

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA ELÉTRICA**

Transformada Óptica para Obtenção de  
Mapeamento Quase-Conforme em Mantos de  
Invisibilidade Tridimensionais

**Daniely Gomes Silva**

**Itajubá, Dezembro de 2019**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA ELÉTRICA

Daniely Gomes Silva

Transformada Óptica para Obtenção de  
Mapeamento Quase-Conforme em Mantos de  
Invisibilidade Tridimensionais

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação  
em Engenharia Elétrica como parte dos requisitos  
para obtenção do Título de Doutora em Engenharia  
Elétrica.

Área de Concentração: Microeletrônica

Orientador: Dr. Danilo Henrique Spadoti

Co-orientador: Dr. Mateus A. F. C. Junqueira

Dezembro de 2019

Itajubá

# Agradecimentos

A Deus, por todas as bênçãos, graças e possibilidade de realização deste trabalho, apesar de todos os obstáculos vividos nos últimos anos.

À minha doce filha Beatriz que me acompanhou nesta etapa final do doutorado e que tem me inspirado e motivado a finalizar este trabalho.

Ao meu esposo Henry, pela paciência, amor, companheirismo, ajuda e que sempre estive ao meu lado durante toda esta caminhada.

Aos meus pais, Luís e Vera, ao meu irmão André e à minha cunhada Cristiane que sempre me motivaram e por todo o amor, atenção, compreensão e ensinamentos. A todos os meus familiares pelo incentivo e palavras de conforto.

Aos Professores Danilo H. Spadoti e Mateus A. F. C. Junqueira pela atenção, dedicação e valiosa orientação.

Ao Professor Lucas H. Gabrielli pelo apoio na publicação dos artigos.

Ao Professor José A. J. Ribeiro pela amizade e conselhos na realização deste trabalho.

Aos amigos e colegas do Labtel e Grupo de Microeletrônica da Unifei pelos momentos de distração e apoio. Em especial, agradeço aos amigos Poliane Aires e Moíse Bandiri pelo companheirismo, suporte e ajuda durante toda esta caminhada.

Aos demais amigos e a todos, que participaram desta etapa de minha vida, pela compreensão e incentivo.

Por fim, agradeço à CAPES por promover o suporte financeiro necessário para o desenvolvimento deste trabalho.

*“Ainda que eu andasse pelo vale da sombra da morte, não temeria mal algum, porque Tu  
estás comigo; a tua vara e o teu cajado me consolam.”  
(Salmos 23:4)*



# Resumo

A técnica da transformada óptica, alcançada por meio da transformação de coordenadas, é utilizada para controlar a propagação de ondas eletromagnéticas, possibilitando novas aplicações com dispositivos ópticos complexos. O manto de invisibilidade se destaca como a aplicação mais reconhecida no campo da transformada óptica, devido à sua capacidade de tornar objetos invisíveis a um espectador externo. Um caso particular do manto é o tapete de invisibilidade, que tem atraído uma maior atenção por apresentar maior simplicidade de desenvolvimento e também por reduzir as dificuldades e restrições impostas pelo manto de espaço livre. Entretanto, para obter o controle de propagação de ondas desejado, a transformada óptica apresenta alguns desafios, como tensores de permeabilidade e permissividade anisotrópicos e não-homogêneos ou índices de refração com valores negativos. Uma possível alternativa para viabilizar a aplicação da transformada óptica, abordada neste trabalho, é o uso do mapeamento quase-conforme, minimizando as dificuldades inerentes da transformada óptica. Como resultado, tem-se um meio com operação em banda larga e anisotropia reduzida. Diferentes métodos serão apresentados para obter esse tipo de mapeamento, incluindo o mapeamento para a ocultação de objetos tridimensionais. Assim, neste trabalho, uma nova abordagem para alcançar o mapeamento quase-conforme será apresentada para o desenvolvimento de um tapete de invisibilidade tridimensional. Esse mapeamento será obtido por meio de técnicas de parametrização e otimização numérica, que levam à redução da anisotropia, e possibilitam utilizar somente materiais naturais isotrópicos em seu desenvolvimento. Por meio de simulações numéricas de onda completa, será possível, pela primeira vez, demonstrar a invisibilidade para quaisquer direções de propagação de onda, independentemente do ângulo de incidência e da polarização da onda eletromagnética. O funcionamento desse dispositivo será teoricamente demonstrado em diferentes faixas de frequências, inclusive no espectro de luz visível, mostrando sua capacidade de operação em banda larga.

**Palavras-chaves:** manto de invisibilidade, tapete de invisibilidade 3D, transformada óptica, transformação de coordenadas, mapeamento quase-conforme, otimização numérica.

# Abstract

The transformation optics technique, achieved through coordinates transformation, is used to control electromagnetic waves propagation, enabling new applications using complex optical devices. The invisibility cloak stands out as the most recognized application in the transformation optics field, due to its ability to make objects invisible to an external observer. A particular case of the invisibility cloak is the carpet cloak, which has attracted greater attention because it presents simpler development, by reducing complexity and constraints imposed by the free space cloak. However, in order to obtain the desired wave propagation control, the transformation optics presents some challenges, such as anisotropic and non-homogeneous permeability and permittivity tensors, or refractive indexes with negative values. An alternative for feasibly applying the transformation optics, discussed in this work, is the use of quasi-conformal mapping, minimizing the inherent complexity of the transformation optics. It results in propagation medium with broadband operation and reduced anisotropy. Different methods will be presented to obtain this type of mapping, including mapping for cloaking three-dimensional objects. This work introduces a new approach for achieving quasi-conformal mapping in the development of a three-dimensional invisibility carpet cloak. This mapping will be obtained through parametrization and numerical optimization techniques, leading to anisotropy reduction, and enabling the use natural-only isotropic materials in its development. Through full-wave numerical simulations, it will be possible, for the first time, to demonstrate invisibility in any direction of wave propagation, regardless of the angle of incidence and the polarization of the electromagnetic wave. The operation of this device will theoretically be demonstrated in different frequency ranges, including in the visible light spectrum, showing its ability to operate with broadband response.

**Keywords:** invisibility cloak, 3D invisibility carpet cloak, transformation optics, coordinate transformation, quasi-conformal mapping, numerical optimization.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>18</b>
1.1	Contextualização e Motivação	18
1.2	Objetivos e Contribuições	20
1.3	Organização do Trabalho	21
1.4	Publicações	22
<b>2</b>	<b>Mantos de Invisibilidade</b>	<b>24</b>
2.1	Introdução	24
2.2	Definições sobre os Tipos de Mantos de Invisibilidade	24
2.3	Técnica de Cancelamento do Espalhamento	26
2.4	Técnica de Cancelamento do Espalhamento com Múltiplas Camadas	31
2.5	Técnica de Linha de Transmissão	35
2.6	Técnica da Transformada Óptica	37
2.6.1	Mantos de Espaço Livre Bidimensionais	38
2.6.2	Tapetes de Invisibilidade Bidimensionais	43
2.6.3	Mantos de Espaço Livre Tridimensionais	49
2.6.4	Tapetes de Invisibilidade Tridimensionais	52
2.7	Comparação entre as Diferentes Técnicas no Desenvolvimento de Mantos de Invisibilidade	56
2.8	Considerações Finais	57
<b>3</b>	<b>Tapete de Invisibilidade Tri-Dimensional com Transformada Óptica e Mapeamento Quase-Conforme</b>	<b>59</b>
3.1	Introdução	59
3.2	Princípio de Fermat	59
3.3	Tipos de Transformação de Coordenadas utilizados na Transformada Óptica	61
3.4	Modelagem da Transformada Óptica	67
3.4.1	Cálculo Tensorial	67
3.4.2	Invariância das Equações de Maxwell sob Transformações de Coordenadas	71
3.5	Cálculo da Anisotropia e Considerações para se Encontrar o Índice de Refração em um Meio Isotrópico	74
3.6	Mapeamento Quase-Conforme no Desenvolvimento do Manto de Invisibilidade Tri-Dimensional	78
3.6.1	Transformação de Coordenadas e Condições de Contorno para o Tapete de Invisibilidade Tri-Dimensional	79
3.7	Considerações Finais	82
<b>4</b>	<b>Resultados</b>	<b>83</b>

4.1	Introdução . . . . .	83
4.2	Manto de Invisibilidade Tridimensional com Deformação Igual a $0,2\ \mu\text{m}$ . . .	83
4.3	Manto de Invisibilidade Tridimensional com Deformação Igual a $0,4\ \mu\text{m}$ . . .	95
4.4	Comparação entre o Tapete de Invisibilidade Tridimensional Proposto e o Estado da Arte . . . . .	98
4.5	Considerações Finais . . . . .	99
<b>5</b>	<b>Conclusões . . . . .</b>	<b>101</b>
5.1	Aspectos Gerais e Conclusões . . . . .	101
5.2	Trabalhos Futuros . . . . .	102
	<b>APÊNDICE A Método de otimização numérica de <i>quase-Newton</i> . . . . .</b>	<b>103</b>
	<b>Referências . . . . .</b>	<b>106</b>

# Lista de ilustrações

Figura 1	–	Transformação nas coordenadas do meio, para a obtenção de um manto de espaço livre. (a) A região interna ao círculo é submetida à transformação de coordenadas, sendo comprimida em um único ponto. (b) O ponto é mapeado para criação de uma cavidade, originando uma região capaz de ocultar todo o objeto dentro de si [48]. . . . .	25
Figura 2	–	Interpretação do fenômeno decorrente da técnica de CE: os vetores de polarização $P$ do objeto a ser ocultado ( $\varepsilon > \varepsilon_0$ ) e do manto ( $\varepsilon < \varepsilon_0$ ) são opostos, o que resulta no cancelamento da dispersão provocada pela interação entre o objeto e a cobertura plasmônica [54]. . . . .	27
Figura 3	–	Primeira realização experimental de um manto de invisibilidade com a técnica de CE: (a) modelo esquemático do projeto e (b) fotografia do experimento implementado [55]. . . . .	28
Figura 4	–	Manto de invisibilidade 3D construído com a técnica de CE nas visões: (a) frontal e (b) lateral [38]. . . . .	29
Figura 5	–	Tapete de invisibilidade 2D desenvolvido com a técnica de CE: (a) modelo de uma nanoantena cilíndrica e (b) esquemático do manto formado por metasuperfície [57]. . . . .	30
Figura 6	–	Manto de invisibilidade 2D desenvolvido com a técnica de CEMC formado por três camadas ao redor de um objeto cilíndrico a ser ocultado [39]. . . . .	32
Figura 7	–	Manto de invisibilidade 2D desenvolvido com a técnica de CEMC. (a) Estrutura de camadas concêntricas formadas por dielétricos alternados A e B, envolvendo um cilindro condutor infinito (em amarelo). (b) Cilindro anisotrópico equivalente com parâmetros de material dependentes do raio. O objeto cilíndrico ocultado possui raio de valor $a$ e o manto equivalente possui raio igual a $b$ [69]. . . . .	33
Figura 8	–	Manto de invisibilidade 2D desenvolvido com a técnica de CEMC. O objeto ocultado de formato cilíndrico e raio $a$ é um PEC. Esse objeto é circundado por multi-camadas concêntricas, que constituem o manto. Sua camada externa apresenta raio com valor igual a $b$ [70]. . . . .	34
Figura 9	–	Manto de invisibilidade 2D desenvolvido com a técnica LT [72]. . . . .	36
Figura 10	–	Geometria do manto de espaço livre 3D desenvolvido com a técnica LT nas visões dos planos: (a) $xy$ , (b) $xz$ e (c) corte da metade de um período do manto ao longo do plano de simetria $xz$ [75]. . . . .	36

Figura 11 – Transformação do meio: (a) linha de campo, no meio original, em uma malha cartesiana e (b) linha de campo distorcida em uma malha cartesiana distorcida da mesma maneira [8]. . . . .	40
Figura 12 – Visão de um escudo eletromagnético formado no manto de espaço livre destinado à ocultação de um objeto em seu interior [8]. . . . .	40
Figura 13 – Manto de espaço livre 2D criado a partir de estruturas de metamateriais ressonantes impressas em substrato flexível [29]. . . . .	42
Figura 14 – Construção do manto de espaço livre 2D: (a) montagem do dispositivo desenvolvido com SRRs em molde de silicone e (b) estrutura final do manto [31]. . . . .	43
Figura 15 – Representação do efeito de invisibilidade criado no tapete 2D: a TC mapeia uma região retangular no sistema virtual para uma região arbitrária no domínio físico [26]. . . . .	45
Figura 16 – Estrutura construída para o tapete de invisibilidade 2D formado a partir de estruturas metamateriais não-ressonantes. As dimensões de cada uma das células que formam o metamaterial são: $l = 2$ mm, $w1 = 0,3$ mm, $w2 = 0,2$ mm e $a$ variando de 0 a 1,7 mm [32]. . . . .	46
Figura 17 – Imagens de microscopia eletrônica de varredura do tapete de invisibilidade 2D: (a) estrutura do dispositivo implementado e (b) região ampliada mostrando os postes de silício na pastilha SOI [28]. . . . .	47
Figura 18 – Seção transversal do tapete de invisibilidade 2D construído em um guia de ondas de nitreto de silício sobre um substrato de óxido de silício nanoporoso [101]. . . . .	48
Figura 19 – Manto de espaço livre 3D. (a) Arranjo do dispositivo constituído por 36 aletas dispostas radialmente. (b) Visão ampliada da estrutura da aleta feita com núcleo de polímero inserido entre camadas de revestimento de InSb [36]. . . . .	51
Figura 20 – Esquema de um manto de invisibilidade 3D de formato arbitrário, baseado na teoria do meio complementar, em um sistema de coordenadas esféricas [78]. . . . .	51
Figura 21 – Tapetes de invisibilidade 3D desenvolvidos com transformações quase-conforme obtidos por meio da: (a) extrusão de um mapa de índice de refração 2D e (b) revolução de um mapa de índice de refração 2D [42]. . . . .	53
Figura 22 – Tapete de invisibilidade 3D: (a) visão superior, (b) visão inferior, (c) visão lateral e (d) distribuição do índice de refração no plano $xz$ [34]. . . . .	54
Figura 23 – Estrutura do tapete de invisibilidade 3D com operação na região do infra-vermelho [37]. . . . .	55
Figura 24 – Tapete de invisibilidade 3D, em formato piramidal, implementado com multicamadas de dielétricos [49]. . . . .	56

Figura 25 – Princípio de Fermat: a luz percorre o caminho óptico mais curto de $A$ para $B$ , correspondente à linha contínua curva. O comprimento do caminho óptico depende da variação do índice de refração do meio [16].	60
Figura 26 – Na imagem da esquerda tem-se o espaço virtual, onde a luz se propaga ao longo de linhas retas, seguindo as linhas da grade retangular. Na imagem da direita tem-se o espaço físico, onde os raios de luz são curvos e correspondem aos raios transformados do espaço virtual [16]. . . . .	62
Figura 27 – Geometria da transformação de coordenadas otimizadas para o tapete de invisibilidade 3D com $p = q = r = 3$ : (a) região total transformada e (b) visão detalhada da região central transformada. . . . .	85
Figura 28 – Estrutura para simulação do tapete de invisibilidade tridimensional (3D) no COMSOL Multiphysics <sup>®</sup> nas visões dos planos: (a) $y = 0$ e (b) $z = 0$ . . . . .	86
Figura 29 – Resultados simulados para o tapete de invisibilidade 3D com $p = q = r = 3$ e $\lambda = 750$ nm. Perfil do índice de refração: (a) em perspectiva para os planos $x = 0$ , $y = 0$ e $z = 0$ , (b) em perspectiva para os planos $x = 0$ e $y = 0$ , cuja região pontilhada corresponde ao manto transformado, (c) visão detalhada do plano $y = 0$ e (d) visão detalhada do plano $x = 0$ . . . . .	87
Figura 30 – Gráficos do campo elétrico normalizado instantâneo, em 750nm, nas visões em perspectiva, planos $y = 0$ , $x = 0$ e $z = 2,31$ $\mu\text{m}$ , respectivamente, para (a) um espelho perfeitamente plano, (b) espelho deformado sem o manto e (c) espelho deformado com o tapete de invisibilidade, cujos limites são indicados pelas linhas pontilhadas. . . . .	88
Figura 31 – Gráficos do campo elétrico distante extraídos do plano $x = 0$ para (a) um espelho perfeitamente plano, (b) espelho deformado sem o manto e (c) espelho deformado com o tapete de invisibilidade. . . . .	89
Figura 32 – Fluxo de potência eletromagnética nos planos $y = 0$ , $x = 0$ e $z = 2,31$ $\mu\text{m}$ , respectivamente, para (a) um espelho perfeitamente plano, (b) espelho deformado sem o manto e (c) espelho deformado com o tapete de invisibilidade. . . . .	90
Figura 33 – Gráficos do campo magnético normalizado instantâneo, em 750nm, com polarização paralela e nas visões em perspectiva, planos $y = 0$ e $x = 0$ , respectivamente, para (a) um espelho perfeitamente plano, (b) espelho deformado sem o manto e (c) espelho deformado com o tapete de invisibilidade, cujos limites são indicados pelas linhas pontilhadas. . . . .	92

Figura 34 – Gráficos do campo elétrico normalizado instantâneo, em 1550nm, nas visões em perspectiva, planos $y = 0$ e $x = 0$ , respectivamente, para (a) um espelho perfeitamente plano, (b) espelho deformado sem o manto e (c) espelho deformado com o tapete de invisibilidade, cujos limites são indicados pelas linhas pontilhadas. . . . .	93
Figura 35 – Gráficos do campo elétrico normalizado instantâneo, em 680nm, nas visões em perspectiva, planos $y = 0$ e $x = 0$ , respectivamente, para (a) um espelho perfeitamente plano, (b) espelho deformado sem o manto e (c) espelho deformado com o tapete de invisibilidade, cujos limites são indicados pelas linhas pontilhadas. . . . .	94
Figura 36 – Perfil do índice de refração para o tapete de invisibilidade 3D com $c = 0,4 \mu\text{m}$ e $p = q = r = 3$ : (a) em perspectiva para os planos $x = 0$ e $y = 0$ , cuja região pontilhada corresponde ao manto transformado, (b) visão detalhada do plano $y = 0$ e (c) visão detalhada do plano $x = 0$ . . . . .	96
Figura 37 – Gráficos do campo elétrico normalizado instantâneo para $c = 0,4 \mu\text{m}$ nas visões em perspectiva, planos $y = 0$ , $x = 0$ e $z = 2,31 \mu\text{m}$ , respectivamente, para (a) espelho deformado sem o manto e (b) espelho deformado com o tapete de invisibilidade, cujos limites são indicados pelas linhas pontilhadas. . . . .	97
Figura 38 – Fluxo de potência eletromagnética para $c = 0,4 \mu\text{m}$ nos planos $y = 0$ , $x = 0$ e $z = 2,31 \mu\text{m}$ , respectivamente, para (a) espelho deformado sem o manto e (b) espelho deformado com o tapete de invisibilidade. . . . .	97
Figura 39 – Gráficos do campo elétrico normalizado instantâneo para um dispositivo 3D obtido por meio da extrusão de um plano 2D: (a) espelho perfeitamente plano para fins de comparação, (b) plano $y = 0$ paralelo ao plano de extrusão e (c) plano $x = 0$ perpendicular ao plano de extrusão. . . . .	99
Figura 40 – Fluxograma do método de <i>quase-Newton</i> para a redução da anisotropia total do tapete de invisibilidade 3D. . . . .	105



# Lista de tabelas

Tabela 1 – Comparação entre as técnicas utilizadas no desenvolvimento de mantos de invisibilidade. . . . .	57
Tabela 2 – Anisotropia máxima e índice de refração para tapete de invisibilidade 3D com deformação igual a $0,2\ \mu\text{m}$ . . . . .	84
Tabela 3 – Anisotropia máxima e índice de refração para tapete de invisibilidade 3D com deformação igual a $0,4\ \mu\text{m}$ . . . . .	95
Tabela 4 – Métodos de <i>quase-Newton</i> . . . . .	104

# Lista de símbolos

$ \cdot $	Módulo
$(\cdot)^T$	Transpor
$\int \cdot$	Integral
$(\cdot)^{-1}$	Inversa
$\frac{\partial}{\partial x} f(\cdot)$	Derivada Parcial da Função $f$ em Relação a $x$
$\Sigma(\cdot)$	Somatório
$\det(\cdot)$	Determinante sobre Matrizes
$[ijk]$	Símbolo de Permutação
$\nabla$	Operador Gradiente
$\nabla^2$	Operador Laplaciano
$\nabla \cdot (\cdot)$	Operador Divergente
$\nabla \times (\cdot)$	Operador Rotacional
$\delta_j^i$	Delta de Kronecker
$\Lambda_i^{i'}$	Tensor Correspondente à Matriz Jacobiana
$\Lambda_{i'}^i$	Tensor Correspondente à Matriz Jacobiana Inversa
$\epsilon^{ijk}$	Tensor de Levi-Civita
$\epsilon$	Permissividade Elétrica do Meio
$\epsilon_0$	Permissividade Elétrica no Vácuo
$\epsilon_r$	Valor Relativo da Permissividade Elétrica
$\mu$	Permeabilidade Magnética do Meio
$\mu_0$	Permeabilidade Magnética no Vácuo
$\mu_r$	Valor Relativo da Permeabilidade Magnética
$\omega$	Frequência Angular do Campo Eletromagnético

$\psi$	Amplitude do Campo Elétrico ou Magnético
$\rho$	Densidade Volumétrica de Carga
$\mathbf{j}$	Densidade de Corrente de Condução no Meio
$c$	Velocidade da Luz no Vácuo
$n$	Índice de Refração do Meio
$n_{\max}$	Índice de Refração Máximo do Meio
$n_{\min}$	Índice de Refração Mínimo do Meio
$n'$	Índice de Refração do Meio Transformado
$p, q, r$	Ordens das Séries de Potência
$g_{ij}$	Tensor Métrico
$g^{ij}$	Tensor Métrico Inverso
$F$	Valor da Anisotropia Total
$G_F$	Gradiente da Função Custo $F$
$H$	Matriz Hessiana
$H_F$	Matriz Hessiana da Função Custo $F$
$J$	Matriz Jacobiana da Transformação de Coordenadas
$K_{3D}$	Valor da Anisotropia Local
$C(x)$	Função Custo
$\mathbf{E}$	Intensidade do Campo Elétrico
$\mathbf{B}$	Indução Magnética
$\mathbf{D}$	Deslocamento Elétrico
$\mathbf{H}$	Intensidade do Campo Magnético
$A_{ijk}, B_{ijk}, C_{ijk}$	Coeficientes das Séries de Potência
$b(x, y, z)$	Função de Fronteira
$f_x(x, y, z)$	Função de Transformação Inicial para Coordenada $x'$
$f_y(x, y, z)$	Função de Transformação Inicial para Coordenada $y'$

$f_z(x, y, z)$  Função de Transformação Inicial para Coordenada  $z'$

$P_x(x, y, z)$  Função de Perturbação para Coordenada  $x'$

$P_y(x, y, z)$  Função de Perturbação para Coordenada  $y'$

$P_z(x, y, z)$  Função de Perturbação para Coordenada  $z'$

# Lista de abreviaturas

**2D** bidimensional

**3D** tridimensional

**BFGS** Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno

**CEMC** Cancelamento do Espalhamento com Múltiplas Camadas

**CE** Cancelamento do Espalhamento

**CMOS** semicondutor de metal-óxido complementar – *complementary metal-oxide-semiconductor*

**DBR** refletor de Bragg distribuído – *distributed Bragg reflector*

**DFP** Davidon-Fletcher-Powell

**FDTD** Método do Domínio de Tempo de Diferenças Finitas – *Finite Difference Time Domain Method*

**FEM** Método dos Elementos Finitos – *Finite Element Method*

**FIB** feixe de íons focalizado – *focused ion beam*

**GL** graus de liberdade

**GRIN** índice de refração gradual – *graded refractive index*

**LSM** Método dos Mínimos Quadrados – *Least Squares Method*

**LT** Linha de Transmissão

**PEC** condutor elétrico perfeito – *Perfect Electric Conductor*

**PSO** Otimização por Enxame de Partículas – *Particle Swarm Optimization*

**SOI** silício sobre isolante – *silicon-on-insulator*

**SRRs** ressonadores de anéis partidos – *split-ring resonators*

**SR1** *Symmetric Rank 1*

**TC** transformação de coordenadas

**TE** transversal elétrica

**TM** transversal magnética

**TO** Transformada Óptica

# 1 Introdução

## 1.1 Contextualização e Motivação

A Transformada Óptica (TO) é uma área do eletromagnetismo com grande impacto no desenvolvimento de dispositivos ópticos. Estudos sobre essa técnica iniciaram-se em 1961, quando L. S. Dolin explorou a ideia de espaço curvo para sistemas eletromagnéticos com características não-homogêneas [1]. Foi mostrada como a alteração de coordenadas de um espaço para outro relaciona-se com os parâmetros constitutivos do meio. Juntamente com esse trabalho, outras pesquisas contribuíram para a construção de noções básicas da TO [2–4]. Explorou-se a invariância das equações de Maxwell sob uma deformação espacial, possibilitando alcançar as expressões dos parâmetros constitutivos do meio transformado. No entanto, a disponibilidade limitada de materiais utilizados nos processos de construção desses meios não-homogêneos provocou um declínio nas pesquisas de dispositivos com essa particularidade.

Somente na década de 1990 que a equivalência entre a geometria e o meio, obtida por meio das equações de Maxwell, foi novamente abordada [5,6]. Em 2006, essa abordagem ficou conhecida como TO por meio dos trabalhos desenvolvidos por Leonhardt [7] e Pendry [8], nos quais mantos de invisibilidade eletromagnéticos foram criados a partir de distorções em suas coordenadas. Esse tipo de dispositivo é um exemplo da capacidade de utilização da TO, uma vez que se acreditava que a ocultação de objetos era praticamente impossível há apenas algumas décadas [9,10].

A TO apresenta-se como uma técnica de projeto para controlar a interação entre os campos eletromagnéticos e os materiais utilizados no desenvolvimento, facilitando a manipulação das ondas eletromagnéticas [11]. Essa técnica utiliza a geometria diferencial para projetar estruturas com propriedades ópticas que variam espacialmente ao longo do dispositivo. Ou seja, ocorrem alterações nas distribuições de permissividade e permeabilidade, resultando em um meio com índice de refração variável. O efeito é um material óptico que imita o espaço curvo para a propagação da onda eletromagnética. Consequentemente, essa onda viaja ao longo de trajetórias curvas predeterminadas no material.

A execução da TO é alcançada por meio da transformação de coordenadas (TC), cujo objetivo é proporcionar determinada distorção no espaço físico para a obtenção de um dispositivo com a funcionalidade desejada. Essa ferramenta realiza uma mudança de coordenadas entre o espaço original e o meio transformado, podendo apresentar comportamento anisotrópico e não-homogêneo [12]. Portanto, a TC fornece uma abordagem visual para o controle das ondas eletromagnéticas, viabilizando o desenvolvimento de dispositivos

eletromagnéticos complexos e com dificuldade computacional reduzida [13–15].

O princípio da **TO** consiste, primeiramente, em aplicar a **TC** no meio em que se deseja transformar. Conseqüentemente, a distribuição dos campos eletromagnéticos dentro desse espaço fica igualmente distorcida. Em seguida, a invariância das equações de Maxwell é explorada, ou seja, essas equações mantêm o formato mesmo após a **TC**. Com isso, torna-se possível determinar as propriedades constitutivas do meio transformado que são capazes de controlar a propagação da onda eletromagnética conforme a geometria estabelecida pela **TC** [5]. Logo, conclui-se que a **TO** permite mapear matematicamente as distorções provocadas no espaço por meio de uma distribuição das propriedades do material no meio transformado [16].

Desde a publicação das pesquisas de Pendry e Leonhardt [7, 8], a **TO** passou a ser considerada como ferramenta poderosa para projetar dispositivos ópticos [17–24], muitos até então difíceis de serem obtidos sem o uso de meios não-homogêneos. Dentre eles, o manto de invisibilidade [12, 16, 25–28] é provavelmente o dispositivo mais atrativo e o que vem recebendo maior atenção da comunidade científica e da mídia em geral, devido às suas possibilidades de aplicações. Os trabalhos pioneiros de Pendry e Leonhardt [7, 8] inspiraram numerosas pesquisas sobre mantos de invisibilidade e motivaram várias realizações significativas, com demonstrações em faixas de micro-ondas [29–34], ondas milimétricas e submilimétricas [35, 36], até frequências ópticas [10, 28, 37]. Seu princípio de funcionamento baseia-se em um material de revestimento projetado para excluir a onda incidente de determinado espaço interno que contenha o objeto a ser ocultado. Isso ocorre sem causar perturbações no campo externo ao manto, parecendo como se o dispositivo e o objeto não existissem. Diferentes técnicas podem ser utilizadas na criação desses dispositivos [38–40]. Uma ênfase é dada à **TO** por se tratar da técnica capaz de alcançar todas as características desejáveis de projeto para a proposta deste trabalho.

Dois tipos de mantos de invisibilidade têm sido demonstrados. Um deles é o manto de espaço livre [7, 8], que possibilita a ocultação total de um objeto dentro de si. Porém, o desenvolvimento desse dispositivo pode gerar singularidades, além de apresentar outros inconvenientes como reflexões em suas extremidades [41]. O segundo tipo de manto é o tapete de invisibilidade [26]. Esse dispositivo minimiza as dificuldades apresentadas no desenvolvimento do manto de espaço livre e destaca-se por não gerar valores singulares para os parâmetros constitutivos do meio, provocando um maior interesse em seu desenvolvimento. O tapete de invisibilidade se caracteriza por ocultar um objeto posicionado entre uma superfície condutora reflexiva e uma superfície plana. Infelizmente, para conseguir o controle de propagação das ondas nessas estruturas, a **TO** resulta em materiais com requisitos físicos incomuns, não encontrados na natureza. Entre essas características, citam-se, por exemplo, índice de refração negativo ou permeabilidade e permissividade anisotrópica e não-homogênea, tornando o desenvolvimento mais complexo [8].

Os materiais artificiais, como os metamateriais eletromagnéticos [29], têm sido propostos como uma solução para alcançar essas propriedades exigidas pela **TO**. No entanto, esses meios possuem a desvantagem de serem limitados por uma largura de faixa estreita, podendo apresentar altas perdas devido as suas propriedades constitutivas serem dependentes da frequência. Adicionalmente, apresentam restrições quanto à resolução e ao número de camadas devido aos processos de fabricação [42].

Uma alternativa para superar as dificuldades provenientes da **TO** é a utilização de mapeamentos realizados entre as coordenadas do sistema original e o sistema transformado [26]. Os tipos mais usados no desenvolvimento de mantos de invisibilidade são o mapeamento conforme e o quase-conforme. O mapeamento conforme [7, 43] resulta em um meio isotrópico, porém incapaz de atender às condições de contorno. Essas condições preservam a funcionalidade do dispositivo e evitam que reflexões indesejáveis ocorram na sua interface com o meio externo. Por outro lado, o mapeamento quase-conforme [26] resulta em um meio com reduzida anisotropia, que se aproxima de um material isotrópico. Destaca-se, também, por atender às condições de contorno e possuir capacidade de operação em banda larga. Esse tipo de mapeamento pode ser obtido por meio de diferentes procedimentos [26, 27, 44–47]. No entanto, a maioria é aplicada apenas em transformações do tipo bidimensional (**2D**) [26, 44, 46]. Dessa forma, um dispositivo **3D** projetado com **TO**, geralmente é obtido por um processo de extrusão ou revolução de um mapa de índice de refração, alcançado por meio de uma **TC** quase-conforme **2D** [9, 34, 42]. Logo, o controle de propagação somente é verificado para as ondas que viajam nos planos obtidos por esses processos. Consequentemente, os tapetes de invisibilidade **3D** desenvolvidos com essa abordagem possuem um funcionamento limitado para apenas algumas direções de propagação da onda eletromagnética.

Diante dessa limitação, verifica-se a necessidade de utilizar uma abordagem onde os tapetes **3D** sejam realmente capazes de alcançar o efeito de invisibilidade para qualquer direção de onda incidente e independentemente da direção de visualização do observador externo.

## 1.2 Objetivos e Contribuições

O presente trabalho tem como objetivo mostrar o desenvolvimento teórico de um tapete de invisibilidade totalmente **3D**, realmente capaz de alcançar o efeito de ocultação de um objeto para direções arbitrárias e diferentes polarizações das ondas eletromagnéticas incidentes. O projeto foi desenvolvido utilizando a **TO** com **TC 3D** quase-conforme.

Como principal contribuição deste trabalho, destaca-se que pela primeira vez é desenvolvido um tapete de invisibilidade completamente **3D** isotrópico, por meio da técnica de **TO** e mapeamento quase-conforme. O efeito de invisibilidade é alcançado para qual-



quer direção de propagação da onda incidente, independente da direção de visualização de um observador e da polarização da luz. O projeto é demonstrado em frequências ópticas, embora possa ser utilizado em qualquer faixa espectral. As condições de contorno são atendidas, logo reflexões indesejáveis não ocorrem em sua interface com o meio externo.

### 1.3 Organização do Trabalho

O trabalho encontra-se organizado como a seguir.

No **Capítulo 2** são apresentados os dois tipos de mantos de invisibilidade existentes na literatura, destacando-se o funcionamento, as vantagens e desvantagens de cada um. São apresentadas diferentes técnicas e suas respectivas abordagens nos desenvolvimentos de exemplos de mantos de invisibilidade, segundo o estado da arte para dispositivos **2D** e **3D**.

O **Capítulo 3** refere-se à modelagem matemática da **TO** alcançada por meio da **TC**. Serão apresentados os diferentes tipos de mapeamento empregados na **TC** para o desenvolvimento de mantos de invisibilidade, como o mapeamento conforme, não-conforme e quase-conforme. A invariância das equações de Maxwell sob a **TC** é demonstrada. À partir desse conceito, mostra-se o cálculo da anisotropia residual e do índice de refração para o meio transformado. Será discutida a estratégia para a obtenção do mapeamento quase-conforme empregado no desenvolvimento do tapete de invisibilidade **3D**, cujo objetivo é possibilitar a minimização da anisotropia no meio transformado. Também serão especificadas as condições de contorno necessárias para o funcionamento eficiente do projeto proposto neste trabalho.

O **Capítulo 4** apresenta resultados numéricos que comprovam o funcionamento do tapete de invisibilidade **3D** proposto. Simulações numéricas de onda completa, utilizando o método dos elementos finitos, foram executadas no COMSOL Multiphysics<sup>®</sup> para validar a operação do dispositivo no comprimento de onda de 750 nm e verificar o seu desempenho na ocultação de objetos **3D**. Foi utilizada a estratégia de parametrização e otimização numérica na **TC**, permitindo a redução da anisotropia do manto. Dessa forma, um meio isotrópico pôde ser considerado no desenvolvimento do dispositivo proposto. A distribuição dos campos eletromagnéticos normalizados e do índice de refração resultante do processo de otimização são apresentadas para tapetes de invisibilidade **3D** com deformações iguais a 0,2  $\mu\text{m}$  e 0,4  $\mu\text{m}$ . O funcionamento do dispositivo também é comprovado por meio do fluxo de potência eletromagnética e cortes de campo elétrico próximo e distante. Adicionalmente, são apresentadas a operação do dispositivo para diferentes faixas de frequências, inclusive no espectro de luz visível, e a independência da polarização da onda eletromagnética incidente. Os resultados demonstram que a estratégia empregada possibilita o desenvolvimento de um manto isotrópico, sem reflexão nas extremidades e in-

dependente da frequência de operação e polarização do feixe óptico incidente. O efeito de invisibilidade é mantido para qualquer direção de visualização de um observador externo. Também foi realizada a comparação de desempenho entre o estado da arte e o dispositivo proposto neste trabalho, no qual pôde ser evidenciado o seu desempenho superior.

No **Capítulo 5** são apresentados os comentários e conclusões sobre o desenvolvimento do tapete de invisibilidade **3D** proposto, assim como sugestões para trabalhos futuros.

## 1.4 Publicações

Como resultado das pesquisas feitas ao longo deste trabalho, foram publicados os seguintes artigos em revistas e congressos:

### Artigos publicados em revistas

1. SILVA, D. G.; TEIXEIRA, P. A.; GABRIELLI, L. H.; JUNQUEIRA, M. A. F. C.; SPADOTI, D. H. *Full three-dimensional isotropic carpet cloak designed by quasi-conformal transformation optics*. OPTICS EXPRESS, v. 25, p. 23517-16470, 2017.
2. TEIXEIRA, P. A.; SILVA, D. G.; GABRIELLI, L. H.; SPADOTI, D. H.; JUNQUEIRA, M. A. F. C. *General multimode polarization splitter design in uniaxial media*. OPTICAL ENGINEERING, v. 57, p. 1, 2018.

### Artigos publicados em congressos

1. SILVA, D. G.; TEIXEIRA, P. A.; GABRIELLI, L. H.; JUNQUEIRA, M. A. F. C.; SPADOTI, D. H. *Full Three-Dimensional Broadband and Isotropic Carpet Cloak*. International Microwave and Optoelectronics Conference - IMOC, 2017, Águas de Lindóia.
  - Artigo premiado em 3º lugar na categoria *Student Paper Competition*.
2. SILVA, D. G.; TEIXEIRA, P. A.; GABRIELLI, L. H.; JUNQUEIRA, M. A. F. C.; SPADOTI, D. H. *A Full Three-Dimensional Isotropic Carpet Cloak Designed by Transformation Optics*. OSA Frontiers in Optics and Laser Science APS/DLS - FIO + LS, 2017, Washington, D. C.
3. SILVA, D. G.; TEIXEIRA, P. A.; GABRIELLI, L. H.; JUNQUEIRA, M. A. F. C.; SPADOTI, D. H. *Achieving Invisibility in the Far Field with a 3D Carpet Cloak Design for Visible Light*. OSA Frontiers in Optics and Laser Science APS/DLS - FIO + LS, 2018, Washington, D. C.

4. TEIXEIRA, P. A.; SILVA, D. G.; GABRIELLI, L. H.; JUNQUEIRA, M. A. F. C.; SPADOTI, D. H. *Arbitrary Geometry Polarization Splitter Designed with Quasi-Conformal Transformation Optics*. International Microwave and Optoelectronics Conference - IMOC, 2017, Águas de Lindóia.
5. TEIXEIRA, P. A.; SILVA, D. G.; GABRIELLI, L. H.; JUNQUEIRA, M. A. F. C.; SPADOTI, D. H. *Polarization Splitter Design with Quasi-Conformal Transformation Optics*. OSA Frontiers in Optics and Laser Science APS/DLS - FIO + LS, 2017, Washington, D. C.
6. TEIXEIRA, P. A.; SILVA, D. G.; GABRIELLI, L. H.; SPADOTI, D. H.; JUNQUEIRA, M. A. F. C. *Polarization Splitter with TE Homogeneous Media and TM Inhomogeneous Media*. OSA Frontiers in Optics and Laser Science APS/DLS - FIO + LS, 2018, Washington, D.C.

## 2 Mantos de Invisibilidade

### 2.1 Introdução

Os dispositivos de invisibilidade conquistaram a imaginação humana por muitos anos, principalmente devido a possibilidade de alcançarem a ilusão de óptica. Ou seja, uma ilusão é provocada no sistema óptico, caracterizando-a como uma percepção visual que difere da realidade. O fascínio e interesse no campo da invisibilidade impulsionaram um elevado número de pesquisas para o desenvolvimento desses dispositivos. Dentre eles, destacam-se os mantos de invisibilidade, que possuem a capacidade de direcionar as ondas eletromagnéticas ao redor de um alvo que se deseja ocultar. Para isso, a existência desse objeto não deve provocar qualquer perturbação na propagação da luz. Recentemente, inúmeros estudos têm sido direcionados aos diferentes métodos usados para projetar esses instrumentos.

O objetivo deste capítulo é apresentar uma revisão literária sobre os tipos de mantos de invisibilidade existentes, as técnicas e abordagens utilizadas nos desenvolvimentos de vários projetos, juntamente com o estado da arte em dispositivos bidimensionais e tridimensionais.

