$ tal que $u \notin (E_0 \oplus L)$ e o subespaço E_1 gerado por u e E_0 é isotrópico. Como $E_1 \cap L = \{0\}$ e $\dim E_1 = N' + 1$, a afirmação do teorema seguirá por indução.

Considere uma base qualquer para T dada por $\{t_0, \ldots, t_{n-1}\}$ e sua única dual $\{t^0, \ldots, t^{n-1}\}$ em $V^{\perp}$. Uma base para $L^{\perp}$ é definida por $\left\{f^1, \ldots, f^N, t^0, \ldots, t^{n-1}\right\}$.

Sabemos por hipótese que L é multilagrangeano, i.e., $\omega_V^{\flat}(L) = \bigwedge_1^n L^{\perp}$, existe um vetor $e_{\mu}^i \in L$ tal que,

$$i_{e_{\mu}^i} \omega = f^i \wedge \hat{t}_{\mu} \quad .$$

Definamos $\widehat{\omega}^\mu \in \bigwedge^2 V^*$ por

$$\widehat{\omega}^\mu(v_1, v_2) = (-1)^\mu \omega(v_1,\ v_2, t_0,\ \ldots,\ \hat{t}_\mu, \ldots, t_{n-1}) \qquad \text{com } v_1, v_2 \in V,$$

isto é,

$$\begin{aligned} \widehat{\omega}^0(v_1, v_2) &= \omega(v_1\ , v_2\ , t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) \\ \widehat{\omega}^1(v_1, v_2) &= -\omega(v_1\ , v_2\ , t_0, t_2, \ldots, t_{n-1}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

O vetor

$$u = f_{N'+1} - \widehat{\omega}^\mu(f_{N'+1}, f_i)\ e^i_\mu$$

não pertence ao subespaço $E_0 \oplus L$ e

$$\widehat{\omega}^\mu(u, f_{N'}) = 0 \qquad \text{para } \mu = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n-1 \quad .$$

De fato, para $\mu = 0$ e f_1, temos

$$\begin{aligned} \widehat{\omega}^0(u, f_1) &= \widehat{\omega}^0(f_{N'+1} - \omega^\mu(f_{N'+1}, f_i)\ e^i_\mu, f_1) \\ &= \widehat{\omega}^0(f_{N'+1}, f_1) - \omega^\mu(f_{N'+1}, f_i)\ \widehat{\omega}^0(e^i_\mu, f_1) \quad . \end{aligned}$$

Mas se observarmos que

$$\widehat{\omega}^0(e^i_\mu, f_1) \quad = \quad \delta^i_1 \delta^0_\mu \quad ,$$

temos que

$$\begin{aligned} \widehat{\omega}^0(u, f_1) &= \widehat{\omega}^0(f_{N'+1}, f_1) - \omega^\mu(f_{N'+1}, f_i)\ \delta^i_1 \delta^0_\mu \\ &= \widehat{\omega}^0(f_{N'+1}, f_1) - \widehat{\omega}^0(f_{N'+1}, f_1) \\ &= 0 \quad . \end{aligned}$$

De maneira análoga, para todo $\mu = 0,\ 1, \ldots\ n-1$ e $i = 1, \ldots, N'$ temos que

$$\widehat{\omega}^\mu(u, f_i) = 0 \quad .$$

Se $i_{u \wedge f_i}\omega \neq 0$, então pelo menos uma das contrações $\omega(u, f_i, t_0, \ldots, \hat{t}_\mu, \ldots, t_n)$ seria não nula, já que ω é no máximo 2-vertical, o que contradiz o resultado acima. Logo, $i_{u \wedge f_i}\omega = 0$ para $i = 1, \ldots, N'$, implicando que $E_1 = E_0 \oplus \langle u \rangle$ é isotrópico. $\square$

Teorema 3.3.3. *Sejam W um espaço vetorial e $V \subset W$ como na sequência exata (4.5), com $\dim T = n$ e ω uma $(n+1)$-forma em W no máximo 2-vertical com respeito a π, com subespaço Multilagrangeano L de V. Então, existe um subespaço n-isotrópico F de W tal que $E = V \cap F$ e*

$$W = L \oplus F \qquad V = L \oplus E. \tag{3.11}$$

Demonstração. Primeiramente, existe um subespaço isotrópico E_0 complementar a L em V e denote $\dim E_0 = N$. Seja T um subespaço qualquer complementar a V em W. Definindo o subespaço F_0 por $F_0 = E \oplus T$, temos $\dim F_0 = N + n$, $F_0 \cap V = E$.
Queremos saber se F_0 é n-isotrópico, ou seja, se $\omega(v_0, v_1, \ldots, v_{n+1}) = 0$ para todo $v_0, \ldots, v_n \in F_0$. De fato, observe que $v \in F_0$ pode ser escrito como $v = f_0 + t_0$, onde $f_0 \in E$ e $t_0 \in T$ e assim obtemos:

- Se tomarmos dois vetores $f_i \in E$ temos,

  $$i_{f_1 \wedge f_2}\omega = 0 \quad ,$$

  pois E é 1-isotrópico.

