

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

TESE DE DOUTORADO

**Estudo do Posicionamento de Atuadores
Piezelétricos em Estruturas Inteligentes**

Autor: **Aguinaldo Soares de Oliveira**

Orientador: **Prof. Dr. José Juliano de Lima Junior**

09/2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

TESE DE DOUTORADO

**Estudo do Posicionamento de Atuadores
Piezelétricos em Estruturas Inteligentes**

Autor: **Aguinaldo Soares de Oliveira**

Orientador: **Prof. Dr. José Juliano de Lima Junior**

Curso: **Engenharia Mecânica**

Área de Concentração: **Projeto e Fabricação**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica como parte dos requisitos para obtenção do título de doutor em Engenharia Mecânica

Itajubá, 2008, MG – Brasil

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
INSTITUTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

TESE DE DOUTORADO

**Estudo do Posicionamento de Atuadores
Piezelétricos em Estruturas Inteligentes**

Autor: Aginaldo Soares de Oliveira

Orientador: Prof. Dr. José Juliano de Lima Junior

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr. Pablo Siqueira Meirelles
DMC/FEM/UNICAMP

Prof. Dr. Fernando José de Oliveira Moreira
SISTEMAS/SJK/EMBRAER

Prof. Dr. José Celio Dias
IEM/UNIFEI

Prof. Dr. André Garcia Chiarello
IEM/UNIFEI

Prof. Dr. José Juliano de Lima Junior, Orientador.
IEM/UNIFEI

Itajubá, 26 de Setembro de 2008.

Dedicatória

A minha esposa Elizabete e a minha filha Lívia.

Agradecimentos

Ao Orientador, Prof. Dr. José Juliano de Lima Junior, por sua orientação.

A CAPES, através do programa de bolsas, pelo apoio financeiro.

Ao programa de pós-graduação da UNIFEI pela oportunidade de desenvolver o meu doutoramento.

A FAPEMIG pelo suporte financeiro através do projeto TEC-1670/05.

A todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram com o presente trabalho.

“O caminho do progresso não é nem fácil e nem rápido”
(Marie Curie)

Resumo

Oliveira, A. S. (2008), *Estudo do Posicionamento de Atuadores Piezelétricos em Estruturas Inteligentes*, Tese de doutorado, Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá, 193 p.

O estudo do posicionamento de atuadores e sensores piezelétricos é uma parte fundamental no projeto de estruturas inteligentes. O mau posicionamento de atuadores e sensores piezelétricos pode causar a perda da controlabilidade do sistema. O propósito desta tese é apresentar uma técnica de posicionamento para atuadores piezelétricos em uma estrutura flexível, usando medidas de controlabilidade modal e espacial obtidas através do método de elementos finitos e valores singulares. A técnica de decomposição em valores singulares da matriz de controle é utilizada para se obter um índice que quantifica a controlabilidade do sistema, de maneira a se posicionar os atuadores piezelétricos, onde o sistema se torna mais controlável e observável, minimizando o esforço do controlador. É desenvolvido um código computacional baseado na técnica combinacional, que simula as posições possíveis para o elemento piezelétrico na estrutura de análise. Os resultados das simulações são comparados aos resultados analíticos de maneira a se verificar o desempenho deste código computacional e validação da técnica proposta.

Palavras Chaves

Posicionamento de atuadores piezelétricos, método de elementos finitos, análise de valores singulares, estruturas inteligentes.

Abstract

Oliveira, A. S. (2008), *Study of Piezoelectric Actuator Placement in Intelligent Structures*, PhD. Thesis, Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá, 193 p.

The evaluation of actuators and sensors placement is a fundamental part in an intelligent structure design. The actuators and sensors misplacement could cause lack of controllability system. The purpose of this thesis is to present a method to optimize the piezoelectric actuators and sensors placement, in a flexible structure. It uses modal and spatial controllability measurements to obtain through finite element method end singular values. The singular values decomposition technique of control matrix was utilized with the propose of to obtain an index that quantified the system controllability, such that the piezoelectric is positioned where the system is more controlled and observables. It was developed, a computer code according to the combinatorial method approach which simulated the possible places to put the piezoelectric elements in flexible structures. The simulation results are compared with the analytical results to check the computer code performance and to validate the propose technical.

Key Words

Actuators placement, finite element method, singular analysis value, intelligent structures.

SUMÁRIO

Lista de Figuras	xiii
Lista de Tabelas	xviii
Simbologia	xx
Letras Latinas	xx
Letras Gregas	xxiii
Sobrescrito	xxiv
Subscrito	xxiv
Abreviaturas	xxv
Siglas	xxv
Capítulo 1	1
INTRODUÇÃO	1
1.1 REVISÃO DA LITERATURA	1
1.1.1 Posicionamento de Sensores e Atuadores Piezelétricos	3
1.1.2 Modelagem de Estruturas Inteligentes	5
1.1.3 Projeto do Controlador	7
1.2 MOTIVAÇÃO DO TRABALHO	8
1.3 OBJETIVOS DA TESE	9
1.4 CONTEÚDO	9
Capítulo 2	11
MODELAGEM DE VIGAS COM ATUADORES E SENSORES PIEZELÉTRICOS INCORPORADOS	11
2.1 MODELAGEM DE VIGAS SEM ELEMENTOS PIEZELÉTRICOS INCORPORADOS	11
2.1.1 Solução Analítica para uma Viga Biapoiada	16
2.1.2 Solução Analítica para uma Viga em Balanço	19
2.2 MODELAGEM DE VIGAS COM ELEMENTOS PIEZELÉTRICOS INCORPORADOS	21

	x
2.3 EQUAÇÃO DO SENSOR PIEZELÉTRICO INCORPORADO EM UMA VIGA -----	25
Capítulo 3 _____	28
FORMULAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS PARA PROBLEMAS DE PIEZELETRICIDADE _____	28
3.1 FUNDAMENTOS DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA O MODELO DE VIGAS TIMOSHENKO -----	29
3.2 ELEMENTOS FINITOS PARA MEIOS PIEZELÉTRICOS -----	37
Capítulo 4 _____	42
POSICIONAMENTO DE ELEMENTOS PIEZELÉTRICOS EM ESTRUTURAS FLEXÍVEIS _____	42
4.1 POSICIONAMENTO EM VIGAS-----	43
4.1.1 Solução Analítica-----	43
4.1.2 Solução por Elementos Finitos -----	48
4.2 CRITÉRIO DE POSICIONAMENTO -----	51
4.3 O PROGRAMA COMPUTACIONAL DESENVOLVIDO -----	55
Capítulo 5 _____	60
VALIDAÇÃO DOS MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS _____	60
5.1 MODELO DE VIGA TIMOSHENKO SEM O ELEMENTO PIEZELÉTRICO -----	62
5.1.1 Viga Biapojada -----	62
5.1.2 Viga Livre-Livre -----	65
5.1.3 Viga Engastada-Engastada-----	67
5.1.4 Viga em Balanço -----	69
5.2 MODELO DE VIGA DE TIMOSHENKO COM O ELEMENTO PIEZELÉTRICO INCORPORADO-----	71
5.2.1 Simulação do caso 1 -----	71
5.2.2 Simulação do caso 2 -----	74
Capítulo 6 _____	78
DETERMINAÇÃO DO POSICIONAMENTO ÓTIMO DOS ATUADORES PIEZELÉTRICOS _____	78
6.1 CASO 1 : VIGA BIAPOIADA-----	79
6.1.1 Posições Ótimas para um Atuador sem Considerar o Efeito da Rigidez e Massa do Atuador Piezelétrico -----	79

6.1.2 Posições Ótimas para um Atuador Considerando-se o Efeito da Rigidez e da Massa do Atuador Piezelétrico -----	81
6.1.3 Posições Ótimas Considerando Mais de Um atuador Piezelétrico -----	85
6.1.4 Posicionamento ótimo para Mais de um Modo de Vibrar -----	87
6.2 CASO 2 : VIGA EM BALANÇO -----	90
6.2.1 Posições Ótimas para um Atuador sem Considerar o Efeito da Rigidez e Massa do Atuador Piezelétrico -----	90
6.2.2 Posições Ótimas para um Atuador Considerando o Efeito da Rigidez e da Massa do Atuador Piezelétrico -----	91
6.2.3 Posições Ótimas Considerando Mais de Um atuador Piezelétrico -----	96
6.2.4 Posicionamento Ótimo para Mais de um Modo de Vibrar Considerando Mais de Um atuador Piezelétrico sem Considerar a Massa e Rigidez do Atuador Piezelétrico -----	98
6.2.5 Posicionamento Ótimo para Mais de um Modo de Vibrar. Considerando Mais de Um Atuador Piezelétrico e o Efeito da influência da Massa e Rigidez do Atuador Piezelétrico	100
6.3 CASO 3 : VIGA BI-ENGASTADA -----	103
6.3.1 Posições Ótimas para um Atuador Piezelétrico -----	103
6.3.2 Posições Ótimas para um Atuador Considerando o Efeito da Rigidez e da Massa do Atuador Piezelétrico -----	105
6.4 CASO 4 : VIGA LIVRE-LIVRE -----	111
6.4.1 Posições Ótimas para um Atuador Piezelétrico -----	111
6.4.2 Posições Ótimas para um Atuador Considerando o Efeito da Rigidez e da Massa do Atuador Piezelétrico -----	113
6.5 CASO 5 : VIGA ENGASTADA-APOIADA -----	116
6.5.1 Posições Ótimas para um Atuador Piezelétrico -----	116
6.5.2 Posições Ótimas para um Atuador Considerando o Efeito da Rigidez e da Massa do Atuador Piezelétrico -----	118
6.6 CASO 6 : SIMULAÇÃO DE CONTROLE VIGA BI-APÓIADA -----	121
6.6.1 Simulação Considerando Um Modo Um Atuador Piezelétrico e Uma Excitação Degrau Unitário para o Primeiro Modo -----	121
6.6.2 Simulação Considerando Um Modo Um Atuador Piezelétrico e Uma Excitação Impulso Unitário para o Primeiro Modo -----	125
6.6.3 Simulação Considerando Um Modo Um Atuador Piezelétrico e Uma Excitação Harmônica Seno Unitário para o Primeiro Modo -----	129

6.6.4 Simulação Considerando Um Modo Um Atuador Piezelétrico e Uma Excitação Degrau Unitário para o Segundo Modo -----	133
6.6.5 Simulação Considerando Dois Modos e Dois Atuadores Atuadores Piezelétricos e Uma Excitação Degrau Unitário Para o Primeiro e Segundo Modo -----	137
6.6.6 Simulação Considerando Três Modos e Três Atuadores Piezelétricos e Uma Excitação Degrau Unitário Para o Primeiro, Segundo e o Terceiro Modo -----	142
Capítulo 7 _____	148
CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES _____	148
7.1 CONCLUSÕES _____	148
7.2 SUGESTÕES E RECOMENDAÇÕES _____	151
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS _____	152
Apêndice A _____	163
CONCEITUAÇÃO SOBRE VALORES SINGULARES _____	163
Apêndice B _____	165
CONTROLE MODAL _____	165
Apêndice C _____	167
NÚMERO DE ELEMENTOS PIEZELÉTRICOS NECESSÁRIO PARA CONTROLAR UM DETERMINADO MODO _____	167

Lista de Figuras

Figura 2.1 Diagrama de equilíbrio de uma viga (Inmam, 1994) -----	12
Figura 2.2 Elemento infinitesimal de viga (Inmam, 1994) -----	13
Figura 2.3 Modos de vibrar para uma apoiada nas extremidades (biapoiada) -----	19
Figura 2.4 Modos de vibrar para uma viga em balanço -----	21
Figura 2.5 Viga com elemento piezelétrico incorporado -----	22
Figura 2.6 Relação entre potencial aplicado e deformação -----	22
Figura 3.1 Elementos de viga -----	30
Figura 4.1 Estrutura em blocos do programa computacional desenvolvido -----	57
Figura 4.2 Diagrama do programa computacional de posicionamento desenvolvido -----	58
Figura 4.3 Procedimento de determinação do posicionamento ótimo -----	59
Figura 5.1 Gráfico dos desvios relativos percentuais das frequências adimensionalizadas Timoshenko para uma viga biapoiada -----	64
Figura 5.2 Gráfico dos desvios relativos percentuais das frequências adimensionalizadas Timoshenko para uma viga livre-livre -----	66
Figura 5.3 Gráficos dos desvios relativos percentuais das frequências adimensionalizadas Timoshenko para uma viga engastada-engastada -----	68
Figura 5.4 Gráfico dos desvios relativos percentuais das frequências adimensionalizadas Timoshenko para uma viga em balanço -----	70
Figura 5.5 Posicionamento de elementos piezelétricos incorporados viga em balanço caso 1	71
Figura 5.6 Gráfico de desvios relativos para o caso 1 -----	73
Figura 5.7 Gráfico da viga do caso 1 com elementos piezelétricos incorporados -----	74
Figura 5.8 Posicionamento de elementos piezelétricos incorporados a viga em balanço -----	76
Figura 5.9 Gráfico de desvios para o caso 2 -----	77
Figura 6.1 a) Primeiro modo de vibrar; b) Índice de posicionamento ótimo -----	80
Figura 6.2 a) Segundo modo de vibrar; b) Índice de posicionamento ótimo -----	81
Figura 6.3 Posicionamento ótimo para o primeiro modo viga biapoiada com e sem atuador	82
Figura 6.4 Modo de vibrar para o primeiro modo viga biapoiada com e sem atuador -----	82
Figura 6.5 Posicionamento ótimo para o segundo modo viga biapoiada com e sem atuadores	84
Figura 6.6 Modo de vibrar para o segundo modo viga biapoiada com e sem atuador -----	84
Figura 6.7 Posicionamento ótimo para o primeiro modo viga biapoiada com 2 atuadores -----	86
Figura 6.8 Posicionamento ótimo para o segundo modo viga biapoiada com 2 atuadores -----	87

Figura 6.9 Posicionamento ótimo para o primeiro/segundo modo viga biapoiada -----	88
Figura 6.10 Posicionamento ótimo para o primeiro,segundo terceiro modo viga biapoiada---	88
Figura 6.11 a) Primeiro modo de vibrar; b) Índice de posicionamento -----	90
Figura 6.12 a) Segundo modo de vibra; b) Índice de posicionamento -----	91
Figura 6.13 Posicionamento ótimo para o primeiro modo viga em balanço com/sem atuador	92
Figura 6.14 Modo de vibrar para o primeiro modo viga em balanço com e sem atuador -----	92
Figura 6.15 Posicionamento ótimo para o segundo modo viga em balanço com/sem atuador	94
Figura 6.16 Modo de vibrar para o segundo modo viga em balanço com e sem atuador-----	95
Figura 6.17 Posicionamento ótimo para o primeiro modo viga em balanço com 2 atuadores-	96
Figura 6.18 Posicionamento ótimo para o segundo modo viga em balanço com 2 atuadores -	97
Figura 6.19 Posicionamento ótimo para o primeiro/segundo modo viga em balanço -----	98
Figura 6.20 Posicionamento ótimo para o primeiro/segundo/terceiro modo viga em balanço	99
Figura 6.21 Posicionamento ótimo para primeiro/segundo/terceiro mdo viga em balanço com atuador -----	100
Figura 6.22 Primeiro/segundo/terceiro modo viga em balanço com e sem atuador-----	101
Figura 6.23 Posicionamento ótimo para primeiro/segundo/terceiro modo viga em balanço com e sem atuador -----	101
Figura 6.24 a) Primeiro modo de vibrar; b) Índice de posicionamento ótimo para viga bi- engastada -----	103
Figura 6.25 a)Primeiro/Segundo modo de vibrar b) Índice de posicionamento ótimo viga bi- engastada -----	104
Figura 6.26 Índice de posicionamento ótimo para o primeiro modo viga bi-engastada com e sem atuador -----	105
Figura 6.27 Índice de posicionamento ótimo para o primeiro/segundo modo viga bi-engastada com e sem atuador -----	106
Figura 6.28 Primeiro/Segundo modo de vibrar viga bi-engastada com e sem atuador -----	106
Figura 6.29 índice de posicionamento ótimo para o primeiro/segundo/terceiro modo viga bi- engastada sem atuador-----	107
Figura 6.30 Índice de posicionamento ótimo para o primeiro/segundo/terceiro modo viga bi- engastada com atuador -----	108
Figura 6.31 Índice de posicionamento ótimo para o primeiro/segundo/terceiro modo viga engastada com e sem atuador-----	108
Figura 6.32 Primeiro/segundo/terceiro modo viga bi-engastada com e sem atuador -----	109

Figura 6.33 a) Primeiro modo de vibrar; b) Índice de posicionamento ótimo para viga em livre-livre -----	111
Figura 6.34 a) Índice de posicionamento do primeiro modo de vibrar de corpo flexível da viga livre-livre com e sem atuador -----	112
Figura 6.35 Primeiro modo de vibrar flexível da viga livre-livre com e sem atuador -----	113
Figura 6.36 a) Segundo modo de vibrar viga livre-livre; b) índice de posicionamento ótimo	114
Figura 6.37 Segundo modo de vibrar da viga livre-livre com e sem atuador -----	114
Figura 6.38 Índice de posicionamento ótimo da viga livre-livre com e sem atuador -----	115
Figura 6.39 a) Primeiro modo de vibrar; b) Índice de posicionamento ótimo para viga engastada-apoiada-----	116
Figura 6.40 Índice de posicionamento ótimo primeiro modo para viga engastada-apoiada -	117
Figura 6.41 Primeiro modo de vibrar da viga engastada-apoiada com e sem atuador -----	117
Figura 6.42 a) Segundo modo de vibrar viga engastada-apoiada; b) índice de posicionamento ótimo-----	118
Figura 6.43 Segundo modo de vibrar da viga engastada-apoiada com e sem atuador -----	119
Figura 6.44 índice de posicionamento ótimo da viga engastada-apoiada com e sem atuador	119
Figura 6.45 Elementos da viga de controle simulada-----	121
Figura 6.46 Malha aberta/fechada excitação degrau unit. 1 modo/1 atuador posição ótima -	122
Figura 6.47 FRF excitação degrau unitário 1 modo/ 1 atuador posição ótima -----	122
Figura 6.48 Força de controle devido a excitação degrau unitário 1 modo/1 atuador posição ótima -----	123
Figura 6.49 Malha aberta/fechada excitação degrau unitário 1 modo/1 atuador posição não ótima -----	123
Figura 6.50 FRF excitação degrau unitário 1 modo/ 1 atuador posição não ótima-----	124
Figura 6.51 Força de controle devido a excitação degrau unitário 1 modo/1 atuador posição não ótima -----	124
Figura 6.52 Malha aberta/fechada excitação impulso unit. 1 modo/1 atuador posição ótima	126
Figura 6.53 FRF excitação impulso unitário 1 modo/1 atuador posição ótima -----	126
Figura 6.54 Força de controle devido a excitação impulso unitário 1 modo/1 atuador posição ótima -----	127
Figura 6.55 Malha aberta/fechada impulso degrau unitário 1 modo/1 atuador posição não ótima -----	127
Figura 6.56 FRF excitação impulso unitário 1 modo/1 atuador posição não ótima -----	128

Figura 6.57 Força de controle devido a excitação impulso unitário 1 modo/1 atuador posição não ótima -----	128
Figura 6.58 Malha aberta/fechada excitação harmônica unitário 1 modo/ 1 atuador posição ótima -----	130
Figura 6.59 FRF excitação harmônica unitário 1 modo/1 atuador posição ótima -----	130
Figura 6.60 Força de controle devido a excitação harmônica unitário 1 modo/1 atuador posição ótima -----	131
Figura 6.61 Malha aberta/fechada harmônica unitário 1 modo/1 atuador posição não ótima -	131
Figura 6.62 FRF excitação harmônica unitário 1 modo/1 atuador posição não ótima-----	132
Figura 6.63 Força de controle devido a excitação harmônica unitário 1 modo/1 atuador posição não ótima -----	132
Figura 6.64 Elementos da viga de controle simulada -----	133
Figura 6.65 Malha ab./fechada excitação degrau unitário 2 modo/ 1 atuador posição ótima	134
Figura 6.66 FRF excitação degrau unitário 2 modo/1 atuador posição ótima-----	134
Figura 6.67 Força de controle devido a excitação degrau unitário 2 modo/1 atuador posição ótima -----	135
Figura 6.68 Malha aberta/fechada degrau unitário 2 modo/1 atuador posição não ótima ----	135
Figura 6.69 FRF excitação degrau unitário 2 modo/1 atuador posição não ótima-----	136
Figura 6.70 Força de controle devido a excitação degrau unitário 2 modo/1 atuador posição não ótima -----	136
Figura 6.71 Elementos da viga de controle simulada -----	137
Figura 6.72 Malha aberta/fechada excitação degrau unitário 2 modos/2 atuadores posição não ótima -----	138
Figura 6.73 FRF excitação degrau unitário 2 modos/2 atuadores posição ótima -----	138
Figura 6.74 Força de controle devido a excitação degrau unitário 2 modos/2 atuadores para o primeiro atuador na posição ótima -----	139
Figura 6.75 Força de controle devido a excitação degrau unitário 2 modos/2 atuadores para o segundo atuador posição não ótima -----	139
Figura 6.76 Malha aberta/fechada impulso unitário 2 modos/2 atuadores posição não ótima	140
Figura 6.77 FRF excitação degrau unitário 2 modos/2 atuadores posição não ótima-----	140
Figura 6.78 Força de controle devido a excitação degrau unitário 2 modos/2 atuadores para primeiro atuador piezolétrico posição não ótima -----	141
Figura 6.79 Força de controle devido a excitação degrau unitário 2 modos/2 atuadores para o segundo atuador piezolétrico posição não ótima -----	141

Figura 6.80 Elementos da viga de controle simulada----- 142

Figura 6.81 Malha/fechada excitação degrau unitário 3 modos/3 atuadores posição ótima - 143

Figura 6.82 FRF excitação degrau unitário 3 modos/atuadores posição ótima ----- 143

Figura 6.83 Força de controle devido a excitação degrau unitário 3 modos/3atuadores para o primeiro atuador na posição ótima ----- 144

Figura 6.84 Força de controle devido a excitação degrau unitário 3 modos/3atuadores para o segundo atuador na posição ótima----- 144

Figura 6.85 Força de controle devido a excitação degrau unitário 3 modos/3 atuadores para o terceiro atuador na posição ótima----- 145

Figura 6.86 Malha aberta/fechada degrau unitário 3 modos/3 atuadores posição não ótima 145

Figura 6.87 FRF excitação degrau unitário 3 modos/3atuadores posição não ótima----- 146

Figura 6.88 Força de controle devido a excitação degrau unitário 3 modos/3 atuadores para o primeiro atuador piezelétrico posição não ótima ----- 146

Figura 6.89 Força de controle devido a excitação degrau unitário 3 modos/3 atuadores para o segundo atuador piezelétrico posição não ótima ----- 147

Figura 6.90 Força de controle devido a excitação degrau unitário 3 modos/3 atuadores para o terceiro atuador piezelétrico posição não ótima ----- 147

Lista de Tabelas

Tabela 2.1 Dados da viga biapoiada -----	18
Tabela 5.1 Propriedades geométricas e materiais da viga simulada -----	61
Tabela 5.2 Frequências adimensionais Timoshenko para uma viga biapoiada -----	63
Tabela 5.3 Desvios relativos das frequências adimensionais para uma viga biapoiada -----	63
Tabela 5.4 Resultados para uma viga biapoiada simulada com 50 elementos -----	64
Tabela 5.5 Frequências adimensionais Timoshenko para uma viga livre-livre -----	65
Tabela 5.6 Desvios relativos das frequências adimensionais para uma viga livre-livre -----	65
Tabela 5.7 Resultados para uma viga livre-livre simulada com 50 elementos -----	66
Tabela 5.8 Frequências adimensionais Timoshenko para uma viga engastada-engastada -----	67
Tabela 5.9 Desvios relativos das frequências adimensionais da viga engastada-engastada -----	67
Tabela 5.10 Resultados para uma viga engastada-engastada simulada com 50 elementos -----	68
Tabela 5.11 Frequências adimensionais Timoshenko para uma viga em balanço -----	69
Tabela 5.12 Desvios relativos das frequências adimensionais para uma viga em balanço -----	69
Tabela 5.13 Resultados para uma viga em balanço simulada com 50 elementos -----	70
Tabela 5.14 Propriedades e dimensões do elemento piezelétrico caso 1 -----	71
Tabela 5.15 Propriedades geométricas e materiais da viga simulada caso 1 -----	72
Tabela 5.16 Frequências e desvios relativos encontrados para o caso 1 viga uniforme -----	72
Tabela 5.17 Frequência e desvios relativos encontrados para o caso 1 viga com pzt -----	73
Tabela 5.18 Propriedades geométricas e materiais da viga simulada 2 com elementos piezelétricos -----	75
Tabela 5.19 Propriedades geométricas e materiais da viga simulada 2 com elementos piezelétricos -----	75
Tabela 5.20 Desvios encontrados em relação a frequência analítica para o caso 2 -----	76
Tabela 6.1 Propriedades e dimensões do elemento piezelétrico -----	79

Tabela 6.2 Posição ótima do primeiro modo de uma viga biapoiada-----	80
Tabela 6.3 Posição ótima do segundo modo de uma viga biapoiada -----	81
Tabela 6.4 Posição ótima do primeiro modo da viga biapoiada com e sem atuadores-----	83
Tabela 6.5 Posição ótima do primeiro modo de uma viga biapoiada com e sem atuadores----	85
Tabela 6.6 Posição ótima do primeiro modo de uma viga biapoiada com dois atuadores-----	86
Tabela 6.7 Posição ótima do segundo modo de uma viga biapoiada com dois atuadores -----	87
Tabela 6.8 Posição ótima do primeiro/segundo modo viga biapoiada -----	88
Tabela 6.9 Posição ótima do primeiro/segundo/terceiro modo de uma viga em balanço-----	89
Tabela 6.10 Posição ótima para o primeiro modo de uma viga em balanço-----	90
Tabela 6.11 Posição ótima do segundo modo de uma viga em balanço -----	91
Tabela 6.12 Posição ótima do primeiro modo de uma viga em balanço com e sem atuadores	93
Tabela 6.13 Posição ótima do segundo modo de uma viga em balanço com e sem atuadores	95
Tabela 6.14 Posição ótima do primeiro modo de uma viga em balanço com dois atuadores--	97
Tabela 6.15 Posição ótima do segundo modo de uma viga em balanço com dois atuadores --	98
Tabela 6.16 Posição ótima do primeiro/segundo modo de uma viga em balanço -----	98
Tabela 6.17 Posição ótima do primeiro/segundo/terceiro modo de uma viga em balanço -----	99
Tabela 6.18 Posição ótima do primeiro/segundo/terceiro modo de uma viga em balanço com e sem atuadores-----	102
Tabela 6.19 Posição ótima para o primeiro modo de uma viga bi-engastada -----	103
Tabela 6.20 Posição para o primeiro/segundo modo de uma viga bi-engastada-----	104
Tabela 6.21 Posição ótima do primeiro/segundo/terceiro modo de uma viga bi-engastada com e sem atuadores-----	110
Tabela 6.22 Posição ótima do segundo modo de uma viga livre-livre -----	111
Tabela 6.23 Posição ótima do segundo modo de uma viga livre-livre com e sem atuadores	115
Tabela 6.24 Posição ótima do primeiro modo de uma viga engastada-apoiada-----	116
Tabela 6.25 Posição ótima do segundo modo de uma viga engastada-apoiada com e sem atuadores -----	120

Simbologia

Letras Latinas

A	Área	m^2
$[a]_e$	Matriz de mudança de coordenadas locais para globais	
$[A]$	Matriz dinâmica do sistema	
B_{33}	Impermeabilidade elétrica	m/F
$[B]$	Matriz de controle	
$[B_u]$	Derivada da função de forma	
$[B_w]$	Derivada da função de forma	
b	Largura	m
$[c^E]$	Matriz de elasticidade para campo elétrico constantes	N/m^2
C	Constantes de integração	
$[c]_e$	Matriz de amortecimento dos elementos	$N.s/m$
$[d]$	Matriz de constantes de deformações piezométricas	m/V
$\{D\}$	Vetor deslocamento elétrico	C/m^2
$[C]$	Matriz de amortecimento nas coordenadas globais	$N.s/m$
D_3	Carga elétrica por unidade de área	C/m^2
d_{31}	Coefficiente piezométrico indireto	m/V

e_{31}	Constante de carga piezométrico	C/m^2
$\{E\}$	Vetor campo elétrico	V/m
$f_i(x,t)$	Força	N
F	Força externa	N
$\{f_i\}$	Vetor de força externa	N
$\{f_s\}$	Vetor de força externa pontual	N
$\{f\}$	Vetor de força externa de superfície	N
G	Módulo de elasticidade transversal	N/m^2
$[G]$	Matriz de ganho	
$H(\cdot)$	Função de Heaviside	
h	Espessura	m
h_{31}	Constante que relaciona a tensão de circuito aberto, dado uma entrada de tensão	C/Fm
h_r^s	Distância da linha neutra da viga ao plano médio do sensor	m
I	Momento de inércia de área	m^4
K_d	Constante dielétrica do material	F/m
$[K]$	Matriz de rigidez global	N/m
$[K_1]$	Matriz de rigidez particionada	N/m
$[K_2]$	Matriz de rigidez particionada	N/m
$[K_3]$	Matriz de rigidez particionada	N/m
$[K_4]$	Matriz de rigidez particionada	N/m
$[K_{q\phi}]$	Matriz de rigidez cruzada piezométrica e estrutural	N/m
$[K_{\phi q}]$	Matriz de rigidez cruzada piezométrica e estrutural	N/m
$[k]_e$	Matriz de rigidez dos elementos	N/m
$[K_{qq}]$	Matriz de rigidez estrutural	N/m
$[K_{\phi\phi}]$	Matriz de rigidez dielétrica	N/m
L	Comprimento	m
m	Momento induzido	$N.m$
M	Momento fletor	$N.m$
$[M]$	Matriz de massa	kg
$[m]_e$	Matriz de massa dos elementos	kg
$[M_{qq}]$	Matriz de massa estrutural	kg
$[M]$	Matriz de massa nas coordenadas globais	kg

$[M_1]$	<i>Matriz de massa nas coordenadas globais particionada</i>	<i>kg</i>
$[M_2]$	<i>Matriz de massa nas coordenadas globais particionada</i>	<i>kg</i>
$[M_3]$	<i>Matriz de massa nas coordenadas globais particionada</i>	<i>kg</i>
$[M_4]$	<i>Matriz de massa nas coordenadas globais particionada</i>	<i>kg</i>
M	<i>Momento fletor</i>	<i>N.m</i>
$[N_i(x)]$	<i>Matriz de funções de forma</i>	
$[N]$	<i>Matriz de valores singulares</i>	
q	<i>Coordenada generalizada</i>	
$\{q\}$	<i>Vetor de deslocamento</i>	<i>m</i>
$\{q_s\}$	<i>Vetor carga elétrica do elemento</i>	<i>C</i>
$\{Q_s\}$	<i>Vetor carga elétrica global</i>	<i>C</i>
$[R]$	<i>Matriz de ponderação</i>	
$[S_r]$	<i>Matriz de Ricatti</i>	
T	<i>Energia Cinética</i>	<i>J</i>
$T(x)$	<i>Transformação de coordenadas</i>	
t	<i>Tempo</i>	<i>s</i>
u	<i>Deslocamento linear</i>	<i>m</i>
U	<i>Energia Potencial total</i>	<i>J</i>
$\{u\}$	<i>Vetor de controle</i>	
$\{v\}$	<i>Vetor de controle</i>	<i>N</i>
V	<i>Esforço cortante</i>	<i>N</i>
x	<i>Coordenada cartesiana</i>	
y	<i>Coordenada cartesiana</i>	
Y	<i>Módulo de Young</i>	<i>N/m²</i>
w	<i>Deslocamento linear</i>	<i>m</i>
z	<i>Coordenada cartesiana</i>	
$1,2,3$	<i>Referencial do elemento piezoelectrico aos eixos 1,2,3</i>	

Letras Gregas

β	<i>Frequência natural adimensional</i>	
δ	<i>Variação</i>	
$\delta(x)$	<i>Delta de Dirac</i>	
δ_{ij}	<i>Delta de Kronecker</i>	
Δ	<i>Dilatação piezométrica</i>	
ε	<i>Deformação</i>	
$\{\varepsilon\}$	<i>Tensor deformação</i>	
θ	<i>Deslocamento angular</i>	<i>rad</i>
κ	<i>Coefficiente de cisalhamento</i>	
$[A]$	<i>Matriz diagonal de frequências</i>	
ν	<i>Coefficiente de Poisson</i>	
μ	<i>Raio de curvatura</i>	<i>m</i>
ξ	<i>Constante de permissividade no vácuo</i>	<i>F/m</i>
$[\xi^c]$	<i>Tensor de constantes piezométricas para deformação constantes</i>	<i>F/m</i>
$[\xi^s]$ -	<i>Matriz de constantes piezométricas para tensão mecânica constante</i>	<i>F/m</i>
ρ	<i>Densidade de massa ou massa específica</i>	<i>kg/m³</i>
σ	<i>Tensão normal</i>	<i>N/m²</i>
σ_i	<i>Valores singulares</i>	
ϕ	<i>Potencial elétrico através dos eletrodos dos elementos piezométricos</i>	<i>V</i>
$\{\phi\}$	<i>Vetor de potencial elétrico dos elementos piezométricos</i>	<i>V</i>
$[\chi]$	<i>Matriz de modos modal</i>	
χ	<i>Modos de vibrar</i>	
ψ	<i>Deslocamento angular</i>	<i>rad</i>
Ω	<i>Volume</i>	<i>m³</i>
ω	<i>Frequência circular natural</i>	<i>rad/s</i>
τ	<i>Tempo</i>	<i>s</i>
η	<i>Coordenada modal no tempo</i>	

Sobrescritos

T	<i>Transposta de uma matriz ou vetor</i>
s	<i>Sensor</i>
a	<i>Atuador</i>
$'$	<i>Primeira derivada espacial</i>
$''$	<i>Segunda derivada espacial</i>
\cdot	<i>Primeira derivada temporal</i>
$\ddot{}$	<i>Segunda derivada temporal</i>

Subscritos

D_f	<i>Deformação flexional</i>
d	<i>Deformação piezométrica</i>
elp	<i>Números de elementos piezométricos</i>
pe	<i>Relativo ao material piezométrico</i>
st	<i>Relativo à estrutura</i>
x	<i>Direção do eixo coordenado</i>
y	<i>Direção do eixo coordenado</i>
z	<i>Direção do eixo coordenado</i>
i	<i>Índice</i>
e	<i>Elemento</i>
u	<i>Coordenada linear</i>
w	<i>Coordenada linear</i>
θ	<i>Coordenada angular</i>

Abreviaturas

<i>ASAC</i>	<i>Active Structural Acoustic Control</i>
<i>AVC</i>	<i>Active Vibration Control</i>
<i>PVDF</i>	<i>Fluorido de polivinilido</i>
<i>PZT</i>	<i>Titanato zirconato de chumbo</i>
<i>IMSC</i>	<i>Independent modal space control</i>
<i>SVD</i>	<i>Singular value decomposition</i>

Siglas

<i>IEM</i>	<i>Instituto de Engenharia Mecânica</i>
<i>UNIFEI</i>	<i>Universidade Federal de Itajubá</i>

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Uma das tecnologias que vem sendo investigada para o controle ativo de vibrações em estruturas flexíveis é a do uso de elementos piezelétricos, atuadores e sensores piezelétricos, distribuídos ao longo da estrutura. De acordo com Crawley e De Luis (1987), Lee e Moon (1990) e Lima Jr. (1999), os atuadores piezelétricos são usualmente feitos com materiais cerâmicos enquanto que os sensores são feitos de polímeros. Dentre os estudos importantes para viabilizar essa tecnologia, destaca-se o estudo do posicionamento de sensores e atuadores piezelétricos tendo em vista a minimização do esforço e a estabilidade do sistema controlado.

De maneira geral, as técnicas de posicionamento são baseadas no grau de controlabilidade e observabilidade do sistema, como por exemplo, a avaliação dos valores singulares e autovalores das matrizes gramianas de controlabilidade e observabilidade (Wang,2001).

1.1 REVISÃO DA LITERATURA

O controle ativo de vibrações é hoje uma realidade, pois os resultados obtidos são efetivamente melhores que os do controle passivo (Clark et al., 1993). O controle ativo de

vibrações utilizando-se de materiais piezelétricos tem recebido muita atenção por parte dos pesquisadores, isso porque os materiais piezelétricos são leves, resistentes e podem funcionar como atuadores e sensores devido ao fato de apresentarem a propriedade da piezeletricidade (Wang e Wang, 2001). Essa propriedade permite a conversão de energia mecânica em elétrica e vice-versa (Tzou e Fu, 1994). O efeito direto da piezeletricidade foi descoberto pelos irmãos Curie, em 1880, e o efeito inverso da piezeletricidade foi teoricamente previstos por Lippman, com base em princípios termodinâmicos (Lima Jr., 1999) e (Rao e Sunnar, 1994). Seu uso em aplicações de controle é relativamente recente, Bailey e Hubbard, (1985), Crawley e De Luis (1987) e Moreira (1998). Uma explicação para esse fato seria a espera pela síntese e o desenvolvimento de novos materiais piezelétricos que pudessem ser aplicados a essa finalidade. Lima Jr. (1999) relata que esses desenvolvimentos, bem como sobre a base da piezeletricidade, podem ser encontrados em Cady (1946). O efeito direto da piezeletricidade consiste no desenvolvimento de um campo elétrico quando sujeitos a uma força ou pressão e o efeito inverso apresenta uma deformação, quando sujeitos a um campo elétrico.

Atualmente, sistemas de estruturas flexíveis integrando estruturas, sensores, atuadores e controladores são conhecidos como estruturas inteligentes de acordo com Lima Jr, (1999). Entre os materiais que apresentam a propriedade da piezeletricidade tem-se as cerâmicas, PZT (Titanato Zirconato de Chumbo) e os filmes plásticos, PVDF (Fluorido de Polivinilideno). As cerâmicas possuem alta rigidez, portanto sendo mais aplicadas como atuadores, enquanto que os polímeros são mais maleáveis e podem ser produzidos em formas geométricas complexas, sendo por essa razão utilizados como sensores (Lee e Moon, 1990). Descobertos por Jaffet em 1954, (Clark et al., 1993), os elementos piezelétricos são constituídos principalmente de óxidos de chumbo, zircônio e titânio, e na sua fabricação, é aplicado um grande campo de coerção que polariza a cerâmica, alinhando suas moléculas polarizadas na direção do campo elétrico, propiciando assim as desejadas propriedades piezelétricas. Já o PVDF, cujas propriedades piezelétricas foram descobertas por Kawai após 1960, é um polímero piezelétrico robusto e maleável citado por Lima Jr. (1999).

O controle ativo de vibrações mecânicas usando a tecnologia de estruturas inteligentes tem aplicações em muitas áreas, desde ótica ativa até fuselagem de aviões. Os atuadores piezelétricos de cerâmicas são empregados também no controle acústico em estruturas ativas, com a finalidade de reduzir o ruído de compartimentos e no controle ativo de vibrações

mecânicas, (Lee e Elliot, 2000) e (Li et al., 2002), isto se deve ao fato do desempenho desta tecnologia ser superior ao tradicional controle passivo de vibrações mecânicas.

De acordo com Frecker (2003), o projeto de estruturas inteligentes tem cinco áreas (posicionamento dos elementos piezelétricos, posicionamento mais o controlador, eletrônicos, estrutura e a interface estrutura elemento piezelétrico), entretanto para efeito didático pode ser dividido em três áreas, ou seja:

- Posicionamento de elementos piezelétricos, sensor e atuador;
- Modelagem de estruturas inteligentes e
- Projeto do controlador e eletrônica

1.1.1 Posicionamento de elementos piezelétricos

O estudo de posicionamento de sensores e atuadores piezelétricos é parte fundamental em um bom projeto de estruturas inteligentes. O mau posicionamento de sensores e atuadores sobre uma estrutura, na qual se deseja controlar ativamente as vibrações mecânicas, provoca a perda da observabilidade e controlabilidade do sistema (Costa e Silva e Arruda, 1997). O estudo de posicionamento de atuadores e sensores piezelétricos é um processo de otimização desses componentes sobre uma estrutura flexível. O posicionamento ótimo visa também à melhoria da capacidade de sensoriamento e atuação do sistema (Abreu et al, 2005).

O problema do posicionamento ótimo de sensores e atuadores, em estruturas flexíveis, vem sendo estudado em duas linhas de pesquisas: Técnicas de posicionamento que visam desenvolver a função que maximiza ou, dependendo da configuração adotada, minimiza a função do sistema, chamadas de técnicas heurísticas, e as técnicas de posicionamento diretas, entre as quais, as medidas de observabilidade e controlabilidade do sistema, obtidas através dos autovalores das matrizes gramianas de observabilidade e controlabilidade. Os pesquisadores Padula e Kincaid (1999) fazem um exame dessas técnicas de acordo com o tipo de aplicação e os métodos de otimizações empregados. Outras técnicas diretas possíveis são: maximização da energia de dissipação e a maximização da energia de deformação, descritas no trabalho de Friswell (2000). Dentre os estudos para viabilizar esta técnica, destaca-se a otimização do posicionamento de sensores e atuadores piezelétricos tendo em vista a

estabilidade e o desempenho do sistema controlado conforme (Costa e Silva e Arruda, 1997) e (Giovannetti, 2001).

Devido ao alto custo de soluções de grandes problemas de programação inteira, é preferível considerar técnicas heurísticas de solução de posicionamento, as quais levam a soluções de bom posicionamento com relativo baixo custo computacional. A desvantagem dessas técnicas é que elas podem não levar a um mínimo ou máximo global e sim a um mínimo ou máximo local, situação descrita por Chen et al. (1997). Com o mérito de robustez e alta eficiência no tratamento de problemas com complexos multi-modelos e não-lineares, os algoritmos genéticos têm sido reconhecidos por muitos pesquisadores como uma promissora ferramenta no campo do controle ativo de vibrações mecânicas e no controle dos níveis de ruídos, Simpson e Hansen (1996), Han e Jae-Jung (1999) e Silva et al. (2004) investigaram a posição ótima de atuadores e sensores piezelétricos em placas compósitas, usando algoritmos genéticos, mostrando experimentalmente a redução da vibração. O trabalho de Li et al. (2003), também faz um estudo de posicionamento de atuadores piezelétricos empregados no controle acústico em estruturas flexíveis, utilizando-se de um método de otimização através de algoritmos genéticos. O desempenho da configuração otimizada obtida é satisfatório para controlar frequências na faixa de 100 Hz a 500 Hz em uma estrutura flexível.

Dada a importância da otimização do posicionamento de atuadores piezelétricos, grande número de pesquisadores tem dedicado esforços nessa área. Por exemplo, Gawronski (1997) estuda o posicionamento de sensores e atuadores piezelétricos usando os modos de vibrar, a observabilidade e controlabilidade modal. No trabalho de Moheimani (1999) a medida de controlabilidade modal e espacial foi usada para encontrar o posicionamento ótimo de sensores e atuadores piezelétricos. Nos trabalhos de: Oliveira e Lima Jr. (2005), Oliveira e Lima Jr. (2004 a), Oliveira e Lima Jr. (2004 b), Oliveira e Lima Jr. (2003 a), Oliveira e Lima Jr. (2003 b) e Oliveira e Lima Jr. (2003 c), faz simulações numéricas, através do método de elementos finitos, considerando-se atuadores piezelétricos que aplicam momento ou força na estrutura flexível, dependendo do qual grau de liberdade, angular ou linear, que a matriz de controle se relaciona. As simulações são realizadas em estruturas dos tipos vigas e placas, em diversas condições de contornos.

Outros estudos de posicionamento de atuadores e sensores piezelétricos estão nos trabalhos de Friswell (2000), Wang e Wang (2001) e Oliveira e Lima Jr. (2003 a) onde os autores propõem a decomposição em valores singulares da matriz de controle. Nesse método a energia de ativação é minimizada, de maneira a obter um índice que quantifica as posições onde a energia fornecida pelo controlador aos atuadores é mínima para excitar um determinado modo. O trabalho de Wang e Wang (2001) visa a otimização do posicionamento de atuadores e sensores tendo em vista a estabilidade e o desempenho do controlador. Nesse trabalho, considera-se como medida ideal para manusear e verificar o grau de controlabilidade e observabilidade do sistema os autovalores ou valores singulares das matrizes gramianas.

Para finalizar este tópico, cita-se o trabalho de Frecker (2003), onde é feita uma revisão dos trabalhos referentes ao desenvolvimento de metodologias e métodos de otimização aplicados aos projetos de estruturas inteligentes. Nessa revisão são citados diversos trabalhos de outros pesquisadores como o de Adali et al. (2000), que considera uma viga onde a máxima deflexão vertical é minimizada usando um par de atuadores e tomando-se à distância entre eles uma variável de projeto. Outros trabalhos são os de Aldraihen et al. (2000) que maximiza a controlabilidade ponderada de uma viga bi-apoiada e uma viga em balanço. O trabalho de Barboni et al. (2000) consideram uma viga vibrando, onde o objetivo é maximizar o deslocamento gerado por um par de atuadores e o trabalho de Bruant et al. (2001) otimiza o posicionamento de sensores através da maximização do gramiano da matriz de observabilidade e o posicionamento de atuadores através da minimização da energia mecânica.

1.1.2 Modelagem de Estruturas Inteligentes

Neste item tem-se o trabalho de Craig (1981) que descreve os modelos de vigas elásticas, segundo a teoria de Euler-Bernoulli e a teoria de Timoshenko que considera a inércia de rotação e o efeito de cisalhamento; entretanto destaca-se o trabalho de Crawley e De Luis (1987) que estudaram a modelagem unidimensional de elementos piezelétricos incorporados ao corpo de vigas e formularam os momentos gerados por uma voltagem aplicada aos elementos piezelétricos e Banks et al. (1995) que introduziram o efeito dos atuadores piezelétricos nos modelos de placa e viga.

Um modelo analítico de viga de Timoshenko foi apresentado por Yang e Lee (1994), considerando a influência de elementos piezelétricos incorporados na estrutura suporte nos parâmetros modais. Charette et al. (1997) apresentaram um modelo analítico e um estudo experimental para as respostas de placas com elementos piezelétricos incorporados. A formulação usada nesse trabalho é baseada nas equações de energia que permitem considerar qualquer condição de contorno nas bordas da placa e levando em consideração o efeito dinâmico da massa e rigidez dos elementos piezelétricos na resposta da placa. No trabalho de Maxwell e Asokanthan (2002) faz-se uma modelagem usando a teoria de viga de Timoshenko com elementos piezelétricos colados na estrutura. As frequências naturais e os modos de vibrar associados com movimento flexível são computados para vários arranjos de elementos piezelétricos distribuídos sobre a estrutura suporte. Os efeitos dos arranjos sobre as características modais são demonstrados usando como exemplo uma viga em balanço, considerando-se somente propriedades passivas dos elementos piezelétricos e adesões perfeitas destes com a estrutura suporte.