### 2.2 Definições sobre os Tipos de Mantos de Invisibilidade

Os mantos de invisibilidade são dispositivos que têm atraído muita atenção do público em geral, devido a capacidade de ocultar e tornar objetos invisíveis a um observador externo. Esses dispositivos possuem a capacidade de guiar as ondas eletromagnéticas em torno de um objeto ou refleti-las em uma superfície deformada, sem causar perturbações na propagação da luz. Basicamente, dois tipos de dispositivos têm sido investigados. O primeiro idealizado foi o manto de espaço livre [7, 8]. A Figura 1 [48] exemplifica a transformação utilizada para obtenção da invisibilidade com o manto. Nesse dispositivo, transformações em suas coordenadas comprimem determinada região do espaço físico em um único ponto, conforme mostrado na Figura 1 (a). Na Figura 1 (b), esse ponto é então mapeado para criar uma cavidade, originando uma região inacessível às ondas eletromagnéticas e capaz de esconder completamente um objeto dentro de si. A construção desses dispositivos pode apresentar aspectos de maior complexidade, como a utilização de materiais com valores extremos de permeabilidade e permissividade, caracterizando a presença de singularidade nos parâmetros constitutivos do meio [41]. Também, verificam-se outros inconvenientes em sua implementação, como reflexões em suas extremidades, aparecimento de sombras ao ocultar um objeto e a necessidade de posicionamento desses

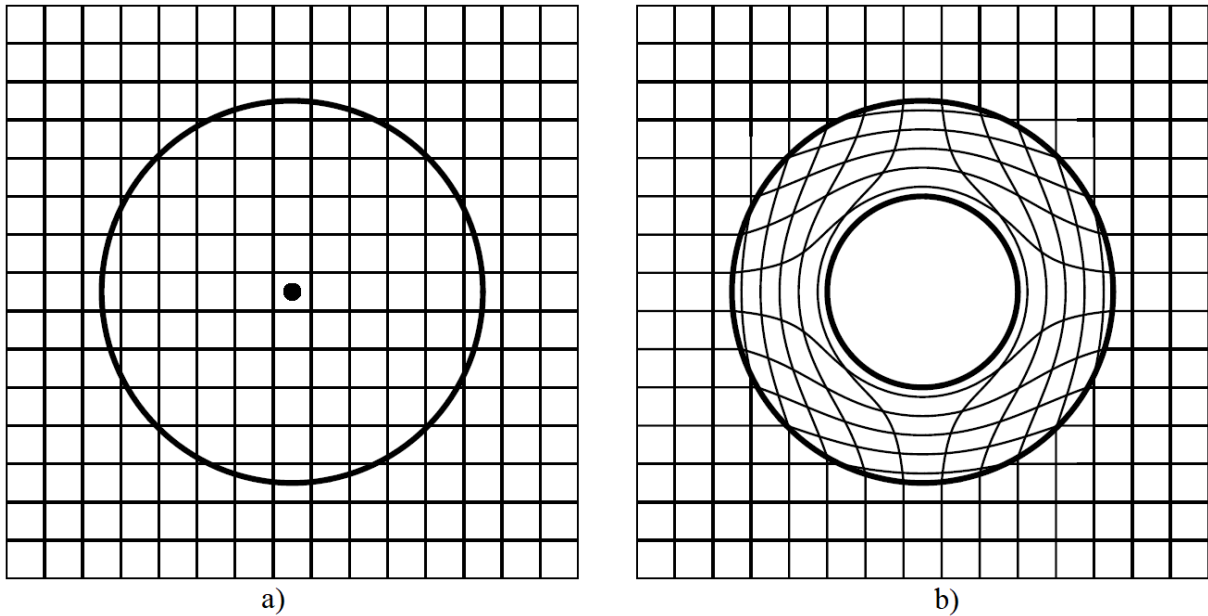


Figura 1 – Transformação nas coordenadas do meio, para a obtenção de um manto de espaço livre. (a) A região interna ao círculo é submetida à transformação de coordenadas, sendo comprimida em um único ponto. (b) O ponto é mapeado para criação de uma cavidade, originando uma região capaz de ocultar todo o objeto dentro de si [48].

objetos a certa altura de determinada superfície.

Outro tipo de manto, chamado tapete de invisibilidade [26], tem gerado um maior interesse científico devido à sua simplicidade de desenvolvimento e também por mitigar as restrições e dificuldades impostas pelo manto de espaço livre. Seu princípio de funcionamento baseia-se em ocultar um objeto posicionado entre uma superfície condutora reflexiva e uma superfície plana, destacando-se por não gerar valores singulares para os parâmetros constitutivos do meio [26]. Fisicamente, as ondas eletromagnéticas incidem sobre a superfície reflexiva deformada, cujo espaço interior contém o objeto a ser ocultado. A dispersão das ondas refletidas provocada pela deformação é restaurada pelo manto, o qual possui as propriedades eletromagnéticas necessárias para essa restauração. Logo, o efeito resultante é como se nenhum objeto estivesse posicionado em uma superfície plana e as ondas incidentes tivessem sido refletidas em um espelho perfeitamente plano. Um ponto negativo desse manto é que ele não é projetado para envolver completamente um objeto a ser ocultado, como no manto de espaço livre.

Diversas aplicações estão previstas para os mantos de invisibilidade, como ilusão de óptica, capacidade de ocultar detalhes em escala microscópica (como, por exemplo, layouts de componentes microeletrônicos), segurança e camuflagem em ambientes militares [7]. Na faixa de micro-ondas existe a possibilidade de ocultação de objetos sujeitos à detecção por radares [33, 49].

Nos últimos anos, diferentes técnicas vêm sendo aplicadas no desenvolvimento de mantos de invisibilidade e as que mais se destacam são

- Cancelamento do Espalhamento (CE)
- Cancelamento do Espalhamento com Múltiplas Camadas (CEMC)
- Linha de Transmissão (LT)
- Transformada Óptica (TO)

Existem outras abordagens aplicadas na ocultação de objetos, como as discutidas em [50]. Entretanto, neste trabalho serão apresentadas as principais metodologias que permitem uma comparação com a técnica aplicada no desenvolvimento do dispositivo proposto. Nas próximas seções serão apresentadas cada uma destas técnicas com suas respectivas características, exemplos de projetos, tipos de construção e o estado da arte para os mantos de invisibilidade.

## 2.3 Técnica de Cancelamento do Espalhamento

As técnicas de CE e TO são consideradas as principais técnicas de projeto utilizadas no desenvolvimento de mantos de invisibilidade [38]. Desde 2003, o cancelamento da dispersão eletromagnética e, conseqüentemente, o ocultamento de um objeto devido à sua interação com estruturas plasmônicas ou metamateriais tem sido investigado [38].

Plasmônica é a área que faz a integração entre a eletrônica e a fotônica, possibilitando o desenvolvimento de nanoestruturas metálicas capazes de controlar a luz de modo eficiente [51]. Esse campo refere-se ao estudo da geração, propagação e detecção de ondas plasmônicas, que são excitações eletrônicas acopladas a um campo eletromagnético, geralmente na interface entre um metal e dielétrico. Baixos valores de correntes elétricas oscilantes são induzidas nessa estrutura, produzindo ondas de luz dispersas [52]. As oscilações coletivas dos elétrons na superfície metálica provocam perda de energia e um quantum de energia dessas oscilações é definido como plasmon [53]. Dessa forma, os plasmons caracterizam-se como quantizações das oscilações de elétrons livres na superfície de um metal.

A técnica de CE baseia-se em um manto de invisibilidade constituído por uma camada de material homogêneo e isotrópico, com valores de permissividade e/ou permeabilidade próximos a zero ou negativos, capaz de ocultar objetos dielétricos ou condutores. Para isso, certos materiais podem ser utilizados, como determinados tipos de metais cujas propriedades constitutivas geralmente são disponíveis próximas à frequência de plasma, ou metamateriais com permissividade efetiva negativa ou positiva de baixo valor [38, 54, 55].

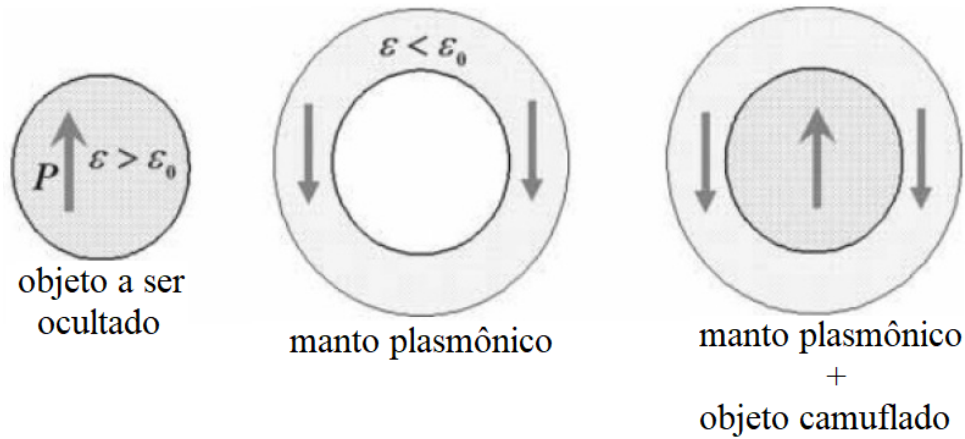


Figura 2 – Interpretação do fenômeno decorrente da técnica de CE: os vetores de polarização  $P$  do objeto a ser ocultado ( $\varepsilon > \varepsilon_0$ ) e do manto ( $\varepsilon < \varepsilon_0$ ) são opostos, o que resulta no cancelamento da dispersão provocada pela interação entre o objeto e a cobertura plasmônica [54].

Isso contribui para a redução do espalhamento gerado, tornando os objetos a serem ocultados quase invisíveis a um observador externo.

Os dispositivos desenvolvidos com essa técnica são compostos por uma única camada e utilizam o efeito de ressonância plasmônica, na qual a luz dispersa do metal e do semicondutor cancela-se por meio de um fenômeno de interferência destrutiva, com o objetivo de reduzir o espalhamento provocado no campo eletromagnético [54]. Logo, tem-se a ocultação de objetos com formatos normalmente esféricos ou cilíndricos e o sistema torna-se invisível. Ou seja, a cobertura plasmônica ou com metamaterial plasmônico é projetada para produzir um vetor de polarização local, induzido pelo campo elétrico incidente. Esse vetor apresenta polarização oposta em relação à do objeto a ser encoberto, permitindo assim, a sua ocultação. Dessa forma, o cancelamento entre o espalhamento provocado pelo objeto e o disfarce plasmônico projetado é capaz de restaurar a frente de onda incidente, independentemente do formato do objeto, do ângulo de incidência da onda eletromagnética e da posição do observador. Esse conceito é exemplificado na Figura 2 [54], onde é possível observar a presença dos vetores de polarização opostos na cobertura plasmônica e no objeto camuflado.

Projetos que utilizam a TO [8, 16, 26, 56] no desenvolvimento de dispositivos de invisibilidade caracterizam-se por isolar o objeto a ser ocultado do campo incidente, conforme será visto na Seção 2.6. Portanto, essa técnica não é utilizada para detectar e medir o campo eletromagnético em contato com o alvo.

Por outro lado, a técnica de CE permite a interação entre o objeto camuflado e o campo externo, ou seja, a onda consegue penetrar na geometria do manto e entrar em contato com o objeto dielétrico. Essa característica é uma propriedade típica da técnica de camuflagem plasmônica. Logo, pode ser empregada para detecções e medidas não



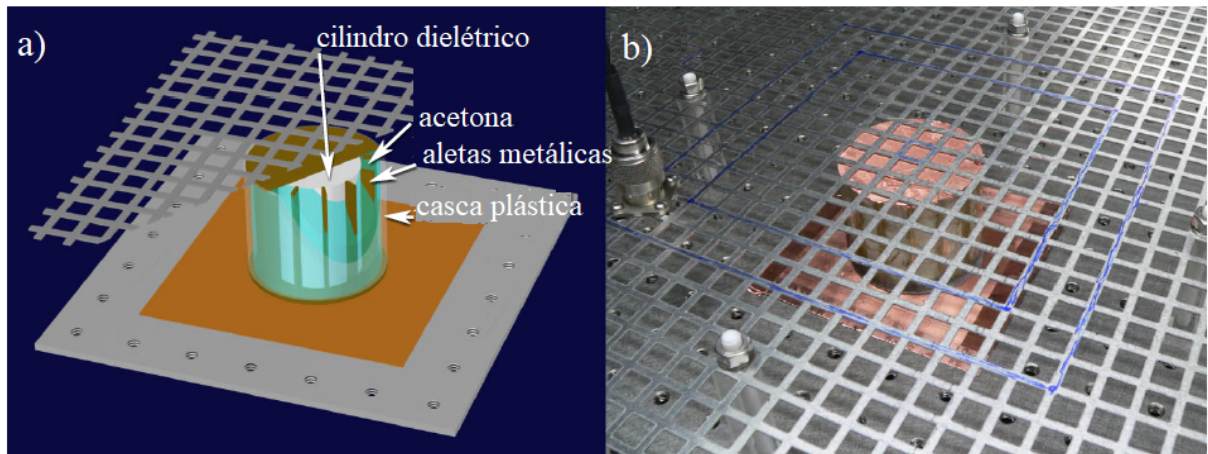


Figura 3 – Primeira realização experimental de um manto de invisibilidade com a técnica de CE: (a) modelo esquemático do projeto e (b) fotografia do experimento implementado [55].

invasivas das ondas eletromagnéticas de campo próximo, causando baixos níveis de interferência e ruído no ambiente a ser monitorado [38]. Nesse sentido, diferentes experimentos têm utilizado cobertura plasmônica para reduzir o padrão de espalhamento de antenas receptoras, radares, fotodetectores e pontas de prova de microscópios ópticos de varredura de campo próximo, tornando-os efetivamente invisíveis em uma determinada faixa de frequência [38].

A primeira realização experimental de um manto de invisibilidade com CE ocorreu em 2009 [55]. Esse projeto consistiu de um manto cilíndrico 2D (infinito em comprimento) composto por metamaterial, com operação em frequências de micro-ondas e capacidade de ocultação de um cilindro dielétrico com elevado valor de permissividade. Durante o seu desenvolvimento, a permissividade do manto pôde atingir valores positivos ou negativos próximos a zero por meio de ajustes na geometria do cilindro, como nas medidas de raio interno e externo e na estrutura que o compõe. Isso possibilitou alcançar o cancelamento do espalhamento com a camuflagem plasmônica. Conforme verificado anteriormente, o efeito de invisibilidade resultante ocorre devido a polarização do dispositivo ser oposta em relação à do objeto dielétrico. Com isso, uma redução do espalhamento ocorre em todo o sistema. Esse experimento é mostrado na Figura 3 [55].

Em 2012, Chen *et al.* [38] descreveram a primeira implementação de um manto de espaço livre 3D, com camada única e construído com metamaterial. Nesse dispositivo, a invisibilidade pôde ser alcançada a partir de qualquer ângulo de incidência da onda eletromagnética e independentemente da posição do observador. A operação da camuflagem plasmônica foi verificada em frequências de micro-ondas e mostrou-se eficiente em reduzir a dispersão total provocada por um cilindro dielétrico. Entretanto, o dispositivo proposto apresentou uma pequena redução no desempenho quando comparado ao projeto em duas



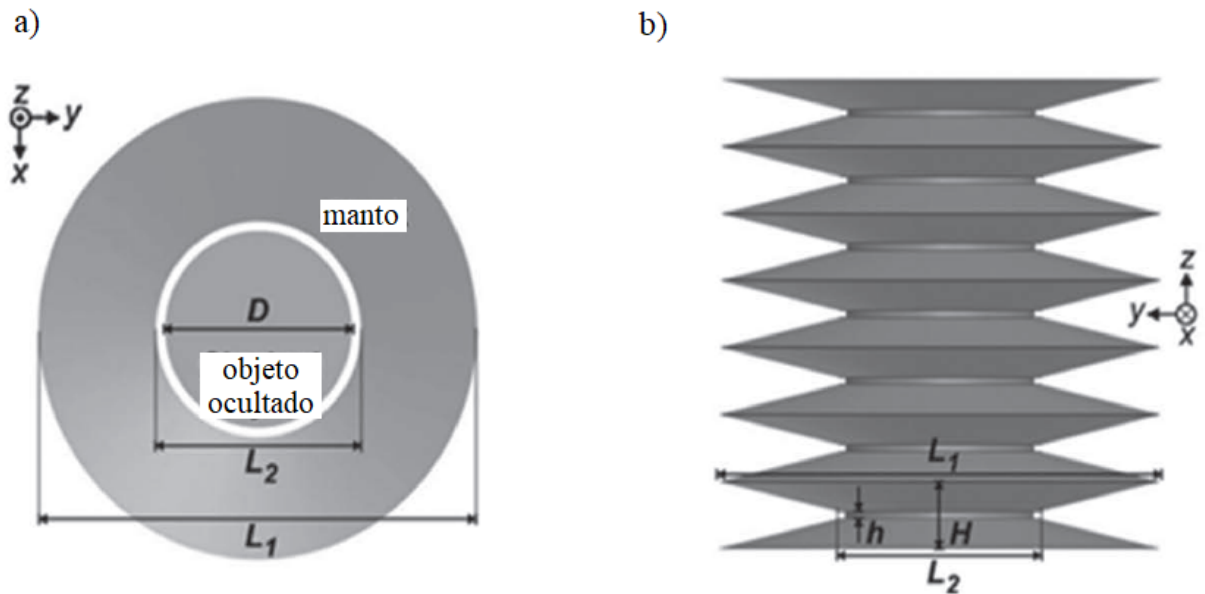


Figura 4 – Manto de invisibilidade 3D construído com a técnica de CE nas visões: (a) frontal e (b) lateral [38].

dimensões. Apesar dessa desvantagem, esse manto ainda é considerado atraente devido à sua relativa facilidade de fabricação, apesar de utilizar metamaterial em sua implementação, e tolerância em relação às imperfeições do processo de construção e perdas ôhmicas. Na Figura 4 (a) e (b) [38] pode ser verificada a geometria desse manto 3D nas visões frontal e lateral, respectivamente.

Um outro exemplo é o trabalho apresentado em [57] que propõe um tapete de invisibilidade 2D teórico desenvolvido com a técnica de CE. O projeto é composto por uma camada extremamente fina de metasuperfície [58] formada por nanoantenas cilíndricas de ouro com diferentes diâmetros e alturas. As nanoantenas de tamanhos distintos proporcionam respostas de fase e amplitude ajustáveis, visando alcançar uma eficiente invisibilidade [57]. Na Figura 5 (a) [57] verifica-se o modelo de simulação de uma única nanoantena. Essa camada, que cobre o objeto a ser ocultado, introduz uma distribuição de fase local compensando as diferenças de fase entre a deformação na superfície e o plano de referência. Logo, o manto desenvolvido torna-se independente da polarização utilizada e a luz refletida comporta-se como uma onda plana. Na Figura 5 (b) [57], tem-se a visão do tapete de invisibilidade 2D formado por uma camada de metasuperfície. Além da independência da polarização dos raios incidentes, destaca-se pela facilidade de fabricação quando comparado a outros tapetes de invisibilidade desenvolvidos com metamateriais. Entretanto, o projeto mostra-se sensível à variação do comprimento de onda e a invisibilidade somente é alcançada em 730 nm, possuindo uma faixa estreita de operação. Essa limitação é devido à resposta de fase ser dependente do comprimento de onda utilizado. Ou seja, para uma outra frequência de operação, tem-se uma diferente resposta de fase

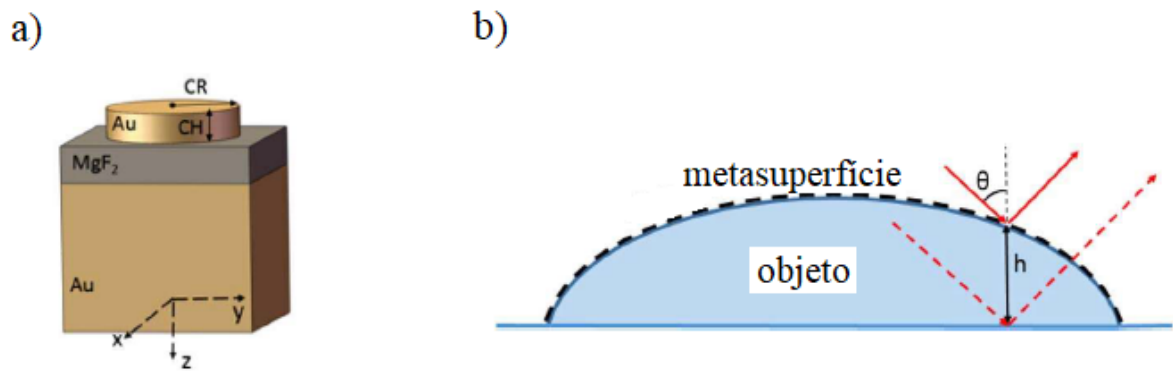


Figura 5 – Tapete de invisibilidade 2D desenvolvido com a técnica de CE: (a) modelo de uma nanoantena cilíndrica e (b) esquemático do manto formado por metasuperfície [57].

da qual o projeto foi especificado e, conseqüentemente, a invisibilidade é comprometida. Outra desvantagem é que o seu funcionamento deve-se ao uso de materiais artificiais, necessitando de processos mais elaborados em sua fabricação.

O desenvolvimento das técnicas de TO e CE apresentam diferenças, conforme será visto na Seção 2.6. Ao compará-las, verifica-se um ponto de maior divergência, sendo a TO apropriada a projetos cujo comprimento de onda é maior que o menor detalhe possível de ser construído e o objeto a ser ocultado é maior que o comprimento de onda de operação. Entretanto, a técnica de CE é limitada na ocultação de partículas dielétricas, às quais devem possuir dimensões menores que o comprimento de onda utilizado, como por exemplo, partículas que apresentam pequenas seções transversais [55]. Logo, essa estratégia apresenta-se limitada à invisibilidade de objetos em escala de sub-comprimentos de onda [59, 60].

Um desafio ao utilizar a abordagem CE é encontrar materiais cuja frequência de plasma coincida com a de operação do projeto, e ainda assim, continue apresentando perdas moderadas [60]. Outra limitação ao utilizar os mantos plasmônicos de camada única é a sua operação em uma faixa limitada de frequência e também impossibilidade de ocultação de objetos maiores. A necessidade de conhecimento prévio das propriedades do objeto a ser camuflado, para se projetar o manto, também é observada [55]. Na Seção 2.4 será apresentada uma nova técnica para o desenvolvimento de mantos de invisibilidade, visando contornar essas limitações.

## 2.4 Técnica de Cancelamento do Espalhamento com Múltiplas Camadas

No intuito de contornar as dificuldades e desafios mencionados na Seção 2.3, tem-se uma derivação da técnica de CE. A principal diferença dessa nova abordagem refere-se ao manto de invisibilidade ser constituído por múltiplas camadas. A técnica baseada em CEMC tem como objetivo a redução do espalhamento das ondas eletromagnéticas que entrarem em contato com o manto de invisibilidade. A estrutura baseada em múltiplas camadas possibilita a camuflagem em várias frequências e também possui a capacidade de ocultação de objetos maiores, cancelando várias ordens de dispersão [38, 61].

A técnica de CEMC utiliza a TC como condição inicial de projeto para definir a geometria do manto, o qual é composto por múltiplas camadas de materiais anisotrópicos e homogêneos. Cada camada pode ser caracterizada por tensores de permissividade e permeabilidade constantes com a posição, dentro de uma camada. Em seguida, esses parâmetros constitutivos são otimizados com o objetivo de encontrar um conjunto de valores que minimizem a dispersão do manto. A otimização também possibilita definições iniciais para o projeto, como características e restrições relacionadas ao desenvolvimento e construção do manto, minimizando a complexidade da sua implementação [39, 62].

Essa técnica foi empregada no dispositivo apresentado em [39], no qual foram utilizadas três camadas concêntricas no desenvolvimento de um manto cilíndrico 2D para ondas eletromagnéticas e frequência de operação igual a 2 GHz. A Figura 6 [39] mostra a incidência de uma onda plana sobre o manto de invisibilidade constituído por três camadas, cujo raio externo possui valor igual a  $b$ , circundando um objeto formado por um condutor elétrico perfeito – *Perfect Electric Conductor* (PEC) de raio igual a  $a$ . Nesse projeto foi utilizado o método de otimização Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) [63]. Os resultados mostraram que o manto otimizado com três camadas possui desempenho cem vezes superior quando comparado a um manto discretizado em três camadas, obtido por meio da TC, e sem otimização. Entretanto, o manto otimizado apresentou dificuldades relacionadas à implementação. Os parâmetros  $\epsilon$  e  $\mu$  possuem altos valores, o que dificulta a construção e operação em frequências elevadas [39]. Logo, restrições ao material e aos valores dos parâmetros constitutivos foram impostas, visando a simplificação na fabricação. Com isso, foi verificado o desempenho de um manto otimizado com restrições nos valores de  $\epsilon$  e  $\mu$ . Embora tenha ocorrido uma redução no desempenho do manto otimizado devido às restrições aplicadas, o dispositivo ainda mostrou-se superior ao manto analítico discretizado de três camadas e sem otimização, alcançando uma maior redução no espalhamento do campo provocado pelo objeto ocultado. O projeto desse dispositivo também apresentou funcionamento limitado à polarização transversal magnética (TM) da onda incidente [39].

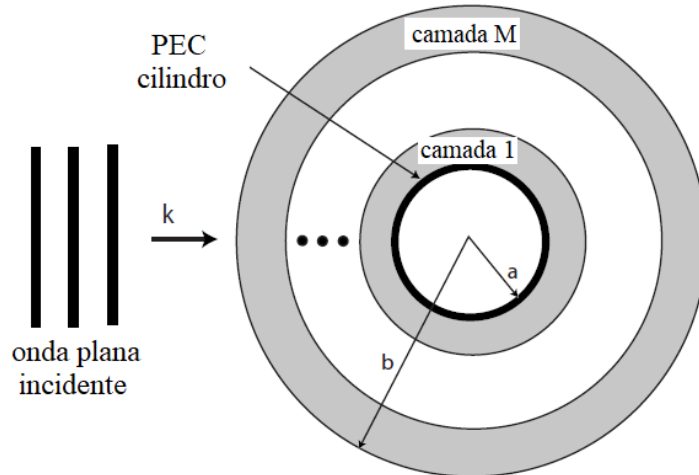


Figura 6 – Manto de invisibilidade 2D desenvolvido com a técnica de CEMC formado por três camadas ao redor de um objeto cilíndrico a ser ocultado [39].

O projeto proposto em [64] realizado à partir da estrutura apresentada em [65], também faz uso da técnica de CEMC no desenvolvimento de um manto de espaço livre cilíndrico 2D. Nesse dispositivo foi utilizado o algoritmo de otimização global denominado Otimização por Enxame de Partículas – *Particle Swarm Optimization* (PSO) [66]. Os resultados indicam uma redução do espalhamento do campo eletromagnético, alcançando o efeito de invisibilidade. Porém, esse efeito somente ocorreu na frequência central da banda de atuação do projeto. Portanto, verificou-se que quanto menor a dispersão eletromagnética e, conseqüentemente, melhor o efeito da invisibilidade, maior será a limitação na largura de banda de operação do dispositivo. O funcionamento do manto proposto também se apresentou limitado à polarização *TM* das ondas eletromagnéticas [64].

Em [59] foi apresentado o projeto de um manto de espaço livre cilíndrico 2D com o uso do algoritmo Genético [67]. Esse método de otimização global possibilitou o desenvolvimento de um dispositivo com um número reduzido de camadas anisotrópicas, quando comparado ao manto proposto em [29], e com uma baixa dispersão das ondas eletromagnéticas, o que contribui para um melhor efeito de invisibilidade. Porém, o uso desse algoritmo implicou em limitações nos valores dos parâmetros constitutivos dos materiais e também na espessura total do manto [59]. Essas limitações ocasionam dispersões no dispositivo quando analisado fora de sua frequência de operação, ou seja, o seu desempenho apenas é garantido em uma estreita faixa de frequência. As impedâncias entre as camadas adjacentes do manto também não coincidem entre si, o que pode ocasionar reflexões em suas extremidades. Outras restrições desse projeto são o seu funcionamento limitado a ondas com polarização transversal elétrica (*TE*) e construção somente com o uso de metamateriais [59].

Mantos de invisibilidade com características isotrópicas também têm sido investigados como uma alternativa ao uso de metamateriais em suas demonstrações experimen-

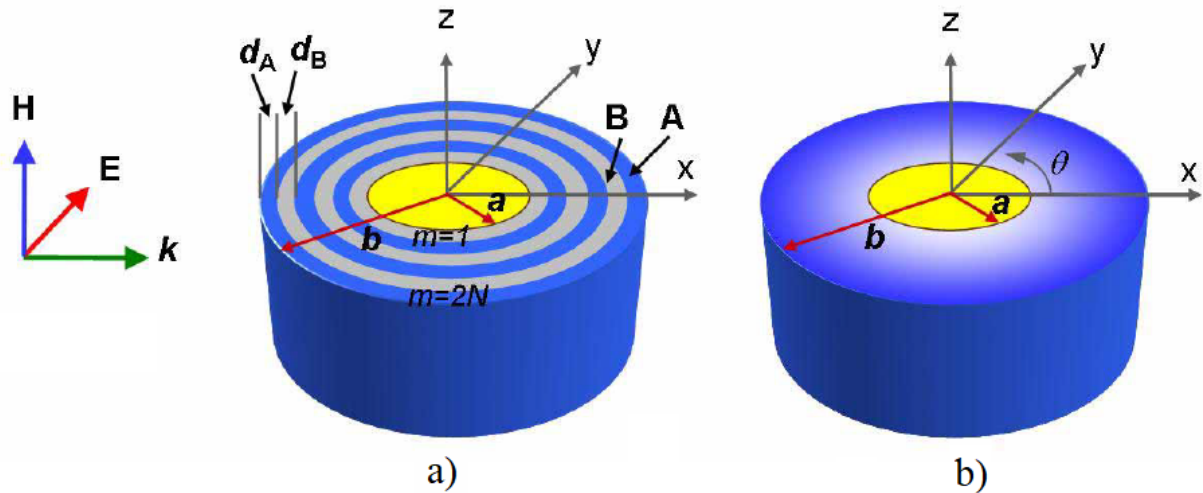


Figura 7 – Manto de invisibilidade 2D desenvolvido com a técnica de CEMC. (a) Estrutura de camadas concêntricas formadas por dielétricos alternados A e B, envolvendo um cilindro condutor infinito (em amarelo). (b) Cilindro anisotrópico equivalente com parâmetros de material dependentes do raio. O objeto cilíndrico ocultado possui raio de valor  $a$  e o manto equivalente possui raio igual a  $b$  [69].

tais. O efeito anisotrópico obtido à partir da TC pôde ser alcançado por meio de finas camadas isotrópicas, facilitando a implementação desses mantos com materiais encontrados na natureza. Esse estudo foi verificado em [68], e no trabalho proposto em [69] foi desenvolvido um manto cilíndrico concêntrico 2D com diferentes camadas alternadas de materiais dielétricos, isotrópicos, homogêneos, conforme ilustrado na Figura 7 (a) [69]. Esse projeto operou somente em uma estreita faixa de frequência e polarização TM, e sua estrutura em camadas comportou-se como um meio anisotrópico efetivo. Esse efeito é mostrado na Figura 7 (b) [69]. Porém, devido a simplificações no conjunto dos parâmetros constitutivos e, conseqüentemente, descasamento de impedância entre as camadas, reflexões indesejadas ocorreram nos contornos do dispositivo.

Seguindo essa última abordagem, em [70] os autores projetaram mantos de espaço livre 2D com múltiplas camadas compostas por diferentes materiais isotrópicos, não-magnéticos, homogêneos e também com camadas constituídas por materiais dielétricos e plasmônico para se alcançar o efeito de anisotropia na permissividade elétrica. Uma diferença entre esse dispositivo e o desenvolvido em [69] foi o uso de material plasmônico na composição da diferentes camadas do manto. A Figura 8 [70] mostra a ilustração desse manto, com operação para polarização TM. Outra característica não utilizada em [69], porém considerada nesse experimento foi o uso do algoritmo Genético [67] como método de otimização da permissividade e espessura das camadas concêntricas. Esse procedimento possibilitou uma maior redução do espalhamento eletromagnético com um menor número de camadas utilizadas e, conjuntamente, uma maior simplificação para uma demonstra-

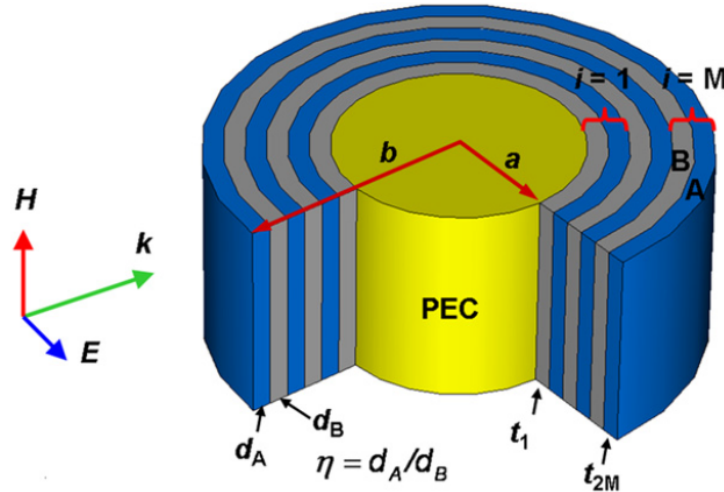


Figura 8 – Manto de invisibilidade 2D desenvolvido com a técnica de CEMC. O objeto oculto de formato cilíndrico e raio  $a$  é um PEC. Esse objeto é circundado por multi-camadas concêntricas, que constituem o manto. Sua camada externa apresenta raio com valor igual a  $b$  [70].

ção prática do manto, quando comparado aos mantos anisotrópicos não-otimizados. Entretanto, conforme citado anteriormente, reflexões e perda de desempenho do dispositivo são observadas devido a redução no conjunto de parâmetros constitutivos, que contribuem para viabilizar a sua implementação. A faixa espectral de operação dos dispositivos desenvolvidos mostrou-se dependente da dispersão dos materiais utilizados em suas camadas, comprometida principalmente por possuírem meios plasmônicos em sua composição.

Como último exemplo da técnica de CEMC, tem-se um manto que difere em alguns aspectos dos projetos apresentados anteriormente. Em [62] foi proposto um manto cilíndrico 2D com camadas concêntricas constituídas por materiais magnéticos que podem ser dispersivos ou não, para aplicações visando banda larga. Em uma primeira etapa do projeto, o manto de espaço livre foi discretizado em 10 camadas anisotrópicas homogêneas [69]. Após cada camada ter o seu comportamento aproximado a um par de materiais isotrópicos, homogêneos e concêntricos de duas camadas, a composição do manto foi substituída por 20 camadas organizadas alternadamente com os dois tipos de materiais isotrópicos. Em seguida, seus parâmetros foram otimizados utilizando o algoritmo Genético [67]. Foi apresentado que para uma frequência central de 1 GHz foi possível alcançar uma largura de banda de 80% (800 MHz) para um manto otimizado não-dispersivo. Para um manto otimizado dispersivo, a largura de banda reduz para 4% (40 MHz), devida à alta sensibilidade dos parâmetros materiais em relação à frequência. Ao verificar o seu comportamento para uma frequência de operação ou largura de banda maiores, tornou-se necessário aumentar o número de camadas do manto de espaço livre ou utilizar um maior número de parâmetros durante o processo de otimização. Logo, verificou-se uma limitação na faixa de operação do projeto ao considerar frequências acima do que foi inicialmente

proposto.

## 2.5 Técnica de Linha de Transmissão

A técnica **LT** [40, 71–73] baseia-se no uso de redes de linhas de transmissão. O manto de invisibilidade consiste em um conjunto de linhas de transmissão colocadas uma sobre a outra, formando grades ortogonais de linhas de transmissão com uma camada de transição ao redor dessas grades. Essa camada é responsável por acoplar a onda eletromagnética (que se propaga no espaço livre) na rede e, novamente, redirecioná-la ao ambiente de origem. Dessa forma, a onda viaja ao longo das linhas de transmissão e sai suavemente do manto, comportando-se como se tivesse propagado somente no espaço livre. Ou seja, qualquer objeto colocado dentro do volume e entre as unidades de célula da rede de linhas de transmissão, não modificam a trajetória da onda. O período, ou seja, a dimensão de uma unidade de célula dessa rede é pequena quando comparado ao comprimento de onda operacional. Dessa forma, a rede se comporta como um meio efetivamente homogêneo e isotrópico.

O primeiro manto utilizando a técnica **LT** foi um manto de espaço livre **2D** proposto por Alitalo *et al.* [72] e experimentalmente demonstrado em [73], no ano de 2008. A Figura 9 [72] traz a ilustração do manto **LT**, cuja operação não é dependente do ângulo de incidência da onda eletromagnética, desde que o período da rede de linha de transmissão seja suficientemente pequeno em relação ao comprimento de onda. Esse manto de invisibilidade de formato cilíndrico e demais projetos consecutivos [40, 71, 74] utilizaram tiras metálicas simétricas e paralelas para formar as redes de linhas de transmissão. A camada de transição desses projetos foi realizada ampliando gradualmente as linhas de transmissão de tiras paralelas para acoplar as ondas eletromagnéticas entre o espaço livre e a rede desenvolvida.

Em [75] foi desenvolvido um manto **LT 3D**, cuja construção da estrutura tornou-se mais rápida e precisa, quando comparada aos mantos mencionados anteriormente e construídos com essa técnica. Nesse projeto, discos metálicos cônicos e sólidos foram utilizados na camada de transição, ao invés de tiras paralelas. Isso contribuiu para simplificar a construção do dispositivo, possibilitando a confecção de uma estrutura mais rígida e com camada de transição menos dependente da frequência de operação do manto de invisibilidade. A Figura 10 (a), (b) e (c) [75] apresenta a geometria desse manto **3D** nas visões dos planos  $xy$ ,  $xz$  e corte da metade de um período do manto ao longo do plano de simetria  $xz$ , respectivamente.

Na literatura, também foram abordadas as redes de linhas de transmissão com cargas, constituídas por um conjunto de elementos periodicamente conectados como capacitores e indutores, e também as redes sem cargas [72]. Nas redes com cargas é possível



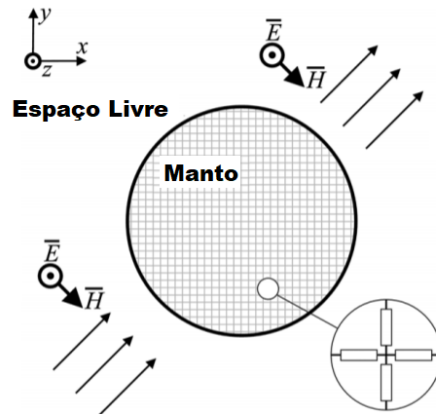


Figura 9 – Manto de invisibilidade 2D desenvolvido com a técnica LT [72].

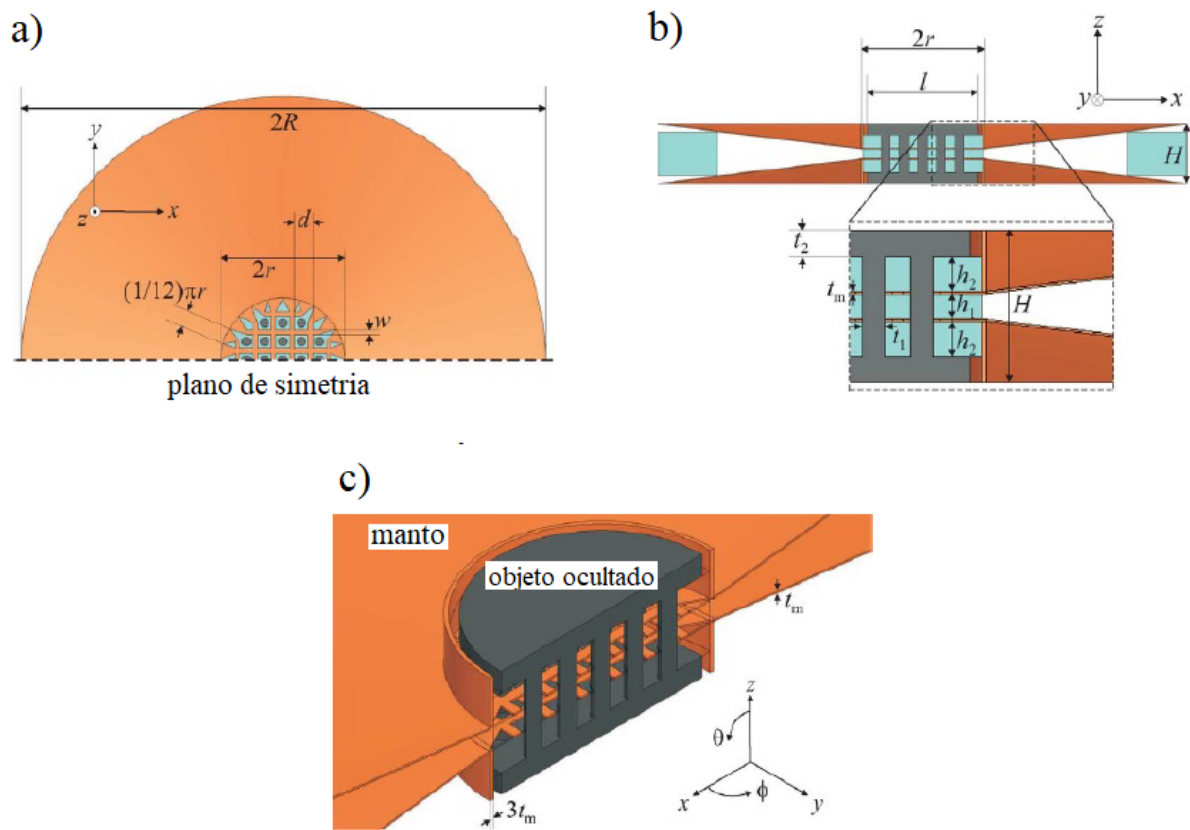


Figura 10 – Geometria do manto de espaço livre 3D desenvolvido com a técnica LT nas visões dos planos: (a)  $xy$ , (b)  $xz$  e (c) corte da metade de um período do manto ao longo do plano de simetria  $xz$  [75].



ajustar os parâmetros efetivos do material e a impedância de onda, permitindo o casamento das propriedades do dispositivo com as do espaço livre, o que resulta em um melhor desempenho no efeito de ocultação do manto **LT**. Por outro lado, as redes sem cargas apresentam vantagens em relação às redes com cargas, por se tratarem de uma estrutura mais simples e com menor dispersão em aplicações que exigem maior largura de banda [72].

