Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Matemática

Lineabilidade e densidade em espaços de funções

Michele Maciel Sacramento

Orientadora: Profa. Dra. Márcia Sayuri Kashimoto

Durante o desenvolvimento deste trabalho, a autora recebeu auxílio financeiro da CAPES

Itajubá, 24 de fevereiro de 2017

Universidade Federal de Itajubá
Programa de Pós–Graduação em Matemática

Lineabilidade e densidade em espaços de funções

Michele Maciel Sacramento

Orientadora: Profa. Dra. Márcia Sayuri Kashimoto

Dissertação submetida ao Programa de Pós–Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Matemática

Área de Concentração: Análise

Itajubá – MG
24 de fevereiro de 2017

Dedico este trabalho aos meus pais e irmãos, pelo amor incondicional, e aos meus anjos, Joaquim, Caike e Felipe, que se eternizaram em nossos corações.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ser meu guia em todas as jornadas, iluminar meu caminho e me proporcionar momentos e vitórias inesquecíveis.

Agradeço aos meus familiares pelo apoio incondicional, em especial, a meus pais, Paulo Cesar e Gorete, que são minha base, minha maior inspiração. Obrigada pelo amor, compreensão e força! Por lutar minhas lutas e sonhar meus sonhos.

Aos meus irmãos, Julio e Milena, agradeço pela confiança depositada em mim, o amor dado e os sorrisos roubados. Vocês são o motivo da minha existência!

Aos amigos que tive o prazer de conquistar em Itajubá. Obrigada por cada dia, cada história, por cada sorriso, cada apoio e cada diversão. Vocês são os maiores presentes que ganhei nesses dois anos. São a família que eu escolhi e que eu já amo.

Aos amigos de longa estrada agradeço por todo amparo, conselho, compreensão e amizade. Sem vocês minha vida não teria sentido!

Aos colegas e amigos que conheci no mestrado agradeço pelo tempo de convívio, por cada descoberta e conquista. Dividimos incertezas e inseguranças, mas sempre com força e alegria.

Aos professores do instituto pela ajuda, incentivo, comprometimento e apoio em minha formação. Em especial, à minha orientadora professora, Dra. Márcia Sayuri Kashimoto, pelo respeito, paciência, empenho, dedicação e competência com que conduziu a orientação deste trabalho.

Aos professores, membros da banca examinadora, por aceitarem o convite e pelas sugestões e contribuições ao nosso trabalho.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

“A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo.”

(Galileu Galilei)

Resumo

Nesta dissertação abordamos alguns métodos para determinar conjuntos denso - lineáveis em espaços de funções contínuas e apresentamos aplicações em espaços de funções com variação limitada e funções de classe C^p e C^∞. Além disso, estudamos a lineabilidade de conjuntos de funções com propriedades patológicas.

Palavras–chave: Lineabilidade, Denso-lineável, Álgebra de funções.

Abstract

In this dissertation we discuss some methods which are useful to discover dense - lineable sets in the context of spaces of continuous functions and present some applications in the spaces of functions with bounded variation in $[0, 1]$ and functions of class C^p and class C^∞. We also study the lineability of certain sets of functions with pathological properties.

Keywords: Lineability, Dense-lineable, Algebra of functions.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

Em 1966, V. I. Gurariy [10] provou que a família ND de funções contínuas no intervalo [0,1] que não são diferenciáveis em nenhum ponto contém, com exceção da função nula, um espaço vetorial de dimensão infinita. É um resultado interessante, já que é difícil obter exemplos concretos de funções desse tipo, como aquela construída por Karl Weierstrass em 1872 [1]. Rodríguez-Piazza [19] mostrou que todo espaço de Banach separável de dimensão infinita é isometricamente isomorfo a um espaço vetorial cujos elementos não-nulos pertencem a ND.

Recentemente, muitos autores têm se dedicado à procura de estruturas lineares em ambientes não-lineares. Tais investigações envolvem várias áreas da Matemática, do Caos Linear para Análise Real e Complexa, passando por Teoria de Conjuntos, Álgebra Linear e Multilinear, Análise Funcional e, recentemente, Teoria da Probabilidade.

Um subconjunto M de um espaço vetorial topológico X é dito lineável se $M \cup \{0\}$ contém um subespaço vetorial de dimensão infinita. Se tal subespaço vetorial for denso em X, diz-se que M é denso-lineável em X.

O termo lineabilidade foi introduzido por Gurariy [12] em 2004. A referência [1] contém vários exemplos de conjuntos lineáveis.

Em 2005, Bayart [2, p. 168-169] provou que para qualquer conjunto E contido no círculo unitário T, com medida de Lebesgue zero, o conjunto das funções contínuas em T cujas séries de Fourier divergem em todo ponto de E é denso-lineável.

O objetivo desta dissertação é apresentar métodos que determinam conjuntos denso-lineáveis em espaços de funções contínuas e abordar a lineabilidade de conjuntos de funções com propriedades patológicas.

O Capítulo 1 inicia-se com um resumo das principais definições e resultados envolvendo os conceitos de espaços vetoriais topológicos e separabilidade. Em seguida, aborda-se um estudo sobre funções de variação limitada, funções que não são diferenciáveis em nenhum ponto, bases de Hamel e matriz de Vandermonde, essenciais para a compreensão dos demais capítulos.

O Capítulo 2 trata de teoremas que são úteis para provar que certas famílias não-lineares de funções contínuas escalares são denso-lineáveis. Tais resultados são aplicados nos espaços $C^p\,[0{,}1]$, $C^\infty\,[0{,}1]$ e $CBV\,[0{,}1]$ das funções de classe C^p, C^∞ e contínuas de variação limitada, respectivamente. Foi utilizado fortemente o fato dos espaços analisados serem espaços vetoriais topológicos metrizáveis e separáveis.

O Capítulo 3 descreve a construção de espaços vetoriais de dimensão infinita com propriedades patológicas. As propriedades abordadas são:

- Funções C^∞ com expansão de Taylor constante;
- Funções aditivas e $\mathbb{R}$-lineares descontínuas;
- Funções que possuem um número finito de pontos de continuidade;
- Funções cuja derivada não é limitada em um intervalo fechado;
- Funções everywhere sobrejetoras que são nulas em quase toda parte.

No processo de construção foram utilizados os conceitos de base de Hamel, matriz de Vandermonde e técnicas usuais de Álgebra Linear, Análise na reta e Análise Funcional.

Capítulo 1

Conceitos e resultados preliminares

Apresentamos neste capítulo alguns conceitos e resultados fundamentais para a leitura dos capítulos posteriores. Foram utilizadas as referências [3], [4], [5], [13], [14], [15], [18], [20], [21] e [23].

1.1 Preliminares para o Capítulo 2

Iniciamos com a interessante interação entre linearidade e topologia.

Definição 1.1.1. *Seja $\mathbb{K}$ o corpo dos números reais ou o corpo dos números complexos. Um espaço vetorial topológico sobre $\mathbb{K}$ é um espaço vetorial X sobre $\mathbb{K}$, munido com uma topologia τ, tal que:*
(a) A aplicação de $X \times X$ em X definida por $(x, y) \longrightarrow x + y$ é contínua, sendo $X \times X$ munido da topologia produto;
(b) A aplicação de $\mathbb{K} \times X$ em X definida por $(t, x) \longrightarrow tx$ é contínua, com $\mathbb{K}$ munido da topologia usual e $\mathbb{K} \times X$ munido da topologia produto.

Em outras palavras, dizemos que um espaço vetorial topológico é um espaço vetorial com uma topologia tal que a soma e o produto por escalar são contínuas.

Todo espaço vetorial normado X real ou complexo é um espaço vetorial topológico munido com a topologia induzida pela norma.

Um espaço topológico (T, τ) diz-se metrizável quando é possível definir uma métrica d sobre T tal que a topologia definida por d coincide com a topologia τ de T. Claramente, um espaço metrizável é Hausdorff e cada ponto possui uma base local enumerável, mais precisamente, o conjunto das bolas abertas de centro x e raio $\frac{1}{n}$, com $n \in \mathbb{N}$,

$$B\left(x, \frac{1}{n}\right) = \left\{y \in T : d(y,x) < \frac{1}{n}\right\}.$$

Uma métrica d sobre um espaço vetorial X é chamada invariante por translação se

$$d(x+z, y+z) = d(x,y), \quad \text{para quaisquer } \; x, y, z \in X.$$

O próximo teorema será útil no Capítulo 2 e a sua demonstração encontra-se em [21, p. 18].

Teorema 1.1.1. *Se X é um espaço vetorial topológico com uma base local enumerável, então existe uma métrica d sobre X tal que:*
(a) d é compatível com a topologia de X;
(b) d é invariante por translação.

Seja S um subconjunto de um espaço topológico T. Denotamos o fecho de S por $\overline{S}$. Recordemos que S é denso em T quando $\overline{S} = T$.

Definição 1.1.2. *Um espaço topológico T que contém um subconjunto enumerável e denso em T é dito separável.*

O Teorema de Aproximação de Weierstrass assegura que o espaço dos polinômios definidos num intervalo compacto $[a,b]$ é denso no espaço $C[a,b]$ das funções contínuas de $[a,b]$ em $\mathbb{K}$, munido da norma

$$||f||_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|.$$

Teorema 1.1.2 (Weierstrass – 1885). *Se $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ uma função contínua, então dado $\epsilon > 0$ existe um polinômio $p : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $|f(x) - p(x)| < \epsilon$, para todo $x \in [a,b]$.*

Em 1912, Sergei Bernstein forneceu uma demonstração desse teorema utilizando polinômios de Bernstein.

Definição 1.1.3. *O n-ésimo polinômio de Bernstein associado a uma função* $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *é o polinômio* $B_n(f) : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *dado por*

$$B_n(f)(x) = \sum_{j=0}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right) \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} x^j (1-x)^{n-j},$$

onde $\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{j!(n-j)!}$.

Os polinômios de Bernstein fornecem a aproximação simultânea de funções e suas derivadas no intervalo $[0,1]$. Veja [18, p. 258].

Sejam $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $f^{(0)} = f$ para qualquer função $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{K}$. Se $k \in \mathbb{N}_0$, recordemos que $C^k[0,1]$ é a álgebra das funções $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{K}$ k-vezes diferenciáveis em $[0,1]$ com $f^{(k)}$ contínua em $[0,1]$.

Teorema 1.1.3 (Aproximação Simultânea de Bernstein). *Se* $f \in C^k[0{,}1]$ *é uma função real, então* $B_n^{(k)}(f)$ *converge uniformemente para* $f^{(k)}$ *em* $[0{,}1]$.

Se $f \in C^k[0{,}1]$ é uma função complexa, podemos aplicar esse teorema nas partes real e imaginária de f e obter a aproximação simultânea de f por polinômios complexos.

Os resultados do Capítulo 2 serão aplicados em três espaços: $C^p[0{,}1]$, $C^\infty[0{,}1]$ e $CBV[0{,}1]$. Recordemos algumas notações e propriedades desses espaços.

Se $p \in \mathbb{N}_0$, a álgebra $C^p[0{,}1]$ munida da norma

$$||f||_p = \sum_{j=0}^{p} ||f^{(j)}||_\infty$$

é um espaço de Banach separável. Para mostrar que $C^p[0{,}1]$ é separável, utilizaremos o seguinte lema que pode ser encontrado em [5, p.19] .

Lema 1.1.1. *Um espaço normado* X *é separável se, e somente se, existe um subconjunto enumerável* $A \subset X$ *tal que* $\operatorname{span}(A) := \left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j : \lambda_j \in \mathbb{K},\, a_j \in A,\, n \in \mathbb{N} \right\}$ *é denso em* X.

Demonstração. Se A for enumerável e denso em X, então

$$X = \overline{A} \subset \overline{\text{span}\,(A)} \subset X.$$

Portanto, $\text{span}\,(A)$ é denso em X. Reciprocamente, suponhamos que exista um subconjunto enumerável $A \subset X$ tal que $\overline{\text{span}\,(A)} = X$. Chamemos de B o conjunto formado por todas as combinações lineares finitas de elementos de A com coeficientes em $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$, onde $\mathbb{Q}_{\mathbb{R}} = \mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}_{\mathbb{C}} = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$, ou seja,

$$B = \{a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n : \, x_1, x_2, \ldots, x_n \in A, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K}} \,\text{e}\, n \in \mathbb{N}\}.$$

É fácil ver que B é enumerável: como $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ é enumerável, para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto das combinações lineares de n elementos de A com coeficientes em $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ é enumerável. Segue que B é enumerável por ser a união enumerável de conjuntos enumeráveis. Provaremos agora que B é denso em X. Para isso, sejam $x \in X$ e $\epsilon > 0$. Como $\overline{\text{span}\,(A)} = X$, existe $y_0 \in \text{span}(A)$ tal que $||x - y_0|| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Digamos $y_0 = b_1x_1 + \ldots + b_kx_k$, onde $k \in \mathbb{N}$, $b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{K}$ e $x_1, \ldots, x_k \in A$. Como $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ é denso em $\mathbb{K}$, existem $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ tais que

$$|a_j - b_j| < \frac{\epsilon}{2\left(1 + \sum_{i=1}^{k} ||x_i||\right)}, \text{ para todo } j = 1, \ldots, k.$$

Tomando $y = a_1x_1 + \ldots + a_kx_k$ temos $y \in B$ e

$$\begin{aligned}
||x - y|| &= ||x - y_0 + y_0 - y|| \\
&\leq ||x - y_0|| + ||y_0 - y|| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + ||(b_1 - a_1)x_1 + \ldots + (b_k - a_k)x_k|| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + max_{j=1,\ldots,k}|b_j - a_j|(||x_1|| + \ldots + ||x_k||) \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2\left(1 + \sum_{i=1}^{k} ||x_i||\right)} \sum_{i=1}^{k} ||x_i|| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,
\end{aligned} \tag{1.1}$$

o que prova que $\overline{B} = X$. Assim, $B \subset X$ é enumerável e denso, completando a demostração de que X é separável. $\square$