As equações diferenciais da piezeletricidade são complexas e, portanto soluções analíticas são difíceis de serem obtidas. Desta maneira, técnicas de aproximação devem ser empregadas para resolver essas equações. Entre elas, o método de elementos finitos é um dos melhores procedimentos disponíveis para analisar estruturas complexas (Craig Jr., 1981), sendo largamente utilizado como ferramenta de projeto e análise (Bathe, 1996). Um dos primeiros trabalhos, empregando o método de elementos finitos, foi apresentado por Allik e Hughes (1970), que propuseram um método geral de análise estático e dinâmico de estruturas piezelétricas. No trabalho de Tseng (1989) foi empregado elemento hexaedro isoparamétrico não-conforme, tendo oito nós e três graus de liberdade. Hwang e Park (1993) apresentaram uma formulação, por elementos finitos, para o caso de uma placa laminada com sensores e atuadores piezelétricos, apresentando modelos estáticos e dinâmicos aplicados no controle ativo da estrutura e obtendo as equações de movimento usando a teoria clássica de placa, modelo de Kirchhoff, e o elemento quadrilateral de quatro nós. Abrate (1998) usou uma formulação clássica em elementos finitos para analisar as vibrações livres de uma placa ortotrópica retangular. Os modelos de placa de Kirchhoff e Mindlin-Reissner foram estudados no trabalho de Bathe (1996) que desenvolveu vários elementos finitos. Entretanto, Lima Jr. e Arruda (1997) e Lima Jr. (1999) desenvolveram um programa computacional para a aplicação do elemento trilinear de oito nós em estruturas com elementos piezelétricos incorporados. O

desenvolvimento da ciência da computação aliados à implementação de algoritmos robustos da álgebra linear permitiu a rápida difusão da técnica de elementos finitos. Quando um corpo flexível é modelado utilizando-se o método de elementos finitos, as matrizes de massa e rigidez modais das equações de movimento conduzem a um grande número de equações desacopladas de um grau de liberdade, o que não é mais problema em face deste desenvolvimento dos recursos computacionais, (Ambrosio, 1992). Lima Jr. (1999) apresenta uma metodologia para modelagem analítica e numérica de estruturas, com elementos piezelétricos incorporados, obtendo modelos analíticos de Placa de Kirchhoff e Mindlin – Reissner e de viga de Euler – Bernoulli e Timoshenko, a partir das equações de movimento de casca, com a aplicação dos postulados de Love e da escolha apropriada dos raios de curvatura e dos parâmetros de Lamé. Considerando-se que os atuadores são de materiais anisotrópicos o trabalho de Cesnik C. e Ortega M. (2001) fazem análise de vigas compósitas com atuadores anisotrópicos.

1.1.3 Projeto do Controlador

O projeto do controlador é a parte final em um projeto de estrutura inteligente. O controlador deve ser estável e robusto o suficiente para responder de modo adequado a uma excitação na estrutura a qual se deseja controlar ativamente as vibrações mecânicas (Silva et al., 2004).

No trabalho de Lee e Elliot (2000), duas estratégias de controle são abordadas. A primeira envolve o controlador PID convencional na qual o ganho de realimentação é ajustado para dar uma resposta rápida, em malha fechada, a uma dada excitação de entrada. A segunda estratégia de controle é baseada na arquitetura do modelo de controle interna. A implementação prática desse trabalho utilizou um processador digital de trinta e dois bits com ponto flutuante, e as medições de desempenho de malha fechada foram comparadas com o modelo teórico previsto.

As estruturas inteligentes são expostas a flutuações de temperaturas e mudanças na geometria. Estes efeitos causam variações da dinâmica que conduz a degradações no desempenho do controlador utilizado. Pai et al. (1998) investigaram o controle de saturação

não-linear, o controle de ressonância interna não-linear e o controle de realimentação da posição linear, para o caso de excitações pseudo-estático e de vibrações transientes em uma viga em balanço, usando cerâmicas de elementos piezelétricos como atuadores e sensores. A ferramenta de desenvolvimento utilizada foi o software de modelagem simulink© e o controlador dSPACE DS1102 ©. O controlador híbrido constituído de um controlador de saturação e um controlador de realimentação de posição mostrou-se robusto e eficiente para controlar tanto excitações transientes como periódicas. Moreira (1998), Abreu e Ribeiro (2003) e Abreu (2003) projetaram e avaliaram o desempenho de um controlador H_∞ , para suprimir as vibrações mecânicas em uma viga em balanço. O controlador H_∞ garante um alto nível de rejeição a perturbações externas, portanto um bom desempenho e robustez.

Entre os controladores ótimos, destaca-se o regulador quadrático linear (LQR). A desvantagem desse tipo de controlador é que ele pressupõe que todos estados do sistema são medidos, o que nem sempre ocorre. O trabalho de Balamurugan e Narayanan (2002) usa um controlador ótimo quadrático linear e investiga o desempenho deste tipo de controlador no controle de vibração em vigas.

1.2 MOTIVAÇÃO DO TRABALHO

A necessidade de desenvolver este trabalho decorre do fato de que o controle ativo de vibração e ruído está se tornando uma ferramenta importante na melhoria e desenvolvimento de novos equipamentos. Os requisitos governamentais cada vez mais rigorosos e consumidores exigentes no controle dos níveis de vibração e ruídos dos equipamentos, aliados a materiais cada vez mais leves e de excelente desempenho estrutural, estão impondo de forma contundente o desenvolvimento de novas tecnologias. Nesse cenário, o controle ativo de vibração e ruído se apresenta com uma alternativa viável e necessária a esse desenvolvimento.

Dentro desse contexto, o posicionamento é parte fundamental e integral em um bom projeto de controle ativo de vibrações de estruturas flexíveis, sob pena de inviabilizar o mesmo sob o ponto de vista econômico.

1.3 OBJETIVOS DA TESE

Realizar um estudo teórico sobre uma técnica de posicionamentos de elementos piezelétricos, em estruturas flexíveis, usando medidas de controlabilidade modal e espacial.

Implementar um código computacional que permita posicionar elementos piezelétricos em estrutura do tipo viga, segundo a técnica proposta.

1.4 CONTEÚDO

O trabalho está distribuído nos capítulos que seguem da seguinte forma:

No capítulo 1 faz-se um levantamento bibliográfico do tema, dividindo-se o assunto em três áreas, posicionamento de elementos piezelétricos, modelagem de estruturas inteligentes e o projeto do controlador. Desta forma o assunto pode ser mais bem explorado no ponto de vista didático.

A modelagem de vigas com atuadores e sensores incorporados a partir do modelo de viga Euler-Bernoulli é feita no capítulo 2. Deduzem-se as equações dinâmicas a partir da teoria da elasticidade e da segunda lei de Newton. É feita também a dedução da equação do sensor.

O capítulo 3 faz-se a formulação da técnica de elementos finitos para problemas de piezeletricidade e a descrição da técnica de elementos finitos utilizada, descrevendo-se as funções de interpolações e as matrizes de massa e rigidez. Também é feita a descrição das matrizes de rigidez, devido ao efeito da piezeletricidade, a partir do princípio de Hamilton.

No capítulo 4 trata da descrição do posicionamento de elementos piezelétricos em estruturas flexíveis, descrevendo a técnica de posicionamento utilizada e o programa

computacional desenvolvido. São mostrando detalhes do comportamento do espaço de controlabilidade, a sua equivalência entre a matriz gramiana e a matriz de controle e os seus fluxogramas e algoritmos.

No capítulo 5 faz-se a validação dos modelos em elementos finitos empregados, através da comparação dos seus resultados com os dos modelos analíticos. Os resultados do programa desenvolvido são comparados com os resultados encontrados na literatura técnica para diversas condições de contorno. São feitas simulações com e sem elementos piezelétricos anexados a estrutura suporte.

No capítulo 6 são mostrados os resultados das simulações da controlabilidade, para um modo e mais de um modo simultaneamente e para mais de um atuador, em vigas em diversas condições de contorno. Também são realizados estudos da influência dinâmica dos elementos piezelétricos nos parâmetros modais na estrutura suporte e a verificação do posicionamento ótimo, na condição livre e forçada, através da decomposição modal e controle por meio do controlador clássico LQR, linear quadratic regulator.

No capítulo 7 são dadas as conclusões e recomendações para trabalhos futuros.

Em seguida são apresentadas as referências bibliográficas utilizadas na elaboração deste trabalho.

No apêndice A é mostrada a teoria dos valores singulares que foi utilizada para se posicionar elementos piezelétricos em uma estrutura flexível.

No apêndice B é descrito o controle modal utilizado nas simulações do posicionamento.

No apêndice C é deduzida a expressão de cálculo do número de elementos piezelétricos necessário para controlar um determinado modo.

Capítulo 2

MODELAGEM DE VIGAS COM ATUADORES E SENSORES PIEZELÉTRICOS INCORPORADOS

Neste capítulo, faz-se a dedução das equações dinâmicas de viga obtidas através da teoria da elasticidade e da segunda Lei de Newton. Em seguida, introduz-se na equação dinâmica o efeito da presença dos atuadores e sensores piezelétricos de maneira a se obter as equações que descrevem o comportamento da estrutura com elementos piezelétricos incorporados.

2.1 MODELAGEM DE VIGAS SEM ELEMENTOS PIEZELÉTRICOS INCORPORADOS

Do cálculo diferencial, a curvatura de uma curva plana em um dado ponto é:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{2/3}} \quad (2.1)$$

Sendo w o deslocamento transversal e x a variável espacial. Segundo a teoria de viga desenvolvida por Jacob Bernoulli (1654-1705), a curvatura apresentada pela linha elástica, em qualquer ponto, é proporcional ao momento fletor naquele ponto (Han et al., 1999).

Nesse modelo a linha elástica tem inclinação muito pequena, de modo que o seu quadrado pode ser desprezado em face da unidade, então a equação (2.1) reduz-se a:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (2.2)$$

Logo o momento fletor de uma viga em função de uma deslocamento $w(x,t)$ é:

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = \frac{M(x,t)}{Y(x)I(x)} \quad \text{ou} \quad M(x,t) = Y(x)I(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \quad (2.3)$$

Com: $M(x,t)$ o momento, $Y(x)$ o módulo de elasticidade e $I(x)$ o momento de inércia de área. Um modelo de vibração flexional em vigas, isto é, considerando-se apenas movimentos na direção perpendicular ao comprimento da viga, representado por $w(x,t)$, e sujeito a um carregamento dinâmico, que gera momento fletor e esforço cortante, é mostrado na figura 2.1.

Tomando-se um elemento infinitesimal de comprimento dx a uma posição x da extremidade direita da viga, e colocando-se os esforços atuantes, de modo que o elemento esteja em equilíbrio dinâmico, obtém-se a figura 2.2.

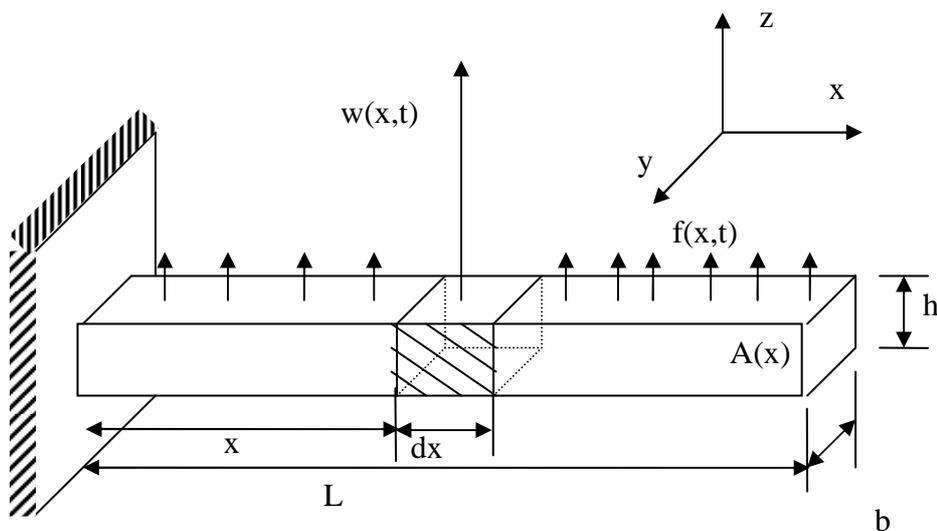


Figura 2.1 – Diagrama de equilíbrio de uma viga (Inmam, 1994).

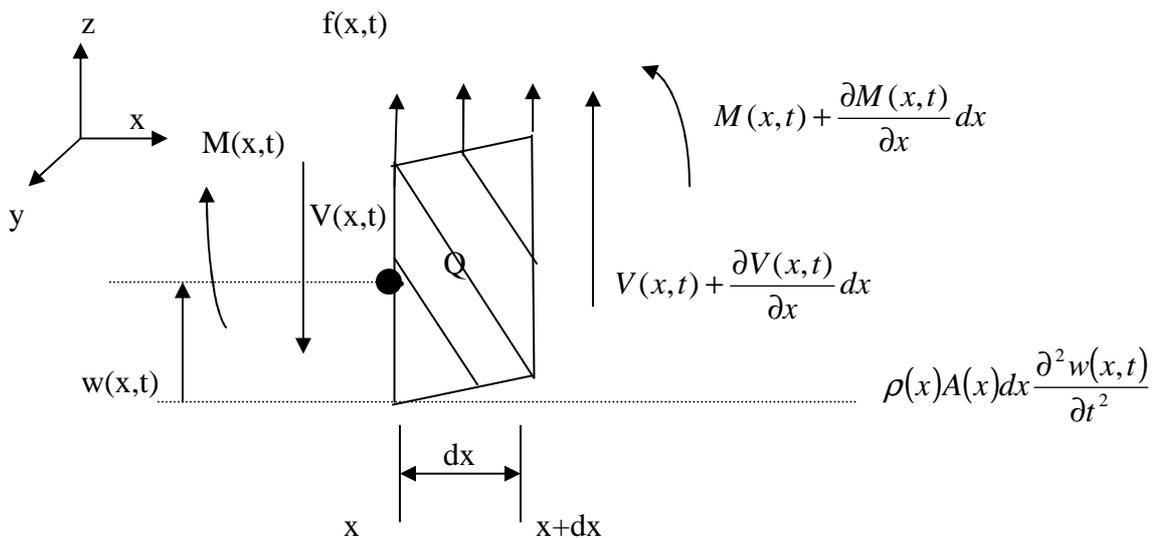


Figura 2.2 – Elemento infinitesimal de viga (Inmam, 1994).

Com: $V(x,t)$ o esforço cortante, $\rho(x,t)$ a massa específica e $A(x)$ a área .

Nesse modelo faz-se as seguintes considerações:

- O comprimento da viga é consideravelmente maior que as outras dimensões ($L/b \geq 10$, $L/h \geq 10$);
- O material é elástico e linear, isto é, obedece à lei de Hooke;
- O efeito do coeficiente de Poisson é desprezado;
- A seção transversal é simétrica em relação aos eixos coordenados, de modo que a linha neutra e os eixos dos centróides coincidem;
- O plano perpendicular à linha neutra permanece perpendicular após a deformação, isto é, não existe cisalhamento;
- Os deslocamentos angulares são pequenos.

Aplicando-se a segunda Lei de Newton no elemento infinitesimal considerado, e tomando-se apenas forças, tem-se:

$$\left(V(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx \right) - V(x,t) + f(x,t)dx = \rho(x)A(x)dx \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (2.4)$$

Aplicando-se novamente a segunda Lei de Newton agora para o momento agindo no elemento infinitesimal dx , ao longo do eixo z em torno ponto Q , tem-se:

$$\left[M(x,t) + \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} dx \right] - M(x,t) + \left[V(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx \right] dx + [f(x,t)dx] \frac{dx}{2} = 0 \quad (2.5)$$

A equação (2.5) pode ser simplificada para:

$$\left[\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} + V(x,t) \right] dx + \left[\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} + \frac{f(x,t)}{2} \right] dx^2 = 0 \quad (2.6)$$

Se dx é muito pequeno, então dx^2 tende à zero, logo a equação (2.6), do momento, pode ser aproximada para:

$$V(x,t) = -\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} \quad (2.7)$$

Substituindo a equação (2.7) na equação (2.4), obtém-se:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} [M(x,t)] dx + f(x,t) dx = \rho(x) A(x) dx \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (2.8)$$

Finalmente substituindo a equação (2.3) na equação (2.8) e dividindo-se toda expressão por dx , tem-se:

$$\rho(x) A(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[Y(x) I(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] = f(x,t) \quad (2.9)$$

Admitindo-se que a área da seção transversal, o módulo de elasticidade longitudinal, o momento de inércia de área e a massa específica são constantes, a equação dinâmica resultante é conhecida como equação de Euler-Bernoulli.

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + YI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} = f(x,t) \quad (2.10)$$

As seguintes condições de contornos para as extremidades da viga são possíveis:

$$\text{apoiada: } \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad w = 0 \quad (2.11)$$

$$\text{livre: } \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad (2.12)$$

$$\text{engastada: } \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad w = 0 \quad (2.13)$$

$$\text{deslizante: } \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad (2.14)$$

Utilizando-se das condições de contorno para uma viga apoiada nas extremidades, definida pela equação (2.11), considerando que a área da seção transversal, o módulo de elasticidade e o momento de inércia de área são constantes, ao longo da viga, e considerando-se uma solução usando a separação de variáveis, tal que:

$$w(x, t) = \chi(x)T(t) \quad (2.15)$$

Tem-se substituindo na equação (2.10):

$$c^2 \frac{\chi^{iv}(x)}{\chi(x)} = -\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \omega^2, \quad c^2 = \frac{YI}{\rho A} \quad (2.16)$$

A parte temporal da equação (2.16) é:

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0 \quad (2.17)$$

Tem solução harmônica do tipo:

$$T(t) = A_1 \text{sen } \omega t + B_1 \text{cos } \omega t \quad (2.18)$$

Sendo que as constantes A_1 e B_1 são determinadas pelas condições iniciais.

O termo espacial da equação (2.16) torna-se:

$$YI \frac{d^4 \chi(x)}{dx^4} = \omega^2 \rho A \chi(x) \quad (2.19)$$

Definindo-se a variável β como:

$$\beta^4 = \frac{\omega^2 \rho A}{YI} \quad (2.20)$$

Substituindo a equação (2.20) na equação (2.19), tem-se a seguinte equação correspondente aos autovalores:

$$\frac{d^4}{dx^4} \chi(x) - \beta^4 \chi(x) = 0 \quad (2.21)$$

A equação (2.21) tem a seguinte autofunção como solução:

$$\chi(x) = C_1 \sin(\beta x) + C_2 \cos(\beta x) + C_3 \sinh(\beta x) + C_4 \cosh(\beta x) \quad (2.22)$$

2.1.1 Solução Analítica Para Uma Viga Biapoada

Aplicando-se as condições de contorno da equação (2.11) em $x=0$, na equação (2.22), obtém-se:

$$\chi(0) = 0 = C_2 + C_4 \quad (2.23)$$

$$\chi''(0) = 0 = -C_2 + C_4 \quad (2.24)$$

Estas condições conduzem a $C_2 = C_4 = 0$.

Aplicando-se as mesmas condições de contorno na outra extremidade da viga, $x=L$, obtém-se:

$$\chi(L) = 0 = C_1 \sin(\beta L) + C_3 \sinh(\beta L) \quad (2.25)$$

$$\chi''(L) = 0 = \beta^2 [-C_1 \sin(\beta L) + C_3 \sinh(\beta L)] \quad (2.26)$$

O fator β^2 na equação (2.26) não pode ser zero, pois neste caso a frequência seria nula, então o valor entre parênteses deve ser nulo. Adicionando-se e subtraindo-se as equações (2.25) e (2.26), produzem-se as relações:

$$2C_3 \sinh(\beta L) = 0 \quad (2.27)$$

$$2C_1 \sin(\beta L) = 0 \quad (2.28)$$

Considerando-se a condição não trivial ($C_3=0$ e $C_1 \neq 0$) para as equações (2.27) e (2.28), obtém-se:

$$\beta_i L = i\pi; \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.29)$$

Determinando-se o valor de β na equação (2.29), substituindo na equação (2.20) e resolvendo-a para o valor de ω , tem-se:

$$\omega_i = \left(\frac{i\pi}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{YI}{\rho A}}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.30)$$

Então a autofunção se torna:

$$\chi(x) = C_1 \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \quad (2.31)$$

O valor de C_1 é obtido através da normalização, de acordo com a equação (2.32):

$$\int_0^L \rho A \chi_i^2(x) dx = 1 \quad (2.32)$$

Portanto:

$$\int_0^L C_1^2 \rho A \operatorname{sen}^2\left(\frac{i\pi x}{L}\right) dx = 1 \quad (2.33)$$

Resolvendo-se a integral encontra-se C_1 :

$$C_1 = \sqrt{\frac{2}{\rho AL}} \quad (2.34)$$

Substituindo-se a equação (2.34) na equação (2.31) tem-se os modos de vibrar para uma viga biapoada,

$$\chi(x) = \sqrt{\frac{2}{\rho AL}} \operatorname{sen}\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \quad (2.35)$$

os quais são apresentados na forma de gráfico na figura 2.3 com os dados da tabela 2.1

Tabela 2.1 Dados da viga biapoada

Grandeza	Valor	Unidade
Comprimento L	1,5	m
Largura b	0,075	m
Altura h	0,075	m
Densidade ρ	7800	kg/m ³
Módulo de Young Y	210x10 ⁹	N/m ²

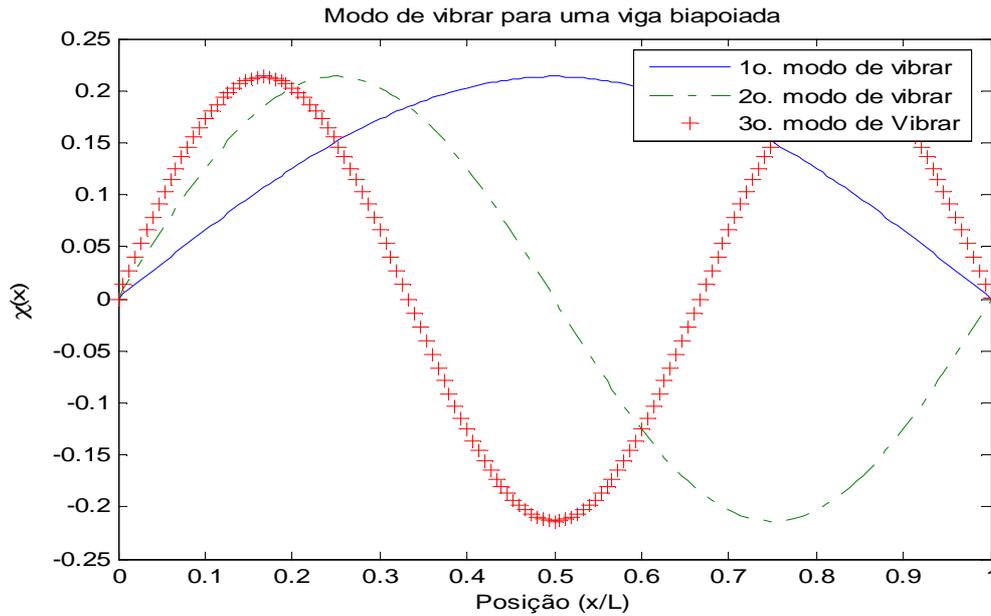


Figura 2.3 – Modos de vibrar para uma viga apoiada nas extremidades (biapoiada).

2.1.2 Solução Analítica Para Uma Viga em Balanço

Considerando-se novamente a área da seção transversal, o módulo de elasticidade e o momento de inércia de área constante e impondo-se as condições de contorno apropriadas para uma viga em balanço, fixa em uma extremidade e livre na outra, descritas pelas equações (2.12) e (2.13) e substituindo na equação (2.22), encontra-se:

$$\chi(0) = C_2 + C_4 = 0 \quad (2.36)$$

$$\chi'(0) = C_1 + C_3 = 0 \quad (2.37)$$

Então a equação (2.22) se reduz a:

$$\chi(x) = C_1 [\text{sen}(\beta x) - \text{senh}(\beta x)] + C_2 [\cos(\beta x) - \cosh(\beta x)] \quad (2.38)$$

Aplicando-se as condições de contorno para $x=L$, resultam as relações:

$$\chi''(L) = C_1 [\text{sen}(\beta L) + \text{senh}(\beta L)] + C_2 [\cos(\beta L) + \cosh(\beta L)] = 0 \quad (2.39)$$

$$\chi'''(L) = C_1 [\cos(\beta L) + \cosh(\beta L)] - C_2 [\sen(\beta L) - \sinh(\beta L)] = 0 \quad (2.40)$$

Resolvendo-se para C_2 em função de C_1 e substituindo na equação (2.38), obtém-se:

$$\chi(x) = \frac{C_1}{\sen(\beta L) - \sinh(\beta L)} \{ [\sen(\beta L) - \sinh(\beta L)] [\sen(\beta x) - \sinh(\beta x)] + [\cos(\beta L) + \cosh(\beta L)] [\cos(\beta x) - \cosh(\beta x)] \} \quad (2.41)$$

Escrevendo-se as equações (2.39) e (2.40) na forma matricial, vem:

$$\begin{Bmatrix} [\sen(\beta L) + \sinh(\beta L)] & [\cos(\beta L) + \cosh(\beta L)] \\ [\cos(\beta L) + \cosh(\beta L)] & -[\sen(\beta L) - \sinh(\beta L)] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.42)$$

O determinante da matriz da equação (2.42) deve ser igual a zero para uma solução não trivial, logo:

$$\{ [\sen(\beta L) + \sinh(\beta L)] [-\sen(\beta L) + \sinh(\beta L)] - [\cos(\beta L) + \cosh(\beta L)]^2 \} = 0 \quad (2.43)$$

A equação (2.43) é a equação característica, que simplificando conduz:

$$\cos(\beta L) \cosh(\beta L) = -1 \quad (2.44)$$

As três primeiras raízes da equação (2.44) obtidas numericamente, são:

$$\beta L = [1,875 \quad 4,694 \quad 7,855] \quad (2.45)$$

Substituindo esses valores na equação (2.41), com o valor da C_1 dado pela equação (2.37), fez-se a simulação de uma viga em balanço, com as mesmas características apresentadas na tabela 2.1, para o primeiro, o segundo e o terceiro modo de vibrar, mostrados na figura 2.4.

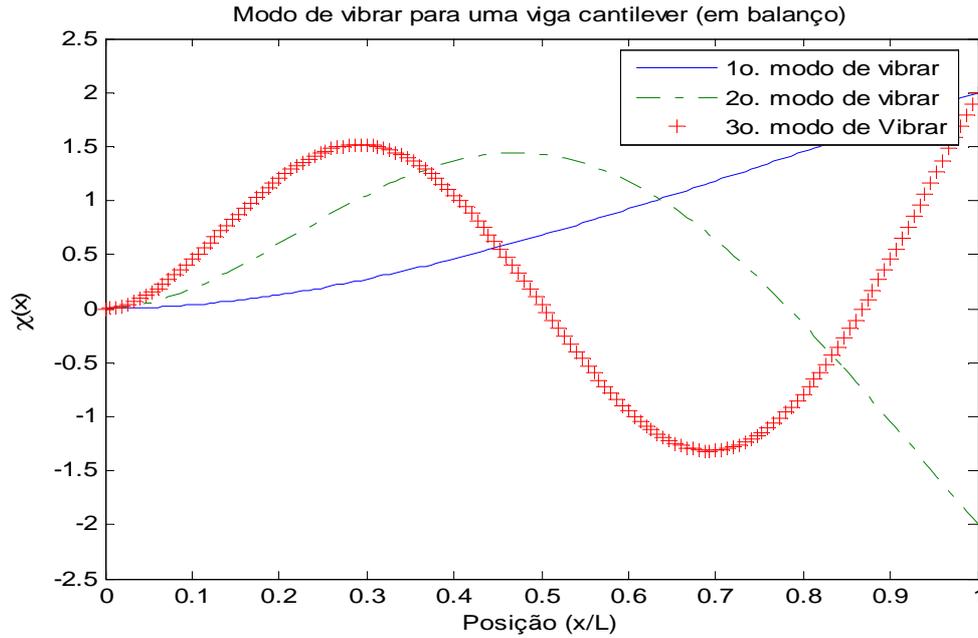


Figura 2.4 – Modos de vibrar para uma viga em balanço.

2.2 MODELAGEM DE VIGAS COM ELEMENTOS PIEZELÉTRICOS INCORPORADOS

Considera-se uma estrutura flexível do tipo viga com atuadores piezelétricos incorporados que aplicam momentos concentrados, como mostrado na figura 2.5. Utilizando-se a teoria de Euler-Bernuolli obtém-se a equação do movimento considerando-se o momento induzido e escrevendo-se o momento de flexão em função do deslocamento transversal (Dimitriadis et al., 1991):

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + YI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} = f(x,t) + \frac{\partial^2 m_x(x,t)}{\partial x^2} \quad (2.46)$$

A relação entre deformação e tensão no elemento piezelétrico resultante da aplicação de um potencial elétrico, conhecido como efeito piezelétrico inverso, é de acordo com Wang (2001):

$$\sigma_x = Y_{pe} \epsilon_x - e_{31} \frac{\phi^a}{h_{pe}} \quad (2.47)$$

Com:

$$e_{31} = Y_{pe} d_{31} \quad (2.48)$$

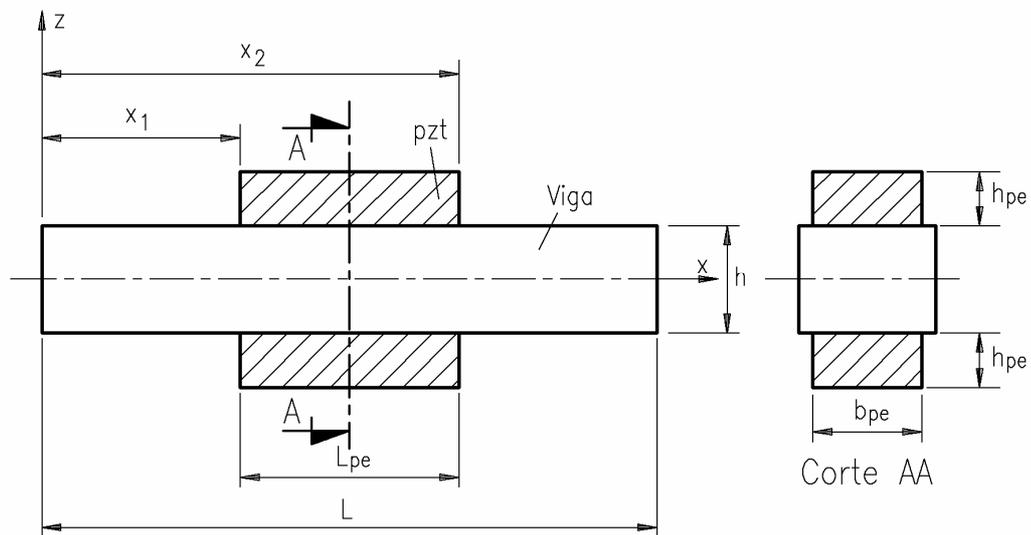


Figura 2.5 – Viga com elemento piezoelectrico incorporado.

A figura 2.6 mostra o elemento piezoelectrico quando é aplicado um potencial elétrico na direção 3 coincidente com a direção do eixo z da viga da figura 2.5, resultando uma deformação nas direções 1 e 2.

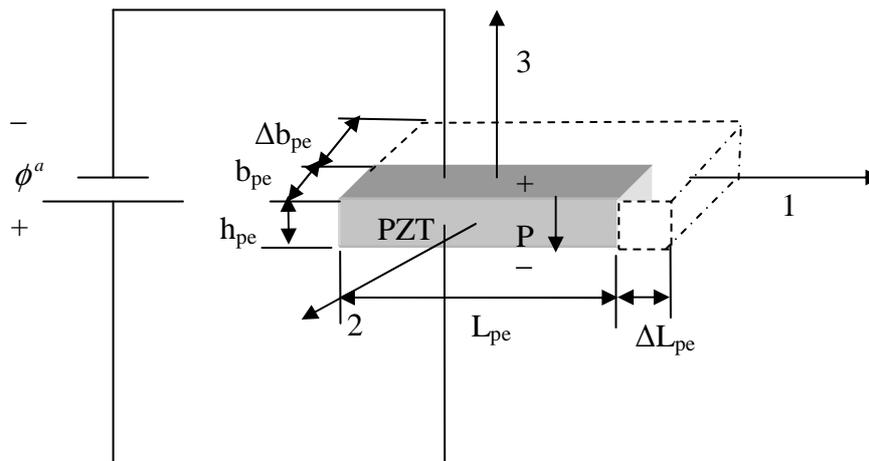


Figura 2.6 – Relação entre potencial elétrico aplicado e deformação.

Da teoria da elasticidade, a relação entre a tensão de flexão e o momento aplicado é:

$$\sigma_x = \frac{m_x c_n}{I^a} \quad (2.49)$$

Com: c_n a distância entre a linha neutra da viga e a linha neutra do atuador piezolétrico.

Então a expressão do momento fletor devido a força axial na superfície da viga é:

$$m_x = \frac{\sigma_x I^a}{\frac{1}{2}(h + h_{pe}^a)} \quad (2.50)$$

Usando-se o teorema de eixos paralelos pode-se transferir o momento de inércia de área do elemento piezolétrico para o eixo x:

$$I^a = \frac{b_{pe} (h_{pe}^a)^3}{12} + b_{pe} h_{pe}^a \left[\frac{1}{2}(h + h_{pe}^a) \right]^2 \quad (2.51)$$

Como a espessura do piezolétrico é muito pequena em relação a espessura da estrutura, despreze-se a primeira parcela da equação (2.51) conduzindo a:

$$I^a = \frac{b_{pe} h_{pe}^a}{4} (h + h_{pe}^a)^2 \quad (2.52)$$

Substituindo-se a equação (2.52) na equação (2.50), tem-se:

$$m_x = \sigma_x b_{pe}^a h_{pe}^a \frac{1}{2} (h + h_{pe}^a) \quad (2.53)$$

Substituindo-se as equações (2.47) e (2.48) na equação (2.53), tem-se:

$$m_x = Y_{pe}^a b_{pe}^a h_{pe}^a \left(\epsilon_x - d_{31} \frac{\phi^a}{h_{pe}^a} \right) \left(\frac{h + h_{pe}^a}{2} \right) \quad (2.54)$$

A deformação pode ser relacionada com o deslocamento vertical $w(x,t)$, pela equação:

$$\varepsilon_x = -\frac{h}{2} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \quad (2.55)$$

Então:

$$m_x = Y_{pe}^a b_{pe}^a h_{pe}^a \left(-\frac{h}{2} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - d_{31} \frac{\phi^a}{h_{pe}^a} \right) \left(\frac{h + h_{pe}^a}{2} \right) \quad (2.56)$$

Como o atuador piezolétrico não ocupa toda a extensão da viga, usa-se a função de Heaviside para representar esta condição. A função de Heaviside é definida como:

$$H(x - x_1) = \begin{cases} 1 & x \geq x_1 \\ 0 & x < x_1 \end{cases} \quad (2.57)$$

Então:

$$m_x = Y_{pe}^a \left[-b_{pe}^a h_{pe}^a \frac{h}{2} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \left(\frac{h + h_{pe}^a}{2} \right) - d_{31} b_{pe}^a h_{pe}^a \phi^a \left(\frac{h + h_{pe}^a}{2} \right) \right] [H(x - x_1) - H(x - x_2)] \quad (2.58)$$

Derivando-se a equação (2.58) duas vezes em relação à x e substituindo-se o resultado na equação (2.46), resulta:

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + YI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \left[Y_{pe}^a b_{pe}^a h_{pe}^a \frac{h}{2} \left(\frac{h + h_{pe}^a}{2} \right) \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} \right] [H(x - x_1) - H(x - x_2)] = \quad (2.59)$$

$$f(x,t) - \left[Y_{pe}^a d_{31} b_{pe}^a \phi^a h_{pe}^a \left(\frac{h + h_{pe}^a}{2} \right) \right] \frac{\partial^2 [H(x - x_1) - H(x - x_2)]}{\partial x^2}$$

A equação (2.59) representa o comportamento dinâmico de uma viga com elementos piezolétricos incorporados.

2.3 EQUAÇÃO DO SENSOR PIEZELÉTRICO INCORPORADO EM UMA VIGA

A equação do sensor piezolétrico é proveniente da equação da piezeletricidade e da relação de tensão e deformação da viga. Considera-se que a espessura do material piezolétrico é muito menor do que a espessura da viga, então a deformação do sensor piezolétrico é constante e igual à deformação da superfície da estrutura (Lima Jr., 1999).

A voltagem através dos eletrodos pode ser obtida integrando-se o campo elétrico através da espessura do sensor piezolétrico:

$$\phi^s = - \int_{h_{pe}^s} E_3 dz = h_{pe}^s E_3 \quad (2.60)$$

Sendo que:

$$E_3 = \frac{1}{\xi_{33}^{\sigma}} (-e_{31} \varepsilon_x + D_3) \quad (2.61)$$

com a constante de permissividade dielétrica definida por:

$$\xi_{33}^{\sigma} = K_d \xi_s \quad (2.62)$$

Sendo que a ξ_s é a constante de permissividade no vácuo é igual a $(8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m})$ e K_d é a constante dielétrica do material.

Substituindo-se a equação (2.61) na equação (2.60), tem-se:

$$\phi^s = \left(-\frac{1}{\xi_{33}^{\sigma}} D_3 + \frac{1}{\xi_{33}^{\sigma}} e_{31} \varepsilon_x \right) h_{pe}^s \quad (2.63)$$

Fazendo-se:

$$h_{31} = \frac{e_{31}}{\xi_{33}^{\sigma}} \quad (2.64)$$

e substituindo-se a equação (2.64) na equação (2.63), tem-se:

$$\phi^s = \left(-\frac{1}{\xi_{33}^\sigma} D_3 + h_{31} \epsilon_x \right) h_{pe}^s \quad (2.65)$$

Resolvendo-se a equação (2.65) em D_3 , tem-se:

$$D_3 = \xi_{33}^\sigma \left(h_{31} \epsilon_x - \frac{\phi^s}{h_{pe}^s} \right) \quad (2.66)$$

Com D_3 sendo definido como carga elétrica por unidade de área (C/m^2).

Integrando a equação (2.66) ao longo da superfície do eletrodo, tem-se a carga superficial total.

$$\int_A D_3 dA_{pe}^s = \int_A \left(h_{31} \epsilon_x - \frac{\phi^s}{h_{pe}^s} \right) \xi_{33}^\sigma dA_{pe}^s \quad (2.67)$$

A tensão de circuito aberto pode ser obtida fazendo-se a carga igual a zero, então:

$$0 = \int_A h_{31} \epsilon_x dA_{pe}^s - \int_A \frac{\phi^s}{h_{pe}^s} dA_{pe}^s \quad (2.68)$$

Resolvendo-se a equação (2.68), tem-se:

$$\int_A \frac{\phi^s}{h_{pe}^s} dA_{pe}^s = \int_A h_{31} \epsilon_x dA_{pe}^s \quad (2.69)$$

Então:

$$\frac{\phi^s}{h_{pe}^s} A_{pe}^s = h_{31} \int_A \epsilon_x dA_{pe}^s \quad (2.70)$$

Explicitando-se a equação (2.70) em função da voltagem no sensor, tem-se:

$$\phi^s = \frac{h_{pe}^s h_{31}}{A_{pe}^s} \int_A \varepsilon_x dA_{pe}^s \quad (2.71)$$

Sendo que:

$$\varepsilon_x = -h_s^r \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.72)$$

Com h_s^r igual a distância do plano neutro da viga até o plano neutro relativo ao sensor e h_{31} é a constante que relaciona o potencial elétrico de circuito aberto a uma dada tensão (C/Fm).

Substituindo a equação (2.72) na equação (2.71), tem-se que a equação do sensor é igual a:

$$\phi^s = -\frac{h_{pe}^s h_{31} h_s^r}{A_{pe}^s} \int_A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dA_{pe}^s \quad (2.73)$$

Como pode ser observado na equação (2.73), a integração depende das condições de contorno e da área efetiva do sensor. Ela mostra que o sinal de saída do sensor é proporcional à inclinação das extremidades do sensor. Conseqüentemente o sinal do sensor é igual a zero se as inclinações das extremidades forem iguais. Esse é o caso dos modos anti-simétricos de uma viga simplesmente apoiada nas extremidades com uma camada de sensor piezelétrico simetricamente distribuído.

Capítulo 3

FORMULAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS PARA PROBLEMAS DE PIEZELETRICIDADE

Neste capítulo, faz-se a descrição do método de elementos finitos empregado para solucionar a equação de viga, descrevendo-se a metodologia utilizada para obtenção das matrizes de massa e rigidez e a transferência de coordenadas do referencial do elemento local para o global. Também são feitas as inclusões de elementos piezelétricos nas matrizes de massa e de rigidez, visando-se obter as matrizes globais com estes elementos incorporados.

3.1 FUNDAMENTOS DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS EM VIGAS PARA O MODELO TIMOSHENKO

O processo de discretização que tem como objetivo a obtenção das matrizes de massa e rigidez do sistema e é baseado na aproximação da solução procurada por uma expansão em série finita:

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^n N_i(x)q_i(t) = [N(x)]^T \{q(t)\} \quad (3.1)$$

Com:

$$[N(x)] = [N_1(x) \quad N_2(x) \quad \dots \quad N_n(x)]^T \quad (3.2)$$

$$\{q(t)\} = \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

Quanto mais termos forem adicionados à série, melhor a aproximação em relação à solução procurada.

A função de forma ou interpolação $N_i(x)$ deve satisfazer as seguintes condições:

- Ser linearmente independente entre si;
- Ser contínua e ter derivada contínua pelo menos até uma ordem abaixo da ordem de derivação do funcional de energia;
- Satisfazer as condições de contorno geométricas.

As equações de Lagrange para sistemas discretizadas com n graus de liberdade, descritos pelos deslocamentos independentes q_i é dada por (Meirovitch, 1986):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.4)$$

Onde, Q_i é a força generalizada.

Para modelar o campo de deslocamento do elemento de viga, utiliza-se o vetor nodal da seguinte maneira:

$$\{q\} = [u_i \quad w_i \quad \theta_i \quad \psi_i \quad u_j \quad w_j \quad \theta_j \quad \psi_j]^T \quad (3.5)$$

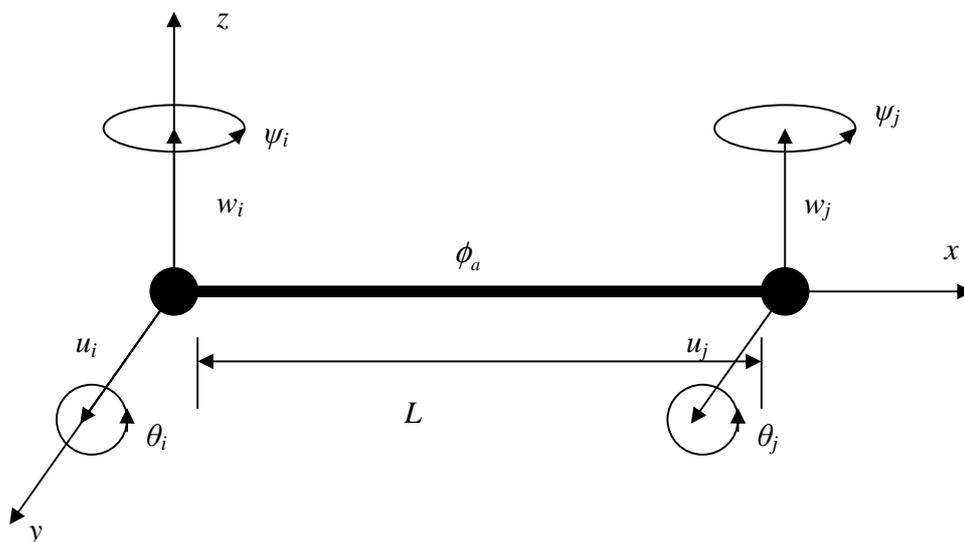


Figura 3.1 – Elemento de viga.

O elemento de viga é modelado com seção transversal constante.

O elemento finito utilizado tem dois nós, com quatro graus de liberdade por nó. As matrizes de elemento tem ordem oito, incluindo quatro deslocamentos lineares e quatro deslocamentos angulares.

A figura 3.1 mostra a representação gráfica do vetor nodal da viga. Este vetor pode ser decomposto em dois grupos, segundo as direções y e z respectivamente:

$$\{q_u\} = [u_i \quad \psi_i \quad u_j \quad \psi_j]^T \quad (3.6)$$

$$\{q_w\} = [w_i \quad \theta_i \quad w_j \quad \theta_j]^T \quad (3.7)$$

As funções de interpolação que satisfazem as condições geométricas de contorno para o modelo adotado são as seguintes:

$$[N(x)] = [[N_1(x)] \quad [N_2(x)]]^T \quad (3.8)$$

Onde:

$$[N_1(x)] = [l_1(x) \quad l_2(x) \quad l_3(x) \quad l_4(x)]^T \quad (3.9)$$

$$[N_2(x)] = [l_5(x) \quad l_6(x) \quad l_7(x) \quad l_8(x)]^T \quad (3.10)$$

Com as funções de interpolação iguais a:

$$l_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \quad (3.11)$$

$$l_2(x) = -x + \frac{2x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2} \quad (3.12)$$

$$l_3(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \quad (3.13)$$

$$l_4(x) = \frac{x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2} \quad (3.14)$$

$$l_5(x) = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \quad (3.15)$$

$$l_6(x) = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (3.16)$$

$$l_7(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \quad (3.17)$$

$$l_8(x) = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (3.18)$$

Os deslocamentos lineares $u(y,t)$ e $w(z,t)$ e angulares $\theta(y,t)$ e $\psi(z,t)$ são obtidos de forma aproximada a partir desta discretização:

$$u(y,t) = [N_1(x)]^T \{q_u\} \quad (3.19)$$

$$\psi = \frac{d}{dx} u(y,t) = \frac{d}{dx} [N_1(x)]^T \{q_u\} \quad (3.20)$$

$$w(z,t) = [N_2(x)]^T \{q_w\} \quad (3.21)$$

$$\theta = \frac{d}{dx} w(z,t) = \frac{d}{dx} [N_2(x)]^T \{q_w\} \quad (3.22)$$

A energia cinética da viga é expressa no modelo contínuo por:

$$T = \frac{\rho A}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dx + \frac{\rho I}{2} \int_0^L (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dx \quad (3.23)$$

sendo ρ é a massa específica (kg/m^3), A a área da seção transversal (m^2), I é o momento de inércia de área da seção transversal em relação a linha neutra e L o comprimento (m).

Aplicando-se as equações (3.19) a (3.22) na equação (3.23), tem-se:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{\rho A}{2} \int_0^L \left(\{\dot{q}_u\}^T [N_1] [N_1]^T \{\dot{q}_u\} + \{\dot{q}_w\}^T [N_2] [N_2]^T \{\dot{q}_w\} \right) dx + \\
&\frac{\rho I}{2} \int_0^L \left(\{\dot{q}_u\}^T \frac{d[N_1]}{dx} \frac{d[N_1]^T}{dx} \{\dot{q}_u\} \right) dx + \frac{\rho I}{2} \int_0^L \left(\{\dot{q}_w\}^T \frac{d[N_2]}{dx} \frac{d[N_2]^T}{dx} \{\dot{q}_w\} \right) dx
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Trabalhando-se a equação (3.24), obtém-se:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \{\dot{q}_u\}^T [M_1] \{\dot{q}_u\} + \frac{1}{2} \{\dot{q}_w\}^T [M_2] \{\dot{q}_w\} + \frac{1}{2} \{\dot{q}_u\}^T [M_3] \{\dot{q}_u\} + \\
&\frac{1}{2} \{\dot{q}_w\}^T [M_4] \{\dot{q}_w\}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Com:

$$[M_1] = \frac{\rho A}{2} \int_0^L [N_1] [N_1]^T dx = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L & 54 & 13L \\ -22L & 4L^2 & -13L & -3L^2 \\ 54 & -13L & 156 & 22L \\ 13L & -3L^2 & 22L & 4L^2 \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

$$[M_2] = \frac{\rho A}{2} \int_0^L [N_2] [N_2]^T dx = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 15L & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

$$[M_3] = \frac{\rho I}{2} \int_0^L \frac{d[N_1]}{dy} \frac{d[N_1]^T}{dy} dx = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & -3L & -36 & -3L \\ -3L & 4L^2 & 3L & -L^2 \\ 4L^2 & 3L & 36 & 3L \\ -3L & -L^2 & 3L & 4L^2 \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

$$[M_4] = \frac{\rho I}{2} \int_0^L \frac{d[N_2]}{dy} \frac{d[N_2]^T}{dy} dx = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ 4L^2 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

As matrizes $[M_1]$ e $[M_2]$ são as matrizes de massa clássica, $[M_3]$ e $[M_4]$ são as matrizes responsáveis pelo efeito da inércia de rotação.