A abordagem empregada na técnica **LT** apresenta-se como uma alternativa ao uso das técnicas de **TO**, **CE** e **CEMC**. Os mantos de invisibilidade **LT** apresentam algumas vantagens, como facilidade na fabricação do dispositivo, pois não necessitam do uso de materiais plasmônicos ou materiais artificiais em sua construção. Também possibilitam o desenvolvimento de projetos banda larga, com desempenho satisfatório na ocultação de objetos. Porém, verifica-se que esse tipo de manto somente consegue ocultar objetos pequenos que se encaixem entre as camadas da rede volumétrica, ou um objeto maior que possibilite a rede de linha de transmissão passar por dentro dele [40, 71].

Diversas aplicações estão relacionadas ao uso dessa técnica, principalmente na área de telecomunicações em rádio frequências. Mantos de invisibilidade **LT** têm sido utilizados para ocultar mastros ou estruturas de suporte de antenas, evitando assim o bloqueio ou distorções no padrão de radiação [75]. Nesse caso, os objetos a serem ocultados possuem estrutura em malha, possibilitando a interação com esse tipo de manto.

## 2.6 Técnica da Transformada Óptica

A **TO** [7, 8, 16, 56] é uma poderosa técnica utilizada para controlar a propagação de ondas eletromagnéticas e projetar os mais variados tipos de dispositivos ópticos complexos, por meio da **TC**. Idealmente, as transformações resultantes no meio tornam-se capazes de guiar a luz em torno do objeto a ser ocultado pelo manto e retornar à mesma trajetória de origem, como se nenhum objeto tivesse sido escondido [76]. Isso é possível devido à invariância das equações de Maxwell sob a transformação geométrica para qualquer tipo de onda incidente [14]. Essa discussão será aprofundada e detalhada no Capítulo 3. Como resultado, os tensores de permeabilidade e permissividade são os únicos a serem modificados com o uso dessa técnica, sendo utilizados para projetar os dispositivos desejados com funcionalidade específica [8, 16].

Nos últimos anos, a aplicação da **TO** para a concepção de mantos de invisibilidade tem atraído muita atenção, devido a sua capacidade de ocultar e tornar objetos invisíveis a um observador. Embora essa aplicação [7, 8, 25–29, 35, 77, 78] destaque-se como a mais reconhecida no campo da **TO**, diversos dispositivos fizeram uso dessa abordagem, como lentes perfeitas [22, 79], guias de onda ópticos [24, 46, 47], compressores [18, 24], divisores de polarização [19, 80, 81], concentradores de ondas eletromagnéticas [20, 82, 83], buracos ne-

gros ópticos [14,21], cavidades eletromagnéticas [23,84,85], entre outros. Entretanto, para obter o controle de propagação de onda desejado, a TO pode resultar em requisitos materiais incomuns, não encontrados na natureza. Também apresentam propriedades físicas com valores elevados, quando comparados aos do vácuo, e dependentes da direção e posição, como a permeabilidade e permissividade altamente anisotrópicos e não-homogêneos e com índice de refração negativo [8,39,59,62].

Diferentes estratégias têm sido utilizadas com o objetivo de contornar as dificuldades inerentes da técnica de TO e viabilizar a sua implementação. Uma delas é a utilização de materiais artificiais com propriedades não convencionais, denominados metamateriais eletromagnéticos [29]. O desenvolvimento desses materiais possibilitaram alcançar especificações complexas de projeto, como o controle independente da permissividade e permeabilidade com uma ampla gama de valores, podendo atingir extremos positivos ou negativos, e também o controle da anisotropia [12,29,86]. Entretanto, metamateriais fabricados a partir de estruturas ressonantes estão sujeitos a absorção, efeito amplificado nos dispositivos ao serem minimizados para atuarem em frequências ópticas [61]. Logo, além de não serem naturalmente disponíveis, os metamateriais possuem a desvantagem de serem limitados em frequência, possuindo uma estreita faixa de operação.

Outra alternativa capaz de superar os efeitos da TO é o uso de mapeamentos conforme [7] ou quase-conforme [26] na TC. Esses mapeamentos permitem alcançar uma transformação que resulta em materiais isotrópicos ou quase-isotrópicos. Os tipos de mapeamento possíveis de serem empregados no desenvolvimento de mantos de invisibilidade, obtidos por meio da TO, também serão aprofundados no Capítulo 3.

A necessidade de aplicar métodos de simplificação ou otimização de parâmetros constitutivos para se alcançar um projeto exequível também é verificado em desenvolvimentos de mantos de espaço livre que utilizam a abordagem da TO [25,29,41,87]. Como consequência, reflexões não-nulas podem ocorrer nas interfaces desses dispositivos. Isso é resultante do descasamento de impedância entre o manto e o ar, que consequentemente reduz a eficácia da invisibilidade alcançada. Nas Seções 2.6.1 a 2.6.4 serão exemplificados projetos e construções de mantos de invisibilidade 2D e 3D que utilizam essas estratégias, dentre os quais encontra-se o estado da arte na área da TO.

### 2.6.1 Mantos de Espaço Livre Bidimensionais

Os trabalhos apresentados em [7,8] tornaram-se os precursores no desenvolvimento de mantos de invisibilidade com o emprego da técnica de TO, sendo utilizados como referências em inúmeras publicações posteriores. As estratégias apresentadas por U. Leonhardt e Pendry *et al.* partem do princípio que o meio original sem deformação deve ser transformado para a obtenção de um espaço destinado à ocultação de objetos de qualquer geometria e dimensão [25]. Nesses projetos foram desenvolvidos dispositivos limitados a

operações em duas dimensões.

Em [7], o pesquisador U. Leonhardt desenvolveu um método para o projeto de meios 2D que possibilitam a ocultação de objetos maiores que o comprimento de onda da luz. O método apresentado caracteriza-se por admitir a invariância da equação de Helmholtz [16] sobre a transformação do meio. Foi proposto o desenvolvimento de um manto de espaço livre 2D com o uso de mapeamento conforme, cujo meio transformado apresentou propriedades isotrópicas. Porém, singularidade no índice de refração foi observada, exigindo que o material utilizado na fabricação desse dispositivo possuísse uma ampla faixa de índice, podendo variar de 0 a 36. Também foi verificada a existência de regiões onde o índice refrativo assumiu valores negativos, para que os caminhos ópticos mais curtos pudessem contornar o objeto ocultado sem causar distorções de fase. Portanto, essas características de projeto somente puderam ser alcançadas por meio do uso de metamateriais. Outra desvantagem apresentada foi o tipo de mapeamento utilizado, o que ocasionou o aparecimento de reflexões nas interfaces do manto com o ambiente externo. Isso é proveniente do não atendimento das condições de contorno, ocasionando a perda de invisibilidade.

Em [8], os autores J. B. Pendry, D. Schurig e D. R. Smith propuseram uma outra estratégia para o projeto de um manto de espaço livre 2D. Na Figura 11 (a) [8] verifica-se a configuração inicial de uma linha de campo eletromagnético em uma malha cartesiana. Em seguida, essa malha é distorcida visando criar um espaço que exclui completamente todos os campos eletromagnéticos de seu interior. Essas distorções são mapeadas como uma TC entre a malha cartesiana original e a malha distorcida, como ilustrado na Figura 11 (b) [8]. O escudo eletromagnético criado por meio dessa técnica para a ocultação de objetos em seu interior é mostrado na Figura 12 [8]. O cálculo do traçado de raios foi realizado para confirmar o fenômeno de invisibilidade no limite óptico geométrico, entretanto reflexões na interface do manto foram negligenciadas nesse cálculo [25]. A abordagem utilizada por Pendry *et al.* [8] nesse projeto caracteriza-se pela invariância das equações de Maxwell, porém o índice de refração ou mais exatamente os tensores de permissividade e permeabilidade estão sujeitos a uma variação de seus valores [8]. Também se verifica que a TC resulta em um meio de elevada anisotropia. Isso pode ser contornado com o uso de metamateriais, embora ainda haja a inevitável presença de singularidade nos limites internos do manto ao fazer uso de todos os parâmetros constitutivos em seu desenvolvimento [8]. Esse problema pode ser evitado com a redução do conjunto de parâmetros constitutivos utilizados, possibilitando assim, a sua construção. Entretanto, esse procedimento resulta em efeitos indesejados, como a ocorrência de reflexões nas extremidades do dispositivo. Outra desvantagem dessa proposta é a limitação de operação espectral, alcançando invisibilidade somente em uma única frequência.

A primeira demonstração experimental de um manto de espaço livre foi realizada a

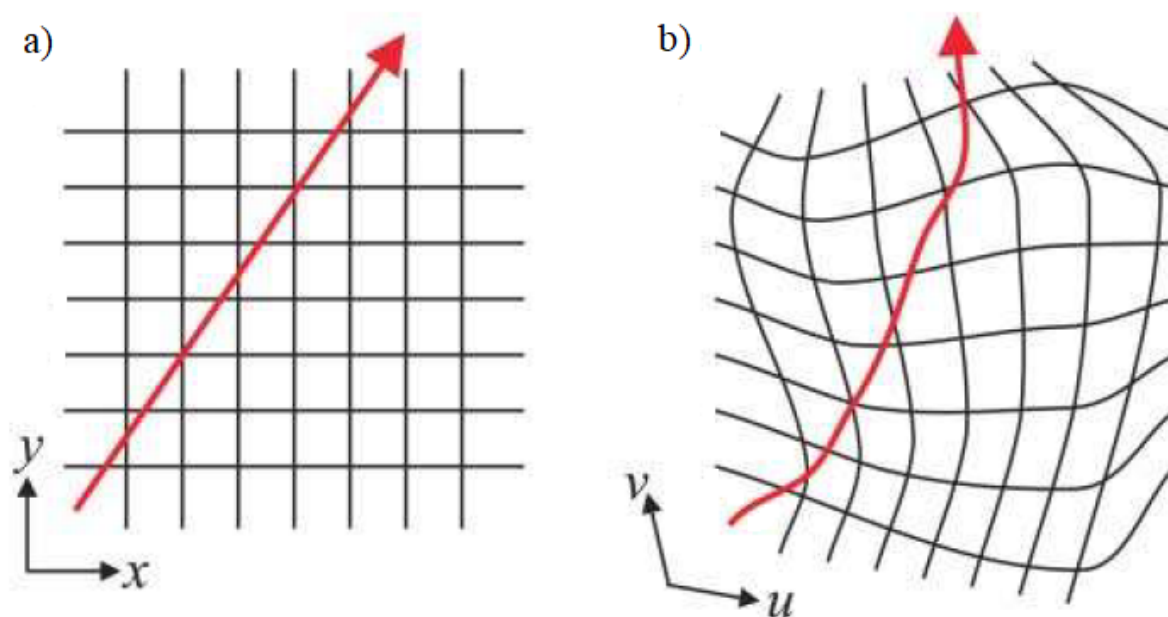


Figura 11 – Transformação do meio: (a) linha de campo, no meio original, em uma malha cartesiana e (b) linha de campo distorcida em uma malha cartesiana distorcida da mesma maneira [8].

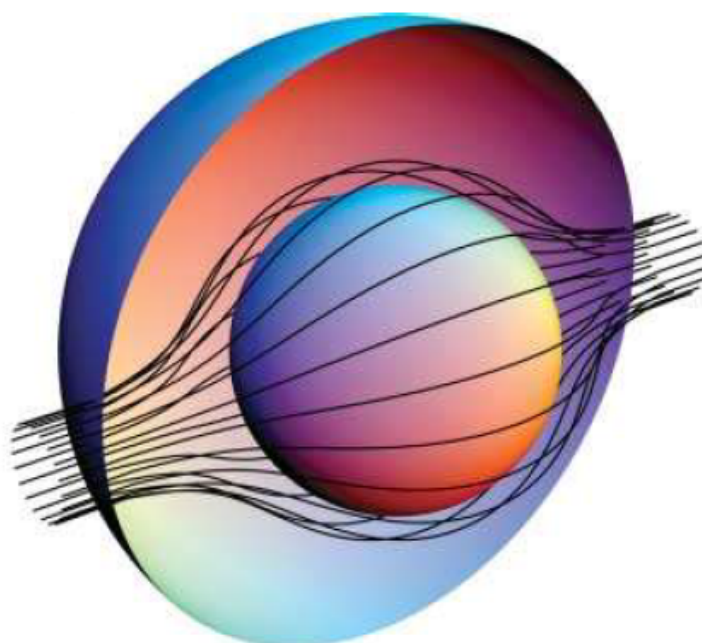


Figura 12 – Visão de um escudo eletromagnético formado no manto de espaço livre destinado à ocultação de um objeto em seu interior [8].

partir da teoria apresentada em [8]. Trata-se de um manto cilíndrico 2D e com capacidade de ocultação de um cilindro de cobre na faixa de micro-ondas [29]. Esse projeto possibilitou a ocultação de objetos maiores em relação ao comprimento de onda de operação. A construção desse dispositivo foi somente possível devido à simplificação do conjunto de propriedades constitutivas do material, sendo alcançada por meio da polarização do campo elétrico paralelo ao eixo de coordenadas do manto, ou seja, a polarização TM. Nesse caso, apenas  $\varepsilon_z$ ,  $\mu_\Theta$  e  $\mu_r$  foram relevantes, cujos dois primeiros parâmetros permaneceram constantes e o último variou radialmente ao longo da estrutura, respectivamente [29]. Esse conjunto de parâmetros pôde ser obtido por meio de metamateriais ressonantes artificialmente estruturados, utilizando ressonadores de anéis partidos – *split-ring resonators* (SRRs) com seus eixos posicionados ao longo da direção radial do manto, conforme mostrado na Figura 13 [29]. Os SRRs destacam-se como uma estrutura de anéis metálicos concêntricos, com fendas nas extremidades opostas e capaz de criar um forte acoplamento magnético em resposta a um campo eletromagnético aplicado [88–90]. Verificou-se que a invisibilidade alcançada pelo dispositivo não é perfeita, devido ao aparecimento de reflexões e sombreamento nas extremidades do manto [29]. Isso é resultante das simplificações empregadas no processo construtivo que provocam o descasamento entre a impedância do manto e a do ar, e também em razão da absorção do material utilizado em sua implementação. Além disso, as propriedades eletromagnéticas dos SRRs são dependentes da frequência, de modo que o manto projetado possui capacidade para operar em banda estreita. Fora dessa faixa, as perdas se tornaram relativamente elevadas.

Em [30] é proposto um manto de espaço livre 2D com formato elíptico e TC aplicada em um sistema elíptico-cilíndrico. Nessa abordagem, o dispositivo comprime o objeto encoberto em um segmento de linha ao invés de um ponto, evitando a ocorrência de parâmetros singulares conforme verificado nas idealizações primárias [7, 8]. Isso possibilita o desenvolvimento do dispositivo com um conjunto completo de parâmetros constitutivos, utilizando metamateriais não-homogêneos e uniaxialmente anisotrópicos. Seus parâmetros também se destacam por apresentarem pequenos intervalos de variação, contribuindo assim, para a sua construção. O manto elíptico possui a capacidade de ser reduzido a um manto aproximadamente circular, caso o foco da elipse seja ajustado para um pequeno valor [30]. A invisibilidade pode ser alcançada para ondas planas incidentes com polarização TE ou TM, na faixa de micro-ondas. Uma desvantagem desse manto é a dependência em relação ao ângulo de incidência da onda eletromagnética. Ou seja, um espalhamento mínimo dos campos magnéticos foi observado quando a direção incidente das ondas planas é paralela ao longo do eixo da elipse [30]. Porém, quando as ondas incidentes são perpendiculares ao eixo, verificou-se um grande espalhamento fora da região de ocultamento [30]. As inevitáveis perdas inerentes ao uso de metamateriais artificiais também foram notadas [14].

Outra demonstração experimental de um manto de espaço livre foi relatada por

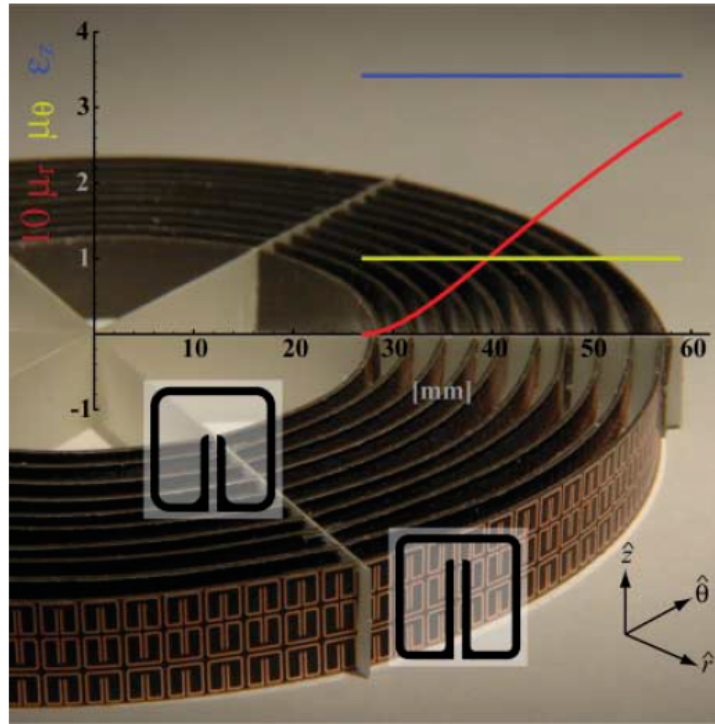


Figura 13 – Manto de espaço livre 2D criado a partir de estruturas de metamateriais ressonantes impressas em substrato flexível [29].

Kanté *et al.* em [31]. Trata-se de um manto cilíndrico, não-magnético, construído com metamateriais anisotrópicos produzidos a partir de SRRs e operação em frequências de micro-ondas. A figura 14 (a) [31] apresenta o manto proposto construído com placas de circuito impresso dispostas em um molde de silicone e a figura 14 (b) [31] mostra a estrutura final do dispositivo construído. Esse projeto se mostrou similar ao apresentado em [29] e apenas difere desse último pelo tipo de polarização empregada. Nessa abordagem foi utilizada a resposta elétrica para se obter a variação do parâmetro  $\epsilon_r$ , necessária para a implementação do dispositivo. Em [29], utilizou-se a resposta magnética visando o ajuste de  $\mu_r$ . O princípio aplicado no desenvolvimento possibilitou a substituição de SRRs por fios metálicos simples, mantendo sua compatibilidade com as técnicas de nanofabricação atuais, tornando-o capaz de atuar no domínio óptico. Destaca-se pela capacidade de ocultação de objetos maiores, quando comparado ao manto desenvolvido em [29]. Entretanto, ao fazer uso do conjunto reduzido de parâmetros que sustenta a polarização do campo elétrico perpendicular ao eixo do cilindro (polarização TE), verifica-se a presença de reflexões nos contornos do manto. Conforme comentado anteriormente, isso é resultante do descasamento de impedância entre o vácuo e o manto, devido à simplificação dos parâmetros constitutivos utilizados. Portanto, nesse projeto observa-se a dependência da polarização para se conseguir o efeito de invisibilidade adequado e também a incapacidade de operação em uma maior faixa de frequência, a não ser que o manto seja construído novamente com uma estrutura modificada.



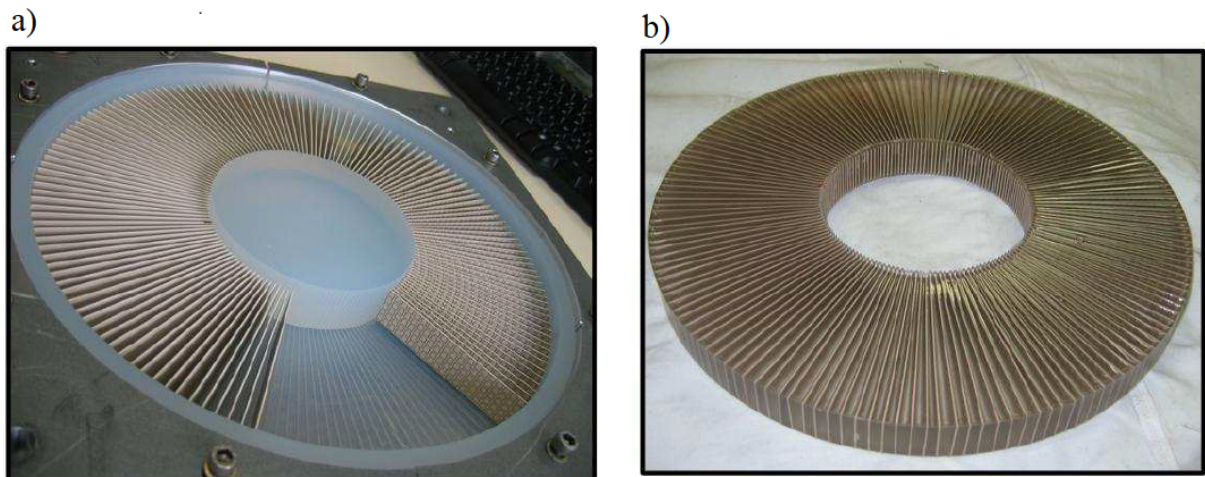


Figura 14 – Construção do manto de espaço livre 2D: (a) montagem do dispositivo desenvolvido com SRRs em molde de silicone e (b) estrutura final do manto [31].

Um estudo recente [91] também analisou o transitório de um manto de invisibilidade 2D simulado a partir de metamateriais, com o objetivo de se alcançar dispositivos mais eficazes. Foram investigadas as respostas transitórias de mantos cilíndricos com funções de transformação lineares, convexas e côncavas, a partir da incidência de um sinal sinusoidal ou um pulso gaussiano modulado, usando o Método do Domínio de Tempo de Diferenças Finitas – *Finite Difference Time Domain Method* (FDTD). Verificou-se que o tempo necessário para atingir o estado estacionário é diferente para cada um desses mantos e o seu aumento ocorre a medida que a espessura do manto diminui. Também foi observado um desvio na frequência central do pulso gaussiano na direção frontal de espalhamento, conforme reportado em [92], que pode levar à redução do efeito de invisibilidade do dispositivo.

### 2.6.2 Tapetes de Invisibilidade Bidimensionais

A dificuldade em construir o manto de espaço livre [7,8] com parâmetros completos e a imperfeição causada na invisibilidade desse manto com parâmetros reduzidos, alavancaram o desenvolvimento de um novo tipo de dispositivo, o tapete de invisibilidade [26]. Seu objetivo é ocultar objetos posicionados no chão e que estão abaixo de uma superfície condutora refletiva deformada. Ou seja, as ondas eletromagnéticas incidem sobre essa superfície e a dispersão causada pela deformação, durante a reflexão, é restaurada pelo manto. Dessa forma, as ondas incidentes comportam-se como se tivessem sido refletidas em um espelho perfeitamente plano, devido à invisibilidade adquirida pelo objeto.

O princípio de funcionamento do tapete de invisibilidade se baseia na capacidade de ocultar o objeto abaixo de uma folha condutora plana [26]. Conseqüentemente, esse efeito

não ocasiona o aparecimento de singularidade nos parâmetros constitutivos do meio, o que proporciona uma grande vantagem quando comparado aos mantos de espaço livre. Logo, o uso de metamateriais não é mandatório e é possível desenvolvê-lo com materiais isotrópicos encontrados na natureza, facilitando assim, o seu processo de construção. Também se destaca pela capacidade de operação em banda larga, podendo atuar nas regiões de micro-ondas às frequências ópticas.

O primeiro tapete de invisibilidade, projetado por Pendry *et al.*, é resultado da técnica de TO e mapeamento quase-conforme [26]. A estratégia de mapeamento desse projeto foi alcançada por meio de um gerador de grade [93] de forma a minimizar o funcional *Modified-Liao* [94, 95]. Ao atingir o seu mínimo, tem-se o mapeamento desejado. Para alcançar o mapa ótimo também foi necessário fazer uso de condições de contorno deslizantes [93] impostas ao longo do limite do dispositivo. Entretanto, essas condições ocasionam reflexões nos limites do manto, devido à descontinuidade provocada na transformação [24, 27, 46], conforme será explicado com mais detalhes no Capítulo 3. Consequentemente, verifica-se uma perda de eficiência na invisibilidade alcançada. Com a escolha da TC adequada e o mapeamento proposto foi possível reduzir a anisotropia para um valor pequeno, que pôde ser desprezado. Logo, o uso de metamateriais foi evitado, o que tornou factível considerar a construção do manto somente com dielétricos isotrópicos, apresentando índice de refração gradual e pequeno intervalo de variação de seus parâmetros. Portanto, além de maior facilidade na implementação quando comparado aos mantos de espaço livre, o tapete de invisibilidade 2D proposto destacou-se por possuir reduzida absorção e dispersão eletromagnética, o que possibilitou a operação em banda larga [26]. Outra característica favorável é a possibilidade de operação nas polarizações TE e TM das ondas eletromagnéticas que incidem sobre o tapete. Na Figura 15 [26] tem-se a representação do mapeamento entre o sistema físico e virtual do tapete de invisibilidade 2D. No lado esquerdo da Figura 15 [26] tem-se a ilustração do sistema físico, composto pelo manto deformado, o objeto ocultado e o plano de terra com especificações de um PEC. A área transformada, no domínio físico, é a região de atuação do manto. No lado direito da Figura 15 [26] é mostrado o sistema virtual, que é a configuração percebida pelo observador externo como sendo um meio homogêneo, isotrópico, com permissividade  $\varepsilon$  e permeabilidade unitária. Porém, é importante mencionar que além das reflexões provocadas pelo uso das condições de contorno deslizantes, outra desvantagem desse projeto é a baixa relação entre a região de ocultação e as dimensões do manto, o que impossibilita a invisibilidade de objetos maiores [26].

Em [44] foi proposto um método para projetos de dispositivos com o uso de TO e mapeamento quase-conforme, alcançado por meio da equação inversa de Laplace [96]. Também foram utilizadas as condições de contorno deslizantes, empregadas nos contornos do dispositivo. A equação inversa de Laplace corresponde à condição extrema do funcional de Winslow [97], que possui a propriedade de minimizar a anisotropia do meio. Conse-



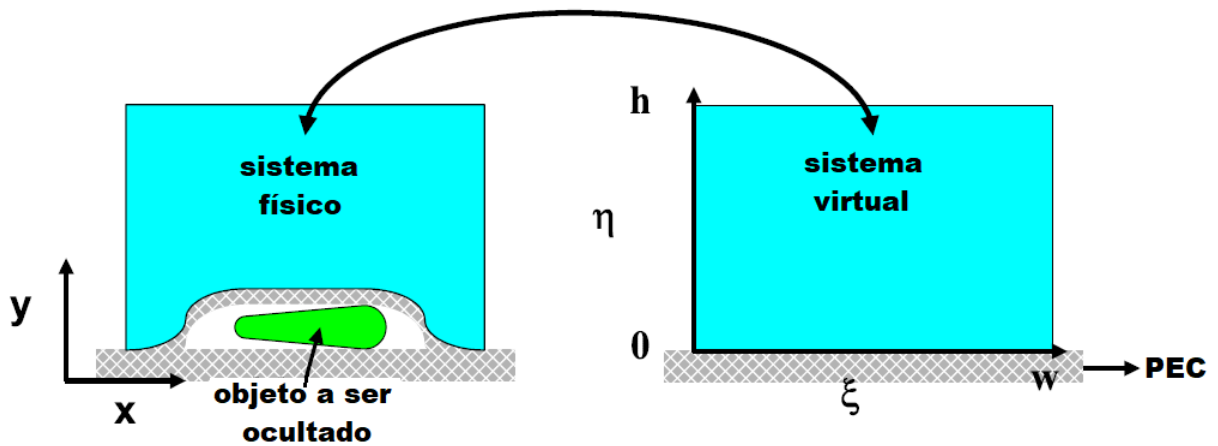


Figura 15 – Representação do efeito de invisibilidade criado no tapete 2D: a TC mapeia uma região retangular no sistema virtual para uma região arbitrária no domínio físico [26].

quentemente, o material resultante da transformação é considerado como quase-isotrópico, podendo ser encontrado na natureza. Conforme mencionado anteriormente, esse tipo de material possui reduzida absorção e o dispositivo projetado torna-se capaz de operar em um amplo espectro de frequência. Outra característica desse método é a sua maior simplicidade quando comparado à abordagem quase-conforme baseada em ferramentas de geração de grade [26]. Além das vantagens apresentadas, o tapete de invisibilidade 2D proposto não apresenta singularidade em seus parâmetros constitutivos, o que viabiliza a sua construção. Entretanto, conforme já comentado, o uso das condições de contorno deslizantes ocasionam o aparecimento de reflexões nos limites do dispositivo, reduzindo assim, o seu desempenho.

Outro exemplo relevante sobre o desenvolvimento de tapetes de invisibilidade 2D foi proposto por Junqueira *et al.* [27], o qual utilizou a técnica de TO com mapeamento quase-conforme. Diferentemente dos projetos anteriores, o mapeamento foi alcançado por meio de funções de parametrização da TC e otimização com o uso do Método dos Mínimos Quadrados – *Least Squares Method* (LSM) [46]. A estratégia de parametrização e otimização permitiram, respectivamente, a obtenção de uma interface contínua em torno do meio transformado, resultando em uma estrutura sem reflexão, e redução da anisotropia no tapete de invisibilidade 2D proposto. Séries polinomiais foram adicionadas às funções de TC, fornecendo vários graus de liberdade (GL), sem modificar as condições de contorno do dispositivo. O meio resultante da transformação é quase-isotrópico e não-homogêneo, permitindo que a anisotropia residual pudesse ser desprezada. Resultados indicam que o aumento do número de GL proporciona a redução da anisotropia a valores próximos de zero, sem causar reflexões ao redor do manto, conforme já observado em [46, 98]. Entretanto, um aumento do contraste do índice de refração é verificado, o que pode dificultar

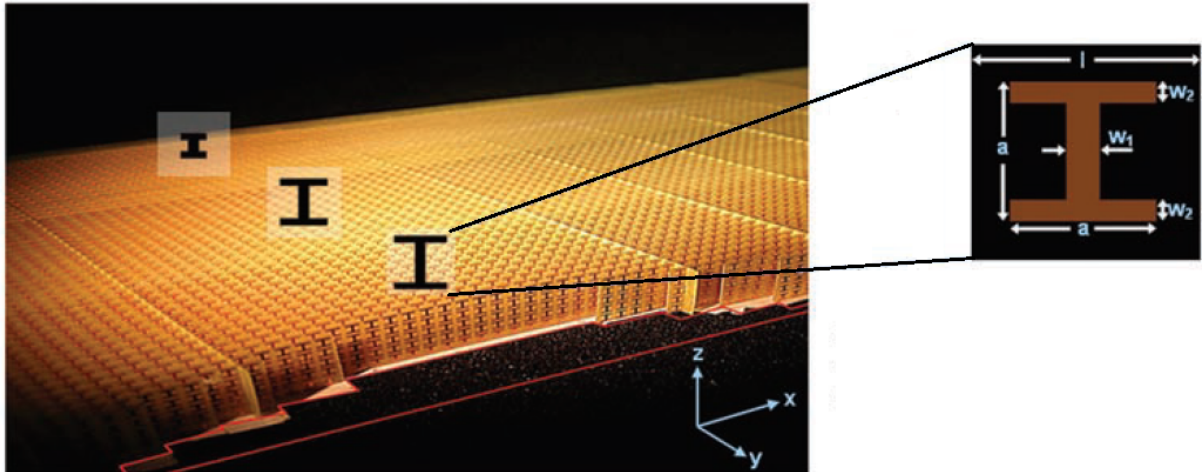


Figura 16 – Estrutura construída para o tapete de invisibilidade 2D formado a partir de estruturas metamateriais não-ressonantes. As dimensões de cada uma das células que formam o metamaterial são:  $l = 2\text{ mm}$ ,  $w_1 = 0,3\text{ mm}$ ,  $w_2 = 0,2\text{ mm}$  e  $a$  variando de 0 a 1,7 mm [32].

o processo produtivo. A abordagem desse projeto destaca-se por possibilitar que o manto de invisibilidade seja construído apenas com materiais isotrópicos [27].

A construção do primeiro tapete de invisibilidade 2D [32] ocorreu logo após a sua idealização em [26], cuja técnica de otimização foi utilizada para definir a região de transformação. O manto foi fabricado em um material de fundo dielétrico e com índice de refração igual a 1,331. Para isso, foi empregada uma placa de circuito impresso, revestida de cobre e com substrato FR4 [99]. Com a aplicação da TO e mapeamento quase-conforme [26], foi obtida a região do manto deformada responsável pela ocultação e invisibilidade do objeto. Essa região caracterizou-se por apresentar índices de refração graduais com variação entre 1,08 e 1,67, valores alcançados por meio de estruturas metamateriais não-ressonantes desenvolvidas para essa aplicação. As dimensões do dispositivo completo e do manto foram 500 mm por 106 mm, com uma altura de 10 mm, e 250 mm por 96 mm, respectivamente. A Figura 16 [32] apresenta o manto proposto constituído de células não-ressonantes. Embora o dispositivo tenha sido projetado para operar em uma ampla faixa de frequência (13 a 16 GHz), verifica-se uma restrição para atuação apenas no regime de micro-ondas e polarização TE. Outros efeitos indesejados foram o aparecimento de reflexões na interface do manto com o ar e também dispersão das ondas eletromagnéticas refletidas.

Uma implementação prática de um tapete de invisibilidade 2D, operando no domínio óptico e utilizando estruturas dielétricas na escala de sub-comprimentos de onda, pode ser encontrada em [28]. O manto possui formato triangular com uma área de  $225\text{ mm}^2$ , sendo composto por estruturas de silício, em formato de postes, e variação espacial de densidade. Esses postes possuem diâmetro de 50 nm, os quais foram inseridos em um substrato

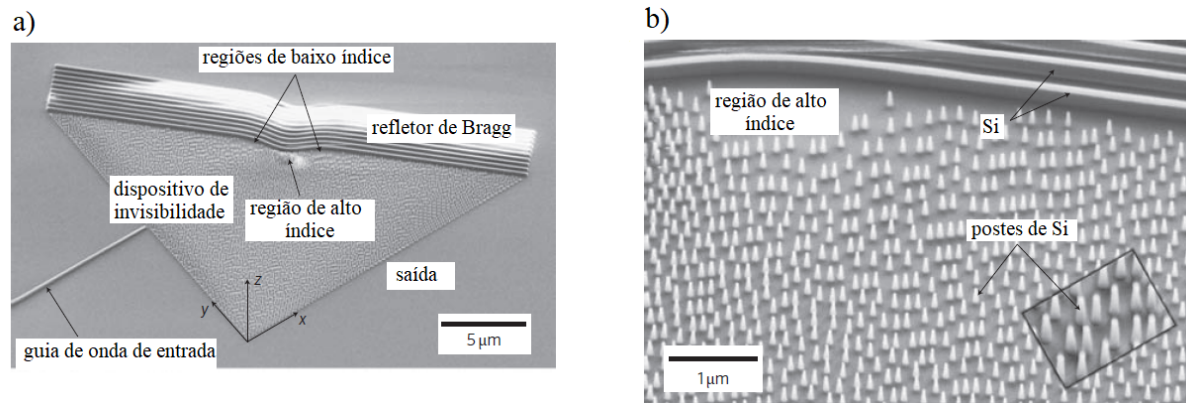


Figura 17 – Imagens de microscopia eletrônica de varredura do tapete de invisibilidade 2D: (a) estrutura do dispositivo implementado e (b) região ampliada mostrando os postes de silício na pastilha SOI [28].

de dióxido de silício. A variação de densidade foi definida por meio da **TO**, à qual se obtém a distribuição efetiva do índice de refração ao longo do dispositivo. Outra estrutura importante que compõe o tapete de invisibilidade é a superfície refletora. Sua construção consistiu de um refletor de Bragg distribuído – *distributed Bragg reflector (DBR)* formado por regiões alternadas de dióxido de silício e silício cristalino, possuindo uma deformação que encoberta uma área de  $1,6 \text{ mm}^2$ , correspondente à região destinada à ocultação de objetos. As características anteriormente descritas são mostradas na Figura 17 (a) e (b) [28], à qual se tem imagens de microscopia eletrônica de varredura do dispositivo anterior à deposição do dióxido de silício. A distribuição de índice efetivo do manto permaneceu entre a faixa de 1,45 a 2,42 e pela Figura 17 (b) [28] observa-se que as regiões de alto índice possuem uma maior concentração de postes de silício, enquanto as regiões de baixo índice quase não possuem essas estruturas. Esse dispositivo foi projetado para polarização **TM**, com operação no infravermelho (largura de banda de 400 nm ao redor do comprimento de onda de 1550 nm), e fabricado em uma pastilha de silício sobre isolante – *silicon-on-insulator (SOI)*. Essa construção se destacou por apresentar reduzida anisotropia, alcançada por meio de mapeamento quase-conforme [26]. Um dispositivo similar, com operação em frequências muito próximas também foi desenvolvido, utilizando uma estratégia diferente em sua construção [100].

Em [101], os autores Gharghi *et al.* propuseram a construção de um tapete de invisibilidade **2D** com operação na faixa de luz visível, utilizando a técnica de **TO** e mapeamento quase-conforme [26]. O manto foi fabricado em um guia de ondas de nitreto de silício sobre um substrato de óxido de silício nanoporoso, especialmente preparado para alcançar baixos índices de refração (como valores menores que 1,25). O desenvolvimento desse metamaterial, que constitui o substrato, possibilitou aumentar a faixa de índice de refração, permitindo o funcionamento do dispositivo em todo o espectro visível. A variação

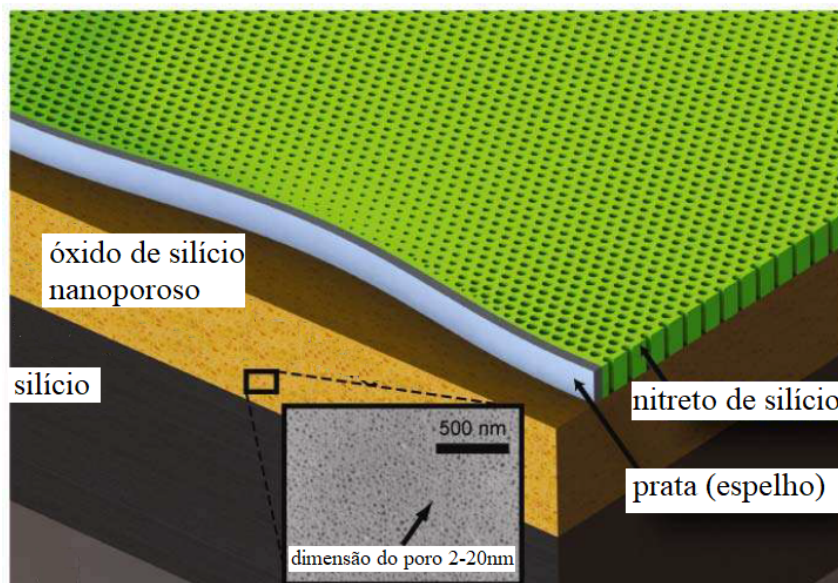


Figura 18 – Seção transversal do tapete de invisibilidade 2D construído em um guia de ondas de nitreto de silício sobre um substrato de óxido de silício nanoporoso [101].

do índice de refração, resultante do mapeamento quase-conforme no espaço transformado, foi alcançada com furos de tamanho variável perfurados em uma rede hexagonal 2D e distanciados entre si em 130 nm. O meio resultante foi uma mistura entre nitreto de silício e ar, com índices de refração variando de 1,74 a 1,83. Conforme esperado, os maiores orifícios correspondem aos menores valores de índice e estão localizados nas extremidades do manto. Ao contrário, os menores orifícios correspondem aos maiores índices, aparecendo ao redor da parte superior da deformação. Na área distante da região transformada, o índice do meio converge para 1. A deformação do manto, responsável pela ocultação do objeto, foi projetada com uma altura de 300 nm e largura de 6  $\mu\text{m}$ . A área abaixo dessa deformação foi aberta, usando o desbastamento por meio de feixe de íons focalizado – *focused ion beam* (FIB), e então foi realizada uma deposição direcional, por meio de evaporação por feixe de elétrons. O plano refletivo do dispositivo formou-se ao cobrir essa saliência aberta com prata. A Figura 18 [101] mostra um esquema transversal do manto de invisibilidade implementado. Esse projeto foi desenvolvido para polarização TE e se destaca por possuir operação em banda larga, abrangendo comprimentos de onda visíveis de 400 nm a 700 nm. Entretanto, algumas limitações foram relatadas no projeto, como por exemplo, as perdas apresentadas pelo nitreto devido à absorção na região ultravioleta ou a dificuldade de operação do guia construído em comprimentos de ondas maiores, possuindo ponto de corte na região do infravermelho. Também se verifica a necessidade de uso de metamateriais para conseguir alcançar a faixa de índice de refração desejada.