- Se tomarmos vetores $t_\mu \in T$ temos,

  $$\omega(t_0, t_1, \ldots, t_n) = 0 \quad ,$$

  pois $\dim T = n$.

- Nos resta a opção de tomar n vetores em T e um vetor em E, i.e.,

  $$\omega(f_i, t_0, \ldots, \hat{t}_\mu, \ldots, t_{n-1}) \quad ,$$

  que pode ser diferente de zero.

Da hipótese de L ser multilagrangeano, existe $e_0 \in L$ com

$$i_{e_0}\omega = t^0 \wedge \ldots \wedge t^{n-1} \quad .$$

Defina $\beta \in W^*$ por

$$\beta(v) = \omega(v, t_0, \ldots, t_{n-1}) \quad .$$

Assim $\beta(e_0) = 1$.
Seja uma base de E_0 dada por $\left\{\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_N\right\}$. Construímos então um novo subespaço de V, denotado por E, que é gerado por

$$\begin{aligned} f_1 &= \tilde{f}_1 - \beta(\tilde{f}_1)e_0 \\ &\vdots \\ f_N &= \tilde{f}_N - \beta(\tilde{f}_N)e_0. \end{aligned}$$

De fato, $f_1, \ldots, f_N$ são linearmente independentes, pois

$$\begin{aligned} & \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_N f_N = 0 \\ \Rightarrow\ & \alpha_1(\tilde{f}_1 - \beta(\tilde{f}_1)e_0) + \ldots + \alpha_N(\tilde{f}_N - \beta(\tilde{f}_N)e_0) = 0 \\ \Rightarrow\ & \alpha_1\tilde{f}_1 + \ldots + \alpha_N\tilde{f}_N - (\alpha_1\beta(\tilde{f}_1) + \ldots + \alpha_N\beta(\tilde{f}_N))e_0 = 0 \\ \Rightarrow\ & \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_N = 0 \quad , \end{aligned}$$

já que $\left\{\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_N, e_0\right\}$ é L.I. E_0 é isotrópico pois

$$\begin{aligned} \omega(f_i, f_j, \ldots) &= \omega((\tilde{f}_i - \beta(\tilde{f}_i)e_0), (\tilde{f}_2 - \beta(\tilde{f}_2)e_0), \ldots) \\ &= \beta(\tilde{f}_i)i_{e_0}\omega(f_j, \ldots) - \beta(\tilde{f}_j)i_{e_0}\omega(f_i, \ldots) \\ &= 0 \quad , \end{aligned}$$

pois $i_{e_0}\omega \in \bigwedge^n V^\perp$ e $f_1 \in V$. Resta mostrar que $F = T \oplus E$ é n-isotrópico. Mas, isto segue imediatamente do fato

$$\begin{aligned} \omega(f_i, t_0, \ldots, t_{n-1}) &= \omega(\tilde{f}_i, t_0, \ldots, f_{n-1}) - \beta(\tilde{f}_i)\omega(e_0, t_0, \ldots, t_{n-1}) \\ &= \beta(\tilde{f}_i) - \beta(\tilde{f}_i) = 0. \end{aligned}$$

□

Tomando uma base para $F = E \oplus T$ segundo a decomposição do Teorema 3.3.3 $\{f_1, \ldots, f_N, t_0, \ldots, t_{n-1}\}$ existe a única dual $\{f^1, \ldots, f^N, t^0, \ldots, t^{n-1}\}$ em $L^\perp$. Como L é um subespaço multilagrangeano,

$$\omega^\flat(L) = \bigwedge\nolimits_1^n L^\perp \quad .$$

Denotando os elementos de L da forma e^0 e e^i_μ com

$$\omega^\flat(e_0) = i_{e_0}\omega = t^0\wedge\ldots\wedge t^{n-1} \quad .$$

$$\omega^\flat(e^i_\mu) = i_{e^i_\mu}\omega = f^i\wedge\hat{t}_\mu \quad ,$$

formamos uma base $\{e^0, e^i_\mu\}$ de L. Tomando então a base

$$\left\{e_0, e^i_\mu, f_j, t_\nu|^{j,i=1,\ldots,N}_{\mu,\nu=0,\ldots,n-1}\right\} \quad ,$$

com sua dual

$$\left\{e^0, e^\mu_i, f^j, t^\nu|^{j,i=1,\ldots,N}_{\mu,\nu=0,\ldots,n-1}\right\} \quad ,$$

temos que

$$\begin{aligned} \omega(e^i_\mu, f_j, \hat{t}^\nu) &= (i_{e^i_\mu}\omega)(f_j, \hat{t}^\nu) \\ &= (f^i\wedge\hat{t}_\mu)(f_j, \hat{t}^\nu) \\ &= \delta^i_j\delta^\nu_\mu. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \omega(e_0, t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}) &= (i_{e_0}\omega)(t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}) \\ &= (t^0\wedge t^1\wedge\ldots\wedge t^{n-1})(t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Como F é n-isotrópico e L isotrópico, qualquer outra combinação de ω contraída com os elementos da base é nula. Portanto, toda forma multissimplética pode ser representada na sua forma canônica dada por

$$\omega = e^\mu_i \wedge f^i \wedge \hat{t}_\mu + e^0 \wedge t^0\wedge t^1\wedge t^2\wedge\ldots\wedge t^{n-1} \quad . \tag{3.12}$$