Substituindo-se a equação (3.25) na equação (3.4), (Lalanne e Ferraris, 1990), tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = ([M_{12}] + [M_{34}]) \ddot{q} \quad (3.30)$$

As matrizes de massa dos elementos $[M_{12}]$ e $[M_{34}]$ são obtidas posicionando-se cada elemento das matrizes das equações (3.26) a (3.29) de acordo com seu grau de liberdade, então:

$$[M_{12}] = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

$$[M_{34}] = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Portanto a matriz de massa total do elemento é obtida através da equação:

$$[m_{qq_e}] = [M_{12}] + [M_{34}] \quad (3.33)$$

A energia potencial ocorre devido à flexão da viga e pode ser escrita como:

$$U = \frac{Y}{2} \int_0^L \left[I_z \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + I_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx \quad (3.34)$$

sendo Y (N/m^2) o módulo de elasticidade longitudinal, I_y e I_z (m^4) são os momentos de inércia de área da seção transversal em relação à y e a z .

Aplicando-se as equações (3.19) e (3.21) na equação (3.34), e considerando-se uma viga simétrica¹ $I_y = I_z = I$, obtém-se:

$$U = \frac{YI}{2} \int_0^L \left[\{q_u\}^T \frac{d^2[N_1]}{dx^2} \frac{d^2[N_1]^T}{dx^2} \{q_u\} + \{q_w\}^T \frac{d^2[N_2]}{dx^2} \frac{d^2[N_2]^T}{dx^2} \{q_w\} \right] dx \quad (3.35)$$

Substituindo-se as funções de interpolações, equações (3.9) e (3.10), na equação (3.35), obtêm-se:

$$U = \frac{1}{2} \{q_u\}^T [K_1] \{q_u\} + \frac{1}{2} \{q_w\}^T [K_2] \{q_w\} \quad (3.36)$$

Com:

¹ Nas simulações eliminando-se um grau de rotação é possível simular vigas de seção não simétrica.

$$[K_1] = YI \int_0^L \frac{d^2[N_1]}{dx^2} \frac{d^2[N_1]^T}{dx^2} dx = \frac{YI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ -12 & 6L & 12 & 6L \\ -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$[K_2] = YI \int_0^L \frac{d^2[N_2]}{dx^2} \frac{d^2[N_2]^T}{dx^2} dy = \frac{YI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Substituindo-se a equação (3.36) na equação (3.4), (Lalanne e Ferraris, 1990), tem-se:

$$\frac{\partial U}{\partial q} = ([K_1] + [K_2])\{q\} \quad (3.39)$$

A matriz de rigidez clássica devido a flexão do elemento é obtida posicionando-se cada elemento das matrizes das equações (3.37) e (3.38) de acordo com seu grau de liberdade, então:

$$[k_{qq}]_e = \frac{YI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & 0 & -6L & 2L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & 4L^2 & 6L & 0 & 0 & 2L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12L & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & 0 & -6L & 4L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 0 & L^2 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

A força de superfície é dada por:

$$\{f_s\}_e = b \int_0^L [N]^T \{f_s\} dx \quad (3.41)$$

E a força pontual é dada por:

$$\{f_i\}_e = f_i \delta(x - x_i) \quad (3.42)$$

As matrizes globais são obtidas através do somatório posicionando-se cada elemento das matrizes dos elementos de acordo com seu grau de liberdade

$$[M_{qq}] = \sum_{e=1}^n [m_{qq}]_e \quad \{F_s\} = \sum_{e=1}^n \{f_s\}_e \quad (3.43)$$

$$[K_{qq}] = \sum_{e=1}^n [k_{qq}]_e \quad \{F_i\} = \sum_{e=1}^n \{f_i\}_e \quad (3.44)$$

O resultado das equações (3.43) e (3.44) são matrizes quadradas de ordem $4n$ onde n é o número graus de liberdade.

$$[M_{qq}] \{\ddot{q}\} + [K_{qq}] \{q\} = \{F_i\} + \{F_s\} \quad (3.45)$$

3.2 ELEMENTOS FINITOS PARA MEIOS PIEZELÉTRICOS

Neste item são determinadas as matrizes de rigidez piezométrica e dielétrica e as matrizes de massa e rigidez estrutural do elemento piezométrico. Estas matrizes são determinadas utilizando-se da mesma formulação em elementos finitos descrita no item anterior.

A discretização do elemento piezelétrica é feita com elementos isoparamétricos com quatro graus de liberdade, mostrada na figura 3.1.

Então definindo as aproximações nodais como:

$$u'(y,t) = \frac{d}{dx} [N_1(x)]^T \{q_u\} = [B_u]^T \{q_u\} \quad (3.46)$$

$$w'(z,t) = \frac{d}{dx} [N_2(x)]^T \{q_w\} = [B_w]^T \{q_w\} \quad (3.47)$$

$$w''(z,t) = \frac{d^2}{dx^2} [N_2(x)]^T \{q_w\} = [B'_w]^T \{q_w\} \quad (3.48)$$

A equação construtiva da piezeletricidade linear é (Lima Jr, 1999):

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [c^E] \{\varepsilon\} - [e] \{E\} \\ \{D\} &= [e]^T \{\varepsilon\} - [\xi^E] \{E\} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Sendo que:

$$\begin{aligned} [e] &= [c^E] [d] \\ [\xi^E] &= [\xi^\sigma] - [d]^T [c^E] [d] \end{aligned} \quad (3.50)$$

Com: $\{\sigma\}$ - tensor tensão mecânica; $\{\varepsilon\}$ - tensor deformação; $\{E\}$ - vetor campo; $\{D\}$ - vetor deslocamento elétrico; $[c^E]$ - matriz de elasticidade para campo elétrico constante; $[e]$ - matriz de constantes de tensões piezelétricas; $[\xi^E]$ - tensor de constantes dielétricas para deformação constante $[\xi^\sigma]$ - matriz de constantes dielétricas para tensão mecânica constante; $[d]$ - matriz de constantes de deformações piezelétricas

A energia potencial para materiais piezelétricos na forma de matriz, (Lima Jr., 1999) é:

$$\delta U = \iiint_{\Omega_{pe}} \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} d\Omega_{pe} - \iiint_{\Omega_{pe}} \{\delta E\}^T \{D\} d\Omega_{pe} \quad (3.51)$$

Substituindo a equação (3.49) na equação (3.51) é:

$$\delta U = \iiint_{\Omega_{pe}} \{\delta \varepsilon\}^T \left([c^E] \{\varepsilon\} - [e] \{E\} \right) d\Omega_{pe} - \iiint_{\Omega_{pe}} \{\delta E\}^T \left([e]^T \{\varepsilon\} - [\zeta^E] \{E\} \right) d\Omega_{pe} \quad (3.52)$$

Sendo que:

$$\varepsilon_x = -z w''(z, t) \quad (3.53)$$

Com a aproximação por elementos finitos, a relação cinemática, na forma matricial é:

$$\{\varepsilon\} = \left\{ [B_u] - z[B'_w] \right\} \{q_i\} \quad (3.54)$$

Já para o domínio utilizado, a equação constitutiva da piezoelectricidade linear obtém-se:

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} = \varepsilon_x \quad [c^E] = Y_{pe} \quad \{\sigma\} = \sigma_x, \\ \{e\} = e_{31} \quad [\zeta^E] = \zeta_{33}^E \quad [D] = D_3 \quad \{E\} = E_3 \end{aligned} \quad (3.55)$$

Reescrevendo a energia potencial, com auxílio das equações (3.54) e (3.55), é:

$$\begin{aligned} \delta U = & \{\delta q_i\}^T \iiint_{V_{pe}} \left([B_u] - z[B'_w] \right)^T Y_{pe} \left([B_u] - z[B'_w] \right) d\Omega_{pe} \{q_i\} \\ & + \{\delta q_i\}^T \iiint_{V_{pe}} \left([B_u] - z[B'_w] \right)^T e_{31} [B_\phi] d\Omega_{pe} \{\phi_i\} \\ & + \{\delta \phi_i\}^T \iiint_{V_{pe}} [B_\phi]^T e_{31} \left([B_u] - z[B'_w] \right) d\Omega_{pe} \{q_i\} \\ & - \{\delta \phi_i\}^T \iiint_{V_{pe}} [B_\phi]^T \zeta_{33}^E [B_\phi] d\Omega_{pe} \{\phi_i\} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Fazendo com que

$$[k_{q\phi}] = Y_{pe} A_{pe} d_{31} \int_0^1 [B_u]^T [B_u] dx - \left(h + \frac{h_{pe}}{2} \right) Y_{pe} A_{pe} d_{31} L \int_0^1 [B'_w]^T [B_w] dx \quad (3.57)$$

$$[k_{\phi\phi}]_e = \frac{\xi_{33}^E A_{pe} L}{h_{pe}^2} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

A carga elétrica é

$$\{q_s\}_e = - \int_0^L [N_\phi]^T \sigma_q b dx \quad (3.59)$$

Com $[N_\phi]$ a função de interpolação do potencial elétrico

Cada uma dessas matrizes de elementos é montada de forma a se obter o sistema de matrizes globais:

$$\begin{cases} [M_{qq}] \{\ddot{q}\} + [K_{qq}] \{q\} + [K_{q\phi}] \{\phi\} = \{F_s\} + \{F_i\} \\ [K_{\phi q}] \{q\} + [K_{\phi\phi}] \{\phi\} = \{Q_s\} \end{cases} \quad (3.60)$$

No sensor piezelétrico não existe voltagem aplicada ($Q_s=0$), então o potencial elétrico gerado pelo sensor é:

$$\{\phi_s\} = -[K_{\phi\phi}]^{-1} [K_{\phi q}] \{q_i\} \quad (3.61)$$

Substituindo a equação (3.61) na equação (3.60) tem-se o sistema global de equações para uma viga com atuador piezelétrico que é:

$$[M_{qq}] \{\ddot{q}\} + \left([K_{qq}] - [K_{q\phi}] [K_{\phi\phi}]^{-1} [K_{\phi q}] \right) \{q\} = \{F_s\} + \{F_i\} + \{F_{ei}\} \quad (3.62)$$

Com a força elétrica dada por:

$$\{F_{el}\} = -[K_{q\phi}][K_{\phi\phi}]^{-1}\{Q_s\} \quad (3.63)$$

Capítulo 4

POSICIONAMENTO DE ELEMENTOS PIEZELÉTRICOS EM ESTRUTURAS FLEXÍVEIS

Neste capítulo, faz-se a dedução analítica da resposta do sistema a partir da equação dinâmica da estrutura flexível com elementos piezelétricos incorporados. São determinadas características dinâmicas como, frequências naturais e modo de vibrar, da estrutura flexível com elementos piezelétricos incorporados. Portanto é determinada a solução da equação diferencial da viga com elementos piezelétricos incorporados analiticamente e numericamente através do método de elementos finitos. É demonstrado o critério de posicionamento através de um índice de controlabilidade relacionando-o com a matriz grammiana. Também são descritos os diversos módulos, diagramas e fluxogramas, do programa computacional de posicionamento de atuadores piezelétricos desenvolvido.

4.1 POSICIONAMENTO EM VIGAS

4.1.1 Solução Analítica

A equação dinâmica de uma viga de Euler-Bernoulli com elementos piezelétricos incorporados, deduzida no capítulo 2, equação (2.59) é aqui reproduzida.

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + YI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \left[Y_{pe}^a b_{pe}^a h_{pe}^a \frac{h}{2} \left(\frac{h + h_{pe}^a}{2} \right) \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} \right] [H(x-x_1) - H(x-x_2)] = \\ f(x,t) - \left[Y_{pe}^a d_{31} b_{pe}^a \phi^a \left(\frac{h + h_{pe}^a}{2} \right) \right] \frac{\partial^2}{\partial x^2} [H(x-x_1) - (x-x_2)] \end{aligned} \quad (4.1)$$

A resposta do sistema é escrita usando a expansão modal através da equação (4.2):

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^n \chi_i(x) \eta_i(t) \quad (4.2)$$

Substituindo a equação (4.2) para um modo particular i na equação (4.1), tem-se:

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 \chi_i(x) q_i(t)}{\partial t^2} + YI \frac{\partial^4 \chi_i(x) \eta_i(t)}{\partial x^4} + C_5 \frac{\partial^4 \chi_i(x) \eta_i(t)}{\partial x^4} [H(x-x_1) - H(x-x_2)] = \\ f(x,t) + C_6 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [H(x-x_1) - (x-x_2)] \end{aligned} \quad (4.3)$$

sendo que $[H(x-x_1) - H(x-x_2)]$ é a função de Heaviside que limita a ação do atuador a uma janela de tamanho definido, C_5 e C_6 são constantes definidas por:

$$C_5 = Y_{pe}^a b_{pe}^a h_{pe}^a \frac{h}{2} \left(\frac{h + h_{pe}^a}{2} \right) \quad (4.4)$$

Sendo que:

$$C_6 = -Y_{pe}^a d_{31} b_{pe}^a \phi^a \left(\frac{h + h_{pe}^a}{2} \right) \quad (4.5)$$

Diferenciando-se a equação (4.3), tem-se:

$$\begin{aligned} \rho A \chi_i(x) \ddot{q}_i(t) + Y I q_i(t) \frac{d^4 \chi_i(x)}{dx^4} + C_5 q_i(t) \frac{d^4 \chi_i(x)}{dx^4} [H(x - x_1) - H(x - x_2)] = \\ f(x, t) + C_6 \frac{d^2}{dx^2} [H(x - x_1) - H(x - x_2)] \end{aligned} \quad (4.6)$$

Multiplicando-se pela autofunção $\chi_j(x)$ e integrando-se ao longo do comprimento de viga, tem-se:

$$\begin{aligned} \rho A \ddot{q}_i(t) \int_0^L \chi_j(x) \chi_i(x) dx + Y I q_i(t) \int_0^L \chi_j(x) \frac{d^4 \chi_i(x)}{dx^4} dx + \\ C_5 q_i(t) \int_0^L \chi_j(x) \frac{d^4 \chi_i(x)}{dx^4} [H(x - x_1) - H(x - x_2)] dx = \\ \int_0^L \chi_j(x) f(x, t) dx + C_6 \int_0^L \chi_j(x) \frac{d^2}{dx^2} [H(x - x_1) - H(x - x_2)] dx \end{aligned} \quad (4.7)$$

Através do princípio da ortogonalidade dos modos, (Meirovitch, 1986), tem-se:

$$\rho A \int_0^L \chi_j(x) \chi_i(x) dx = \delta_{ij} \quad (4.8)$$

e

$$Y I \int_0^L \chi_j(x) \frac{d^4 \chi_i(x)}{dx^4} dx = \omega_i^2 \delta_{ij} \quad (4.9)$$

Com:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (4.10)$$

Substituindo-se as equações (4.8), (4.9) na equação (4.7) e considerando-se a equação (4.10), obtêm-se:

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = f_i(x, t) + C_6 \left[\frac{d}{dx} \chi_i(x_1) - \frac{d}{dx} \chi_i(x_2) \right] \quad (4.11)$$

Com:

$$f_i(x, t) = \int_0^L \chi_i(x) f(x, t) dx \quad (4.12)$$

e

$$\chi_i(x_1) = \chi_i(x) H(x - x_1) \quad (4.13)$$

Sendo:

$$C_5 q_i \int_0^L \chi_j(x) \frac{d^4 \chi_i(x)}{dx^4} [H(x - x_1) - H(x - x_2)] dx = 0 \quad (4.14)$$

e

$$C_6 \int_0^L \chi_i(x) \frac{d^2}{dx^2} [H(x - x_1) - H(x - x_2)] dx = C_6 \left[\frac{d}{dx} \chi_i(x_1) - \frac{d}{dx} \chi_i(x_2) \right] \quad (4.15)$$

Para o caso de mais de um atuador a equação (4.11), torna-se:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = f_i(x, t) + C_6 \left[\frac{d}{dx} \chi_i(x_{11}) - \frac{d}{dx} \chi_i(x_{12}) \right] + \\ + C_6 \left[\frac{d}{dx} \chi_i(x_{21}) - \frac{d}{dx} \chi_i(x_{22}) \right] + \dots + C_6 \left[\frac{d}{dx} \chi_i(x_{p1}) - \frac{d}{dx} \chi_i(x_{p2}) \right] \end{aligned} \quad (4.16)$$

Para escrever a equação (4.16) no espaço de estado, é necessário fazer a introdução do seguinte vetor de estado, (Kwon, 1997):

$$\{z\} = \begin{Bmatrix} \{\eta_i(t)\} \\ \{\dot{\eta}_i(t)\} \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

Com:

$$\{q\} = [\eta_1 \quad \eta_2 \quad \dots \quad \eta_n]^T \quad (4.18)$$

e

$$\{\dot{q}\} = [\dot{\eta}_1 \quad \dot{\eta}_2 \quad \dots \quad \dot{\eta}_n]^T \quad (4.19)$$

Considerando-se que o número de atuadores é p , então:

$$\{u\} = [k_a \phi_1^a \quad k_a \phi_2^a \quad \dots \quad k_a \phi_p^a]^T \quad (4.20)$$

Com:

$$k_a = -Y_{pe}^a d_{31} b_{pe}^a \left(\frac{h + h_{pe}^a}{2} \right) \quad (4.21)$$

Escrevendo-se então a equação (4.16) na forma de espaço de estado e considerando-se a existência de forças ou perturbações externas, tem-se:

$$\{\dot{z}\} = [A]\{z\} + [B]\{u\} + \{f_e(t)\} \quad (4.22)$$

Com:

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[\Lambda] & [0] \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

e

$$[B] = \begin{bmatrix} [0] \\ [B_a] \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Sendo que:

$$[B_a] = \begin{bmatrix} B_{a1}^1 & B_{a2}^1 & \dots & B_{ap}^1 \\ B_{a1}^2 & B_{a2}^2 & \dots & B_{ap}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{a1}^n & B_{a2}^n & \dots & B_{ap}^n \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

e:

$$B_{ap}^n = \left[\frac{d}{dx} \chi_n(x_{p1}) - \frac{d}{dx} \chi_n(x_{p2}) \right] \quad (4.26)$$

As forças externas, calculadas pela equação (4.12), é definida como:

$$\{\bar{f}_e(t)\} = [\bar{f}_1(t) \quad \bar{f}_2(t) \quad \dots \quad \bar{f}_n(t)]^T \quad (4.27)$$

e

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

4.1.2 SOLUÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS

A equação dinâmica de uma estrutura com elementos piezelétricos incorporados, modelados por elementos finitos de acordo com a equação (3.62) é dada por:

$$[M_{qq}]\{\ddot{q}\} + [K^*]\{q\} = \{F_s\} + \{F_i\} + \{F_{el}\} \quad (4.29)$$

Com:

$$[K^*] = [K_{qq}] - [K_{q\phi}] [K_{\phi\phi}]^{-1} [K_{\phi q}] \quad (4.30)$$

A resposta do sistema pode ser escrita pela superposição modal através da relação:

$$\{q(x, t)\} = [\bar{\chi}]\{\eta(t)\} \quad (4.31)$$

Aplicando-se a equação (4.31) na equação (4.29), obtém-se:

$$[M_{qq}] [\bar{\chi}]\{\ddot{\eta}(t)\} + [K^*] [\bar{\chi}]\{\eta(t)\} = \{\bar{F}\} \quad (4.32)$$

Com:

$$\{\bar{F}\} = \{\bar{F}_s\} + \{\bar{F}_i\} + \{\bar{F}_{el}\} \quad (4.33)$$

Pré-multiplicando-se a equação (4.32) por $[\bar{\chi}]^T$, tem-se:

$$[\bar{\chi}]^T [M_{qq}] [\bar{\chi}]\{\ddot{\eta}(t)\} + [\bar{\chi}]^T [K^*] [\bar{\chi}]\{\eta(t)\} = [\bar{\chi}]^T \{F\} \quad (4.34)$$

Ou de outra forma:

$$[I]\{\ddot{\eta}(t)\} + [\Lambda]\{\eta(t)\} = \{\bar{F}\} \quad (4.35)$$

sendo que:

$$[\bar{\chi}]^T [M_{qq}] [\bar{\chi}] = [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

e

$$[\Lambda] = [\bar{\chi}]^T [K^*] [\bar{\chi}] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

sendo que:

$$\{\bar{F}\} = [\bar{\chi}]^T \{F\} \quad (4.38)$$

$$\{\bar{F}_{el}\} = [\bar{\chi}]^T \{F\} \quad (4.39)$$

$$\{\bar{F}_i\} = [\bar{\chi}]^T \{F\} \quad (4.40)$$

$$\{\bar{\chi}_i\} = \frac{1}{\sqrt{\{\chi_i\}^T [M_{qq}] \{\chi_i\}}} \{\chi_i\} \quad (4.41)$$

Escrevendo-se a equação (4.34) na forma da equação (4.22) e considerando-se a força pontual, obtém-se:

$$\{\dot{z}\} = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[\Lambda] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta(t) \\ \dot{\eta}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] \\ [I] \{\bar{F}_{el}\} \end{bmatrix} \{u\} + \begin{bmatrix} [0] \\ [I] \{\bar{F}_i\} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Com:

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[\Lambda] & [0] \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

e

$$[B] = \begin{bmatrix} [0] \\ [I]\{\bar{F}_{el}\} \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

$$\{F_e\} = \begin{bmatrix} [0] \\ [I]\{\bar{F}_i\} \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

As matrizes $[M_{qq}]$ e $[K^*]$ representam a massa e rigidez do conjunto estrutura mais elementos piezelétricos, enquanto que $\{F\}$ é formado pelo vetor da força aplicada pelo elemento piezelétrico e forças externas. Este vetor é de muita importância na determinação do índice de controlabilidade, pois é ele que irá gerar as possíveis combinações de posições para os elementos piezelétricos na estrutura flexível (método direto), influenciando desta forma na matriz de controle $[B]$ que é usada para se determinar o índice de controlabilidade do sistema.

O vetor de coordenadas nodais é expresso da seguinte forma:

$$\{q\} = [u_i \quad w_i \quad \theta_i \quad \psi_i \quad u_j \quad w_j \quad \theta_j \quad \psi_j]^T \quad (4.46)$$

Com u e w são deslocamentos lineares enquanto que θ e ψ são os deslocamentos angulares.

Os vetores de força para os nós i e j , terão então a seguinte forma:

$$\{F_i\} = [0 \quad 0 \quad m_y \quad m_z \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (4.47)$$

e

$$\{F_j\} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad m_y \quad m_z]^T \quad (4.48)$$

Onde m_y , m_z são os momentos produzidos pelos elementos piezelétricos.

As equações (4.47) e (4.48) mostram que os elementos piezelétricos têm ação somente nos graus de liberdade relacionados aos deslocamentos angulares. Isto ocorre porque estes elementos piezelétricos aplicam momento de flexão na estrutura suporte. Com as combinações do vetor $\{F_i\}$ e $\{F_j\}$ é possível obter todas as combinações de forças aplicadas destes elementos piezelétricos na estrutura suporte. Desta forma, tem-se a matriz de controle $[B]$ e, através da sua decomposição em valores singulares, o índice de controlabilidade do sistema.

4.2 CRITÉRIO DE POSICIONAMENTO

O conceito de controlabilidade de sistemas é proveniente da teoria de controle. Esta teoria é utilizada para determinar se um sistema pode ser controlado dado à existência de um controlador, no caso, o atuador piezelétrico. Através da matriz $[A]$ e da matriz de controle $[B]$ é possível estabelecer se o sistema pode ser controlado ou não. O objetivo é definir a medida da quantidade de controlabilidade do sistema através de um índice. Este índice deve indicar a quantidade de energia fornecida ao atuador piezelétrico incorporado à estrutura suporte onde se deseja controlar a vibração, considerando-se uma dada entrada de controle (Wang, 2001).

Da equação (4.22), a força de controle aplicada na estrutura pode ser definida como:

$$\{f_c\} = [B]\{u\} \quad (4.49)$$

Pré-multiplicando-se a equação (4.49) pelo seu transposto, tem-se:

$$\{f_c\}^T \{f_c\} = \{u\}^T [B]^T [B] \{u\} \quad (4.50)$$

Decompondo-se em valores singulares a matriz de controle $[B]$, tem-se:

$$[B] = [V][S][U]^T \quad (4.51)$$

Com:

$$[V]^T [V] = [I] \quad (4.52)$$

e

$$[U][U]^T = [I] \quad (4.53)$$

onde $[I]$ é a matriz identidade e as matrizes $[V]$ que tem ordem $2nx2n$, $[U]$ ordem $p \times p$ e $[S]$ $2nxp$, sendo p o número de atuadores e n o número de graus de liberdade do sistema.

Substituindo-se a equação (4.51) na equação (4.50), tem-se:

$$\{f_c\}^T \{f_c\} = \{u\}^T [U][S][V]^T [V][S][U]^T \{u\} \quad (4.54)$$

Simplificando-se vem:

$$\{f_c\}^T \{f_c\} = \{u\}^T [U][S]^2 [U]^T \{u\} \quad (4.55)$$

Comparando-se a equação (4.55) com a equação (4.50), tem-se:

$$[B]^T [B] = [U][S]^2 [U]^T \quad (4.56)$$

Sendo que:

$$[S]^2 = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_p^2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Assumindo-se um novo vetor de controle $\{v\}$, tal que:

$$\{v\} = [U]^T \{u\} \quad (4.58)$$

Pré multiplicando-se a equação (4.58) por [U], tem-se:

$$\{u\} = [U]\{v\} \quad (4.59)$$

Tomando-se o transposto da equação (4.59), tem-se:

$$\{u\}^T = \{v\}^T [U]^T \quad (4.60)$$

Substituindo-se as equações (4.59) e (4.60) na equação (4.55), tem-se:

$$\{f_c\}^T \{f_c\} = \{v\}^T [U]^T [U][S]^2 [U]^T [U]\{v\} \quad (4.61)$$

Ou simplificando-se:

$$\{f_c\}^T \{f_c\} = \{v\}^T [S]^2 \{v\} = \sum_{i=1}^k \sigma_i^2 v_i^2 \quad (4.62)$$

O valor σ_i é o n-ésimo grau de controlabilidade do sistema e está relacionado a entrada de controle $\{u\}$ ou $\{v\}$ é sua magnitude é função da localização do elementos piezelétricos. Isto ocorre porque a controlabilidade do sistema é proporcional a quantidade de energia aplicada (Wang, 2001).

Quando o sistema é assintoticamente estável, tem-se que a matriz grammiana de controlabilidade $[W_c(t_0, t_1)]$ que transfere o estado $x(t_0)=x_0$ no tempo t_0 para o estado $x(t_1)=x_1$, se aproxima da matriz grammiana de controlabilidade de estado estacionário $[W_c]$ satisfazendo a seguinte equação (Ogata, 1994):

$$[W_c] = \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \int_0^{t_1} e^{[A]\tau} [B]^T [B] e^{[A]^T \tau} d\tau \quad (4.63)$$

Em estruturas flexíveis levemente amortecidas, tem-se:

$$e^{[A]\tau} e^{[A]^T \tau} = [I] \quad (4.64)$$

A matriz [B] não depende do tempo, então é:

$$[W_c] = [B][B]^T \int_0^T d\tau \quad (4.65)$$

Os valores singulares da matriz grammiana de controlabilidade de um grupo de estados no tempo t_1 para uma condição inicial nula no tempo t_0 devido a uma entrada são os mesmos que os valores singulares da matriz de controle na seguinte forma, (Giovannetti, 2001):

$$svd([W_c]) = svd([B][B]^T) = \{v\}[S]^2\{v\}^T \quad (4.66)$$

Se os valores singulares são arranjados na forma decrescente, então os vetores $\{v\}$ correspondem às direções mais e menos controláveis, enquanto que seus graus de controlabilidade são dados pelos máximos e mínimos valores singulares respectivamente. Neste caso, a energia mínima de esforço do controlador (Ogata, 1994) dada por:

$$E_{min} = \sum_{i=1}^n \frac{\{u\}_i^T \{u\}_i}{svd([W_c])} = \frac{\{u\}_1^T \{u\}_1}{\sigma_1} + \frac{\{u\}_2^T \{u\}_2}{\sigma_2} + \dots + \frac{\{u\}_n^T \{u\}_n}{\sigma_n} \quad (4.67)$$

sendo que o denominador da equação (4.64) é o grammiano da matriz de controlabilidade.

Dessa forma, as posições ótimas dos atuadores piezelétricos implicam as posições onde a energia do controlador é usada de maneira mais efetiva para uma dada entrada de controle, minimizando-se o esforço do controlador e economizando-se o consumo de energia do sistema.

O índice de posicionamento então é dado por:

$$[\Omega] = \prod_{i=1}^p \sigma_i \quad (4.68)$$

O produtório da equação (4.68) ocorre quando se tem mais de um atuador piezolétrico a se posicionar na estrutura suporte. Neste caso há a influência da posição de um atuador sobre outro, na determinação do posicionamento ótimo. O índice de posicionamento é o maior valor do produto dos índices de posicionamento para cada posição dos atuadores piezolétricos na estrutura suporte.

4.3 O PROGRAMA COMPUTACIONAL DESENVOLVIDO

Uma das contribuições deste trabalho é o desenvolvimento de um programa para modelagem de estrutura do tipo viga, em diversas condições de contorno, com elementos piezolétricos incorporados, posicionamento ótimo destes elementos nestas estruturas e de um sistema de controle que simula a viga em condições de malha aberta, malha fechada com o elemento piezolétrico posicionado em um ponto ótimo da estrutura e com o elemento piezolétrico posicionado em uma posição não ótima da estrutura. A figura 4.1 mostra a interação entre os três módulos do programa computacional desenvolvido em plataforma matlab©.

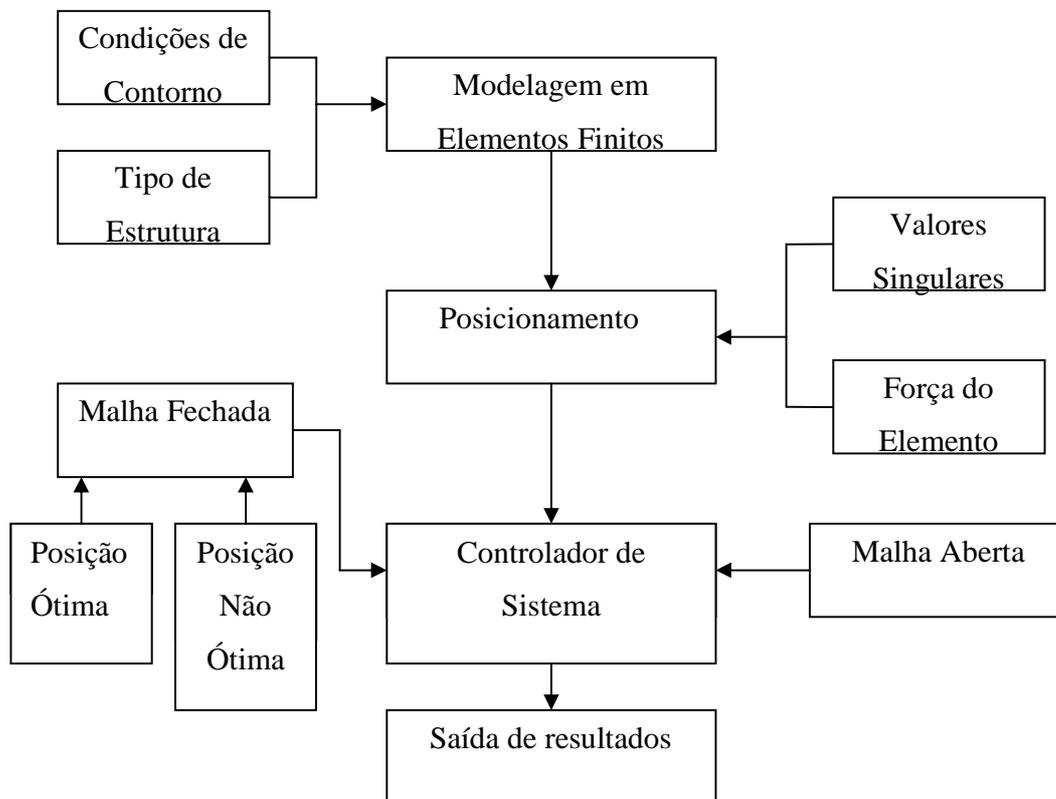


Figura 4.1 – Estrutura em blocos do programa computacional desenvolvido.

O programa de posicionamento de elementos piezelétricos utiliza a técnica modal, onde o posicionamento ótimo é encontrado para a máxima deformação modal para um modo de vibrar específico. Esta técnica de posicionamento e de controle é denominada de IMSC (Independent Modal Space Control), técnica esta que combina a decomposição modal com a clássica lei de controle LQR (Linear Quadratic Regulator), (Carvalho et al., 2005). O controle do ganho para cada modo pode ser encontrado resolvendo-se a equação de segunda ordem de Ricatti.

O fluxograma da figura 4.2 mostra o diagrama simplificado da modelagem em elementos finitos da estrutura flexível utilizada com elementos piezelétricos incorporados e o seu posicionamento através da decomposição em valores singulares da matriz de controle [B].

Quando existem mais modos que atuadores ou elementos piezelétricos, o índice de posicionamento é o resultado de um produtório de acordo com a equação 4.65.

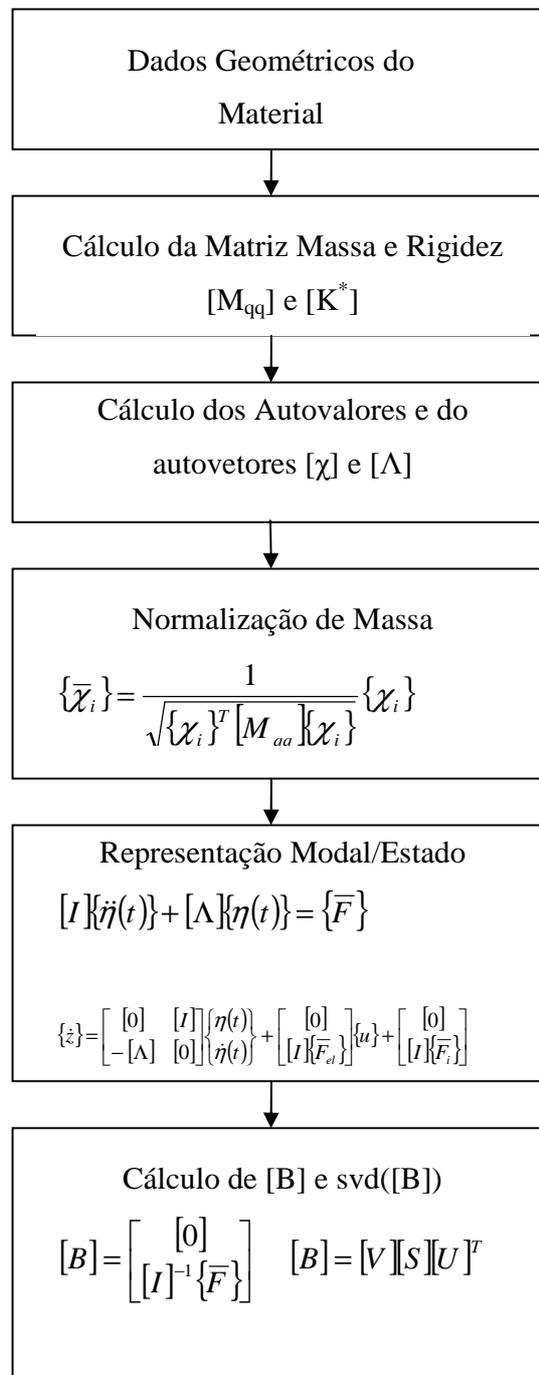


Figura 4.2 – Diagrama do programa computacional de posicionamento desenvolvido.

O posicionamento ótimo é influenciado pelo número de elementos piezelétricos incorporados a estrutura suporte. Portanto deve-se adotar um procedimento que faça uma primeira aproximação do posicionamento ótima e em seguida refaça a determinação deste posicionamento ótimo de acordo com a influência destes elementos no modo de vibrar da estrutura. Este procedimento é mostrado na figura 4.3.

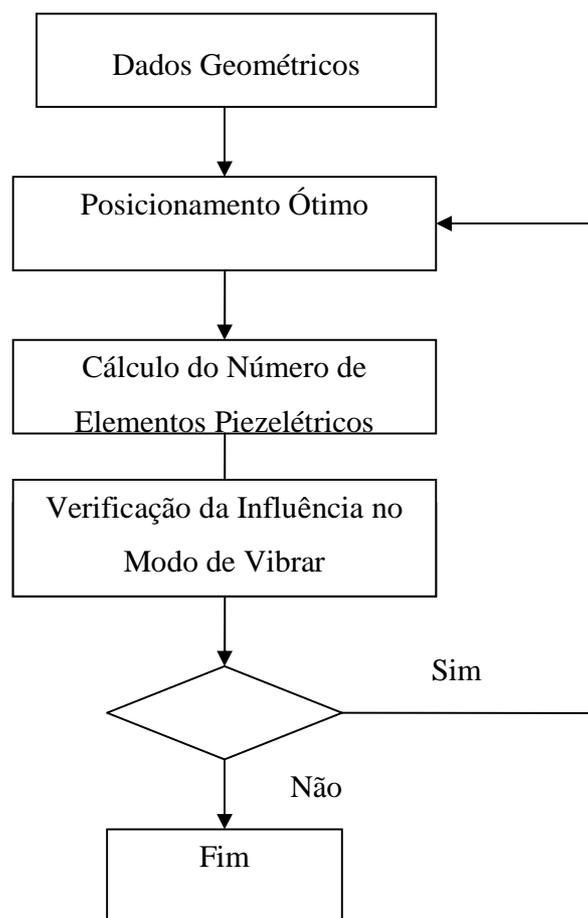


Figura 4.3 – Procedimento de determinação do posicionamento ótimo.

No capítulo 6 é feito um estudo da influência no números de atuadores ou elementos piezelétricos nos parâmetros modais da estrutura suporte.

Os elementos piezelétricos adicionam massa e rigidez as matrizes de massa e rigidez da estrutura suporte, e com isso podem modificar a posição ou as posições ótimas destes elementos.

No apêndice C é realizado um estudo do número de atuadores ou elementos piezelétricos necessários para se controlar um determinado modo. Neste estudo é demonstrada uma expressão de cálculo do número de elementos piezelétricos, baseado na deformação flexional da estrutura suporte e da energia de deformação piezelétrica dos elementos piezelétricos.

Capítulo 5

VALIDAÇÃO DOS MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS

Neste capítulo, se faz a validação do modelo de viga de Timoshenko, em elementos finitos, com e sem elemento piezolétrico incorporado, comparando-se os resultados encontrados, no caso de vigas com elementos piezolétricos, com os resultados encontrados por Maurini et al. (2006) e Kusculuoglu et al. (2004). São simuladas vigas em quatro condições de contorno, a saber: extremidades apoiadas, livre-livre, engastada-engastada e extremidade livre e outra engastada. É calculado as frequências adimensionais e os desvios relativos possibilitando desta forma validar o código computacional desenvolvido.

As propriedades geométricas e de materiais da viga simulada são apresentadas na tabela 5.1

Tabela 5.1 Propriedades geométricas e materiais da viga simulada

Grandeza	Valor	Unidade
Comprimento L	1,5	m
Largura b	0,075	m
Espessura h	0,075	m
Massa Específica ρ	7800	kg/m ³
Módulo de Young Y	210x10 ⁹	N/m ²
Coefficiente de Poisson ν	0,3	-
Coefficiente de Cisalhamento κ	0,833	-
Módulo de Elasticidade Transversal G	80x10 ⁹	N/m ²
Área A	5,625x10 ⁻³	m ²
Momento de Inércia I	2,6367x10 ⁻⁶	m ⁴

Calcula-se as cinco primeiras frequências naturais para uma viga nas condições de contorno apoiada-apoiada, livre-livre, engastada-engastada e engasta-livre, com as propriedades e dimensões apresentadas pela tabela 5.1. Em seguida, determinam-se as frequências naturais adimensionalizadas, encontradas no programa de elementos finitos desenvolvido, equação (5.1) e equação (5.2), e os respectivos desvios. Simulando-se a viga com malhas com cinco, dez, vinte e cinquenta elementos com a finalidade de levantamento dos desvios relativos. Os resultados das frequências adimensionalizadas e dos desvios relativos para uma viga biapoiada, são apresentados respectivamente nas tabelas 5.2 e 5.3. O gráfico de desvio relativo é mostrado na figura 5.1. A tabela 5.4 mostra os resultados encontrados para a simulação da viga biapoiada com 50 elementos. Nesta primeira parte das simulações, são simuladas vigas com h/L igual a 0,05.

O mesmo procedimento é utilizado em vigas nas condições de contorno livre-livre, engastada-engastada e em balanço com as mesmas propriedades e dimensões dadas pela tabela 5.1. Também são feitas simulações de dois casos com uma viga em balanço com elementos piezelétricos incorporados.

5.1 MODELO DE VIGA TIMOSHENKO SEM O ELEMENTO PIEZELÉTRICO

O modelo de viga de Timoshenko considera o efeito da inércia de rotação e do cisalhamento. Do ponto de vista da geometria, o cisalhamento é importante quando a espessura não é pequena em comparação ao comprimento da viga, isto é, quando esta relação é maior do que 1/10 (Lima Jr., 1999). Para frequências superiores ao segundo modo, o modelo de Euler-Bernoulli não fornece bons resultados e o modelo de Timoshenko deve ser usado, independente da geometria da viga (Lima Jr. E Arantes, 2000).

As frequências adimensionalizadas e os desvios relativos percentuais são definidos pelas equações (5.1) e (5.2).

$$\lambda_i^2 = \omega_i L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{YI}} \quad (5.1)$$

$$Desvio\ Relativo(\%) = \frac{|\lambda_{teórico} - \lambda_{fem}|}{\lambda_{teórico}} \times 100 \quad (5.2)$$

5.1.1 Viga Biapoiada

A tabela 5.2 mostra as frequências adimensionais de Timoshenko para uma viga biapoiada.

Tabela 5.2 Frequências adimensionais de Timoshenko para uma viga biapoçada

<i>i</i>	Teórica ¹	FEM - Número de Elementos de Viga - $h/L=0,05$			
		λ_i			
		5	10	20	50
1	3,13498	3,1360	3,1358	3,1358	3,1358
2	6,23136	6,2446	6,2380	6,2372	6,2371
3	9,25537	9,3236	9,2784	9,2727	9,2716
4	12,1813	12,3970	12,2377	12,2156	12,2111
5	14,9926	16,3391	15,1064	15,0451	15,0323

Tabela 5.3 Desvios relativos das frequências adimensionais para uma viga biapoçada

<i>i</i>	Desvio Relativo (%) - Numero de Elementos de Viga - $h/L=0,05$			
	5	10	20	50
1	0,0325	0,0262	0,0262	0,0262
2	0,2121	0,1066	0,0937	0,0921
3	0,7372	0,2488	0,1872	0,1754
4	1,7707	0,4630	0,2816	0,2446
5	8,9811	0,7590	0,3502	0,2648

A tabela 5.3 mostra os desvios relativos para a viga biapoçada. O gráfico 5.1 mostra os desvios relativos e a tabela 5.4 apresenta os resultados para a simulação de 50 elementos, cujos desvios são os mais baixos.

¹O valor teórico é calculado por Lee e Schultz, (2004) com a relação $h/L=0,05$

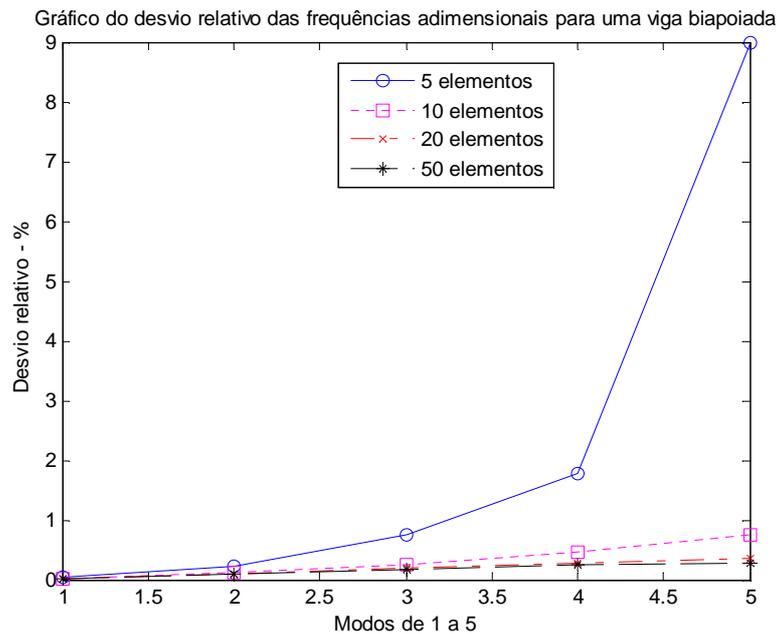


Figura 5.1 – Gráfico dos desvios relativos percentuais das frequências adimensionalizadas de Timoshenko para uma viga biapoiada.

Tabela 5.4 Resultados para viga biapoiada simulada com 50 elementos

FEM (50 elementos)		
Viga biapoiada $h/L=0,05$		
i	Frequência (Hz)	λ_i
1	78,3115	3,1358
2	309,8120	6,2371
3	684,6150	9,2716
4	1187,5000	12,2111
5	1799,6000	15,0323

Para a quinta frequência o desvio relativo diminui a partir de 6 elementos de simulação.

5.1.2 Viga Livre-Livre

As tabelas 5.5 e 5.6 mostram as frequências naturais adimensionalizadas e os desvios relativos respectivamente para uma viga livre-livre.

Tabela 5.5 Frequências adimensionais de Timoshenko para uma viga livre-livre.

<i>i</i>	Teórica ¹	FEM - Número de Elementos de Viga h/L=0,05			
		λ_i			
		5	10	20	50
1	4,70873	4,7117	4,7101	4,7101	4,7100
2	7,75404	7,7779	7,7638	7,7617	7,7612
3	10,7332	10,8136	10,7629	10,7526	10,7503
4	13,6040	13,6664	13,6669	13,6379	13,6306
5	16,3550	17,7913	16,4754	16,4012	16,3830

Tabela 5.6 Desvios relativos das frequências adimensionais para uma viga livre-livre

<i>i</i>	Desvio Relativo (%) - Numero de Elementos de Viga			
	5	10	20	50
1	0,0631	0,0333	0,0291	0,0270
2	0,3079	0,1259	0,0988	0,0923
3	0,7491	0,2767	0,1807	0,1593
4	0,4587	0,4624	0,2492	0,1955
5	8,70000	0,7380	0,2825	0,1712

A figura 5.2 mostra o gráfico dos desvios relativos. Para a quinta frequência o desvio relativo diminui a partir de 6 elementos de simulação. A tabela 5.7 apresenta os resultados para a simulação com 50 elementos.

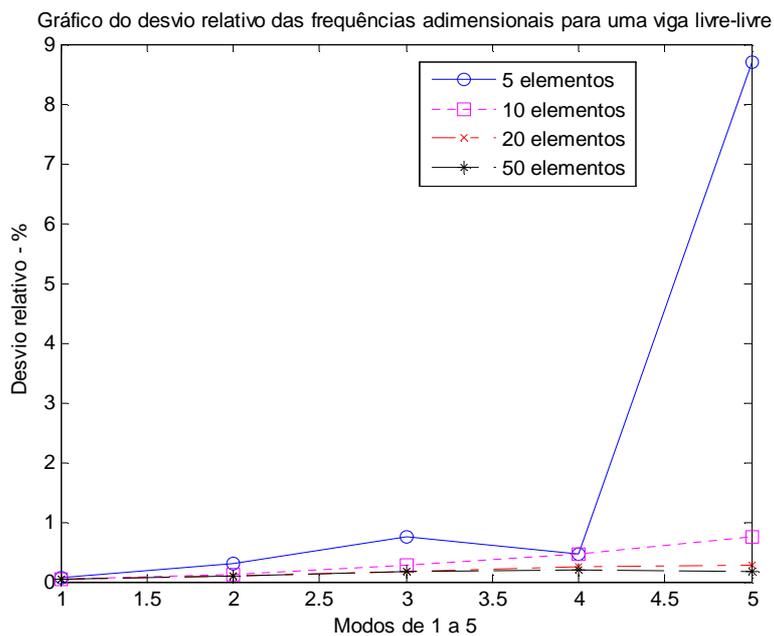


Figura 5.2 – Gráfico dos desvios relativos percentuais das frequências adimensionalizadas de Timoshenko para uma viga livre-livre.