Na literatura, também é possível encontrar diferentes estratégias para projetos de tapetes de invisibilidade 2D com TO, porém sem o uso de mapeamentos conforme ou

quase-conforme. Algumas abordaram a construção de mantos macroscópicos com calcita, um cristal uniaxial anisotrópico comum e de baixo custo, o que possibilitou o uso de técnicas de fabricação mais simples e menos demoradas [102, 103]. Os dispositivos implementados por Chen *et al.* [102] e Zhang *et al.* [103] foram capazes de ocultar objetos macroscópicos em regiões com alturas de deformação iguais a 1,2 mm e 2 mm, respectivamente, encobertas por um filme metálico. Ambos se destacaram pela capacidade de operação em comprimentos de onda visíveis. Porém, verificou-se que essa estratégia se encontra limitada a projetos de duas dimensões e operação em somente um tipo de polarização, devido a birrefringência do material utilizado [9]. Outras desvantagens notadas foram a ocorrência de dispersão óptica, ocasionada pela imperfeição no alinhamento dos cristais de calcita, e também o aparecimento de reflexões na interface dos dispositivos, em decorrência do descasamento de impedância entre o manto e o meio óptico circundante.

Em outra abordagem, um tapete de invisibilidade 2D foi teoricamente projetado com TC triangular, utilizando um empilhamento periódico de camadas de grafeno anisotrópico com materiais dielétricos isotrópicos [35]. A estrutura anisotrópica e homogênea resultante foi capaz de alcançar a invisibilidade em um amplo espectro, na faixa de frequências em terahertz. Entretanto, os resultados apontaram uma atenuação dos campos eletromagnéticos refletidos devido à perda ocasionada pelo grafeno e o aparecimento de reflexões nos contornos do manto, decorrente do descasamento de impedância entre o dispositivo e o meio externo.

Um trabalho teórico que também possui uma diferente estratégia de desenvolvimento foi apresentado em [33]. Esse projeto propôs um procedimento para a obtenção de tapetes de invisibilidade 2D à partir da TO e um algoritmo de otimização, que possibilitou alcançar parâmetros homogêneos para o meio. Dessa forma, o manto triangular proposto foi desenvolvido à base de estruturas metamateriais quase-isotrópicas homogêneas, como Teflon e AN-73 [104], simplificando assim, o processo de construção. O dispositivo foi projetado para operação na faixa de micro-ondas e pôde ser utilizado em polarizações TE e TM das ondas incidentes. Além de maior simplicidade para uma futura implementação, esse manto se destacou pela capacidade de ocultação de objetos em relação a radares, especialmente o monoestático. Entretanto, verifica-se a impossibilidade de estender a utilização desse manto na faixa de frequências ópticas, devido à atenuação apresentada pelos tipos de materiais empregados [33].

### 2.6.3 Mantos de Espaço Livre Tridimensionais

Conforme verificado na Seção 2.6.1, diferentes tipos de operação e construção de mantos de espaço livre 2D foram desenvolvidos nos últimos anos. No entanto, as abordagens 3D têm gerado uma maior especulação científica, devido à possibilidade de utilização com maior eficiência ao ocultar objetos em três dimensões.



Em [36], Bao *et al.* propuseram teoricamente o projeto de um manto de espaço livre 3D cilíndrico obtido por TO e com operação em frequências terahertz. O dispositivo foi estruturado por um conjunto de 36 aletas radialmente dispostas, sendo constituído por um núcleo de polímero inserido entre camadas de revestimento de InSb (antimoneto de índio), conforme apresentado na Figura 19 (a) e (b) [36]. Os raios interno e externo do cilindro foram dimensionados com valores iguais a 181,9  $\mu\text{m}$  e 2000  $\mu\text{m}$ , respectivamente. A espessura da camada de InSb depositada sobre o polímero foi de 1  $\mu\text{m}$ . A oscilação dos portadores livres de materiais semicondutores das camadas III-V da tabela periódica [105], em frequências terahertz, possibilitaram considerar o InSb um composto com permissividade negativa [106], característica muitas vezes exigida pela TO. Dessa forma, verificou-se que o dispositivo foi capaz de fornecer uma permissividade anisotrópica e espacialmente variante em coordenadas cilíndricas. Uma possibilidade para a construção desse manto seria utilizar um processo convencional de microfabricação 3D [107], para criar o núcleo de polímero, seguido pela deposição da camada de InSb, por meio do uso da técnica de deposição de filmes finos [108]. Embora esse trabalho represente uma interessante proposta para o desenvolvimento de um manto de invisibilidade 3D, algumas desvantagens foram observadas. Os resultados obtidos por meio de simulações indicaram um padrão de espalhamento ocorrido nas extremidades das estruturas de aletas. Esse efeito provavelmente acarretaria em uma perda de desempenho do dispositivo implementado, reduzindo a invisibilidade de observador externo. Também, verifica-se a dificuldade de extensão desse projeto para operação em frequências ópticas, devido à absorção provocada pelos materiais avaliados quando utilizados em regime óptico. Uma terceira restrição desse manto é a sua operação limitada a ondas eletromagnéticas com polarização TM [36].

Outra estratégia utilizada no desenvolvimento de mantos de espaço livre baseia-se no uso da teoria do meio complementar em conjunto com a técnica de TO [109, 110]. Essa abordagem possibilita que o manto de invisibilidade oculte um objeto posicionado à região exterior de sua borda, em uma determinada frequência. Isso é possível, incorporando um objeto complementar, denominado anti-objeto, à região interna do manto, cuja permissividade e permeabilidade assumem valores negativos [111]. Dessa forma, o objeto e sua redondeza são opticamente cancelados pelo manto, formado pela camada do meio complementar e o anti-objeto. Shi *et al.* propuseram fórmulas de permissividade e permeabilidade necessárias para o desenvolvimento de mantos de espaço livre 3D, com geometrias arbitrárias, baseados na teoria do meio complementar [78]. Um esquema do manto de invisibilidade 3D proposto é apresentado na Figura 20 [78]. Simulações de onda completa demonstraram que os mantos 3D propostos apresentaram boa capacidade para a ocultação de objetos, com permissividades e permeabilidades anisotrópicas e homogêneas. Porém, conforme mencionado anteriormente, os valores desses parâmetros devem ser negativos para se alcançar a invisibilidade com a teoria proposta. Isso representa um aumento de complexidade no processo fabril e impossibilidade ao uso de materiais natu-

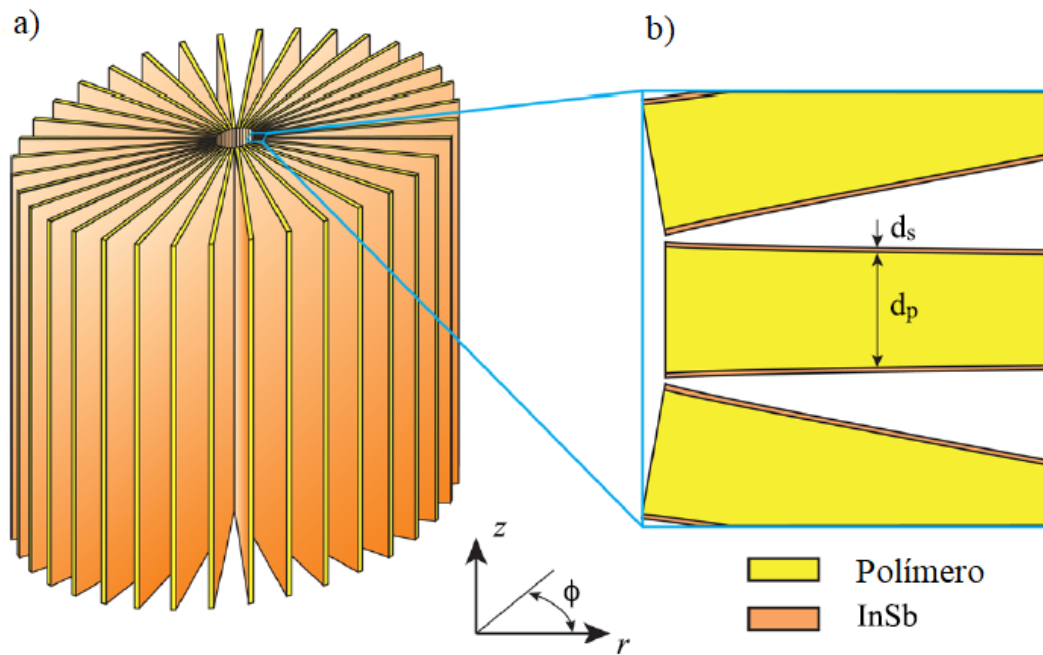


Figura 19 – Manto de espaço livre 3D. (a) Arranjo do dispositivo constituído por 36 aletas dispostas radialmente. (b) Visão ampliada da estrutura da aleta feita com núcleo de polímero inserido entre camadas de revestimento de InSb [36].

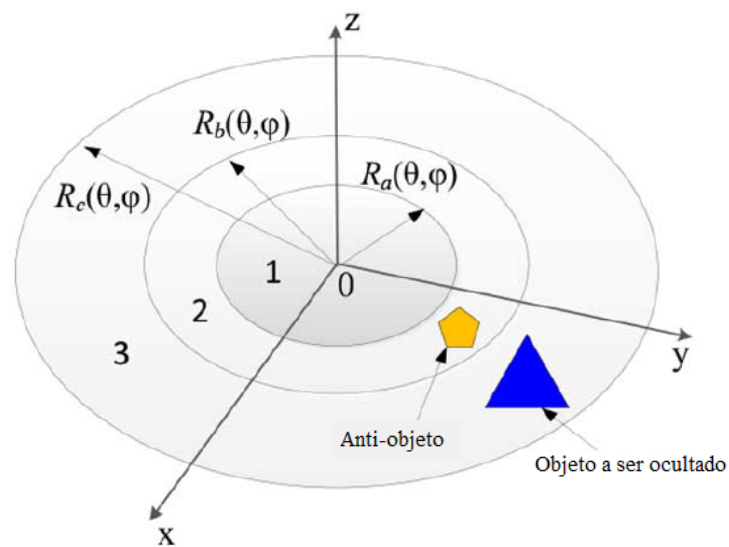


Figura 20 – Esquema de um manto de invisibilidade 3D de formato arbitrário, baseado na teoria do meio complementar, em um sistema de coordenadas esféricas [78].

raiz. Outra desvantagem é a restrição da largura de banda de operação desses dispositivos, devido à dispersão provocada pelo metamaterial [78].

As dificuldades inerentes da técnica de TO verificadas em projetos de mantos de espaço livre e somadas aos desafios de um projeto 3D, contribuíram para uma maior busca de dispositivos capazes de contornar tais limitações. Dessa forma, na literatura verifica-se um maior número de propostas para o desenvolvimento de tapetes de invisibilidade 3D,

que serão apresentados na Seção 2.6.4.

## 2.6.4 Tapetes de Invisibilidade Tridimensionais

Diferentes experimentos têm sido realizados para demonstrar a eficácia dos tapetes de invisibilidade. A maioria está relacionada à execução de projetos em duas dimensões, devido à maior facilidade em comprovar a estratégia adotada e também pela menor complexidade exigida durante a implementação. Porém, nos últimos anos, verificou-se um crescimento de abordagens ligadas ao desenvolvimento de dispositivos 3D. A maioria dessas abordagens [9, 10, 34, 37, 42, 112] empregaram a técnica da TO associada ao mapeamento quase-conforme, que será melhor discutido no Capítulo 3. Os mantos resultantes foram obtidos por processos de extrusão ou revolução de um mapa de índice refrativo 2D, como exemplificado na Figura 21 (a) e (b) [42], respectivamente.

Em [42] foi verificado o desempenho, por meio do traçado de raios [113, 114], de um tapete de invisibilidade 3D desenvolvido a partir da rotação ou revolução de um plano 2D, conforme comentado anteriormente e mostrado na Figura 21 (b) [42]. Ou seja, a geometria desse dispositivo permaneceu constante ao longo de um determinado eixo. Consequentemente, o mapeamento quase-conforme foi aplicado somente em duas dimensões e a terceira dimensão foi mantida invariante sob a TC. Esse mapeamento foi alcançado por meio de simplificações nas propriedades do material, possibilitando a implementação do tapete 3D com meios uniaxiais. Nesse projeto também foi verificada a necessidade de uso das condições de contorno deslizantes [24, 27], para garantir a ortogonalidade nos limites do dispositivo. Entretanto, os resultados simulados apontaram reflexões nos contornos do dispositivo onde o mapeamento foi aplicado, reduzindo assim, a qualidade da invisibilidade alcançada.

O projeto apresentado em [34] foi a primeira implementação prática de um tapete de invisibilidade 3D na faixa de micro-ondas. O manto de formato cilíndrico foi desenvolvido a partir da rotação de um mapa de índice de refração 2D, em torno do seu eixo  $z$ . Em sua fabricação foi utilizado um metamaterial formado por multicamadas de placas dielétricas isotrópicas, constituídas de politetrafluoroetileno e fibra de vidro, com perfurações não-homogêneas. Como resultado, o dispositivo apresentou índices de refração variando entre 1 e 1,63, obtidos por meio de mapeamento conforme [7]. Imagens da amostra fabricada e a distribuição do índice de refração são mostradas na Figura 22 (a) a (d) [34]. A altura e raio inferior do manto apresentaram dimensões de 51 mm e 62,5 mm, respectivamente. A área destinada à ocultação de objetos possui formato de um cone metálico, cujo raio e altura foram de 62,5 mm e 13 mm, respectivamente. Analisando os resultados medidos e simulados foi verificado que o dispositivo implementado apresentou capacidade de operação em banda larga e independência da polarização da onda eletromagnética incidente. Entretanto, algumas limitações foram observadas nesse projeto, como o uso de



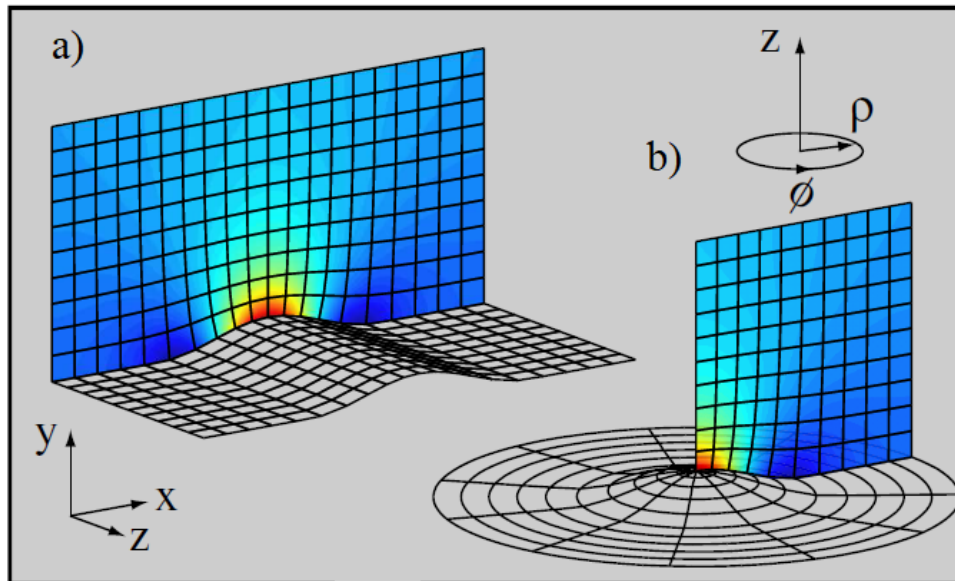


Figura 21 – Tapetes de invisibilidade 3D desenvolvidos com transformações quase-conforme obtidos por meio da: (a) extrusão de um mapa de índice de refração 2D e (b) revolução de um mapa de índice de refração 2D [42].

metamateriais, elevada complexidade no processo de fabricação e operação somente na faixa de micro-ondas [34].

Outro grupo de pesquisadores construíram um tapete de invisibilidade 3D com operação em frequências ópticas, na região do infra-vermelho [37]. O metamaterial utilizado em sua implementação foi formado por uma estrutura homogênea de cristais fotônicos dielétricos empilhados, com cada unidade de célula básica em formato cúbico. Adicionalmente, foi utilizada uma fração de enchimento de polímero, responsável por formar a região destinada à ocultação do objeto. As dimensões do manto 3D nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  foram  $26\ \mu\text{m}$ ,  $10\ \mu\text{m}$  e  $13\ \mu\text{m}$ , respectivamente. A deformação do tapete de invisibilidade foi obtida a partir da extrusão de um plano 2D, invariante ao longo da direção  $z$  e com altura igual a  $1\ \mu\text{m}$ . Na Figura 23 [37] tem-se a imagem do tapete de invisibilidade 3D proposto. Esse manto foi construído em um substrato de vidro com uma espessura de  $170\ \mu\text{m}$ . O perfil do índice de refração foi calculado usando o mapeamento quase-conforme descrito em [26]. Esse perfil foi alcançado variando a quantidade de enchimento de polímero na estrutura de cristais fotônicos. Ou seja, para uma fração de enchimento igual a 100% foi obtido um índice de refração igual ao do polímero ( $n = 1,52$ ) e para uma fração igual a 0%, o índice foi igual ao do ar ( $n = 1$ ) [37]. A camada refletiva do tapete de invisibilidade foi realizada por um processo de pulverização de ouro. Para verificar experimentalmente a ocultação de um objeto foi utilizada uma luz incidente não-polarizada, onde somente os comprimentos de onda pertencentes à faixa de  $1,5$  a  $2,6\ \mu\text{m}$  foram capazes de alcançar o efeito de camuflagem. Além da utilização de uma estrutura metamaterial em sua implementação, outra desvantagem observada foi a restrição em relação aos ângulos de

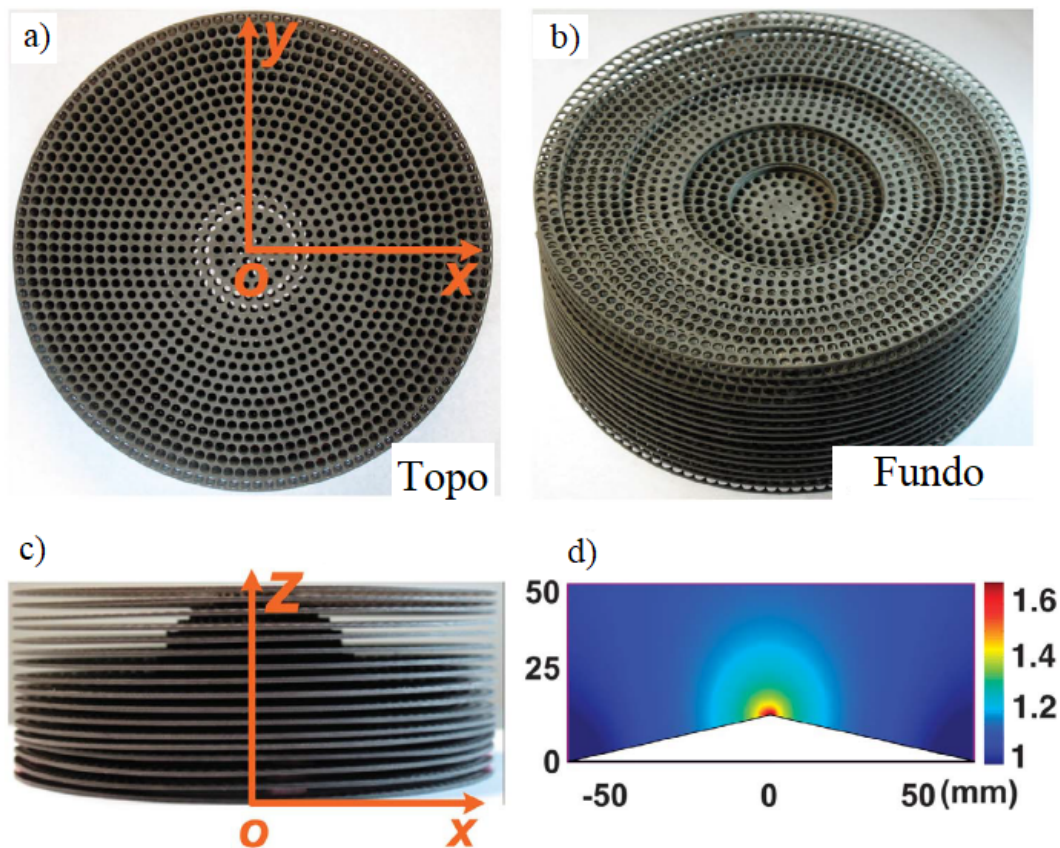


Figura 22 – Tapete de invisibilidade 3D: (a) visão superior, (b) visão inferior, (c) visão lateral e (d) distribuição do índice de refração no plano  $xz$  [34].

visualização [37]. Um trabalho posterior [112] realizou uma comparação de desempenho desse experimento [37] com o comportamento teórico esperado, e uma boa aproximação foi encontrada entre os cálculos e os resultados experimentais alcançados.

Uma evolução dos trabalhos relatados em [37] e [112] foi apresentada em [9] e [10]. Em [9] foi implementado o tapete de invisibilidade 3D proposto em [37], porém com as dimensões reduzidas por um fator maior que 2. Isso proporcionou a operação independente do dispositivo em relação à polarização no espectro de luz visível. A deformação do manto reduzido, obtida à partir da extrusão de um mapeamento 2D, apresentou altura igual a  $0,5\ \mu\text{m}$ . Como no trabalho anterior [37], o perfil de índice de refração foi calculado a partir do mapeamento quase-conforme [26]. Resultados experimentais revelaram um efeito de invisibilidade adequado para comprimentos de onda de  $900\ \text{nm}$  até  $650\ \text{nm}$ . Entretanto, para comprimentos menores, as distorções se tornaram gradualmente visíveis e, conseqüentemente, a ocultação do objeto não foi possível [9]. Em [10] foram realizadas novas caracterizações por meio de microscopia óptica e sua comparação com os cálculos de traçado de raios [113, 114], mostrando que o efeito de invisibilidade se aproximou da expectativa teórica. Porém, pequenas imperfeições dos processos utilizados no desenvolvimento e construção do manto 3D contribuíram para uma redução do seu efeito de

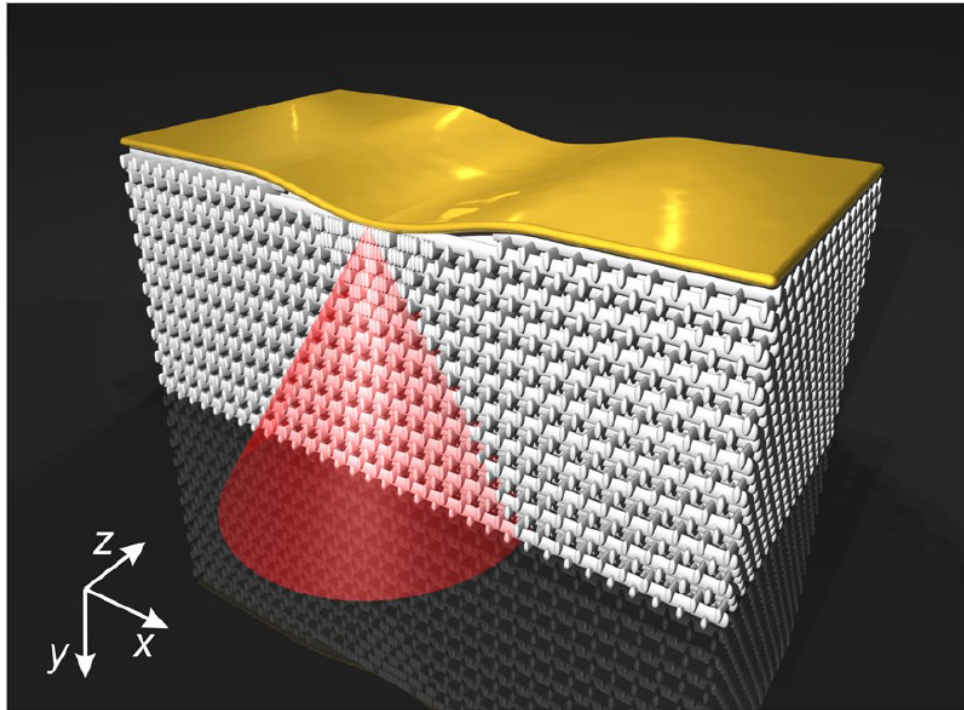


Figura 23 – Estrutura do tapete de invisibilidade 3D com operação na região do infravermelho [37].

camuflagem [10].

Portanto, verifica-se que as estratégias adotadas em [9, 10, 34, 37, 42, 112] apresentam limitações no efeito de invisibilidade para diferentes direções de visualização. Ou seja, a ocultação de objetos somente é alcançada quando as ondas eletromagnéticas viajam ao longo dos planos paralelos obtidos pelo processo de extrusão, ou quando as ondas se propagam ao longo dos planos obtidos pelo processo de rotação em direção ao eixo  $r = 0$  de um sistema polar. Portanto, os tapetes de invisibilidade 3D desenvolvidos com TC 2D quase-conformes não funcionam para qualquer direção de propagação. Outra considerável desvantagem dos projetos abordados é a incapacidade de fabricação dos dispositivos propostos com materiais naturais.

Recentemente, um outro tipo de abordagem adotada em [49] descreveu a construção de um tapete de invisibilidade 3D com TO realizada de uma forma diferente, quando comparada aos exemplos anteriores. O desenvolvimento desse manto foi proposto por meio de uma transformação linear [115, 116], possibilitando o uso de multicamadas dielétricas e periódicas de um composto homogêneo, anisotrópico, não-magnético e uniaxial. Dessa forma, o dispositivo resultante pôde ser implementado com uma estrutura artificial composta por dois materiais diferentes, o ar ( $\epsilon_1 = 1$ ) e o Rogers RO4003c ( $\epsilon_2 = 3,55$ ) [117], alternativamente dispostos com espessuras iguais ( $d_1 = d_2 = 0,05$  mm). A altura e os lados da base da estrutura de formato piramidal possuem dimensões iguais a 68 mm e 64 mm, respectivamente. A altura do espaço destinado à ocultação de um objeto foi igual

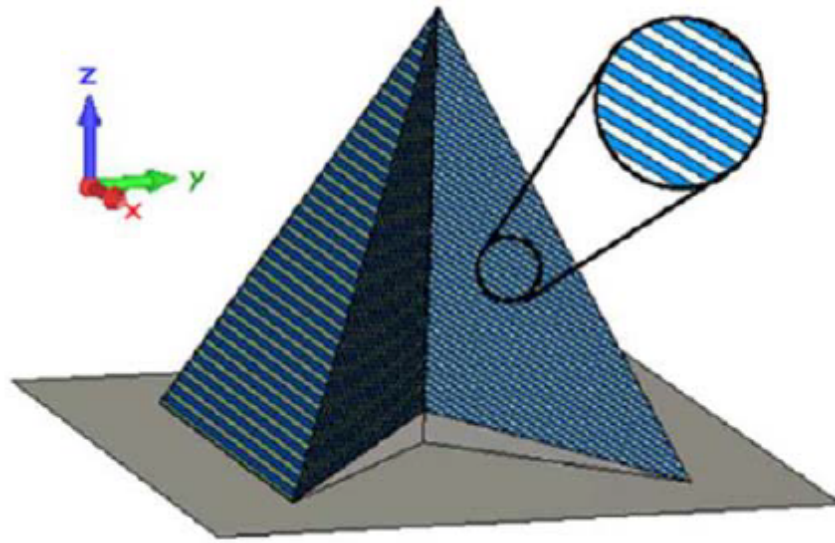


Figura 24 – Tapete de invisibilidade 3D, em formato piramidal, implementado com multicamadas de dielétricos [49].

a 5 mm. Na Figura 24 [49] tem-se a ilustração do manto, operando em uma ampla faixa de frequência (8 GHz a 30 GHz) e com independência em relação ao ângulo da onda incidente. Porém, esse projeto apresentou-se limitado a um único tipo de polarização de onda na faixa de micro-ondas, não sendo possível utilizá-lo em frequências ópticas [49].

Atualmente, a comunidade científica tem demonstrado um grande interesse em pesquisas voltadas para o desenvolvimento de mantos idealizados com materiais naturais. Esse apelo se torna ainda maior para operação em diferentes faixas de frequência, inclusive no espectro óptico, e com efeito de invisibilidade efetivo em todas as direções. Apesar das várias estratégias apresentadas possuírem algumas dessas qualificações, ainda não foi desenvolvido um dispositivo, com a técnica de **TO**, que atendesse a essas especificações simultaneamente. Dessa forma, o trabalho proposto nesta tese busca encontrar uma solução para esse desafio. No Capítulo 3 será apresentada a estratégia utilizada no desenvolvimento do tapete de invisibilidade **3D** projetado com **TO** e mapeamento quase-conforme realmente aplicado em três dimensões. Essa abordagem permitiu a concepção de um dispositivo com material isotrópico, facilmente encontrado na natureza, destacando-se pela capacidade de operação em uma grande largura de banda, invisibilidade para qualquer direção de propagação de onda e independência em relação à polarização empregada.

## 2.7 Comparação entre as Diferentes Técnicas no Desenvolvimento de Mantos de Invisibilidade

A Tabela 1 traz a comparação entre as diferentes técnicas que têm sido utilizadas no desenvolvimento de mantos de invisibilidade **2D** e **3D**. Essa tabela mostra as princi-

pais características, apresentadas nas seções anteriores, sobre cada uma dessas técnicas. São destacadas suas principais vantagens e desvantagens que devem ser consideradas, de acordo com os requisitos de projeto que se desejam alcançar.

Tabela 1 – Comparação entre as técnicas utilizadas no desenvolvimento de mantos de invisibilidade.

	Propriedades Constitutivas	Necessidade de Materiais Especiais	Faixa de Frequência de Operação	Polarização	Dimensão do Objeto Ocultado
CE	homogênea e isotrópica (valores próximos a zero ou negativos)	sim (metamateriais ou plasma)	estreita	independente	$< \lambda$
CEMC	homogênea e anisotrópica (valores elevados)	sim	estreita	única	$> \lambda$
LT	homogênea e isotrópica	não	larga	independente	$< \text{ou} >$ célula LT
TO	não-homogênea e anisotrópica (valores elevados ou próximos a zero ou negativos)	sim	estreita	depende do projeto desenvolvido	$> \lambda$
	isotrópica	não	larga		

## 2.8 Considerações Finais

Nesse capítulo, foram apresentados os dois tipos de mantos de invisibilidade encontrados na literatura. Um deles é o manto de espaço livre que se destaca pela capacidade de ocultar completamente um objeto dentro de si mesmo. Porém, alguns inconvenientes foram observados em sua construção, como a singularidade das propriedades constitutivas do material utilizado no projeto, sombreamento e reflexões nas extremidades. Visando contornar esses problemas, novas pesquisas foram destinadas à criação de um novo tipo de manto. Esse dispositivo, denominado tapete de invisibilidade, tem como objetivo esconder objetos que estão abaixo de uma superfície refletora, eliminando a singularidade observada no manto de espaço livre. Nesse caso, as ondas eletromagnéticas refletidas na superfície reflexiva deformada são restauradas pelo manto como se tivessem sido refletidas em um espelho plano. Também foram apresentadas as diferentes técnicas para criação dos mantos de invisibilidade, mostrando as dificuldades de desenvolvimento e implementação.



Um destaque especial foi dado para a técnica de **TO**, por ser empregada neste estudo. Foram verificados diferentes métodos empregados em projetos de tapetes de invisibilidades **2D** e **3D**. Após análise de diversos exemplos de projetos, tornou-se evidente a dificuldade de alcançar um tapete de invisibilidade **3D** desenvolvido com materiais naturais, operação no domínio óptico, independência da polarização e com efeito de invisibilidade em todas as direções de observação.

# 3 Tapete de Invisibilidade Tri-Dimensional com Transformada Óptica e Mapeamento Quase-Conforme

## 3.1 Introdução

Este capítulo apresenta a modelagem matemática da **TO** alcançada por meio da **TC**. Serão descritas as condições de contorno que definem o desenvolvimento do tapete de invisibilidade **3D** proposto neste trabalho. Além disso, será discutida a estratégia utilizada para a obtenção do mapeamento quase-conforme, cuja finalidade é a redução da anisotropia no meio transformado. Essa abordagem possibilita um projeto mais simples, porém sem sacrificar o desempenho do dispositivo, e utilizando somente materiais naturais.

## 3.2 Princípio de Fermat

O princípio de Fermat [118] foi enunciado pela primeira vez em 1658 pelo matemático francês Pierre de Fermat (1607 - 1665). Fermat afirmou que o raio de luz ao se propagar de um ponto para outro escolhe o caminho no qual o tempo de percurso é menor, mesmo que seja necessário percorrer uma distância geométrica maior.

O tempo  $T$  gasto por uma onda eletromagnética para percorrer um caminho entre os pontos  $A$  e  $B$  é dado por

$$T = \int_{t_0}^{t_1} dt = \frac{1}{c} \int_{t_0}^{t_1} \frac{c}{v} \frac{ds}{dt} dt = \frac{1}{c} \int_A^B n ds \quad (3.1)$$

na qual  $c$  é a velocidade da luz no vácuo,  $ds$  é o incremento infinitesimal da distância ao longo do caminho geométrico,  $v$  é a velocidade de propagação da luz no meio,  $t_0$  é o tempo de partida da onda eletromagnética no ponto  $A$ ,  $t_1$  é o tempo de chegada da onda no ponto  $B$  e  $n$  é o índice de refração do meio.

De acordo com (3.1), o caminho percorrido por um raio de luz entre dois pontos é ponderado pelo índice de refração  $n$  da trajetória e corresponde ao caminho óptico de menor comprimento [7]. Logo, na óptica geométrica, a medida de distância  $S$  entre os pontos  $A$  e  $B$ , em coordenada cartesianas, é determinada como

$$S = \int_A^B n ds = \int_A^B n \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \quad (3.2)$$

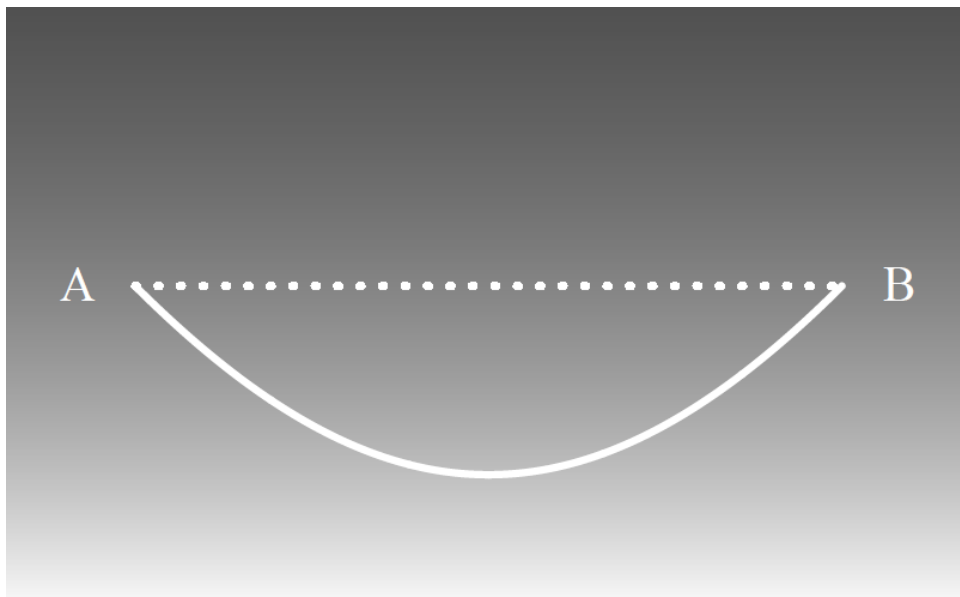


Figura 25 – Princípio de Fermat: a luz percorre o caminho óptico mais curto de  $A$  para  $B$ , correspondente à linha contínua curva. O comprimento do caminho óptico depende da variação do índice de refração do meio [16].

onde se verifica que o comprimento do caminho óptico  $S$  está relacionado ao tempo de percurso  $T$  por  $S = cT$ . Na Figura 25 [16], os raios de luz obedecem ao princípio de Fermat ao percorrerem do ponto  $A$  ao ponto  $B$  pelo caminho óptico mais curto, correspondente à linha contínua. Os diferentes tons de cinza, nessa figura, representam a variação do índice ao longo do meio, cujo comprimento do caminho óptico é medido em termos da integral do índice de refração  $n$  ao longo da trajetória. Portanto, em meios não-homogêneos, cujo índice de refração varia no espaço, o caminho óptico mais curto pode não ser uma linha reta, mas sim uma curva. Esse efeito é a causa de muitas ilusões de ópticas, como a observação de uma miragem no deserto [119], ou até mesmo um meio obtido com a técnica da TO capaz de ocultar um objeto em seu interior, provocando o efeito de invisibilidade [8]. Por outro lado, em meios homogêneos como ar ou vidro, os raios de luz viajam ao longo de linhas retas.

O princípio de Fermat pode ser aplicado no estudo de meios ópticos, sendo útil para descrever o comportamento dos raios de luz refletidos em espelhos, refratados por diferentes meios ou submetidos a uma reflexão total. Entretanto, esse princípio não é capaz de determinar as propriedades constitutivas do meio para que ocorra o comportamento óptico previsto por esse princípio, sobretudo em meios anisotrópicos resultantes da TO.

Nas próximas seções serão apresentados conceitos fundamentais relativos à técnica da TO, necessários para a determinação dos parâmetros constitutivos do meio utilizado no desenvolvimento do dispositivo proposto neste trabalho.



### 3.3 Tipos de Transformação de Coordenadas utilizados na Transformada Óptica

Um sistema de coordenadas é utilizado para especificar uma sequência ordenada de  $N$  escalares, que podem ser números reais ou complexos, em um espaço  $N$ -dimensional. Esse sistema permite a descrição de figuras ou objetos geométricos, inclusive seus respectivos fenômenos físicos [120, 121]. Como exemplo, tem-se os sistemas de coordenadas cartesianas, polar, cilíndrico, esférico, elíptico, parabólico e outros.

A TC atua como um interessante e flexível artifício matemático empregado para descrever as relações entre esses diferentes sistemas. A transformação é dada por equações que relacionam as coordenadas de um sistema em termos das coordenadas do outro sistema [122]. Nesse mesmo sentido, pode-se afirmar que a TC descreve uma mudança de variáveis. A partir dessa metodologia de projeto, uma grande expansão ocorreu no conjunto de operações realizadas em sistemas ópticos.

Dessa forma, a técnica da TO, alcançada por meio da TC, ganhou expressiva proporção no meio científico. Tornou-se factível o desenvolvimento de dispositivos que executam funções tradicionais com diferentes configurações geométricas ou funções inteiramente novas, que podem ser vantajosas em aplicações práticas [11]. A implementação de projetos com maior complexidade também pôde ser alcançada, sem a necessidade de um intenso esforço computacional [14].

No meio óptico, em um sistema de coordenadas cartesianas, a TC realiza a distorção desejada de acordo com o dispositivo desenvolvido, levando ao controle da propagação da luz em uma determinada região do espaço. Como resultado, tem-se a correspondência entre dois domínios, o virtual e o físico, no espaço especificado. Nesse processo, um mapeamento é realizado entre as coordenadas do sistema virtual para o sistema físico, como mostrado na Figura 15 do Capítulo 2 [26]. Conseqüentemente, uma redefinição dos parâmetros do material no meio original é ocasionada, de forma equivalente à operação responsável pela distorção das coordenadas.

Além da TO, diversos trabalhos podem ser encontrados na literatura com a aplicação da TC em diferentes áreas da física. Por exemplo, na condução de calor [123], na propagação do som [124] e na mecânica quântica [125].

Nesta seção, serão apresentados dois tipos de TC, suas características e principais limitações em projetos de dispositivos ópticos. Por não se tratarem de transformações alvo deste trabalho e com o intuito de alcançar uma maior simplicidade nas demonstrações, na seção atual serão consideradas apenas abordagens de TC em sistemas 2D.

A TC conforme é representada por uma função complexa analítica e é considerada uma das transformações matemáticas que resultam em propriedades eletromagnéticas de

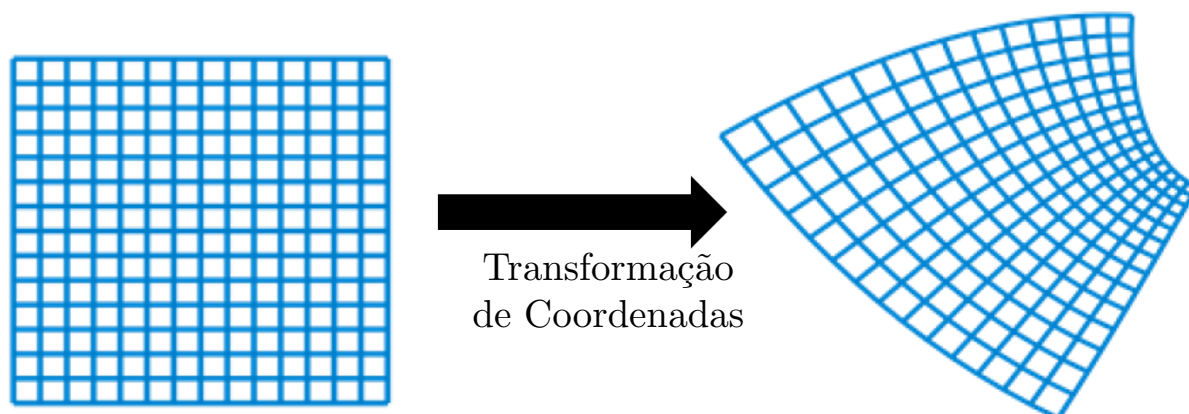


Figura 26 – Na imagem da esquerda tem-se o espaço virtual, onde a luz se propaga ao longo de linhas retas, seguindo as linhas da grade retangular. Na imagem da direita tem-se o espaço físico, onde os raios de luz são curvos e correspondem aos raios transformados do espaço virtual [16].

menor complexidade. Em TO, a TC conforme foi primeiramente utilizada no desenvolvimento de um manto de espaço livre 2D [7] e, em seguida, foi empregada em diferentes tipos de projetos como guias de ondas, tapetes de invisibilidade, lentes, entre outros [43, 126]. A transformação conforme de um meio resulta em parâmetros constitutivos não-homogêneos e isotrópicos. Projetos que possuem essas características se destacam pela maior facilidade durante a etapa de implementação física, quando comparados aos demais desenvolvimentos com TO [127]. Logo, a construção do dispositivo resultante poderia ser simplificada e realizada apenas com material dielétrico [11]. Outra característica da TC conforme é a preservação da ortogonalidade dos ângulos entre as curvas de interseção no mapeamento entre os domínios físico e virtual. Da mesma forma, tem-se a preservação da proporção da grade resultante desse mapeamento. Isso é decorrente da ausência de anisotropia no meio transformado resultante.