Proposição 1.1.1. *O espaço* $(C^p\,[0{,}1], ||f||_p)$ *é separável.*

Demonstração. Seja $n \in \mathbb{N}_0$. Considere a função $f_n : [0{,}1] \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por $f_n(t) = t^n$, para $t \in [0{,}1]$. Seja $A = \{f_n : n \in \mathbb{N}_0\}$. Note que A é enumerável, $A \subset C^p\,[0{,}1]$ e $\operatorname{span}(A) = P[0{,}1]$, onde $P[0{,}1]$ é o espaço dos polinômios $q : [0{,}1] \longrightarrow \mathbb{K}$. Provemos que $\operatorname{span}(A)$ é denso em $C^p\,[0{,}1]$. Com efeito, seja $f \in C^p\,[0{,}1]$. Segue do Teorema de Aproximação Simultânea que existe uma sequência de polinômios $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} q_n^{(j)} = f^{(j)}, \text{ para } j = 0, 1, \ldots, p,$$

uniformemente em $[0{,}1]$. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$||q_n^{(j)} - f^{(j)}||_\infty < \frac{\epsilon}{p+1},$$

para todo $n > n_0$ e $j = 0, 1, \ldots, p$. Daí, segue que

$$\begin{aligned} ||q_n - f||_p &= \sum_{j=0}^{p} ||q_n^{(j)} - f^{(j)}||_\infty \\ &< \sum_{j=0}^{p} \frac{\epsilon}{p+1} \\ &= \epsilon, \end{aligned} \tag{1.2}$$

para todo $n > n_0$. Isso prova que $\operatorname{span}(A)$ é denso em $C^p\,[0{,}1]$ e usando o Lema 1.1.1 conclui-se que $C^p\,[0{,}1]$ é separável. $\square$

A álgebra $C^\infty\,[0{,}1]$ das funções $f : [0{,}1] \longrightarrow \mathbb{K}$ infinitamente diferenciáveis em $[0{,}1]$, munida da norma

$$||f|| = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \min\{1, ||f^{(j)}||_\infty\}$$

é um espaço de Banach.

Proposição 1.1.2. *O espaço* $(C^\infty\,[0{,}1], ||.||)$ *é separável.*

Demonstração. Seja $n \in \mathbb{N}_0$. Considere a função $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por $f_n(t) = t^n$, para $t \in [0,1]$. Seja $A = \{f_n : n \in \mathbb{N}_0\}$. Temos que A é enumerável, $A \subset C^\infty[0,1]$ e $\operatorname{span}(A) = P[0,1]$. Provemos que $\operatorname{span}(A)$ é denso em $C^\infty[0,1]$. Com efeito, seja $f \in C^\infty[0,1]$. Pelo Teorema de Aproximação Simultânea, existe uma sequência de polinômios $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} p_n^{(j)} = f^{(j)}, \text{ para } j = 0, 1, \dots, k \text{ e } k \in \mathbb{N}_0,$$

uniformemente em [0,1]. Como

$$\min\{1, ||p_n^{(j)} - f^{(j)}||_\infty\} = \frac{1 + ||p_n^{(j)} - f^{(j)}||_\infty - |1 - ||p_n^{(j)} - f^{(j)}||_\infty|}{2}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} ||p_n^{(j)} - f^{(j)}||_\infty = 0,$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} ||p_n - f|| &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \min\{1, ||p_n^{(j)} - f^{(j)}||_\infty\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \frac{1 + ||p_n^{(j)} - f^{(j)}||_\infty - |1 - ||p_n^{(j)} - f^{(j)}||_\infty|}{2} \\
&= 0. \qquad (1.3)
\end{aligned}$$

Assim, $\overline{\operatorname{span}(A)} = C^\infty[0,1]$ e segue do Lema 1.1.1 que $C^\infty[0,1]$ é separável. □

Definição 1.1.4. *Sejam $a < b$ números reais e $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$. A variação total de f, denotada por V(f), é definida por*

$$V(f) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| : a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b,\ n \in \mathbb{N}\right\}. \qquad (1.4)$$

Diz-se que f é uma função de variação limitada se existe $c > 0$ tal que $V(f) < c$.

Listamos alguns resultados que serão utilizados na dissertação. Maiores detalhes podem ser encontrados nas referências [3] e [15].

Proposição 1.1.3. *Se* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ *e* $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ *são funções de variação limitada, o mesmo ocorre com* $f + g$*,* fg *e* $|f|$*. Além disso,*

$$V(f + g) \leq V(f) + V(g)$$
$$V(\alpha f) = |\alpha| V(f),\ \forall \alpha \in \mathbb{K}.$$

Proposição 1.1.4. *Se* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ *possui derivada contínua em* $[a, b]$*, isto é,* f *é de classe* C^1*, então* f *é de variação limitada e*

$$V(f) = \int_a^b |f'(t)| dt.$$

Proposição 1.1.5. *Se* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função monótona, então* f *é de variação limitada e*

$$V(f) = |f(b) - f(a)|.$$

Proposição 1.1.6. *Se* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ *é de variação limitada, então* f *é limitada.*

Uma função $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ contínua ou limitada em $[a, b]$ não tem necessariamente variação limitada nesse intervalo.

Exemplo 1.1.1. *A função*

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, \text{ se } 0 < x \leq 1 \\ 0, \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

é contínua e limitada em $[0,1]$*, mas não é de variação limitada neste intervalo, já que sua variação total é proporcional a série harmônica divergente* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ *.*

Denotamos por $CBV\,[0, 1]$, a álgebra das funções $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{K}$ contínuas em $[0, 1]$ com variação limitada. Se for munida da norma

$$\|f\| = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| + V(f),$$

$CBV[0,1]$ é um espaço de Banach. Além disso, $CBV[0,1]$ é separável porque o conjunto dos polinômios é denso neste espaço. Veja [4, p. 3167].

1.2 Preliminares para o Capítulo 3

As próximas notações e os resultados mencionados serão utilizados no Capítulo 3.

O seguinte teorema encontra-se no artigo de Hardy [13, p. 303] .

Teorema 1.2.1 (Hardy – 1916). *Se* $0 < a < 1$*,* $b > 1$ *e* $ab \geq 1$*, então ambas as funções*

$$W_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \operatorname{sen}(b^k \pi x)$$

e

$$W_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x)$$

são contínuas em $\mathbb{R}$ *e não são diferenciáveis em nenhum ponto de* $\mathbb{R}$*.*

Teorema 1.2.2. *A função*

$$f(x) = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \operatorname{sen}(\pi(8\pi + 3)^n x)$$

é contínua em $[0, 1]$ *e diferenciável somente na origem.*

Demonstração. Pelo Teorema de Hardy, a função

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \operatorname{sen}(\pi(8\pi + 3)^n x)$$

é contínua em $[0, 1]$. A função $h(x) = x^2$ também é contínua em $[0, 1]$. Portanto, $f = gh$ é contínua em [0,1]. Note que

$$\begin{aligned} |g(x)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |2^{-n} \operatorname{sen}(\pi(8\pi + 3)^n x)| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \\ &= 2, \end{aligned} \tag{1.5}$$

para todo $x \in [0, 1]$. Temos

$$f'(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} x g(x) = 0$$

já que g é limitada. Se f fosse diferenciável em $t \in (0,1]$, então a função

$$\frac{1}{h}f = \frac{1}{h}(hg) = g$$

seria diferenciável em t. Contradição, pois pelo Teorema de Hardy g não é diferenciável em nenhum ponto de $\mathbb{R}$. $\square$

Outro resultado essencial é o seguinte teorema.

Teorema 1.2.3 (Valor Intermediário). *Se $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então a imagem $f\,([a,b])$ contém o intervalo fechado com extremidades $f(a)$ e $f(b)$.*

A base de Hamel será utilizada no Capítulo 3 para construir espaços vetoriais de dimensão infinita. Baseamos-nos nas referências [1] e [14] para descrever alguns resultados fundamentais.

Definição 1.2.1. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Um subconjunto E de V é dito linearmente dependente se existem vetores distintos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ em E e escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ em $\mathbb{K}$, não todos nulos, tais que*

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = 0.$$

Um conjunto é dito linearmente independente se não for linearmente dependente.

Observação 1.2.1. *Decorre da definição que um conjunto E de vetores é linearmente independente se, e somente se, todo subconjunto finito de E é linearmente independente, isto é, se, e somente se, para quaisquer vetores distintos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ em E temos que $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = 0$ implica que $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$.*

Definição 1.2.2. *Seja V um espaço vetorial. Uma base de Hamel de V é um subconjunto E de V linearmente independente que gera V, isto é, $V = \operatorname{span}(E)$.*

Proposição 1.2.1. *Seja V um espaço vetorial e E uma base de Hamel de V. Então, todo $x \in V$ pode ser unicamente escrito na forma*

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j,$$

onde $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_j \in \mathbb{K}$ *e* $e_j \in E$.

Observação 1.2.2. *Sejam* V *e* W *espaços vetoriais sobre um corpo* $\mathbb{K}$ *e considere* E *uma base de Hamel de* V. *Para toda função* $g : E \longrightarrow W$, *existe uma única função linear* $f : V \longrightarrow W$ *tal que* $f|_E = g$, *onde a função* $f|_E$ *é a restrição de* f *a* E.

Lema 1.2.1 (Lema de Zorn). *Seja* $(Z, \leq)$ *um conjunto não vazio parcialmente ordenado. Suponha que todo subconjunto totalmente ordenado de* Z *possui cota superior. Então,* Z *possui elemento maximal.*

Teorema 1.2.4. *Sejam* V *um espaço vetorial sobre um corpo* $\mathbb{K}$ *e* A *um subconjunto linearmente independente de* V. *Então, existe uma base de Hamel* E *de* V *tal que* $A \subset E$.

Para demonstrar o teorema anterior é utilizado o Lema de Zorn.

Corolário 1.2.1. *Todo espaço vetorial tem uma base de Hamel.*

Demonstração. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Analisaremos dois casos.
1º Caso: $V = \{0\}$. Basta tomar a base $E = \emptyset$.
2º Caso: $V \neq \{0\}$. Neste caso, vamos considerar $x \neq 0$ com $x \in V$. Assim, tome o conjunto linearmente independente $A = \{x\}$. Pelo Teorema 1.2.4, existe uma base de Hamel E de V tal que $A \subset E$. □

Proposição 1.2.2. *Se* E_1 *e* E_2 *são bases de Hamel de um espaço vetorial* V, *então* $\operatorname{card}(E_1) = \operatorname{card}(E_2)$.

Assim, define-se a dimensão de V, denotada por $\dim_{\mathbb{K}} V$, como $\dim_{\mathbb{K}} V = \operatorname{card}(E)$, onde E é uma base de Hamel de V.

Proposição 1.2.3. *Uma base de Hamel do espaço vetorial* $\mathbb{R}$ *sobre* $\mathbb{Q}$ *possui a mesma cardinalidade de* $\mathbb{R}$, *isto é,* $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \operatorname{card} \mathbb{R} = c$.

O símbolo c é chamado número cardinal do continuum.

Proposição 1.2.4. *Seja* X *um espaço de Banach com dimensão infinita. Então, qualquer base de Hamel de* X *é não enumerável e* $\dim_{\mathbb{K}} X \geq c$.

Proposição 1.2.5. *Seja X um espaço vetorial normado de dimensão infinita sobre $\mathbb{R}$. Então, existe um funcional linear $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ descontínuo.*

Demonstração. Tome uma base de Hamel $B = \{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de X tal que $||x_\alpha|| = 1$, para todo $\alpha \in I$. Seja $B' = \{\tilde{x_n}\} \subset B$ um conjunto enumerável e defina

$$f(\tilde{x_n}) = n, \text{ para todo } n = 1, 2, \ldots$$

e

$$f(x_\alpha) = 0, \text{ se } x_\alpha \in B - B'.$$

Considere a sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\tilde{x}_n/\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$. Note que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ na norma dada, ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} ||y_n|| = \lim_{n\to\infty} \frac{||\tilde{x_n}||}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Mas,

$$f(y_n) = f\left(\frac{\tilde{x_n}}{\sqrt{n}}\right) = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}. \tag{1.6}$$

Tomando o limite, segue que

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty.$$

Portanto, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é descontínuo. □

Através do determinante de Vandermonde, prova-se que a dimensão de alguns espaços vetoriais é infinita.

Proposição 1.2.6. *Se $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, então o determinante da matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

é igual a $\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j - x_i)$, para todo $n \geq 2$.