Tabela 5.7 Resultados para uma viga livre-livre simulada com 50 elementos

Frequência calculada FEM (50 elementos)		
Viga livre-livre $h/L=0,05$		
i	Frequência (Hz)	λ_i
1	176,6795	4,7100
2	479,7308	7,7612
3	920,4023	10,7503
4	1479,7000	13,6306
5	2137,6000	16,3830

5.1.3 Viga Engastada-Engastada

As tabelas 5.8 e 5.9 mostram as frequências naturais adimensionalizadas e os desvios relativos para uma viga engastada-engastada. A tabela 5.10 apresenta os resultados para simulação com 50 elementos.

Tabela 5.8 Frequências adimensionais de Timoshenko para uma viga engastada-engastada

<i>i</i>	Teórica ¹	FEM - Número de Elementos de Viga h/L=0,05			
		λ_i			
		5	10	20	50
1	4,68991	4,6976	4,6960	4,6958	4,6957
2	7,70352	7,7438	7,7253	7,7231	7,7226
3	10,9341	10,7730	10,6924	10,6812	10,6789
4	13,4611	13,6685	13,5638	13,5283	13,5209
5	16,1590	17,9933	16,3362	16,2511	16,2328

Tabela 5.9 Desvios relativos das frequências adimensionais da viga engastada-engastada

<i>i</i>	Desvio Relativo (%) - Número de Elementos de Viga			
	5	10	20	50
1	0,1640	0,1299	0,1256	0,1235
2	0,5229	0,2827	0,2542	0,2477
3	1,2490	0,4915	0,3863	0,3642
4	1,5407	0,7629	0,4992	0,4442
5	11,3516	1,0966	0,5700	0,4567

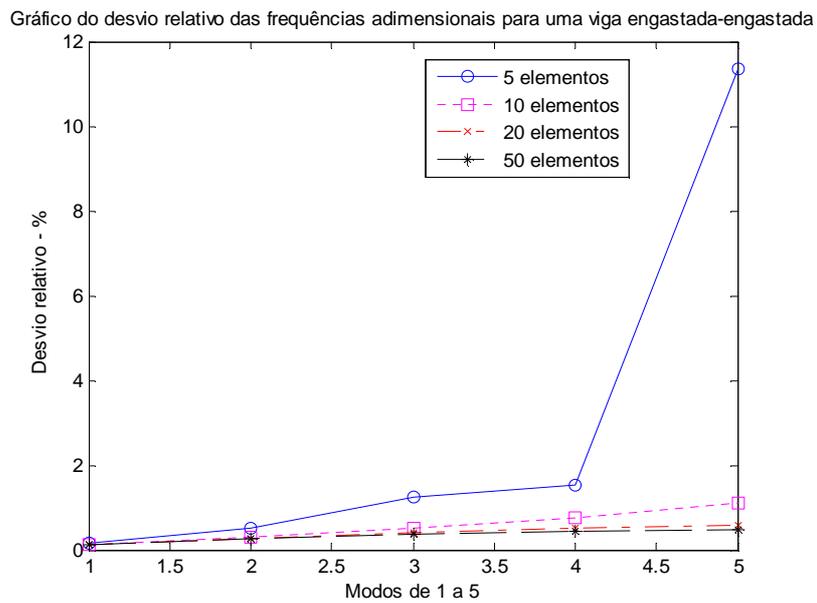


Figura 5.3 – Gráfico dos desvios relativos percentuais das frequências adimensionalizadas Timoshenko para uma viga engastada-engastada.

Tabela 5.10 Resultados para uma viga engastada-engastada simulada com 50 elementos

Frequência calculada FEM (50 elementos)		
Viga engastada-engastada $h/L=0,05$		
i	Frequência (Hz)	λ_i
1	175,6071	4,6957
2	474,9711	7,7226
3	908,2200	10,6789
4	1456,0000	13,5209
5	2098,6000	16,2328

5.1.4 Viga em Balanço

As tabelas 5.11 e 5.12 mostram as frequências adimensionalizadas e os desvios relativos, respectivamente e os resultados teóricos são os encontrados no trabalho de Han e Jae-Jung (1999). A tabela 5.13 apresenta os resultados para simulação com 50 elementos.

Tabela 5.11 Frequências adimensionais de Timoshenko para uma viga em balanço

<i>i</i>	Teórica ²	FEM - Número de Elementos de Viga h/L=0,05			
		λ_i			
		5	10	20	50
1	1,8732	1,8735	1,8735	1,8735	1,8735
2	4,6624	4,6674	4,6660	4,6658	4,6658
3	7,7322	7,7626	7,7463	7,7441	7,7437
4	10,6904	10,7932	10,7273	10,7165	10,7143
5	13,5397	13,6675	13,6165	13,5827	13,5753

Tabela 5.12 Desvios relativos das frequências adimensionais para uma viga em balanço

As frequências adimensionalizadas foram calculadas pela equação (5.1) e o gráfico dos desvios relativos, mostrado pela figura 5.4, calculado pela equação (5.2).

²O valor teórico é calculado por Han et al. (1999) com a relação h/L=0,05

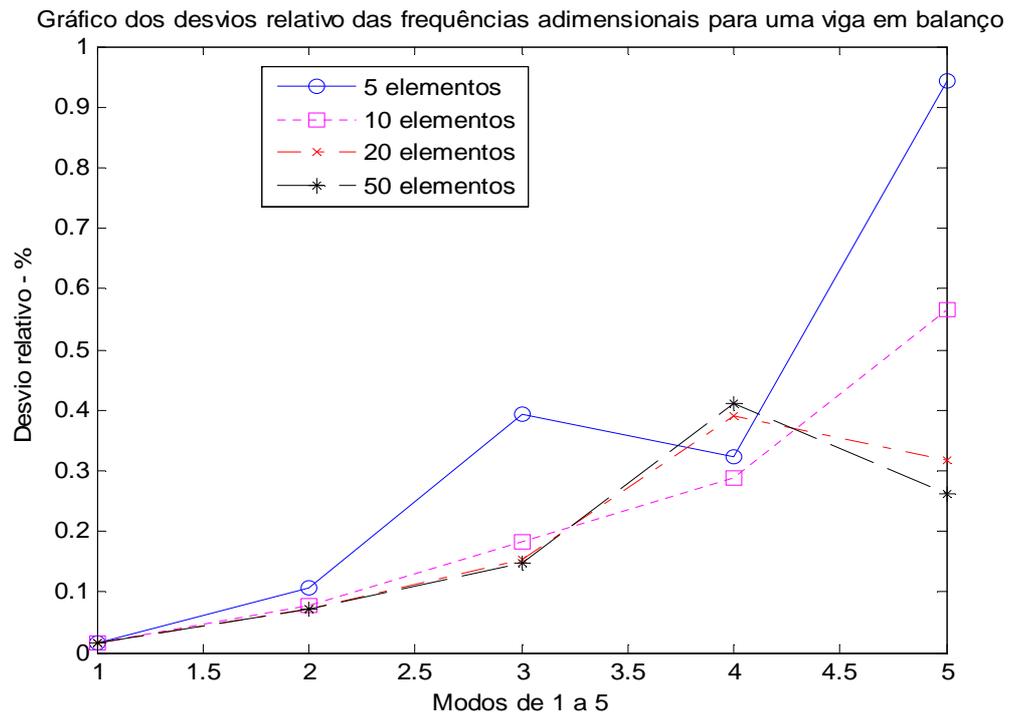


Figura 5.4 – Gráfico dos desvios relativos percentuais das frequências adimensionalizadas de Timoshenko para uma viga em balanço.

Tabela 5.13 Resultados para uma viga em balanço simulada com 50 elementos

Frequência calculada FEM (50 elementos)		
Viga em balanço $h/L=0,05$		
i	Frequência (Hz)	λ_i
1	27,9530	1,8735
2	176,3744	4,6658
3	477,5605	7,7437
4	914,2443	10,7143
5	1467,7000	13,5753

5.2 MODELO DE VIGA TIMOSHENKO COM ELEMENTO PIEZELÉTRICO INCORPORADO

5.2.1 Simulação do caso 1

Com a finalidade de validar o programa computacional com elementos piezelétricos incorporados foi simulada uma viga em balanço com estes elementos piezelétricos incorporados na parte superior e inferior da viga suporte, conforme figura 5.5.

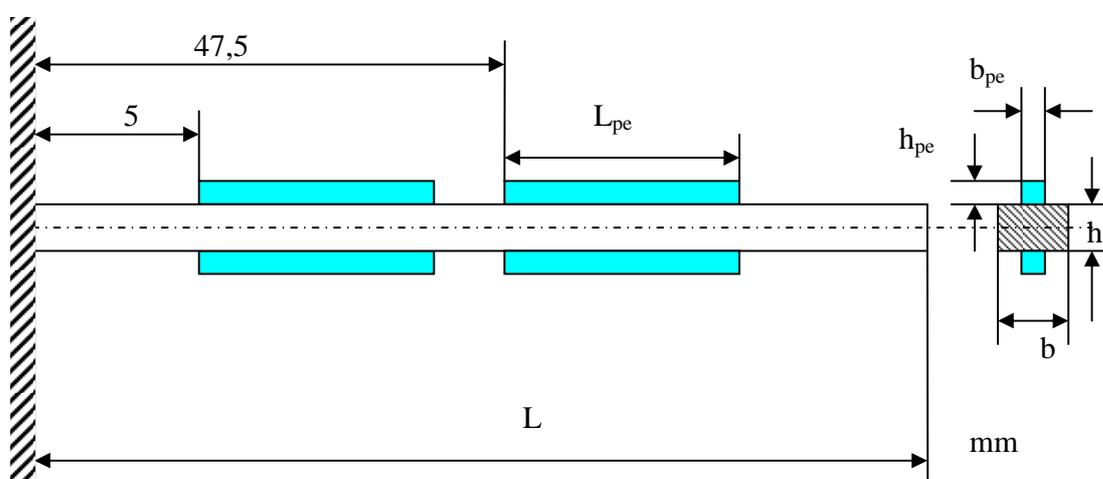


Figura 5.5 Posicionamento de elementos piezelétricos incorporados viga em balanço caso 1

Os dados geométricos e de materiais dos elementos piezelétricos e da viga por Maurini (2006) são dados pelas tabelas 5.15 e 5.14, respectivamente.

Tabela 5.14 Propriedades e dimensões do elemento piezelétrico caso 1.

Grandeza	Valor	unidade
Módulo de Young, Y_{pe}	62×10^9	N/m^2
Comprimento, L_{pe}	$36,5 \times 10^{-3}$	m
Largura, b_{pe}	$17,6 \times 10^{-3}$	m
Espessura, h_{pe}	$0,267 \times 10^{-3}$	m
Coefficiente piezelétrico, d_{31}	-320×10^{-3}	m/V
Massa específica	7800	kg/m^3

Tabela 5.15 Propriedades geométricas e materiais da viga simulada caso 1

Grandeza	Valor	Unidade
Comprimento L	201×10^{-3}	m
Largura b	20×10^{-3}	m
Espessura h	$2,82 \times 10^{-3}$	m
Massa Específica ρ	2700	kg/m ³
Módulo de Young Y	69×10^9	N/m ²
Coefficiente de Poisson ν	0,33	-
Coefficiente de Cisalhamento κ	0,833	-
Coefficiente de piezolétrico indireto d_{31}	390×10^{-11}	m/V

Para o caso 1 a viga é simulada com 201 elementos. Os resultados encontrados são comparados com os resultados encontrados por Maurini (2006). A tabela 5.16 mostra as frequências encontradas por Maurini (2006), as frequências encontradas pelo código computacional desenvolvido e os seus respectivos desvios relativos para a viga uniforme, sem elementos piezolétricos incorporados. A tabela 5.17 mostra os valores encontrados por Maurini (2006) e pelo autor, para a mesma viga com elementos piezolétricos incorporados. A diferença maior nas frequências mais altas é devido ao modelo adotado por Maurini (2006) ser o de Euler-Bernoulli, enquanto que o do autor é o modelo de Timoshenko.

Tabela 5.16 Frequências e desvios relativos encontrados para o caso 1 viga uniforme

Ordem	Maurini (Hz)	Autor (Hz)	Desvio relativo (%)
1	57,6071	57,59885	0,0143
2	361,0170	360,65888	0,0992
3	1010,86	1008,47018	0,2364
4	1980,88	1972,24733	0,4358

Tabela 5.17 Freqüências e desvios relativos encontrados para o caso 1 viga com pzt

Ordem	Maurini (Hz)	Autor (Hz)	Desvio relativo (%)
1	66,6859	66,53105	0,2322
2	363,590	363,08246	0,1396
3	1001,24	999,0631	0,2168
4	1954,99	1943,99	0,5739

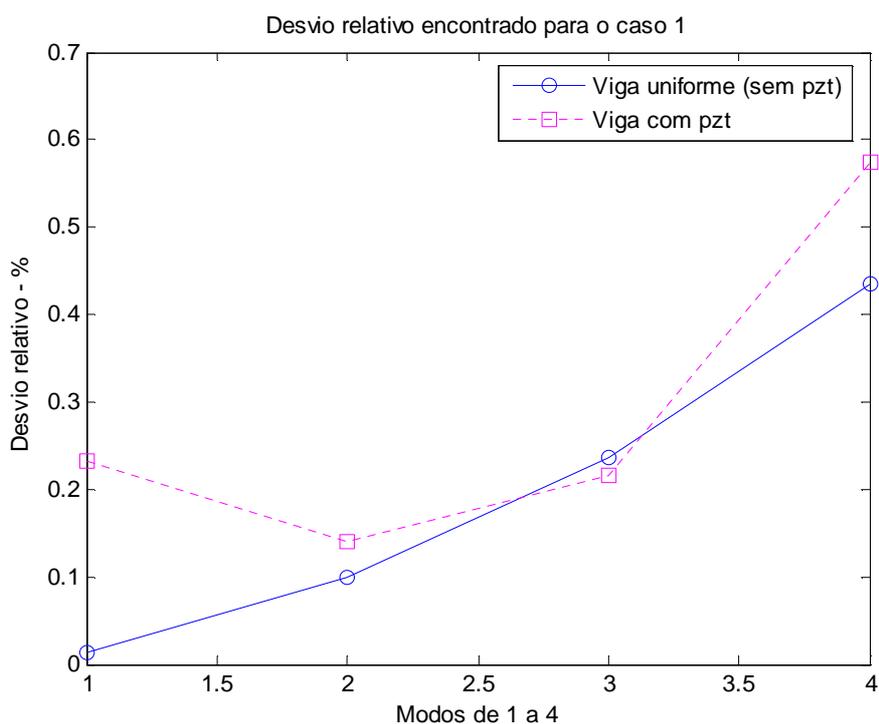


Figura 5.6 – Gráfico de desvios relativos para o caso 1.

O gráfico da figura 5.6 mostra os desvios relativos da tabela 5.16 referentes a viga sem elementos piezelétricos incorporados, denominada de viga uniforme e os dos desvios relativos da tabela 5.17, que são os valores de uma viga com elementos piezelétricos incorporados, conforme geometria e configuração mostrada na figura 5.5.

A figura 5.7 mostra o gráfico do primeiro modo de vibrar da viga do caso 1, com e sem elementos piezelétricos incorporados. Desta maneira é possível verificar que estes elementos alteram os parâmetros modais da estrutura suporte.

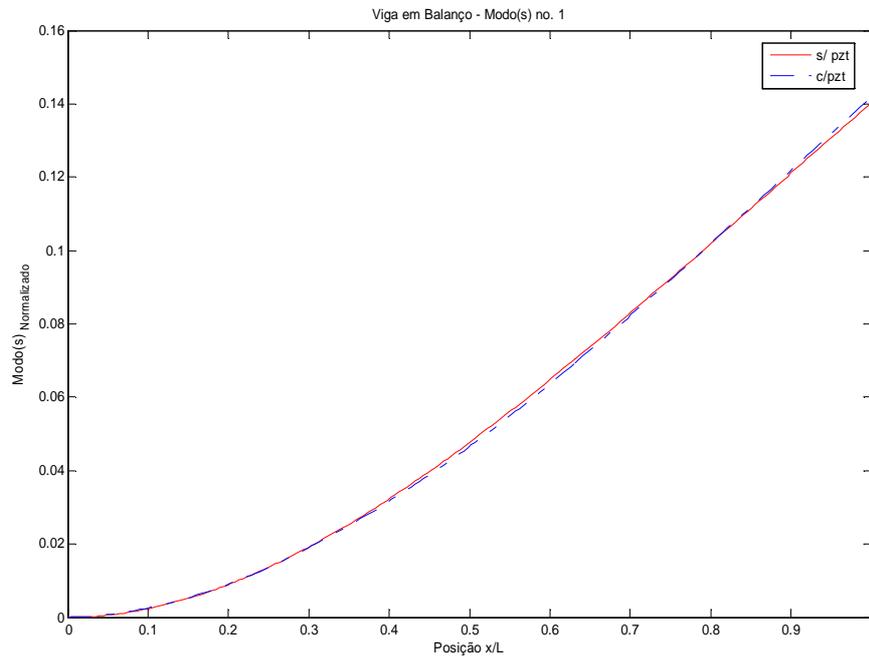


Figura 5.7 – Gráfico da viga do caso 1 com elementos piezelétricos incorporados.

5.2.2 Simulação do caso 2

É simulada uma viga em balanço com a configuração mostrada na figura 5.8 e com as propriedades geométricas e de materiais da viga e do elemento piezelétrico dadas pelas tabelas 5.18 e 5.19, respectivamente. No trecho com elemento piezelétrico incorporado tem-se que $(h+h_{pe})/L_{pe}$ é igual a 0,3133.

Tabela 5.18 Propriedades geométricas e materiais da viga simulada 2 com elementos piezelétricos.

Grandeza	Valor	Unidade
Comprimento L	0,1524	m
Largura b	0,0254	m
Espessura h	0,000794	m
Massa Específica ρ	2799	kg/m ³
Módulo de Young Y	7,37739x10 ¹⁰	N/m ²
Coefficiente de Poisson ν	0,3	-
Coefficiente de Cisalhamento κ	0,833	-
Módulo de Elasticidade Transversal G	80x10 ⁹	N/m ²
Coefficiente de piezelétrico indireto d_{31}	390x10 ⁻¹¹	m/V

Tabela 5.19 Propriedades e dimensões do elementos piezelétricos caso 2.

Grandeza	Valor	Unidade
Comprimento L_{pe}	0,10922	m
Largura b_{pe}	0,022352	m
Espessura h_{pe}	0,001378	m
Massa Específica ρ	7800	kg/m ³
Módulo de Young Y	3,1302x10 ¹⁰	N/m ²
Coefficiente de piezeletricidade	171x10 ⁻¹²	m/V
Coefficiente de Poisson	0,3	-

Para o caso 2 a viga é simulada com 100 elementos. Na tabela 5.20 são apresentadas às frequências calculadas pelo código computacional desenvolvido e as frequências analíticas encontradas por Kusculuoglu et al. (2004), assim como o desvio relativo.

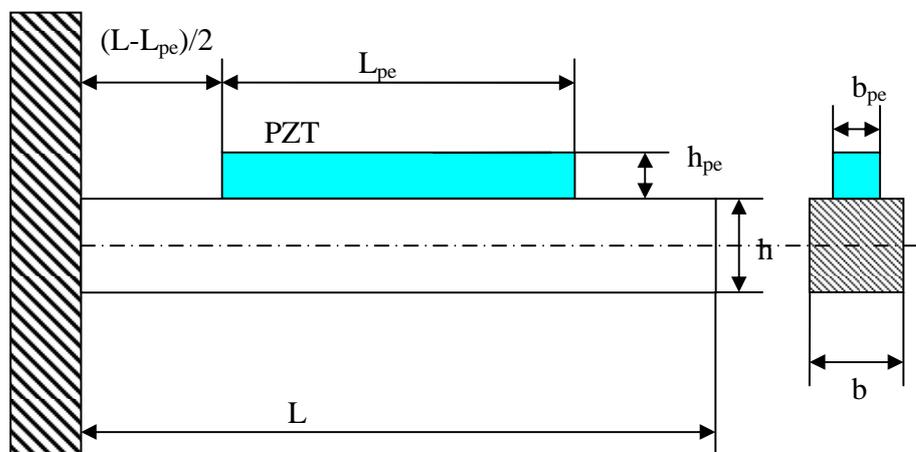


Figura 5.8 – Posicionamento de elementos piezoelétricos incorporados à viga em balanço caso 2.

Tabela 5.20 Desvios encontrados em relação a frequência analítica para o caso 2

Ordem	Timoshenko analítico (Hz)	FEM Autor (Hz)	Desvio Relativo (%)
1	24,3500	20,98859	13,8046
2	266,68120	295,26849	10,7196
3	773,72130	807,42735	4,3564
4	1402,0000	1452,83157	3,6256
5	2056,3000	2151,97680	4,6599

O gráfico da figura 5.9 mostra os desvios relativos entre as frequências calculadas analiticamente pelo modelo de Timoshenko e as encontradas pelo programa de computador desenvolvido.

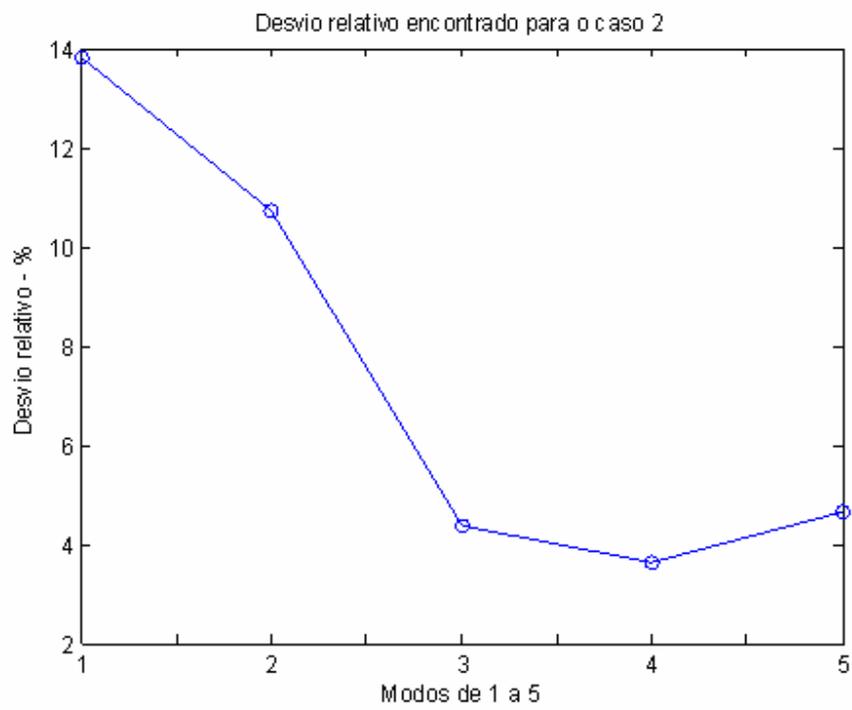


Figura 5.9 – Gráfico de desvios relativos para o caso 2

Capítulo 6

DETERMINAÇÃO DO POSICIONAMENTO ÓTIMO DOS ATUADORES PIEZELÉTRICOS

Neste capítulo são mostrados os gráficos dos primeiros modos de vigas em diversas condições de contorno. São feitas simulações do posicionamento ótimo para um modo individualmente e, para mais de um modo, simultaneamente, através do código computacional de posicionamento ótimo desenvolvido neste trabalho, que se utiliza da teoria de elementos finitos e de sistemas de controle. São feitas também simulações de elementos piezelétricos posicionados em posições ótimas e não ótimas, no domínio do tempo e da frequência, livre e forçada, com a finalidade de verificar-se a efetividade do posicionamento.

Uma análise dinâmica do comportamento modal de uma estrutura flexível com elementos piezelétricos incorporados é realizada com a finalidade de se verificar a influência destes elementos piezelétricos nos parâmetros modais da estrutura suporte.

Todas as simulações foram realizadas com a viga de dimensões e propriedades mecânicas, conforme tabela 5.1. Já os atuadores ou elementos piezelétricos têm dimensões e propriedades mecânicas apresentadas na tabela 6.1.

6.1 CASO 1: VIGA BIAPOIADA

6.1.1 Posições Ótimas para um Atuador sem Considerar o Efeito da Rigidez e Massa do Atuador Piezelétrico.

A viga biapojada foi modelada com cem elementos finitos. Após os cálculos tomam-se os primeiros modos de vibrar e seus respectivos índices de posicionamentos que são mostrados nos gráficos das figuras 6.1 e 6.2 e nas tabelas 6.2 e 6.3 são mostrados os valores numéricos das posições ótimas. Nas simulações, os modos de vibrar e os índices de posicionamento não consideram o efeito da rigidez e da massa do elemento piezelétrico incorporado.

Tabela 6.1 Propriedades e dimensões do elemento piezelétrico.

<i>Grandeza</i>	<i>Valor</i>	<i>unidade</i>
Módulo de Young, Y_{pe}	130×10^9	N/m^2
Comprimento, L_{pe}	0,150	m
Largura, b_{pe}	0,0750	m
Espessura, h_{pe}	0,010	m
Coefficiente piezelétrico, d_{31}	390×10^{-11}	m/V
Massa Específica ρ	7800	kg/m^3

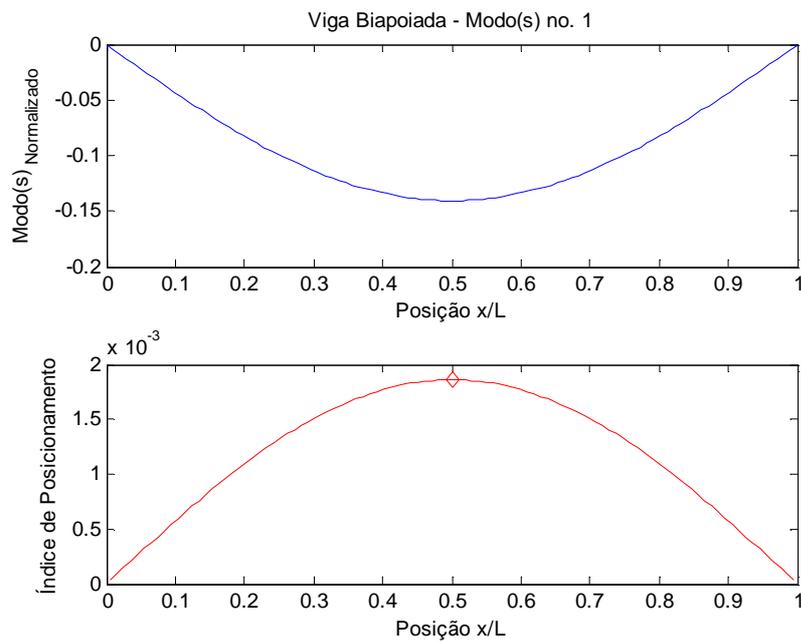


Figura 6.1 – a) Primeiro modo de vibrar; b) Índice de posicionamento ótimo.

O gráfico da figura 6.1 mostra o primeiro modo de vibrar de uma viga biapoiada e o seu respectivo gráfico do índice de posicionamento obtido, através dos valores singulares, descrita no capítulo 4.

A tabela 6.2 apresenta o valor numérico da posição ótima para o posicionamento de um atuador piezelétrico cujos valores foram retirados da figura 6.1.

Tabela 6.2 Posição ótima para o primeiro modo de uma viga biapoiada.

Posição ótima (x/L)	Posição ótima (m)
0,50	0,750

Os gráficos da figura 6.2 mostram o segundo modo de vibrar da mesma viga com o seu respectivo índice de posicionamento.

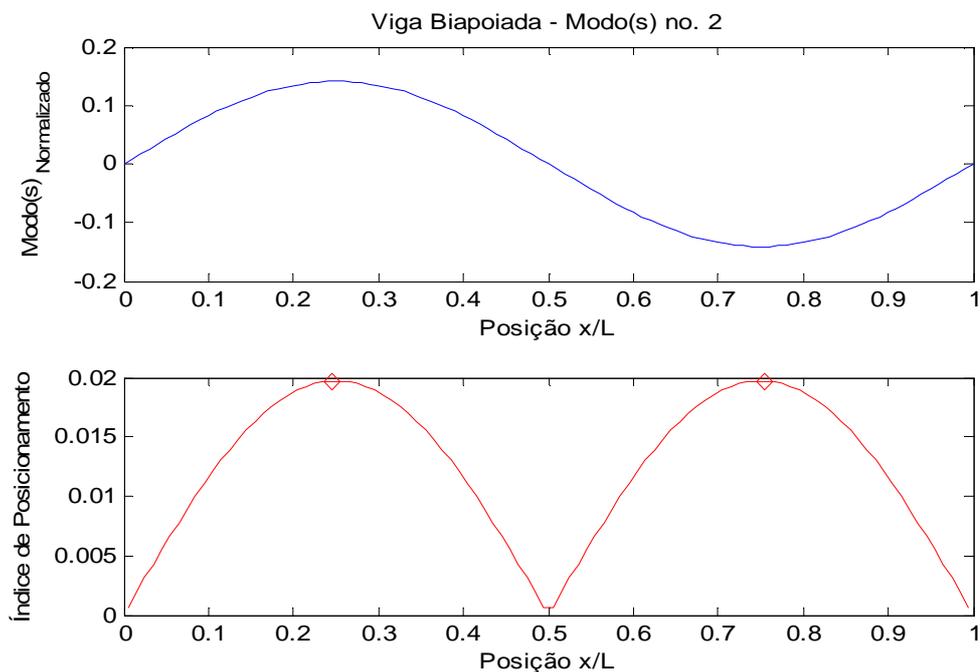


Figura 6.2 – a) Segundo modo de vibrar; b) Índice do posicionamento ótimo

A tabela 6.3 mostra os valores numéricos relativos as posições ótimas para o segundo modo de vibrar da viga biapoiada, conforme figura 6.2.

Tabela 6.3 Posição ótima do segundo modo de uma viga biapoiada.

Posições ótimas (x/L)		Posições ótimas (m)	
0,25	0,75	0,375	1,125

6.1.2 Posições Ótimas para um Atuador Considerando-se o Efeito da Rigidez e da Massa do Atuador Piezelétrico

Considera-se aqui a influência da rigidez e da massa do elemento piezelétrico no posicionamento. Tem-se como objetivo verificar esta influência no posicionamento dos atuadores piezelétricos. O atuador piezelétrico é posicionado a $0,5L$, a partir da extremidade esquerda da viga, colocados um na parte superior e outro na parte inferior. A figura 6.4 mostra o índice de posicionamento ótimo da viga com e sem elementos piezelétricos incorporados para o primeiro modo de vibrar da viga biapoiada.

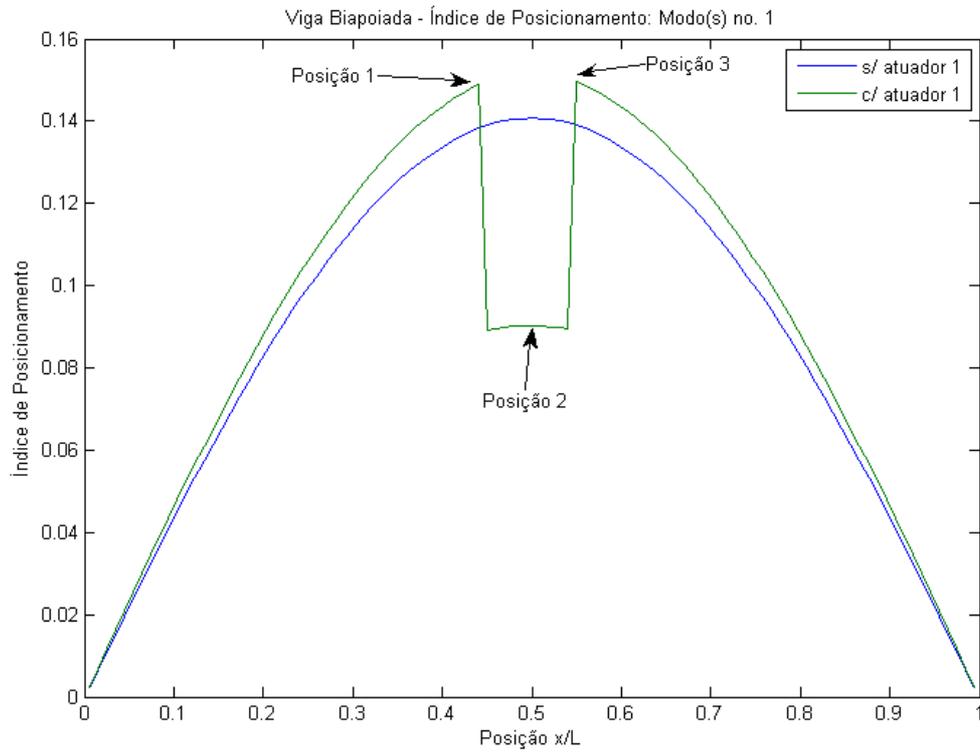


Figura 6.3 – Posicionamento ótimo para primeiro modo viga biapoiada com e sem atuador.

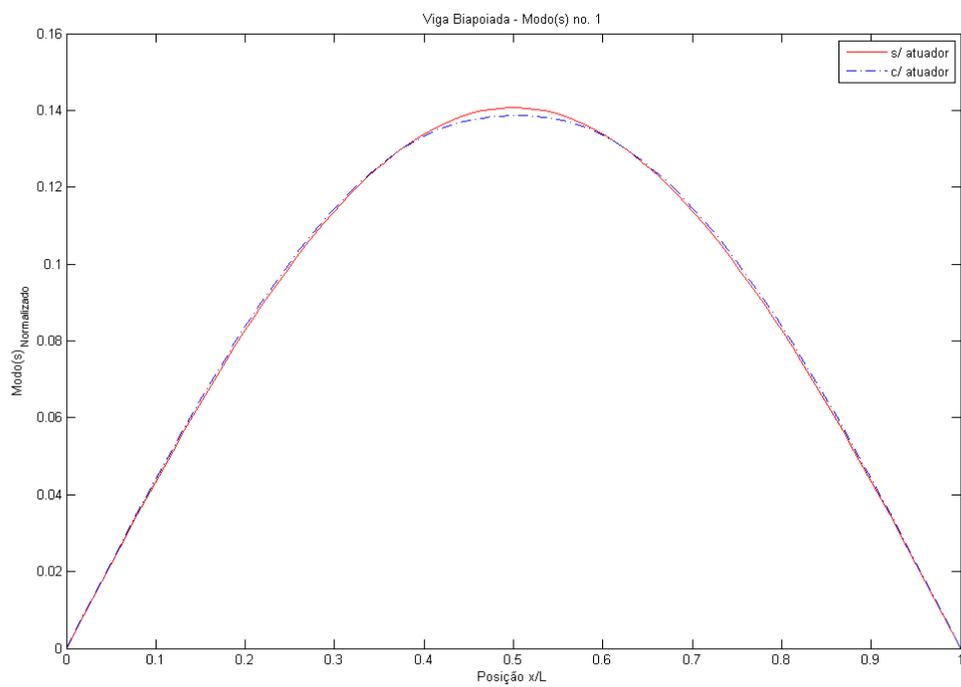


Figura 6.4 – Modo de vibrar para primeiro modo viga biapoiada com e sem atuador.

No gráfico da figura 6.3 verifica-se que os elementos piezelétricos incorporados à estrutura suporte, não alteram a posição ótima, apesar de alterar a forma do modo, isto se deve ao fato dos elementos piezelétricos estarem centrados em relação ao modo que ocorre a 0,50 do comprimento da viga. O gráfico da figura 6.4 mostra a diferença entre o primeiro modo de vibrar da viga biapoiada com e sem elementos piezelétricos incorporados. Nota-se que houve uma alteração do modo devido ao elemento piezelétrico.

A tabela 6.4 mostra as posições ótimas para viga biapoiada com e sem elementos piezelétricos incorporados para o primeiro modo.

Tabela 6.4 Posição ótima do primeiro modo de uma viga biapoiada com e sem atuador.

Posição ótima sem atuador		Posição ótima com atuador					
x/L	m	Posição 1		Posição 2		Posição 3	
0,5	0,750	x/L	m	x/L	m	x/L	m
		0,44	0,660	0,50	0,750	0,54	0,810
		Comprimento do atuador					
		Posição 3 – Posição 1					
		0,150 m					

O gráfico da figura 6.5 mostra o posicionamento ótimo para uma viga biapoiada no segundo modo, com e sem elementos piezelétricos incorporados. Os elementos são posicionados a 0,25 e 0,75 do comprimento da viga, conforme tabela 6.3.

No gráfico da figura 6.5 nota-se que existe uma diferença entre as curvas de índice de posicionamento devido a presença dos elementos piezelétricos. Na mesma figura observa-se que as posições ótimas 0,25L e 0,75L não se alteram com a consideração do efeito da massa e da rigidez. Isto se deve a simetria dos modos.

A figura 6.6 mostra o gráfico do segundo modo de vibrar da viga biapoiada com e sem elementos piezelétricos incorporados. Assim como no primeiro modo de vibrar, a massa e rigidez dos elementos piezelétricos, neste caso altera o modo.

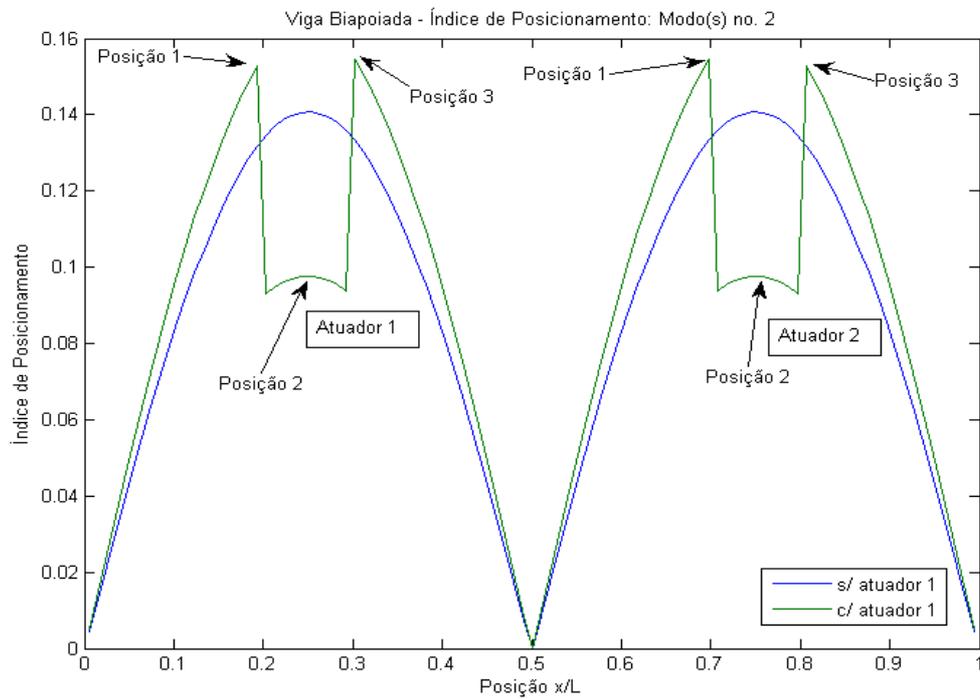


Figura 6.5 – Posicionamento ótimo para segundo modo viga biapoiada com e sem atuador.

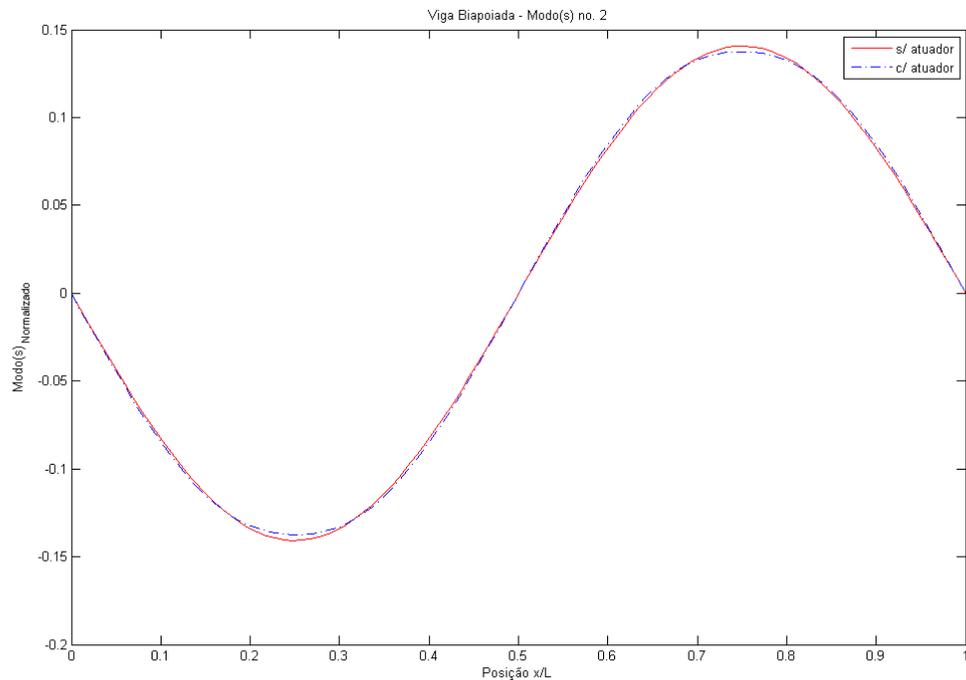


Figura 6.6 – Modo de vibrar para segundo modo viga biapoiada com e sem atuador.

A tabela 6.5 mostra as posições ótimas para viga biapoiada com e sem elementos piezelétricos incorporados para o segundo modo.

Tabela 6.5 Posição ótima do primeiro modo de uma viga biapoiada com e sem atuador.

Posição ótima sem atuador 1		Posição ótima com atuador 1					
x/L	m	Posição 1		Posição 2		Posição 3	
0,25	0,375	x/L	m	x/L	m	x/L	m
		0,19	0,285	0,25	0,375	0,29	0,435
		Comprimento do atuador 1					
		Posição 3 – Posição 1					
		0,150m					
Posição ótima sem atuador 2		Posição ótima com atuador 2					
x/L	m	Posição 1		Posição 2		Posição 3	
0,75	1,125	x/L	m	x/L	m	x/L	m
		0,70	1,050	0,75	1,125	0,80	1,193
		Comprimento do atuador 2					
		Posição 3 – Posição 1					
		0,150 m					

6.1.3 Posições Ótimas Considerando Mais de Um Atuador Piezelétrico.

Com a finalidade de se verificar o posicionamento ótimo em uma viga biapoiada foi realizada simulação do posicionamento ótimo com dois atuadores piezelétricos para o primeiro e segundo modo de vibrar, respectivamente.

O gráfico da figura 6.7 mostra o posicionamento ótimo para o primeiro modo de vibrar da viga, considerando a condição de se posicionar dois atuadores piezelétricos.

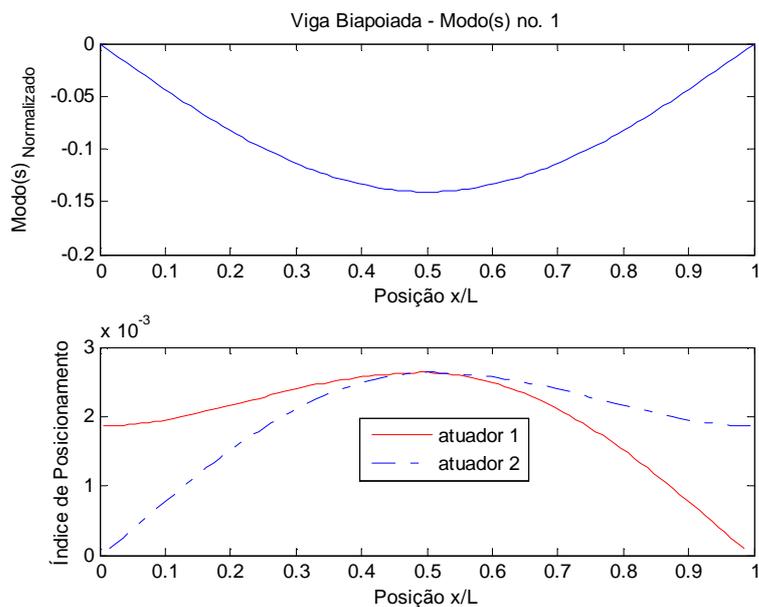


Figura 6.7– Posicionamento ótimo para primeiro modo viga biactuada com 2 atuadores.

A tabela 6.6 mostra as posições ótimas para esta simulação.

Tabela 6.6 Posição ótima do primeiro modo de uma viga biactuada com dois atuadores

Posições ótimas (x/L)		Posições ótimas (m)	
Atuador 1	Atuador 2	Atuador 1	Atuador 2
0,50	0,50	0,750	0,750

O gráfico da figura 6.8 mostra o posicionamento ótimo para o segundo modo de vibrar da viga biactuada, considerando-se dois atuadores piezelétricos.

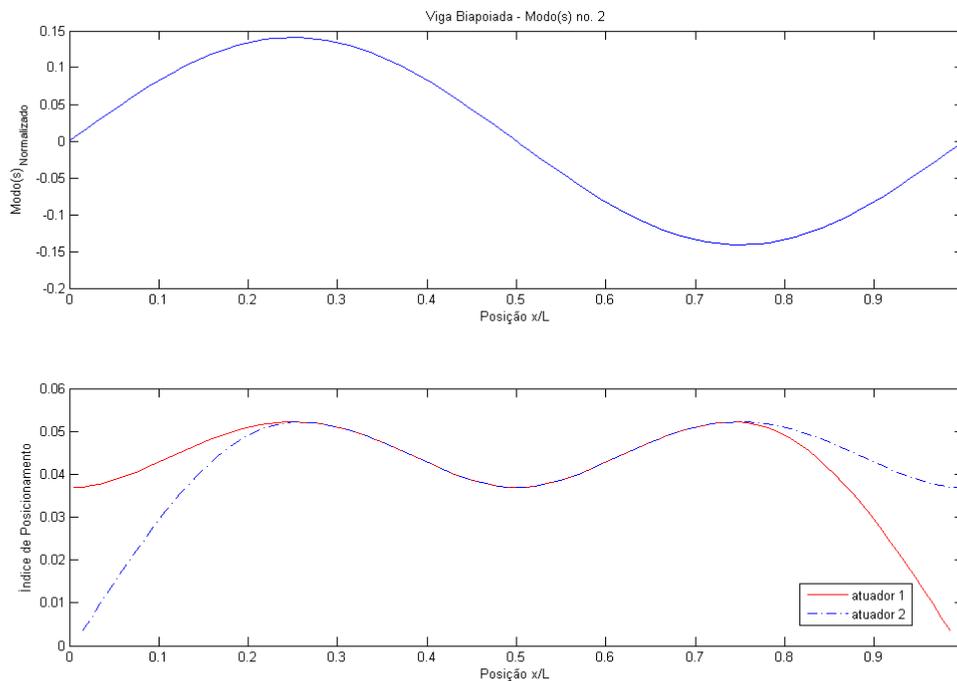


Figura 6.8 – Posicionamento ótimo para segundo modo viga biactuada com 2 atuadores.

A tabela 6.7 mostra as posições ótimas para o segundo modo de vibrar da viga biactuada com dois atuadores piezelétricos.

Tabela 6.7 Posição ótima do segundo modo de uma viga biactuada com dois atuadores.

Posições ótimas (x/L)				Posições ótimas (m)			
Atuador 1		Atuador 2		Atuador 1		Atuador 2	
1	2	1	2	1	2	1	2
0,25	0,75	0,25	0,75	0,375	1,125	0,375	1,125

6.1.4 Posicionamento Ótimo para Mais de um Modo de Vibrar

Realizaram-se simulações com o intuito de se verificar a possibilidade de se posicionar o elemento piezelétrico para mais de um modo, simultaneamente.

O gráfico da figura 6.9 mostra o posicionamento ótimo para a viga biactuada, considerando-se o primeiro e segundo modo de vibrar.