Na Figura 26 [16] tem-se um exemplo de uma transformação conforme qualquer, na qual é possível verificar as características desse mapeamento. Nessa figura, o espaço virtual localizado à esquerda é o espaço percebido pela luz, onde se tem a ilusão que os raios se propagarão nesse meio [16]. A grade de coordenadas retangular do domínio virtual é transformada em um sistema de coordenadas distorcidas e curvas no espaço físico, localizado à direita da Figura 26.

O mapeamento conforme é aplicado na TO utilizando análise complexa [7, 43]. Essa análise matemática investiga funções de números complexos, juntamente com suas derivadas e outras propriedades [128]. Nesse sentido, ao considerar a TC de um sistema

original  $z = x + iy$  para um sistema transformado  $w(z) = x' + iy'$ , tem-se

$$dx' = \frac{\partial x'}{\partial x} dx + \frac{\partial x'}{\partial y} dy \quad (3.3)$$

$$dy' = \frac{\partial y'}{\partial x} dx + \frac{\partial y'}{\partial y} dy \quad (3.4)$$

cuja função complexa  $w(z)$  é considerada analítica em um determinado domínio, se essa função for diferenciável nesse mesmo domínio [128, 129].

Como mencionado, a TC conforme é representada por uma função analítica. Logo, a função  $w(z)$  será analítica se, e somente se, forem satisfeitas as equações diferenciais de Cauchy-Riemann [16, 43]

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial y'}{\partial y} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial x'}{\partial y} = -\frac{\partial y'}{\partial x} \quad (3.6)$$

Elevando ao quadrado (3.3) e (3.4), somando os termos membro a membro e substituindo (3.5) e (3.6) na expressão resultante, tem-se

$$dx'^2 + dy'^2 = \left( \left( \frac{\partial x'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial y'}{\partial x} \right)^2 \right) (dx^2 + dy^2) \quad (3.7)$$

onde se verifica que  $dx'^2 + dy'^2$  é proporcional a  $dx^2 + dy^2$ . Esse resultado possibilita que a TC dos raios de luz possa ser demonstrada por meio do princípio de Fermat [16]. Ou seja, o comprimento do caminho óptico  $S$  para o meio transformado é dado por

$$S = \int n' \sqrt{dx'^2 + dy'^2} \quad (3.8)$$

Para o caso 2D, ao comparar (3.8) com (3.2), verifica-se que o princípio de Fermat permanece invariante sob a transformação conforme. A partir de (3.8) é possível obter a relação entre o índice de refração do meio transformado ( $n'$ ) e o meio não-transformado ( $n$ ) como

$$n'^2 = \frac{n^2}{\left( \frac{\partial y'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial x'}{\partial y} \right)^2} \quad (3.9)$$

Após análise da TC conforme nos raios de luz, será verificado o efeito dessa transformação nas ondas eletromagnéticas, descritas por um conjunto de equações formulado

por James Clerk Maxwell (1831 - 1879) [130]. Considerando um meio não-condutor, linear, isotrópico, homogêneo e livre de cargas, a equação de onda ou equação de Helmholtz descreve como a onda eletromagnética se propaga nesse meio, cuja solução determina a distribuição do campo eletromagnético em todo o domínio. Essa equação é dada por

$$\left( \nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} n^2 \right) \psi = 0 \quad (3.10)$$

onde  $\omega$  é a frequência angular do campo eletromagnético,  $c$  é a velocidade da luz no vácuo e  $\psi$  é a amplitude do campo elétrico ou magnético. Em um sistema de coordenadas cartesianas 2D, o operador Laplaciano  $\nabla^2$  pode ser escrito como

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (3.11)$$

Novamente, fazendo uso da análise complexa tem-se que

$$w(z) = w(x + iy) = x' + iy' \quad (3.12)$$

Sabendo que  $z = x + iy$ ,  $\bar{z} = x - iy$  e aplicando a regra da derivação em cadeia [131] na função complexa  $w$  é possível escrever que

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Substituindo os termos do membro da direita das equações de  $z$  e  $\bar{z}$  em (3.13), vem

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - i \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.15)$$

Somando (3.14) e (3.15) membro a membro e comparando os dois membros resultantes tem-se

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (3.16)$$

Rearranjando (3.14) e (3.15) e realizando procedimento análogo ao anterior, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (3.17)$$

Após manipulação matemática de (3.16) e (3.17), uma nova igualdade é encontrada para o Laplaciano  $\nabla^2$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \quad (3.18)$$

O Laplaciano para o sistema transformado é obtido de forma análoga à equação (3.18)

$$\nabla'^2 = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial w \partial \bar{w}} \quad (3.19)$$

A partir de (3.18) e (3.19) é possível encontrar a relação entre os Laplacianos dos sistemas original e transformado

$$\nabla^2 = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \frac{\partial w}{\partial w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{w}} = 4 \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \frac{\partial^2}{\partial w \partial \bar{w}} = \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 \nabla'^2 \quad (3.20)$$

Analisando (3.20) pode-se verificar que a equação de Helmholtz é invariante sob transformações conformes, da mesma forma como observado para o princípio de Fermat. O operador Laplaciano  $\nabla'^2$  do sistema transformado mantém a sua forma, apenas diferenciando do sistema original por um escalar. Portanto, a relação entre o índice de refração do sistema original para o sistema transformado é alcançada substituindo (3.20) em (3.10)

$$n' = \frac{n}{\left| \frac{dw}{dz} \right|} = \frac{n}{\sqrt{\left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2}} \quad (3.21)$$

Os perfis dos índices de refração obtidos em (3.21) e também em (3.9) são idênticos, tanto para a análise de comportamento das ondas ou dos raios de luz, respectivamente. Esses efeitos são provenientes de transformações conformes, alcançadas por meio de análises complexas que resultam em meios isotrópicos, não-homogêneos e sem perdas.

Em um projeto com TO, as condições de contorno são responsáveis por preservar a funcionalidade do dispositivo e a continuidade da TC nas interfaces, evitando assim reflexões indesejadas em seu contorno [132]. Para que isso ocorra, as coordenadas da interface do meio transformado devem coincidir com as do meio original, ou seja, seus valores devem ser iguais à identidade ( $x' = x$ ,  $y' = y$  e  $z' = z$ ). Uma desvantagem notória de uma transformação conforme é o não atendimento dessas condições, devido ao teorema

da unicidade [129]. Segundo esse teorema, funções complexas e analíticas que representam uma transformação conforme  $w(z)$  são impossíveis de serem idênticas ao sistema original  $z$  somente nos infinitos pontos pertencentes à interface do dispositivo. Isto é, se a função complexa se anula em um conjunto de pontos, então essa função se anulará em todos os pontos do seu domínio. Portanto, não haveria TC, pois o sistema transformado  $w(z)$  seria idêntico ao sistema original  $z$ .

Outra relevante desvantagem é a dificuldade de obtenção de um mapeamento conforme para dispositivos projetados com TO em dimensões superiores, quando comparado ao plano complexo. Além da impossibilidade de extensão das equações de Cauchy-Riemann para um domínio 3D ou maior, essa dificuldade é ampliada em razão do teorema de Liouville, aplicado ao espaço euclidiano, e provado por Joseph Liouville no ano de 1850 [126]. Esse teorema afirma que somente as transformações de Möbius são capazes de alcançar um mapeamento conforme para dimensões iguais ou maiores a 3. Entretanto, essas transformações estão limitadas a uma composição de translações, similaridades, dilatações, reflexões, rotações e inversões, mantendo a capacidade de não alterarem a ortogonalidade entre as curvas desse mapeamento [127, 133–135]. Consequentemente, essas operações resultam em aplicações 3D ou com dimensões superiores restritas no campo da TO [43, 126], não se mostrando eficazes no desenvolvimentos de projetos mais atrativos, como os mantos 3D com efeito de invisibilidade em todas as direções.

Outro tipo de TC é a não-conforme, cujo mapeamento dado por essa transformação se caracteriza pela capacidade de atender às condições de contorno, originando uma maior variedade de aplicações em desenvolvimentos com TO. As transformações não-conformes não atendem às condições de Cauchy-Riemann e também não obedecem a invariância do princípio de Fermat, representada por (3.8). Em relação à invariância da equação de Helmholtz, (3.10) se mantém apenas aproximadamente válida sob uma transformação não-conforme [136]. Porém, é importante ressaltar que o meio dado por essa transformação resulta em elevada anisotropia, não conservando o ângulo entre as curvas de orientação, efeito que será melhor discutido na Seção 3.5. Embora a anisotropia represente uma dificuldade adicional na fabricação desses dispositivos, diversas técnicas podem ser empregadas para contornar esse problema, resultando em meios quase-isotrópicos com anisotropia de valor desprezível que pode ser desconsiderada [26, 27, 44–47]. Essa alternativa resulta em uma derivação do mapeamento não-conforme, chamado de mapeamento quase-conforme, que será melhor discutido na Seção 3.6.

Neste trabalho foi empregada a abordagem de mapeamento quase-conforme associada à estratégia de parametrização e à técnica de otimização numérica para a TC, com o uso do método de *quase-Newton* [47, 137], conforme será aprofundado em 3.6.1.

## 3.4 Modelagem da Transformada Óptica

Em TO, a teoria da transformação do meio requer a análise das equações de Maxwell empregadas em sistemas de coordenadas arbitrárias [16]. A ferramenta matemática utilizada para alcançar o entendimento do comportamento regido por essas equações é a geometria diferencial [138], destacando-se como o mesmo instrumento utilizado para descrever os espaços curvos e a teoria da relatividade geral de Einstein [139].

A geometria diferencial, aplicada nas equações de Maxwell, possibilita o cálculo das propriedades constitutivas do meio, necessárias para alcançar a transformação desejada [12, 20]. Como resultado, tem-se um material óptico que imita os efeitos do espaço curvo, possibilitando que a luz se propague ao longo das trajetórias definidas pela TC [48].

Na Seção 3.4.1, alguns conceitos fundamentais sobre a geometria diferencial serão abordados por meio do cálculo tensorial [140], com o objetivo de levar ao entendimento sobre a invariância das equações de Maxwell quando submetidas à TC arbitrárias.

### 3.4.1 Cálculo Tensorial

O cálculo tensorial ou análise tensorial, desenvolvido por Gregorio Ricci-Curbastro e Tullio Levi-Civita, é o cálculo diferencial absoluto, representando uma extensão do cálculo vetorial para campos tensoriais [141]. Essa ferramenta matemática permite transformações gerais de coordenadas entre sistemas arbitrários, viabilizando aplicações em diversas áreas, como mecânica analítica, mecânica dos sólidos, mecânica dos fluidos, relatividade e eletromagnetismo [140, 141]. De forma especial, o cálculo tensorial possibilita que campos eletromagnéticos sejam descritos e manipulados de forma independente da escolha dos sistemas de coordenadas, utilizados para representar a TO desejada.

A análise tensorial abrange tensores de todas as ordens, incluindo os de ordem zero (escalares), os de primeira ordem (vetores) e os de segunda ordem (matrizes). Escalares são entidades invariantes sob quaisquer mudanças de coordenadas. Vetores e matrizes também são independentes dos sistemas escolhidos na transformação. Nesse caso, ambos são representados por seus componentes, apresentando-se diferentes em sistemas de coordenadas distintos [142].

Os tensores podem ser representados como  $A_{i_1 \dots i_n}^{i_1 \dots i_m}$ , onde  $m$  indica o número de coordenadas contravariantes dadas pelos índices sobrescritos (superiores) e  $n$  se refere ao número de coordenadas covariantes dadas pelos índices subscritos (inferiores). Por meio do cálculo tensorial, a TC entre um sistema original de coordenadas arbitrárias  $\{x^i, i = 1, 2, 3\}$  e um sistema transformado qualquer  $\{x^{i'}, i' = 1, 2, 3\}$  pode ser representada da

seguinte forma:

$$dx^{i'} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} dx^j = J dx^j \quad (3.22)$$

onde  $J$  é a matriz Jacobiana responsável pela TC. A equação (3.22) pode ser representada em sua forma matricial 3D, cujos índices  $i$  e  $j$  são responsáveis, respectivamente, pela identificação das linhas e colunas da matriz  $J$

$$\begin{bmatrix} dx^{1'} \\ dx^{2'} \\ dx^{3'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Com o uso da regra da cadeia [131], os diferenciais dos sistemas original  $x^i$  e transformado  $x^{i'}$  relacionam-se da seguinte forma

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} dx^{i'} \quad \text{e} \quad dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} dx^i \quad (3.24)$$

As expressões em (3.24) também podem ser apresentadas de forma similar

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^{i'}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (3.25)$$

Nas equações apresentadas em (3.24) e (3.25) verificam-se as matrizes de transformação

$$\Lambda_{i'}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = J^{-1} \quad \text{e} \quad \Lambda_i^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} = J \quad (3.26)$$

onde o tensor  $\Lambda_{i'}^i$  corresponde à matriz Jacobiana  $J$  apresentada nas expressões (3.24) e (3.26), e  $\Lambda_i^{i'}$  à Jacobiana inversa  $J^{-1}$ . Ou seja,  $\Lambda_{i'}^i$  é a matriz inversa de  $\Lambda_i^{i'}$ . Para um sistema ortogonal, cuja operação inversa de uma matriz é igual à sua transposta ( $A^{-1} = A^T$ ) [143], tem-se que  $\Lambda_{i'}^i$  é a matriz inversa ou transposta de  $\Lambda_i^{i'}$ . Relacionando (3.24) com (3.26) tem-se que

$$dx^i = \Lambda_{i'}^i dx^{i'} = \Lambda_{i'}^i \Lambda_j^{i'} dx^j \quad \text{e} \quad dx^{i'} = \Lambda_i^{i'} dx^i = \Lambda_i^{i'} \Lambda_j^i dx^j \quad (3.27)$$

Portanto, observam-se as seguintes equações

$$\Lambda_{i'}^i \Lambda_j^{i'} = \delta_j^i = \frac{dx^i}{dx^j} \quad \text{e} \quad \Lambda_i^{i'} \Lambda_j^i = \delta_{j'}^{i'} = \frac{dx^{i'}}{dx^j} \quad (3.28)$$



cujos elementos  $\delta_j^i$  e  $\delta_{j'}^{i'}$ , conhecidos como delta de Kronecker [142] são os elementos da matriz identidade, ou seja

$$\delta_j^i \text{ ou } \delta_{j'}^{i'} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \text{ ou } i' = j' \\ 0 & \text{se } i \neq j \text{ ou } i' \neq j' \end{cases} \quad (3.29)$$

Outro elemento utilizado na análise tensorial é o tensor métrico. Esse elemento define a quantidade capaz de calcular a distância entre duas coordenadas de um sistema. A distância entre esses dois pontos é invariante, mantendo-se independente dos sistemas de coordenadas escolhidos na TO. De forma semelhante ao resultado encontrado em (3.27), o tensor métrico  $g_{ij}$  ao ser submetido à uma TC apresenta-se como

$$g_{i'j'} = \Lambda_{i'}^i \Lambda_{j'}^j g_{ij} \quad \text{ou} \quad g^{i'j'} = \Lambda_i^{i'} \Lambda_j^{j'} g^{ij} \quad (3.30)$$

cujo elemento  $g^{ij}$  corresponde ao tensor métrico inverso. A relação entre  $g_{ij}$  e sua forma inversa [16] é dada por

$$g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i \quad (3.31)$$

Ao utilizar coordenadas cartesianas, o tensor métrico  $g_{ij}$  torna-se igual a métrica Euclidiana  $\delta_{ij}$  ( $g_{ij} = \delta_{ij}$ ) e ao realizar a transformação a partir do sistema cartesiano para um sistema arbitrário tem-se

$$g^{i'j'} = J \cdot J^T \quad (3.32)$$

onde  $J^T$  é a matriz Jacobiana transposta. Os índices  $i$  e  $j$  indicam, respectivamente, as linhas e as colunas das matrizes Jacobianas.

A equação (3.30) pode ser escrita na sua forma matricial, substituindo  $g_{i'j'}$  e  $g_{ij}$  pela matrizes  $g'$  e  $g$ , respectivamente

$$g' = \Lambda^T g \Lambda \quad (3.33)$$

cujo termo  $\Lambda$  corresponde à matriz de transformação  $\Lambda_{i'}^i$ . O inverso da matriz  $\Lambda_{i'}^i$ , dado por  $\Lambda_i^{i'}$ , é representado por  $\Lambda^{-1}$ . Nesse caso, (3.33) ficaria igual a

$$g' = (\Lambda^{-1})^T g \Lambda^{-1} \quad (3.34)$$

onde os índices matriciais de  $g'$  e  $g$  seriam todos contravariantes.

Ao realizar a operação de rotação para a transformação um sistema cartesiano para outro sistema do mesmo tipo, onde se pode considerar  $g_{ij} = \delta_{ij}$ , a expressão (3.30) passa a ser dada por

$$g_{i'j'} = \Lambda_{i'}^i \Lambda_{j'}^j \delta_{ij} = \Lambda_{i'}^i \Lambda_{j'}^i = \delta_{i'j'} \quad (3.35)$$

cujo emprego da propriedade  $\Lambda_{i'}^i \Lambda_{j'}^i = \delta_{i'j'}$  [144] mostrada na terceira igualdade, à direita da expressão (3.35), tornou-se possível devido a operação de rotação ser executada por matrizes ortogonais, onde  $\Lambda^{-1} = \Lambda^T$  [143].

Assim como a distância entre dois pontos pertencentes a um sistema de coordenadas, o volume calculado a partir das coordenadas permanece invariante sob uma TC e também é determinado pelo tensor métrico. Considerando a transformação de um sistema de coordenadas cartesiano ( $x^i = \{x, y, z\}$ ) para um sistema arbitrário ( $x^{i'} = \{x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}\}$ ) e sendo  $\Lambda = \Lambda_{i'}^i$ , ao utilizar a definição apresentada em (3.26) tem-se que a relação entre os volumes infinitesimais de ambos os sistemas é igual a [16]

$$dV = dx dy dz = |\det \Lambda| dV' = |\det(J^{-1})| dV' \quad (3.36)$$

Ao aplicar o determinante em ambos os lados da representação matricial (3.33), verifica-se

$$g' = (\det \Lambda)^2 g \quad (3.37)$$

como o sistema de origem é cartesiano e uma vez que nesse sistema a métrica Euclidiana é igual a matriz identidade, tem-se  $g = 1$ . Portanto, aplicando essa igualdade em (3.37), vem

$$|\det \Lambda| = \sqrt{g'} \quad (3.38)$$

Substituindo (3.38) na segunda igualdade de (3.36) obtém-se uma nova relação para os volumes infinitesimais dos sistemas cartesiano original e transformado

$$dV = \sqrt{g'} dV' = \frac{dV'}{|\det(J)|} \quad (3.39)$$

onde observa-se que o termo  $\sqrt{g'}$  é inversamente proporcional ao módulo do determinante da matriz Jacobiana ( $|\det(J)|$ ).

Na próxima seção será demonstrada, por meio do cálculo tensorial, a invariância das equações de Maxwell em sistemas de coordenadas arbitrárias.

### 3.4.2 Invariância das Equações de Maxwell sob Transformações de Coordenadas

Os projetos desenvolvidos com a técnica da **TO** primeiramente são submetidos a uma **TC**, realizando modificações no espaço para se alcançar o meio pretendido [3,5]. Durante essa etapa, uma geometria virtual é mapeada em um domínio físico, cujos campos eletromagnéticos são correspondentemente distorcidos. Em um próximo passo, a invariância das equações de Maxwell é explorada sob qualquer **TC** [3,5]. Isto é, essas equações mantêm a sua forma preservada mesmo após a **TC** do espaço, determinando assim, um meio com uma dada distribuição de parâmetros constitutivos do material capaz de realizar a operação correspondente ao efeito de distorção de coordenadas para os campos eletromagnéticos. Como resultado dessa propriedade, o meio transformado é remodelado de forma que a onda se propague da maneira desejada, permitindo a equivalência entre o espaço geométrico e o meio utilizado na transformação [145].

Após o entendimento de passos relevantes da geometria diferencial, abordados por meio do cálculo tensorial na Seção 3.4.1, é possível compreender as equações de Maxwell aplicadas a coordenadas e geometrias arbitrárias. No espaço livre, as equações de Maxwell [16,146] para a intensidade do campo elétrico  $\mathbf{E}$  e a indução magnética  $\mathbf{B}$  são

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{j} \end{aligned} \quad (3.40)$$

onde  $\rho$  é a densidade volumétrica de cargas,  $\epsilon_0$  é a permissividade elétrica no vácuo,  $c$  é a velocidade da luz no vácuo ( $c = 1/\sqrt{(\epsilon_0\mu_0)}$ ),  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética no vácuo e  $\mathbf{j}$  é a densidade de corrente de condução, por unidade de área no meio.

Usando a notação tensorial [16,48], as equações de Maxwell, no espaço livre, são representadas por

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g}E^i)_{,i} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g}B^i)_{,i} &= 0 \\ \epsilon^{ijk}E_{k,j} &= -\frac{\partial B^i}{\partial t} & \epsilon^{ijk}B_{k,j} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial E^i}{\partial t} + \mu_0 j^i \end{aligned} \quad (3.41)$$

cuja vírgula subscrita indica a operação de derivada parcial aplicada a determinado componente de um vetor, ou seja,  $V^j_{,i} = \frac{\partial V^j}{\partial x^i}$ . Os termos  $\epsilon^{ijk}$  e  $g$  correspondem ao tensor de Levi-Civita [140] e ao tensor métrico definido em (3.33), respectivamente. As equações (3.41) são válidas para coordenadas e geometrias arbitrárias, como por exemplo, o espaço curvo. Isso se deve ao fato de qualquer geometria ser considerada localmente plana, mesmo que esteja sob análise um espaço curvo [16].

Após manipulações tensoriais nas equações (3.41) e substituindo o tensor de Levi-Civita pela sua representação equivalente ( $\epsilon^{ijk} = \pm \frac{1}{\sqrt{g}}[ijk]$ ), as equações de Maxwell no espaço livre passam a se apresentar como

$$\begin{aligned} (\sqrt{g}g^{ij}E_j)_{,i} &= \frac{\sqrt{g}\rho}{\epsilon_0} & (\sqrt{g}g^{ij}B_j)_{,i} &= 0 \\ [ijk]E_{k,j} &= -\frac{\partial(\pm\sqrt{g}g^{ij}B_j)}{\partial t} & [ijk]B_{k,j} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial(\pm\sqrt{g}g^{ij}E_j)}{\partial t} \pm \mu_0\sqrt{g}j^i \end{aligned} \quad (3.42)$$

Os termos  $g^{ij}$  e  $[ijk]$  correspondem, respectivamente, ao tensor métrico inverso mostrado em (3.30) e ao símbolo de permutação definido como +1 para permutações pares de 123, -1 para permutações ímpares e 0 caso contrário. Nessas equações, o sinal + é escolhido para sistemas de coordenadas dextrogiros e o sinal - é adotado caso seja utilizado sistemas levogiros durante a TC.

À partir das expressões encontradas em (3.42), verifica-se que as equações de Maxwell atuam de forma independente dos sistemas de coordenadas escolhidos na TO. Essa invariância sob a TC é demonstrada por meio do tensor métrico  $g_{ij}$ , que mantém a sua forma tensorial preservada, em sua descrição nas equações (3.42), para qualquer tipo de sistema adotado. Portanto, em uma TC, somente os elementos internos de  $g_{ij}$  estarão susceptíveis à alteração de seus valores. Outra característica interessante a ser observada é a escalabilidade das equações de Maxwell quando submetidas a uma TC, nas quais se verifica um redimensionamento das densidades de carga  $\rho$  e corrente  $j$  para  $\sqrt{g}\rho$  e  $\sqrt{g}j$ , respectivamente.

As equações de Maxwell no espaço livre (3.42), aplicadas a coordenadas e geometria arbitrárias, podem ser comparadas às equações de Maxwell macroscópicas [146, 147] em um meio dielétrico. As equações macroscópicas são representadas por

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{j} \end{aligned} \quad (3.43)$$

onde  $\mathbf{D}$  é o deslocamento elétrico e  $\mathbf{H}$  é a intensidade do campo magnético. Reinterpretando as equações de Maxwell macroscópicas (3.43) para um sistema de coordenadas cartesiano dextrogiro tem-se que

$$\begin{aligned} D_{,i}^i &= \rho & B_{,i}^i &= 0 \\ [ijk]E_{k,j} &= -\frac{\partial B^i}{\partial t} & [ijk]H_{k,j} &= \frac{\partial D^i}{\partial t} + j^i \end{aligned} \quad (3.44)$$

Dessa forma, verifica-se que as equações de Maxwell no espaço livre utilizadas para coordenadas arbitrárias e mostradas em (3.42) podem ser escritas de forma equivalente às equações macroscópicas (3.44), se as densidades de carga  $\rho$  e corrente  $j$  forem redimensionadas para

$$\rho \rightarrow \pm\sqrt{g}\rho \quad j^i \rightarrow \pm\sqrt{g}j^i \quad (3.45)$$

e também se forem tomadas as seguintes relações constitutivas

$$\begin{aligned} D^i &= \epsilon E_j = \epsilon_0 \epsilon^{ij} E_j & B^i &= \mu H_j = \mu_0 \mu^{ij} H_j \\ \epsilon^{ij} &= \mu^{ij} = \pm\sqrt{g}g^{ij} \end{aligned} \quad (3.46)$$

Considerando a transformação do espaço e substituindo as equações (3.32) e (3.39) em (3.46), os valores relativos dos tensores de permissividade e permeabilidade do meio transformado tornam-se iguais a

$$\epsilon^{i'j'} = \mu^{i'j'} = \frac{J \cdot J^T}{|\det(J)|} \quad (3.47)$$

Logo, a partir de (3.46) e (3.47) a permissividade e a permeabilidade relativa será dada por

$$\begin{aligned} \epsilon' &= \epsilon_0 \epsilon^{i'j'} = \pm\epsilon_0 \sqrt{g'} g^{i'j'} & \text{ou} & \quad \epsilon' = \frac{J \cdot J^T}{|\det(J)|} \epsilon_0 \\ \mu' &= \mu_0 \mu^{i'j'} = \pm\mu_0 \sqrt{g'} g^{i'j'} & \text{ou} & \quad \mu' = \frac{J \cdot J^T}{|\det(J)|} \mu_0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

É importante salientar que a equivalência entre as equações de Maxwell no espaço livre, em um sistema de coordenadas arbitrário 3.42, e as equações macroscópicas, em um sistema de coordenadas cartesiano 3.44, é possível de ser realizada quando as alterações provocadas pela TC são incorporadas por um meio dielétrico com impedância casada em relação ao vácuo (pois as matrizes  $\epsilon^{i'j'}$  e  $\mu^{i'j'}$  são iguais) [16, 146]. Logo, uma vez que se considera um meio dielétrico, também se verifica a ausência de cargas no dispositivo ( $\rho = 0$ ). Analisando as equações (3.47) e (3.48), fica evidente que o dispositivo a ser construído é definido pelas propriedades de permissividade e permeabilidade, pois a sua condutividade  $\sigma$  é nula e, conseqüentemente, a sua densidade de corrente também será igual a zero ( $j = 0$ ). Dessa forma, a transformação dada por essas expressões resultam em uma TC não-conforme e em um meio dielétrico, com características anisotrópica, não-homogênea

e com impedância casada. Essa última característica é de elevada importância para o projeto proposto neste trabalho, pois estabelece a ausência de reflexões na interface do manto de invisibilidade, permitindo-o alcançar uma maior eficiência no efeito de ocultação sobre um objeto qualquer.

À partir das equações (3.46) e (3.47) também se observa a correspondência entre a geometria espacial e o meio anisotrópico com impedância casada, cujas propriedades constitutivas são funções do tensor métrico da geometria escolhida, podendo ser definido pela matriz Jacobiana. Essa equivalência entre o meio e a geometria é baseada na invariância das equações de Maxwell sob a TC, que podem ser interpretadas em diferentes sistemas de coordenadas, apenas alterando os parâmetros do meio nas relações constitutivas [5].

Portanto, por meio de toda a análise discutida nessa seção é possível comprovar que a TO utiliza a matemática da geometria diferencial como ferramenta para projetar meios com propriedades ópticas que variam espacialmente. O resultado é um material óptico que controla a propagação da onda eletromagnética. Logo, a onda se propaga ao longo de trajetórias curvas predeterminadas dentro do material e que são descritas pela TC aplicada ao novo sistema.

### 3.5 Cálculo da Anisotropia e Considerações para se Encontrar o Índice de Refração em um Meio Isotrópico

A invariância das equações de Maxwell possibilita que um espaço submetido a uma TC não-conforme seja completamente especificado pelas suas propriedades de permissividade e permeabilidade. Entretanto, conforme mencionado na Seção 3.4.2, esse tipo de transformação resulta em meios dielétricos, anisotrópicos e não-homogêneos. A anisotropia e a não-homogeneidade podem ser traduzidas em dificuldades adicionais no desenvolvimento de dispositivos eletromagnéticos, como um maior esforço computacional e maior complexidade nos processos de fabricação, elevando assim, o custo de projeto [24].

Os meios não-homogêneos possuem componentes não constantes na matriz de permissividade e permeabilidade, ou seja, o índice de refração apresenta uma variação gradual ao longo da posição do dispositivo óptico. Esse efeito pode ser considerado para os meios não-homogêneos que apresentam um pequeno salto entre os valores de índice de refração, permitindo assim uma variação progressiva. Portanto, diferentes pontos desse espaço não possuem as mesmas propriedades constitutivas. Esse tipo de meio, denominado de material com índice de refração gradual – *graded refractive index* (GRIN), foi criado por James Clerk Maxwell, em 1854, e possibilitou a criação da lente conhecida como olho-de-peixe [148], abrindo caminhos para a realização de novas funcionalidades no campo da TO.

Por outro lado, nos meios anisotrópicos, os tensores de permissividade elétrica e permeabilidade magnética dependem das direções dos campos eletromagnéticos, isto é, apresentam propriedades distintas conforme as direções dos vetores dos campos elétrico e magnético [149]. A anisotropia presente no material relaciona-se à quantidade de distorção provocada pela TC no meio. Logo, o mapeamento resultante da transformação não-conforme não consegue preservar a ortogonalidade dos ângulos entre as suas curvas de interseção. Na natureza existem diversos materiais que apresentam comportamento anisotrópico, como é o caso de determinados cristais, por exemplo, o quartzo, a turmalina, entre outros, ou até mesmo minerais raros como o carbeto de silício (SiC), geralmente conhecido como moissanita [150]. Entretanto, devido às dificuldades intrínsecas aos materiais anisotrópicos, torna-se conveniente utilizar meios isotrópicos ou quase-isotrópicos no desenvolvimento de um projeto, permitindo assim, que esses projetos sejam implementados com uma menor complexidade.

Meios com anisotropia nula ou quase-nula podem ser obtidos por meio de métodos de otimização (como, por exemplo, o gerador de grade associado ao funcional *Modified-Liao* [26], o método dos mínimos quadrados [27,46], a transformada inversa de Laplace [44], entre outros) aplicados aos resultados provenientes de uma TC não-conforme, originando assim um mapeamento quase-conforme [26], que será melhor discutido na Seção 3.6. Embora se consiga uma considerável redução da anisotropia com a aplicação de algoritmos de otimização, cujo meio resultante será considerado como isotrópico ou quase-isotrópico, este ainda continuará sendo caracterizado como um meio não-homogêneo. Consequentemente, além da TO quase-conforme ter despertado o interesse em projetar sistemas GRIN, também foi possível alcançar uma maior simplificação no desenvolvimento dos projetos.

Analisando os tensores de permissividade e permeabilidade em (3.47) e (3.48), observa-se que a anisotropia resultante da TC não-conforme implica que os termos na diagonal principal de  $g^{i'j'}$  sejam diferentes uns dos outros e os termos fora da diagonal não sejam nulos. Em um sistema 3D, representando a matriz Jacobiana (3.23) pela notação  $J = [h_{ij}]_{3,3}$ , a matriz resultante  $JJ^T = [t_{ij}]_{3,3}$  será dada por

$$[t_{ij}] = \begin{bmatrix} h_{11}^2 + h_{12}^2 + h_{13}^2 & h_{11}h_{21} + h_{12}h_{22} + h_{13}h_{23} & h_{11}h_{31} + h_{12}h_{32} + h_{13}h_{33} \\ h_{21}h_{11} + h_{22}h_{12} + h_{23}h_{13} & h_{21}^2 + h_{22}^2 + h_{23}^2 & h_{21}h_{31} + h_{22}h_{32} + h_{23}h_{33} \\ h_{31}h_{11} + h_{32}h_{12} + h_{33}h_{13} & h_{31}h_{21} + h_{32}h_{22} + h_{33}h_{23} & h_{31}^2 + h_{32}^2 + h_{33}^2 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

À partir de (3.49), a medida da anisotropia local [47] avaliada em um ponto do mapeamento 3D é definida como

$$K_{3D} = \left[ (t_{11} - t_{22})^2 + (t_{22} - t_{33})^2 + (t_{33} - t_{11})^2 + t_{12}^2 + t_{13}^2 + t_{23}^2 \right] (t_{11} + t_{22} + t_{33})^{-2} \quad (3.50)$$

O termo  $K_{3D}$  é adimensional e apresenta-se maior que a unidade neste trabalho. Portanto, para se obter o valor da anisotropia total do mapeamento [47], a medida apresentada em (3.50) é somada para todos os pontos do meio

$$F = \sum_{\text{grade aval.}} K_{3D}(x', y', z') \quad (3.51)$$

cuja abreviatura *grade aval.* corresponde à grade de avaliação considerada em todo o domínio 3D transformado. Neste trabalho, são encontrados os valores máximos do termo  $K_{3D}$  para o dispositivo desenvolvido, representando a medida de anisotropia local máxima. Conseqüentemente, a anisotropia total  $F$  máxima de todo o sistema transformado pode ser calculada.

Analisando as equações (3.50) e (3.51), verifica-se que a minimização do termo  $K_{3D}$ , alcançada por meio de algum método de otimização, resulta na diminuição da medida de anisotropia total  $F$  e, conseqüentemente, conduz a um meio quase-isotrópico. Esse método de otimização age sobre (3.51), de modo que algumas ações são realizadas durante esse processo. Como a minimização da diferença entre os termos da diagonal principal de  $t_{ij}$ , dada em (3.49), de forma que esses termos tendam a ser iguais. Uma segunda ação é a minimização dos termos fora da diagonal principal da matriz  $t_{ij}$ , para que esses componentes atinjam valores próximos a zero. Em uma terceira ação, o denominador em (3.50) se eleva em relação ao numerador, promovendo a maximização da diferença entre os valores dos termos da diagonal principal e os fora.

A execução desses procedimentos permite minimizar a anisotropia, alcançando uma anisotropia residual que pode ser desprezada. Conseqüentemente, o meio resultante será considerado como isotrópico. Logo, os termos da diagonal principal de (3.49) tornam-se iguais e os termos fora da diagonal passam a ser nulos. Com isso, a matriz  $JJ^T = [t_{ij}]_{3,3}$  pode ser representada por

$$[t_{ij}] = \begin{bmatrix} h_{11}^2 + h_{12}^2 + h_{13}^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_{11}^2 + h_{12}^2 + h_{13}^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_{11}^2 + h_{12}^2 + h_{13}^2 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Substituindo os termos  $h_{11}^2 + h_{12}^2 + h_{13}^2$  por  $P$ , a matriz (3.52) é simplificada para

$$[t_{ij}] = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix} \quad (3.53)$$



A partir de (3.53), verifica-se que  $\det([t_{ij}]) = \det(JJ^T) = P^3$ . Sabendo que  $\det(JJ^T) = (\det J)^2$ , vem

$$\det(J) = \sqrt{P^3} = P\sqrt{P} \quad (3.54)$$

Substituindo (3.53) e (3.54) em (3.48), novas expressões são encontradas para os parâmetros constitutivos  $\epsilon'$  e  $\mu'$

$$\begin{aligned} \epsilon' &= \frac{J \cdot J^T}{|\det(J)|} \epsilon_0 = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{P}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{P}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{P}} \end{bmatrix} = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{P}} \\ \mu' &= \frac{J \cdot J^T}{|\det(J)|} \mu_0 = \mu_0 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{P}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{P}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{P}} \end{bmatrix} = \frac{\mu_0}{\sqrt{P}} \end{aligned} \quad (3.55)$$

Como  $n' = \sqrt{\epsilon'\mu'}$  e os termos das diagonais principais das matrizes apresentadas em (3.55) são iguais, o índice de refração relativo do meio transformado pode ser representado por

$$n' = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\sqrt{P}} \frac{\mu_0}{\sqrt{P}}} \quad (3.56)$$

Após a aplicação do mapeamento quase-conforme, além do meio apresentar uma anisotropia desprezível, esse meio também é considerado como não-magnético. Portanto, a reposta magnética do material é removida e seus valores de permeabilidade são absorvidos pela matriz de permissividade. Ou seja, como a permeabilidade se torna unitária, as alterações impostas pela TC incidem somente na constante dielétrica do meio [26, 45]. Dessa forma, (3.56) é simplificada para

$$n' = \frac{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}{\sqrt{P}} = \frac{\sqrt{\epsilon_0}}{\sqrt{P}} = \frac{n}{\sqrt{P}} \quad (3.57)$$

Analisando (3.57) e (3.21) verifica-se a semelhança no formato dessas duas equações. Entretanto, a forma de obtenção é diferente, uma vez que (3.21) é obtida a partir de sistemas 2D e (3.57) para sistemas 3D.

Portanto, o índice de refração gradual 3D isotrópico será igual a

$$n' = \frac{n}{\sqrt{(h_{11}^2 + h_{12}^2 + h_{13}^2)}} \quad (3.58)$$

Substituindo os componentes matriciais de (3.23) em (3.58) tem-se

$$n' = \frac{n}{\sqrt{\left(\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^3}\right)^2}} = \frac{n}{\sqrt{\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x'}{\partial z}\right)^2}} \quad (3.59)$$

cuja expressão à direita é utilizada para sistemas em que suas coordenadas são dadas por  $\{x, y, z\}$  ao invés de  $\{x^1, x^2, x^3\}$ . A faixa de índices de refração alcançável será limitada pela escolha do material utilizado no desenvolvimento do projeto.

### 3.6 Mapeamento Quase-Conforme no Desenvolvimento do Manto de Invisibilidade Tri-Dimensional

Na **TO**, as particularidades do meio que determinam fisicamente os novos caminhos a serem percorridos pelas ondas eletromagnéticas, no espaço transformado, são especificados pela **TC**. Ou seja, a transformação é aplicada aos tensores de permissividade e permeabilidade, produzindo a especificação necessária a esse meio e determinando a funcionalidade desejada para o dispositivo. Porém, conforme visto nas Seções 3.4.2 e 3.5, as **TC** não-conforme resultam em um meio anisotrópico e não-homogêneo.

Materiais artificiais, como os metamateriais eletromagnéticos [29], foram propostos como uma solução para alcançar essas propriedades físicas não usuais requeridas pela **TO**. No entanto, esses materiais têm a desvantagem de serem limitados por uma largura de banda estreita, uma vez que a absorção e suas propriedades constitutivas são dependentes da frequência. Além disso, eles também possuem restrições quanto à resolução e ao número de camadas devido aos processos de fabricação [42].

Em 2008, o mapeamento quase-conforme aplicado à **TO** foi introduzido por Li e Pendry [26] e mostrou-se como uma alternativa eficiente para superar as dificuldades provenientes da **TO**. Como resultado, tornou-se possível construir dispositivos apenas com materiais naturais, cujo meio transformado apresenta operação em banda larga e reduzida anisotropia [8, 24]. Dessa forma, a anisotropia presente nos componentes da matriz de permissividade e permeabilidade é considerado desprezível, à qual pode ser ignorada [26]. Logo, o material transformado é analisado como um meio dielétrico, com índice de refração isotrópico e variável em função da coordenada espacial, e também não-magnético [26]. Ou seja, após a aplicação do mapeamento quase-conforme, a sua resposta magnética pode ser removida e as alterações impostas pela **TC** passam a incidir sobre a constante dielétrica.

Uma característica importante desse tipo de mapeamento é a preservação do ângulo de intersecção entre as grades do sistema de coordenadas transformado. Esse mapa pode ser alcançado com o uso de diferentes técnicas de otimização [26, 27, 44–47]. No entanto, a maioria dessas técnicas são aplicadas somente em **TC 2D** [26, 44, 46]. Um dis-

positivo 3D projetado com TO pode ser obtido por meio de um processo de extrusão ou revolução de um mapa de índice de refração 2D, conforme visto em vários exemplos de projetos [9, 10, 34, 37, 42, 112] apresentados no Capítulo 2. Nesse caso, o controle de propagação somente é alcançado para as ondas que propagam ao longo dos planos de simetria obtidos por esses processos. Essa abordagem pode ser verificada na Figura 21 do Capítulo 2. Conseqüentemente, os tapetes de invisibilidade 3D anteriores projetados com TC 2D quase-conforme [26, 27] não funcionam para direções arbitrárias de propagação de ondas e o efeito de invisibilidade é limitado a um pequeno conjunto de ângulos de visão para um observador externo.