Capítulo 4

Subespaços Maximais Isotrópicos e Decomponíveis

Neste capítulo estendemos a noção de subespaço multilagrangeano enfraquecendo a hipótese da dimensão sobre L. Dessa forma, necessitamos de definições como a de comprimento de uma n-forma e de subespaços decomponíveis. Ao final, mostraremos algumas aplicações desta decomposição com exemplos.

4.1 Formas Decomponíveis

Sejam E espaço vetorial com $\dim E = d$ e $\alpha \in \bigwedge^k E^*$. Escolha uma base $B = \{e_1, \ldots, e_d\}$ de E e $B^* = \{e^1, \ldots, e^d\}$ de E^*. Temos que o subespaço $\bigwedge^k E^*$ possui dimensão $\dim \bigwedge^k E^* = \frac{d!}{(k)!(d-k)!}$ que representa o número de combinações que podemos obter com os n elementos de E. Nestas coordenadas

$$\alpha = \frac{1}{k!}\, \alpha_{i_1 \ldots i_k}\, e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k} \quad , \tag{4.1}$$

onde $\alpha_{i_1 \ldots i_k} = \alpha(e_1, \ldots, e_k)$, ou simplesmente

$$\alpha = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \alpha_{i_1 \ldots i_k}\, e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k} \quad . \tag{4.2}$$

Definimos $\ell_{B^*}(\alpha)$ como o comprimento de α com respeito à base B^*, i.e.,

$$\ell_{B^*}(\alpha) = \#\ \{\alpha_{i_1 \ldots i_k} \ \mid \alpha_{i_1 \ldots i_k} \neq 0 \text{ e } 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq d\} \quad . \tag{4.3}$$

Note que $\ell_{B^*}(\alpha)$ é um inteiro não negativo e $\ell_{B^*}(\alpha) = 0$ se, e somente se, $\alpha = 0$. Definimos o **comprimento** de α como o mínimo dos comprimentos relativos entre todas as bases possíveis, ou seja,

$$\ell(\alpha) = \min_{B} \ \ell_{B^*}(\alpha) \quad . \tag{4.4}$$

Dizemos que α é **decomponível** se $\ell(\alpha) = 1$ (veja ref. [5]).

Exemplo 4.1.1. *Sejam E um espaço vetorial com $\dim E = 3$ e $\alpha \in \bigwedge^2 E^*$. Consideremos as seguintes bases de E^*:*

$$B_1^* = \{e^1, e^2, e^3\} \quad e \quad B_2^* = \{\widetilde{e}^{\,1}, \widetilde{e}^{\,2}, \widetilde{e}^{\,3}\} \quad ,$$

onde, $\widetilde{e}^{\,1} = e^1$, $\widetilde{e}^{\,2} = e^2$ e $\widetilde{e}^{\,3} = e^1 - e^3$.

Defina α por

$$\alpha = e^1 \wedge e^2 + e^2 \wedge e^3 \quad .$$

Portanto, $\ell_{B_1^*}(\alpha) = 2$.

Relativo à base B_2^*:

$$\begin{aligned} \alpha &= e^1 \wedge e^2 + e^2 \wedge e^3 \\ &= e^1 \wedge e^2 - e^3 \wedge e^2 \\ &= (e^1 - e^3) \wedge e^2 \\ &= \widetilde{e}^{\,3} \wedge \widetilde{e}^{\,2} \end{aligned}$$

Logo, $\ell_{B_2^*}(\alpha) = 1$. Dessa forma, $\ell(\alpha) = 1$ e α é decomponível.

Exemplo 4.1.2. *Considere a forma simplética em E, $\dim E = 4$,*

$$\alpha = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4 \quad .$$

Temos que $\ell_{B^*}(\alpha) = 2$, onde $B^* = \{e^1, \ldots, e^4\}$. Se α fosse decomponível, existiria um vetor $v \in E$ com $i_v\alpha = 0$. Portanto, α seria degenerada, contradizendo a hipótese. Logo, $\ell(\alpha) = 2$.