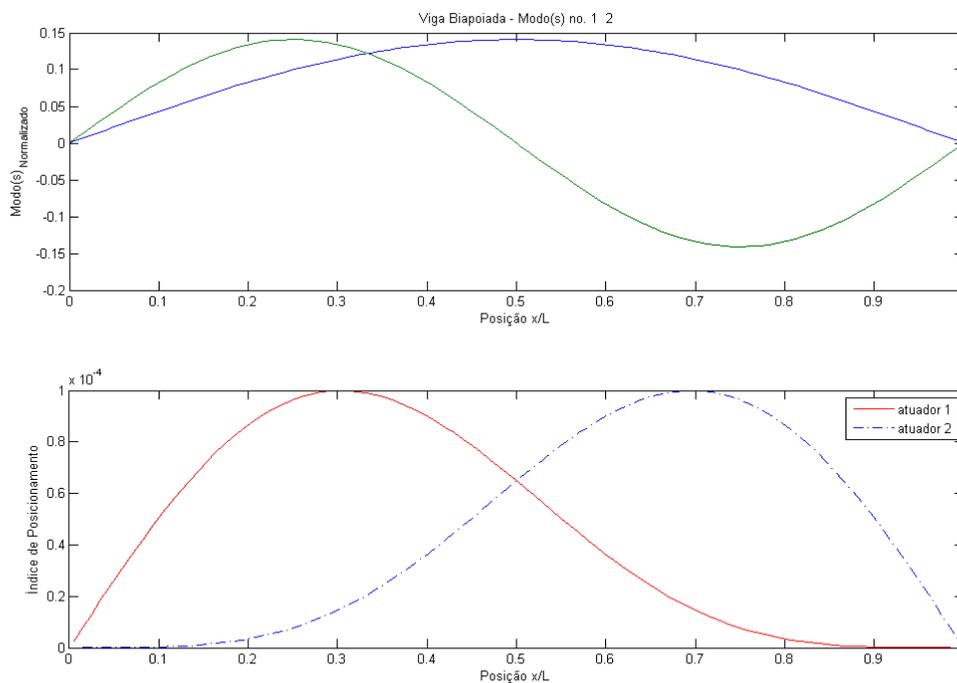


Figura 6.9 – Posicionamento ótimo para primeiro/segundo modo viga biapoiada.

A tabela 6.8 mostra as posições ótimas da viga biapoiada considerando-se o primeiro e segundo modo.

Tabela 6.8 Posição ótima do primeiro/segundo modo de uma viga biapoiada.

Posições ótimas (x/L)		Posições ótimas (m)	
1	2	1	2
0,30	0,70	0,450	1,050

Os gráficos da figura 6.10 mostram o primeiro, o segundo e o terceiro modos de vibrar e os respectivos índices de posicionamento, considerando-se todos estes modos de vibrar simultaneamente. A simulação foi realizada considerando-se três atuadores ou elementos piezelétricos.

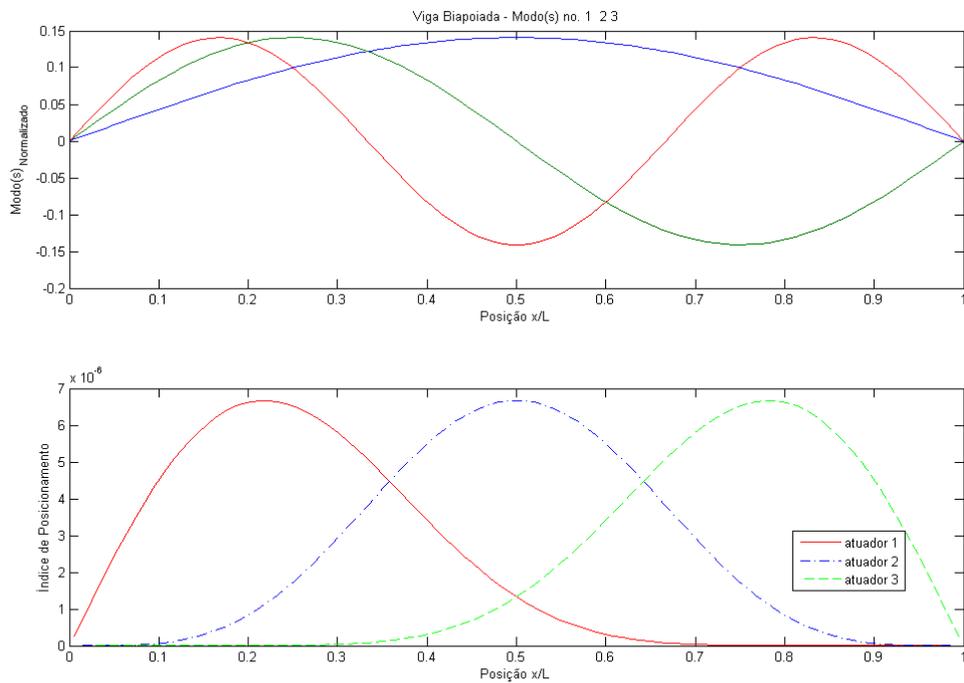


Figura 6.10 – Posicionamento ótimo para primeiro, segundo e terceiro modo viga biapoiada.

A tabela 6.9 mostra os valores das posições ótimas para viga biapoiada considerando-se o primeiro, segundo e o terceiro modo da viga com três atuadores piezelétricos.

Tabela 6.9 Posição ótima do primeiro/segundo/terceiro modo de uma viga biapoiada.

Posições ótimas (x/L)			Posições ótimas (m)		
1	2	3	1	2	3
0,22	0,50	0,78	0,330	0,750	1,170

6.2 CASO 2: VIGA EM BALANÇO

6.2.1 Posições Ótimas para um Atuador sem Considerar o Efeito da Rigidez e da Massa do Atuador Piezelétrico.

As figuras 6.11 e 6.12 mostram o primeiro e o segundo modos de vibrar para uma viga em balanço sem elementos piezelétricos incorporados e os seus respectivos índices de posicionamento ótimo, cujas posições são mostradas pelas tabelas pelas tabelas 6.10 e 6.11.

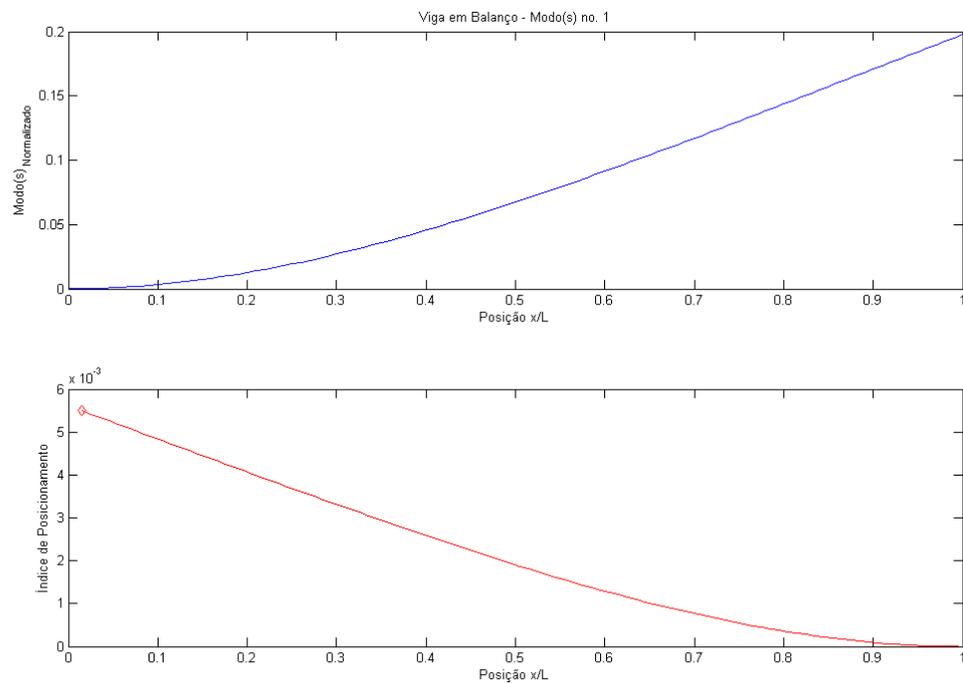


Figura 6.11 – a) Primeiro modo de vibrar; b) Índice de posicionamento ótimo.

Tabela 6.10 Posição ótima para o primeiro modo de uma viga em balanço.

Posição ótima (x/L)	Posição ótima (m)
0,01	0,015

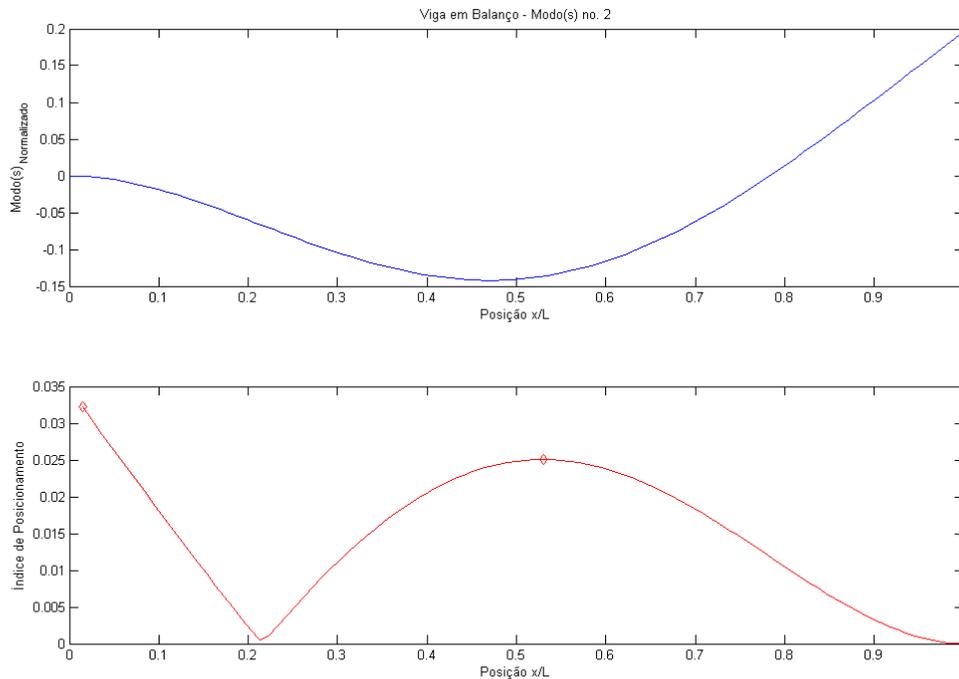


Figura 6.12 – a) Segundo modo de vibrar; b) Índice do posicionamento ótimo.

Tabela 6.11 Posição ótima do segundo modo de uma viga em balanço.

Posições ótimas		Posições ótimas (m)	
0,01	0,53	0,015	0,795

6.2.2 Posições Ótimas Considerando o Efeito da Rigidez e da Massa do Atuador Piezelétrico

Agora, simulou-se a viga considerando a massa e a rigidez do atuador piezelétrico, de forma a verificar sua influência no índice de posicionamento. Desta maneira, obtêm-se o primeiro modo da viga em balanço, com dois elementos piezelétricos, co-posicionados a 0,01 L ou 1% do seu comprimento da viga, um na parte superior e outro na parte inferior, conforme tabela 6.10. A figura 6.13 mostra o índice de posicionamento ótimo da viga com e sem elemento piezelétrico incorporado para o primeiro modo de vibrar da viga em balanço. A figura 6.14 mostra o primeiro modo de vibrar para a viga em balanço.

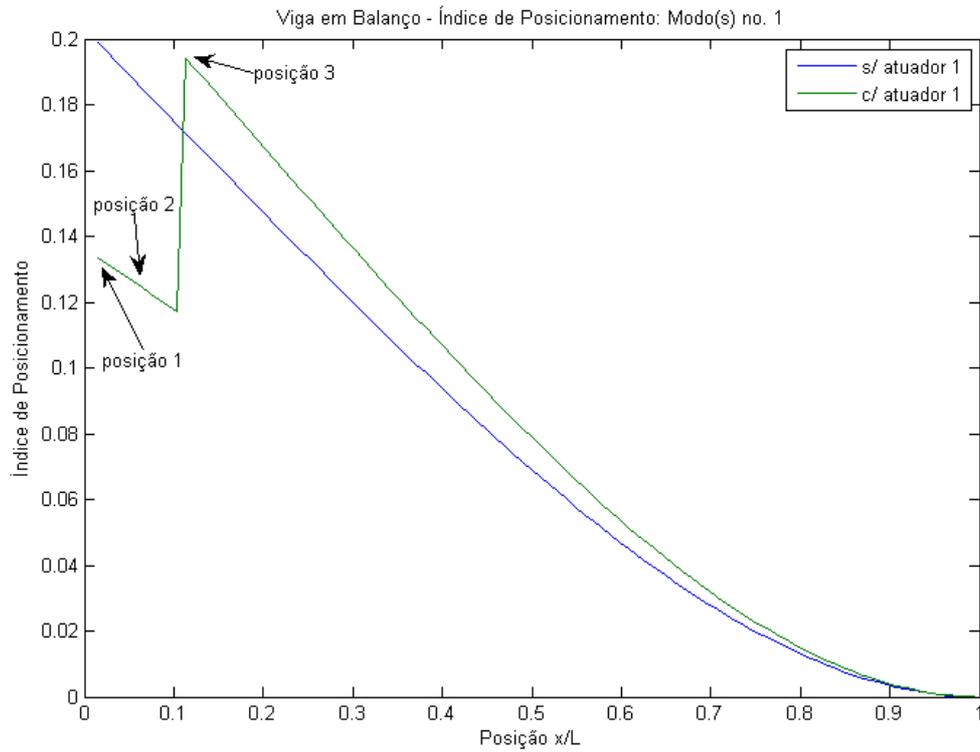


Figura 6.13 – Posicionamento ótimo para primeiro modo viga em balanço com e sem atuador.

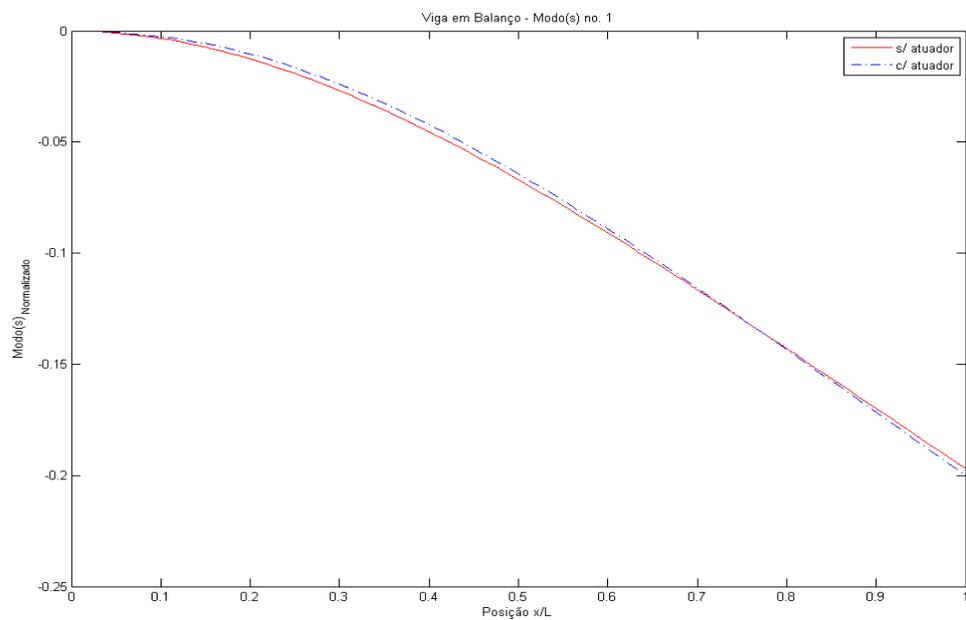


Figura 6.14 – Modo de vibrar para primeiro modo viga em balanço com e sem atuador.

Verifica-se no gráfico da figura 6.14, que os modos de vibrar da estrutura com e sem elementos piezelétricos incorporados não são exatamente iguais devido ao acréscimo da massa e da rigidez do atuador piezelétrico à estrutura suporte. No gráfico da figura 6.13 verifica-se que o trecho com elemento incorporado há uma diminuição da controlabilidade, devido à massa e a rigidez adicional dos elementos piezelétricos, contudo sua posição ótima não foi alterada.

Tabela 6.12 Posição ótima do primeiro modo de uma viga em balanço com e sem atuador.

Posição ótima sem atuador		Posição ótima com atuador			
x/L	m	Posição 1		Posição 3	
0,01	0,015	x/L	m	x/L	m
		0,01	0,015	0,11	0,165
		Comprimento do atuador			
		Posição 3 – Posição 1			
		0,15 m			

A tabela 6.12 mostra a posição ótima para a viga em balanço com e sem elementos piezelétricos incorporados para o primeiro modo. Também é dado o comprimento do elemento piezelétrico.

O gráfico da figura 6.15 mostra o índice de posicionamento para o segundo modo de vibrar da viga em balanço com e sem elemento piezelétricos incorporados.

Para a viga em balanço, a posição 1 é definido pela extremidade esquerda do atuador piezelétrico, a posição 2 é o centro do atuador piezelétrico e a posição 3 a direita do atuador piezelétrico.

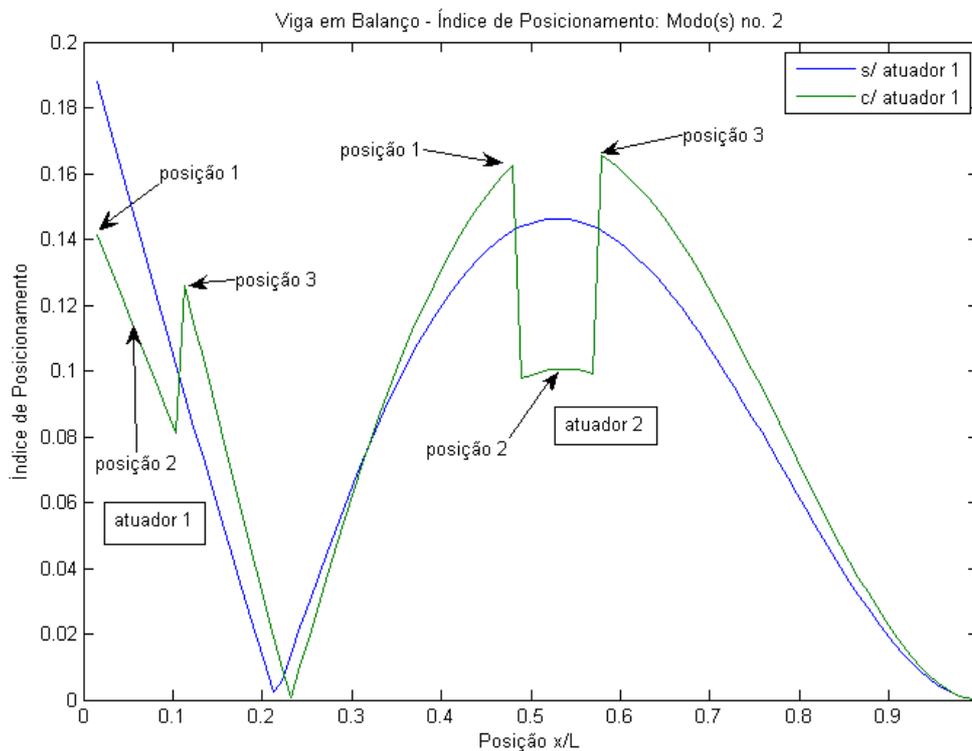


Figura 6.15 – Posicionamento ótimo para segundo modo viga em balanço com e sem atuador.

Os elementos piezelétricos são posicionados na parte superior e inferior da viga em balanço, posicionados conforme tabela 6.11 a 0,01 e a 0,53 do comprimento da viga.

O gráfico da figura 6.16 mostra o segundo modo de vibrar da viga com e sem elemento piezelétrico ou atuador piezelétrico incorporados. Neste caso a rigidez e a massa do elemento ou atuador piezelétrico, adicionadas à estrutura suporte, também como aconteceu com o primeiro modo, mudam a configuração do modo de vibrar.

No gráfico do índice de posicionamento da figura 6.15 há uma diminuição da controlabilidade na região onde o elemento ou atuador piezelétrico está posicionado na estrutura suporte.

A tabela 6.13 mostra a posição ótima para a viga em balanço com e sem elementos piezelétricos incorporados para o segundo modo. Também é dado o comprimento do elemento piezelétrico.

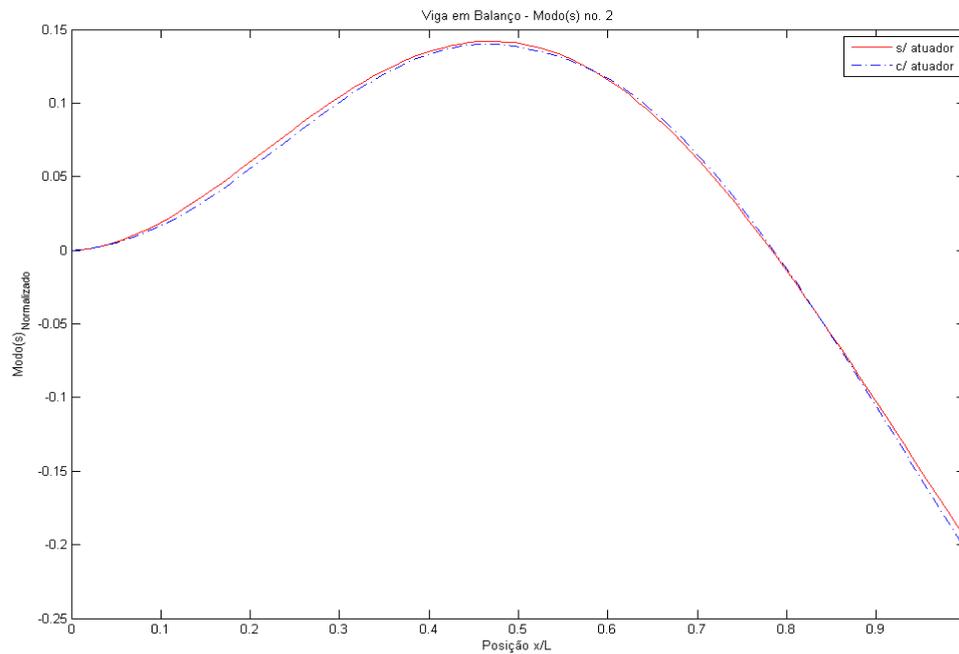


Figura 6.16 – Modo de vibrar para segundo modo viga em balanço com e sem atuador.

Tabela 6.13 Posição ótima do segundo modo de uma viga em balanço com e sem atuador.

Posição ótima sem atuador 1		Posição ótima com atuador 1					
x/L	m	Posição 1		Posição 2		Posição 3	
0,01	0,015	x/L	m	x/L	m	x/L	m
		0,01	0,015	0,06	0,09	0,11	0,165
		Comprimento do atuador 1					
		Posição 3 – Posição 1					
		0,150 m					
Posição ótima sem atuador 2		Posição ótima com atuador 2					
x/L	m	Posição 1		Posição 2		Posição 3	
0,53	0,795	x/L	m	x/L	m	x/L	m
		0,48	0,720	0,54	0,810	0,58	0,870
		Comprimento do atuador 2					
		Posição 3 – Posição 1					
		0,150 m					

6.2.3 Posições Ótimas Considerando Mais de Um Atuador Piezelétrico.

Com a finalidade de se verificar o posicionamento ótimo para uma viga em balanço no caso de se posicionar mais de um atuador piezelétrico, foi feita simulação do posicionamento ótimo com dois atuadores para o primeiro modo e para o segundo modo de vibra respectivamente.

O gráfico da figura 6.17 mostra o modo de vibrar e o posicionamento ótimo para o primeiro modo da viga em balanço, considerando a condição de se posicionar dois atuadores piezelétricos.

A tabela 6.14 mostra as posições ótimas para o primeiro modo de vibrar da viga em balanço.

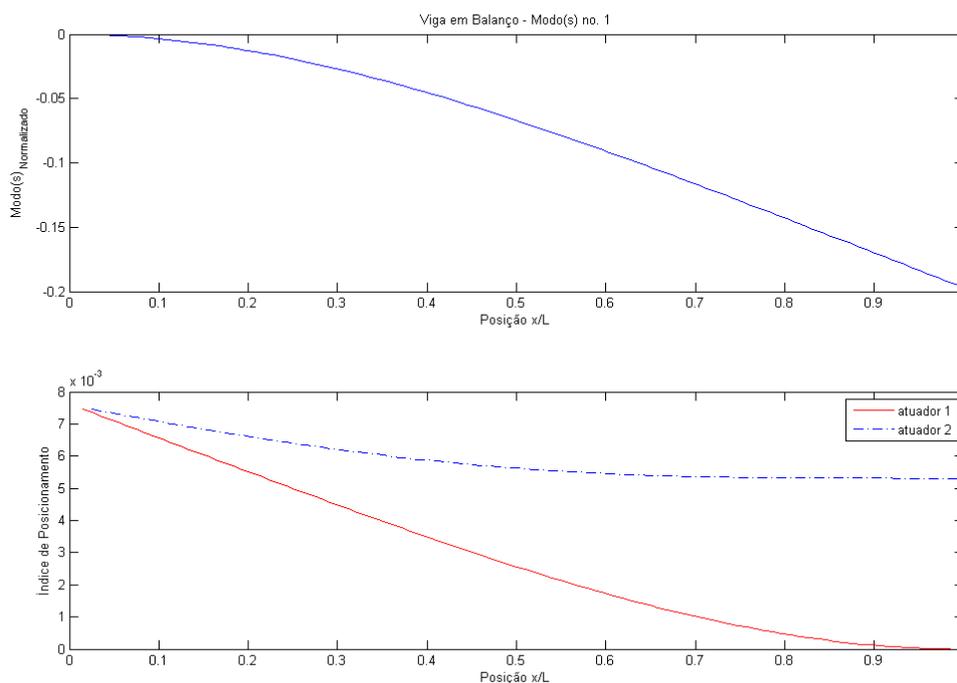


Figura 6.17 – Posicionamento ótimo para primeiro modo viga em balanço com 2 atuadores.

Tabela 6.14 Posição ótima do primeiro modo de uma viga em balanço com dois atuadores.

Posições ótimas (x/L)		Posições ótimas (m)	
Atuador 1	Atuador 2	Atuador 1	Atuador 2
0,01	0,02	0,015	0,030

O gráfico da figura 6.18 mostra o modo de vibrar e o índice de posicionamento para o segundo modo da viga em balanço.

A tabela 6.15 mostra as posições ótimas da viga em balanço considerando-se dois atuadores piezelétricos.

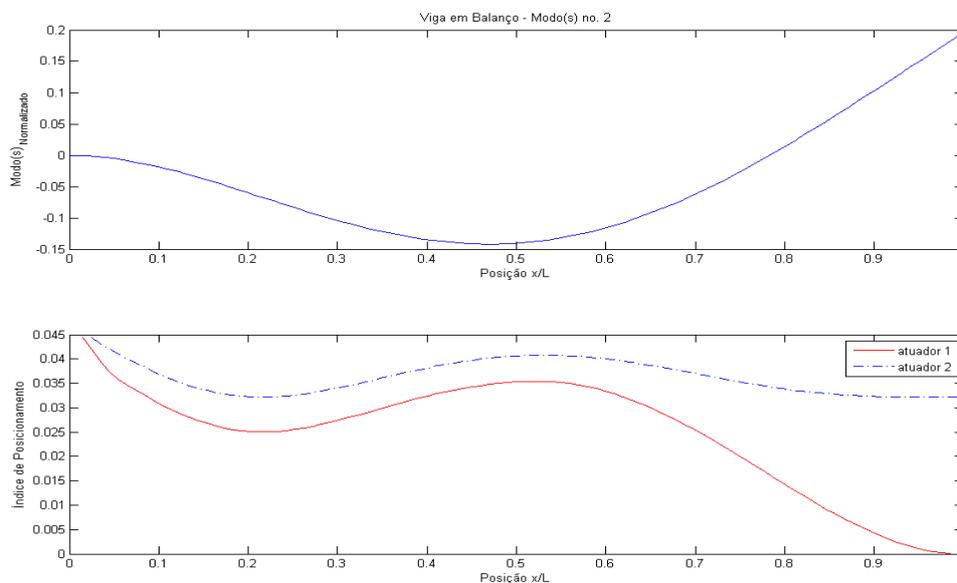


Figura 6.18 – Posicionamento ótimo para segundo modo viga em balanço com 2 atuadores.

Tabela 6.15 Posição ótima do segundo modo de uma viga em balanço com dois atuadores.

Posições ótimas (x/L)				Posições ótimas (m)			
Atuador 1		Atuador 2		Atuador 1		Atuador 2	
1	2	1	2	1	2	1	2
0,01	0,53	0,02	0,53	0,015	0,795	0,030	0,795

6.2.4 Posicionamento Ótimo para Mais de um Modo de Vibrar Considerando Mais de Um Atuador Piezelétrico Sem Considerar a Massa e Rigidez do Atuador Piezelétrico.

Com o intuito de se verificar a influência de um modo sobre o outro no posicionamento do atuador piezelétrico, foi simulado o posicionamento da viga em balanço considerando-se mais de um modo de vibrar.

O gráfico da figura 6.19 mostra o índice de posicionamento ótimo pra a viga em balanço considerando-se o primeiro e o segundo modo de vibrar com dois atuadores piezelétricos.

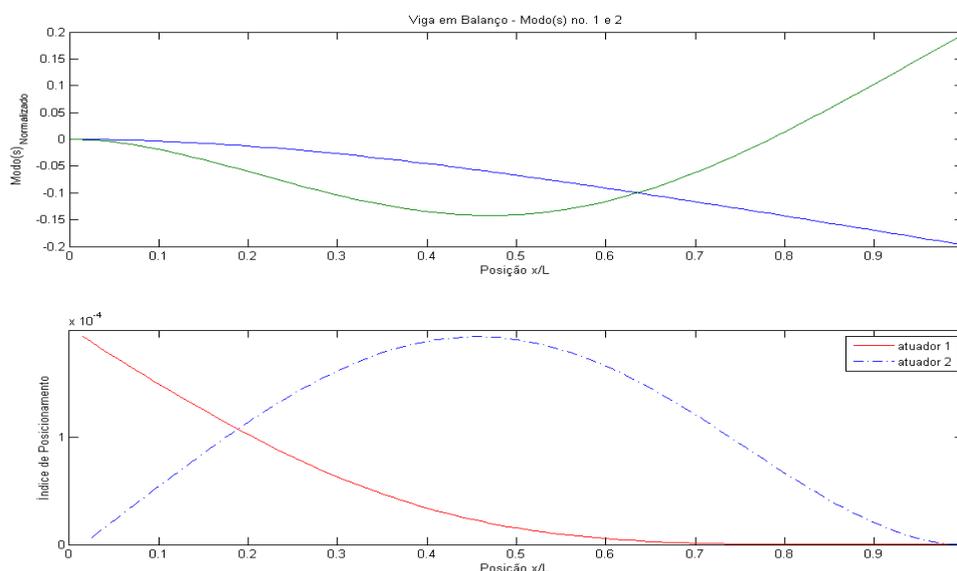


Figura 6.19 – Posicionamento ótimo para primeiro/segundo modo viga em balanço.

A tabela 6.16 mostra os valores numéricos das posições ótimas para uma viga em balanço na condição de vibrar entre o primeiro e segundo modo de vibrar.

Tabela 6.16 Posição ótima do primeiro/segundo modo de uma viga em balanço.

Posições ótimas (x/L)		Posições ótimas (m)	
Atuador 1	Atuador 2	Atuador 1	Atuador 2
0,06	0,46	0,015	0,690

O gráfico 6.20 mostra o índice de posicionamento ótimo para uma viga em balanço considerando o primeiro, o segundo e o terceiro modo com três atuadores piezelétricos.

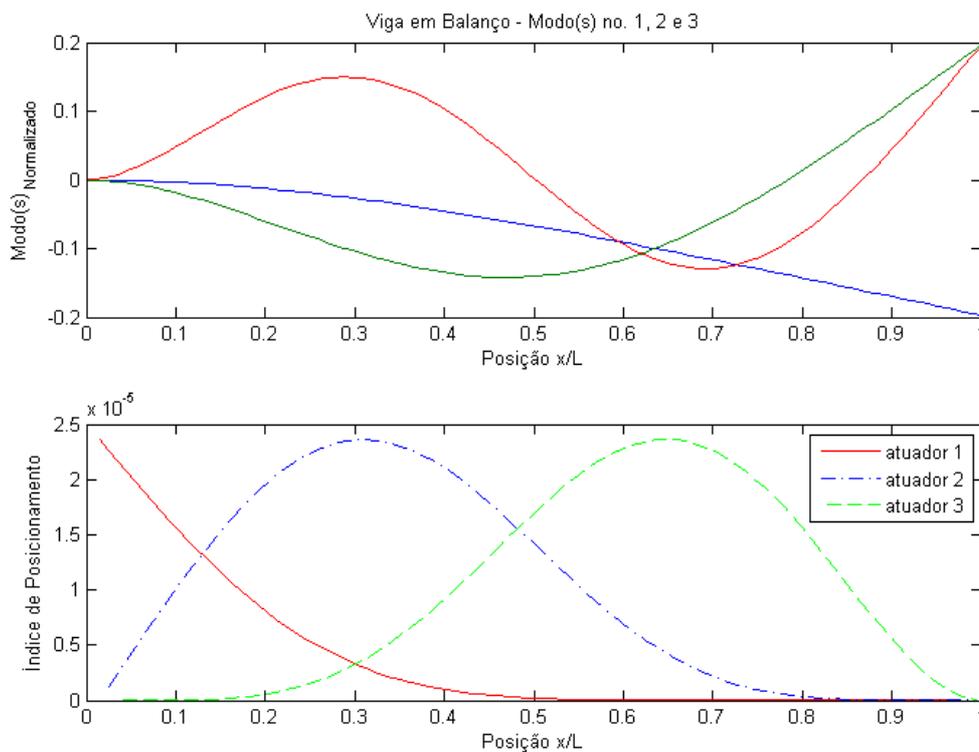


Figura 6.20 – Posicionamento ótimo para primeiro/segundo/terceiro modo viga em balanço.

A tabela 6.17 mostra as posições ótimas para viga em balanço considerando-se o primeiro, segundo e terceiro modo de vibrar sem considerar a influência da rigidez e da massa do atuador piezelétrico.

Tabela 6.17 Posição ótima do primeiro/segundo/terceiro modo de uma viga em balanço

Posições ótimas – (x/L)			Posições ótimas (m)		
Atuador 1	Atuador 2	Atuador 3	Atuador 1	Atuador 2	Atuador 3
0,01	0,31	0,65	0,015	0,465	0,975

6.2.5 Posicionamento Ótimo para Mais de um Modo de Vibrar. Considerando Mais de Um Atuador Piezelétrico e o Efeito da Influência da Massa e da Rigidez dos Atuadores Piezelétricos.

A influência do atuador piezelétrico foi verificada através das simulações mostradas pela figura 6.21, que mostra o índice de posicionamento ótimo para uma viga em balanço considerando o primeiro, o segundo e o terceiro modo, simultaneamente, com a massa e da rigidez do elemento piezelétrico. A figura 6.22 mostra o primeiro, o segundo e o terceiro modo de vibrar da viga com e sem atuador piezelétrico. A figura 6.23 mostra os índices de posicionamento da estrutura com e sem atuadores piezelétricos.

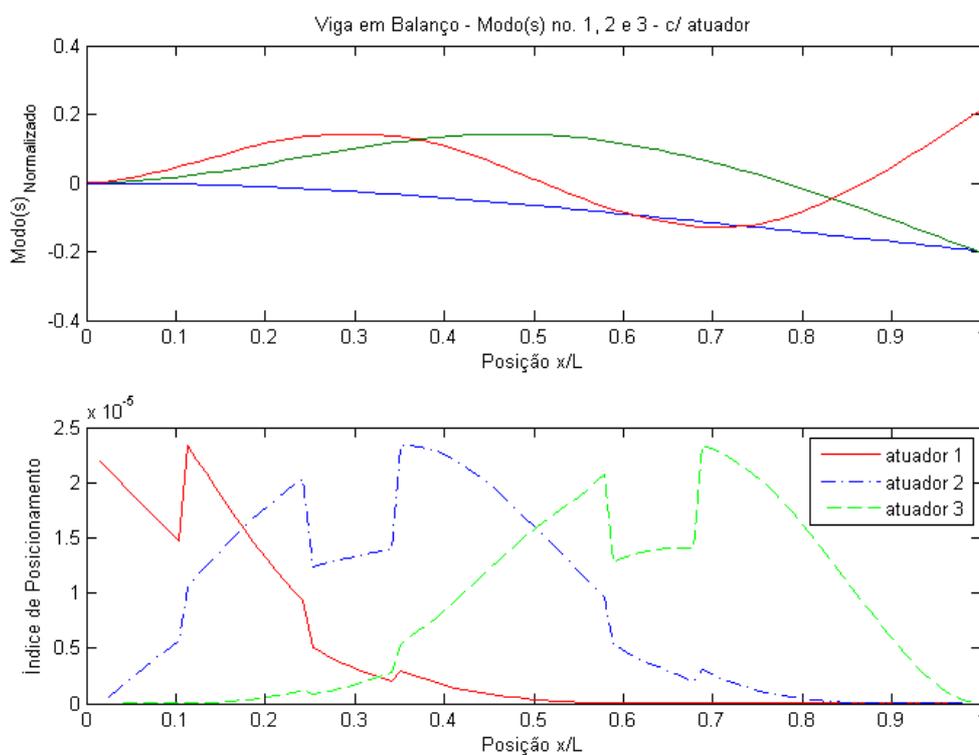


Figura 6.21 – Posicionamento ótimo para primeiro/segundo/terceiro modo viga em balanço com atuadores piezelétricos.

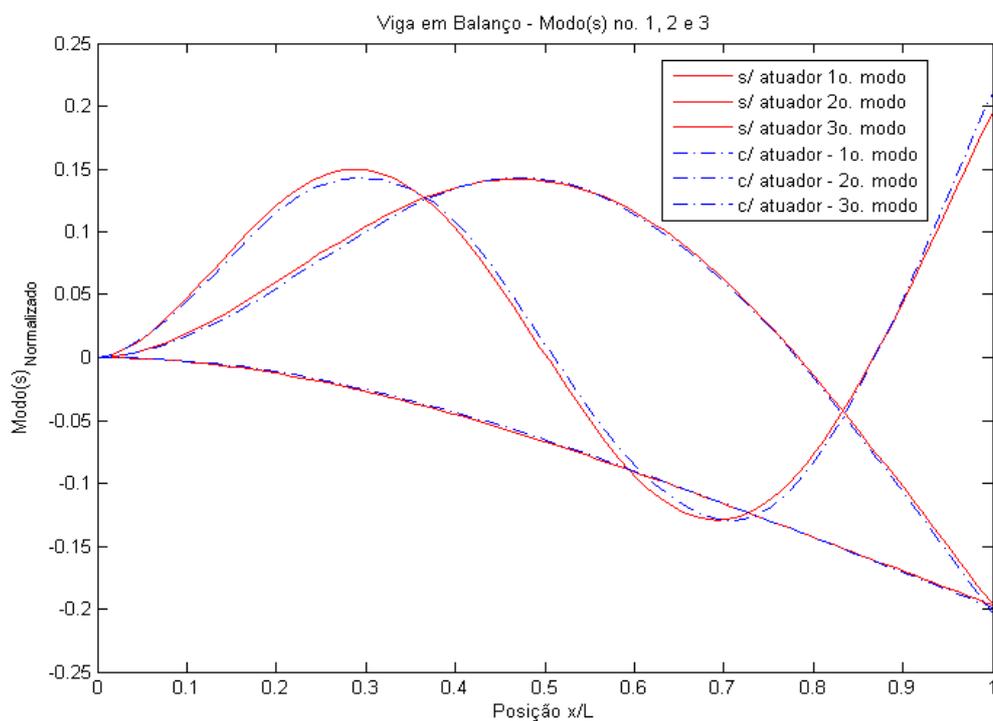


Figura 6.22 – Primeiro/segundo/terceiro modo viga em balanço com e sem atuadores.

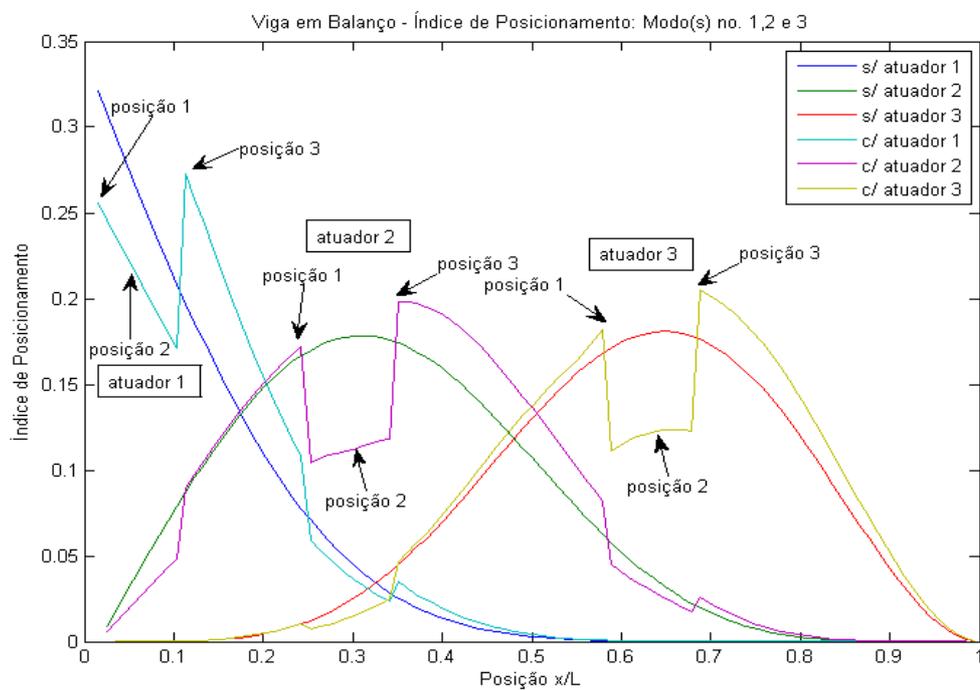


Figura 6.23 – Posicionamento ótimo para primeiro/segundo/terceiro modo viga em balanço com e sem atuadores

A tabela 6.18 mostra os valores numéricos das posições ótimas para o primeiro, o segundo e o terceiro modo de vibrar da viga em balanço com e sem atuadores piezelétricos.

Tabela 6.18 Posição ótima do primeiro/segundo/terceiro modo de uma viga em balanço com e sem atuador.

Posição ótima sem atuador 1		Posição ótima com atuador 1					
x/L	m	Posição 1		Posição 2		Posição 3	
0,01	0,015	x/L	m	x/L	m	x/L	m
		0,01	0,015	0,06	0,09	0,11	0,165
		Comprimento do atuador 1					
		Posição 3 – Posição 1					
		0,150m					
Posição ótima sem atuador 2		Posição ótima com atuador 2					
x/L	m	Posição 1		Posição 2		Posição 3	
0,31	0,465	x/L	m	x/L	m	x/L	m
		0,25	0,375	0,30	0,450	0,35	0,525
		Comprimento do atuador 2					
		Posição 3 – Posição 1					
		0,150 m					
Posição ótima sem atuador 3		Posição ótima com atuador 2					
x/L	m	Posição 1		Posição 2		Posição 3	
0,65	0,975	x/L	m	x/L	m	x/L	m
		0,58	0,870	0,63	0,945	0,68	1,020
		Comprimento do atuador 2					
		Posição 3 – Posição 1					
		0,150 m					

Verifica-se pela figura 6.23 que a massa e a rigidez dos atuadores piezelétricos deslocam o índice de posicionamento para a direita, isto ocorre porque, como observado pela figura 6.22, há uma alteração dos modos de vibrar com e sem atuadores piezelétricos.

6.3 CASO 3: VIGA BI-ENGASTADA

6.3.1 Posições Ótimas para um Atuador Piezelétrico.

A figura 6.24 mostra o primeiro modo de vibrar, considerando-se um atuador piezelétrico sem elementos piezelétricos incorporados e o seu respectivo índice de posicionamento ótimo, cujas posições são mostrada pela tabela 6.19.

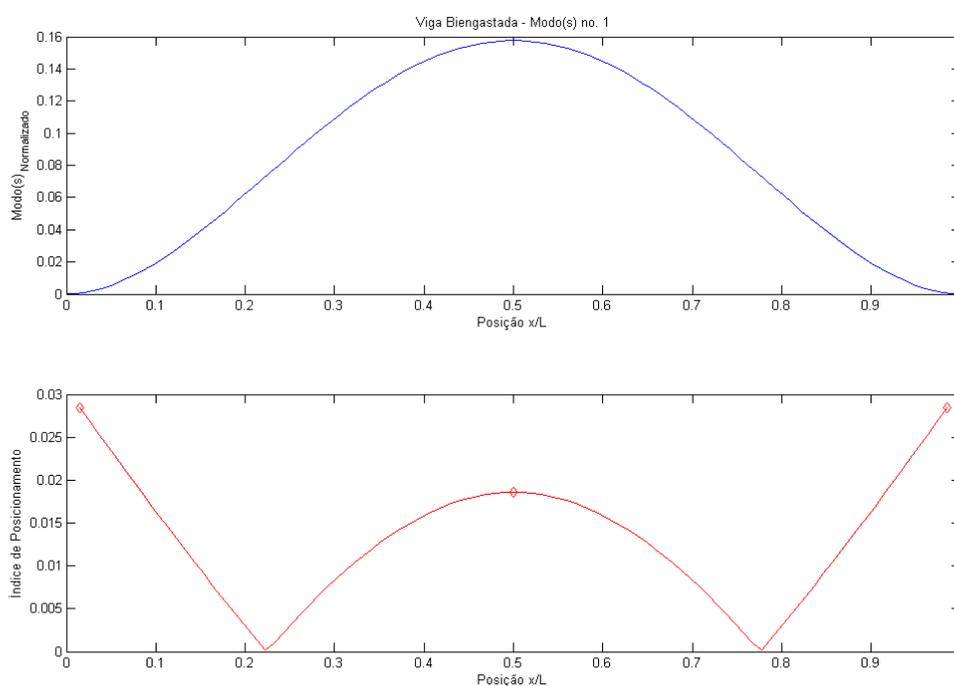


Figura 6.24 – a) Primeiro modo de vibrar; b) Índice de posicionamento ótimo para viga em bi-engastada.

Tabela 6.19 Posição ótima para o primeiro modo de uma viga bi-engastada.

Posição ótima (x/L)			Posição ótima (m)		
0,01	0,50	0,99	0,015	0,750	1,485

A figura 6.25 mostra o primeiro e o segundo modo de vibrar da viga bi-engastada, considerando-se dois atuadores piezelétricos e o seu respectivo índice de posicionamento.

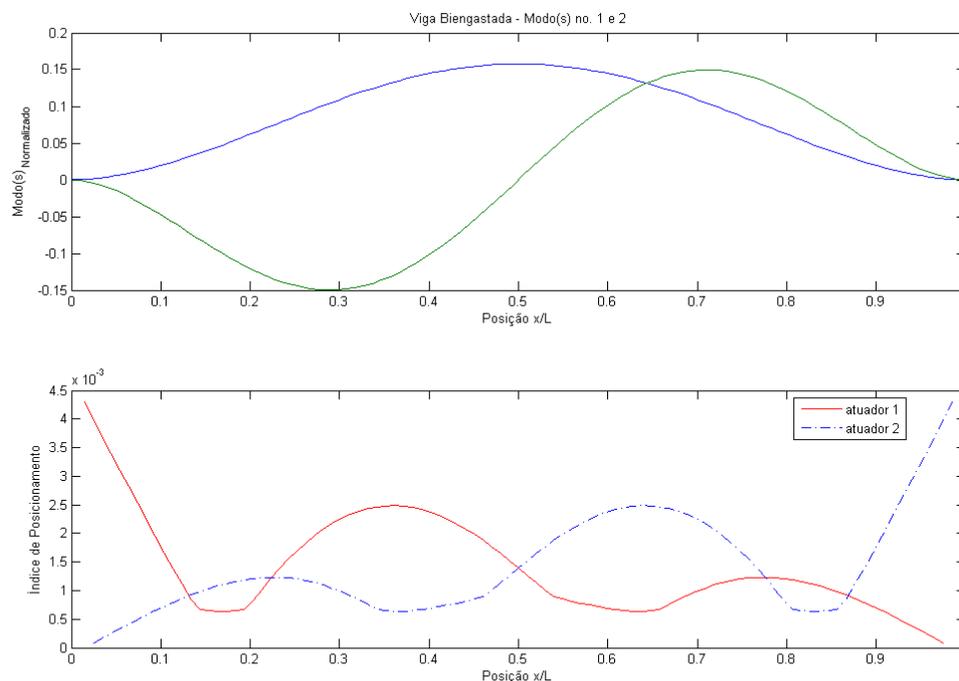


Figura 6.25 – a) Primeiro/Segundo modo de vibrar b) Índice de posicionamento ótimo para viga em bi-engastada.