Alternativamente, os métodos propostos em [47] e [45] indicam que o mapeamento quase-conforme 3D, em TO, também é possível de ser alcançado. Os dispositivos projetados com essas técnicas não apresentam as desvantagens mencionadas anteriormente, quando o mapeamento quase-conforme 2D é usado na TO. Portanto, projetos 3D com TC quase-conforme aplicada nas três dimensões, possibilitam alcançar o controle de propagação para qualquer direção de onda e ângulo de visão.

Neste trabalho, a técnica proposta em [47] é aplicada para projetar um tapete de invisibilidade 3D isotrópico com mapeamento quase-conforme demonstrado em frequências ópticas, embora possa ser utilizado em qualquer faixa espectral. A TC é realizada usando a técnica de parametrização e os coeficientes são otimizados com o método de *quase-Newton* [47, 137]. As limitações, em relação à invisibilidade, apresentadas nos projetos de tapetes 3D que utilizam processos de extrusão ou revolução [9, 10, 34, 37, 42, 112] são resolvidas neste trabalho. Será mostrado, no Capítulo 4, que o efeito de invisibilidade é alcançado para qualquer direção de propagação de onda eletromagnética, devido ao uso de uma TC que realmente é 3D. Suas funcionalidades serão analisadas por meio de simulações, usando o Método dos Elementos Finitos – *Finite Element Method* (FEM).

### 3.6.1 Transformação de Coordenadas e Condições de Contorno para o Tapete de Invisibilidade Tri-Dimensional

Em TO, a TC determina a funcionalidade desejada do dispositivo. As condições de contorno são condições matemáticas aplicadas à TC, sendo responsáveis por manter a funcionalidade do dispositivo e a continuidade em sua interface com o meio externo. Ou seja, as coordenadas nos limites do meio transformado devem ser as mesmas do meio original ( $x' = x, y' = y, z' = z$ ), representando uma condição necessária e suficiente para evitar reflexões indesejadas [151].

Muitos trabalhos que empregam o mapeamento quase-conforme [26, 42, 44] também fazem uso das condições de contorno *Neumann*, normalmente conhecidas como condições de contorno deslizantes [93]. Essas condições determinam que as grades do mapeamento

possam ser ajustadas ao longo do contorno do dispositivo, fazendo com que essas grades tendam a ser ortogonais entre si [44]. Isso é feito, na tentativa de alcançar a característica de preservação de ângulo presente no mapeamento quase-conforme. Entretanto, o emprego das condições deslizantes ocasionam reflexões na interface do dispositivo, devido à descontinuidade provocada na TC ( $x' \neq x, y' \neq y, z' \neq z$ ) [24, 27, 46]. Portanto, a utilização dessas condições implica em desvantagem durante o desenvolvimento do dispositivo.

O projeto do tapete de invisibilidade 3D, proposto neste trabalho, utiliza a estratégia de mapeamento quase-conforme apresentada em [47], atendendo às condições de contorno, e preservando a funcionalidade e a continuidade do meio óptico com baixa anisotropia. Também é importante mencionar que esse projeto não faz uso das condições de contorno deslizantes, evitando assim o aparecimento de reflexões indesejadas nos contornos do dispositivo proposto.

As funções de TC aplicadas às coordenadas  $(x, y, z)$  do meio original para a obtenção do novo sistema  $(x', y', z')$  são dadas por

$$\begin{aligned} x'(x, y, z) &= f_x(x, y, z) + b(x, y, z)P_x(x, y, z) \\ y'(x, y, z) &= f_y(x, y, z) + b(x, y, z)P_y(x, y, z) \\ z'(x, y, z) &= f_z(x, y, z) + b(x, y, z)P_z(x, y, z) \end{aligned} \quad (3.60)$$

onde  $f_x$ ,  $f_y$  e  $f_z$  representam as funções de transformação iniciais, responsáveis por definir as TC que irão determinar a funcionalidade do dispositivo projetado e também as suas respectivas condições de contorno. As funções  $P_x(x, y, z)$ ,  $P_y(x, y, z)$  e  $P_z(x, y, z)$  são denominadas funções de perturbação e fornecem os graus de liberdade necessários para a minimização da anisotropia. Essas funções podem ser escritas na forma de séries finitas, cujos termos são linearmente independentes entre si e ponderados por meio de seus coeficientes, escolhidos por meio da técnica de otimização utilizada. A função de fronteira  $b(x, y, z)$  possui a responsabilidade por anular os efeitos de parametrização nos limites do dispositivo, garantindo que a sua funcionalidade e as condições de contorno sejam preservadas durante o processo de otimização.

Neste trabalho, a TC quase-conforme é alcançada utilizando o método de otimização numérica de *quase-Newton* [47, 137] e funções de perturbação parametrizadas na forma de séries de potência são adicionadas às funções de transformação inicial. Os coeficientes dessas séries foram definidos com o uso do algoritmo de otimização de *quase-Newton* [47, 137], uma vez que o seu uso foi validado eficazmente no desenvolvimento de outros dispositivos 3D [47]. No Apêndice A encontra-se a descrição do algoritmo de otimização utilizado.

A TC utilizada no desenvolvimento do manto 3D proposto é aplicada no domínio correspondente à região total do dispositivo, onde  $|x| \leq \frac{w_1}{2}$ ,  $|y| \leq \frac{w_2}{2}$  e  $0 \leq z \leq h$ . As

variáveis  $w_1$ ,  $w_2$  e  $h$  representam a largura, a profundidade e altura do manto, respectivamente. Seguindo o formato das equações apresentadas em (3.60), as funções de TC 3D utilizadas neste projeto foram arbitrariamente escolhidas e são dadas por

$$\begin{aligned} x'(x, y, z) &= x + b(x, y, z) \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q \sum_{k=0}^r A_{ijk} x^i y^j z^k \\ y'(x, y, z) &= y + b(x, y, z) \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q \sum_{k=0}^r B_{ijk} x^i y^j z^k \\ z'(x, y, z) &= z + c \left(1 - \frac{z}{h}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{w_1}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{w_2}\right) + b(x, y, z) \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q \sum_{k=0}^r C_{ijk} x^i y^j z^k \end{aligned} \quad (3.61)$$

cujos termos anteriores à  $b(x, y, z)$  correspondem às funções de transformação iniciais com as condições de contorno desejadas e  $c$  é a altura da deformação do tapete de invisibilidade 3D. Os índices  $p$ ,  $q$  e  $r$  são as ordens das séries de potência e  $A_{ijk}$ ,  $B_{ijk}$  e  $C_{ijk}$  são os coeficientes dessas séries a serem otimizados para minimização da anisotropia. Analisando as equações apresentadas em 3.61, verifica-se o diferencial deste projeto, cuja TC realmente é aplicada em três dimensões. Diferentemente, nos projetos 3D alcançados por meio de extrusão ou revolução [9, 10, 34, 37, 42, 112], a TC ocorre somente em duas dimensões (a transformação é limitada a dois eixos, por exemplo  $x$  e  $y$ , e se mantém fixa no terceiro, por exemplo  $z$ ).

Neste projeto, as condições de contorno que preservam a continuidade na interface do tapete de invisibilidade, evitando reflexões indesejadas, são dadas por ( $x' = x, y' = y, z' = z$ ). Ou seja, essas condições serão atendidas nesse pontos quando os planos  $x$ ,  $y$  e  $z$  forem iguais a  $\pm \frac{w_1}{2}$ ,  $\pm \frac{w_2}{2}$ ,  $h$ , respectivamente, que definem os planos pertencentes à fronteira do dispositivo 3D.

As funções de transformação iniciais em (3.61) são afetadas pelo processo de parametrização e otimização. Uma exceção ocorre nos pontos pertencentes às condições de contorno, onde a função de fronteira  $b(x, y, z)$  é escolhida para se tornar nula nas interfaces do dispositivo, não permitindo a influência das funções de perturbação nesses limites. A função  $b(x, y, z)$  utilizada no desenvolvimento do projeto é

$$b(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z)(z - h) \cos\left(\frac{\pi x}{w_1}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{w_2}\right) \quad (3.62)$$

No tapete de invisibilidade proposto, a propriedade de (3.62) se anular é presenciada no ponto  $(0, 0, 0)$  e nos planos  $x = \pm \frac{w_1}{2}$ ,  $y = \pm \frac{w_2}{2}$ ,  $z = h$ . Esse efeito é responsável por preservar a funcionalidade do manto descrita pelo mapa  $(0, 0, 0) \rightarrow (0, 0, c)$ , que representa a criação da região de invisibilidade do tapete (região que irá conter o objeto a ser ocultado).

Conforme mencionado na Seção 3.6, após a minimização da anisotropia, o material pode ser considerado aproximadamente isotrópico e a resposta magnética do meio pode ser omitida, sem alterar a dinâmica da trajetória dos raios de luz [45]. Portanto, o perfil do índice de refração gradual para a região transformada pode ser calculado como apresentado em (3.59). Consequentemente, qualquer objeto situado abaixo da superfície refletiva deformada com o ápice em  $(0, 0, c)$  se tornará invisível para um observador externo, se o manto de invisibilidade 3D com índice dado por (3.59) for usado acima dessa superfície.

### 3.7 Considerações Finais

Nesse capítulo foram apresentados os conceitos fundamentais relativos à técnica da TO alcançada por meio da TC. As características das TC conforme e não-conforme foram discutidas, assim como as suas limitações no desenvolvimento de um projeto. Em seguida, foi apresentada a modelagem matemática da TO, na qual confirmou-se a invariância das equações de Maxwell frente às transformações submetidas. Com esse modelamento, tornou-se possível a determinação dos parâmetros constitutivos do meio utilizado no desenvolvimento do dispositivo desejado. Também foi abordada a estratégia para a obtenção do mapeamento quase-conforme utilizada neste trabalho e também as suas respectivas condições de contorno necessárias para o funcionamento adequado do projeto. A finalidade desse tipo de transformação é a redução da anisotropia no meio transformado, permitindo o desenvolvimento do manto de invisibilidade 3D com materiais naturais, isotrópicos e não-homogêneos, o que simplifica a sua construção.

## 4 Resultados

### 4.1 Introdução

Este capítulo apresenta os resultados numéricos obtidos para a comprovação do funcionamento eficiente do tapete de invisibilidade 3D proposto. Foi utilizada a estratégia de parametrização e otimização numérica na TC, conforme apresentado no Capítulo 3. Esse método permite reduzir a anisotropia do manto e, ao ignorar a anisotropia restante, um meio isotrópico pôde ser considerado em seu desenvolvimento. As simulações confirmam a estratégia empregada, possibilitando o projeto de um manto isotrópico, sem reflexão nas extremidades e independente da direção da onda incidente. O efeito de invisibilidade é mantido para diferentes direções de visualização de um observador externo. A relação entre o número de graus de liberdade utilizados durante a otimização, o contraste do índice de refração e a redução da anisotropia serão também descritas. Será apresentada a comprovação do funcionamento do dispositivo para diferentes faixas de frequências e também da independência da polarização da onda eletromagnética incidente. Outra maneira, utilizada neste trabalho, para se confirmar o funcionamento correto do manto de invisibilidade 3D será por meio do fluxo de potência eletromagnética e também dos padrões de radiação de campo próximo e distante.

### 4.2 Manto de Invisibilidade Tridimensional com Deformação Igual a $0,2 \mu\text{m}$

Após a definição do formato do tapete de invisibilidade 3D, por meio das equações apresentadas em (3.61), os parâmetros de transformação utilizados no projeto foram  $c = 0,2 \mu\text{m}$ ,  $h = 1,5 \mu\text{m}$  e  $w_1 = w_2 = 4,0 \mu\text{m}$ . O material de fundo, ao redor do espaço transformado, possui índice de refração  $n = 1,5$  e o limite inferior do dispositivo é um PEC. O algoritmo de *quase-Newton* [47, 137] foi utilizado para reduzir a anisotropia. Diferentes otimizações com valores distintos para as ordens das séries de potência  $p$ ,  $q$  e  $r$  foram analisadas e uma redução da anisotropia máxima ( $\max K_{3D}$ ) foi observada com o aumento da ordem da série polinomial, conforme mostrado na Tabela 2. Além dos valores de anisotropia máxima, nessa tabela também são informados os índices de refração máximos ( $n_{\max}$ ) e mínimos ( $n_{\min}$ ) e o número de GL (dado por  $\text{GL} = 3(p+1)(q+1)(r+1)$ ) para os diferentes valores das ordens das séries de potência. Em sua primeira linha, verifica-se a situação onde não existe otimização. Logo, obtém-se um elevado valor de anisotropia. Em sua segunda linha ocorre otimização, porém com um efeito limitado na minimização da anisotropia, uma vez que os índices  $p$ ,  $q$  e  $r$  são nulos. Aumentando os valores de  $p$ ,



$q$  e  $r$ , o número de **GL** e o contraste dos índices de refração são também aumentados à medida que a anisotropia é minimizada, em acordo com [24, 26, 46, 47]. Por exemplo, usando os parâmetros  $p = q = r = 6$ , o índice de refração varia de 1,42 a 2,46 e o valor da anisotropia reduz aproximadamente apenas 30% quando comparado a  $p = q = r = 3$ , enquanto o número de **GL** aumenta de 192 para 1029. O aumento do número de **GL** está diretamente relacionado ao aumento da complexidade computacional do projeto. Também é importante mencionar que a faixa de índices de refração alcançáveis, de acordo com a otimização escolhida, é limitada pela escolha dos materiais que serão utilizados durante a fabricação [24]. A relação entre a altura da deformação, que determina o tamanho do objeto capaz de ser ocultado, e a altura do manto de invisibilidade influencia os valores limites dessa faixa e também a anisotropia residual, conforme será visto na Seção 4.3.

Tabela 2 – Anisotropia máxima e índice de refração para tapete de invisibilidade 3D com deformação igual a  $0,2\ \mu\text{m}$ .

$p$	$q$	$r$	GL	$\max K_{3D}$	$n_{\max}$	$n_{\min}$
–	–	–	0	0,097931	1,738	1,486
0	0	0	3	0,031160	1,923	1,472
2	2	2	81	0,009926	2,148	1,459
3	3	3	192	0,008903	2,243	1,451
4	4	4	375	0,008054	2,321	1,442
5	5	5	645	0,007331	2,397	1,439
6	6	6	1029	0,006366	2,462	1,425

O mapeamento quase-conforme do manto de invisibilidade **3D** com parâmetros de otimização  $p = q = r = 3$  é mostrado na Figura 27. Esses valores de otimização foram escolhidos por apresentarem uma considerável redução da anisotropia e não demandarem de um esforço computacional significativo, devido a um menor **GL**. Na Figura 27 (a) tem-se o mapeamento de toda a região transformada do manto de invisibilidade **3D** e na Figura 27 (b) a parte central da região transformada (região onde o objeto é ocultado) é ampliada e mostrada com um maior detalhamento. As linhas de grade da **TC** se cruzam em aproximadamente  $90^\circ$ , indicando uma transformação com preservação de ângulo entre as coordenadas e minimização do efeito da anisotropia [26].

A estrutura utilizada para a simulação do dispositivo proposto neste trabalho foi realizada no COMSOL Multiphysics<sup>®</sup> e é apresentada na Figura 28 (a) e (b) nos planos  $(x, z)$  e  $(x, y)$ , respectivamente. A base dessa estrutura possui o formato de um octógono, cujos diâmetros paralelos aos eixos  $x$  e  $y$  possuem valores iguais a  $6,0\ \mu\text{m}$ . Para obtenção da estrutura **3D**, o octógono foi extrudado em direção ao eixo  $z$ , com uma altura igual a  $3,2\ \mu\text{m}$ . A região transformada, dada pelos parâmetros  $w_1$ ,  $w_2$  e  $h$  e ilustrada na Figura 27 (a), encontra-se no interior do octógono, posicionada em sua base inferior e centralizada em relação à origem.

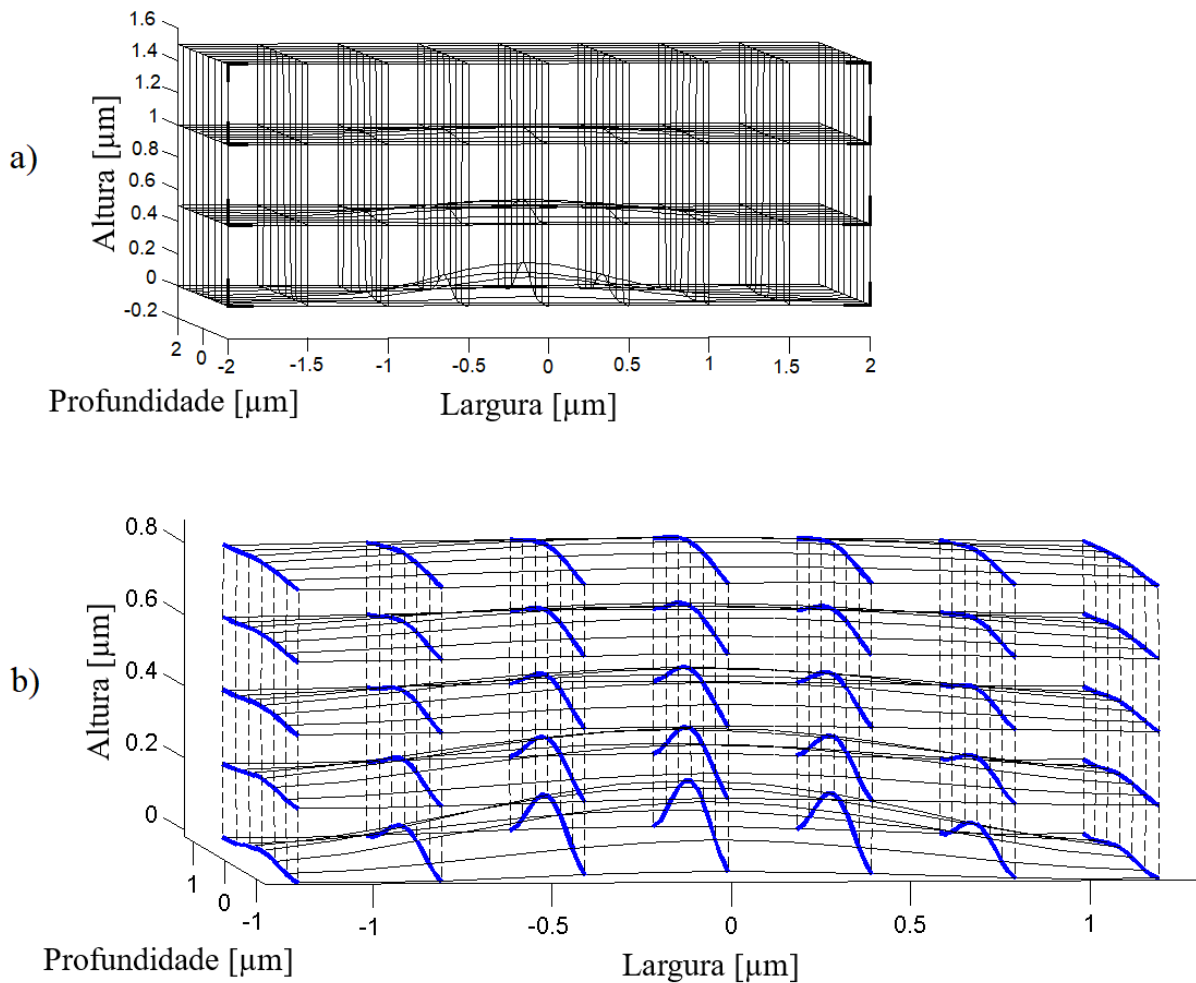


Figura 27 – Geometria da transformação de coordenadas otimizadas para o tapete de invisibilidade 3D com  $p = q = r = 3$ : (a) região total transformada e (b) visão detalhada da região central transformada.

Simulações numéricas de onda completa, usando o [FEM](#), foram executadas para verificar o comportamento do dispositivo no comprimento de onda de 750 nm e avaliar o seu desempenho na ocultação de objetos 3D. Esse valor de comprimento de onda foi escolhido em razão de ter sido empregado no desenvolvimento do primeiro tapete de invisibilidade [26] e também por ter sido utilizado como referência para outros projetos [27,42,152]. Utilizando os parâmetros  $p = q = r = 3$ , por resultarem em uma significativa redução da anisotropia com esforço computacional intermediário, a distribuição do índice de refração resultante do processo de otimização apresentou variação entre 1,45 e 2,24, conforme apresentado na Tabela 2 e mostrada na Figura 29. Na Figura 29 (a) tem-se a visão em perspectiva do dispositivo, onde são evidenciados os planos  $xz$ ,  $yz$  e  $xy$ . Nesse último plano percebe-se a deformação do tapete de invisibilidade 3D, cujo espaço vazio corresponde à região para ocultação do objeto. Na Figura 29 (b) tem-se a visão em perspectiva dos planos  $(x, z)$  e  $(y, z)$ , na qual foi destacada a região transformada correspondente ao

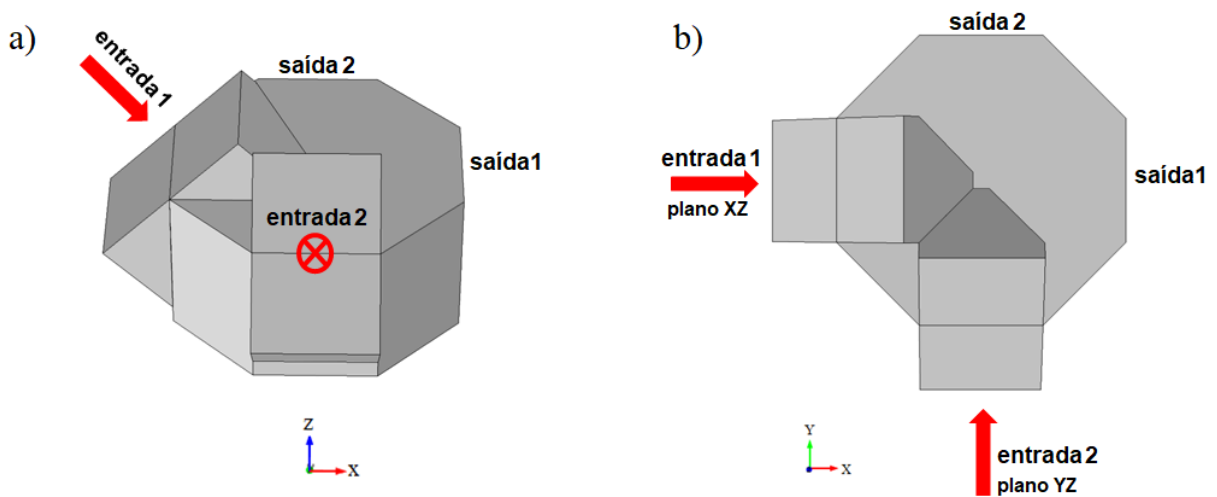


Figura 28 – Estrutura para simulação do tapete de invisibilidade 3D no COMSOL Multiphysics<sup>®</sup> nas visões dos planos: (a)  $y = 0$  e (b)  $z = 0$ .

manto de invisibilidade. Na Figura 29 (c) e (d) pode ser visualizado com mais detalhes a distribuição do índice de refração nos planos  $y = 0$  e  $x = 0$ , respectivamente. As entradas e saídas do dispositivo projetado estão indicados nessa figura.

A anisotropia residual, alcançada após a sua minimização por meio do algoritmo de otimização, pôde ser desprezada, permitindo aproximar de um manto isotrópico. Dois feixes Gaussianos com diferentes ângulos de incidência, um no plano  $(x, z)$  (entrada 1) e o outro no plano ortogonal  $(y, z)$  (entrada 2), foram utilizados como fontes para excitar o dispositivo sob teste. As ondas viajam em direção à origem com uma incidência de  $45^\circ$  no ponto  $(0, 0, 0)$ , refletem no limite inferior do tapete e propagam em direção às saídas do dispositivo (saída 1 e saída 2). Esses ângulos de incidência foram definidos de acordo com a estrutura de simulação da Figura 28. Nessa estrutura, as superfícies limitantes com o meio exterior foram ajustadas para campo elétrico ou magnético incidente igual a zero, evitando assim reflexões que levam à redução do efeito de invisibilidade do tapete. Essa condição de contorno de espalhamento somente não foi utilizada na superfície inferior do dispositivo, atribuída como um PEC, e nas superfícies de entrada dos feixes Gaussianos. Simulações numéricas em três dimensões confirmam a funcionalidade do dispositivo relativa ao efeito de invisibilidade.

Na Figura 30, as quatro colunas representam, respectivamente, a propagação do campo elétrico normalizado em perspectiva, visões frontais de cada um dos planos verticais de incidência (ortogonais entre si) e o plano de corte horizontal em  $z = 2,31 \mu\text{m}$ . Como referência, a Figura 30 (a) mostra a reflexão a partir de um espelho plano perfeito, isto é, a superfície plana de um PEC. A presença da deformação no PEC, definida por (3.61), distorce a onda refletida mostrada na Figura 30 (b), o que significa que um observador externo visualiza facilmente as deformações na frente de onda refletida. Na Figura 30 (c), a

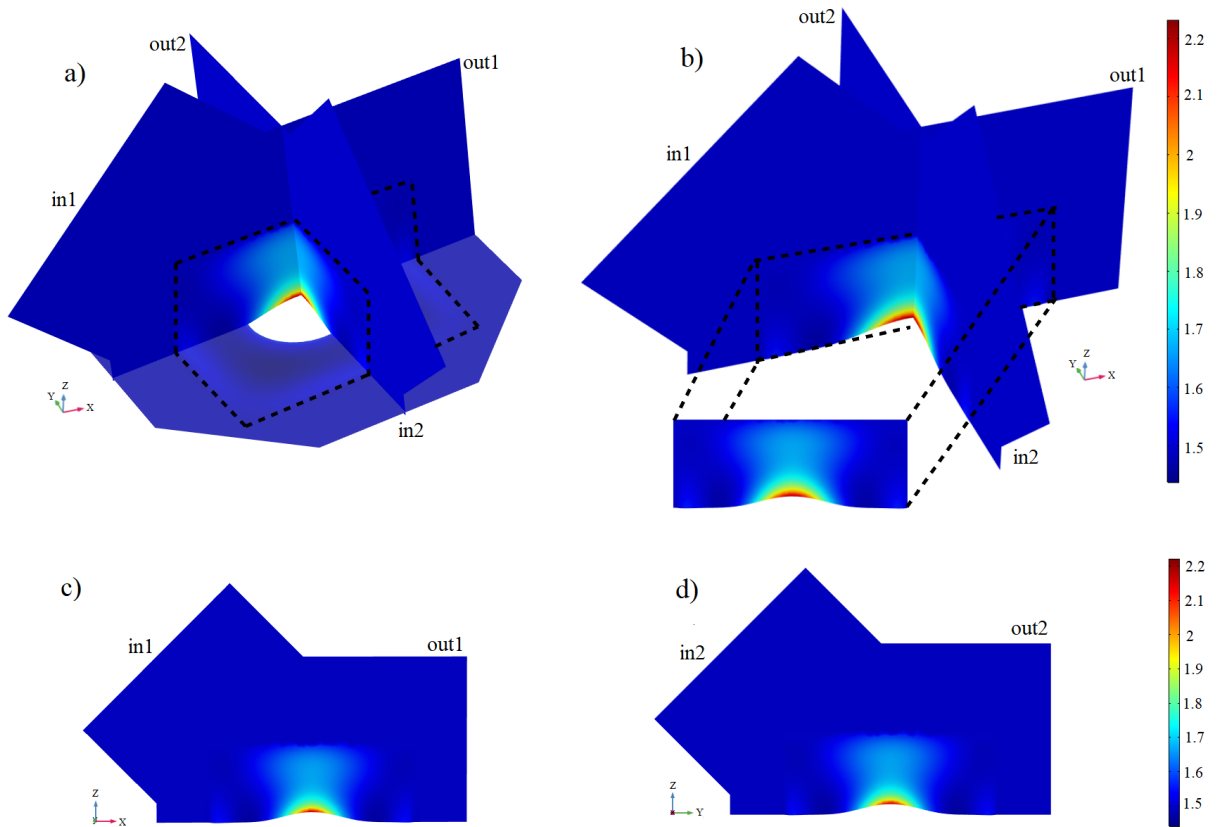


Figura 29 – Resultados simulados para o tapete de invisibilidade 3D com  $p = q = r = 3$  e  $\lambda = 750$  nm. Perfil do índice de refração: (a) em perspectiva para os planos  $x = 0$ ,  $y = 0$  e  $z = 0$ , (b) em perspectiva para os planos  $x = 0$  e  $y = 0$ , cuja região pontilhada corresponde ao manto transformado, (c) visão detalhada do plano  $y = 0$  e (d) visão detalhada do plano  $x = 0$ .

invisibilidade é alcançada pela introdução do material isotrópico otimizado que constitui o manto, representado pelas linhas pontilhadas que indicam os seus limites. O campo refletido nesses limites é similar ao caso em que não há deformação no PEC, verificado pelos perfis de modo do campo elétrico normalizado, aproximadamente iguais, entre as Figuras 30 (a) e 30 (c). A eficiência do tapete de invisibilidade 3D também pôde ser confirmada pelos cortes de campo elétrico próximo normalizado. Essas medidas foram tomadas nas frentes de onda do campo elétrico, indicadas com uma linha preta contínua nos planos  $(y, z)$  da Figura 30 e posicionadas na saída do tapete de invisibilidade. O eixo vertical desses gráficos é dado pelo campo elétrico próximo normalizado, com amplitude máxima igual a  $1$  V/m. O eixo horizontal é o comprimento do arco igual a  $5 \mu\text{m}$ , ou seja, representa o comprimento da linha preta contínua mostrada nos gráficos de propagação do campo elétrico. É possível verificar a proximidade entres os cortes de campo próximo das Figuras 30 (a) e (c). Portanto, a preservação da propagação do campo elétrico para ambas as fontes de excitações Gaussianas, uma em cada plano, indica a possibilidade de alcançar a invisibilidade para diferentes direções de visualização do dispositivo 3D proposto.

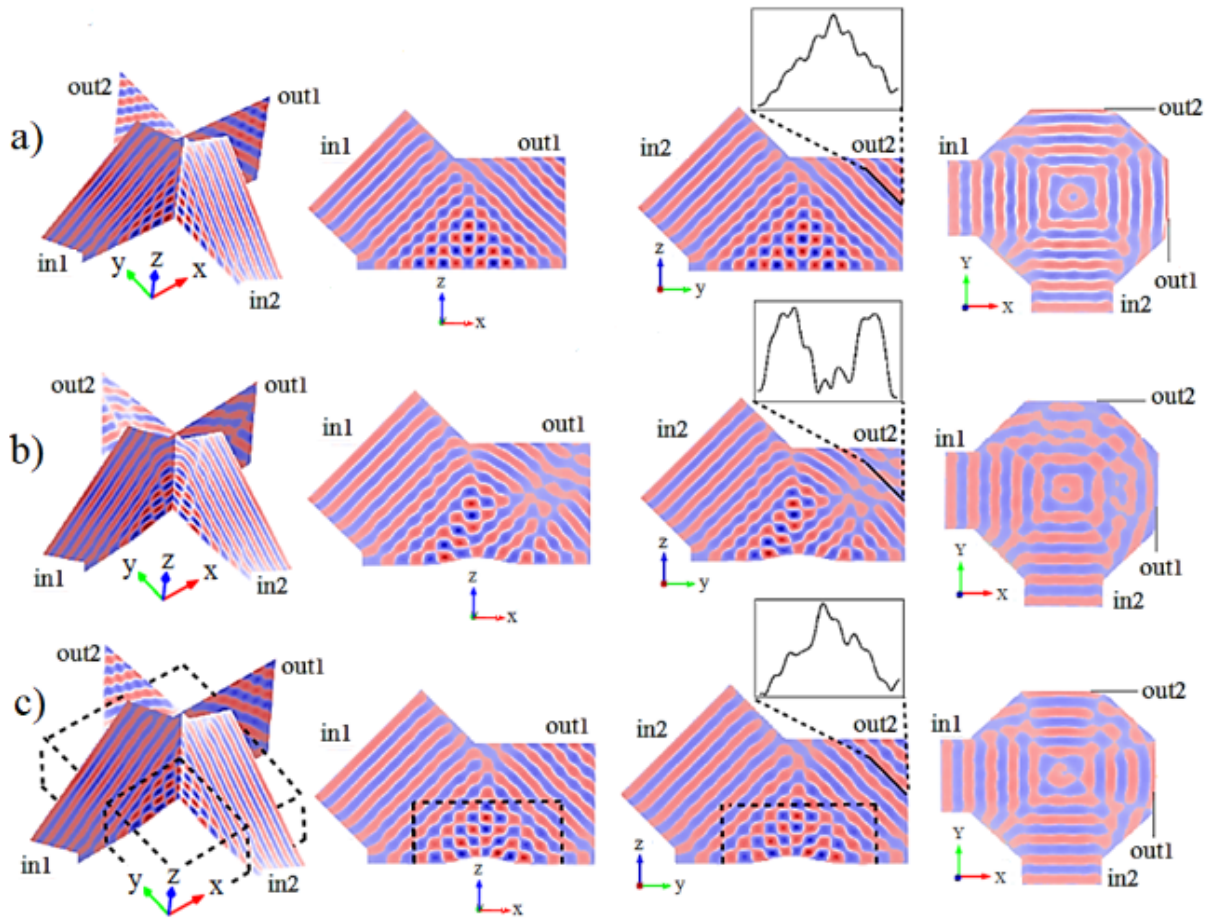


Figura 30 – Gráficos do campo elétrico normalizado instantâneo, em 750nm, nas visões em perspectiva, planos  $y = 0$ ,  $x = 0$  e  $z = 2,31 \mu\text{m}$ , respectivamente, para (a) um espelho perfeitamente plano, (b) espelho deformado sem o manto e (c) espelho deformado com o tapete de invisibilidade, cujos limites são indicados pelas linhas pontilhadas.

Outra maneira de se comprovar o funcionamento correto do tapete de invisibilidade 3D foi por meio da distribuição de campo elétrico distante, extraído do plano  $(y, z)$ , para cada uma das situações mostradas na Figura 30 (espelho plano e espelho deformado sem e com o manto). O campo distante foi medido a uma distância acima de  $100\lambda$  da sua saída. A Figura 31 apresenta as medidas de campo distante representado pelo campo elétrico normalizado em função do comprimento do arco utilizado nas medições. A elevada similaridade entre os padrões de campo distante das Figuras 31 (a) e (c) confirmam o funcionamento correto do tapete de invisibilidade.

Conforme mencionado no Capítulo 3, Seção 3.5, após o mapeamento quase-conforme ocorre a redução da anisotropia, porém não é completamente extinta. Essa anisotropia residual é ignorada ao assumir que os termos fora da diagonal principal da matriz 3.49 sejam nulos e os termos da diagonal sejam iguais. Isso impacta na invisibilidade, motivo

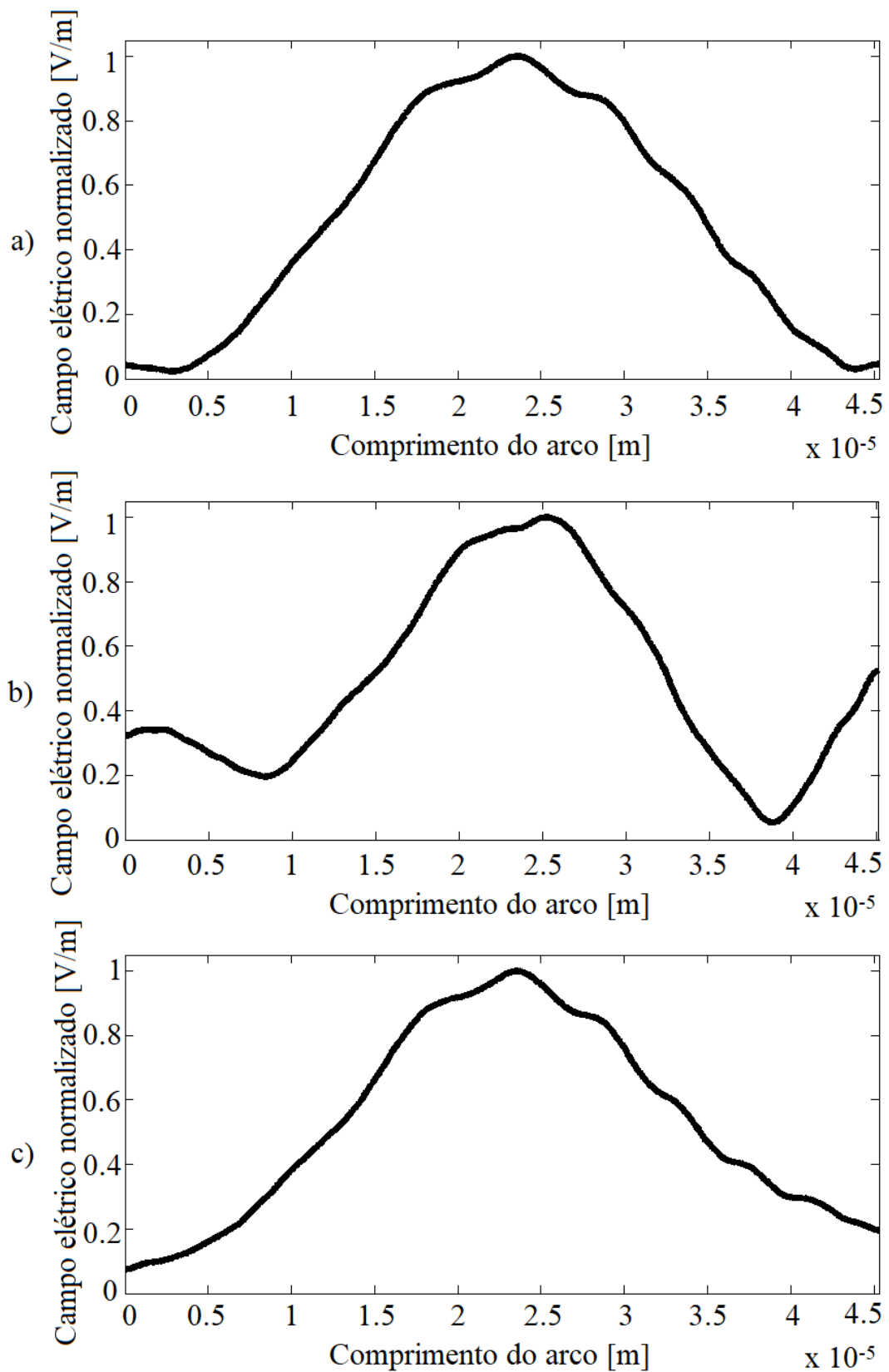


Figura 31 – Gráficos do campo elétrico distante extraídos do plano  $x = 0$  para (a) um espelho perfeitamente plano, (b) espelho deformado sem o manto e (c) espelho deformado com o tapete de invisibilidade.



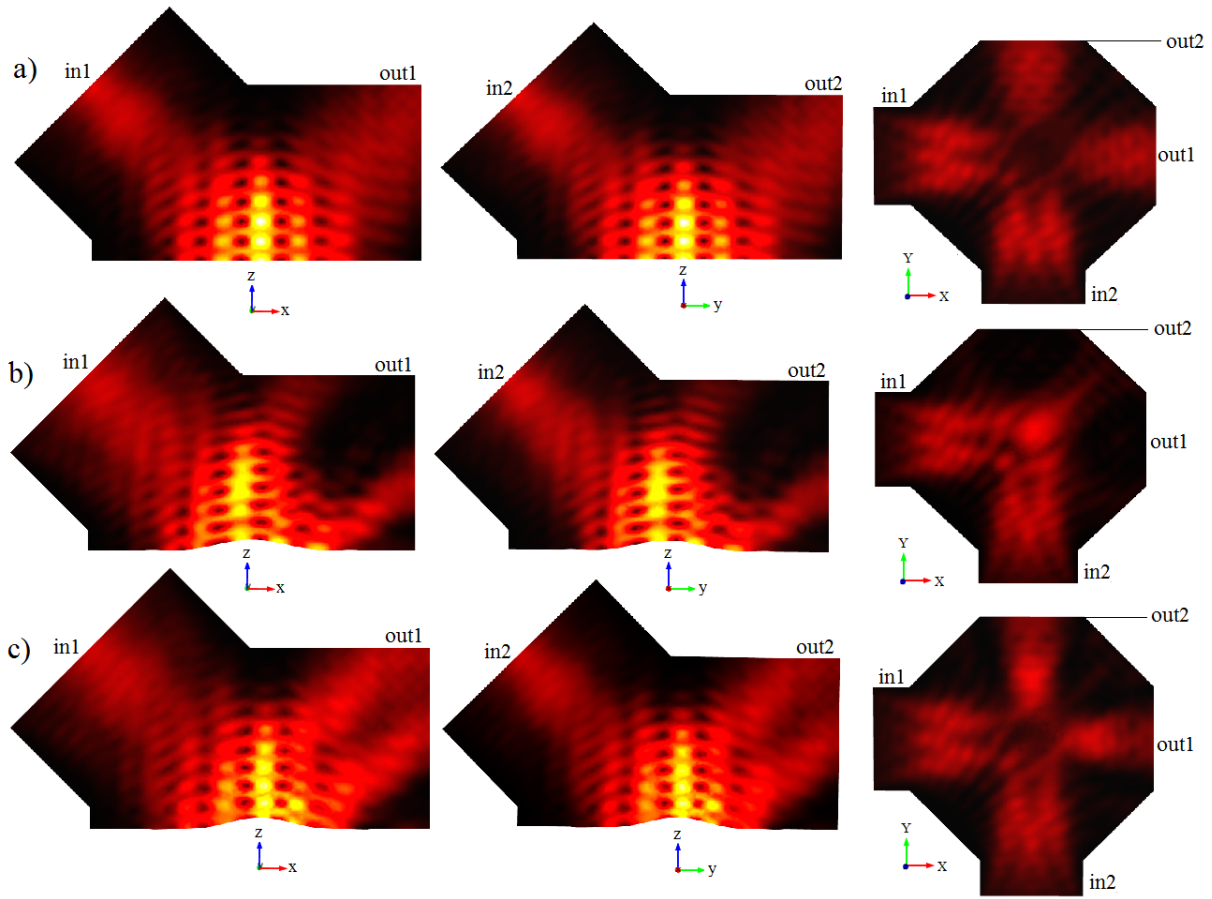


Figura 32 – Fluxo de potência eletromagnética nos planos  $y = 0$ ,  $x = 0$  e  $z = 2,31 \mu\text{m}$ , respectivamente, para (a) um espelho perfeitamente plano, (b) espelho deformado sem o manto e (c) espelho deformado com o tapete de invisibilidade.

pelo qual os cortes de campo elétrico e medidas de campo próximo das Figuras 30 (a) e (c) e medidas de campo distante das Figuras 31 (a) e (c) não são exatamente iguais.