Exemplo 4.1.3. *Toda n-forma em um espaço de dimensão n é decomponível.*

Definição 4.1.1. *Seja $\alpha \in \bigwedge^k E^*$. Dizemos que um vetor $v \in E$ é α-**decomponível** se $i_v\alpha$ é decomponível. Um subespaço $L \subset E$ é α-**decomponível** se existir base $\{e_1, \ldots, e_l\}$ de L de elementos α-decomponíveis.*

Proposição 4.1.1. *Sejam $\beta \in \bigwedge^k E^*$ com $\beta \neq 0$ e $\ker\beta = \{v \in E / i_v\beta = 0\}$. Temos $\beta \in \bigwedge^k (\ker\beta)^{\perp}$.*

Demonstração. Considere a base de E dada por $\{e_1, e_2, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_n\}$ tal que $\{e_1, \ldots, e_m\}$ forma uma base de $\ker\beta$ e seja a base dual de E^* por $\{e^1, \ldots, e^m, f^1, \ldots, f^n\}$ com $\{f^1, \ldots, f^n\}$ base de $(\ker\beta)^{\perp}$.
Para $m = 1$ temos que

$$\beta = \sum_{i_1<\ldots<i_k} \beta_{i_1\ldots i_k}\, f^{i_1} \wedge \ldots \wedge f^{i_k} + \sum_{j_1<\ldots<j_{k-1}} \widetilde{\beta}^1_{j_1\ldots j_{k-1}}\, e^1 \wedge f^{j_1} \wedge \ldots \wedge f^{j_{k-1}} \quad .$$

Contraindo $e_1 \in E$ com β, sabemos que $i_{e_1}\beta = 0$. Assim

$$0 = i_{e_1}\beta \;=\; \sum_{j_1<\ldots<j_{k-1}} \widetilde{\beta}^1_{j_1\ldots j_{k-1}} f^{j_1} \wedge \ldots \wedge f^{j_{k-1}} \quad ,$$

o que implica que $\widetilde{\beta}_I = 0$. Logo,

$$\beta = \sum_{i_1<i_2,\ldots,<i_k} \beta_{i_1\ldots i_k}\, f^{i_1} \wedge \ldots \wedge f^{i_k} \quad .$$

Agora para $m = 2$

$$\begin{aligned} \beta \;&=\; \sum_{i_1<\ldots<i_k} \beta_{i_1\ldots i_k}\, f^{i_1} \wedge \ldots \wedge f^{i_k} + \sum_{i_1<\ldots<i_{k-1}} \left(\widetilde{\beta}^1_{i_1\ldots i_{k-1}}\, e^1 + \widetilde{\beta}^2_{i_1\ldots i_{k-1}} e^2\right) \wedge f^{i_1} \wedge \ldots \wedge f^{i_{k-1}} \\ &+ \sum_{i_1<\ldots<i_{k-2}} \widetilde{\beta}^{12}_{i_1\ldots i_{k-2}}\, e^1 \wedge e^2 \wedge f^{i_1} \wedge \ldots \wedge f^{i_{k-2}} \quad . \end{aligned}$$

Contraindo um vetor v qualquer de E com β obtemos $i_v\beta = 0$, o que, de forma análoga ao caso $m = 1$, nos leva à conclusão

$$\widetilde{\beta}^1_{i_1\ldots i_{k-1}} = \widetilde{\beta}^2_{i_1\ldots i_{k-1}} = \widetilde{\beta}^{12}_{i_1\ldots i_{k-2}} = 0 \quad .$$

Dessa forma obtemos que

$$\beta = \sum_{i_1<i_2,\ldots,<i_k} \beta_{i_1\ldots i_k}\, f^{i_1} \wedge \ldots \wedge f^{i_k} \quad .$$

De maneira análoga o teorema segue para m qualquer. Portanto, $\beta \in \bigwedge^k (\ker\beta)^{\perp}$. $\square$

Corolário 4.1.1. *Seja* $\beta \in \bigwedge^k E^*$ *com* $\beta \neq 0$*. Temos que* $\dim(\ker \beta) = \dim E - k$ *se, e somente se,* β *é decomponível.*

Demonstração. Tomemos uma base qualquer de E dada por $\{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_k\}$ onde $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ é uma base de $\ker \beta$. Pela Proposição 4.1.1 temos que $\beta \in \bigwedge^k (\ker \beta)^\perp$, assim temos uma k-forma em um subespaço de $\dim = k$. Portanto, β é decomponível.
Por outro lado, se β é decomponível, ou seja, $\ell(\beta) = 1$, pela Proposição 4.1.1 temos que $\beta \in \bigwedge^k (\ker \beta)^\perp$, i.e., $\beta = f^1 \wedge f^2 \wedge \ldots \wedge f^k$. Escolhendo uma base de E^* tal que $\{e^1, e^2, \ldots, e^{n-k}, f^1, f^2, \ldots, f^k\}$ e assim, sua base dual de E $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-k}, f_1, f^2, \ldots, f^k\}$, temos que $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-k}\}$ formam uma base de $(\ker \beta)$. Portanto, $\dim E = \dim(\ker \beta) + k$. □

Exemplo 4.1.4. *Se* $\beta \in \bigwedge^{k-1} E^*$ *com* $\beta \neq 0$ *e* $\dim E = k$*, então* β *é decomponível.*