Demonstração. Para provar este resultado, vamos utilizar o método de indução em n. Obviamente, a afirmação é verdadeira para $n = 2$. Agora, suponha que a afirmação é verdadeira para $n > 2$. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$ e considere a matriz $(n+1) \times (n+1)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_{n+1} \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \ldots & x_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \ldots & x_{n+1}^n \end{pmatrix}.$$

Sejam $L_1, L_2, \ldots, L_{n+1}$ as linhas da matriz A. Aplicando a operação $L_{n+1} - x_1 L_n$ sobre a linha L_{n+1} obtemos a matriz

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_{n+1} \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \ldots & x_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \ldots & x_{n+1}^{n-1} \\ 0 & x_2^n - x_1 x_2^{n-1} & x_3^n - x_1 x_3^{n-1} & \ldots & x_{n+1}^n - x_1 x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Denotemos as linhas da matriz A_1 por $L_1^{(1)}, L_2^{(1)}, \ldots, L_{n+1}^{(1)}$. Aplicando a operação $L_n^{(1)} - x_1 L_{n-1}^{(1)}$ sobre a linha $L_n^{(1)}$ resulta

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_{n+1} \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \ldots & x_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \ldots & x_{n+1}^{n-2} \\ 0 & x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} & x_3^{n-1} - x_1 x_3^{n-2} & \ldots & x_{n+1}^{n-1} - x_1 x_{n+1}^{n-2} \\ 0 & x_2^n - x_1 x_2^{n-1} & x_3^n - x_1 x_3^{n-1} & \ldots & x_{n+1}^n - x_1 x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Continuando o processo, obtemos a seguinte matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \dots & x_{n+1} - x_1 \\ 0 & x_2^2 - x_1x_2 & x_3^2 - x_1x_3 & \dots & x_{n+1}^2 - x_1x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_2^{n-1} - x_1x_2^{n-2} & x_3^{n-1} - x_1x_3^{n-2} & \dots & x_{n+1}^{n-1} - x_1x_{n+1}^{n-2} \\ 0 & x_2^{n} - x_1x_2^{n-1} & x_3^{n} - x_1x_3^{n-1} & \dots & x_{n+1}^{n} - x_1x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Usando propriedades de determinante tem-se que as matrizes A e B possuem o mesmo determinante. Ainda, é possível expandir o determinante ao longo da primeira coluna de B para concluir que o determinante de A é igual ao determinante da matriz $n \times n$

$$C = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \dots & x_{n+1} - x_1 \\ x_2^2 - x_1x_2 & x_3^2 - x_1x_3 & \dots & x_{n+1}^2 - x_1x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-1} - x_1x_2^{n-2} & x_3^{n-1} - x_1x_3^{n-2} & \dots & x_{n+1}^{n-1} - x_1x_{n+1}^{n-2} \\ x_2^{n} - x_1x_2^{n-1} & x_3^{n} - x_1x_3^{n-1} & \dots & x_{n+1}^{n} - x_1x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Colocando os $x_i' s$ em evidência, obtém-se que

$$C = \begin{pmatrix} (x_2 - x_1)1 & (x_3 - x_1)1 & \dots & (x_{n+1} - x_1)1 \\ (x_2 - x_1)x_2 & (x_3 - x_1)x_3 & \dots & (x_{n+1} - x_1)x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_2 - x_1)x_2^{n-2} & (x_3 - x_1)x_3^{n-2} & \dots & (x_{n+1} - x_1)x_{n+1}^{n-2} \\ (x_2 - x_1)x_2^{n-1} & (x_3 - x_1)x_3^{n-1} & \dots & (x_{n+1} - x_1)x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Portanto, usando propriedades de determinante, temos que o determinante da matriz C é dado por

$$\left[\prod_{1<j\leq n+1} (x_j - x_1) \right] \det(D),$$

sendo

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \dots & x_{n+1}^{n-2} \\ x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Mas, pela hipótese de indução,

$$\det(D) = \prod_{2 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i).$$

Assim,

$$\det(A) = \left(\prod_{1 < j \leq n+1} (x_j - x_1) \right) \left(\prod_{2 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i) \right) = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i).$$

$\square$

Capítulo 2

Conjuntos denso-lineáveis em espaços de funções contínuas

Neste capítulo, apresentaremos métodos para provar que certas famílias não lineares de funções contínuas escalares contêm espaços vetoriais densos de dimensão infinita. Os resultados e aplicações foram extraídos do artigo de Bernal-González [4].

2.1 Os principais resultados

Definição 2.1.1. *Um subconjunto M de um espaço vetorial topológico X é dito:*

(i) *Lineável, se $M \cup \{0\}$ contém um subespaço vetorial de dimensão infinita;*

(ii) *Denso - lineável, se $M \cup \{0\}$ contém um subespaço vetorial de dimensão infinita denso em X.*

Se X é um espaço vetorial sem nenhuma topologia envolvida, a definição de conjunto lineável continua válida.

Em nosso contexto, considere T um espaço topológico, $F(T, \mathbb{K})$ o espaço vetorial das funções de T em $\mathbb{K}$ e $C(T, \mathbb{K})$ o espaço vetorial das funções contínuas de T em $\mathbb{K}$.

Definição 2.1.2. *Um subespaço vetorial $A \subset F(T, \mathbb{K})$ é dito ser uma álgebra se é fechado em relação a multiplicação.*

Definição 2.1.3. *Quando* $A \subset F(T, \mathbb{K})$ *for uma álgebra e* $\dfrac{1}{f} \in A$ *sempre que* $f \in A$ *e* $f(t) \neq 0$*, para todo* $t \in T$*, dizemos que* A *é uma álgebra com divisão.*

Definição 2.1.4. *Uma família* $\{A(t)\}_{t \in T}$ *de subconjuntos de* $F(T, \mathbb{K})$ *é chamada localmente definida se para* $t_0 \in T$*,* $f \in A(t_0)$ *e* $g \in F(T, \mathbb{K})$ *tal que* $g = f$ *em alguma vizinhança de* t_0*, tem-se* $g \in A(t_0)$*.*

Definição 2.1.5. *Uma família* $\{A(t)\}_{t \in T}$ *de subconjuntos de* $F(T, \mathbb{K})$ *é chamada abertamente definida se*

$$A(t) = \cup_{U \in O(t)} (\cap_{s \in U} A(s)),$$

onde $t \in T$ *e* $O(t)$ *é a coleção de todos os subconjuntos abertos de* T *contendo* t*.*

Exemplo 2.1.1. *Seja* $T = [0,1]$*. Considere para cada* $t \in [0,1]$*, o conjunto*

$$A(t) = \{f \in F([0,1], \mathbb{K}) \text{: } f \text{ é diferenciável em } t\}.$$

A família $\{A(t)\}_{t \in [0,1]}$ *é localmente definida, mas não é abertamente definida.*

Com efeito, sejam $t_0 \in [0,1]$, $f \in A(t_0)$ e $g \in F([0,1], \mathbb{K})$ tal que $g = f$ em alguma vizinhança de t_0. Se $0 < t_0 < 1$, como $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{K}$ é diferenciável em t_0, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} - f'(t_0) \right| < \epsilon.$$

Por hipótese, $g = f$ em alguma vizinhança de t_0. Logo, podemos escolher $\theta \in (0, \delta)$ tal que

$$0 < |t - t_0| < \theta \Rightarrow \left| \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} - f'(t_0) \right| < \epsilon.$$

Portanto, $g \in A(t_0)$. Se $t_0 = 0$ ou $t_0 = 1$, a verificação é análoga com as devidas modificações nas vizinhanças. Logo, a família $\{A(t)\}_{t \in [0,1]}$ é localmente definida. Mostremos que $\{A(t)\}_{t \in [0,1]}$ não é abertamente definida. Suponhamos, por absurdo, que

$$A(t) = \cup_{U \in O(t)} \cap_{\theta \in U} A(\theta)),\ t \in [0,1], \tag{2.1}$$

onde $O(t)$ é a coleção de todos os subconjuntos abertos de $[0,1]$ contendo t. A função

$$f(t) = t^2 \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\text{sen}(\pi(8\pi+3)^n t)$$

é contínua em $[0,1]$ e diferenciável somente na origem, pelo Teorema 1.2.2. Assim, $f \in A(0)$. Segue de (2.1) que existe $U_0 \in O(0)$ tal que $f \in \cap_{\theta \in U_0} A(\theta)$, ou seja, f é diferenciável em cada $\theta \in U_0$. Contradição, pois f é diferenciável apenas em 0. Portanto, a família $\{A(t)\}_{t\in[0,1]}$ não é abertamente definida.

Exemplo 2.1.2. *Seja $T = [0,1]$. Considere para cada $t \in [0,1]$ o conjunto*

$$A(t) = \{f \in F([0,1],\mathbb{K}) : f \textit{ é diferenciável numa vizinhança de } t\}.$$

A família $\{A(t)\}_{t\in[0,1]}$ é localmente e abertamente definida.

De fato, sejam $t_0 \in [0{,}1]$, $f \in A(t_0)$ e $g \in F([0{,}1],\mathbb{K})$ tal que $g = f$ em alguma vizinhança W_1 de t_0. Dado que $f \in A(t_0)$, existe uma vizinhança W_2 de t_0 em que f é diferenciável. Então, $f = g$ na vizinhança $W = W_1 \cap W_2$ de t_0 e assim, g é diferenciável em W. Logo, $g \in A(t_0)$ e concluímos que $\{A(t)\}_{t\in[0,1]}$ é localmente definida. Mostremos que $\{A(t)\}_{t\in[0,1]}$ é abertamente definida. Seja $t \in [0{,}1]$. Se $f \in A(t)$, então existe uma vizinhança W de t em que f é diferenciável. Logo, $f \in \cap_{\theta \in W} A(\theta)$ e, assim,

$$f \in \cup_{U\in O(t)} \cap_{\theta\in U} A(\theta).$$

Reciprocamente, se

$$f \in \cup_{U\in O(t)} \cap_{\theta\in U} A(\theta),$$

então existe um conjunto aberto $V \in O(t)$ tal que $f \in \cap_{\theta\in V} A(\theta)$. Em particular, $f \in A(t)$, já que $t \in V$. Dessa forma, provamos que

$$A(t) = \cup_{U\in O(t)} \cap_{\theta\in U} A(\theta),$$

para cada $t \in [0{,}1]$, ou seja, a família $\{A(t)\}_{t\in[0,1]}$ é abertamente definida.

Recordemos que uma função $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$, definida num intervalo aberto I, é analítica em $t_0 \in I$ se existe $r > 0$ com $(t_0 - r, t_0 + r) \subset I$ e uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (t-t_0)^n$ tal que

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t-t_0)^n, \text{ para todo } t \in (t_0 - r, t_0 + r) \ .$$

Se o intervalo I for fechado, considera-se vizinhanças adequadas para as extremidades do intervalo. Diz-se que f é analítica em I quando f é analítica em cada ponto de I. Note que f é analítica em t_0 se, e somente se, f é analítica em uma vizinhança de t_0.

Exemplo 2.1.3. *Seja $T = [0,1]$. Considere para cada $t \in [0,1]$, o conjunto*

$$A(t) = \{f \in F([0,1], \mathbb{K}) : f \text{ é analítica em } t\}.$$

A família $\{A(t)\}_{t\in[0,1]}$ é localmente e abertamente definida.

De fato, sejam $t_0 \in [0,1]$, $f \in A(t_0)$ e $g \in F([0,1], \mathbb{K})$ tal que $g = f$ em alguma vizinhança de t_0. Como $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{K}$ é analítica em $t_0 \in [0,1]$, existe $r > 0$ tal que

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-t_0)^n \text{ , para todo } t \in (t_0 - r, t_0 + r).$$

Por hipótese, $g = f$ em alguma vizinhança de t_0. Logo, podemos escolher $\theta \in (0, r)$ tal que

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-t_0)^n \text{ , para todo } t \in (t_0 - \theta, t_0 + \theta) \ .$$

Portanto, $g \in A(t_0)$. Logo, $\{A(t)\}_{t\in[0,1]}$ é localmente definida. Para mostrar que $\{A(t)\}_{t\in[0,1]}$ é abertamente definida, usaremos o fato de que uma função f será analítica em t_0 se, e somente se, f for analítica em uma vizinhança de t_0. Seja $t \in [0,1]$. Se $f \in A(t)$, então f é analítica em t. Logo, existe $U_0 \in O(t)$ tal que $f \in \cap_{\theta \in U_0} A(\theta)$. Deste modo,

$$f \in \cup_{U \in O(t)} (\cap_{\theta \in U} A(\theta)).$$

Por outro lado, se

$$f \in \cup_{U \in O(t)} (\cap_{\theta \in U} A(\theta)),$$

então existe $W_0 \in O(t)$ tal que $f \in \cap_{\theta \in W_0} A(\theta)$. Logo, $f \in A(\theta)$, para todo $\theta \in W_0$, isto é, f é analítica em cada $\theta \in W_0$. Em particular, f é analítica em t, já que $t \in W_0$. Portanto, $f \in A(t)$.

O seguinte resultado de Bernal-González [4] fornece condições para provar que certos conjuntos lineáveis são denso-lineáveis.