A Figura 32 apresenta o fluxo de potência eletromagnética das três últimas colunas mostradas na Figura 30. O fluxo de potência, na Figura 32 (a), é uniformemente distribuído ao longo das saídas do dispositivo, enquanto na Figura 32 (b) a protuberância causada pela deformação do PEC resulta em uma divisão dos feixes de onda na saída do manto e, conseqüentemente, perda de invisibilidade para um observador externo. Uma vez que o manto otimizado é utilizado no meio, na Figura 32 (c) percebe-se que o fluxo de potência da onda refletida é restaurado e uniformemente distribuído, como em um espelho perfeitamente plano mostrado na Figura 32 (a).

Os resultados apresentados nas Figuras 30 a 32 foram obtidos com a utilização da polarização perpendicular das ondas incidentes, ou seja, o campo elétrico incidente permaneceu no plano de incidência. A mesma funcionalidade para a polarização paralela das ondas também é possível de ser alcançada, uma vez que no mapeamento quase-conforme ambas as polarizações podem ser aplicadas [26]. Na Figura 33 tem-se a polarização pa-

ralela das ondas incidentes com propagação do campo magnético normalizado em perspectiva, nas visões frontais de cada um dos planos incidência e perpendiculares entre si. Como mostrado na Figura 30, na Figura 33 (a) verifica-se a reflexão a partir de um espelho plano perfeito. Na Figura 33 (b) tem-se o meio transformado, porém não otimizado. Nessa última figura ocorre uma distorção da onda refletida, devido a superfície deformada, resultando em perda de invisibilidade. Na Figura 33 (c), o manto otimizado é capaz de restaurar a propagação da onda, após refletir na deformação, possibilitando que a invisibilidade seja alcançada. Os padrões de campo magnético próximo normalizado, extraídos do plano  $x = 0$ , confirmam a proximidade de funcionamento entre o espelho perfeitamente plano e o tapete de invisibilidade 3D. Esses padrões foram tomados nas frentes de onda do campo magnético, indicadas com uma linha preta contínua nos planos  $(y, z)$ . O eixo vertical desses gráficos é dado pelo campo magnético próximo normalizado, com amplitude máxima igual a 1 A/m. O eixo horizontal é o comprimento do arco, igual a 5  $\mu\text{m}$ , representando o comprimento da linha preta contínua mostrada nos gráficos de propagação do campo magnético.

A técnica da TO aplicada juntamente à estratégia de mapeamento quase-conforme possibilita alcançar a independência em relação à frequência de operação [26]. Desta forma, o desempenho do tapete de invisibilidade não é afetado pelo comprimento de onda da luz. Para comprovar essa afirmação, além da operação em 750 nm, conforme mostrado na Figura 30, foram verificados o funcionamento do dispositivo em 1550 nm e também na frequência visível de 680 nm. Na Figura 34 (a), (b) e (c) tem-se a operação do manto a 1550 nm, com polarização perpendicular para os casos de espelho sem deformação, meio transformado e sem otimização, e meio transformado e otimizado, respectivamente. A análise desses três casos é novamente realizada para o comprimento de onda de 680 nm, com polarização perpendicular, e mostrada na Figura 35. Os cortes de campo próximo normalizado dos planos  $(y, z)$  comprovam a capacidade do tapete de invisibilidade de operar em diferentes frequências, inclusive na faixa de luz visível. As medidas de campo próximo foram tomadas nas frentes de onda do campo elétrico, posicionadas na saída do tapete de invisibilidade. O eixo vertical desses gráficos é dado pelo campo elétrico próximo normalizado, com amplitude máxima igual a 1 V/m. O eixo horizontal é o comprimento do arco igual a 5  $\mu\text{m}$ , representando o comprimento da linha preta contínua mostrada nos gráficos de propagação do campo elétrico utilizada nas medições. É importante mencionar que mantos de invisibilidade desenvolvidos sem a aplicação de alguma estratégia que permita a redução da anisotropia, exigiriam metamateriais em sua implementação. Consequentemente, as propriedades constitutivas e de absorção dos metamateriais seriam altamente dependentes de frequência [42].

Os resultados de simulações numéricas mostradas nessa seção confirmam a eficácia da técnica empregada no desenvolvimento do tapete de invisibilidade 3D, utilizando somente materiais isotrópicos com índice de refração variável no espaço submetido à TC.



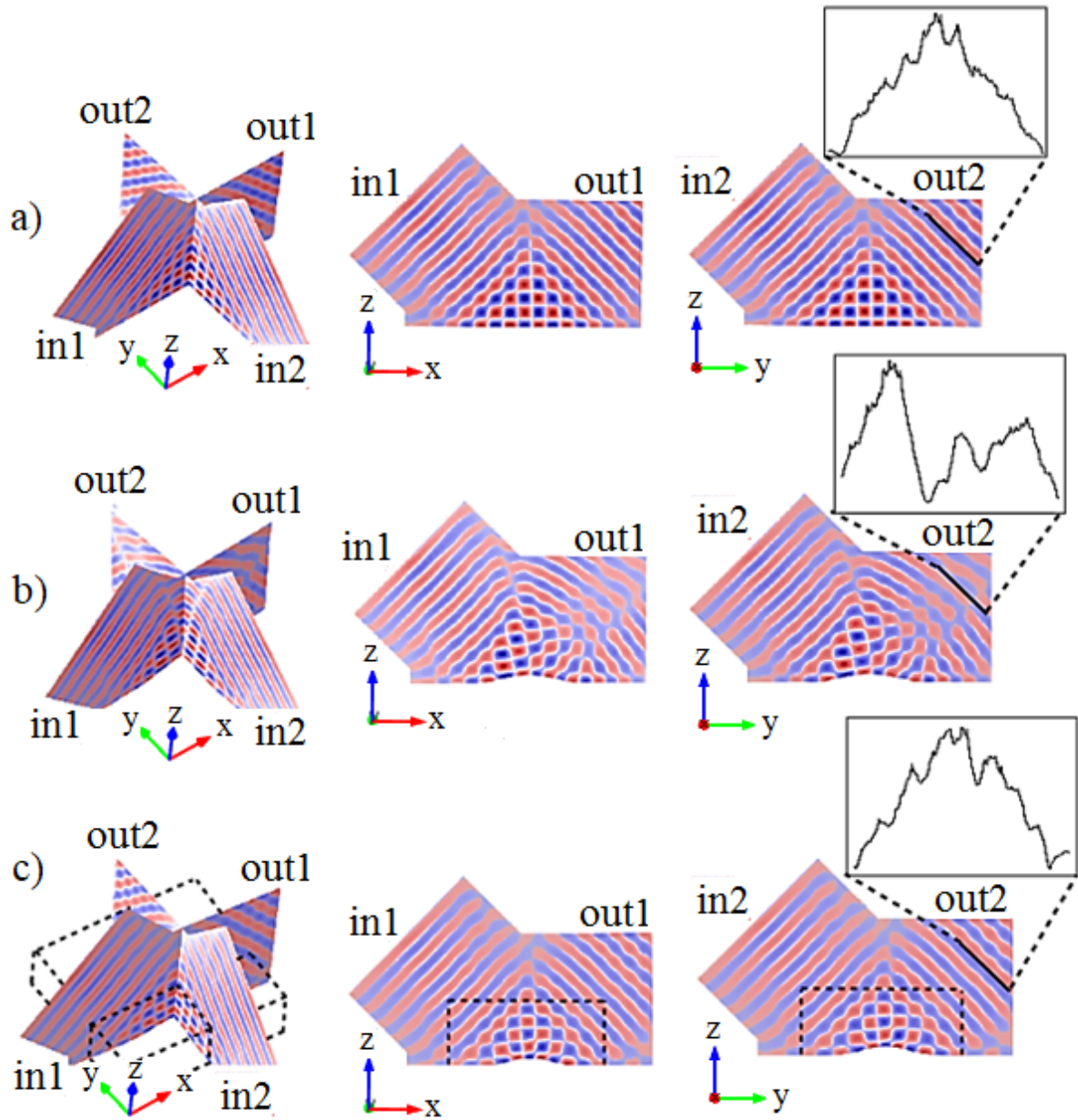


Figura 33 – Gráficos do campo magnético normalizado instantâneo, em 750nm, com polarização paralela e nas visões em perspectiva, planos  $y = 0$  e  $x = 0$ , respectivamente, para (a) um espelho perfeitamente plano, (b) espelho deformado sem o manto e (c) espelho deformado com o tapete de invisibilidade, cujos limites são indicados pelas linhas pontilhadas.

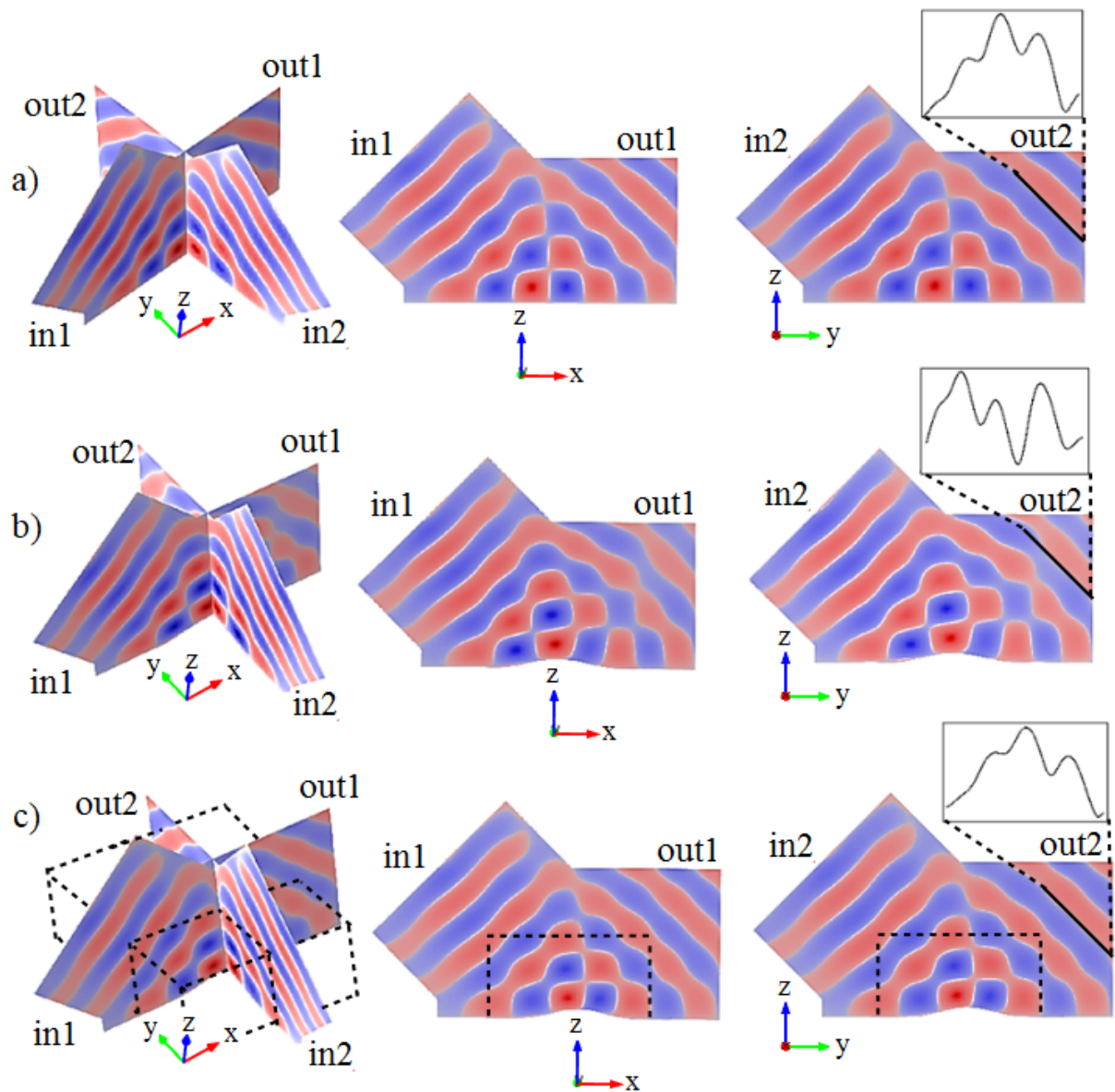


Figura 34 – Gráficos do campo elétrico normalizado instantâneo, em 1550nm, nas visões em perspectiva, planos  $y = 0$  e  $x = 0$ , respectivamente, para (a) um espelho perfeitamente plano, (b) espelho deformado sem o manto e (c) espelho deformado com o tapete de invisibilidade, cujos limites são indicados pelas linhas pontilhadas.

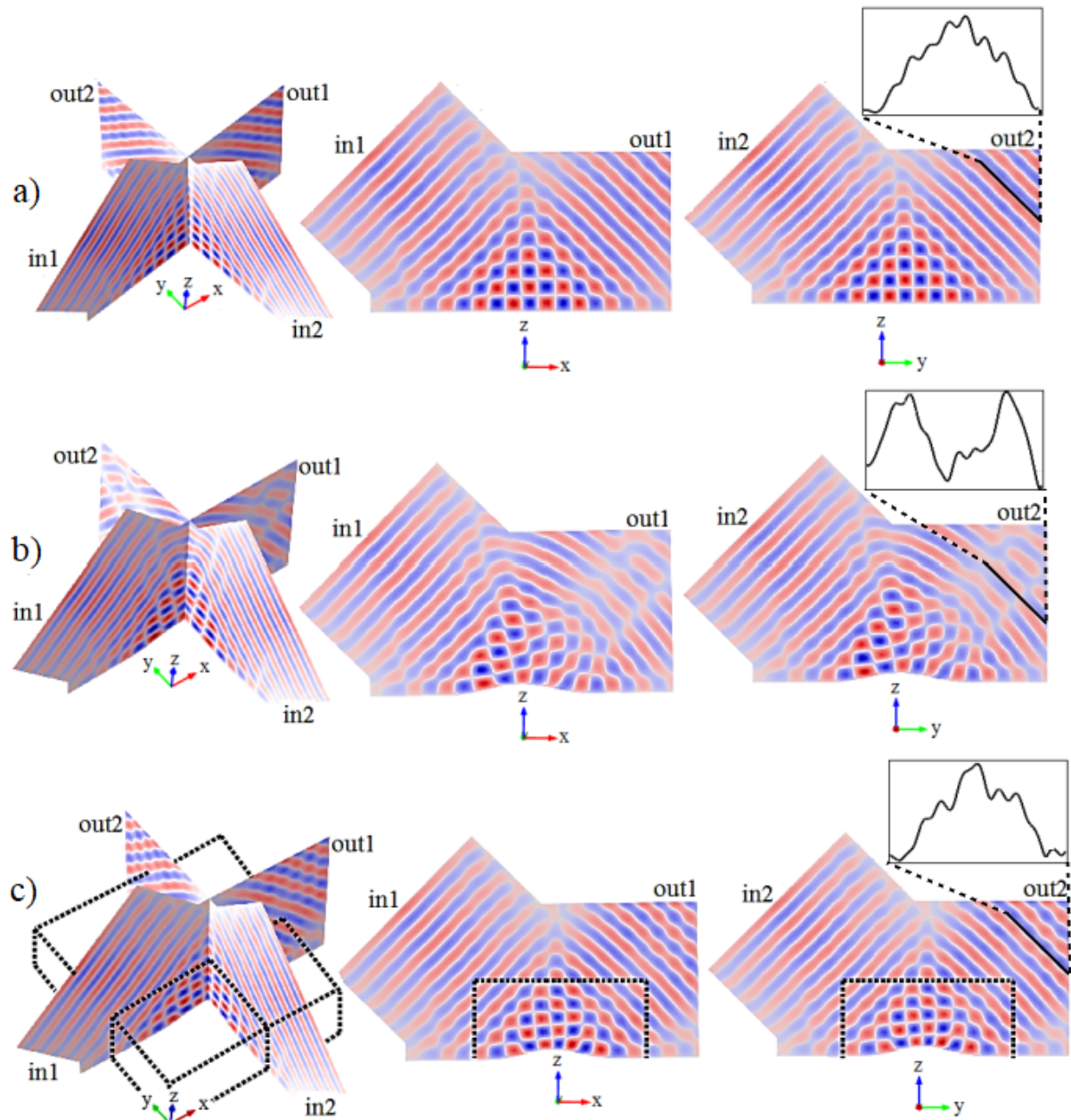


Figura 35 – Gráficos do campo elétrico normalizado instantâneo, em 680nm, nas visões em perspectiva, planos  $y = 0$  e  $x = 0$ , respectivamente, para (a) um espelho perfeitamente plano, (b) espelho deformado sem o manto e (c) espelho deformado com o tapete de invisibilidade, cujos limites são indicados pelas linhas pontilhadas.

O efeito de invisibilidade foi alcançado para diferentes direções de propagação de onda, independente da sua polarização e comprimento de onda.

### 4.3 Manto de Invisibilidade Tridimensional com Deformação Igual a $0,4 \mu\text{m}$

O efeito de aumentar a altura da deformação do tapete de invisibilidade também foi investigado. Alterando o respectivo parâmetro para o dobro da deformação anteriormente verificada, ou seja,  $c = 0,4 \mu\text{m}$ , verificou-se uma maior dificuldade na redução da anisotropia e um maior contraste do índice de refração, quando comparado ao manto com deformação menor e valor igual a  $c = 0,2 \mu\text{m}$ . A Tabela 3 traz o número de GL para diferentes ordens das séries de potência, os respectivos valores de anisotropia máxima ( $\max K_{3D}$ ) e também os índices de refração máximos ( $n_{\max}$ ) e mínimos ( $n_{\min}$ ) para o manto com deformação igual a  $0,4 \mu\text{m}$ . Com o aumento de  $c$  e mantendo os parâmetros de otimização utilizados no caso anterior,  $p = q = r = 3$ , obteve-se uma anisotropia quatro vezes maior e a variação do índice de refração aumentou para a faixa entre 1,45 e 4,53. A Figura 36 (a), (b) e (c) mostra a distribuição do índice de refração para o manto operando a  $750 \text{ nm}$  e com deformação igual a  $c = 0,4 \mu\text{m}$ , nas visões em perspectiva, planos  $y = 0$  e  $x = 0$ , respectivamente. Alterando os parâmetros para  $p = q = r = 6$ , o valor da anisotropia reduz aproximadamente 30% quando comparado a  $p = q = r = 3$  e a distribuição do índice de refração se estabelece entre 1,31 e 11,3, conforme apresentado na Tabela 3. Portanto, o aumento do contraste do índice de refração implica em uma maior dificuldade, ou até mesmo na impossibilidade, de encontrar materiais naturais com as propriedades exigidas para a fabricação do dispositivo e, possivelmente, na necessidade de processos de fabricação mais complexos, precisos e caros.

Tabela 3 – Anisotropia máxima e índice de refração para tapete de invisibilidade 3D com deformação igual a  $0,4 \mu\text{m}$ .

$p$	$q$	$r$	GL	$\max K_{3D}$	$n_{\max}$	$n_{\min}$
–	–	–	0	0,182333	2,017	1,495
0	0	0	3	0,096152	2,846	1,482
2	2	2	81	0,039094	3,633	1,467
3	3	3	192	0,035612	4,531	1,452
4	4	4	375	0,032478	6,579	1,441
5	5	5	645	0,028998	9,241	1,432
6	6	6	1029	0,024928	11,324	1,315

A Figura 37 (a) e (b) apresenta a propagação do campo elétrico normalizado, em  $750 \text{ nm}$  e com polarização perpendicular, para  $c = 0,4 \mu\text{m}$  sem manto e com manto, respectivamente. Cobrindo o objeto com o manto, conforme mostrado na Figura 37 (b),



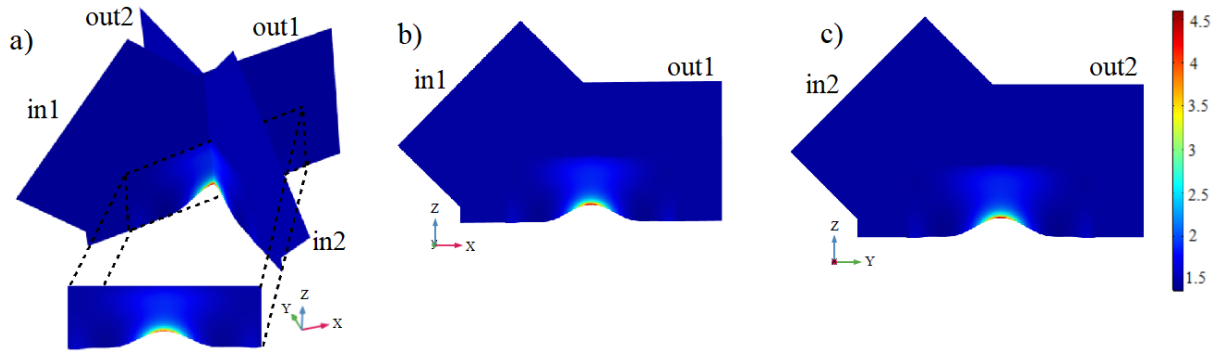


Figura 36 – Perfil do índice de refração para o tapete de invisibilidade 3D com  $c = 0,4 \mu\text{m}$  e  $p = q = r = 3$ : (a) em perspectiva para os planos  $x = 0$  e  $y = 0$ , cuja região pontilhada corresponde ao manto transformado, (b) visão detalhada do plano  $y = 0$  e (c) visão detalhada do plano  $x = 0$ .

o campo espalhado foi recuperado e a distorção da onda refletida foi minimizada, quando comparada com a superfície deformada não encoberta pelo tapete de invisibilidade na Figura 37 (a). Também foi observado que o perfil de modo do campo elétrico na Figura 37 (b) se aproxima daquele alcançado em um espelho perfeitamente plano, como na Figura 30 (a). No entanto, um desempenho inferior, em relação à invisibilidade, foi obtido quando comparado ao dispositivo com  $c = 0,2 \mu\text{m}$  e isso pode ser explicado devido ao menor grau de redução da anisotropia. Esse efeito pode ser verificado ao comparar os cortes de campo elétrico próximo normalizado, extraídos dos planos  $(y, z)$ , nas Figuras 37 (b) e 30 (c). Nas medidas de campo próximo, o eixo vertical desses gráficos é dado pelo campo elétrico próximo normalizado, com amplitude máxima igual a  $1 \text{ V/m}$ . O eixo horizontal é o comprimento do arco igual a  $5 \mu\text{m}$ , ou seja, representa o comprimento da linha preta contínua mostrada nos gráficos de propagação do campo elétrico.

O fluxo de potência eletromagnética para  $c = 0,4 \mu\text{m}$  é mostrado na Figura 38. Na Figura 38 (a) percebe-se uma lacuna de energia em direção às saídas out1 e out2, devido a deformação maior do tapete e a presença de uma anisotropia mais expressiva. Esse efeito é minimizado com a inserção do manto na Figura 38 (b). No entanto, a reconstrução da frente de onda nas saídas do dispositivo é menos eficaz quando comparada com a Figura 32 (c), onde  $c = 0,2 \mu\text{m}$ .

É necessário considerar que na literatura sobre tapetes de invisibilidade não se utiliza um procedimento para quantificar o desempenho do efeito de ocultação. Como verificado em outras referências [26–28, 33, 34, 100, 101, 152], as maneiras usuais de se verificar o desempenho do dispositivo é apresentar gráficos do campo elétrico e magnético normalizado e do fluxo de potência eletromagnético, comparando o caso de um espelho perfeitamente plano (usado como padrão de referência) com a superfície deformada com e sem o manto, conforme mostrado nas Figuras 30 a 38. Outra opção, também utilizada

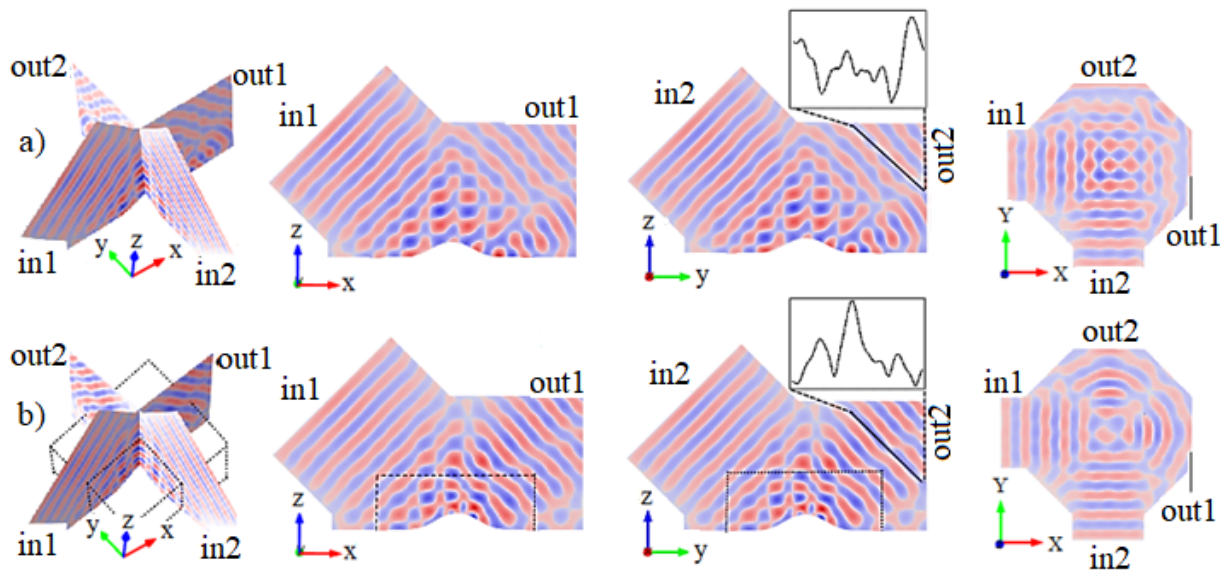


Figura 37 – Gráficos do campo elétrico normalizado instantâneo para  $c = 0,4\mu\text{m}$  nas visões em perspectiva, planos  $y = 0$ ,  $x = 0$  e  $z = 2,31\mu\text{m}$ , respectivamente, para (a) espelho deformado sem o manto e (b) espelho deformado com o tapete de invisibilidade, cujos limites são indicados pelas linhas pontilhadas.

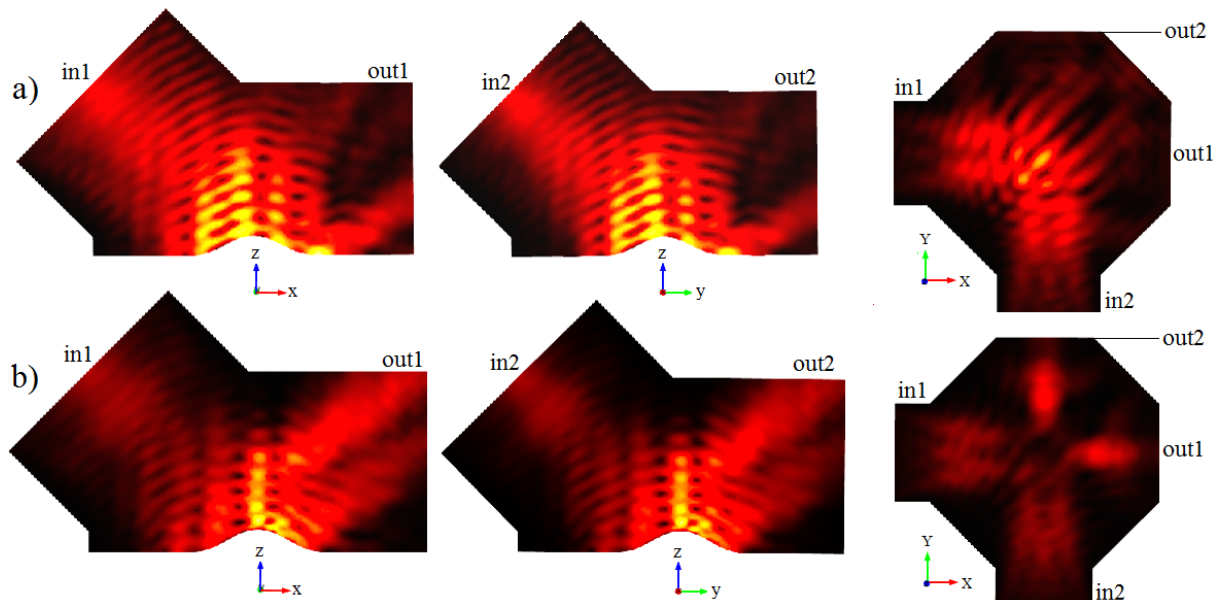


Figura 38 – Fluxo de potência eletromagnética para  $c = 0,4\mu\text{m}$  nos planos  $y = 0$ ,  $x = 0$  e  $z = 2,31\mu\text{m}$ , respectivamente, para (a) espelho deformado sem o manto e (b) espelho deformado com o tapete de invisibilidade.

nesse trabalho, para corroborar a eficácia do tapete de invisibilidade ao ocultar objetos 3D é a visualização dos cortes de campo elétrico próximo, extraídos nas saídas do dispositivo. Essa última abordagem encontra-se presente nas Figuras 30, 33, 34, 35 e 37, a fim de contribuir nessa avaliação. Neste trabalho ainda é possível verificar o corte do campo elétrico distante na Figura 31, com o intuito de reforçar o funcionamento correto do dispositivo proposto.

## 4.4 Comparação entre o Tapete de Invisibilidade Tridimensional Proposto e o Estado da Arte

Antes do desenvolvimento desse projeto, o estado da arte para tapetes de invisibilidade 3D, associado ao uso da técnica de TO e mapeamento quase-conforme, foi concedido a projetos que utilizavam processos de extrusão ou revolução de um mapa de índice de refração 2D para a obtenção de dispositivos 3D. Diversos exemplos [9, 10, 34, 37, 42, 112] e comentários sobre essa abordagem foram citados nos Capítulos 2 e 3. Porém, conforme discutido nesses capítulos, tapetes 3D que utilizam essa estratégia são incapazes de alcançar o efeito de invisibilidade independente da direção de visualização. Ou seja, somente os planos paralelos ao plano do mapa de índice de refração 2D, o qual é submetido ao processo de rotação ou extrusão, são capazes de alcançar uma invisibilidade eficaz. Planos que não coincidem com os descritos acima, não oferecem uma invisibilidade adequada, resultando em perda de desempenho do dispositivo.

A fim de elucidar essa abordagem e distinguir esses mantos 3D do tapete de invisibilidade proposto neste trabalho, simulações de um dispositivo 3D seguindo essa estratégia é apresentada na Figura 39. O manto foi construído à partir da extrusão de um mapa de índice de refração 2D e com as mesmas dimensões e altura de deformação do tapete de invisibilidade proposto, apresentado na Seção 4.2. Na Figura 39 (a) tem-se os corte dos planos  $y = 0$  e  $x = 0$ , representando um espelho plano perfeito. Analisando as simulações, verifica-se que o manto 3D obtido a partir da extrusão apenas fornece invisibilidade para ondas que viajam ao longo dos planos de simetria definidos pela extrusão, como visto na Figura 39 (b). Nesse caso, o padrão de campo elétrico é muito próximo quando comparado ao caso sem deformação apresentado na Figura 39 (a), para o plano  $y = 0$ . No entanto, ao verificar esse comportamento em um plano não paralelo ao da extrusão, como mostrado na Figura 39 (c), há uma deterioração na propagação do campo elétrico quando comparado ao corte da Figura 39 (a), para o plano  $x = 0$ . Nessa figura é possível observar uma divisão dos feixes de onda na saída do manto, conforme indicado pela elipse pontilhada. Isso resulta em perda de invisibilidade para um observador externo. Esse efeito também é verificado pelos padrões de campo elétrico próximo normalizado extraídos na saída do dispositivo, em cada uma das figuras. Nas medições de campo próximo, o eixo vertical é

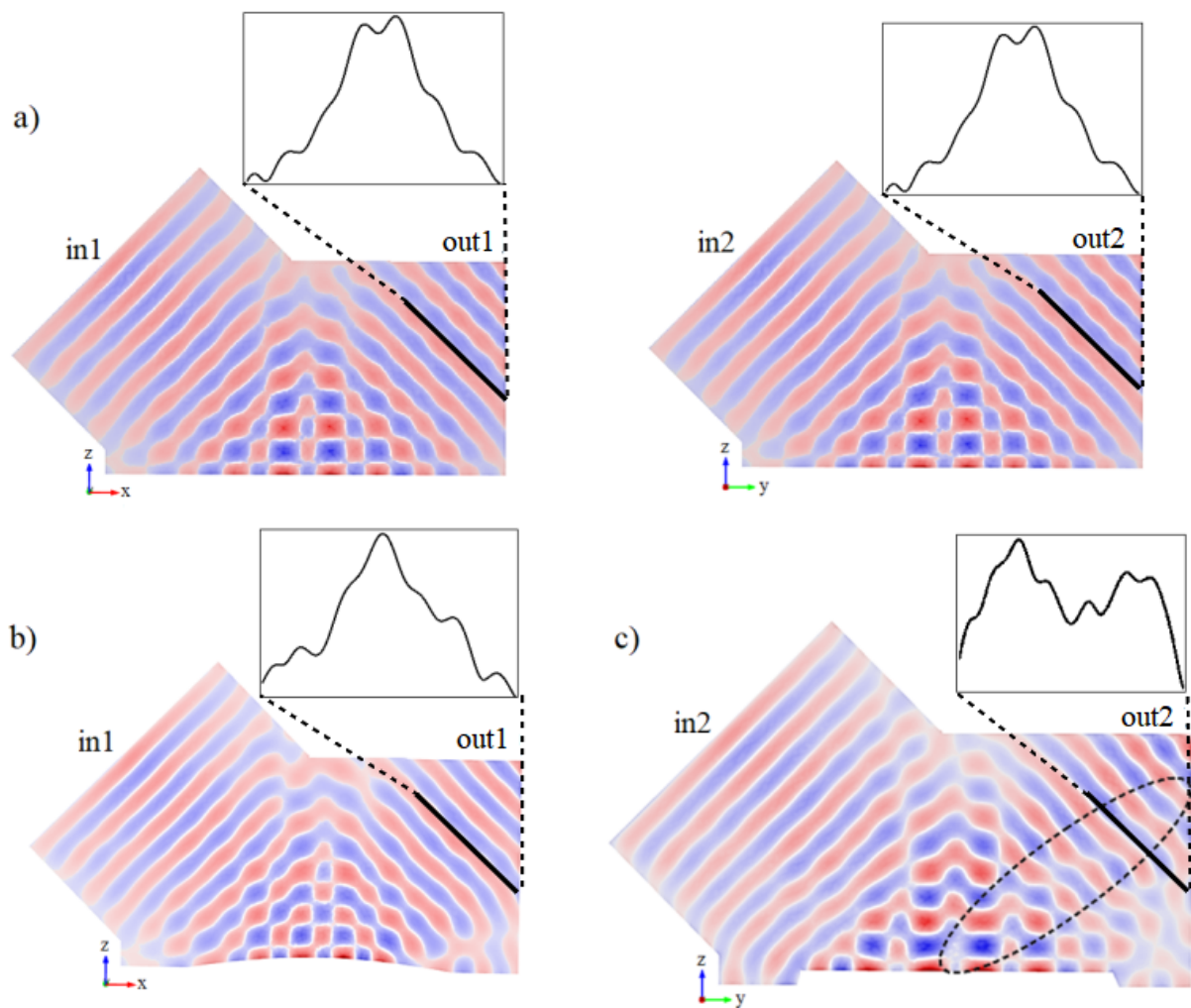


Figura 39 – Gráficos do campo elétrico normalizado instantâneo para um dispositivo 3D obtido por meio da extrusão de um plano 2D: (a) espelho perfeitamente plano para fins de comparação, (b) plano  $y = 0$  paralelo ao plano de extrusão e (c) plano  $x = 0$  perpendicular ao plano de extrusão.

dados pelo campo elétrico próximo normalizado, com amplitude máxima igual a  $1 \text{ V/m}$ . O eixo horizontal é o comprimento do arco igual a  $5 \mu\text{m}$ , representando o comprimento da linha preta contínua mostrada nos gráficos de propagação do campo elétrico. Logo, verifica-se que a técnica utilizada nessa abordagem é menos eficaz para o desenvolvimento de um tapete de invisibilidade 3D, quando comparada com a estratégia proposta neste trabalho.

## 4.5 Considerações Finais

Os resultados confirmam a eficácia da estratégia de parametrização e otimização para obtenção de um tapete de invisibilidade 3D isotrópico desenvolvido com a técnica



de TO e mapeamento quase-conforme. Com essa abordagem foi possível obter um meio com anisotropia desprezível e sem reflexões nos limites do dispositivo. Simulações de onda completa comprovam a capacidade do manto, constituído por uma superfície refletiva 3D, de alcançar a invisibilidade em diferentes direções de visualização para um observador externo, devido ao uso de uma TC que realmente é 3D. Também foi realizada a comparação de desempenho entre o estado da arte para tapetes de invisibilidade 3D e o dispositivo proposto nesse trabalho. Ficou evidenciado o desempenho superior desse último manto em relação à obtenção do efeito de ocultação para todas as direções de propagação de onda. Portanto, por meio dos resultados apresentados, pode-se concluir que a abordagem adotada possibilita a simplificação na construção de tapetes de invisibilidade 3D, eliminando a necessidade do uso de estruturas metamateriais no processo fabril.

## 5 Conclusões

### 5.1 Aspectos Gerais e Conclusões

Este trabalho apresentou o desenvolvimento do primeiro tapete de invisibilidade **3D** com a técnica de **TO**, empregando o mapeamento quase-conforme aplicado na **TC**. A **TC 3D** utilizou a estratégia de parametrização, mediante a adição de funções de perturbação na forma de séries de potência. A parametrização possibilitou o emprego do método de otimização de *quase-Newton* [47, 137], o que permitiu a redução da anisotropia no meio transformado. Demonstrou-se, teoricamente, o funcionamento do manto **3D** com propriedades isotrópicas, em frequências ópticas. O controle de propagação de onda e o efeito de invisibilidade foram alcançados independentes da direção de visualização de um observador externo, do comprimento de onda e da polarização utilizados. Também pôde ser verificado o atendimento às condições de contorno referentes à funcionalidade e continuidade entre o sistema original e o transformado, evitando reflexões nas interfaces.

Os resultados foram obtidos por simulações numéricas de onda completa, utilizando o método dos elementos finitos. O desempenho do tapete de invisibilidade proposto na ocultação de objetos **3D** foi verificado para os comprimentos de onda de 1550 nm, 750 nm e também na faixa de luz visível, em 680 nm. A distribuição dos campos eletromagnéticos normalizados e do índice de refração resultante do processo de otimização foram apresentados, considerando deformações do manto com alturas iguais a 0,2  $\mu\text{m}$  e 0,4  $\mu\text{m}$ . Os resultados demonstraram que o método de *quase-Newton* [47, 137] possui capacidade de reduzir a anisotropia à medida que o número de graus de liberdade das funções de perturbação são aumentados. Entretanto, o contraste dos índices de refração no meio é aumentado, podendo representar uma dificuldade adicional na construção do tapete de invisibilidade. O dispositivo manteve a sua operação correta para as polarizações perpendicular e paralela. O seu funcionamento também foi comprovado por meio de cortes de campo elétrico (ou magnético) próximo e distante, e do fluxo de potência eletromagnética.