Demonstração. Pelo Corolário 4.1.1, basta mostrar que $\dim \ker \beta = 1$ para $\beta \neq 0$.
De fato, seja $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ base de E e sua respectiva base dual $\{e^1, e^2, \ldots, e^n\}$. Definimos $\Omega_0 = e^1 \wedge e^2 \wedge \ldots \wedge e^n$ uma n-forma em E e utilizamos a aplicação injetora:

$$\Omega_0^\flat : E \to \bigwedge^{n-1} E^* \quad .$$

Assim temos que para cada $v \in E$

$$\begin{aligned} \Omega_0^\flat &= i_v \Omega_0 \\ &= v^1 e^2 \wedge e^3 \wedge \ldots \wedge e^n - v^2 e^1 \wedge e^3 \wedge \ldots \wedge e^n \\ &+ \ldots (-1)^{n-1} v^n e^1 \wedge e^2 \wedge \ldots \wedge e^{n-1} \quad . \end{aligned}$$

Sabendo que $\dim \bigwedge^n E^* = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, temos $k = \dim \bigwedge^{k-1} E^* \quad .$

Portanto, $\Omega_0^\flat$ é um isomorfismo. Dessa forma, dado $0 \neq \beta \in \bigwedge^{n-1} E^*$ existe $v \in E$ com $\beta = i_v \Omega_0$, provando que $\dim(\ker \beta) = 1$, pois $0 \neq v \in \ker \beta$. □

4.2 Subespaços Maximais Isotrópicos Decomponíveis

Sejam W espaço vetorial, $V \subset W$ um subespaço e a projeção canônica π de W sobre $T \cong W/V$. Obtemos a seguinte sequência exata de espaços vetoriais:

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow W \xrightarrow{\pi} T \longrightarrow 0 \quad . \tag{4.5}$$

Relembrado algumas definições como subespaço maximal isotrópico (3.1.1) e ω-decomponível (4.1.1), temos o seguinte resultado.

Teorema 4.2.1. *Sejam L e V subespaços de W tal que $L \subset V$ é maximal isotrópico e decomponível e V é 2-isotrópico em relação a $(n+1)$-forma ω em W, então existe $F \subset W$ n-isotrópico com $(F \cap V)$ e*

$$W = L \oplus F \qquad V = L \oplus (F \cap V) \quad . \tag{4.6}$$

Demonstração. Suponha ω não-degenerada. Demonstraremos este teorema por indução em $m = \dim L$.

Primeiramente para $m = 1$ obtemos:
Seja $L = \langle v_0 \rangle$. Por hipótese $i_{v_0}\omega$ é decomponível. Dessa forma, existem $u^1, \ldots, u^n \in W^*$ tais que,

$$i_{v_0}\omega = u^1 \wedge \ldots \wedge u^n \quad .$$

Definamos a $(n+1)$-forma ω_1 por

$$\omega_1 = \omega - \alpha_0 \wedge u^1 \wedge \ldots \wedge u^n \quad .$$

Tomemos $\alpha_0 \in W^*$ tal que $\langle \alpha_0, v_0 \rangle = 1$. Como $\langle u^i, v_0 \rangle = 0$, caso contrário $i_{v_0}(i_{v_0}\omega) \neq 0$, temos que $i_{v_0}\omega_1 = 0$. Seja $0 \neq v_1 \in \ker(\alpha \wedge u^1 \wedge \ldots, \wedge u^n)$, então

$$i_{v_1 \wedge v_0}\omega = i_{v_1}(i_{v_0}\omega) = i_{v_1}(u^1 \wedge \ldots \wedge u^n) = 0 \quad .$$

Assim, obtemos o subespaço isotrópico $\widetilde{L}$ gerado por $\langle v_0, v_1 \rangle$ com $L \subset \widetilde{L}$ chegando em um absurdo, pois L é maximal isotrópico. Desta forma, $v_1 = 0$ e

$$\omega = \alpha_0 \wedge u^1 \wedge \ldots \wedge u^n \quad .$$

Pelo fato de V ser 2-isotrópico, o teorema segue imediatamente para $\dim L = 1$.

Assumimos que o teorema vale para $\dim L = m$ e provamos para $\dim L = m+1$. Seja $\{v_0, v_1, \ldots, v_m\}$ base decomponível de L. Existem $u^1, \ldots, u^n \in L^\perp$ com

$$i_{v_0}\omega = u^1 \wedge \ldots \wedge u^n \quad .$$

Seja $\alpha_0 \in W^*$ tal que $\langle \alpha_0, v_i \rangle = \delta_{0i}$ para $i = 0, \ldots, m$. Definimos $L_1 = L \cap \ker \alpha_0$ e

$$\omega_1 = \omega - \alpha_0 \wedge u^1 \wedge \ldots \wedge u^n \quad .$$

Notemos que $v_0 \in \ker \omega_1$ pois

$$\begin{aligned} i_{v_0}\omega_1 &= i_{v_0}(\omega - \alpha_0 \wedge u^1 \wedge \ldots \wedge u^n) \\ &= i_{v_0}(\omega) - i_{v_0}(\alpha_0 \wedge u^1 \wedge \ldots \wedge u^n) \\ &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Como provaremos a seguir, existe subespaço $\langle u_1, \ldots, u_n \rangle \subset \ker \alpha_0$ com as seguintes propriedades:

(i) $\ker \omega_1 = \langle u_1, \ldots, u_s \rangle \oplus \langle v_0 \rangle$;

(ii) $\langle u^i, u_1 \rangle = \delta^i_1, \ldots, \langle u^i, u_s \rangle = \delta^i_s$, $i = 1, \ldots, n$;

(iii) Se $n \neq s$ então, $i_{u_{s+1} \wedge \ldots \wedge u_n}\omega_1 \notin \bigwedge^n L^\perp$;

Definimos $W_1 = \ker(\alpha_0 \wedge u^1 \wedge \ldots \wedge u^s)$ e $V_1 = V \cap \ker(\alpha_0 \wedge u^1 \wedge \ldots \wedge u^s)$. Tomemos $u_{s+1} \in W$ com $\langle u^i, u_{s+1} \rangle = \delta^1_{s+1}$ e

$$i_{u_{s+1}}\omega_1 \notin \bigwedge^n L^\perp \quad .$$

Este sempre existe, pois se $i_{u_{s+1}}\omega_1 \in \bigwedge^n L^\perp$ então existe $\widetilde{u} \in \ker(\alpha_0 \wedge \ldots \wedge u^n)$ e $v \in L_1$ com $i_{v \wedge \widetilde{u}}\omega = i_{v \wedge \widetilde{u}}\omega_1 \neq 0$, pois senão $L \oplus \langle \widetilde{u} \rangle$ seria isotrópico relativo a ω, o que é absurdo. Neste caso, tomando $\widetilde{u}_{s+1} = u_{s+1} + \widetilde{u}$, temos

$$i_{\widetilde{u}_{s+1}}\omega_1 \notin \bigwedge^n L^\perp \quad \text{e} \quad \langle u^i, \widetilde{u}_{s+1} \rangle = \delta^1_{s+1} \quad i = 1, \ldots, n \quad .$$

Se $s + 1 = n$, definimos $H_1 = \langle u_{s+1} \rangle$. Caso contrário, tome $u_{s+2} \in W$ tal que

$$i_{u_{s+1} \wedge u_{s+2}}\omega_1 \notin \bigwedge^n L^\perp \quad .$$

Este sempre existe, pois como $i_{u_{s+1}}\omega_1 \notin \bigwedge^n L^\perp$ existe $v \in L$ com $i_{u_{s+1} \wedge v}\omega_1 \neq 0$. Assim, para $\widetilde{u} \in \ker(\alpha_0 \wedge \ldots \wedge u^n)$ com $i_{u_{s+1} \wedge \widetilde{u}}\omega_1 \notin \bigwedge^n L^\perp$ temos para $\widetilde{u}_{n+2} = u_{n+2} + \widetilde{u}$

$$i_{u_{s+1} \wedge \widetilde{u}_{s+2}}\omega_1 = i_{u_{s+1} \wedge \widetilde{u}}\omega_1 + i_{u_{s+1} \wedge u_{s+2}}\omega_1 \notin \bigwedge^n L^\perp \quad .$$

De forma análoga, construímos o subespaço $H_1 = \langle u_{s+1}, \ldots, u_n \rangle$ com

$$i_{u_{s+1}\wedge \ldots \wedge u_n}\omega_1 \notin \bigwedge^{s+1} L^{\perp} \quad .$$

Suponha $0 \neq u \in H_1$ tal que $i_u\omega_1 \in \bigwedge^n L^{\perp}$. Sem perda de generalidade, $u = u_{s+1} + a^{s+2}u_{s+2} + \ldots + a^n u_n$. Assim, $i_{u\wedge u_{s+2}\wedge \ldots \wedge u_n}\omega_1 = i_{u_{s+1}\wedge \ldots \wedge u_n}\omega_1 \in \bigwedge^{s+1} L^{\perp}$, o que é um absurdo. Portanto, $i_u\omega_1 \notin \bigwedge^n L^{\perp}$. Como $v_0 \in \ker \omega_1$ então existe v_i tal que $i_{v_i \wedge u}\omega_1 \neq 0$, o que nos leva a concluir

$$u \in H_1 \quad \text{e} \quad u \neq 0 \quad \Rightarrow \quad i_u\omega_1 \notin \bigwedge^n L_1^{\perp} \quad .$$

Assim,

$$W_1 = \ker(\alpha_0 \wedge \ldots \wedge u^n) \oplus H_1 \quad .$$

Se $v \in W_1$, mas $v \notin L_1$, então

$$i_{v\wedge v_i}\omega_1 \neq 0$$

para algum $i = 1, \ldots, m$, pois tomando $v = \widetilde{v} + u$ com $\widetilde{v} \in \ker(\alpha_0 \wedge \ldots \wedge u^n)$ e $u \in H_1$:

- Se $\widetilde{v} = 0$ então $v \in H_1$ e por construção, $i_v\omega_1 \notin \bigwedge^n L^{\perp}$;