A tabela 6.20 mostra os valores numéricos encontrados para esta simulação.

Tabela 6.20 Posição ótima para o primeiro/segundo modo de uma viga bi-engastada.

Posições ótimas (x/L)						Posições ótimas (m)					
Atuador 1			Atuador 2			Atuador 1			Atuador 2		
0,01	0,36	0,79	0,22	0,64	0,99	0,01	0,54	1,17	0,33	0,96	1,49

Com a finalidade de se verificar o efeito da massa e da rigidez do atuador piezelétrico, foi simulada uma viga bi-engastada com três atuadores piezelétricos posicionados de acordo com a tabela 6.19. O gráfico da figura 6.26 mostra o índice de posicionamento para o primeiro modo de vibrar de uma viga com e sem elemento piezelétricos incorporados

Nesta simulação verifica-se que não há alteração da posição ótima porque os atuadores piezelétricos estão centrados em relação ao modo.

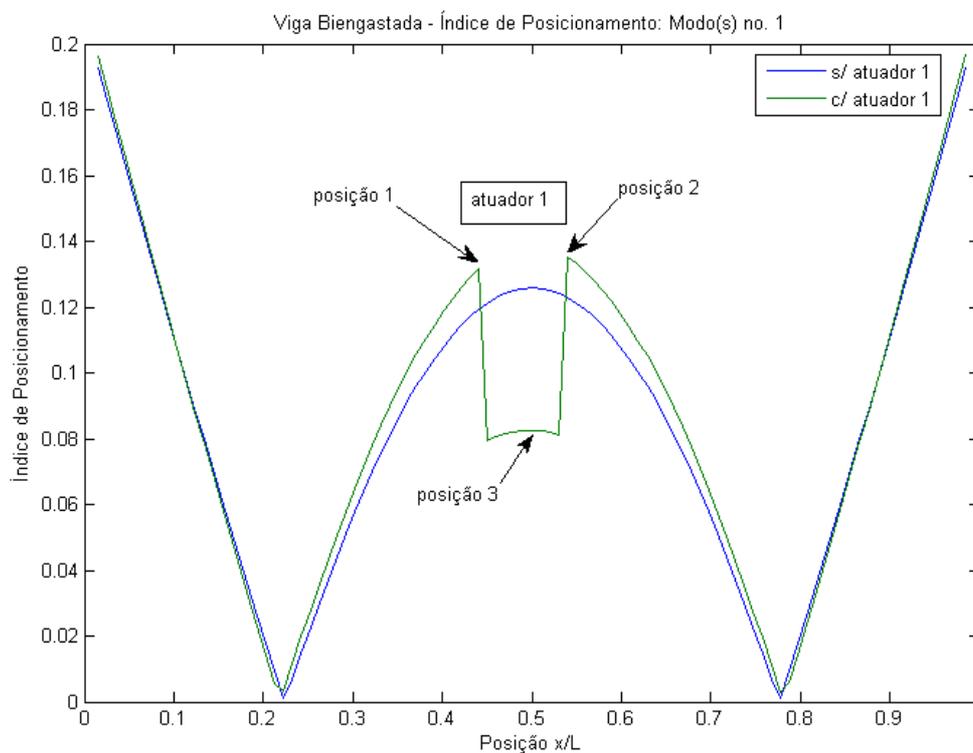


Figura 6.26 –Índice de posicionamento ótimo para o primeiro modo viga em bi-engastada com e atuador pzt

6.3.2 Posicionamento Ótimo para Mais de um Modo de Vibrar. Considerando Mais de Um Atuador Piezelétrico e o Efeito da Massa e da Rigidez dos Atuadores Piezelétricos.

Foi feita uma simulação da viga bi-engastada considerando o primeiro e segundo modo, com e sem atuador piezelétrico incorporado a estrutura suporte. A figura 6.27 mostra o índice de posicionamento para esta simulação, com atuadores piezelétricos posicionados de acordo com a tabela 6.20.

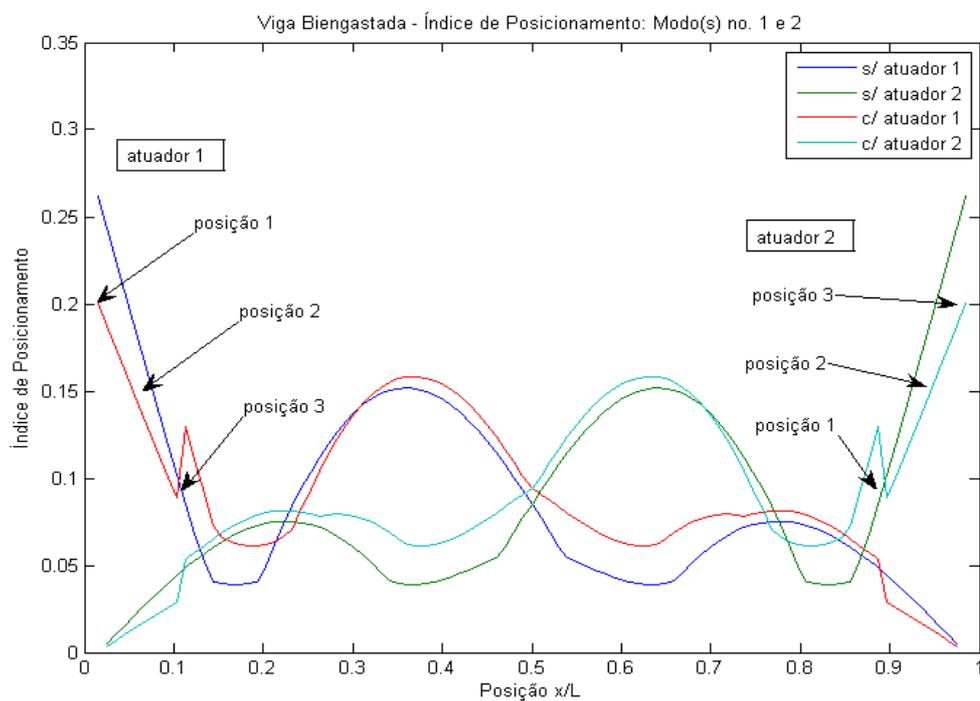


Figura 6.27 –Índice de posicionamento ótimo para o primeiro/segundo modo viga em bi-engastada com e sem atuador

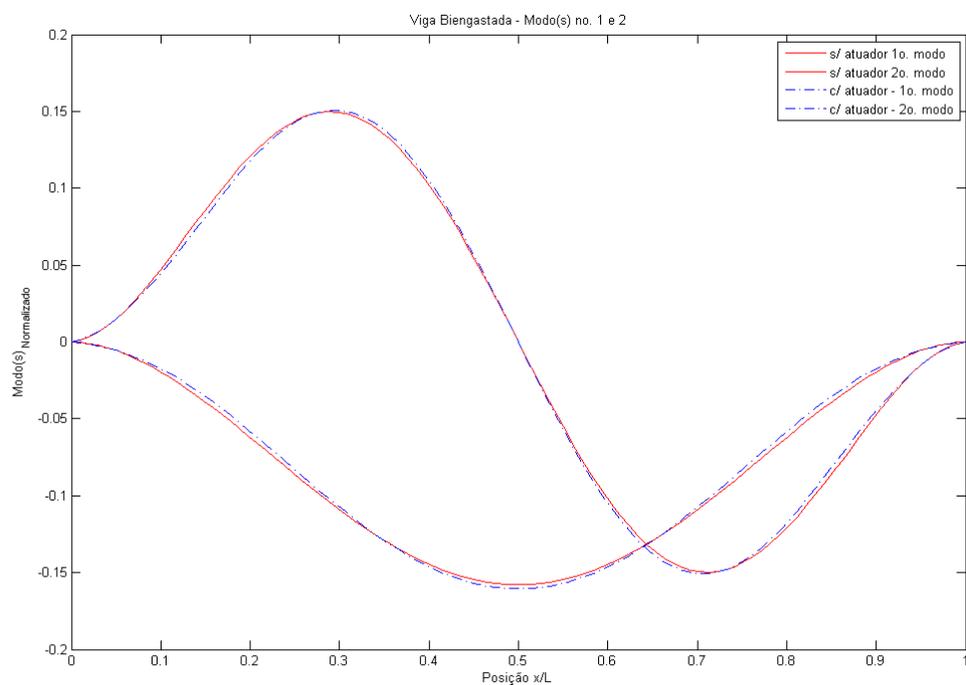


Figura 6.28 –Primeiro/segundo modo de vibrar viga bi-engastada com e sem atuador

A figura 6.28 mostra os modos de vibrar da viga bi-engastada considerando o primeiro e o segundo modo, verifica-se a influência da massa e rigidez do atuador piezolétrico que faz com que o índice seja deslocado uma parte para a direita e a outra, devido à simetria, para a esquerda.

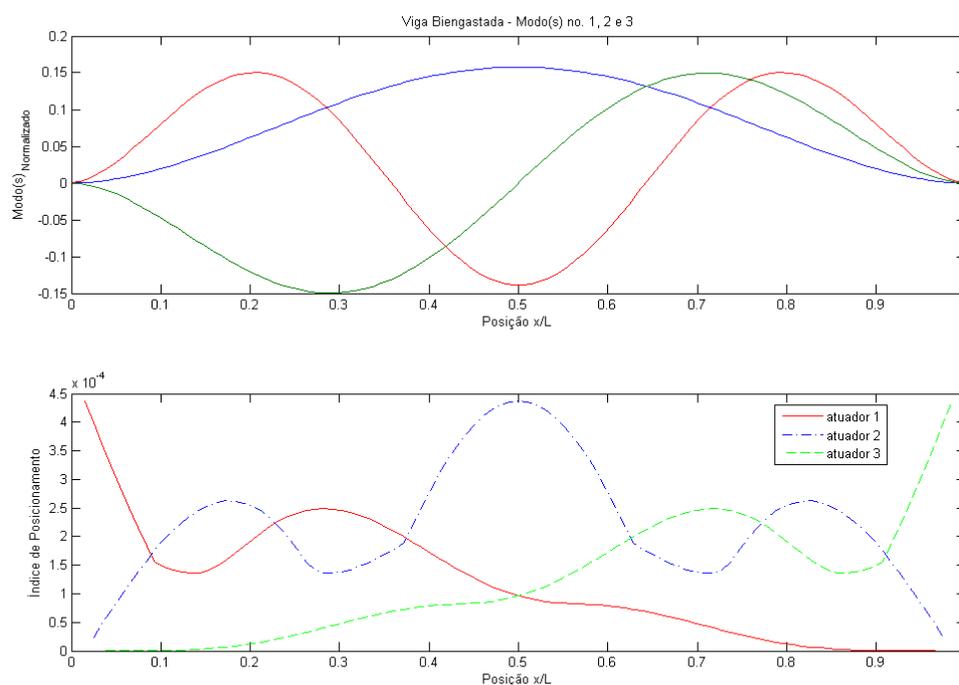


Figura 6.29 –Índice de posicionamento ótimo para o primeiro/segundo/terceiro modo viga bi-engastada sem atuador.

O gráfico da figura 6.29 mostra o índice de posicionamento para uma viga bi-engastada considerando o primeiro, o segundo e o terceiro modo com a condição de se posicionar três atuadores piezolétricos. Nesta simulação a viga não está com atuadores piezolétricos incorporados. Nesta condição verifica-se apenas a influência de modo um sobre o outro.

O gráfico da figura 6.30 mostra esta mesma simulação, porém considerando-se a influencia da massa e da rigidez dos atuadores piezolétricos, posicionados de acordo com a tabela 6.19.

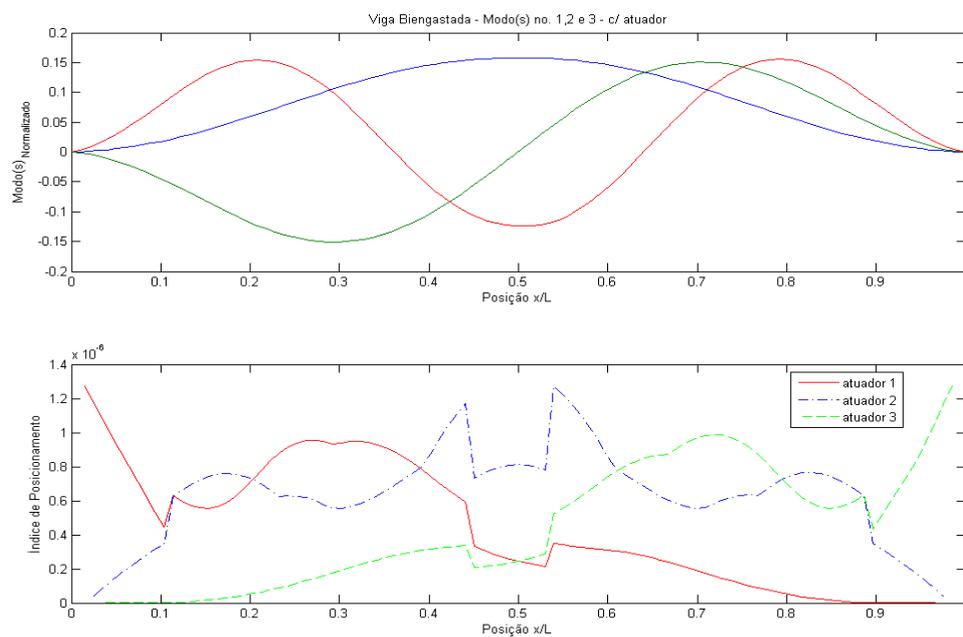


Figura 6.30 –Índice de posicionamento ótimo para o primeiro/segundo/terceiro modo viga bi-engastada com atuador.

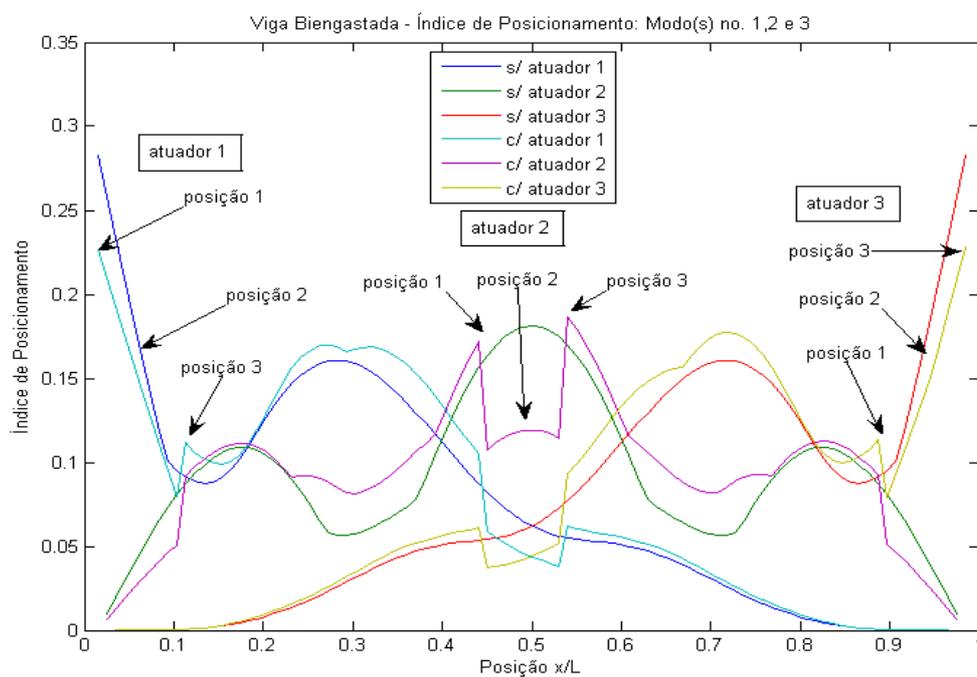


Figura 6.31 –Índice de posicionamento ótimo para o primeiro/segundo/terceiro modo viga bi-engastada com e sem atuador.

O gráfico da figura 6.30 mostra os modos de vibrar e o índice de posicionamento da viga considerando o primeiro, o segundo e o terceiro na condição de posicionar três atuadores piezelétricos.

A figura 6.31 mostra os gráficos dos índices de posicionamentos para a viga, com e sem elementos piezelétricos incorporados, onde se verifica a influência destes elementos piezelétricos no índice de posicionamento, isto porque os modos de vibrar são alterados pela massa e pela rigidez acrescentada pelos atuadores piezelétricos. Esta condição é verificada no gráfico da figura 6.32.

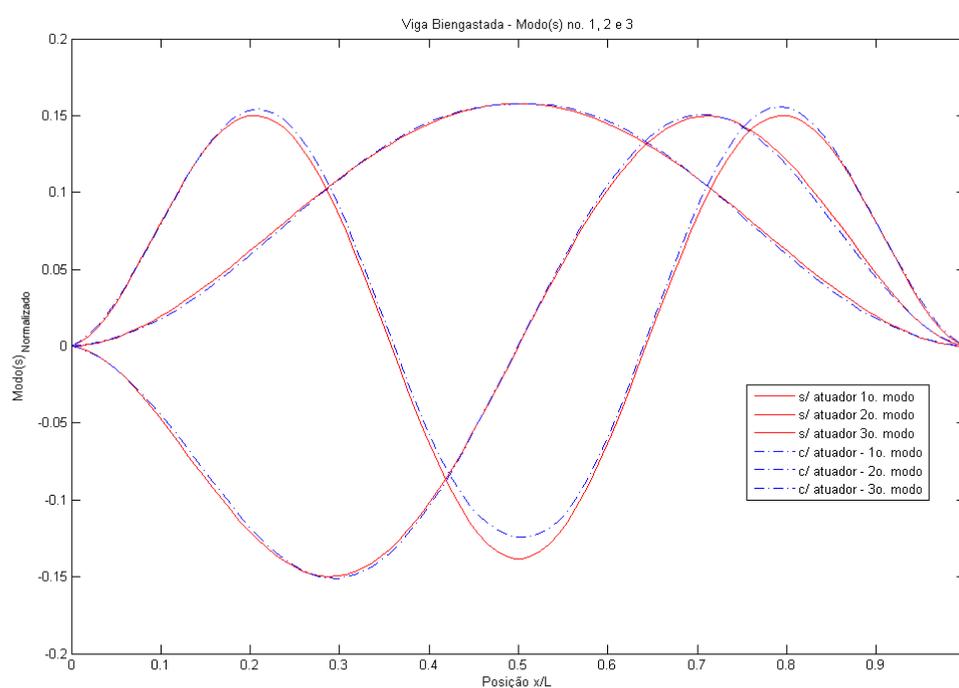


Figura 6.32 –Primeiro/segundo/terceiro modo viga bi-engastada com e sem atuador.

A tabela 6.21 mostra os valores numéricos de uma viga bi-engastada considerando o primeiro, o segundo e o terceiro modo, com e sem atuadores piezelétricos.

Tabela 6.21 Posição ótima do primeiro/segundo/terceiro modo de uma viga bi-engastada com e sem atuador.

Posição ótima sem atuador 1		Posição ótima com atuador 1					
x/L	m	Posição 1		Posição 2		Posição 3	
0,01	0,015	x/L	m	x/L	m	x/L	m
		0,01	0,015	0,06	0,09	0,11	0,165
		Comprimento do atuador 1					
		Posição 3 – Posição 1					
		0,150 m					
Posição ótima sem atuador 2		Posição ótima com atuador 2					
x/L	m	Posição 1		Posição 2		Posição 3	
0,5	0,750	x/L	m	x/L	m	x/L	m
		0,45	0,675	0,50	0,750	0,55	0,825
		Comprimento do atuador 2					
		Posição 3 – Posição 1					
		0,150 m					
Posição ótima sem atuador 3		Posição ótima com atuador 2					
x/L	m	Posição 1		Posição 2		Posição 3	
0,99	1,485	x/L	m	x/L	m	x/L	m
		0,89	1,335	0,94	1,410	0,99	1,485
		Comprimento do atuador 2					
		Posição 3 – Posição 1					
		0,150 m					

6.4 CASO 4: VIGA LIVRE-LIVRE

6.4.1 Posições Ótimas para um Atuador Piezelétrico.

A figura 6.33 mostra o primeiro modo de vibrar de corpo flexível e o seu respectivo índice de posicionamento.

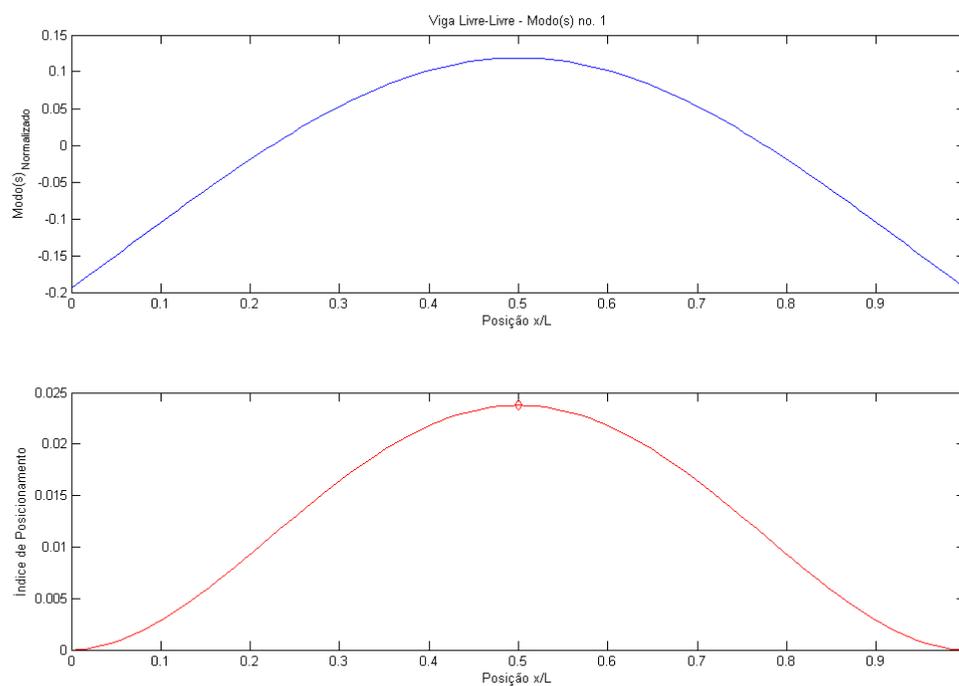


Figura 6.33 – a) Primeiro modo de vibrar; b) Índice de posicionamento ótimo para viga em livre-livre.

A tabela 6.22 mostra os valores numéricos para a posição ótima do primeiro modo de vibrar de corpo flexível da viga livre-livre.

Tabela 6.22 Posição ótima para o primeiro modo de uma viga livre-livre.

Posição ótima (x/L)	Posição ótima (m)
0,50	0,750

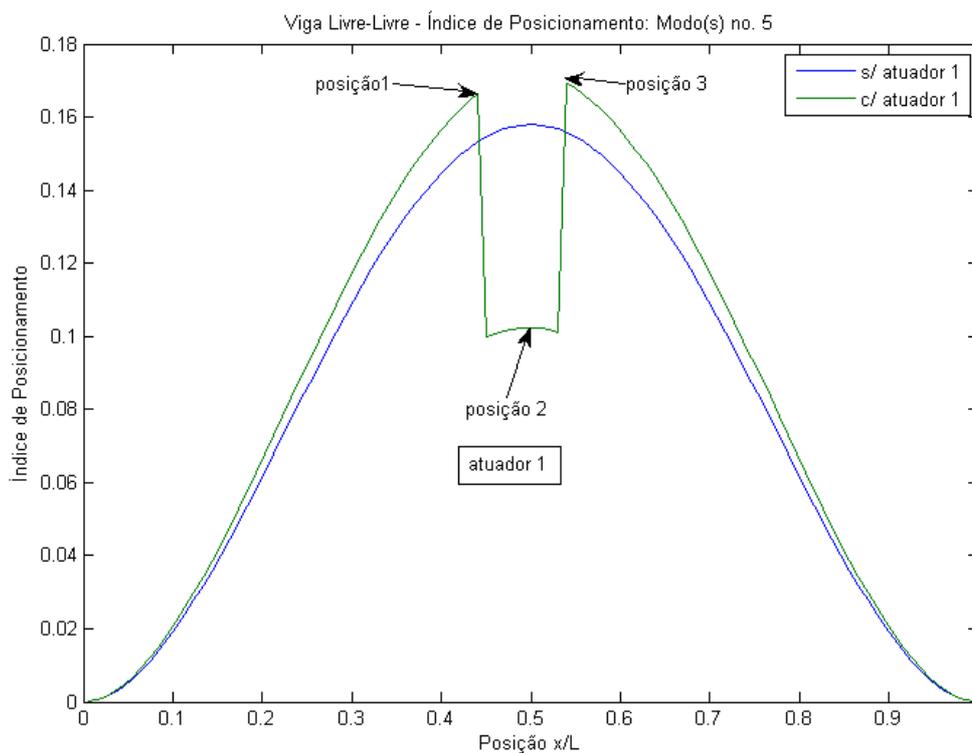


Figura 6.34 – a) Índice de posicionamento do primeiro modo de vibrar de corpo flexível da viga livre-livre com e sem atuador.

A figura 6.34 mostra o índice de posicionamento para o primeiro modo flexível da viga livre-livre, com e sem atuadores piezelétricos incorporados.

A figura 6.35 mostra o primeiro modo de vibrar, da viga com e sem elementos piezelétricos incorporados. No gráfico da figura 6.35 verifica-se que os modos não são exatamente iguais, embora o gráfico de posicionamento da figura 6.34 mostra que a posição ótima não se altera.

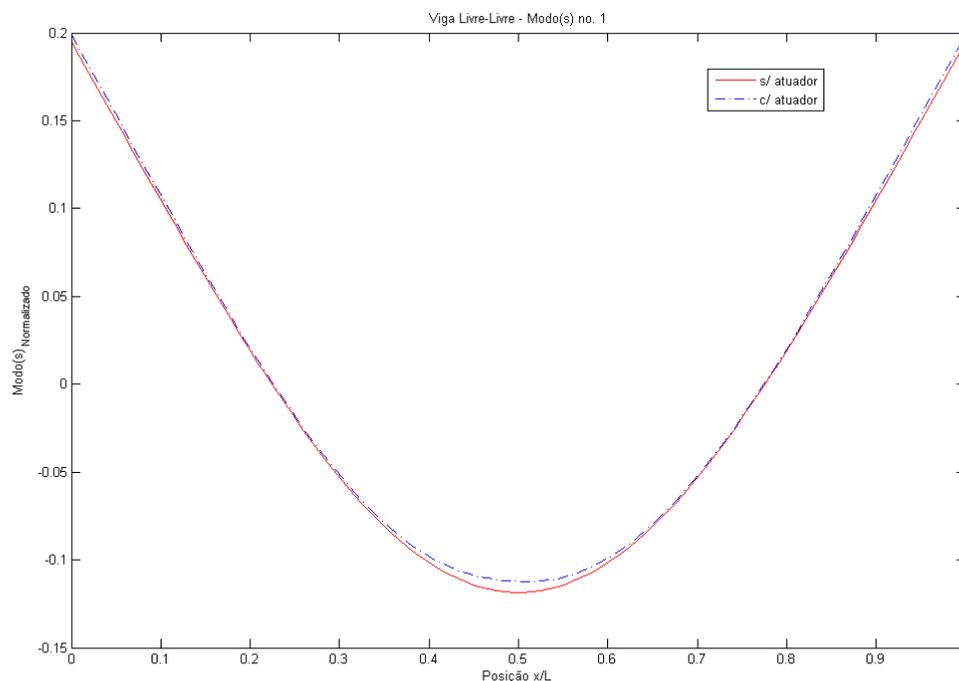


Figura 6.35 – Primeiro modo de vibrar flexível da viga livre-livre com e sem atuador.

6.4.2 Posições Ótimas Considerando Mais de Um Atuador Piezelétrico e a Influência da Massa e da Rigidez dos Atuadores Piezelétricos.

A figura 6.36 mostra o segundo modo de vibrar da viga livre-livre e o seu respectivo índice de posicionamento. Para esta simulação não foi considerada a influência da massa e da rigidez do atuador piezelétrico.

A figura 6.37 mostra o segundo modo de vibrar da viga livre-livre, considerando-se o efeito da massa e da rigidez do atuador piezelétrico. Observa-se que os modos não são exatamente iguais.

A figura 6.38 mostra o índice de posicionamento para o segundo modo de vibrar da viga livre-livre com e sem atuadores piezelétricos co-posicionados, de acordo com a tabela 6.23, que mostra os valores numéricos das posições ótimas com e sem atuadores piezelétricos.

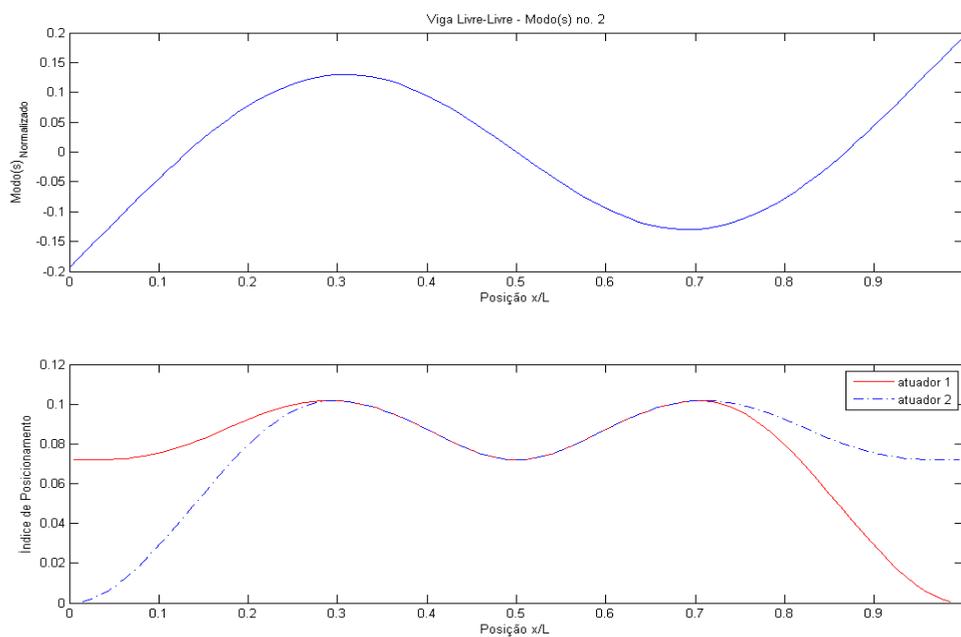


Figura 6.36 – a) Segundo modo de vibrar viga livre-livre; b) Índice de posicionamento ótimo.

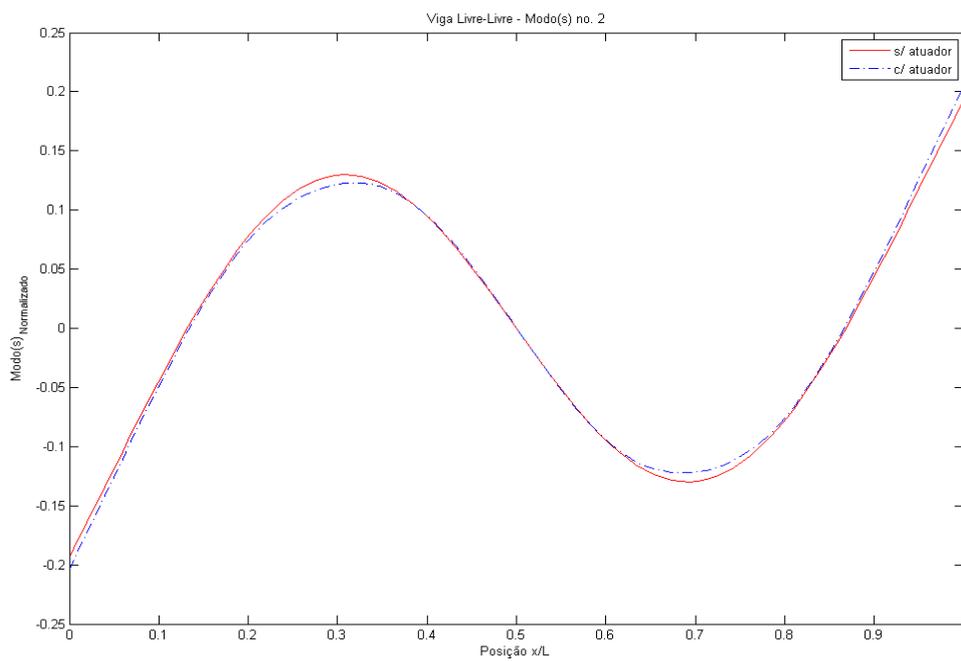


Figura 6.37 – Segundo modo de vibrar da viga livre-livre com e sem atuador.

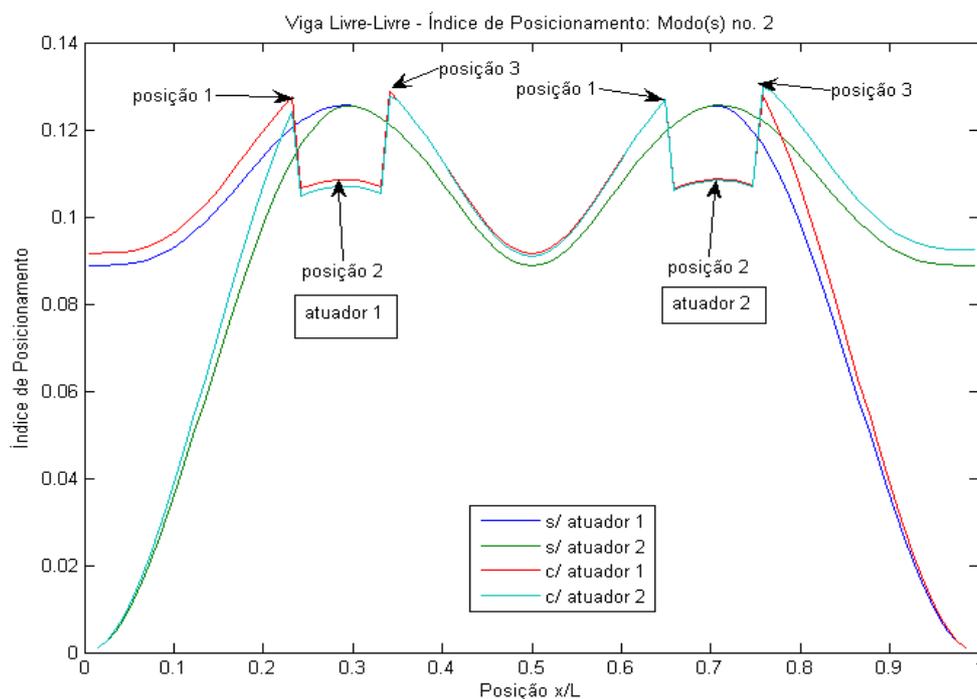


Figura 6.38 – Índice de posicionamento ótimo da viga livre-livre com e sem atuador.

Tabela 6.23 Posição ótima do segundo modo de uma viga livre-livre com e sem atuador.

Posição ótima sem atuador 1		Posição ótima com atuador 1					
x/L	m	Posição 1		Posição 2		Posição 3	
0,29	0,435	x/L	m	x/L	m	x/L	m
		0,24	0,360	0,29	0,435	0,34	0,510
		Comprimento do atuador 1					
		Posição 3 – Posição 1					
		0,150m					
Posição ótima sem atuador 2		Posição ótima com atuador 2					
x/L	m	Posição 1		Posição 2		Posição 3	
0,71	1,065	x/L	m	x/L	m	x/L	m
		0,66	0,990	0,71	1,065	0,76	1,140
		Comprimento do atuador 2					
		Posição 3 – Posição 1					
		0,150 m					

6.5 CASO 5: VIGA ENGASTADA-APOIADA

6.5.1 Posições Ótimas para um Atuador Piezelétrico.

O gráfico 6.39 mostra o primeiro modo de vibrar da viga engastada-apoiada com o seu respectivo índice de posicionamento.

A tabela 6.24 mostra os valores numéricos da posição ótima para o primeiro modo de vibrar da viga engastada-apoiada.

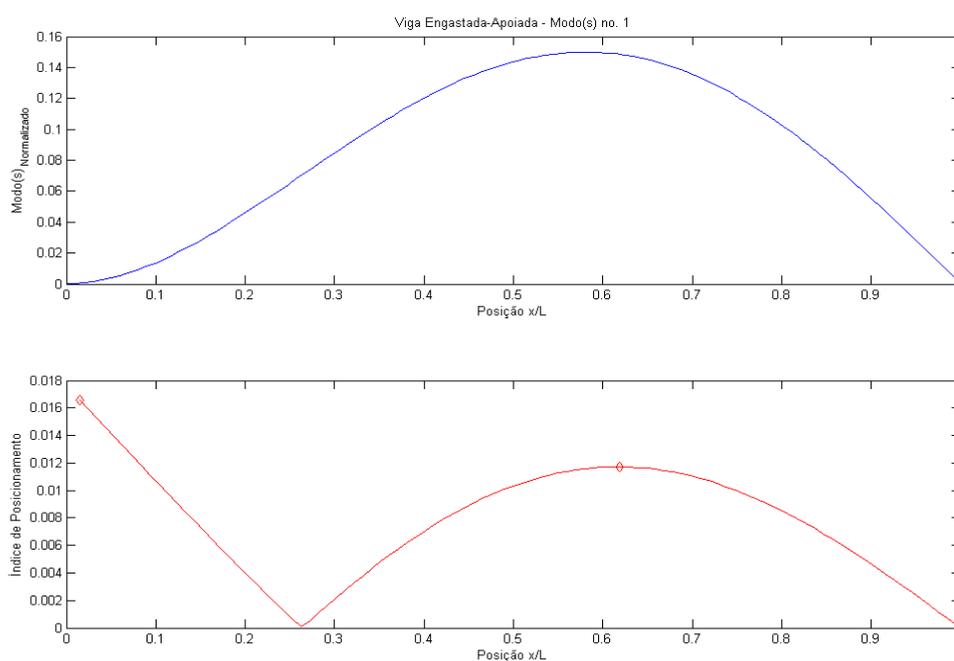


Figura 6.39 – a) Primeiro modo de vibrar; b) Índice de posicionamento ótimo para viga engastada-apoiada.

Tabela 6.24 Posição ótima para o primeiro modo de uma viga engastada-apoiada

Posição ótima (x/L)		Posição ótima (m)	
0,02	0,62	0,023	0,932

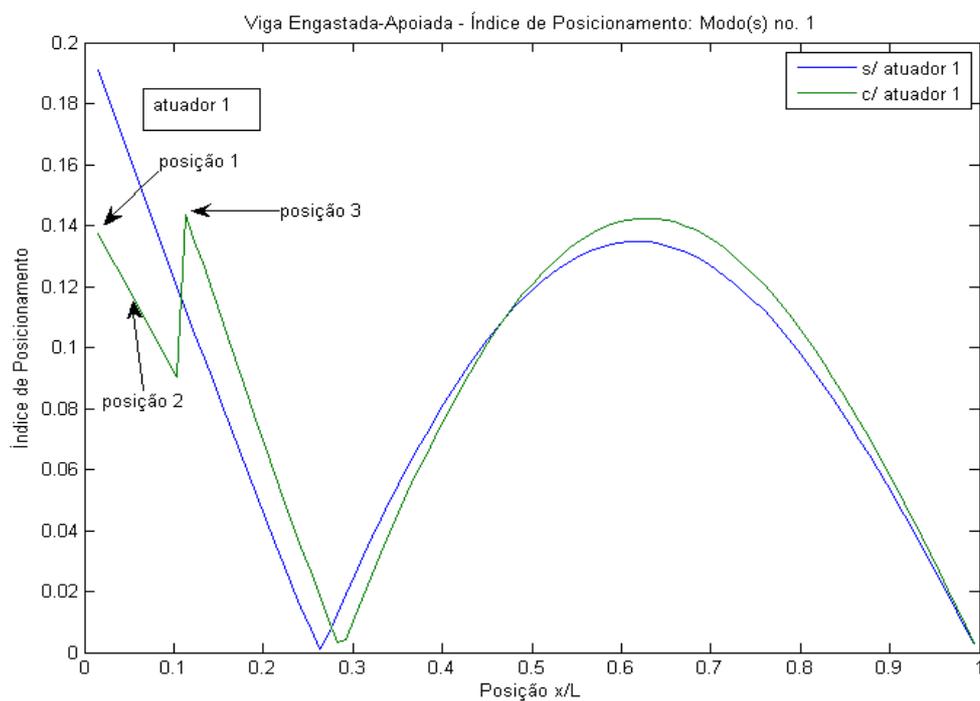


Figura 6.40 – Índice de posicionamento ótimo primeiro modo para viga engastada-apoiada.

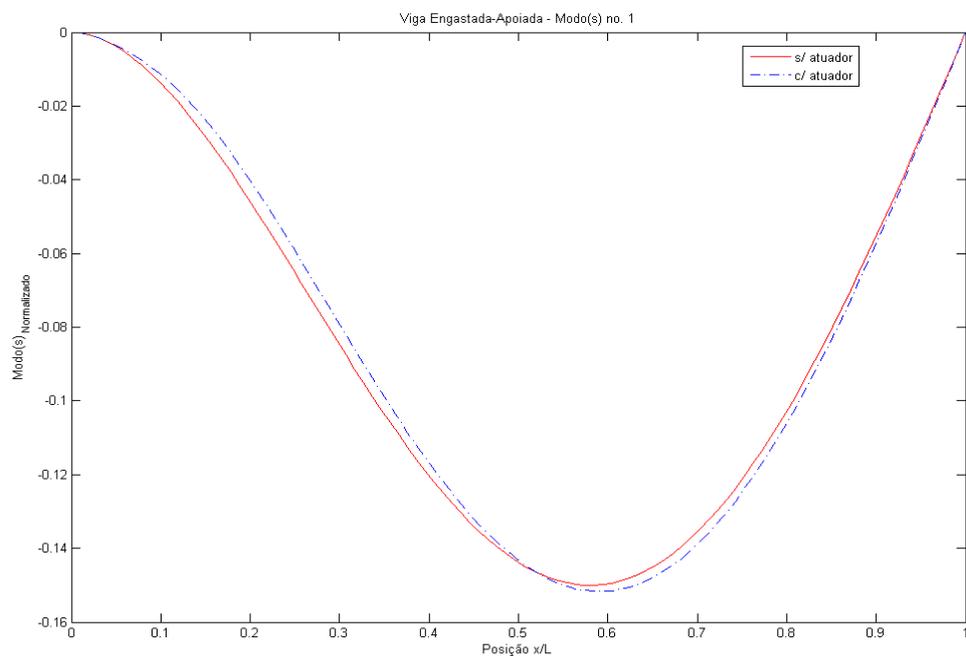


Figura 6.41 – Primeiro modo de vibrar da viga engastada-apoiada com e sem atuador.

A figura 6.40 mostra os gráficos dos índices de posicionamentos ótimos do primeiro modo de vibrar da viga engastada-apoiada com e sem elementos piezelétricos. Verifica-se que há um deslocamento para a direita do gráfico com elemento piezelétrico em relação ao gráfico sem elemento piezelétrico

Os gráfico da figura 6.41 mostra o primeiro modo de vibrar da viga engastada-apoiada com e sem elemento piezelétrico. Verifica-se que os modos não são iguais.

6.5.2 Posições Ótimas Considerando Mais de Um Atuador Piezelétrico e a Influência da Massa e da Rigidez dos Atuadores Piezelétricos.

A figura 6.42 mostra o primeiro e segundo modo de vibrar para viga engastada-apoiada e o seu respectivo índice de posicionamento.

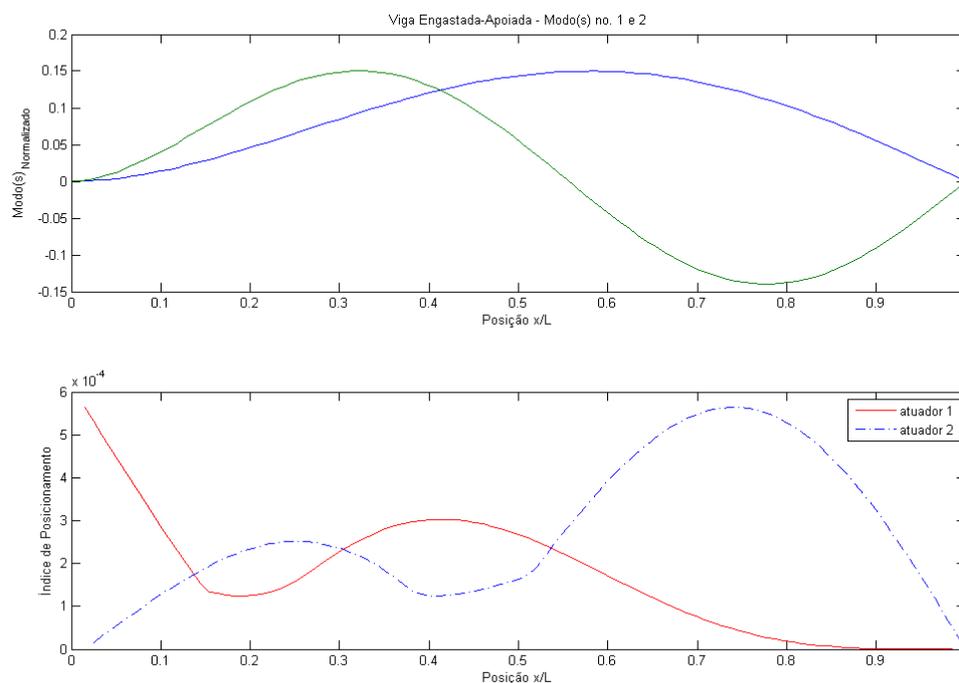


Figura 6.42 – a) Segundo modo de vibrar viga engastada-apoiada; b) Índice de posicionamento ótimo.

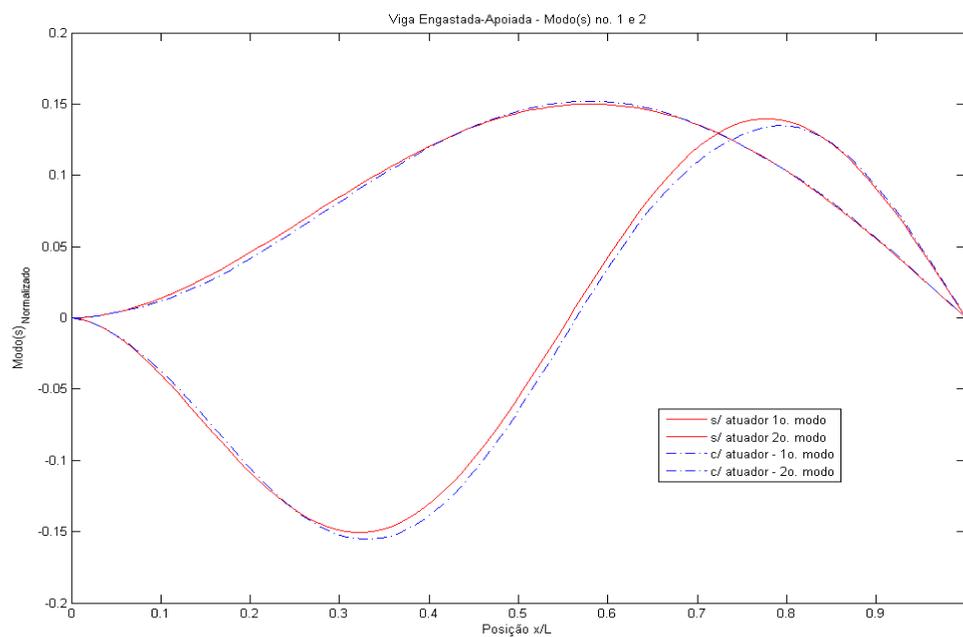


Figura 6.43 – Segundo modo de vibrar da viga engastada-apoiada com e sem atuador.