Também foi realizada a comparação entre o manto desenvolvido neste trabalho com um tapete de invisibilidade **3D**, obtido por meio da extrusão do perfil **2D** do mapa de índice de refração. Esse último dispositivo corresponde ao estado da arte para tapetes de invisibilidade **3D**, conforme mostrado na literatura [9, 10, 34, 37, 42, 112]. Foi confirmado que o manto **3D** projetado com essa abordagem possui um efeito de invisibilidade limitado, dependendo da direção em que as ondas eletromagnéticas se propagam. Por outro lado, o tapete **3D** proposto foi capaz de ocultar objetos em qualquer direção de propagação das ondas, pois a **TC** utilizada neste trabalho realmente ocorre em três dimensões. Portanto, esse dispositivo apresentou um desempenho superior em relação à invisibilidade.

## 5.2 Trabalhos Futuros

Neste trabalho o algoritmo de otimização de *quase-Newton* [47, 137] foi utilizado para se alcançar o mapeamento quase-conforme com anisotropia reduzida. Métodos alternativos podem ser empregados com o intuito de se mapear os que mais se destacam frente a esse objetivo. Dentre eles podem ser investigados diferentes algoritmos de otimização numérica, como o método de *Nelder Mead* [153] ou algum algoritmo de otimização global, como o *Pattern Search* [154]. Outro método, como o de interpolação trigonométrica [155], também pode ter o seu desempenho verificado.

Grande expectativa é gerada em relação à fabricação do tapete de invisibilidade 3D proposto, uma vez que a faixa de índice de refração alcançada em seu desenvolvimento possibilita a sua construção em uma plataforma de SOI, usando algum processo padrão semicondutor de metal-óxido complementar – *complementary metal-oxide-semiconductor* (CMOS) [28]. Além disso, para a operação do dispositivo em comprimentos de onda maiores (como na faixa de THz), uma possível alternativa de sua fabricação devido a limitações na resolução da faixa considerada, é a utilização de uma mistura de materiais isotrópicos simples disponíveis na natureza com o emprego de técnicas de impressão 3D [156].

# APÊNDICE A – Método de otimização numérica de *quase-Newton*

Otimização numérica é um campo amplo da matemática e muitos de seus algoritmos estão disponíveis na literatura [157, 158]. Bibliotecas do Matlab<sup>®</sup>, como *Optimization Toolbox* e o *Global Optimization Toolbox*, fornecem esses algoritmos.

O problema de otimização numérica pode ser definido da seguinte forma. Seja a função custo  $C(\mathbf{x})$ , em que  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_k]$  é o conjunto de variáveis dependentes. Deve-se encontrar o valor ótimo das variáveis dependentes  $\mathbf{x}$ , denotado por  $\mathbf{x}_{\text{opt}}$ , de forma que  $C(\mathbf{x}_{\text{opt}}) = C_{\text{min}}$ .

O método de *Newton* é um algoritmo iterativo que tem como objetivo encontrar os zeros de uma função  $f(\mathbf{x})$ , cuja equação de adaptação das variáveis dependentes é dada por

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - [J_f(\mathbf{x}_n)]^{-1} f(\mathbf{x}_n) \quad (\text{A.1})$$

em que  $J_f(\mathbf{x}_n)$  é a matriz Jacobiana da função  $f$  avaliada com  $\mathbf{x}_n$  na iteração  $n$ . Seja  $\nabla f(\mathbf{x})$  o gradiente de  $f(\mathbf{x})$  que aponta a direção de crescimento da função. Os zeros em  $\nabla f(\mathbf{x})$  correspondem aos pontos de mínimo ou máximo de  $f(\mathbf{x})$ . Pode-se então utilizar o método de *Newton* para procurar zeros na função gradiente. Adicionalmente, o Jacobiano de  $\nabla f(\mathbf{x})$  corresponde à Hessiana de  $f(\mathbf{x})$  que é dada por

$$H_{f(\mathbf{x})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Portanto, para encontrar o máximo de  $f(\mathbf{x})$ , utiliza-se a equação iterativa de adaptação dos coeficientes

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - [H_f(\mathbf{x}_n)]^{-1} \nabla f(\mathbf{x}_n) \quad (\text{A.3})$$

Por outro lado, um método é considerado *quase-Newton* quando  $[H_f(\mathbf{x}_n)]^{-1}$  é substituída por uma aproximação. Existem algumas variações de métodos *quase-Newton* disponíveis na literatura [159]. A Tabela 4 apresenta os métodos mais comuns e suas respectivas aproximações da inversa da Hessiana  $[H_f(\mathbf{x}_n)]^{-1}$  dada por  $\mathbf{H}_{n+1}$ . Os valores  $\mathbf{y}_n$  e  $\Delta \mathbf{x}_n$  da

tabela são dados por

$$\mathbf{y}_n = \nabla f(\mathbf{x}_{n+1}) - \nabla f(\mathbf{x}_n) \quad (\text{A.4})$$

e

$$\Delta \mathbf{x}_n = -\alpha_n \mathbf{H}_n \nabla f(\mathbf{x}_n) \quad (\text{A.5})$$

onde  $\alpha_n$  é escolhido para satisfazer as condições de *Wolfe* [160].

Tabela 4 – Métodos de *quase-Newton*.

Método	$\mathbf{H}_{n+1}$
BFGS	$\left( \mathbf{I} - \frac{\Delta \mathbf{x}_n \mathbf{y}_n^T}{\mathbf{y}_n^T \Delta \mathbf{x}_n} \right) \mathbf{H}_n \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{y}_n^T \Delta \mathbf{x}_n}{\Delta \mathbf{x}_n \mathbf{y}_n^T} \right) + \frac{\Delta \mathbf{x}_n \Delta \mathbf{x}_n^T}{\mathbf{y}_n^T \Delta \mathbf{x}_n}$
Broyden	$\mathbf{H}_n + \frac{(\Delta \mathbf{x}_n - \mathbf{H}_n \mathbf{y}_n) \Delta \mathbf{x}_n^T \mathbf{H}_n}{\Delta \mathbf{x}_n^T \mathbf{H}_n \mathbf{y}_n}$
DFP	$\mathbf{H}_n + \frac{\Delta \mathbf{x}_n \Delta \mathbf{x}_n^T}{\Delta \mathbf{x}_n^T \mathbf{y}_n} - \frac{\mathbf{H}_n \mathbf{y}_n \mathbf{y}_n^T \mathbf{H}_n}{\mathbf{y}_n^T \mathbf{H}_n \mathbf{y}_n}$
SR1	$\mathbf{H}_n + \frac{(\Delta \mathbf{x}_n - \mathbf{H}_n \mathbf{y}_n)(\Delta \mathbf{x}_n - \mathbf{H}_n \mathbf{y}_n)^T}{(\Delta \mathbf{x}_n - \mathbf{H}_n \mathbf{y}_n)^T \mathbf{y}_n}$

O método de *quase-Newton* está disponível no Matlab<sup>®</sup> na função `fminunc` e usa um procedimento de busca linear utilizando a fórmula **BFGS** para atualizar uma aproximação da matriz Hessiana. O algoritmo dado por esse método é multivariável, baseado em gradiente e iterativo.

Neste trabalho, o algoritmo de *quase-Newton* [47, 137] foi selecionado considerando que a função custo a ser minimizada é suave e com objetivo único. A função custo  $C(\mathbf{x})$  a ser otimizada, representada neste trabalho por  $F$  e dada em (3.51), retorna um escalar com o valor da anisotropia em função da **TC** que descreve o formato da superfície do tapete de invisibilidade **3D**. Deseja-se encontrar os valores ótimos dos coeficientes do polinômio  $\mathbf{x}$  que minimizam a anisotropia. É importante saber que caso for desejado encontrar o mínimo da função custo, mas o método de otimização for desenvolvido para encontrar o máximo, o máximo de  $-C(\mathbf{x})$  corresponde ao mínimo de  $C(\mathbf{x})$ .

A Figura 40 apresenta o fluxograma do algoritmo *quase-Newton* utilizado em Matlab<sup>®</sup>, visando a redução da anisotropia total do tapete de invisibilidade **3D** proposto neste trabalho.

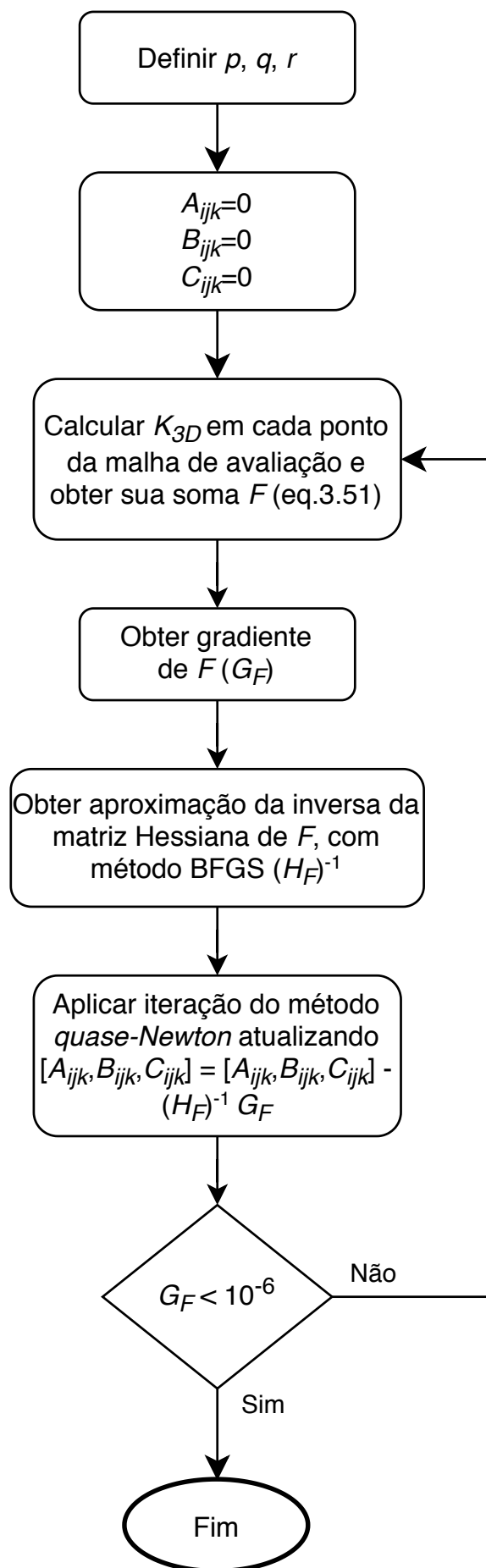


Figura 40 – Fluxograma do método *quase-Newton* para a redução da anisotropia total do tapete de invisibilidade 3D.

## Referências

- [1] L. Dolin, “On a possibility of comparing three-dimensional electromagnetic systems with inhomogeneous filling izv,” *Vyssh. Uchebn. Zaved. Radiofiz*, vol. 4, p. 964, 1961.
- [2] E. J. Post, *Formal structure of electromagnetics: general covariance and electromagnetics*. Courier Corporation, 1962.
- [3] R. Luneburg and M. Herzberger, *Mathematical Theory of Optics*. Economic forces in American history, Oakland, CA: University of California Press, 1964.
- [4] M. Lax and D. Nelson, “Maxwell equations in material form,” *Physical Review B*, vol. 13, no. 4, p. 1777, 1976.
- [5] A. Ward and J. B. Pendry, “Refraction and geometry in maxwell’s equations,” *Journal of modern optics*, vol. 43, no. 4, pp. 773–793, 1996.
- [6] A. Ward and J. Pendry, “Calculating photonic green’s functions using a nonorthogonal finite-difference time-domain method,” *Physical Review B*, vol. 58, no. 11, p. 7252, 1998.
- [7] U. Leonhardt, “Optical conformal mapping,” *Science*, vol. 312, no. 5781, pp. 1777–1780, 2006.
- [8] J. B. Pendry, D. Schurig, and D. R. Smith, “Controlling Electromagnetic Fields,” *Science*, vol. 312, no. 23, p. 1780–1782, 2006.
- [9] J. Fischer, T. Ergin, and M. Wegener, “Three-dimensional polarization-independent visible-frequency carpet invisibility cloak,” *Optics letters*, vol. 36, no. 11, pp. 2059–2061, 2011.
- [10] T. Ergin, J. Fischer, and M. Wegener, “Detailed optical characterization of three-dimensional visible-frequency polarization-independent carpet invisibility cloak,” *Physica B: Condensed Matter*, vol. 407, no. 20, pp. 4075–4077, 2012.
- [11] D. H. Werner and D.-H. Kwon, *Transformation electromagnetics and metamaterials*. Springer, 2015.
- [12] D. Schurig, J. B. Pendry, and D. R. Smith, “Calculation of material properties and ray tracing in transformation media,” *Opt. Express*, vol. 14, pp. 9794–9804, Oct 2006.

- 
- [13] D.-H. Kwon and D. H. Werner, “Transformation electromagnetics: An overview of the theory and applications,” *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 52, no. 1, pp. 24–46, 2010.
- [14] H. Chen, C. T. Chan, and P. Sheng, “Transformation optics and metamaterials,” *Nature materials*, vol. 9, no. 5, p. 387, 2010.
- [15] Y. Liu and X. Zhang, “Recent advances in transformation optics,” *Nanoscale*, vol. 4, no. 17, pp. 5277–5292, 2012.
- [16] U. Leonhardt and T. Philbin, *Geometry and Light: The Science of Invisibility*. New York: Dover Publications, 2010.
- [17] U. Leonhardt and T. G. Philbin, “General relativity in electrical engineering,” *New Journal of Physics*, vol. 8, no. 10, p. 247, 2006.
- [18] M. Rahm, D. A. Roberts, J. B. Pendry, and D. R. Smith, “Transformation-optical design of adaptive beam bends and beam expanders,” *Opt. Express*, vol. 16, pp. 11555–11567, Jul 2008.
- [19] D. H. Kwon and D. H. Werner, “Polarization splitter and polarization rotator designs based on transformation optics,” *Opt. Express*, vol. 16, pp. 18731–18738, Nov 2008.
- [20] M. Rahm, D. Schurig, D. A. Roberts, S. A. Cummer, D. R. Smith, and J. B. Pendry, “Design of electromagnetic cloaks and concentrators using form-invariant coordinate transformations of maxwell’s equations,” *Photonics and Nanostructures-fundamentals and Applications*, vol. 6, no. 1, pp. 87–95, 2008.
- [21] D. A. Genov, S. Zhang, and X. Zhang, “Mimicking celestial mechanics in metamaterials,” *Nature Physics*, vol. 5, no. 9, p. 687, 2009.
- [22] H. F. Ma and T. J. Cui, “Three-dimensional broadband and broad-angle transformation-optics lens,” *Nature communications*, vol. 1, p. 124, Nov. 2010.
- [23] V. Ginz, P. Tassin, C. M. Soukoulis, and I. Veretennicoff, “Confining light in deep subwavelength electromagnetic cavities,” *Physical Review B*, vol. 82, no. 11, p. 113102, 2010.
- [24] D. Liu, L. H. Gabrielli, M. Lipson, and S. G. Johnson, “Transformation inverse design,” *Opt. Express*, vol. 21, pp. 14223–14243, Jun 2013.
- [25] S. A. Cummer, B.-I. Popa, D. Schurig, D. R. Smith, and J. Pendry, “Full-wave simulations of electromagnetic cloaking structures,” *Physical Review E*, vol. 74, no. 3, p. 036621, 2006.



- [26] J. Li and J. B. Pendry, “Hiding under the Carpet: A New Strategy for Cloaking,” *Physical Review Letters*, vol. 101, p. 203901, Nov. 2008.
- [27] M. A. F. C. Junqueira, L. H. Gabrielli, and D. H. Spadoti, “Reflectionless quasi-conformal carpet cloak via parameterization strategy,” *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 32, pp. 2488–2493, Dec 2015.
- [28] L. H. Gabrielli, J. Cardenas, C. B. Poitras, and M. Lipson, “Silicon nanostructure cloak operating at optical frequencies,” *Nature Photonics*, vol. 3, pp. 461–463, Aug. 2009.
- [29] D. Schurig, J. J. Mock, B. J. Justice, S. A. Cummer, J. B. Pendry, A. F. Starr, and D. R. Smith, “Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies,” *Science*, vol. 314, pp. 977–980, November 2006.
- [30] W. X. Jiang, T. J. Cui, X. M. Yang, Q. Cheng, R. Liu, and D. R. Smith, “Invisibility cloak without singularity,” *Applied Physics Letters*, vol. 93, no. 19, p. 194102, 2008.
- [31] B. Kanté, D. Germain, and A. de Lustrac, “Experimental demonstration of a non-magnetic metamaterial cloak at microwave frequencies,” *Physical Review B*, vol. 80, no. 20, p. 201104, 2009.
- [32] R. Liu, C. Ji, J. Mock, J. Chin, T. Cui, and D. Smith, “Broadband ground-plane cloak,” *Science*, vol. 323, no. 5912, pp. 366–369, 2009.
- [33] Z. Sharifi and Z. Atlasbaf, “New procedure to design low radar cross section near perfect isotropic and homogeneous triangular carpet cloaks,” *JOSA A*, vol. 33, no. 10, pp. 2066–2070, 2016.
- [34] H. F. Ma and T. J. Cui, “Three-dimensional broadband ground-plane cloak made of metamaterials,” *Nature communications*, vol. 1, p. 21, 2010.
- [35] R. Zhang, X. Lin, L. Shen, Z. Wang, B. Zheng, S. Lin, and H. Chen, “Free-space carpet cloak using transformation optics and graphene,” *Opt. Lett.*, vol. 39, pp. 6739–6742, Dec 2014.
- [36] Y. Bao, C. He, F. Zhou, C. Stuart, and C. Sun, “A realistic design of three-dimensional full cloak at terahertz frequencies,” *Applied Physics Letters*, vol. 101, no. 3, p. 031910, 2012.
- [37] T. Ergin, N. Stenger, P. Brenner, J. B. Pendry, and M. Wegener, “Three-dimensional invisibility cloak at optical wavelengths,” *Science*, vol. 328, no. 5976, pp. 337–339, 2010.
- [38] P.-Y. Chen, J. Soric, and A. Alù, “Invisibility and cloaking based on scattering cancellation,” *Advanced Materials*, vol. 24, no. 44, 2012.

- [39] B.-I. Popa and S. A. Cummer, “Cloaking with optimized homogeneous anisotropic layers,” *Physical Review A*, vol. 79, no. 2, p. 023806, 2009.
- [40] P. Alitalo, O. Luukkonen, F. Bongard, J. F. Zurcher, J. R. Mosig, and S. A. Tretyakov, “Broadband cloaking of selected objects in the microwave regime with a volumetric cloak comprising layered networks of transmission lines,” in *2009 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, pp. 1–4, June 2009.
- [41] Y. A. Urzhumov, N. B. Kundtz, D. R. Smith, and J. B. Pendry, “Cross-section comparisons of cloaks designed by transformation optical and optical conformal mapping approaches,” *Journal of Optics*, vol. 13, no. 2, p. 024002, 2010.
- [42] N. I. Landy, N. Kundtz, and D. R. Smith, “Designing three-dimensional transformation optical media using quasiconformal coordinate transformations,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 105, p. 193902, Nov 2010.
- [43] Z. Nehari, *Conformal mapping*. Courier Corporation, 2012.
- [44] Z. Chang, X. Zhou, J. Hu, and G. Hu, “Design method for quasi-isotropic transformation materials based on inverse laplace’s equation with sliding boundaries,” *Opt. Express*, vol. 18, pp. 6089–6096, Mar 2010.
- [45] C. García-Meca, R. Ortuño, J. Martí, and A. Martínez, “Full three-dimensional isotropic transformation media,” *New Journal of Physics*, vol. 16, no. 2, p. 023030, 2014.
- [46] M. A. F. C. Junqueira, L. H. Gabrielli, and D. H. Spadoti, “Anisotropy minimization via least squares method for transformation optics,” *Opt. Express*, vol. 22, pp. 18490–18498, Jul 2014.
- [47] M. A. F. C. Junqueira, L. H. Gabrielli, F. Beltrán-Mejía, and D. H. Spadoti, “Three-dimensional quasi-conformal transformation optics through numerical optimization,” *Opt. Express*, vol. 24, pp. 16465–16470, Jul 2016.
- [48] U. Leonhardt and T. G. Philbin, “Transformation optics and the geometry of light,” *Progress in Optics*, vol. 53, no. 08, pp. 69–152, 2009.
- [49] M. H. Fakhri, A. Abdolali, S. Hashemi, and B. Noorbakhsh, “Three-dimensional ultra-wideband carpet cloak using multi-layer dielectrics,” *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 59, no. 6, pp. 1284–1288, 2017.
- [50] A. A. Maradudin, *Structured surfaces as optical metamaterials*. Cambridge University Press, 2011.
- [51] A. Polman and H. A. Atwater, “Plasmonics: optics at the nanoscale,” *Materials Today*, vol. 8, no. 1, p. 56, 2005.

- [52] J. A. Schuller, E. S. Barnard, W. Cai, Y. C. Jun, J. S. White, and M. L. Brongersma, "Plasmonics for extreme light concentration and manipulation," *Nature materials*, vol. 9, no. 3, p. 193, 2010.
- [53] U. Fano, "Atomic theory of electromagnetic interactions in dense materials," *Physical Review*, vol. 103, no. 5, p. 1202, 1956.
- [54] A. Alù and N. Engheta, "Achieving transparency with plasmonic and metamaterial coatings," *Physical Review E*, vol. 72, no. 1, p. 016623, 2005.
- [55] B. Edwards, A. Alù, M. G. Silveirinha, and N. Engheta, "Experimental verification of plasmonic cloaking at microwave frequencies with metamaterials," *Physical Review Letters*, vol. 103, no. 15, p. 153901, 2009.
- [56] N. Kundtz, D. Smith, and J. Pendry, "Electromagnetic design with transformation optics," *Proceedings of the IEEE*, vol. 99, pp. 1622–1633, Oct 2011.
- [57] H. Tao, Z. Yang, Z. Wang, and M. Zhao, "Polarization-independent metasurface cloak for visible light," *JOSA B*, vol. 33, no. 11, pp. 2251–2255, 2016.
- [58] S. Chang, X. Guo, and X. Ni, "Optical metasurfaces: progress and applications," *Annual Review of Materials Research*, no. 0, 2018.
- [59] S. Xi, H. Chen, B. Zhang, B.-I. Wu, and J. A. Kong, "Route to low-scattering cylindrical cloaks with finite permittivity and permeability," *Phys. Rev. B*, vol. 79, p. 155122, Apr 2009.
- [60] S. Xu, X. Cheng, S. Xi, R. Zhang, H. O. Moser, Z. Shen, Y. Xu, Z. Huang, X. Zhang, F. Yu, B. Zhang, and H. Chen, "Experimental demonstration of a free-space cylindrical cloak without superluminal propagation," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 109, p. 223903, Nov 2012.
- [61] A. Alu and N. Engheta, "Multifrequency optical invisibility cloak with layered plasmonic shells," *Physical review letters*, vol. 100, no. 11, p. 113901, 2008.
- [62] W. Song, R.-J. Shi, and X.-Q. Sheng, "Optimization towards broadband cylindrical cloaks with layered magnetic materials," *Progress In Electromagnetics Research*, vol. 36, pp. 87–101, 2013.
- [63] M. Avriel, *Nonlinear programming: analysis and methods*. Courier Corporation, 2003.
- [64] B. Ivsic, T. Komljenovic, and Z. Sipus, "Optimization of uniaxial multilayer cylinders used for invisible cloak realization," *IEEE transactions on antennas and propagation*, vol. 58, no. 10, pp. 3397–3401, 2010.

- [65] B. Ivsic, Z. Sipus, and S. Hrabar, “Analysis of uniaxial multilayer cylinders used for invisible cloak realization,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 57, no. 5, pp. 1521–1527, 2009.
- [66] J. Kennedy and R. Eberhart, “Particle swarm optimization,” in *Proceedings of ICNN’95 - International Conference on Neural Networks*, vol. 4, pp. 1942–1948 vol.4, Nov 1995.
- [67] D. A. Coley, *An introduction to genetic algorithms for scientists and engineers*. World Scientific Publishing Company, 1999.
- [68] B. Wood, J. Pendry, and D. Tsai, “Directed subwavelength imaging using a layered metal-dielectric system,” *Physical Review B*, vol. 74, no. 11, p. 115116, 2006.
- [69] Y. Huang, Y. Feng, and T. Jiang, “Electromagnetic cloaking by layered structure of homogeneous isotropic materials,” *Optics express*, vol. 15, no. 18, pp. 11133–11141, 2007.
- [70] Z. Yu, Y. Feng, X. Xu, J. Zhao, and T. Jiang, “Optimized cylindrical invisibility cloak with minimum layers of non-magnetic isotropic materials,” *Journal of Physics D: Applied Physics*, vol. 44, no. 18, p. 185102, 2011.
- [71] P. Alitalo, O. Luukkonen, J. R. Mosig, and S. A. Tretyakov, “Broadband cloaking with volumetric structures composed of two-dimensional transmission-line networks,” *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 51, no. 7, pp. 1627–1631, 2009.
- [72] P. Alitalo, O. Luukkonen, L. Jylha, J. Venermo, and S. A. Tretyakov, “Transmission-line networks cloaking objects from electromagnetic fields,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 56, pp. 416–424, Feb 2008.
- [73] P. Alitalo, S. Ranvier, J. Vehmas, and S. Tretyakov, “A microwave transmission-line network guiding electromagnetic fields through a dense array of metallic objects,” *Metamaterials*, vol. 2, no. 4, pp. 206 – 212, 2008.
- [74] P. Alitalo, F. Bongard, J.-F. Zürcher, J. Mosig, and S. Tretyakov, “Experimental verification of broadband cloaking using a volumetric cloak composed of periodically stacked cylindrical transmission-line networks,” *Applied Physics Letters*, vol. 94, no. 1, p. 014103, 2009.
- [75] P. Alitalo, A. E. Culhaoglu, A. V. Osipov, S. Thurner, E. Kemptner, and S. A. Tretyakov, “Experimental characterization of a broadband transmission-line cloak in free space,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 60, pp. 4963–4968, Oct 2012.

- [76] J. Pendry, “Trend: Taking the wraps off cloaking,” *Physics*, vol. 2, p. 95, 2009.
- [77] Y. Deng, S. Xu, R. Zhang, B. Zheng, H. Chen, F. Gao, F. Yu, B. Zhang, and H. Chen, “Ultra-broadband carpet cloak for transverse-electric polarization,” *Journal of Optics*, vol. 18, no. 4, p. 044006, 2016.
- [78] Y. Shi, W. Tang, L. Li, and C.-H. Liang, “Three-dimensional complementary invisibility cloak with arbitrary shapes,” *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, vol. 14, pp. 1550–1553, 2015.
- [79] D. H. Spadoti, L. H. Gabrielli, C. B. Poitras, and M. Lipson, “Focusing light in a curved-space,” *Opt. Express*, vol. 18, pp. 3181–3186, Feb 2010.
- [80] M. Rahm, S. A. Cummer, D. Schurig, J. B. Pendry, and D. R. Smith, “Optical design of reflectionless complex media by finite embedded coordinate transformations,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 100, p. 063903, Feb 2008.
- [81] P. A. Teixeira, D. G. Silva, L. H. Gabrielli, D. H. Spadoti, and M. A. Junqueira, “General multimode polarization splitter design in uniaxial media,” *Optical Engineering*, vol. 57, no. 3, p. 037111, 2018.
- [82] K. Zhang, Q. Wu, J.-H. Fu, and L.-W. Li, “Cylindrical electromagnetic concentrator with only axial constitutive parameter spatially variant,” *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 28, pp. 1573–1577, Jun 2011.
- [83] T. Li, M. Huang, J. Yang, S. Mu, and Y. Lan, “Three dimensional electromagnetic concentrators with homogeneous material parameters,” *Progress In Electromagnetics Research*, vol. 18, pp. 119–130, 2011.
- [84] V. Giniis, P. Tassin, J. Danckaert, C. M. Soukoulis, and I. Veretennicoff, “Creating electromagnetic cavities using transformation optics,” *New Journal of Physics*, vol. 14, no. 3, p. 033007, 2012.
- [85] G. X. Yu, L. Cao, and M. Zhou, “Design of miniaturization resonant cavities using metamaterial,” *Central European Journal of Physics*, vol. 10, no. 1, pp. 140–144, 2012.
- [86] T. Driscoll, D. Basov, A. Starr, P. Rye, S. Nemat-Nasser, D. Schurig, and D. Smith, “Free-space microwave focusing by a negative-index gradient lens,” *Applied Physics Letters*, vol. 88, no. 8, p. 081101, 2006.
- [87] M. Yan, W. Yan, and M. Qiu, “Invisibility cloaking by coordinate transformation,” *Progress in optics*, vol. 52, pp. 261–304, 2009.
- [88] L. Solymar and E. Shamonina, *Waves in metamaterials*. Oxford University Press, 2009.

- [89] P. Gay-Balmaz and O. J. Martin, “Electromagnetic resonances in individual and coupled split-ring resonators,” *Journal of applied physics*, vol. 92, no. 5, pp. 2929–2936, 2002.
- [90] J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins, W. Stewart, *et al.*, “Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena,” *IEEE transactions on microwave theory and techniques*, vol. 47, no. 11, pp. 2075–2084, 1999.
- [91] C. Qian, R. Li, Y. Jiang, B. Zheng, H. Wang, Z. Xu, and H. Chen, “Transient response of a signal through a dispersive invisibility cloak,” *Optics letters*, vol. 41, no. 21, pp. 4911–4914, 2016.
- [92] B. Zhang, B.-I. Wu, H. Chen, and J. A. Kong, “Rainbow and blueshift effect of a dispersive spherical invisibility cloak impinged on by a nonmonochromatic plane wave,” *Physical review letters*, vol. 101, no. 6, p. 063902, 2008.
- [93] J. F. Thompson, B. K. Soni, and N. P. Weatherill, *Handbook of grid generation*. CRC press, 1998.
- [94] B. Dacorogna, *Introduction to the Calculus of Variations*. World Scientific Publishing Company, 2014.
- [95] S. Steinberg, *Fundamentals of grid generation*. CRC press, 1993.
- [96] Y. Lai, J. Ng, H. Chen, D. Han, J. Xiao, Z.-Q. Zhang, and C. T. Chan, “Illusion optics: the optical transformation of an object into another object,” *Physical review letters*, vol. 102, no. 25, p. 253902, 2009.
- [97] A. M. Winslow, “Adaptive-mesh zoning by the equipotential method,” tech. rep., Lawrence Livermore National Lab., CA (USA), 1981.
- [98] M. Junqueira, L. Gabrielli, and D. Spadoti, “Comparison of anisotropy reduction strategies for transformation optics designs,” *Photonics Journal, IEEE*, vol. 7, pp. 1–10, Feb 2015.
- [99] J. Aguilar, M. Beadle, P. Thompson, and M. Shelley, “The microwave and rf characteristics of fr4 substrates,” 1998.
- [100] J. Valentine, J. Li, T. Zentgraf, G. Bartal, and X. Zhang, “An optical cloak made of dielectrics,” *Nature materials*, vol. 8, no. 7, p. 568, 2009.
- [101] M. Gharghi, C. Gladden, T. Zentgraf, Y. Liu, X. Yin, J. Valentine, and X. Zhang, “A carpet cloak for visible light,” *Nano letters*, vol. 11, no. 7, pp. 2825–2828, 2011.
- [102] X. Chen, Y. Luo, J. Zhang, K. Jiang, J. B. Pendry, and S. Zhang, “Macroscopic invisibility cloaking of visible light,” *Nature Communications*, vol. 2, p. 176, 2011.

- [103] B. Zhang, Y. Luo, X. Liu, and G. Barbastathis, “Macroscopic invisibility cloak for visible light,” *Physical Review Letters*, vol. 106, no. 3, p. 033901, 2011.
- [104] D. Ghodgaonkar, V. Varadan, and V. Varadan, “Free-space measurement of complex permittivity and complex permeability of magnetic materials at microwave frequencies,” *IEEE Transactions on instrumentation and measurement*, vol. 39, no. 2, pp. 387–394, 1990.
- [105] J. Emsley, *Nature’s building blocks: an AZ guide to the elements*. Oxford University Press, 2011.
- [106] T. H. Isaac, W. L. Barnes, and E. Hendry, “Determining the terahertz optical properties of subwavelength films using semiconductor surface plasmons,” *Applied Physics Letters*, vol. 93, no. 24, p. 241115, 2008.
- [107] C. K. Malek and V. Saile, “Applications of liga technology to precision manufacturing of high-aspect-ratio micro-components and systems: a review,” *Microelectronics journal*, vol. 35, no. 2, pp. 131–143, 2004.
- [108] W. Gawron, K. Adamiec, and W. Larkowski, “Magnetron sputter epitaxy of n+-insb on p-insb for infrared photodiode applications,” in *International Conference on Solid State Crystals’ 98: Epilayers and Heterostructures in Optoelectronics and Semiconductor Technology*, vol. 3725, pp. 281–286, International Society for Optics and Photonics, 1999.
- [109] J. B. Pendry, “Negative refraction makes a perfect lens,” *Physical review letters*, vol. 85, no. 18, p. 3966, 2000.
- [110] J. Pendry and S. A. Ramakrishna, “Near-field lenses in two dimensions,” *Journal of Physics: Condensed Matter*, vol. 14, no. 36, p. 8463, 2002.
- [111] Y. Lai, H. Chen, Z.-Q. Zhang, and C. Chan, “Complementary media invisibility cloak that cloaks objects at a distance outside the cloaking shell,” *Physical review letters*, vol. 102, no. 9, p. 093901, 2009.
- [112] T. Ergin, J. C. Halimeh, N. Stenger, and M. Wegener, “Optical microscopy of 3d carpet cloaks: ray-tracing calculations,” *Optics express*, vol. 18, no. 19, pp. 20535–20545, 2010.
- [113] G. Spencer and M. Murty, “General ray-tracing procedure,” *JOSA*, vol. 52, no. 6, pp. 672–678, 1962.
- [114] G. F. Marshall, *Optical scanning*, vol. 31. CRC Press, 1991.

- [115] X. Xu, Y. Feng, S. Xiong, J. Fan, J.-M. Zhao, and T. Jiang, “Broad band invisibility cloak made of normal dielectric multilayer,” *Applied Physics Letters*, vol. 99, no. 15, p. 154104, 2011.
- [116] Y. Feng, S. Xiong, X. Xu, B. Zhu, J. Zhao, and T. Jiang, “Dielectric multilayers for antenna and cloaking devices designed from transformation electromagnetics,” in *Electromagnetic Theory (EMTS), Proceedings of 2013 URSI International Symposium on*, pp. 872–875, IEEE, 2013.
- [117] “RO4000® Series - High Frequency Circuit Materials.” <http://www.rogerscorp.com/documents/726/acs/R04000-LaminatesData-Sheet.pdf>, 2018. [Online; acessado em 12 de Setembro de 2018].
- [118] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light (7th Edition)*. Cambridge University Press, 7th ed., 1999.
- [119] R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands, “The feynman lectures on physics. mainly mechanics, radiation and heat. chapter 26,” 1983.
- [120] W. V. D. Hodge, W. Hodge, and D. Pedoe, *Methods of algebraic geometry*, vol. 2. Cambridge University Press, 1994.
- [121] B. Schutz, *A first course in general relativity*. Cambridge university press, 2009.
- [122] P. Moon and D. E. Spencer, *Field theory handbook: including coordinate systems, differential equations and their solutions*. Springer, 2012.
- [123] M. N. Ā-zisik, M. N. Özısık, and M. N. Özısık, *Heat conduction*. John Wiley & Sons, 1993.
- [124] H. Chen and C. T. Chan, “Acoustic cloaking and transformation acoustics,” *Journal of Physics D: Applied Physics*, vol. 43, no. 11, p. 113001, 2010.
- [125] W. Greiner and B. Müller, *Quantum mechanics: symmetries*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [126] D. E. Blair, *Inversion theory and conformal mapping*. Student mathematical library, Providence, R.I. American Mathematical Society, 2000.
- [127] L. Xu and H. Chen, “Conformal transformation optics,” *Nature Photonics*, vol. 9, no. 1, p. 15, 2015.
- [128] T. Needham, *Visual complex analysis*. Oxford University Press, 1998.



- [129] G. Shilov, *Elementary Real and Complex Analysis*, vol. 2 of *Dover books on mathematics*. New York: Dover Publications, 2 ed., 1996.
- [130] J. Ribeiro, *Propagação das ondas eletromagnéticas: princípios e aplicações*. São Paulo, SP: Érica, 2 ed., 2008.
- [131] T. M. Apostol *et al.*, *Mathematical analysis*, vol. 2. Addison-Wesley Reading, MA, 1974.
- [132] W. Yan, M. Yan, and M. Qiu, “Necessary and sufficient conditions for reflectionless transformation media in an isotropic and homogenous background,” *arXiv preprint arXiv:0806.3231*, 2008.
- [133] Y. G. Reshetnyak, “Liouville’s conformal mapping theorem under minimal regularity hypotheses,” *Sibirsk. Mat. Zh.*, vol. 8, pp. 835–840, 1967.
- [134] P. Hartman, “Systems of total differential equations and liouville’s theorem on conformal mappings,” *American Journal of Mathematics*, vol. 69, no. 2, pp. 327–332, 1947.
- [135] W. Kühnel and H.-B. Rademacher, “Liouville’s theorem in conformal geometry,” *Journal de mathématiques pures et appliquées*, vol. 88, no. 3, pp. 251–260, 2007.
- [136] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 7 ed., 1999.
- [137] D. F. Shanno, “Conditioning of Quasi-Newton Methods for Function Minimization,” *Mathematics of Computation*, vol. 24, pp. 647–656, July 1970.
- [138] A. N. Pressley, *Elementary differential geometry*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [139] D. F. Lawden, *Introduction to Tensor Calculus, Relativity and Cosmology*. Dover Books on Physics, Nova York, NY: Dover Publications, 3 ed., january 2003.
- [140] J. L. Synge and A. Schild, *Tensor calculus*, vol. 5. Courier Corporation, 1978.
- [141] I. S. Sokolnikoff, *Tensor analysis: theory and applications to geometry and mechanics of continua*. Wiley, 1964.
- [142] F. Berkshire, “An introduction to tensor analysis for engineers and applied scientists, by john r. tyldesley. pp xii, 114.£ 3. 1978. sbn 0 582 44355 5 (longman),” *The Mathematical Gazette*, vol. 63, no. 424, pp. 140–141, 1979.
- [143] G. H. Golub and C. F. Van Loan, “Matrix computations. 1996,” *Johns Hopkins University, Press, Baltimore, MD, USA*, pp. 374–426, 1996.

- [144] H. Goldstein, C. P. Poole, and J. L. Safko, *Classical Mechanics (3rd Ed.)*. Pearson, Upper Saddle River, 2001.
- [145] O. Ozgun and M. Kuzuoglu, “Form invariance of maxwell’s equations: The pathway to novel metamaterial specifications for electromagnetic reshaping,” *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 52, no. 3, pp. 51–65, 2010.
- [146] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*. John Wiley & Sons, 2012.
- [147] J. R. Reitz, F. J. Milford, and R. W. Christy, *Foundations of Electromagnetic Theory*. Boston, MA: Addison-Wesley, 4 ed., 2008.
- [148] U. Leonhardt, “Notes on conformal invisibility devices,” *New Journal of Physics*, vol. 8, no. 7, p. 118, 2006.
- [149] J. A. J. Ribeiro, *Propagação das Ondas Eletromagnéticas: Princípios e Aplicações*, vol. 2. Érica, 2008.
- [150] R. E. Newnham, *Properties of materials: anisotropy, symmetry, structure*. Oxford University Press on Demand, 2005.
- [151] W. Yan, M. Yan, and M. Qiu, “Necessary and sufficient conditions for reflectionless transformation media in an isotropic and homogenous background,” *ArXiv e-prints*, June 2008.
- [152] M. A. Junqueira, L. H. Gabrielli, and D. H. Spadoti, “Parameterization strategy for anisotropy reduction in the carpet cloak,” in *2015 SBMO/IEEE MTT-S International Microwave and Optoelectronics Conference (IMOC)*, pp. 1–3, IEEE, 2015.
- [153] J. A. Nelder and R. Mead, “A simplex method for function minimization,” *Computer Journal*, vol. 7, pp. 308–313, 1965.
- [154] R. Hooke and T. A. Jeeves, ““direct search” solution of numerical and statistical problems.,” *J. ACM*, vol. 8, no. 2, pp. 212–229, 1961.
- [155] K. E. Atkinson, *An Introduction to Numerical Analysis*, vol. 2. New York, NY: John Wiley & Sons, 1988.
- [156] M. Yin, X. Yong Tian, L. Ling Wu, and D. Chen Li, “All-dielectric three-dimensional broadband eaton lens with large refractive index range,” *Applied Physics Letters*, vol. 104, no. 9, p. 094101, 2014.
- [157] J. F. Bonnans, J. C. Gilbert, C. Lemaréchal, and C. A. Sagastizábal, *Numerical Optimization: Theoretical and Practical Aspects (Universitext)*. Secaucus, NJ, USA: Springer-Verlag New York, Inc., 2006.

- 
- [158] J. Nocedal and S. Wright, *Numerical optimization*. Springer series in operations research and financial engineering, New York, NY: Springer, 2. ed. ed., 2006.
- [159] C. T. Kelley, *Iterative methods for optimization*. Frontiers in applied mathematics, Philadelphia: SIAM, 1999.
- [160] P. Wolfe, “Convergence conditions for ascent methods,” *SIAM Review*, vol. 11, no. 2, pp. 226–235, 1969.