Teorema 2.1.1. *Seja X um espaço vetorial topológico, separável e metrizável. Suponha que Γ é uma família de subespaços vetoriais de X tal que $\cap_{S \in \Gamma} S$ é denso em X e $\cap_{S \in \Gamma} (X \setminus S)$ é lineável. Então, $\cap_{S \in \Gamma} (X \setminus S)$ é denso-lineável.*

Demonstração. Segue da hipótese que podemos escolher um conjunto denso e enumerável $\{z_n\}_{n \geq 1}$ em X, bem como uma métrica d invariante por translação que define a topologia em X. Pela densidade de $\cap_{S \in \Gamma} S$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um vetor $y_n \in \cap_{S \in \Gamma} S$ tal que

$$d(z_n, y_n) < \frac{1}{n}. \tag{2.2}$$

Como $\cap_{S \in \Gamma} (X \setminus S)$ é lineável, existe um subespaço vetorial de dimensão infinita L tal que

$$L \setminus \{0\} \subset \cap_{S \in \Gamma} (X \setminus S)\ .$$

Portanto, podemos selecionar uma sequência de vetores linearmente independentes $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em L. Uma vez que X é um espaço vetorial topológico, segue que a multiplicação por escalar é contínua e, assim, existe uma sequência $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $(0, \infty)$ tal que, para $n \in \mathbb{N}$,

$$d(\epsilon_n v_n, 0) < \frac{1}{n}. \tag{2.3}$$

Agora, defina $x_n := y_n + \epsilon_n v_n$ com $n \geq 1$ e seja $D = \operatorname{span}(\{x_n\}_{n \geq 1})$. Provemos que o conjunto $\{x_n\}_{n \geq 1}$ é linearmente independente. Se

$$\beta_1 x_{n_1} + \ldots + \beta_k x_{n_k} = 0$$

com $\{\beta_i\}_{i=1}^k \subset \mathbb{K}$, então

$$\beta_1 y_{n_1} + \beta_2 y_{n_2} + \ldots + \beta_k y_{n_k} + \beta_1 \epsilon_{n_1} v_{n_1} + \beta_2 \epsilon_{n_2} v_{n_2} + \ldots + \beta_k \epsilon_{n_k} v_{n_k} = 0. \tag{2.4}$$

Assim,

$$\beta_1\epsilon_{n_1}v_{n_1} + \beta_2\epsilon_{n_2}v_{n_2} + \ldots + \beta_k\epsilon_{n_k}v_{n_k} = -\beta_1 y_{n_1} - \beta_2 y_{n_2} - \ldots - \beta_k y_{n_k} \in \cap_{S\in\Gamma} S. \tag{2.5}$$

Por outro lado,

$$\beta_1\epsilon_{n_1}v_{n_1} + \beta_2\epsilon_{n_2}v_{n_2} + \ldots + \beta_k\epsilon_{n_k}v_{n_k} \in L.$$

Mas $L \setminus \{0\} \subset \cap_{S\in\Gamma}(X \setminus S)$. Logo, segue de (2.5) que

$$\beta_1\epsilon_{n_1}v_{n_1} + \beta_2\epsilon_{n_2}v_{n_2} + \ldots + \beta_k\epsilon_{n_k}v_{n_k} = 0.$$

Sendo $v_{n_1}, v_{n_2}, \ldots, v_{n_k}$ linearmente independentes e $\epsilon_{n_j} > 0$, para $j = 1, 2, \ldots, k$, resulta que $\beta_j = 0$, para $j = 1, 2, \ldots, k$. Consequentemente, o conjunto $\{x_n\}_{n\geq 1}$ é linearmente independente.

De (2.2) e (2.3), da desigualdade triangular e invariância por translação de d, temos

$$\begin{aligned} d(x_n, z_n) &\leq d(y_n + \epsilon_n v_n, y_n) + d(y_n, z_n) \\ &= d(\epsilon_n v_n, 0) + d(y_n, z_n) \\ &< \frac{2}{n}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, z_n) = 0. \tag{2.7}$$

De (2.7) e da densidade de $\{z_n\}_{n\geq 1}$ temos que $\{x_n\}_{n\geq 1}$ é denso em X. De fato, como $\overline{\{z_n\}_{n\geq 1}} = X$ segue que para todo $x \in X$ existe uma sequência $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ em $\{z_n\}_{n\geq 1}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = x. \tag{2.8}$$

Temos de (2.7) que

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{n_k}, z_{n_k}) = 0. \tag{2.9}$$

Como

$$0 \leq d(x_{n_k}, x) \leq d(x_{n_k}, z_{n_k}) + d(z_{n_k}, x), \tag{2.10}$$

tomando o limite na Desigualdade (2.10) e usando o Teorema do Confronto segue que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Logo, $x \in \overline{\{x_n\}_{n\geq 1}}$ e, assim, $\{x_n\}_{n\geq 1}$ é denso em X. Consequentemente, D é um subespaço vetorial denso em X.

Resta mostrar que $D \setminus \{0\} \subset \cap_{S\in\Gamma} (X \setminus S)$. Para isso, fixe um vetor $x \in D \setminus \{0\}$. Então, existem $N \in \mathbb{N}$ e escalares $c_1, c_2, \ldots, c_N$, com $c_N \neq 0$ satisfazendo

$$x = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_Nx_N,$$

ou seja,

$$x = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_Ny_N + c_1\epsilon_1v_1 + c_2\epsilon_2v_2 + \ldots + c_N\epsilon_Nv_N. \tag{2.11}$$

Assuma, por contradição, que $x \notin \cap_{S\in\Gamma} (X \setminus S)$. Logo, existe $S_o \in \Gamma$ com $x \in S_o$. Mas

$$y_1, y_2, \ldots, y_N \in \cap_{S\in\Gamma} S \subset S_o$$

e S_o é um subespaço vetorial. Assim,

$$x - (c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_Ny_N) \in S_o. \tag{2.12}$$

Como $c_N\epsilon_N \neq 0$ e os vetores v_n são linearmente independentes, deduzimos que

$$c_1\epsilon_1v_1 + c_2\epsilon_2v_2 + \ldots + c_N\epsilon_Nv_N \in L \setminus \{0\} \subset \cap_{S\in\Gamma} (X \setminus S),$$

contradizendo (2.12), devido a (2.11). □

O próximo resultado de Bernal-González [4] é útil para determinar conjuntos de funções contínuas denso-lineáveis.

Teorema 2.1.2. *Sejam T um espaço topológico e $X \subset C(T, \mathbb{K})$ um espaço vetorial topológico e uma álgebra. Assuma que $\{A(t)\}_{t\in T}$ é uma família de subconjuntos de $F(T, \mathbb{K})$ e denote*

$$A := \cap_{t\in T}(A(t) \cap X) \ \text{ e } \ B := \cap_{t\in T}(X \setminus A(t)).$$

(i) Suponha que as seguintes condições sejam satisfeitas:

(a) *Para qualquer $t \in T$, o conjunto $A(t)$ é uma álgebra com divisão;*

(b) *A família $\{A(t)\}_{t\in T}$ é localmente e abertamente definida;*

(c) *B é não vazio;*

(d) *Existe uma função $\varphi \in A$ tal que a imagem $\varphi(U)$ de cada subconjunto $U \subset T$ aberto e não vazio é um conjunto infinito.*

Então, B é lineável.

(ii) Se, além das condições acima, X é separável, metrizável e A é denso em X, então B é denso - lineável em X.

Demonstração. (i) Considere a função φ do item (d). Por (c) existe $0 \neq F \in B$. Assim, podemos definir o conjunto

$$D = (P \circ \varphi)F : P \in \mathcal{C}\} \ ,$$

onde $\mathcal{C}$ é o conjunto de todos os polinômios $P : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$. Claramente, D é um subespaço vetorial de X. Agora, para ver que $\dim_{\mathbb{K}} D = \infty$, basta mostrar que para cada $N \in \mathbb{N}$, as funções

$$F, \varphi F, \varphi^2 F, \ldots, \varphi^N F$$

que estão em D, são linearmente independentes. Isso é verdade, pois caso contrário existiria um polinômio não nulo P tal que $(P \circ \varphi)F = 0$. Como X é uma álgebra e por (a) cada $A(t)$ é uma álgebra, temos que A é uma álgebra. Logo, $P \circ \varphi \in A$. Assim, tomando $U = T$ em (d) temos que $\varphi(T)$ é um conjunto infinito. Logo, podemos escolher um ponto $t_0 \in T$ tal que $P(\varphi(t_0)) \neq 0$, já que P possui no máximo uma quantidade finita de zeros. Pela continuidade, $P(\varphi(t)) \neq 0$, para todo t pertencente a uma vizinhança W de t_0. Portanto, $F(t) = 0$ em uma vizinhança W de t_0. Como a função nula pertence a $A(t_0)$ e por (b) a família $\{A(t)\}_{t\in T}$ é localmente definida segue que $F \in A(t_0)$. Contradição, pois $F \in B$. Assim, $\dim_{\mathbb{K}} D = \infty$.

Resta mostrar que $D\backslash\{0\} \subset B$. Para isso, seja $f \in D\backslash\{0\}$. Logo, existe um polinômio não nulo P tal que $f = (P \circ \varphi)F$. Assuma, por contradição, que $f \notin B$. Então, existe

$t_0 \in T$ tal que $f \in A(t_0)$. Como $\{A(t)\}_{t \in T}$ é abertamente definida, existe um conjunto aberto $U \subset T$, com $t_0 \in U$, tal que $f \in A(t)$, para todo $t \in U$. Por (d), temos que $\varphi(U)$ é um conjunto infinito. Logo, existe $t_1 \in U$ tal que $P(\varphi(t_1)) \neq 0$. Novamente, pela continuidade, existe um conjunto aberto U_1, com $t_1 \in U_1 \subset U$, tal que $P(\varphi(t)) \neq 0$, para todo $t \in U_1$. Defina $g : T \longrightarrow \mathbb{K}$ por

$$g(t) = \begin{cases} P(\varphi(t)), & \text{se}\, t \in U_1 \\ 1, & \text{se}\, t \in T \setminus U_1. \end{cases}$$

Como $P \circ \varphi \in A$, temos que $P \circ \varphi \in A(t_1)$. Uma vez que $\{A(t)\}_{t \in T}$ é localmente definida e $g = P \circ \varphi$ na vizinhança U_1 de t_1, temos que $g \in A(t_1)$. Sendo $A(t_1)$ uma álgebra com divisão e $g(t) \neq 0$ para todo $t \in T$, segue que $\dfrac{1}{g} \in A(t_1)$. Logo, a função $\dfrac{f}{g} \in A(t_1)$, onde

$$\frac{f}{g}(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t)}{P(\varphi(t))}, & \text{se}\, t \in U_1 \\ f(t), & \text{se}\, t \in T \setminus U_1. \end{cases}$$

Mas $F = f/(P \circ \varphi)$ em U_1, isto é, temos $F = f/g$ em U_1. Usando novamente o fato de que $\{A(t)\}_{t \in T}$ é localmente definida, obtemos $F \in A(t_1)$. Contradição, pois $F \in B$.

(ii) Assuma que $\{A(t)\}_{t \in T}$ é uma família de subconjuntos de $F(T, \mathbb{K})$ tal que

$$A = \cap_{t \in T}(A(t) \cap X) \text{ e } B = \cap_{t \in T}(X \setminus A(t)).$$

Seja A denso em X e assuma que são válidas todas as condições do item (i). Considere a família de subespaços vetoriais de X

$$\Gamma = \{A(t) \cap X\}_{t \in T}.$$

Temos

$$B = \cap_{t \in T}(X \setminus A(t)) = \cap_{t \in T}(X \setminus (A(t) \cap X)).$$

Segue do item (i) que B é lineável. Portanto, pelo Teorema 2.1.1, B é denso - lineável. $\square$

2.2 Aplicações

Nesta seção, aplicaremos os resultados obtidos na seção anterior em três famílias contidas no espaço das funções contínuas em [0,1]. Consideraremos a álgebra $C^p[0,1]$ das C^p-funções $f : [0,1] \to \mathbb{K}$ munida da norma

$$||f||_p = \sum_{j=0}^{p} \sup_{t\in[0,1]} |f^{(j)}(t)|$$

e a álgebra $C^\infty\,[0,1]$ das funções infinitamente diferenciáveis em [0,1], munida da norma

$$||f||_\infty = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \min \left\{ 1, \sup_{t\in[0,1]} |f^{(j)}(t)| \right\}.$$

O seguinte lema pode ser encontrado nos artigos em russo [10] e [11].

Lema 2.2.1 (Gurariy – 1966). *O conjunto das funções reais contínuas que não são diferenciáveis em nenhum ponto do intervalo $[0,1]$ é lineável.*

Proposição 2.2.1. *Sejam $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{N}_0$. Então, o conjunto das funções $f \in C^p\,[0,1]$ tal que $f^{(p)}$ não é diferenciável em nenhum ponto de [0,1] é denso-lineável em $C^p\,[0,1]$.*

Demonstração. Denotemos por $M\,(p)$ o conjunto das funções mencionadas na hipótese da proposição. Para o caso em que $p = 0$ temos que $M\,(0)$ é lineável, pelo Lema 2.2.1. Assim, é suficiente aplicar o Teorema 2.1.1 para $X = C\,[0,1]$, $\Gamma = \{S(t)\}_{t\in[0,1]}$, onde

$$S(t) = \{f \in C\,[0,1] \colon\ f \text{ é diferenciável em } t\}$$

e $M\,(0) = \cap_{t\in[0,1]} (C\,[0,1] \backslash S(t))$. Pelo Teorema de Aproximação de Weierstrass, o conjunto $P\,[0,1]$ dos polinômios reais definidos em $[0,1]$ é uniformemente denso em $C\,[0,1]$. Temos

$$P[0,1] \subset S(t), \text{ para todo } t \in [0,1].$$

Então, $P[0,1] \subset \cap_{t\in[0,1]} S(t)$. Deste modo, analisando o fecho desses conjuntos e aplicando o Teorema de Aproximação de Weierstrass, segue que

$$C[0,1] = \overline{P[0,1]} \subset \overline{\cap_{t\in[0,1]} S(t)} \subset C\,[0,1].$$

Portanto, $\cap_{t\in[0,1]} S(t)$ é denso em $C\,[0{,}1]$ e concluímos, pelo Teorema 2.1.1, que $M\,(0)$ é denso-lineável em $C\,[0{,}1]$.