- Se $\widetilde{v} \neq 0$, existe v_i, $1 \leq i \leq m$, com $i_{\widetilde{v}\wedge v_i}\omega_1 = i_{\widetilde{v}\wedge v_i}\omega \neq 0$, pois L é ω-maximal isotrópico. Como $i_{v_i}\omega$ é decomponível, tomemos $i_{v_i}\omega = \widetilde{u}^1 \wedge \ldots \wedge \widetilde{u}^n$. Temos que se $i_u(\widetilde{u}^1 \wedge \ldots \wedge \widetilde{u}^n) = 0$, a afirmação está demonstrada. Caso contrário

  $$i_{\widetilde{v}}(\widetilde{u}^1 \wedge \ldots \wedge \widetilde{u}^n) \quad \text{e} \quad i_u(\widetilde{u}^1 \wedge \ldots \wedge \widetilde{u}^n)$$

  são L.I., já que $\widetilde{v}$ e u o são. Logo, $i_{v\wedge v_i}\omega_1 \neq 0$.

Logo, pela propriedade acima, L_1 é ω_1-maximal isotrópico e ω_1-decomponível em W_1. Além disso, $V_1 \subset W_1$ é 2-isotrópico relativo a ω_1. Como $\dim L_1 = m$, por hipótese de indução, existe F_1 n-isotrópico relativo a ω_1 com

$$W_1 = L_1 \oplus F_1 \qquad V_1 = L_1 \oplus (F_1 \cap V_1) \quad .$$

Tomando $F = F_1 \oplus \langle u_1, \ldots, u_s \rangle$ temos que F é n-isotrópico relativo a ω em W, já que

$$\omega(f_1, \ldots, f_n, u_i) = \omega_1(f_1, \ldots, f_n, u_i) = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, s \quad .$$

Como

$$\begin{aligned} W &= \langle v_0 \rangle \oplus L_0 \oplus \langle u_1, \ldots, u_s \rangle \oplus F_1 \\ &= L \oplus F \quad , \end{aligned}$$

basta mostrar que

$$(F_1 \cap V_1) \oplus L_1 = V_1 \Rightarrow (F \cap V) \oplus L = V \quad .$$

Mas, de fato, sem perda de generalidade, se $v \in V$ é tal que $i_{v_0 \wedge v}\omega \neq 0$, podemos considerar que ou $v \in \ker(u^1 \wedge \ldots \wedge u^s \wedge \alpha_0)$ ou $v = u_1$. Na primeira hipótese, $V_1 = V$. Já na segunda, $V = V_1 \oplus \langle u_1 \rangle$. Em ambos os casos, $(F \cap V) \oplus L = V$. Com isso, concluímos a demonstração do teorema. □

4.3 Exemplos

Nesta seção veremos alguns exemplos com o objetivo de verificar, a partir da decomposição do Teorema 4.2.1, a existência de possíveis "bases canônicas". Para tanto, sejam os seguintes subespaços vetoriais: $L \subset V$ e $E = F \cap V$ isotrópicos com $\dim E = N$, T com $\dim T = n$, $F = E \oplus T$ n-isotrópico, todos relativo à $(n+1)$-forma ω em W. Recordando do capítulo anterior, na forma multissimplética o subespaço L possui uma dimensão maximal dada por $\dim L = nN + 1$, dessa forma

$$1 \leq \dim L \leq nN + 1 \quad . \tag{4.7}$$

Temos duas possibilidades para L: ou existe $v \in L$ com $i_v\omega \in \bigwedge^n V^\perp = \bigwedge_0^n W^*$ ou não. No caso desta propriedade ser verdadeira, dada uma forma de volume qualquer $\Omega_0 \in T$ existe $v_0 \in L$ com $i_{v_0}\omega = \Omega_0$. Como visto anteriormente, podemos tomar uma base decomponível de L da forma $\{v_0, \ldots, v_m\}$. Tomando $v^0 \in (\langle v_1, \ldots, v_m \rangle \oplus F)^\perp$ com $\langle v^0, v_0 \rangle = 1$, definimos

$$\omega_1 = \omega - v^0 \wedge \Omega_0 \quad . \tag{4.8}$$

De forma análoga como foi visto na demonstração do Teorema 4.2.1, podemos ver que $L_1 = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ é maximal isotrópico e decomponível relativo à ω_1 em um subespaço W_1 de W, onde ω_1 é não degenerada. Portanto, completando a base de L com uma

$\{f_1, \ldots, f_N\}$ de E e $\{t_0, \ldots, t_{n-1}\}$ de T, temos sua única dual em W^* $\{v^0, \ldots, v^m, f^1, \ldots, f^N, t^0, \ldots, t^{n-1}$
Logo, ω fica como na equação (4.8) com $\Omega_0 = t^0 \wedge \ \ldots \ \wedge t^{n-1}$ e

$$\omega_1 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{N} \sum_{\mu=0}^{n-1} a_{ij}^{\mu}\, v^i \wedge f^j \wedge \widehat{t_\mu} \quad , \tag{4.9}$$

com a_{ij}^{μ} constante e $\widehat{t_\mu}$ uma $(n-1)$-forma em T como já definida anteriormente.