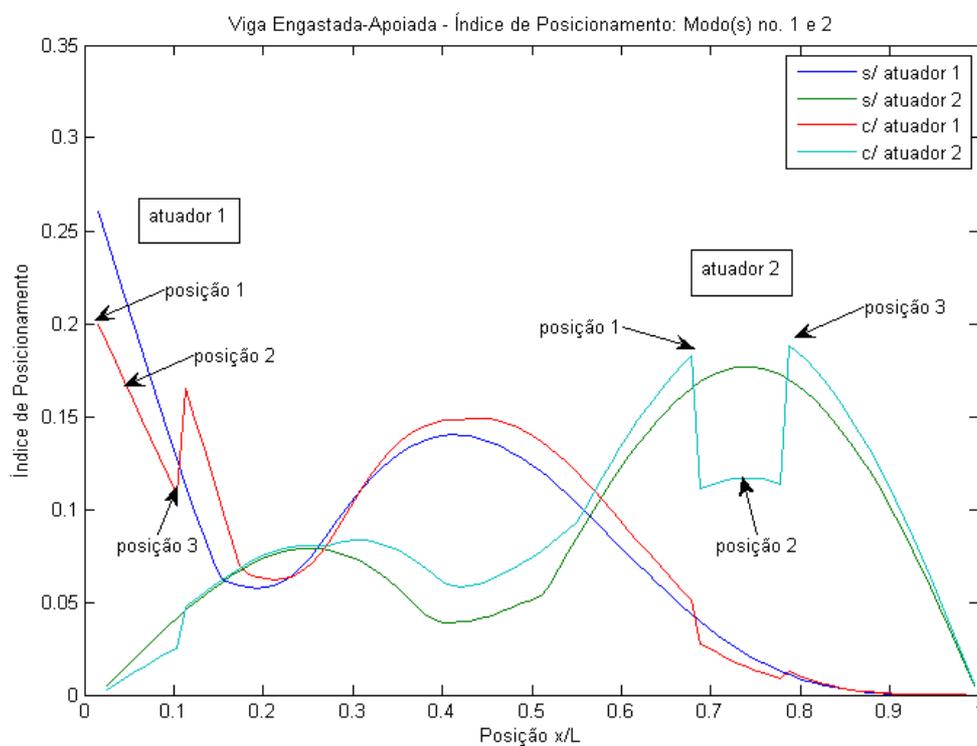


Figura 6.44 – Índice de posicionamento ótimo da viga engastada-apoiada com e sem atuador.

A figura 6.43 mostra o segundo modo de vibrar da viga engastada-apoiada considerando-se o efeito da massa e da rigidez do atuador piezelétrico. Observa-se que os modos são diferentes.

A figura 6.44 mostra o índice de posicionamento para o segundo modo de vibrar da viga engastada-apoiada, com e sem atuadores piezelétricos co-posicionados de acordo com a tabela 6.25, que mostra os valores numéricos das posições ótimas com e sem atuadores piezelétricos.

Tabela 6.25 Posição ótima do segundo modo de uma viga engastada-apoiada com e sem pzt.

Posição ótima sem atuador 1		Posição ótima com atuador 1					
x/L	m	Posição 1		Posição 2		Posição 3	
0,01	0,015	x/L	m	x/L	m	x/L	m
		0,01	0,015	0,06		0,11	0,115
		Comprimento do atuador 1					
		Posição 3 – Posição 1					
		0,150m					
Posição ótima sem atuador 2		Posição ótima com atuador 2					
x/L	m	Posição 1		Posição 2		Posição 3	
0,75	1,125	x/L	m	x/L	m	x/L	m
		0,70	1,050	0,75	1,125	0,80	1,200
		Comprimento do atuador 2					
		Posição 3 – Posição 1					
		0,150 m					

6.6 CASO 6: SIMULAÇÃO DE CONTROLE DA VIGA BIAPOIADA

Com a finalidade de se verificar a efetividade do posicionamento ótimo foram feitas simulações de controle, utilizando controle ótimo do tipo regulador quadrático linear, posicionando-se os atuadores piezelétricos em posições ótimas e não ótimas de acordo com a Figura 6.45.

6.6.1 Simulação Considerando Um Modo Um Atuador Piezelétrico e Uma Excitação Degrau Unitário Para o Primeiro Modo.

Nesta simulação foi considerada uma excitação do tipo degrau unitário, sendo que esta excitação foi aplicada no meio do comprimento da viga. O atuador piezelétrico é posicionado, considerando-se o primeiro modo de vibrar da viga biapojada, no elemento 6 para a posição ótima e posicionado no elemento 1, a partir da extremidade esquerda da viga para a posição não ótima, conforme as posições dos elementos mostradas na figura 6.45.

O atuador piezelétrico aplica momento na estrutura, ou seja, momento nos graus de liberdade angulares.

As figuras 6.46, 6.47 e 6.48 mostram os gráficos das simulações com o atuador posicionado na posição ótima do primeiro modo de vibrar da viga biapojada, para as condições de malha aberta, malha fechada no tempo, função resposta em frequência e força de controle respectivamente.

As figuras 6.49, 6.50 e 6.51 mostram os gráficos das simulações com o atuador posicionado na posição não ótima do primeiro modo de vibrar da viga biapojada, para as condições de malha aberta, malha fechada, função resposta em frequência e força de controle, respectivamente.

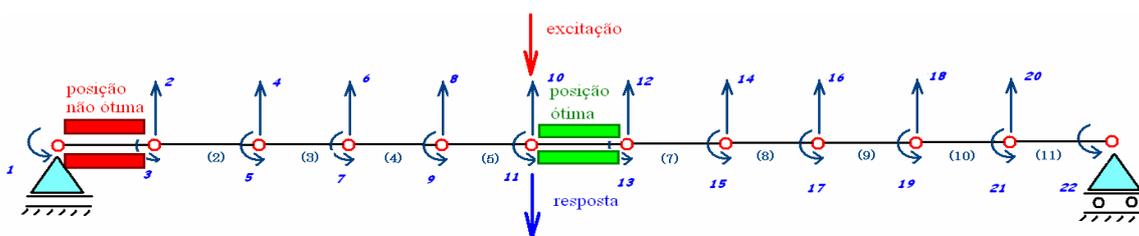


Tabela 6.45 Elementos da viga de controle simulada.

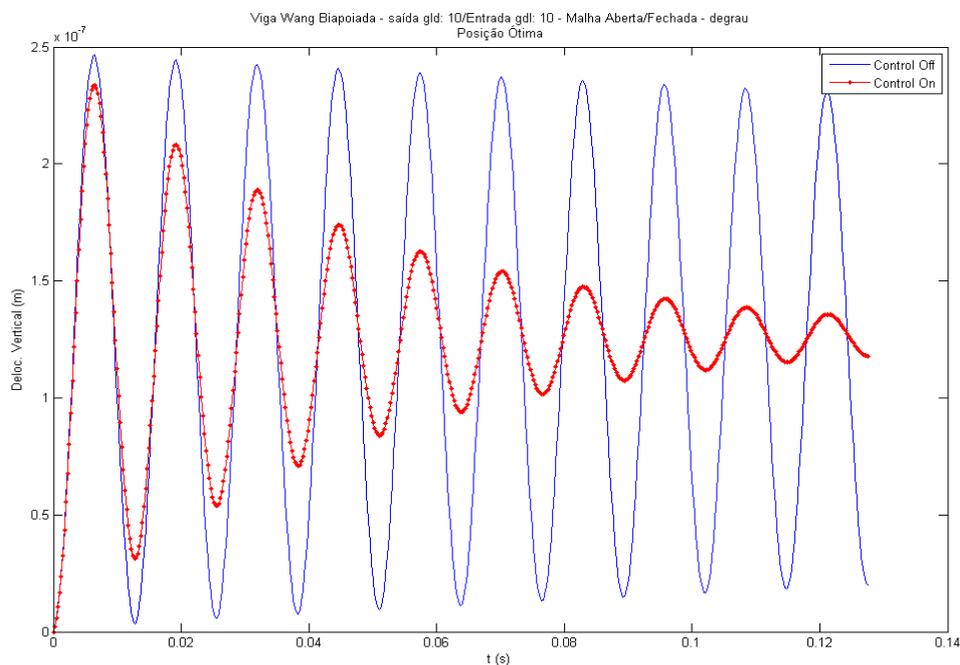


Figura 6.46 – Malha aberta/fechada excitação degrau unitário 1 modo/1 atuador posição ótima.

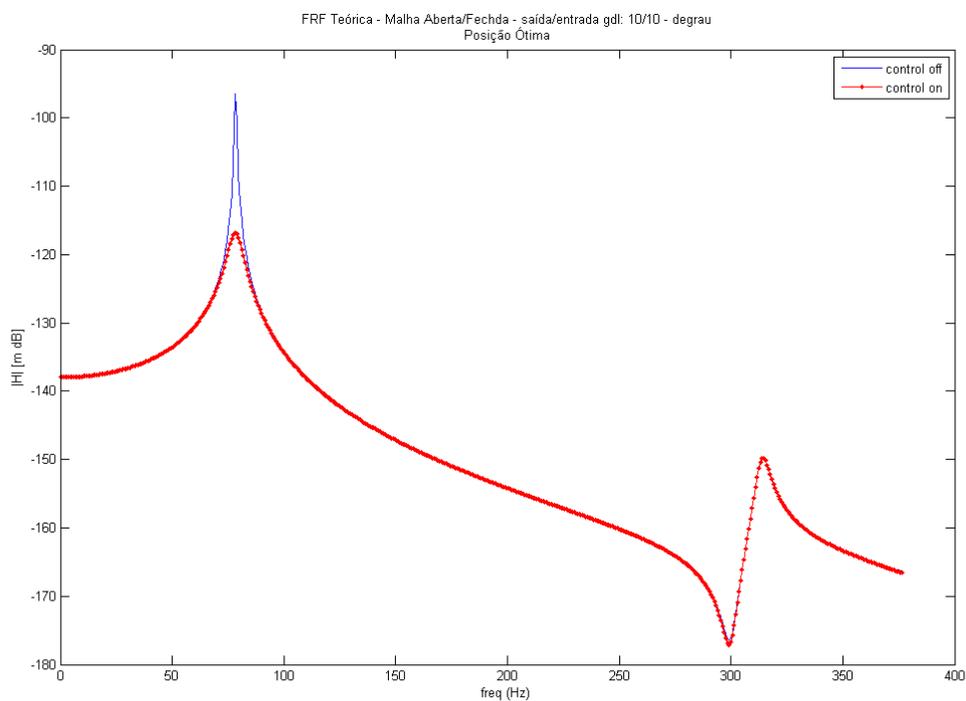


Figura 6.47 – FRF excitação degrau unitário 1 modo/1 atuador posição ótima.

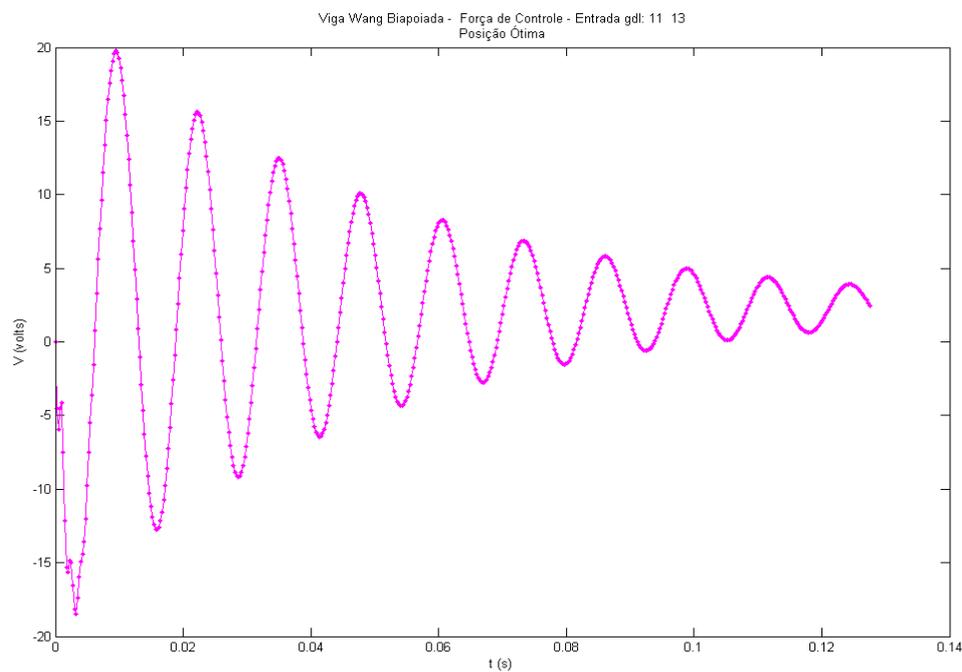


Figura 6.48 – Força de controle devido a degrau unitário 1 modo/1 atuador posição ótima.

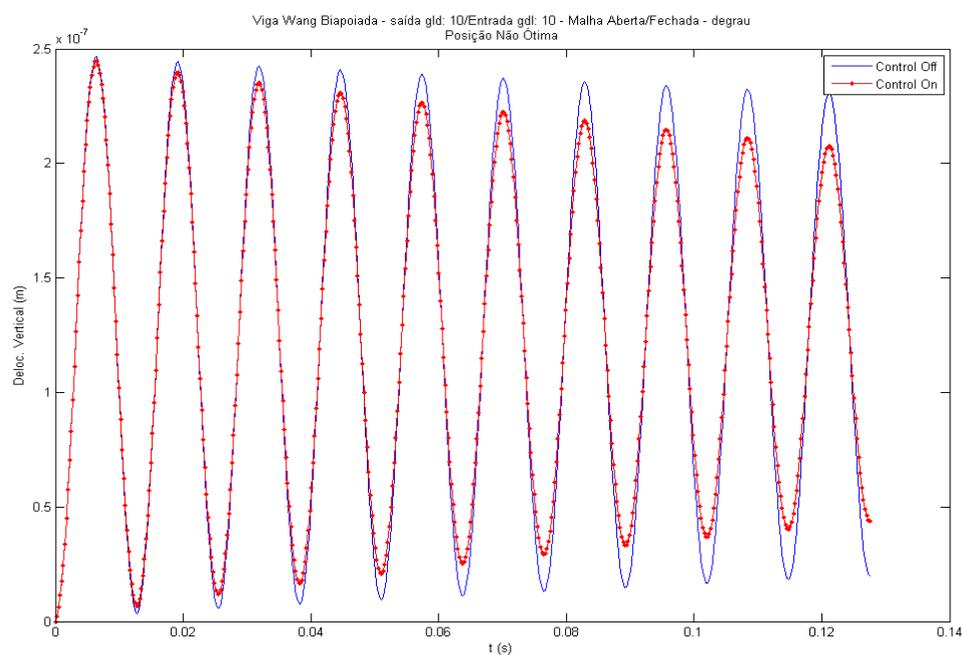


Figura 6.49 – Malha aberta/fechada excitação degrau unitário 1 modo/1 atuador posição não ótima.

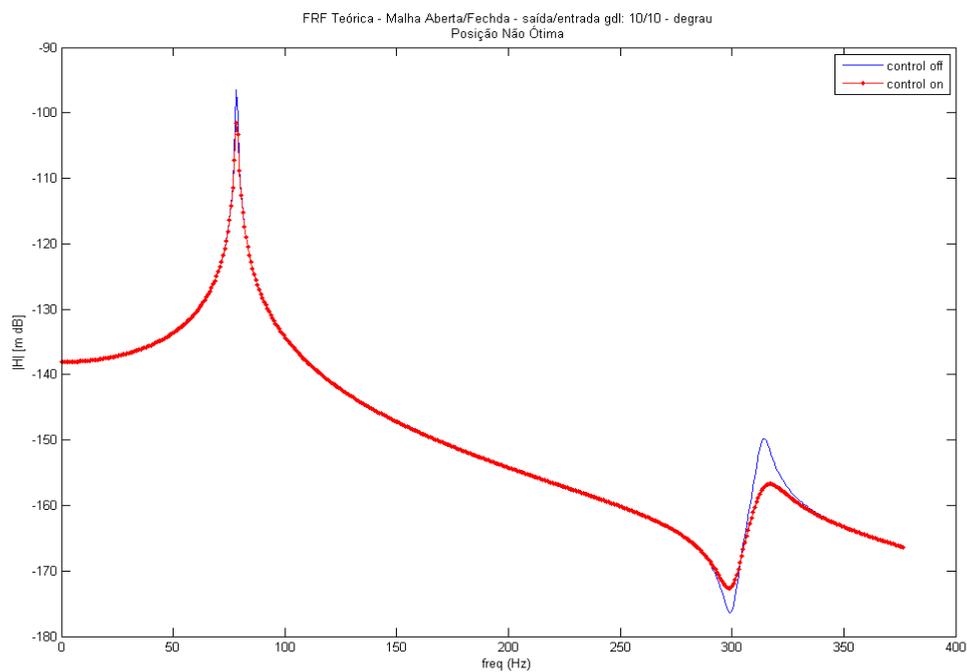


Figura 6.50 – FRF excitação degrau unitário 1 modo/1 atuador posição não ótima.

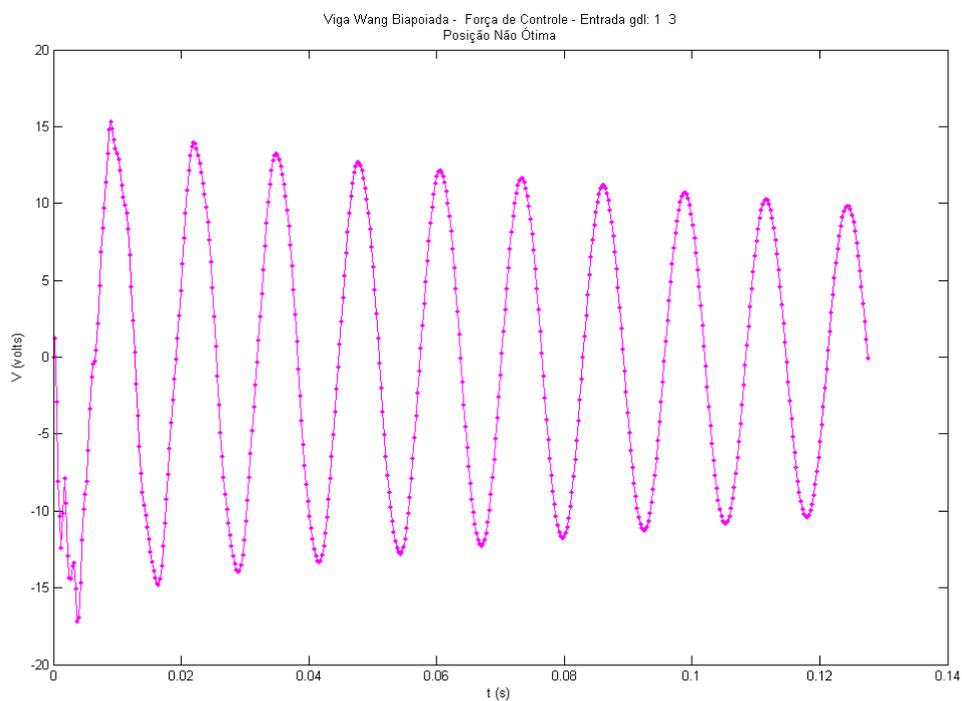


Figura 6.51 – Força de controle devido a excitação degrau unitário 1 modo/1 atuador posição não ótima.

6.6.2 Simulação Considerando Um Modo Um Atuador Piezelétrico e Uma Excitação Impulso Unitário Para o Primeiro Modo.

Nesta simulação foi considerada uma excitação do tipo impulso unitário, sendo que esta excitação foi aplicada no meio do comprimento da viga. O atuador piezelétrico é posicionado, considerando-se o primeiro modo de vibrar da viga biapoiada, no elemento 6 para a posição ótima e posicionado no elemento 1, a partir da extremidade esquerda da viga para a posição não ótima, conforme figura 6.45.

As figuras 6.52, 6.53 e 6.54 mostram os gráficos das simulações com o atuador posicionado na posição ótima do primeiro modo de vibrar da viga biapoiada, para as condições de malha aberta, malha fechada no tempo, função resposta em frequência e força de controle, respectivamente.

As figuras 6.55, 6.56 e 6.57 mostram os gráficos das simulações com o atuador posicionado na posição não ótima do primeiro modo de vibrar da viga biapoiada, para as condições de malha aberta, malha fechada, função resposta em frequência e força de controle, respectivamente.

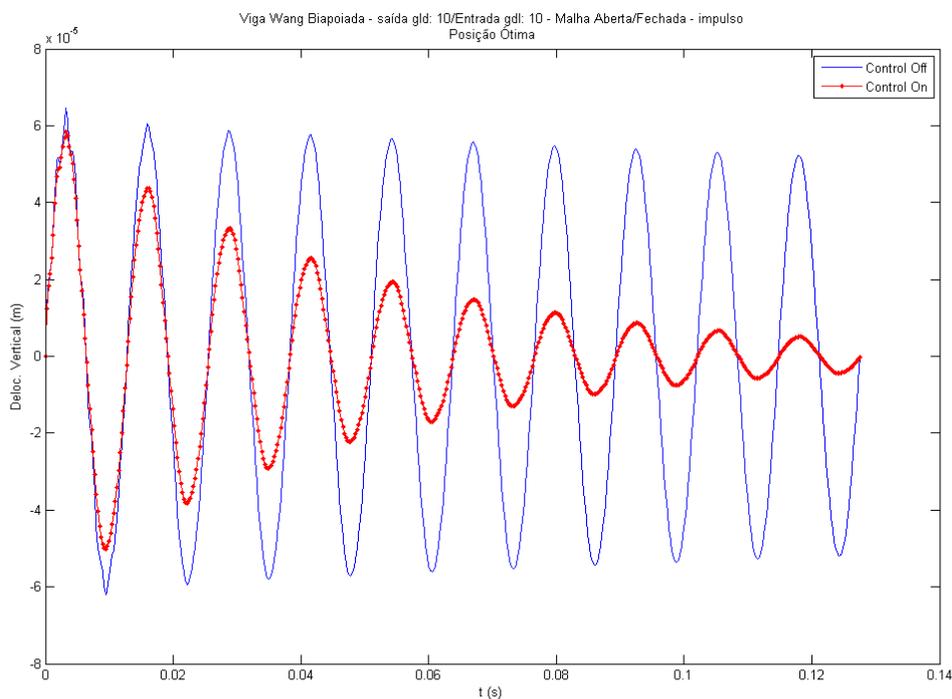


Figura 6.52 – Malha aberta/fechada excitação impulso unitário 1 modo/1 atuador posição ótima.

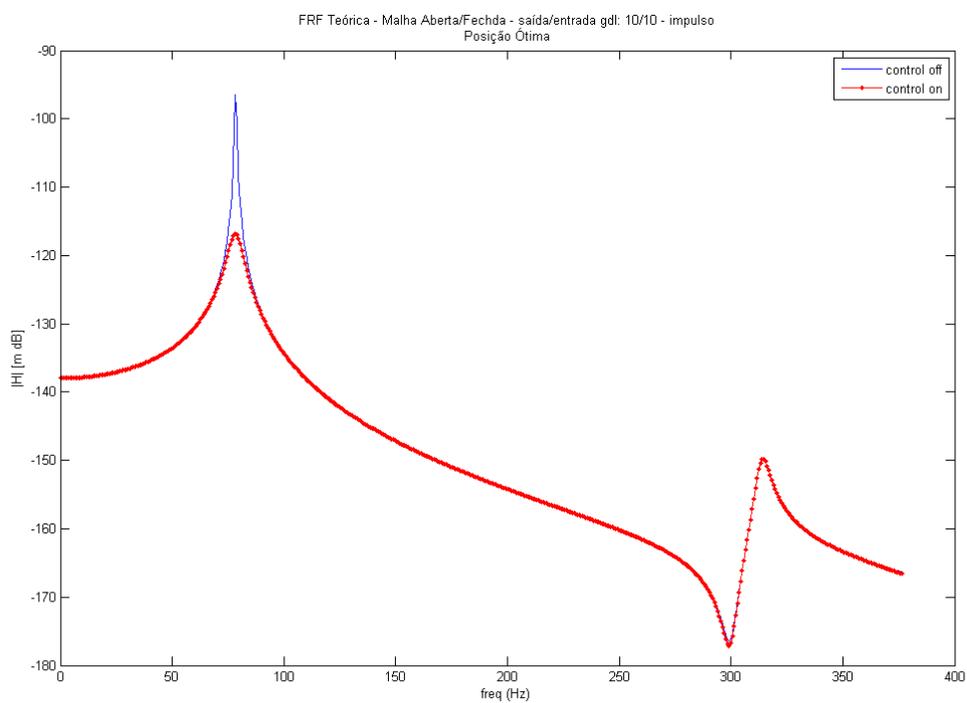


Figura 6.53 – FRF excitação impulso unitário 1 modo/1 atuador posição ótima.

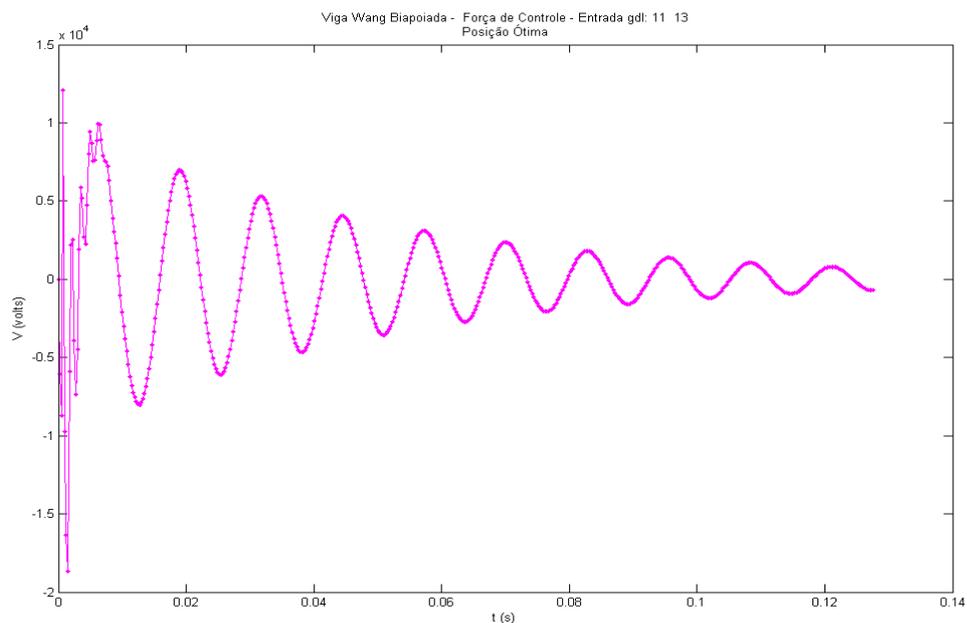


Figura 6.54 – Força de controle devido a excitação impulso unitário 1 modo/1 atuador posição ótima.

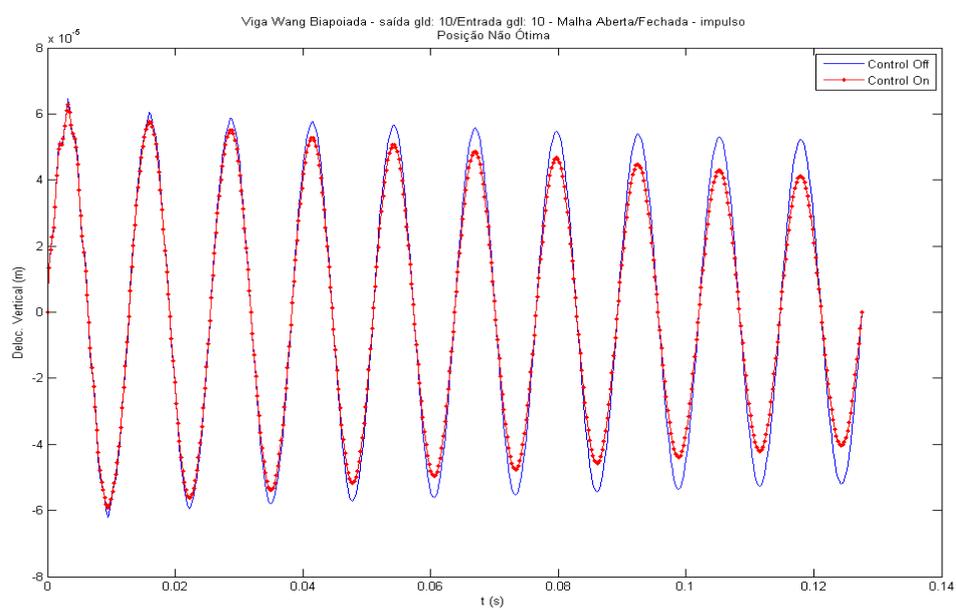


Figura 6.55 – Malha aberta/fechada impulso degrau unitário 1 modo/1 atuador posição não ótima.

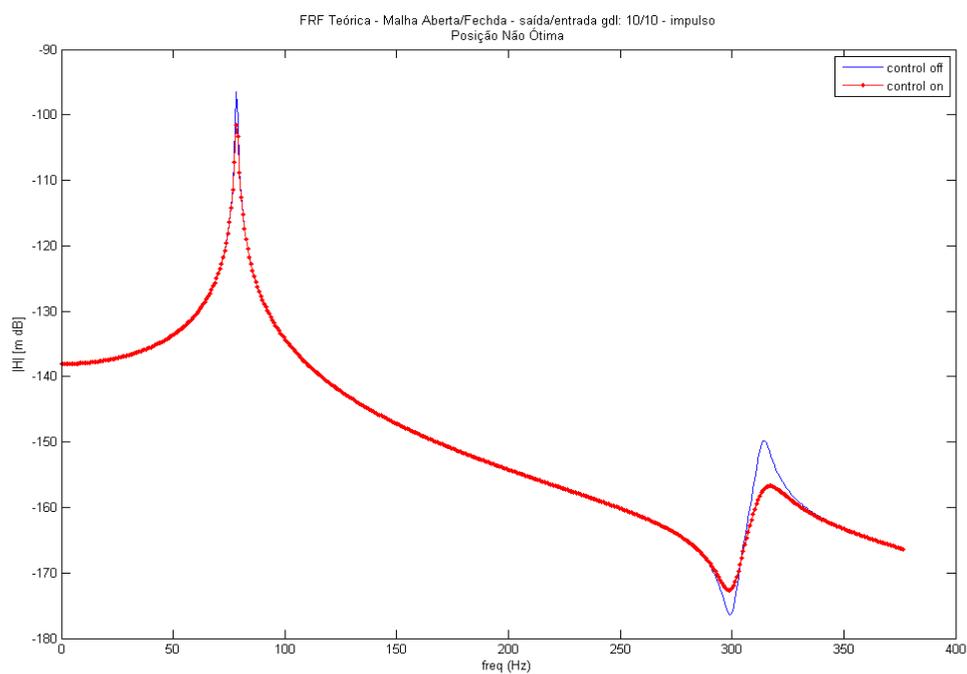


Figura 6.56 – FRF excitação impulso unitário 1 modo/1 atuador posição não ótima.

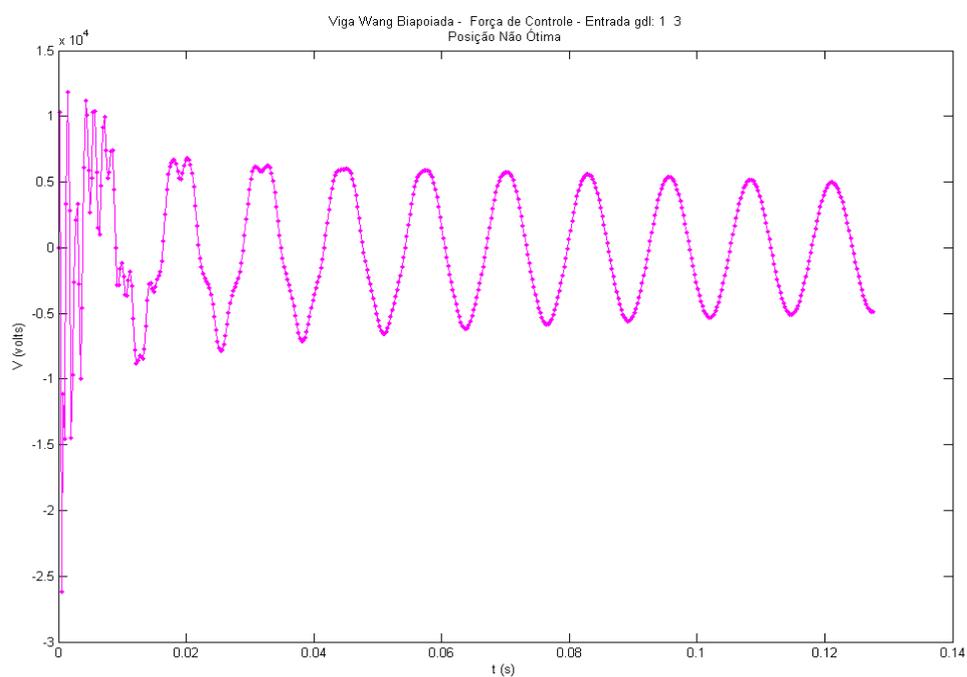


Figura 6.57 – Força de controle devido a excitação impulso unitário 1 modo/1 atuador posição não ótima.

6.6.3 Simulação Considerando Um Modo Um Atuador Piezelétrico e Uma Excitação Harmônica Seno Unitário Para o Primeiro Modo.

Nesta simulação foi considerada uma excitação do tipo harmônica seno unitária, sendo que esta excitação foi aplicada no meio do comprimento da viga com uma frequência de 66,8 Hz, portanto um valor menor que a primeira frequência natural da viga biapoiada que é de 78,3 Hz. O atuador piezelétrico é posicionado, considerando-se o primeiro modo de vibrar da viga biapoiada, no elemento 6 para a posição ótima e posicionado no elemento 1, a partir da extremidade esquerda da viga para a posição não ótima, conforme figura 6.45.

As figuras 6.58, 6.59 e 6.60 mostram os gráficos das simulações com o atuador posicionado na posição ótima do primeiro modo de vibrar da viga biapoiada, para as condições de malha aberta, malha fechada no tempo, função resposta em frequência e força de controle, respectivamente.

As figuras 6.61, 6.62 e 6.63 mostram os gráficos das simulações com o atuador posicionado na posição não ótima do primeiro modo de vibrar da viga biapoiada, para as condições de malha aberta, malha fechada, função resposta em frequência e força de controle, respectivamente.

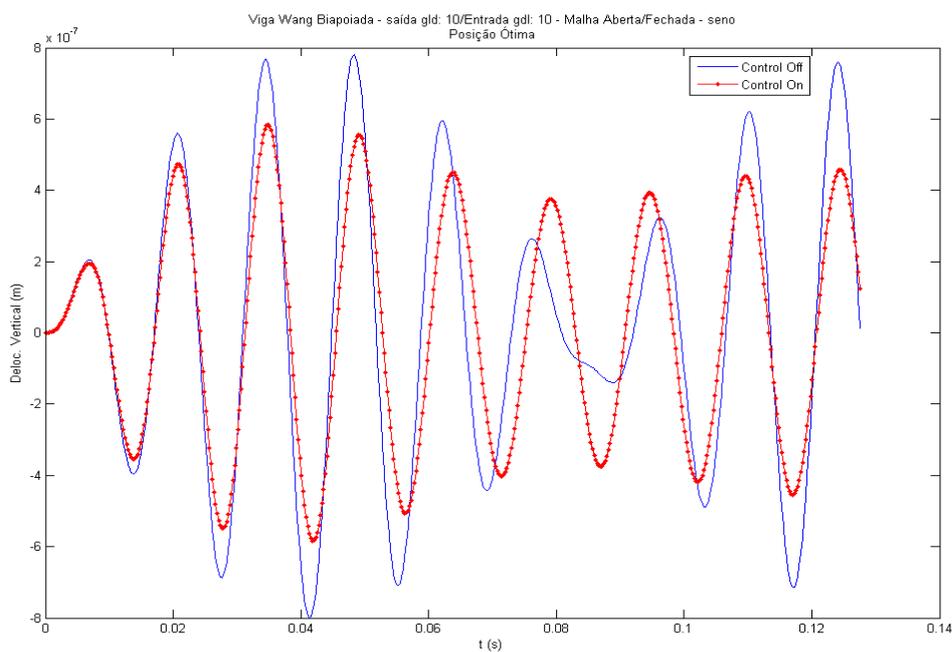


Figura 6.58 – Malha aberta/fechada excitação harmônica unitário 1 modo/1 atuador posição ótima.

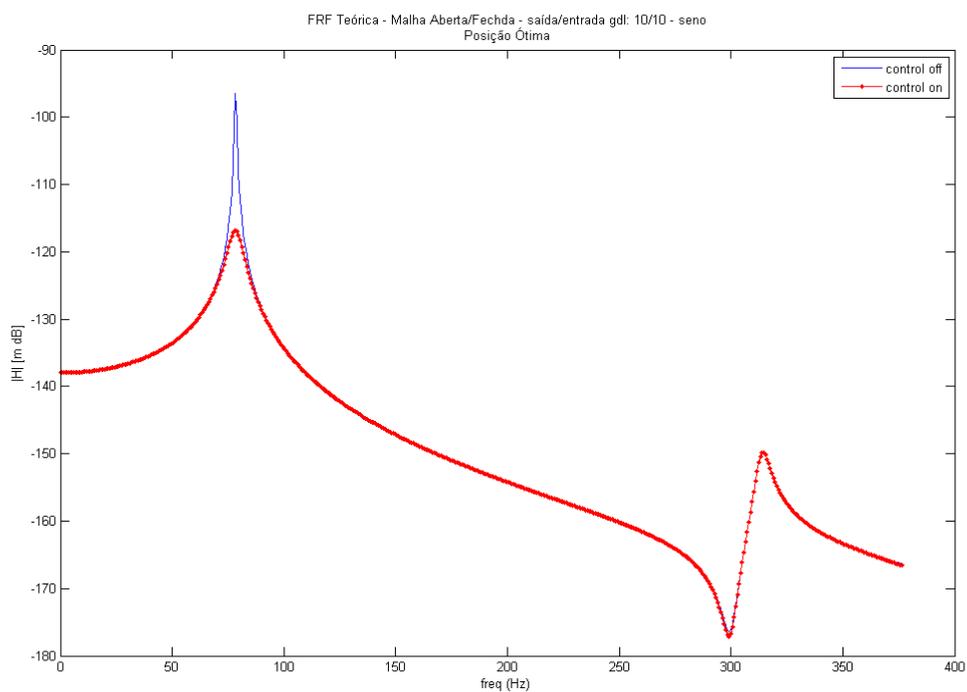


Figura 6.59 – FRF excitação harmônica unitário 1 modo/1 atuador posição ótima.

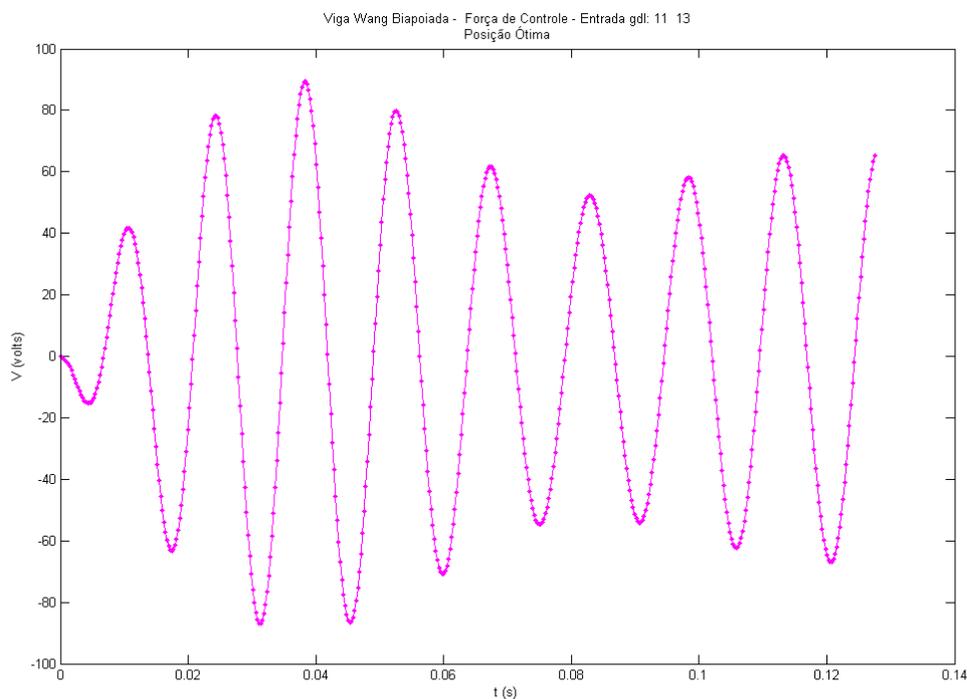


Figura 6.60 – Força de controle devido a excitação harmônica unitário 1 modo/1 atuador posição ótima.

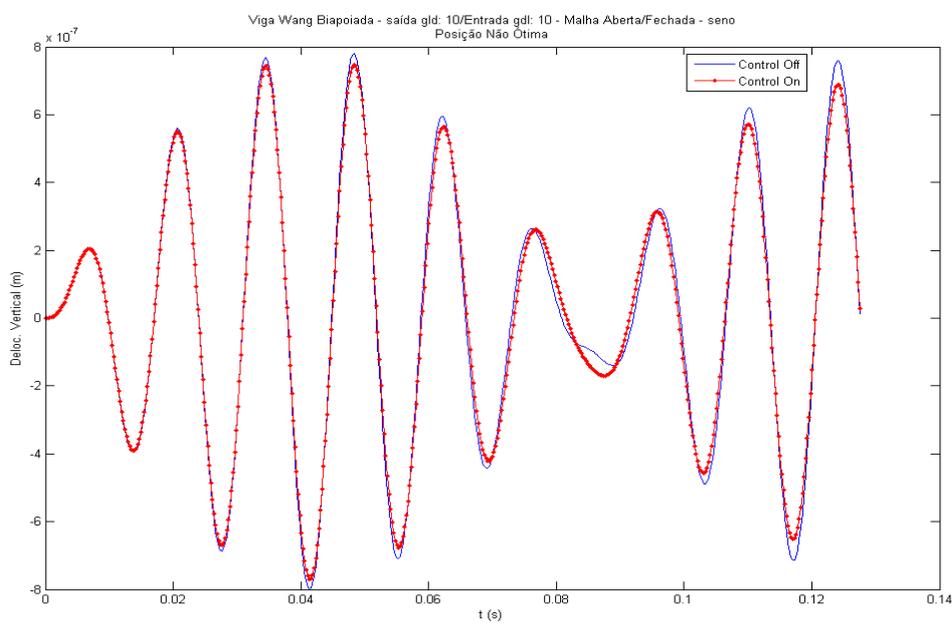


Figura 6.61 – Malha aberta/fechada harmônica unitário 1 modo/1 atuador posição não ótima.

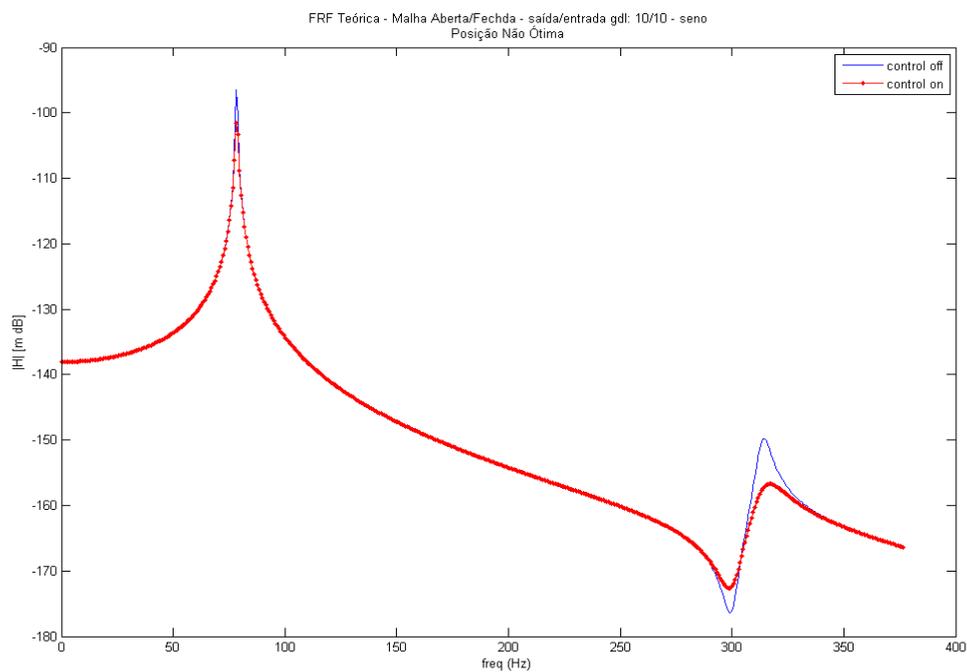


Figura 6.62 – FRF excitação harmônica unitário 1 modo/1 atuador posição não ótima.

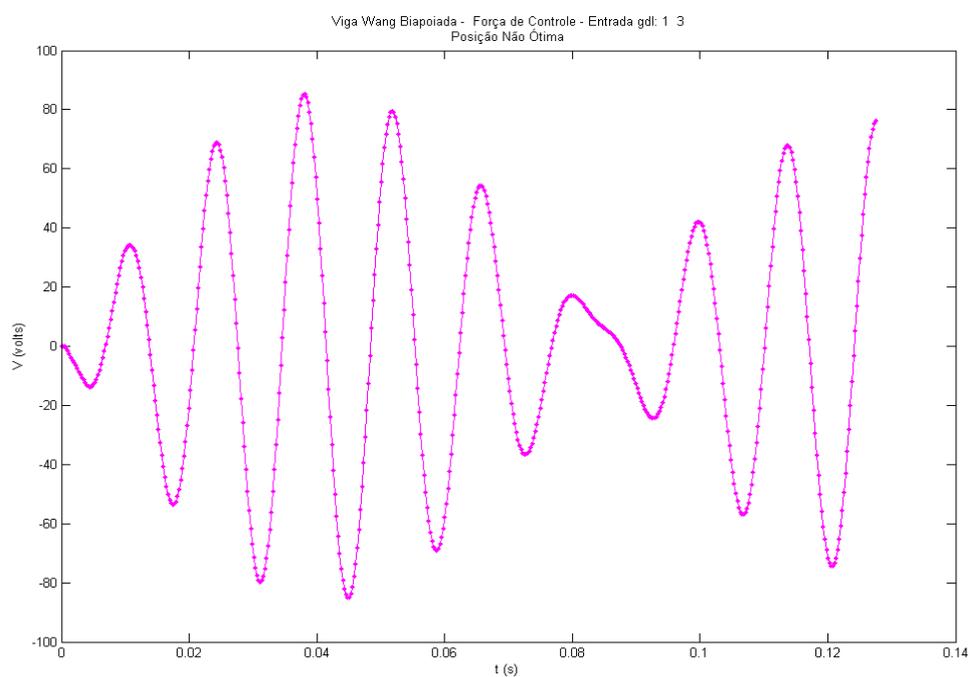


Figura 6.63 – Força de controle devido excitação a harmônica unitário 1 modo/1 atuador posição não ótima.

6.6.4 Simulação Considerando Um Modo Um Atuador Piezelétrico e Uma Excitação Degrau Unitário Para o Segundo Modo.

Nesta simulação foi considerada uma excitação do tipo degrau unitário, sendo que esta excitação foi aplicada no meio do comprimento da viga. O atuador piezelétrico é posicionado, considerando-se o segundo modo de vibrar da viga biapoiada, no elemento 3 para a posição ótima e posicionado no elemento 1, a partir da extremidade esquerda da viga para a posição não ótima, conforme figura 6.64.