Agora, para o caso em que $p \in \mathbb{N}$ aplicaremos o Teorema 2.1.1 considerando X $= C^p\,[0{,}1]$ e $\Gamma = \{S(t)\}_{t\in[0,1]}$, onde

$$S(t) = \{f \in C^p\,[0{,}1] : f^{(p)} \text{ é diferenciável em t}\}.$$

Pelo Teorema de Aproximação Simultânea tem-se que $P\,[0{,}1]$ é denso em $C^p\,[0{,}1]$. Note que

$$P[0{,}1] \subset S(t), \text{ para todo } t \in [0{,}1].$$

Então, $P[0{,}1] \subset \cap_{t\in[0,1]} S(t)$. Logo,

$$C^p\,[0{,}1] = \overline{P[0{,}1]} \subset \overline{\cap_{t\in[0,1]} S(t)} \subset C^p\,[0{,}1].$$

Portanto, $\cap_{t\in[0,1]} S(t)$ é denso em $C^p\,[0{,}1]$. Agora vamos provar que o conjunto $M(p)$ é lineável. Considere uma sequência linearmente independente $\{f_n\}_{n\geq 1}$ tal que

$$\operatorname{span}\left(\{f_n\}_{n\geq 1}\right) \subset M(0) \cup \{0\}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, denote por F_n a única antiderivada de ordem p de f_n tal que

$$F_n^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, p-1.$$

Temos

$$\operatorname{span}\left(\{F_n\}_{n\geq 1}\right) \subseteq M(p) \cup \{0\}.$$

De fato, seja $G \in \operatorname{span}\left(\{F_n\}_{n\geq 1}\right)$, isto é, $G(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \beta_i F_{n_i}(x)$ para todo $x \in [0, 1]$, onde $\{\beta_i\}_{i=1}^{k} \subset \mathbb{R}$. Note que,

$$G^{(p)} = \sum_{i=1}^{k} \beta_i F_{n_i}^{(p)} = \sum_{i=1}^{k} \beta_i f_{n_i} \in M(0) \cup \{0\}.$$

Assim, segue que $\operatorname{span}\left(\{F_n\}_{n\geq 1}\right) \subseteq M(p) \cup \{0\}$. Agora, se $c_1, c_2, \ldots, c_N$ são escalares satisfazendo

$$c_1 F_1 + c_2 F_2 + \ldots + c_N F_N = 0 \text{ em } [0{,}1],$$

então após p derivações temos que

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_N f_N = 0 \text{ em } [0,1].$$

Logo, $c_1 = c_2 = \ldots = c_N = 0$. Portanto, $\{F_n\}_{n\geq 1}$ é linearmente independente e, assim span $(\{F_n\}_{n\geq 1})$ possui dimensão infinita. Então, $M(p)$ é lineável.

Temos que $C^p\,[0,1]$ é um espaço vetorial topológico separável e metrizável e $\cap_{t\in[0,1]} S(t)$ é denso em $C^p\,[0,1]$. Como $M(p) = \cap_{t\in[0,1]}(C^p[0,1] \setminus S(t))$ é lineável, segue do Teorema 2.1.1 que $M(p)$ é denso-lineável. □

Proposição 2.2.2. *O conjunto das funções $f \in C^\infty\,[0,1]$ que não são analíticas em nenhum ponto de $[0,1]$ é denso-lineável em $C^\infty\,[0,1]$.*

Demonstração. Sejam $T = [0,1]$ e $X = C^\infty\,[0,1]$. Considere para cada $t \in [0,1]$, o conjunto

$$A(t) = \{f \in F([0,1], \mathbb{K})\colon\ f \text{ é analítica em } t\}.$$

Sejam

$$A = \cap_{t\in T}(A(t) \cap X) \text{ e } B = \cap_{t\in T}(X \setminus A(t)).$$

Note que:

(a) Para qualquer $t \in [0,1]$, o conjunto $A(t)$ é uma álgebra com divisão;

(b) A família $\{A(t)\}_{t\in[0,1]}$ é localmente e abertamente definida. Veja o Exemplo 2.1.3;

(c) O conjunto B é não vazio, pois a função $f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(3^n t)}{n!}$ pertence a $C^\infty\,[0,1]$, mas não é analítica em nenhum ponto de $[0,1]$. Veja [17];

(d) A função $\varphi(t) = t$, com $t \in [0,1]$, pertence a A e a imagem $\varphi(U)$ de cada subconjunto $U \subset [0,1]$ aberto e não vazio é um conjunto infinito.

Portanto, pelo Teorema 2.1.2, o conjunto das funções $f \in C^\infty\,[0,1]$ que não são analíticas em nenhum ponto de $[0,1]$ é lineável em $C^\infty\,[0,1]$.

Agora, observe que $C^\infty\,[0,1]$ é um espaço vetorial topológico separável e metrizável e A é denso em $C^\infty\,[0,1]$ já que

$$C^{\infty}[0,1] = \overline{P[0,1]} \subset \overline{A} \subset C^{\infty}[0,1].$$

Então, segue do Teorema 2.1.2 que o conjunto das funções $f \in C^{\infty}[0,1]$ que não são analíticas em nenhum ponto de $[0,1]$ é denso-lineável em $C^{\infty}[0,1]$. □

A próxima aplicação é no espaço de Banach $CBV[0,1]$ das funções $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{K}$ contínuas em $[0,1]$ e com variação limitada, munido da norma

$$\|f\| = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| + V(f),$$

sendo

$$V(f) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| : \; 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = 1, n \in \mathbb{N}\right\}. \quad (2.13)$$

Usaremos o seguinte resultado da referência [22, pp 25-26].

Lema 2.2.2. *Seja $E \subset \mathbb{R}$ tal que $\mu(E) = 0$, sendo μ a medida de Lebesgue. Então, existe uma função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ crescente e contínua em $\mathbb{R}$ que não é diferenciável em nenhum ponto de E.*

Assim, tomando $E = \mathbb{Q} \cap [0,1]$, existe uma função $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ crescente e contínua em $[0,1]$ que não é diferenciável em nenhum ponto de E.

Proposição 2.2.3. *O conjunto das funções $f \in CBV[0,1]$ tal que f não é diferenciável em nenhum intervalo contido em $[0,1]$ é denso-lineável em $CBV[0,1]$.*

Demonstração. Usaremos o Teorema 2.1.2. Sejam $T = [0,1]$, $X = CBV[0,1]$ e $\{A(t)\}_{t\in T}$ uma família funções tal que para $t \in [0,1]$,

$$A(t) = \{f \in F([0,1], \mathbb{K}) \colon \; f \text{ é diferenciável em alguma vizinhança de } t\}.$$

Considere os conjuntos

$$A := \cap_{t\in T}(A(t) \cap X) \text{ e } B := \cap_{t\in T}(X \setminus A(t)).$$

As hipóteses do Teorema 2.1.2 são válidas:

(a) Claramente, para qualquer $t \in [0,1]$, o conjunto $A(t)$ é uma álgebra com divisão;

(b) A família $\{A(t)\}_{t\in[0,1]}$ é localmente e abertamente definida, basta ver o Exemplo 2.1.2;

(c) Temos $B \neq \emptyset$, pois pelo Lema 2.2.2, existe uma função $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ crescente, logo de variação limitada, e contínua em [0,1] que não é diferenciável em nenhum ponto do conjunto de medida nula $E = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ e, portanto, não é diferenciável em nenhuma vizinhança de $t \in [0,1]$;

(d) A função $\varphi(t) = t$, $t \in [0,1]$, pertence a A e para todo subconjunto aberto $U \subset [0,1]$, a imagem $\varphi(U)$ é um conjunto infinito.

Portanto, B é lineável.

Temos que

$$P[0,1] \subset C^1[0,1] \subset CBV[0,1].$$

Logo, $P[0,1] \subset A$. Daí, obtemos

$$CBV\,[0,1] = \overline{P\,[0,1]} \subset \overline{A} \subset CBV\,[0,1],$$

ou seja, A é denso em $CBV\,[0,1]$. Além disso, $CBV\,[0,1]$ é um espaço vetorial topológico metrizável e separável. Novamente, segue do Teorema 2.1.2 que B é denso-lineável em $CBV\,[0,1]$. $\square$

Observação 2.2.1. *Na Proposição 2.2.3 não podemos trocar a condição "não é diferenciável em nenhum intervalo contido em $[0,1]$" por "não é diferenciável em nenhum ponto de $[0,1]$", pois toda função de variação limitada é diferenciável em quase toda parte, isto é, f é diferenciável em todo ponto de $[0,1]$, exceto num conjunto $\Omega \subset [0,1]$ com medida de Lebesgue nula.*

Capítulo 3

Lineabilidade de fenômenos patológicos em Análise

Este capítulo trata da construção de espaços vetoriais de dimensão infinita com algumas propriedades especiais ou patológicas. Os resultados são baseados nas referências [6] e [7].

3.1 Funções C^∞ com expansão de Taylor constante

Nesta seção vamos denotar por H a base de Hamel do espaço vetorial dos números reais $\mathbb{R}$ sobre o corpo dos racionais $\mathbb{Q}$. Além disso, sem perda de generalidade será assumido que H consiste apenas de números reais positivos. A cardinalidade de H é igual a c.

Teorema 3.1.1. *O conjunto M das funções C^∞ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ com expansão de Taylor constante é lineável.*

Demonstração. Seja $M_0 \subset M$ o conjunto das funções C^∞ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ cuja expansão de Taylor é identicamente nula. Considere as funções f_β, com $\beta \in \mathbb{R}_+ = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda > 0\}$, definidas por

$$f_\beta(x) = \begin{cases} e^{-\beta x^{-2}}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Afirmamos que $f_\beta \in M_0$. De fato, é fácil verificar que $f_\beta^{(n)}(0) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, a expansão de Taylor de f_β em torno de 0 é da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_\beta^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Defina o seguinte espaço vetorial

$$V = \operatorname{span}\{f_\gamma : \gamma \in H\}\ .$$

Primeiramente, será mostrado que a família $\{f_\gamma : \gamma \in H\}$ é linearmente independente. Seja

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_{\beta_i}(x),$$

onde $x \in \mathbb{R}$, $\{\alpha_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}$ e $\beta_i = \beta_j$ se, e somente se, $i = j$. Suponha que $F = 0$. Então $F' = 0$. Assim, derivando a função F, segue que

$$\begin{aligned} F'(x) &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f'_{\beta_i}(x) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (e^{-\beta_i x^{-2}})' \\ &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \frac{2\beta_i}{x^3} (e^{-\beta_i x^{-2}}) \\ &= \frac{2}{x^3} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i f_{\beta_i}(x) \\ &:= \frac{2}{x^3} G_1(x) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Como $2/x^3 \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, temos que $G_1 = 0$. Logo, $G_1' = 0$. Desta forma, derivando a função G_1 , segue que

$$\begin{aligned}
G_1'(x) &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i f_{\beta_i}'(x) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i (e^{-\beta_i x^{-2}})' \\
&= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \frac{2\beta_i^2}{x^3} (e^{-\beta_i x^{-2}}) \\
&= \frac{2}{x^3} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i^2 f_{\beta_i}(x) \\
&:= \frac{2}{x^3} G_2(x) \\
&= 0. \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Portanto, $G_2 = 0$. Logo, $G_2' = 0$. Continuando do mesmo modo, obtemos

$$G_n := \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i^n f_{\beta_i} = 0, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Tomando o limite na função acima, nota-se que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} G_n(x) &= \lim_{x\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i^n f_{\beta_i}(x) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \lim_{x\to\infty} \alpha_i \beta_i^n f_{\beta_i}(x) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \lim_{x\to\infty} \alpha_i \beta_i^n (e^{-\beta_i x^{-2}}) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i^n. \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\lim_{x\to\infty} G_n(x) = \lim_{x\to\infty} 0 = 0. \qquad (3.4)$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i^n = 0, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Deste modo, ao escrever essa última equação para $n = 0, \ldots, m-1$, obtemos o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \ldots & \beta_m \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & \beta_3^2 & \ldots & \beta_m^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_1^{m-1} & \beta_2^{m-1} & \beta_3^{m-1} & \ldots & \beta_m^{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Devido a Proposição 1.2.6, segue que a matriz do sistema de equações é não-singular e, portanto, temos que $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$. Assim, o conjunto $\{f_\gamma : \gamma \in H\}$ é linearmente independente. Portanto, $\dim_{\mathbb{R}} V = \infty$.

Agora, é necessário mostrar que F pertence a M_0. Com efeito, a expansão de Taylor de F em torno de 0 é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i f_{\beta_i}^{(n)}(0)}{n!} \right) x^n = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

ou seja, $F \in M_0$. Assim, $V \subset M_0 \subset M$. Portanto, o conjunto M das funções C^∞ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ com expansão de Taylor constante é lineável. □

3.2 Funções aditivas e $\mathbb{R}$-lineares descontínuas

Definição 3.2.1. *Sejam X e Y espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{F}$.*

(i) *Uma função $f : X \longrightarrow Y$ é dita aditiva se $f(x+y) = f(x) + f(y)$, para cada $x, y \in X$.*

(ii) *Uma função $f : X \longrightarrow Y$ é dita $\mathbb{F}$-linear se f é aditiva e $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, para cada $x \in X$ e $\lambda \in \mathbb{F}$.*

Proposição 3.2.1. *Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é aditiva, então f é $\mathbb{Q}$-linear. Além disso, se f é contínua, então $f(x) = f(1)x$ para cada $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Provemos, por indução, que

$$f(nx) = nf(x), \tag{3.5}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Claramente, a afirmação (3.5) é verdadeira se $n = 1$. Assuma que ela é verdadeira para n. Então,

$$\begin{aligned} f((n+1)x) &= f(nx) + f(x) \\ &= nf(x) + f(x) \\ &= (n+1)f(x). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Substituindo x por x/n em (3.5), obtemos

$$f(x) = f\left(n\frac{x}{n}\right) = nf\left(\frac{x}{n}\right),$$

ou seja,

$$f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n}f(x). \tag{3.7}$$

Segue de (3.5) e (3.7) que, para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$f\left(m\frac{x}{n}\right) = mf\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{m}{n}f(x). \tag{3.8}$$

Observe que

$$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0).$$

Então, subtraindo $f(0)$ de ambos os lados, segue que $f(0) = 0$. Ainda temos,

$$f(0) = f((-x) + x) = f(-x) + f(x). \tag{3.9}$$

Logo,

$$f(-x) = -f(x), \tag{3.10}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$.