Exemplo 4.3.1. *Para $N = 0$, pela equação (4.7) temos que $\dim L = 1$. Tomemos uma base de T dada por $\{t_0, \ldots, t_{n-1}\}$ e sua única dual em $L^\perp$ dada por $\{t^0, \ldots, t^{n-1}\}$. Assim, existe $e \in L$ e $e^* \in W^*$ tal que $\langle e^*, e\rangle = 1$ com $i_e\omega = t^0 \wedge \ldots \wedge t^{n-1}$, pois $L = V$ é isotrópico por hipótese. Portanto sua representação em coordenadas é dada por*

$$\omega = e^* \wedge t^0 \wedge \ldots \wedge t^{n-1} \quad .$$

Neste caso, temos que $L \subset V$ ser maximal isotrópico é o mesmo que maximal isotrópico e decomponível.

Com o objetivo de facilitar o entendimento para os casos $N \geq 1$, sem perda de generalidade, vamos assumir que não existe $v \in L$ com $i_v\omega \in \bigwedge^n V^\perp = \bigwedge_0^n W^*$, ou seja, tomaremos

$$\omega = \omega_1 \quad . \tag{4.10}$$

Com isto, fica claro que $\dim L \leq nN$ ao invés de $\dim L \leq nN + 1$. Por outro lado, esta hipótese também é incompatível com $\dim L = 1$, uma vez que isto implicaria na existência de $0 \neq t \in T$ tal que $i_t\omega = 0$, já que para $v \in L$ e $e \in E$ $i_{v\wedge e}\omega \in \bigwedge^{n-1} T^*$, que por sua vez tem o núcleo unidimensional em T. Assim,

$$\omega = \omega_1 \quad \Rightarrow \quad 2 \leq m = \dim L \leq nN \quad . \tag{4.11}$$

Exemplo 4.3.2. *No caso $N = 1$ temos $2 \leq m \leq n$. Tomando uma base qualquer $\{e_1, \ldots, e_m\}$ em L e $0 \neq f_1 \in E$ temos*

$$\alpha_i = i_{e_i \wedge f_1}\omega \in \bigwedge^{n-1} T^* \quad , T^* = V^\perp \quad . \tag{4.12}$$

Claramente os α_i's são L.I.. Assim, dado $\Omega_0 \in \bigwedge^n T^*$, existem $t_1, \ldots, t_m \in T$ também L.I. tais que

$$i_{t_i}\Omega_0 = (-1)^i \alpha_i \quad . \tag{4.13}$$

Portanto, podemos completar uma base de T da forma $\{t_1, \ldots, t_m, \ldots, t_n\}$ e tomar a dual $\{e^1, \ldots, e^m, f^1, t^1, \ldots, t^n\}$ com $\Omega_0 = t^1 \wedge \ldots \wedge t^n$, $\alpha_i = (-1)^i i_{t_i}\Omega_0 = \widehat{t_i}$ e

$$\omega = \sum_{i=1}^{m} e^i \wedge f^1 \wedge \widehat{t_i} \quad . \tag{4.14}$$

Observação 4.3.1. *Como vimos acima, no caso $N = 1$ temos que $L \subset V$ ser maximal isotrópico é o mesmo que ser maximal isotrópico e decomponível.*

O exemplo acima caracteriza bem a ideia inicial quando definimos o conceito de subespaço maximal isotrópico e decomponível, que é enfraquecer a hipótese de dimensão exigida para os multilagrangeanos e ao mesmo tempo ser suficientemente forte para escrevermos a forma ω como uma soma parcial dos termos da forma multissimplética canônica, i.e.,

$$\omega = \sum_{(\mu,i)\in I} e^{\mu}_i \wedge f^i \wedge \widehat{t_\mu} \quad ,$$

com I um subconjunto apropriado de $\{(\mu, i)| \quad 0 \leq \mu \leq n-1 \quad , \quad 1 \leq i \leq N\}$. Porém, para o caso $N \geq 2$ ainda não sabemos se isto é de fato um teorema ou não.

Referências Bibliográficas

[1] H. Weyl, *Geodesic Fields in the Calculus of Variations for Multiple Integrals*, Ann. Math., **36** (1935), 607–629.

[2] L. G. Gomes, *Some maximal isotropic distributions and their relation to field theory*, arXiv:0909.0929v1 [math.DG].

[3] M. Forger, L. G. Gomes, *Muntisymplectic and Polysymplectic Structures on Fiber Bundles*, Reviews in Mathematical Physics, **25** (2013).
DOI: 10.1142/S0129055X13500189

[4] M. J. Gotay, J. Isenberg, J. E. Marsden, *Momentum Maps and Classical Relativistic Fields. Part I: Covariant Field Theory*, preprint physics/9801019.

[5] M. Marcus: *Finite Dimensional multilinear Algebra, part II*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. , Marcel Dekker (1975).

[6] Th. De Donder, *Théorie Invariante du Calcul des Variations*, Gauthier–Villars, Paris, (1935).