Deste modo, se $m, n \in \mathbb{N}$, então segue de (3.8) e (3.10) que

$$f\left(-m\frac{x}{n}\right) = -f\left(m\frac{x}{n}\right) = -\frac{m}{n}f(x), \tag{3.11}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, f é $\mathbb{Q}$-linear.

Suponha que f é contínua. Dado $x \in \mathbb{R}$, existe uma sequência de números racionais $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergindo para x. Assim, usando a continuidade de f e o fato de que f é

$\mathbb{Q}$-linear, obtemos

$$\begin{aligned} f(x) = f(x1) = f\left(\lim_{n\to\infty} q_n 1\right) &= \lim_{n\to\infty} f(q_n 1) \\ = \lim_{n\to\infty} q_n f(1) = f(1) \lim_{n\to\infty} q_n &= f(1)x, \end{aligned} \tag{3.12}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. □

Note que uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ aditiva é contínua se, e somente se, tem a forma $f(x) = cx$, onde c é uma constante real.

O próximo exemplo mostra como obter uma função aditiva descontínua em $\mathbb{R}$ utilizando base de Hamel. (Veja [9, p. 33]).

Exemplo 3.2.1. *Seja $H = \{r_\alpha\}_{\alpha\in I}$ uma base de Hamel do espaço vetorial $\mathbb{R}$ sobre o corpo dos racionais $\mathbb{Q}$. Cada $x \in \mathbb{R}$ é escrito de maneira única como combinação linear de elementos de H,*

$$x = p_{\alpha_1} r_{\alpha_1} + p_{\alpha_2} r_{\alpha_2} + \ldots + p_{\alpha_k} r_{\alpha_k},$$

onde $p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, \ldots, p_{\alpha_k} \in \mathbb{Q}$. Defina $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = p_{\alpha_1} + p_{\alpha_2} + \ldots + p_{\alpha_k}.$$

Segue diretamente da definição que f é aditiva. Como $f(x) \in \mathbb{Q}$, para cada $x \in \mathbb{R}$, e todo intervalo não-degenerado com extremidades racionais contém números irracionais, segue do Teorema do Valor Intermediário que f não é contínua.

Proposição 3.2.2. *O gráfico de toda função aditiva $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que não é da forma $f(x) = cx$, para todo $x \in \mathbb{R}$, sendo c uma constante real, é denso em $\mathbb{R}^2$.*

Demonstração. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função aditiva que não é da forma $f(x) = cx$, para todo $x \in \mathbb{R}$, e o gráfico de f representado por

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}.$$

Escolha $x_1 \in \mathbb{R}$, com $x_1 \neq 0$. Como f não é da forma $f(x) = cx$, para qualquer constante $c \in \mathbb{R}$, existe $x_2 \in \mathbb{R}$, com $x_2 \neq 0$, tal que

$$\frac{f(x_1)}{x_1} \neq \frac{f(x_2)}{x_2}.$$

Assim, segue que

$$det \begin{pmatrix} x_1 & f(x_1) \\ x_2 & f(x_2) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Consequentemente, os vetores $\mathbf{p_1} := (x_1, f(x_1))$ e $\mathbf{p_2} := (x_2, f(x_2))$ são linearmente independentes e, assim, geram o $\mathbb{R}^2$. Seja $\mathbf{p}$ um vetor arbitrário no plano. Então, existem escalares $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\mathbf{p} = \beta_1 \mathbf{p_1} + \beta_2 \mathbf{p_2} \ .$$

Considere $\mathbb{R}^2$ munido da norma do máximo. Para $\epsilon > 0$ dado, como $\mathbb{Q}^2$ é denso em $\mathbb{R}^2$, existe $(q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2$ tal que

$$||(\beta_1, \beta_2) - (q_1, q_2)|| < \frac{\epsilon}{||\mathbf{p_1}|| + ||\mathbf{p_2}|| + 1},$$

ou seja,

$$\max\{|\beta_1 - q_1|, |\beta_2 - q_2|\} < \frac{\epsilon}{||\mathbf{p_1}|| + ||\mathbf{p_2}|| + 1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} ||\mathbf{p} - (q_1\mathbf{p_1} + q_2\mathbf{p_2})|| &\leq ||\mathbf{p} - (\beta_1\mathbf{p_1} + \beta_2\mathbf{p_2})|| + ||(\beta_1\mathbf{p_1} + \beta_2\mathbf{p_2}) - (q_1\mathbf{p_1} + q_2\mathbf{p_2})|| \\ &= 0 + ||(\beta_1\mathbf{p_1} + \beta_2\mathbf{p_2}) - (q_1\mathbf{p_1} + q_2\mathbf{p_2})|| \\ &= ||(\beta_1 - q_1)\mathbf{p_1} + (\beta_2 - q_2)\mathbf{p_2})|| \\ &\leq |\beta_1 - q_1|||\mathbf{p_1}|| + |\beta_2 - q_2|||\mathbf{p_2}|| \\ &< \frac{\epsilon}{||\mathbf{p_1}|| + ||\mathbf{p_2}|| + 1}(||\mathbf{p_1}|| + ||\mathbf{p_2}||) \\ &< \epsilon. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned}
q_1\mathbf{p_1} + q_2\mathbf{p_2} &= q_1(x_1, f(x_1)) + q_2(x_2, f(x_2)) \\
&= (q_1x_1 + q_2x_2, q_1f(x_1) + q_2f(x_2)) \\
&= (q_1x_1 + q_2x_2, f(q_1x_1) + f(q_2x_2)), \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

já que f é $\mathbb{Q}$-linear, pela Proposição 3.2.1. Desta forma,

$$G_{12} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = q_1x_1 + q_2x_2,\ y = f(x),\ q_1, q_2 \in \mathbb{Q}\}$$

é denso em $\mathbb{R}^2$ e como $G_{12} \subset G$ segue que

$$\mathbb{R}^2 = \overline{G_{12}} \subset \overline{G} \subset \mathbb{R}^2.$$

Logo, $\overline{G} = \mathbb{R}^2$, ou seja, G é denso em $\mathbb{R}^2$. □

Utilizando a Proposição 3.2.2 obtém-se um fenômeno patológico: o gráfico de toda função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ aditiva descontínua é denso em $\mathbb{R}^2$.

Teorema 3.2.1. *Seja X um espaço vetorial topológico real. O conjunto de todas as funções aditivas descontínuas em X, com valores reais, é lineável.*

Demonstração. Seja H uma base de Hamel do espaço vetorial $\mathbb{R}$ sobre o corpo dos racionais $\mathbb{Q}$. Sem perda de generalidade, assumiremos que todos os elementos de H são positivos. Recordemos que a cardinalidade de H é c. Dado um espaço vetorial topológico real X, vamos construir um espaço vetorial real de dimensão

$$\mu = \max[c, \dim(X)],$$

tal que cada elemento não nulo seja uma função aditiva descontínua de X em $\mathbb{R}$. Considere os seguintes conjuntos

$$\begin{aligned}
L &= \{f \in F(X, \mathbb{R}) :\ f \text{ é aditiva}\}, \\
L_c &= \{f \in F(X, \mathbb{R}) :\ f \text{ é aditiva e contínua}\}, \\
M &= \{f \in F(X, \mathbb{R}) :\ f \text{ é aditiva e descontínua}\}.
\end{aligned}$$

Observe que L é um espaço vetorial real e L_c é um subespaço vetorial de L. Seja E uma base de Hamel de X como um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e defina o conjunto

$$B = \{\gamma v : \gamma \in H; v \in E\} \ .$$

Então, B é uma base de Hamel de X sobre $\mathbb{Q}$ de cardinalidade μ. Desta forma, para cada $b \in B$, podemos definir a função $\tilde{f}_b : B \to \mathbb{Q}$, dada por

$$\tilde{f}_b(\xi) = \begin{cases} 1, \text{ se } \xi = b \\ 0, \text{ se } \xi \neq b. \end{cases}$$

A função $\tilde{f}_b$ pode ser estendida de forma linear para todo X. Essa extensão será denotada por f_b. Considere agora, o subespaço vetorial L_s de L dado por

$$L_s = \text{span}\{f_b : b \in B\}$$

e seja

$$F(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_{b_i}(x),$$

onde $k \in \mathbb{N}$, $\{\alpha_i\}_{i=1}^k \subset \mathbb{R}$ e $b_i = b_j$ se, e somente se, $i = j$. Suponha que $F = 0$. Então,

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_{b_i}(b_j) = \alpha_j, \quad j = 1, 2, 3, \ldots, k.$$

Deste modo, concluí-se que a família $\{f_b : b \in B\}$ é linearmente independente e, portanto, $\dim_{\mathbb{R}} L_s = \mu$, ou seja, infinita.

Mostraremos agora que $L_s \setminus \{0\} \subset M$. Para isso, basta mostrar a descontinuidade da função F quando não é identicamente nula. Neste caso, temos $\{\alpha_i\}_{i=1}^k \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Assuma F contínua. A restrição de F ao conjunto $\mathbb{R}b_1 = \{\theta b_1 : \theta \in \mathbb{R}\}$, denotada por $F|_{\mathbb{R}b_1}$, é uma função aditiva contínua. Além disso, $F|_{\mathbb{R}b_1}$ é $\mathbb{R} - linear$. De fato, dado $\beta \in \mathbb{R}$, existe uma sequência $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{Q}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \beta$. Assim,

$$\begin{aligned} F|_{\mathbb{R}b_1}(\beta b_1) &= F|_{\mathbb{R}b_1}\left(\lim_{n\to\infty} q_n b_1\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} F|_{\mathbb{R}b_1}(q_n b_1) \\ &= \lim_{n\to\infty} q_n F|_{\mathbb{R}b_1}(b_1) \\ &= \beta F|_{\mathbb{R}b_1}(b_1). \end{aligned} \tag{3.15}$$

A função $F|_{\mathbb{R}b_1}$ se anula apenas no vetor nulo, pois se $F|_{\mathbb{R}b_1}(\theta b_1) = 0$, com $\theta \in \mathbb{R}$, então

$$0 = \theta F|_{\mathbb{R}b_1}(b_1) = \theta \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_{b_i}(b_1) = \theta\alpha_1. \tag{3.16}$$

Como $\alpha_1 \neq 0$, temos $\theta = 0$. Por outro lado, existem $v \in E$ e $\gamma_1 \in H$ tais que $b_1 = \gamma_1 v$ e assim $Hv \subset \mathbb{R}b_1$, visto que

$$\gamma v = \frac{\gamma}{\gamma_1}\gamma_1 v = \frac{\gamma}{\gamma_1} b_1 \in \mathbb{R}b_1, \quad \gamma \in H.$$

Assim, considerando o conjunto infinito $Hv\backslash\{b_i\}_{i=1}^{k}$ temos que $F|_{\mathbb{R}b_1}$ se anula em cada elemento deste conjunto. Contradição, pois $F|_{\mathbb{R}b_1}$ se anula somente no vetor nulo. Portanto, F é descontínua.

Finalmente, uma vez que, $L_s \subset M \cup \{0\}$ e $\dim_{\mathbb{R}} L_s = \infty$, o conjunto M de todas as funções aditivas descontínuas em X, com valores reais, é lineável. $\square$

Observação 3.2.1. *Lembre-se que pela Proposição 1.2.5, se X é um espaço vetorial normado de dimensão infinita sobre $\mathbb{R}$, então existem funções $\mathbb{R}$-lineares $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ descontínuas.*

Teorema 3.2.2. *Seja X um espaço normado real de dimensão infinita. O conjunto de todas as funções $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$-lineares descontínuas é lineável.*

Demonstração. Seja X um espaço normado real de dimensão infinita. Considere um conjunto infinito enumerável $B = \{v_j\}_{j=0}^{\infty}$ linearmente independente contido na esfera unitária S_X de X. Deste modo, para cada $i \in \mathbb{N}$, com $i \geq 2$, defina a função $\tilde{f}_i : B \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{f}_i(v_j) = i^j.$$

A função $\tilde{f}_i$ pode ser estendida de forma linear para todo X. Essa extensão será denotada por f_i. Considere agora, o subespaço vetorial V dado por

$$V = \text{span}\{f_i : i \in \mathbb{N}, i \geq 2\}$$

e seja

$$F(x) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j f_{i_j}(x),$$

onde $k \in \mathbb{N}$, $\{\alpha_j\}_{j=1}^k \subset \mathbb{R}$ e $i_1 > i_2 > \ldots > i_k \geq 2$. Provaremos que $\dim_{\mathbb{R}} V = \infty$. Assuma que $F = 0$. Se $x = v_m$, $m = 0, \ldots, k-1$, então

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^{k} \alpha_j f_{i_j}(v_0) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j i_j^0 \\ &= \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k, \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^{k} \alpha_j f_{i_j}(v_1) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j i_j^1 \\ &= \alpha_1 i_1^1 + \alpha_2 i_2^1 + \ldots + \alpha_k i_k^1, \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^{k} \alpha_j f_{i_j}(v_2) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j i_j^2 \\ &= \alpha_1 i_1^2 + \alpha_2 i_2^2 + \ldots + \alpha_k i_k^2, \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^{k} \alpha_j f_{i_j}(v_{k-1}) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j i_j^{k-1} \\ &= \alpha_1 i_1^{k-1} + \alpha_2 i_2^{k-1} + \ldots + \alpha_k i_k^{k-1}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Desta forma, construímos o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_k \\ i_1^2 & i_2^2 & i_3^2 & \dots & i_k^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ i_1^{k-1} & i_2^{k-1} & i_3^{k-1} & \dots & i_k^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Devido a Proposição 1.2.6, segue que a matriz do sistema de equações é não-singular e, portanto, temos que $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$. Assim, $\dim_{\mathbb{R}} V = \infty$.

Finalmente, provaremos que se $F \neq 0$, então F é descontínua. Para todo inteiro não-negativo j, temos que

$$\begin{aligned} |F(v_j)| &= |\alpha_1 i_1^j + \ldots + \alpha_k i_k^j| \\ &\geq |\alpha_1| i_1^j - \ldots - |\alpha_k| i_k^j \\ &= \underbrace{\frac{|\alpha_1| i_1^j}{k-1} + \ldots + \frac{|\alpha_1| i_1^j}{k-1}}_{k-1\, vezes} - (|\alpha_2| i_2^j + |\alpha_3| i_3^j + \ldots + |\alpha_k| i_k^j) \\ &= \frac{|\alpha_1| i_1^j}{k-1} - |\alpha_2| i_2^j + \ldots + \frac{|\alpha_1| i_1^j}{k-1} - |\alpha_k| i_k^j. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Dado que $i_1 > i_h$, para $h = 2, \ldots, k$ obtemos

$$\lim_{j\to\infty} \frac{|\alpha_1| i_1^j}{k-1} - |\alpha_h| i_h^j = \lim_{j\to\infty} i_h^j \left(\frac{|\alpha_1|}{k-1} \left(\frac{i_1}{i_h}\right)^j - |\alpha_h| \right) = \infty,$$

para $h = 2, \ldots, k$, ou seja, a função linear F não é limitada. Portanto, não pode ser contínua. □

3.3 Funções que possuem um número finito de pontos de continuidade

Teorema 3.3.1. *O conjunto de todas as funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que tem um número finito de pontos de continuidade é lineável.*

Demonstração. Para cada $i \in \mathbb{N}$ defina a função

$$f_i(x) = \begin{cases} x^i, \text{ se } x \in \mathbb{Q} \\ -x^i, \text{ se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Considere o espaço vetorial V dado por

$$V = \operatorname{span}\{f_i : i \in \mathbb{N}\}$$

e seja

$$F(x) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j f_{i_j}(x),$$

onde $k \in \mathbb{N}$, $\{\alpha_j\}_{j=1}^k \subset \mathbb{R}$ e $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$. Suponha que $F = 0$. Então, através da avaliação de F em $1, 2, \ldots, 2^{k-1}$, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= F(1) \\ &= \alpha_1 f_{i_1}(1) + \alpha_2 f_{i_2}(1) + \ldots + \alpha_k f_{i_k}(1) \\ &= \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k, \end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned} 0 &= F(2) \\ &= \alpha_1 f_{i_1}(2) + \alpha_2 f_{i_2}(2) + \ldots + \alpha_k f_{i_k}(2) \\ &= \alpha_1 2^{i_1} + \alpha_2 2^{i_2} + \ldots + \alpha_k 2^{i_k}, \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned} 0 &= F(2^2) \\ &= \alpha_1 f_{i_1}(2^2) + \alpha_2 f_{i_2}(2^2) + \ldots + \alpha_k f_{i_k}(2^2) \\ &= \alpha_1 (2^2)^{i_1} + \alpha_2 (2^2)^{i_2} + \ldots + \alpha_k (2^2)^{i_k}, \end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} 0 &= F(2^{k-1}) \\ &= \alpha_1 f_{i_1}(2^{k-1}) + \alpha_2 f_{i_2}(2^{k-1}) + \ldots + \alpha_k f_{i_k}(2^{k-1}) \\ &= \alpha_1 (2^{k-1})^{i_1} + \alpha_2 (2^{k-1})^{i_2} + \ldots + \alpha_k (2^{k-1})^{i_k}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Desta forma, construímos o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2^{i_1} & 2^{i_2} & 2^{i_3} & \dots & 2^{i_k} \\ (2^{i_1})^2 & (2^{i_2})^2 & (2^{i_3})^2 & \dots & (2^{i_k})^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (2^{i_1})^{k-1} & (2^{i_2})^{k-1} & (2^{i_3})^{k-1} & \dots & (2^{i_k})^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Devido a Proposição 1.2.6, segue que a matriz do sistema de equações é não-singular e, portanto, temos que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$. Deste modo, $\dim_{\mathbb{R}} V = \infty$.

Agora temos que verificar que se $F \neq 0$, então F possui um número finito de pontos de continuidade. Note que F pode ser escrita como

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x),$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathbb{R}$. Sem perda de generalidade podemos supor que, pelo menos um dos $\alpha_i\,'s$ não é igual a zero. Assim, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, temos que

$$F(x) = \begin{cases} \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots + \alpha_n x^n, \text{ se } x \in \mathbb{Q} \\ -(\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots + \alpha_n x^n), \text{ se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Desta forma, se F é contínua em x, então $\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots + \alpha_n x^n = 0$. De fato, se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ então existe uma sequência $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{Q}$ que converge para x. Deste modo,

$$\lim_{k\to\infty} F(p_k) = \lim_{k\to\infty} (\alpha_1 p_k + \alpha_2 p_k^2 + \dots + \alpha_n p_k^n) = (\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots + \alpha_n x^n) = -F(x)$$

Pela continuidade da F segue que $\lim\limits_{k\to\infty} F(p_k) = F(x)$ e devido a unicidade do limite, tem-se $-F(x) = F(x)$ e assim, $F(x) = 0$. Para $x \in \mathbb{Q}$, tomando uma sequência $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ que converge para x, o processo é análogo.

Agora, se $x_1, x_2, \dots, x_n$ são n pontos de continuidade de F, distintos e não-nulos, então temos o seguinte sistema linear de equações

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^n \\ x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^n \\ x_3 & x_3^2 & x_3^3 & \dots & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que esta matriz também é não-singular, pois o seu determinante é a multiplicação de $x_1, x_2, \dots, x_n$ pelo determinante da matriz de Vandermonde, ou seja,

$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)\right) \neq 0 \ .$$

Portanto, temos que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Contradição, pois pelo menos um dos escalares $\alpha_i{}'s$ é diferente de zero. Como consequência, o número de pontos de continuidade da função F não nulos é inferior a n. Como F também é contínua em 0, o número de pontos de continuidade da função F é menor ou igual a n. Logo, o conjunto de todas as funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que tem um número finito de pontos de continuidade é lineável. □

3.4 Funções cuja derivada não é limitada em um intervalo fechado

Teorema 3.4.1. *O conjunto de todas as funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cuja derivada é ilimitada em um intervalo fechado é lineável.*

Demonstração. Seja M o conjunto de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que tem derivada ilimitada num intervalo fechado. Seja P o conjunto de todos os números primos e considere as funções $f_p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $p \in P$, definidas por

$$f_p(x) = \begin{cases} x^2 \text{sen} \dfrac{1}{px^2}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

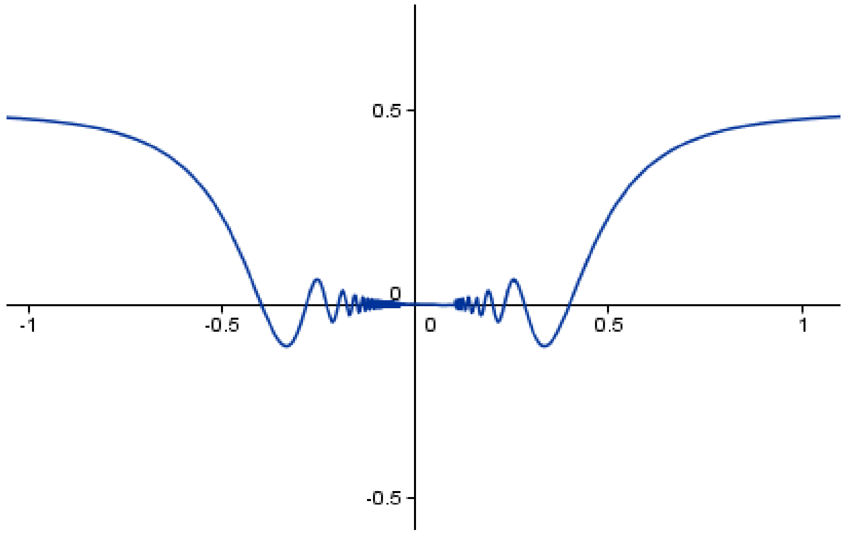

Figura 3.1: Gráfico da função f_2.

As derivadas das funções f_p são dadas por

$$f_p'(x) = \begin{cases} 2x\,\mathrm{sen}\dfrac{1}{px^2} - \dfrac{2}{px}\cos\dfrac{1}{px^2}, & \text{se } x \neq 0 \\[2ex] 0, & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

que são ilimitadas no intervalo $[-1,1]$, para qualquer $p \in P$. Com efeito, considere a sequência

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{2np\pi}}$$

que converge para zero. Temos

$$\lim_{n\to\infty} f'_p(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{2np\pi}}\mathrm{sen}\frac{2np\pi}{p} - \frac{2\sqrt{2np\pi}}{p}\cos\frac{2np\pi}{p} = -\infty.$$

Portanto, são ilimitadas no intervalo $[-1,1]$. Este fato pode ser observado, por exemplo, no gráfico a seguir quando $p = 2$.

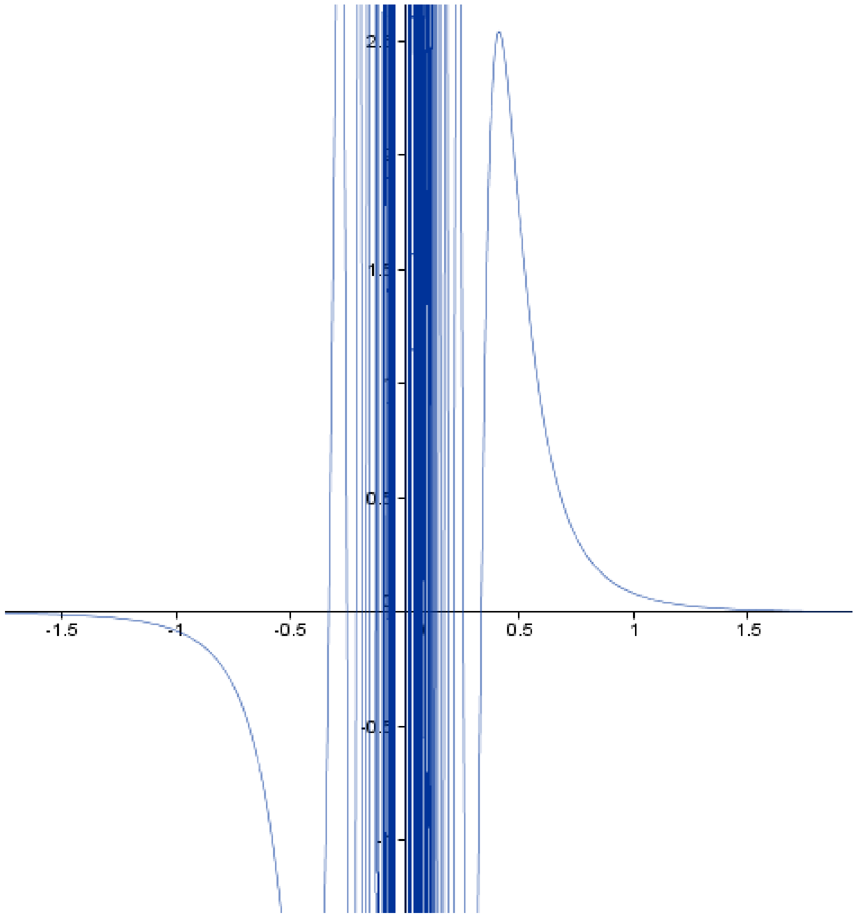

Figura 3.2: Gráfico da função f_2'.

Agora, considere o espaço vetorial dado por

$$\mathrm{V} = \mathrm{span}\ \{f_p : p \in P\}.$$

Provaremos que o conjunto $\{f_p : p \in P\}$ é linearmente independente. Seja

$$F(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_{p_i}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

onde $k \in \mathbb{N}$, $\{\alpha_i\}_{i=1}^k \subset \mathbb{R}$ e $\{p_i\}_{i=1}^k \subset P$ com $p_i = p_j$ se, e somente se, $i = j$. Suponha que $F = 0$ e seja

$$x_j = \left(\frac{1}{p_1 p_2 \dots p_{j-1} p_{j+1} \dots p_k \pi}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Assim, para cada $j = 1, 2, \ldots, k$, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= F(x_j) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_j^2 \mathrm{sen}\left(\frac{p_1 p_2 \ldots p_{j-1} p_{j+1} \ldots p_k \pi}{p_i}\right) \\ &= \alpha_j x_j^2 \mathrm{sen}\left(\frac{p_1 p_2 \ldots p_{j-1} p_{j+1} \ldots p_k \pi}{p_j}\right) \\ &= \alpha_j x_j^2 \mathrm{sen}(q_j \pi). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Como $q_j = \left(\dfrac{p_1 p_2 \ldots p_{j-1} p_{j+1} \ldots p_k}{p_j}\right) \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, para todo $j = 1, 2, \ldots, k$, tem-se que $\alpha_j = 0$, uma vez que $x_j^2 \mathrm{sen}(q_j \pi) \neq 0$. Deste modo, a família $\{f_p : p \in P\}$ é linearmente independente e $\dim_{\mathbb{R}} V = \infty$.

Agora, mostraremos que $V \setminus \{0\} \subset M$. Seja $F \neq 0$ com $\{\alpha_i\}_{i=1}^{k} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Note que a família $\left\{\dfrac{1}{px} \cos \dfrac{1}{px^2} : p \in P\right\}$ é linearmente independente. De fato, considere

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_i \frac{1}{p_i x} \cos \frac{1}{p_i x^2} = 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Para mostrar que $\beta_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, basta escolher valores adequados de $x \in \mathbb{R}$. Se $p_i \neq 2$, $i = 1, 2, \ldots, k$, tome

$$x_j = \left(\frac{1}{p_1 p_2 \ldots p_{j-1} p_{j+1} \ldots p_k \frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad j = 1, 2, \ldots, k\ .$$

Se $p_l = 2$ para algum $l \in \{1, 2, \ldots, k\}$, tome

$$x_l = \left(\frac{1}{p_1 p_2 \ldots p_{l-1} p_{l+1} \ldots p_k \frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

e

$$x_j = \left(\frac{2}{p_1 p_2 \ldots p_{j-1} p_{j+1} \ldots p_k \frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{se } j \neq l.$$

Temos

$$F'(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \left[2x\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{p_i x^2}\right) - \frac{2}{p_i x}\cos\left(\frac{1}{p_i x^2}\right)\right], & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Como $\left\{ \dfrac{1}{px}\cos\left(\dfrac{1}{px^2}\right) \;:\; p \in P \right\}$ é linearmente independente, o fator $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{2\alpha_i}{p_i x}\cos\left(\frac{1}{p_i x^2}\right)$ não é nulo. Suponha, por absurdo, que F' é limitada em $[-1,1]$, isto é, existe $c > 0$ tal que

$$|F'(x)| \leq c, \quad \text{para todo } x \in [-1,1].$$

Então,

$$0 \leq \lim_{x \to 0} |xF'(x)| \leq \lim_{x \to 0} c|x| = 0.$$

Logo,

$$\lim_{x \to 0} xF'(x) = 0.$$

Temos

$$xF'(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \left[2x^2\mathrm{sen}\left(\frac{1}{p_i x^2}\right) - \frac{2}{p_i}\cos\left(\frac{1}{p_i x^2}\right)\right], & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Como $\displaystyle\lim_{x \to 0} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \left[2x^2\mathrm{sen}\left(\frac{1}{p_i x^2}\right)\right] = 0$ e $\displaystyle\lim_{x \to 0} xF'(x) = 0$, segue que

$$\lim_{x \to 0} \sum_{i=1}^{k} \frac{2\alpha_i}{p_i}\cos\left(\frac{1}{p_i x^2}\right) = 0,$$

que é uma contradição pois tal limite não existe. De fato, considere a sequência

$$x_n = (p_2 p_3 \ldots p_k)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^{-\frac{1}{2}}, \text{ para } n \in \mathbb{N}.$$

Temos $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Além disso,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} \frac{2\alpha_i}{p_i}\cos\left(\frac{1}{p_i x_n^2}\right) &= \sum_{i=1}^{k} \frac{2\alpha_i}{p_i}\cos\left[\frac{p_2p_3\ldots p_k}{p_i}\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\right] \\ &= \frac{2\alpha_1}{p_1}\cos\left[\frac{p_2p_3\ldots p_k}{p_1}\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\right] \\ &= \frac{2\alpha_1}{p_1}\cos\left[q\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\right], \end{aligned} \tag{3.27}$$

onde $q = \dfrac{p_2p_3\ldots p_k}{p_1} \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$. Portanto,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k} \frac{2\alpha_i}{p_i}\cos\left(\frac{1}{p_i x_n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2\alpha_1}{p_1}\cos\left[q\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\right],$$

que não existe. □

Recentemente, García-Pacheco et al. [8] mostraram que o conjunto das funções reais diferenciáveis em $\mathbb{R}$ com derivada descontínua na origem é lineável.

3.5 Funções everywhere sobrejetoras que são nulas em quase toda parte

A próxima definição encontra-se em [7].

Definição 3.5.1. *Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita everywhere sobrejetora, se para cada intervalo não trivial (a, b) tem-se $f((a, b)) = \mathbb{R}$.*

A existência desse tipo de função foi observada pela primeira vez por Lebesgue em [16]. Veja também uma referência moderna [9].

A seguir, apresentaremos uma função everywhere sobrejetora e nula em quase toda parte que foi extraída da referência [6].

Exemplo 3.5.1. *Seja $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a coleção de todos os intervalos abertos cujos extremos são números racionais. O intervalo I_1 contém um conjunto do tipo Cantor, C_1. Note que $I_2 \setminus C_1$ também contém um conjunto do tipo Cantor, C_2. Temos que $I_3 \setminus (C_1 \cup C_2)$ contém* *um conjunto do tipo Cantor, C_3. Indutivamente, construímos uma família de conjuntos do tipo Cantor disjuntos $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de tal forma que para cada $n \in \mathbb{N}$, temos*

$$I_n \backslash \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} C_k \right) \supset C_n.$$

Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, tome uma bijeção $\phi_n : C_n \longrightarrow \mathbb{R}$ e defina $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} \phi_n(x), & \text{se } x \in C_n \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Observe que f é uma função everywhere sobrejetora. De fato, considere um intervalo aberto arbitrário I não trivial em $\mathbb{R}$. Logo, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $I_k \subset I$. Assim, uma vez que, $C_k \subset I_k \subset I$, temos que

$$f(I) \supset f(I_k) \supset f(C_k) = \phi_k(C_k) = \mathbb{R}.$$

Portanto, f é uma função everywhere sobrejetora. Além disso, f é nula em quase toda parte, pois

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) = 0,$$

sendo μ a medida de Lebesgue.

Teorema 3.5.1. *O conjunto das funções everywhere sobrejetoras que são nulas em quase toda parte é lineável.*

Demonstração. Seja M o conjunto das funções everywhere sobrejetoras que são nulas em quase toda parte. Considere o seguinte espaço vetorial

$$V = \operatorname{span}\{f^{2k+1} : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\},$$

onde $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função fixa em M. Uma vez que f é everywhere sobrejetora tem-se que o conjunto $\{f^{2k+1} : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ é uma família linearmente independente. De fato, como $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função sobrejetora, existem $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x_j) = 2^{j-1}, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Logo, se

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_i f^{2j_i+1}(x) = 0, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

onde $\{\beta_i\}_{i=1}^{k} \subset \mathbb{R}$ e $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$, então tomando $x = x_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$, obtemos o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 2^{2j_1+1} & 2^{2j_2+1} & 2^{2j_3+1} & \ldots & 2^{2j_k+1} \\ (2^{2j_1+1})^2 & (2^{2j_2+1})^2 & (2^{2j_3+1})^2 & \ldots & (2^{2j_k+1})^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (2^{2j_1+1})^{k-1} & (2^{2j_2+1})^{k-1} & (2^{2j_3+1})^{k-1} & \ldots & (2^{2j_k+1})^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

cuja matriz dos coeficientes é não-singular, devido a Proposição 1.2.6. Portanto, temos que $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k = 0$. Logo, $\{f^{2k+1} : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ é uma família linearmente independente. Assim, $\dim_{\mathbb{R}} V = \infty$.

Resta mostrar que $V \setminus \{0\} \subset M$. Seja

$$F(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f^{2j_i+1}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

onde $k \in \mathbb{N}$, $\{\alpha_i\}_{i=1}^{k} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$. Primeiramente, será mostrado que F é everywhere sobrejetora. Para isso, considere a equação abaixo, com s fixado em $\mathbb{R}$,

$$P(x) := \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^{2j_i+1} = s.$$

Uma vez que o polinômio P possui grau ímpar, existe pelo menos uma solução real para a equação acima devido a sobrejeção de P. Esta solução será denotada por γ. Por outro lado, dado que $f \in M$, temos que para qualquer intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$, existe uma constante $\xi \in (a, b)$ tal que $f(\xi) = \gamma$, pois f é everywhere sobrejetora. Consequentemente, segue que

$$
\begin{aligned}
F(\xi) &= \sum_{i=0}^{k} \alpha_i f^{2j_i+1}(\xi) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \gamma^{2j_i+1} \\
&= s, \qquad (3.28)
\end{aligned}
$$

o que nos mostra que F é everywhere sobrejetora. Agora, para ver que F é também nula em quase toda parte, considere os conjuntos

$$
\begin{aligned}
A &= \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}, \\
B &= \{x \in \mathbb{R} : F(x) = 0\}.
\end{aligned}
$$

Note que $A \subset B$ e assim, $\mathbb{R} \setminus B \subset \mathbb{R} \setminus A$. Além disso, $\mu(\mathbb{R} \setminus A) = 0$, pois f é nula em quase toda parte. Então,

$$0 \leq \mu(\mathbb{R} \setminus B) \leq \mu(\mathbb{R} \setminus A) = 0.$$

Logo, $\mu(\mathbb{R} \setminus B) = 0$. □

O próximo resultado encontra-se em [6, p. 3868].

Teorema 3.5.2. *O conjunto das funções injetoras de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ não é lineável.*

Demonstração. Seja M o conjunto das funções injetoras de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Seja V um espaço vetorial tal que $V \setminus \{0\} \subset M$. Provaremos que $\dim_{\mathbb{R}} V = 1$. Suponhamos que $\dim_{\mathbb{R}} V > 1$. Então, podemos tomar duas funções injetoras f e g em V, linearmente independentes. Tome $x \neq y$ e $\alpha = \dfrac{f(x) - f(y)}{g(y) - g(x)} \in \mathbb{R}$. Agora, considere a função h dada por

$$h = f + \alpha g.$$

Como V é espaço vetorial, temos que $h \in V$. Além disso, $h \neq 0$ pois f e g são linearmente independentes. Note que

$$
\begin{aligned}
h(x) &= f(x) + \alpha g(x) \\
&= f(x) + \frac{f(x) - f(y)}{g(y) - g(x)} g(x) \\
&= \frac{f(x)g(y) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(y)g(x)}{g(y) - g(x)} \\
&= \frac{f(x)g(y) - f(y)g(x)}{g(y) - g(x)}. \qquad (3.29)
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
h(y) &= f(y) + \alpha g(y) \\
&= f(y) + \frac{f(x) - f(y)}{g(y) - g(x)} g(y) \\
&= \frac{f(y)g(y) - f(y)g(x) + f(x)g(y) - f(y).g(y)}{g(y) - g(x)} \\
&= \frac{f(x)g(y) - f(y)g(x)}{g(y) - g(x)}. \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

Logo, para $x \neq y$ temos $h(x) = h(y)$, ou seja, h não é injetora. Contradição. Portanto, $\dim_{\mathbb{R}} V = 1$. Logo, M não é lineável. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] R. M. Aron, L. B. Bernal-Gonzalez, D. M. Pellegrino, J. B. S. Sepulveda, *Lineability: The Search for Linearity in Mathematics*, Monographs and Research Notes in Mathematics, Chapman e Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2015.

[2] F. Bayart, *Topological and algebraic genericity of divergence and universality*, Studia Math. 167 (2005), 161-181.

[3] J. Bell, *The Banach algebra of functions of bounded variation and the pointwise Helly selection theorem*, Department of Mathematics, University of Toronto, 2015.

[4] L. Bernal-González, *Dense-lineability in spaces of continuous functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008), 3163-3169.

[5] G. Botelho, D. Pellegrino, E. Teixeira, *Fundamentos de Análise Funcional*, SBM, Rio de Janeiro, 2015.

[6] J. L. Gámez-Merino et al, *Sierpinski-Zygmund functions and other problems on lineability*, J. Math. Anal. Appl. 138 (2010), 3863-3876.

[7] F. J. García-Pacheco, N. Palmbergb, J. B. Seoane-Sepúlveda, *Lineability and algebrability of pathological phenomena in analysis*, J. Math. Anal. Appl. 326 (2007), 929-939.

[8] F. J. García-Pacheco, C. Pérez-Eslava, J. B. Seoane-Sepúlveda, *Moduleability, algebraic structures, and nonlinear properties*, J. Math. Anal. Appl. 370 (2010), 159-167.

[9] B. R. Gelbaum, J.M.H. Olmsted, *Counterexamples in Analysis*, Dover Publications, New York, 2003.

[10] V. I. Gurariy, *Subspaces and bases in spaces of continuous functions* (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR 167 (1966), 971-973.

[11] V. I. Gurariy, *Linear spaces composed of everywhere nondifferentiable functions*, C.R. Acad. Bulgare Sci. 44 (1991), 13-16.

[12] V. I. Gurariy, L. Quarta, *On lineability of sets of continuous functions*, J. Math. Anal. Appl. 294 (2004), 62-72.

[13] G. H. Hardy, *Weierstrass non-diferentiable function*, Trans. Amer. Math. Soc. 17 (1916), 301-325.

[14] C. Heil, *A basis theory primer*, Springer, Berlin, 2006.

[15] F. Jones, *Lebesgue integration on Euclidean space*, Jones and Bartlett, Massachusetts, 2001.

[16] H. Lebesgue, *Leçons sur l' intégration*, Gauthier-Willars, 1904.

[17] M. Lerch, *Ueber die Nichtdifferentiirbarkeit bewisser Funktionen*, J. Reine Angew. Math., 103 (1888), 126-138.

[18] G. M. Phillips, *Interpolation and approximation by polynomials*, Springer, New York, 2003.

[19] L. Rodríguez-Piazza, *Every separable Banach space is isometric to a space of continuous nowhere differentiable functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995), 3649-3654.

[20] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, 2nd ed., New York, 1964.

[21] W. Rudin, *Functional Analisis*, McGraw-Hill, New York, 1973.

[22] A. C. M. Van Rooij, W.H. Schikhoff, *A Second Course on Real Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[23] I. F. Wilde, *Functional Analysis - Topological Vector Spaces*, Mathematics Department, King's College, London, 2003.