As figuras 6.65, 6.66 e 6.67 mostram os gráficos das simulações com o atuador posicionado na posição ótima do segundo modo de vibrar da viga biapoiada, para as condições de malha aberta, malha fechada no tempo, função resposta em frequência e força de controle, respectivamente.

As figuras 6.68, 6.69 e 6.70 mostram os gráficos das simulações com o atuador posicionado na posição não ótima do segundo modo de vibrar da viga biapoiada, para as condições de malha aberta, malha fechada, função resposta em frequência e força de controle, respectivamente.

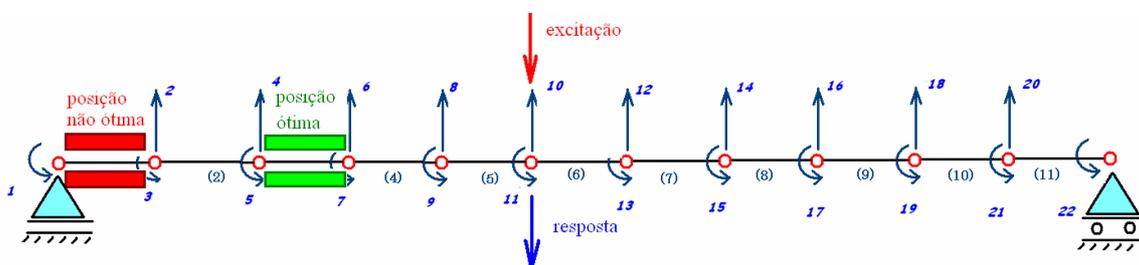


Figura 6.64 - Elementos da viga de controle simulada.

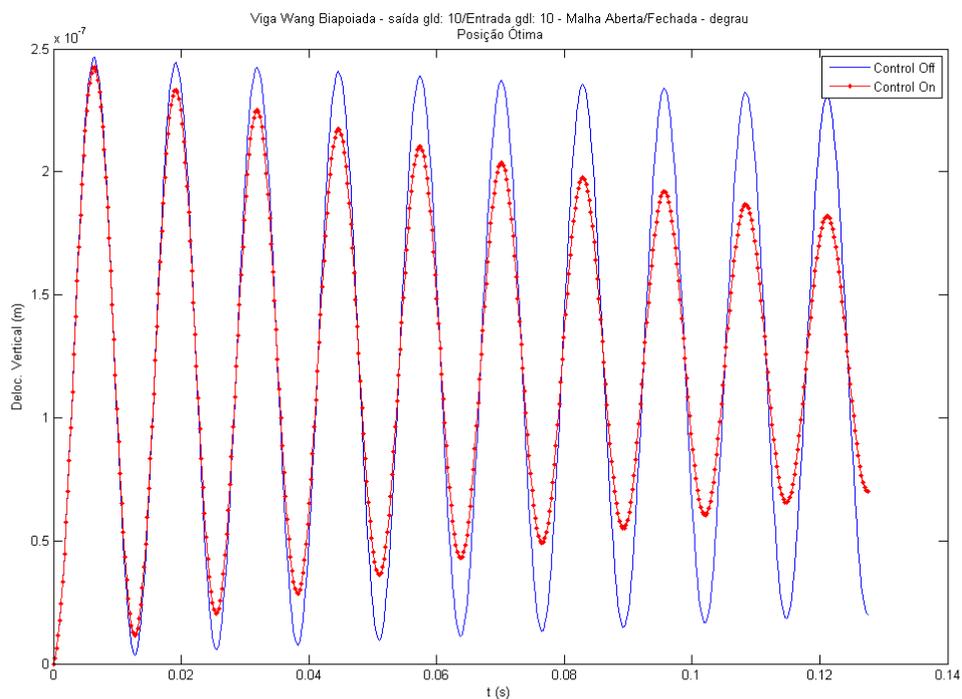


Figura 6.65 – Malha aberta/fechada excitação degrau unitário 2 modo/1 atuador posição ótima.

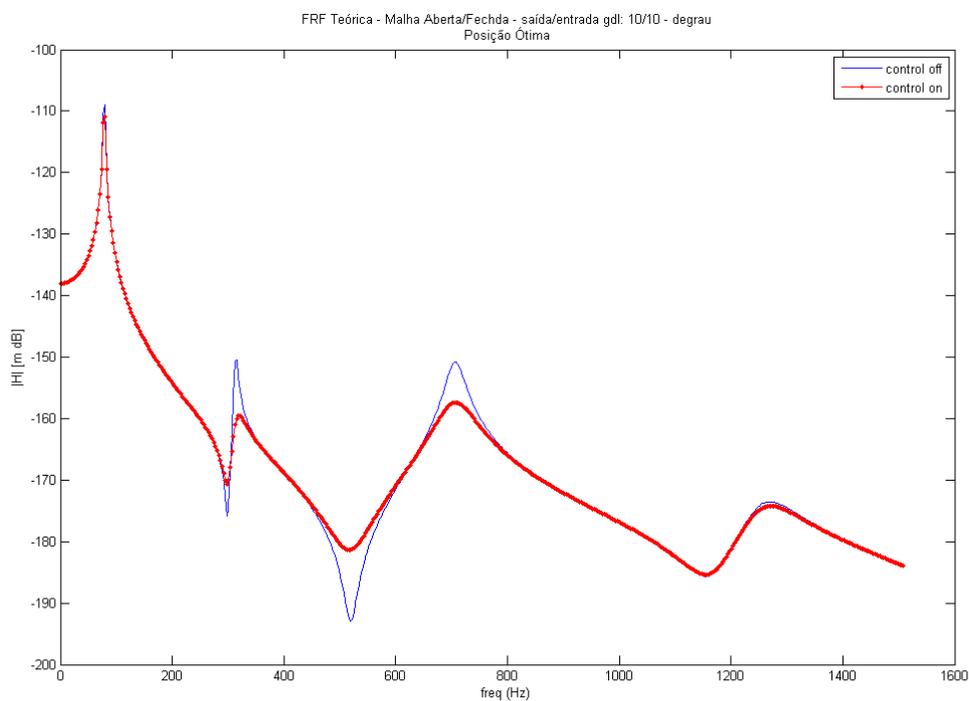


Figura 6.66 – FRF excitação degrau unitário 2 modo/1 atuador posição ótima.

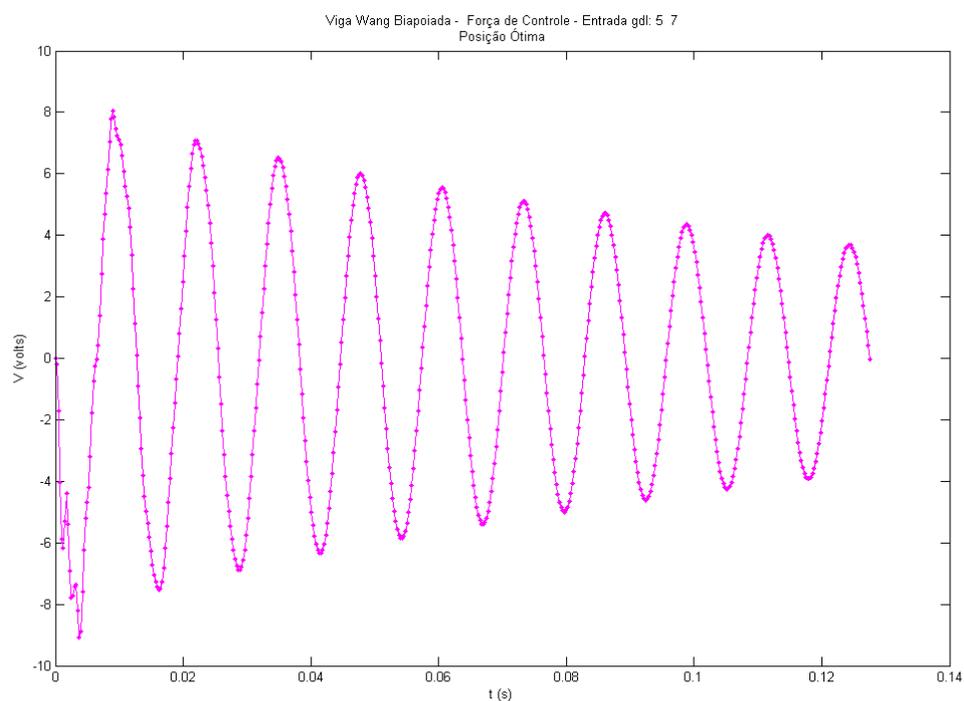


Figura 6.67 – Força de controle devido a excitação degrau unitário 2 modo/1 atuador posição ótima.

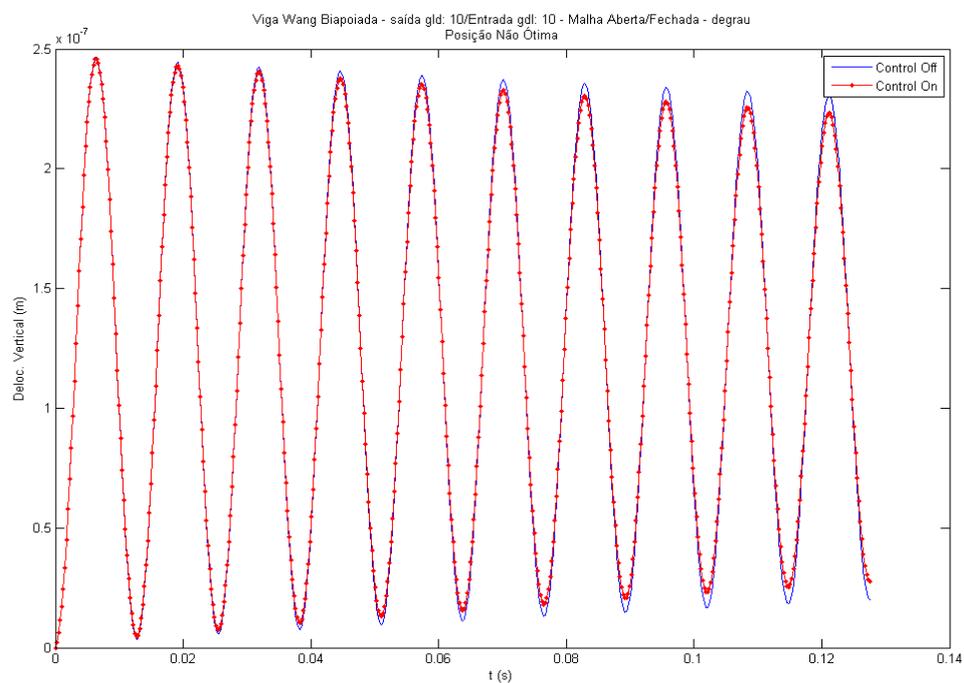


Figura 6.68 – Malha aberta/fechada degrau unitário 2 modo/1 atuador posição não ótima.

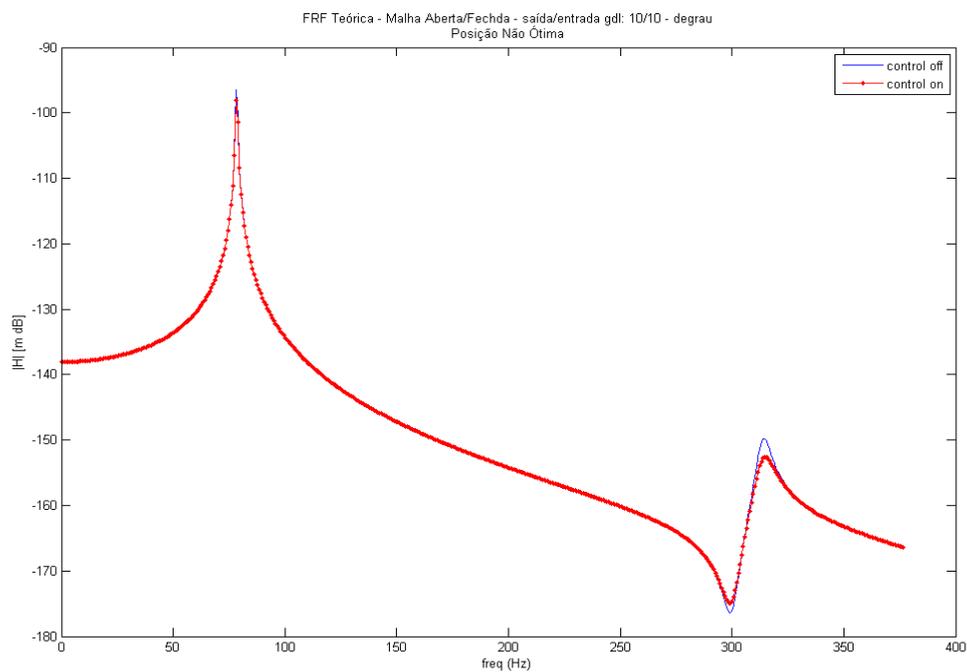


Figura 6.69 – FRF excitação degrau unitário 2 modo/1 atuador posição não ótima.

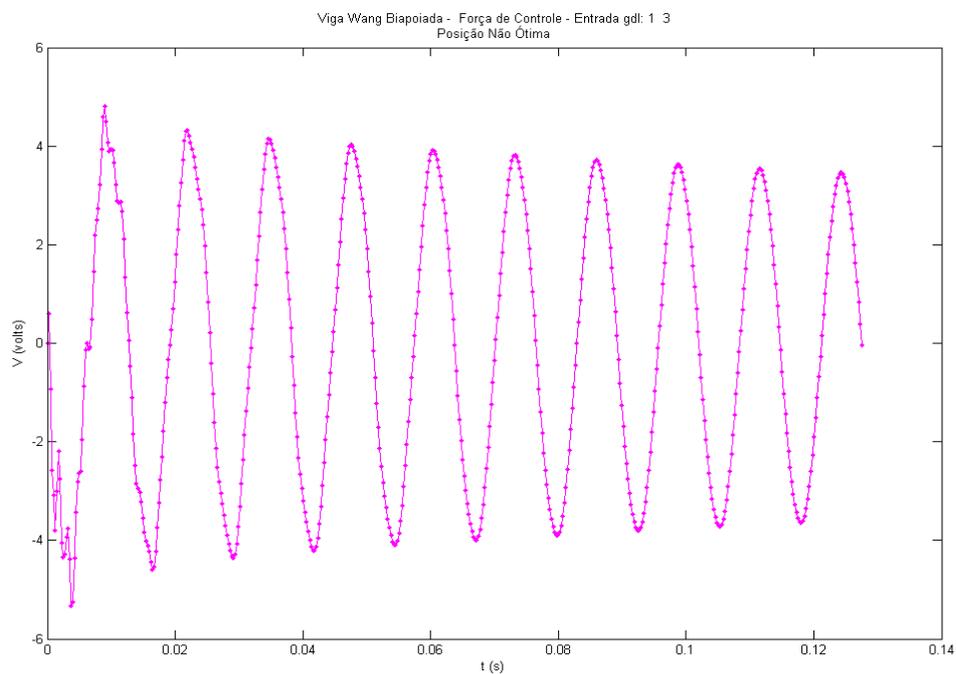


Figura 6.70 – Força de controle devido a excitação degrau unitário 2 modo/1 atuador posição não ótima.

6.6.5 Simulação Considerando Dois Modos e Dois Atuadores Piezelétricos e Uma Excitação Degrau Unitário Para o Primeiro e Segundo Modo.

Nesta simulação foi considerada uma excitação do tipo degrau unitário, sendo que esta excitação foi aplicada no meio do comprimento da viga. Os dois pares de atuadores piezelétricos são posicionados, considerando-se o primeiro e o segundo modo de vibrar da viga biapoada, nos elementos 3 e 9 para as posições ótimas e posicionados nos elementos 5 e 6, a partir da extremidade esquerda da viga para as posições não ótimas, conforme figura 6.71.

As figuras 6.72, 6.73, 6.74 e 6.75 mostram os gráficos das simulações com os atuadores posicionados na posição ótima do primeiro e do segundo modo de vibrar da viga biapoada, para as condições de malha aberta no tempo, malha fechada, função resposta em frequência e força de controle para o primeiro e para o segundo atuador piezelétrico, respectivamente.

As figuras 6.76, 6.77, 6.78 e 6.79 mostram os gráficos das simulações com os atuadores co-posicionados na posição não ótima do primeiro e do segundo modo de vibrar da viga biapoada, para as condições de malha aberta, malha fechada, função resposta em frequência e força de controle para o primeiro e para o segundo atuador piezelétrico, respectivamente.

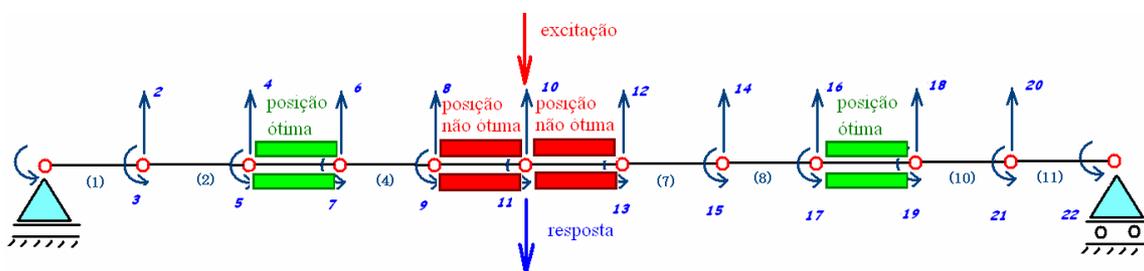


Figura 6.71 - Elementos da viga de controle simulada.

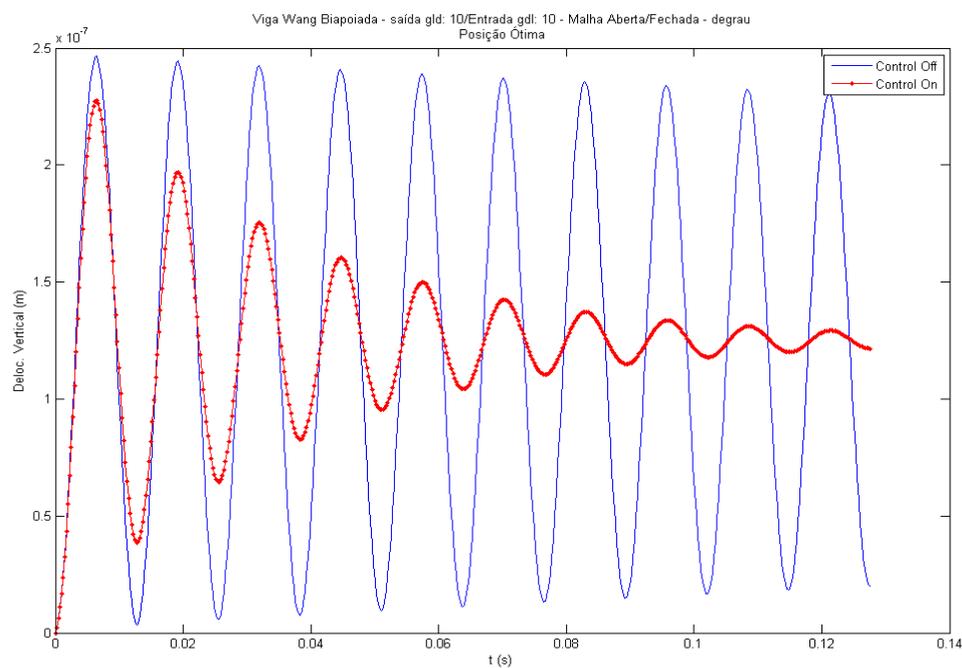


Figura 6.72 – Malha aberta/fechada excitação degrau unitário 2 modos/2 atuadores posição ótima.

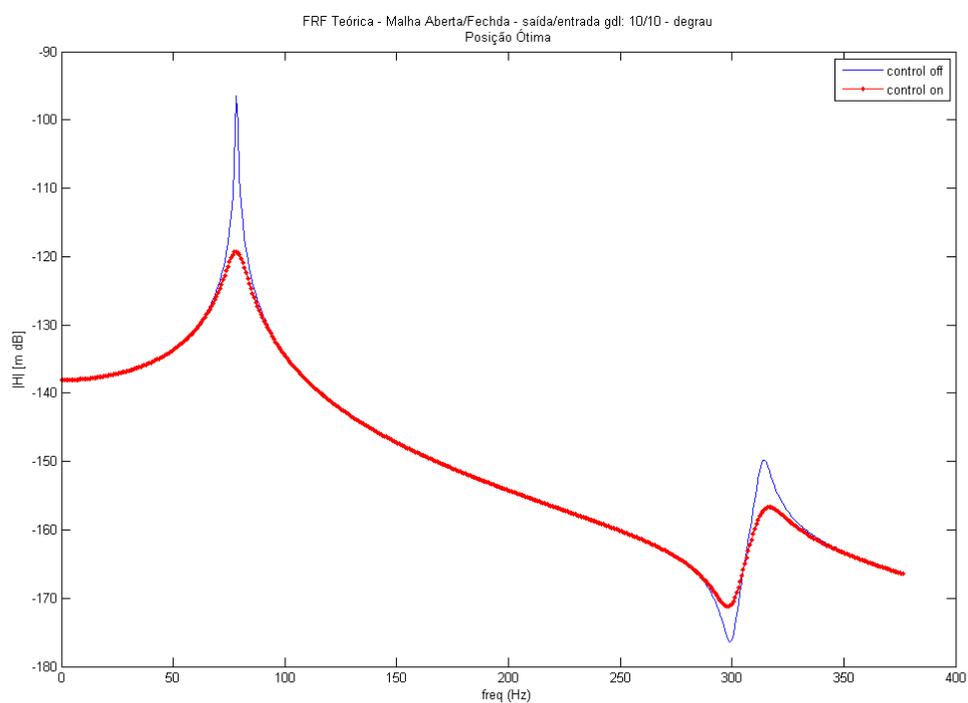


Figura 6.73 – FRF excitação degrau unitário 2 modos/2 atuadores posição ótima.

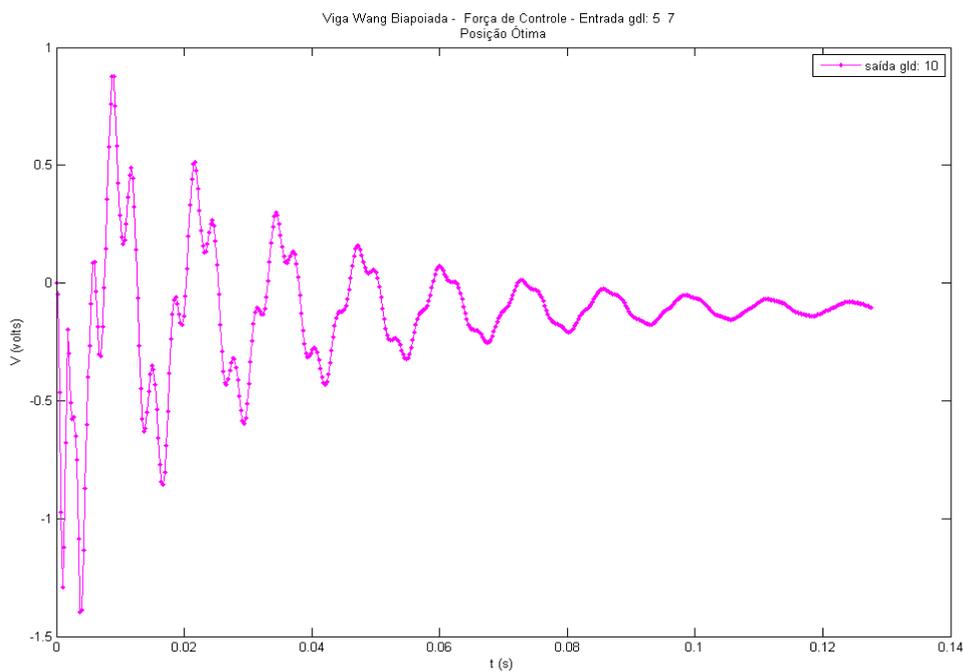


Figura 6.74 – Força de controle devido a excitação degrau unitário 2 modos/2 atuadores para o primeiro atuador na posição ótima.

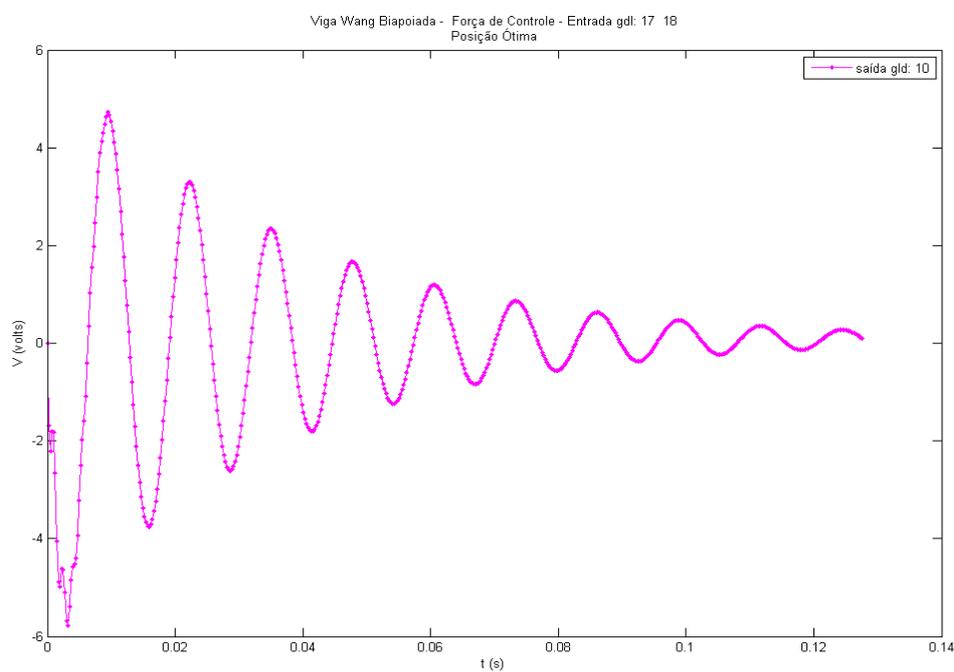


Figura 6.75 – Força de controle devido a excitação degrau unitário 2 modos/2 atuadores para o segundo atuador na posição ótima.

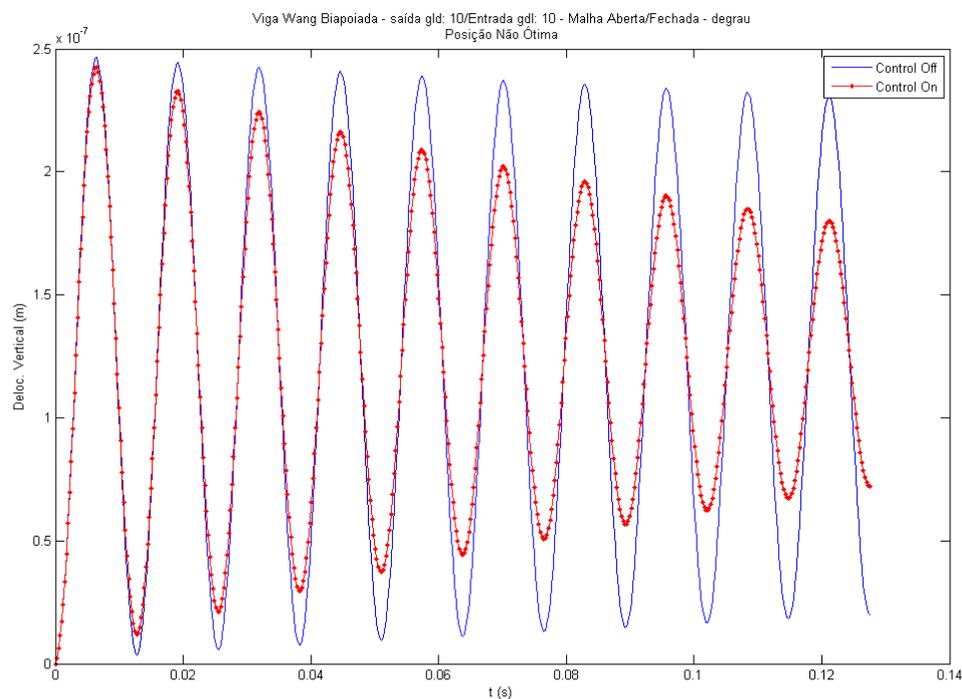


Figura 6.76 – Malha aberta/fechada degrau unitário 2 modos/2 atuadores posição não ótima.

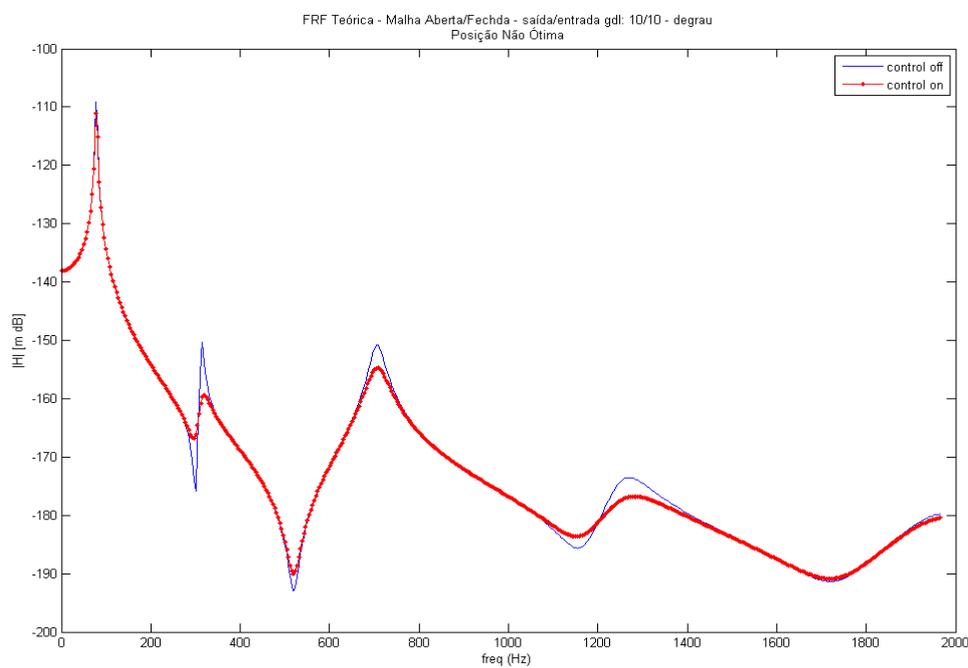


Figura 6.77 – FRF excitação degrau unitário 2 modos/2 atuadores posição não ótima.

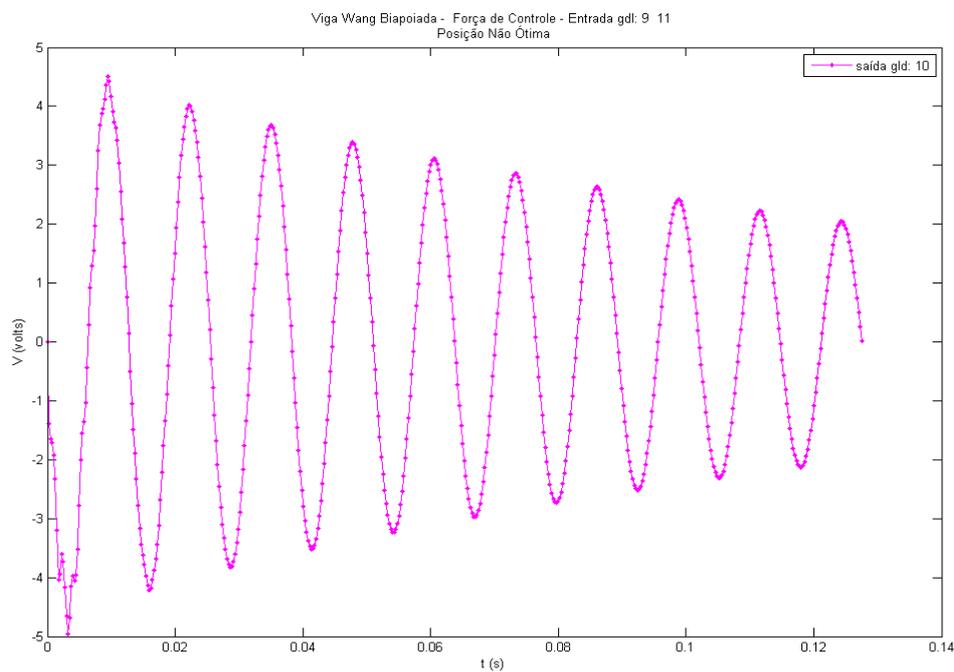


Figura 6.78 – Força de controle devido a excitação degrau unitário 2 modos/2 atuadores para o primeiro atuador piezoeletrico posição não ótima.

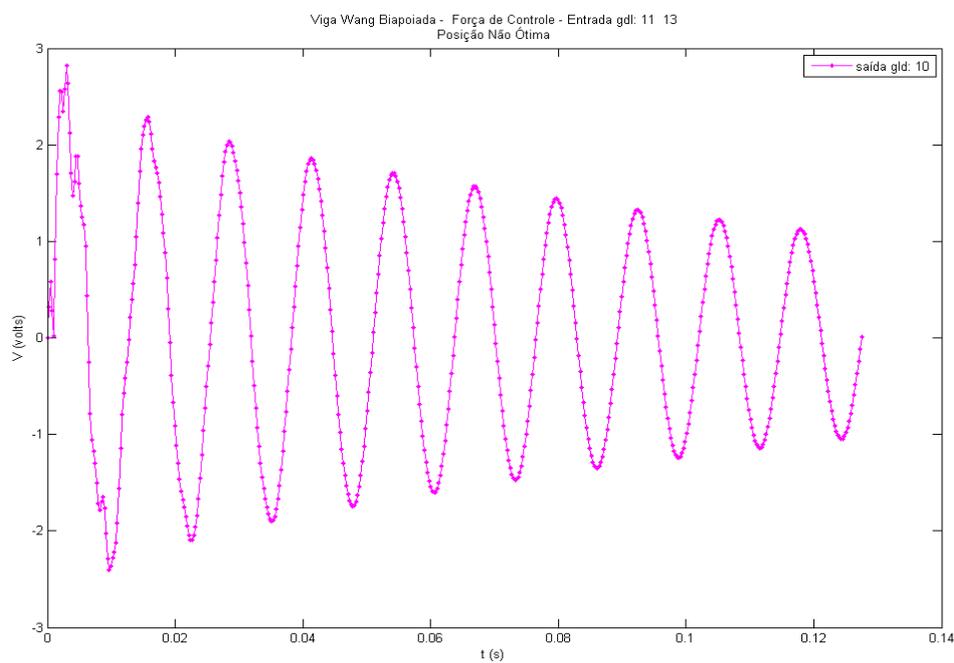


Figura 6.79 – Força de controle devido a excitação degrau unitário 2 modos/2 atuadores para o segundo atuador piezoeletrico posição não ótima.

6.6.6 Simulação Considerando Três Modos e Três Atuadores Piezelétricos e Uma Excitação Degrau Unitário Para o Primeiro, Segundo e o Terceiro Modo.

Nesta simulação foi considerada uma excitação do tipo degrau unitário, sendo que esta excitação foi aplicada no meio do comprimento da viga. Os três pares de atuadores piezelétricos são posicionados, considerando-se o primeiro, segundo e o terceiro modo de vibrar da viga biapoiada, nos elementos 3, 6 e 9 para as posições ótimas e posicionados nos elementos 1, 2 e 11, a partir da extremidade esquerda da viga para as posições não ótimas, conforme figura 6.80.

As figuras 6.81, 6.82, 6.83, 6.84 e 6.85 mostram os gráficos das simulações com os atuadores posicionados na posição ótima do primeiro, segundo e do terceiro modo de vibrar da viga biapoiada, para as condições de malha aberta, malha fechada no tempo, função resposta em frequência e força de controle para o primeiro, para o segundo atuador e para o terceiro atuador piezelétrico, respectivamente.

As figuras 6.86, 6.87, 6.88, 6.89 e 6.90 mostram os gráficos das simulações com os atuadores posicionados na posição não ótima do primeiro, segundo e do terceiro modo de vibrar da viga biapoiada, para as condições de malha aberta, malha fechada, função resposta em frequência e força de controle para o primeiro, para o segundo e para o terceiro atuador piezelétrico, respectivamente.

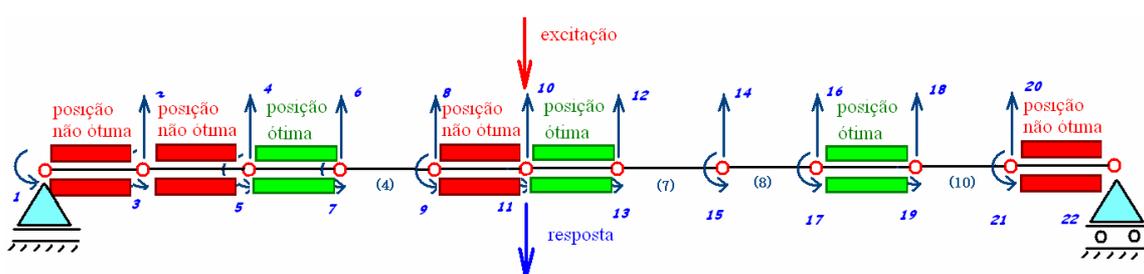


Figura 6.80 - Elementos da viga de controle simulada.

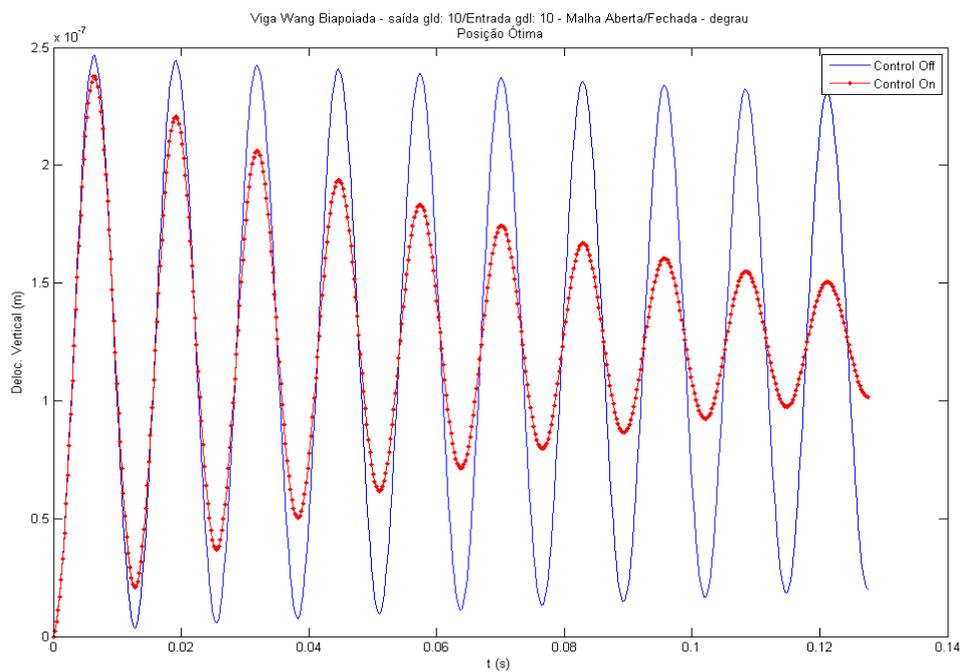


Figura 6.81 – Malha aberta/fechada excitação degrau unitário 3 modos/3 atuadores posição ótima.

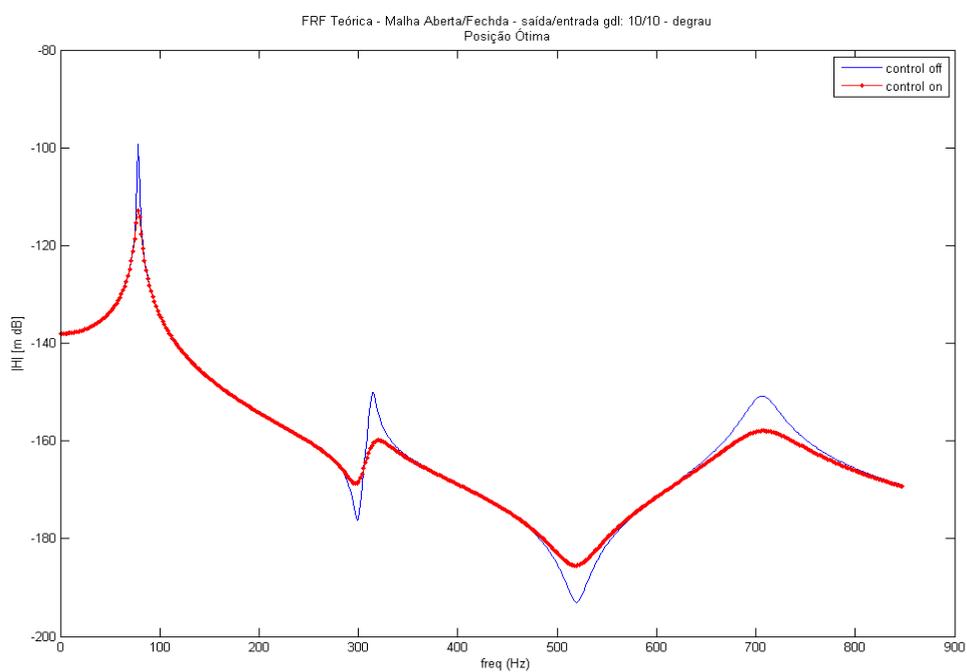


Figura 6.82 – FRF excitação degrau unitário 3 modos/3 atuadores posição ótima.

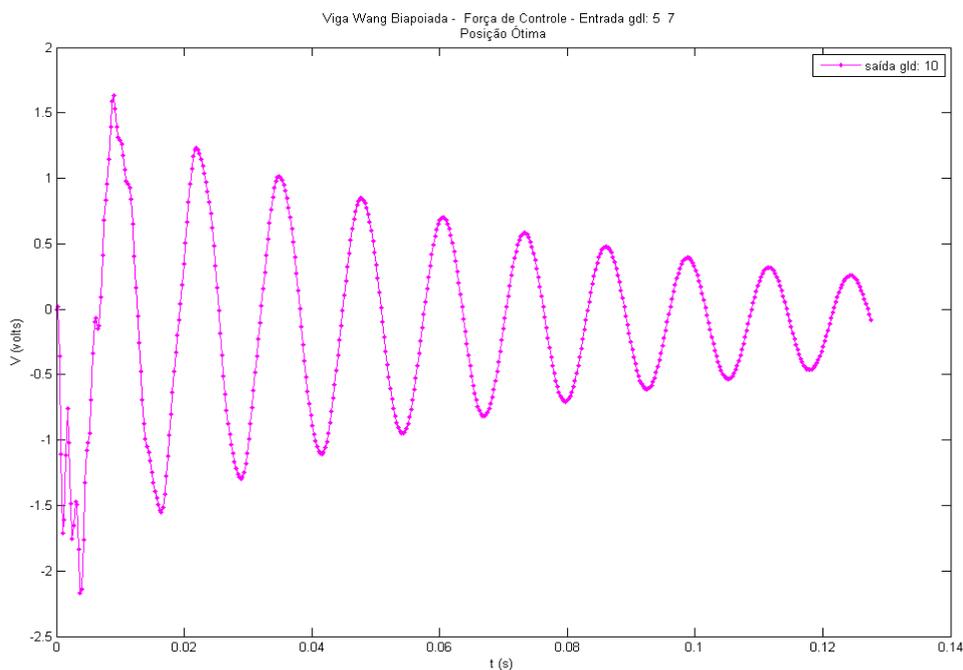


Figura 6.83 – Força de controle devido a excitação degrau unitário 3 modos/3 atuadores para o primeiro atuador na posição ótima.

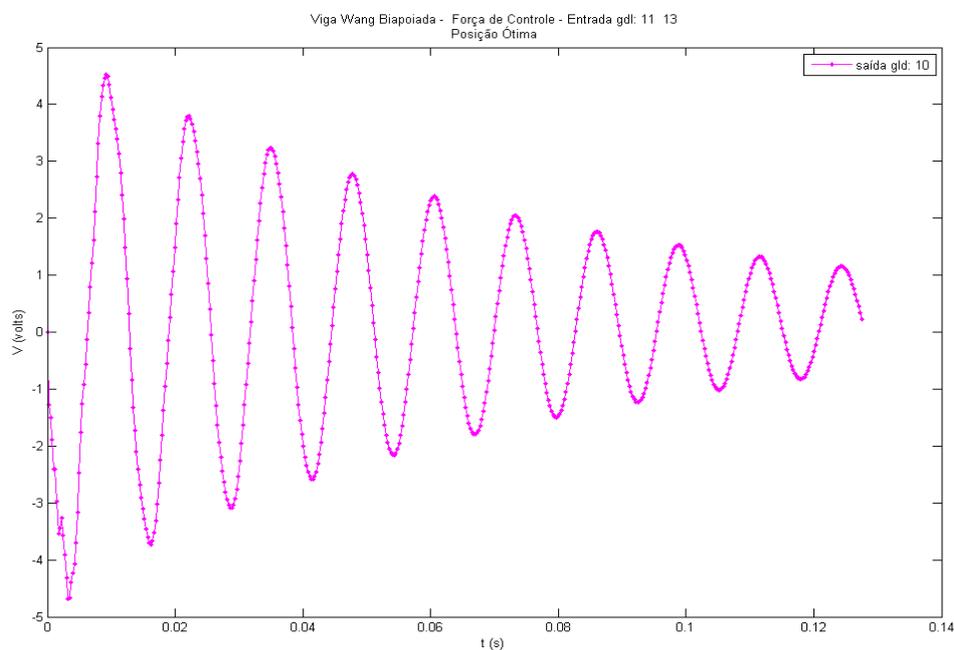


Figura 6.84 – Força de controle devido a excitação degrau unitário 3 modos/3 atuadores para o segundo atuador na posição ótima.

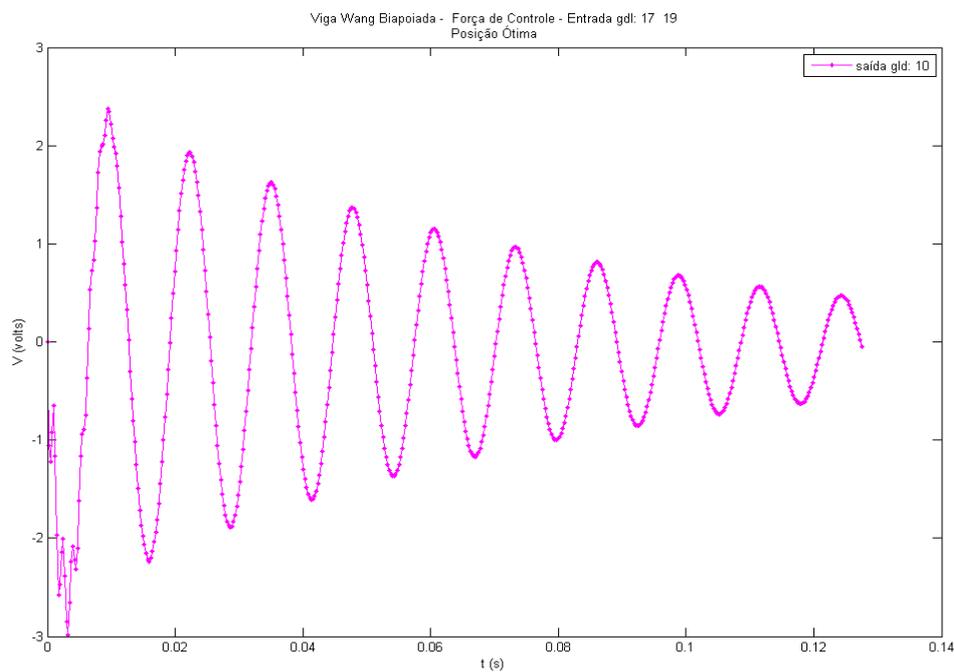


Figura 6.85 – Força de controle devido a excitação degrau unitário 3 modos/3 atuadores para o terceiro atuador na posição ótima.

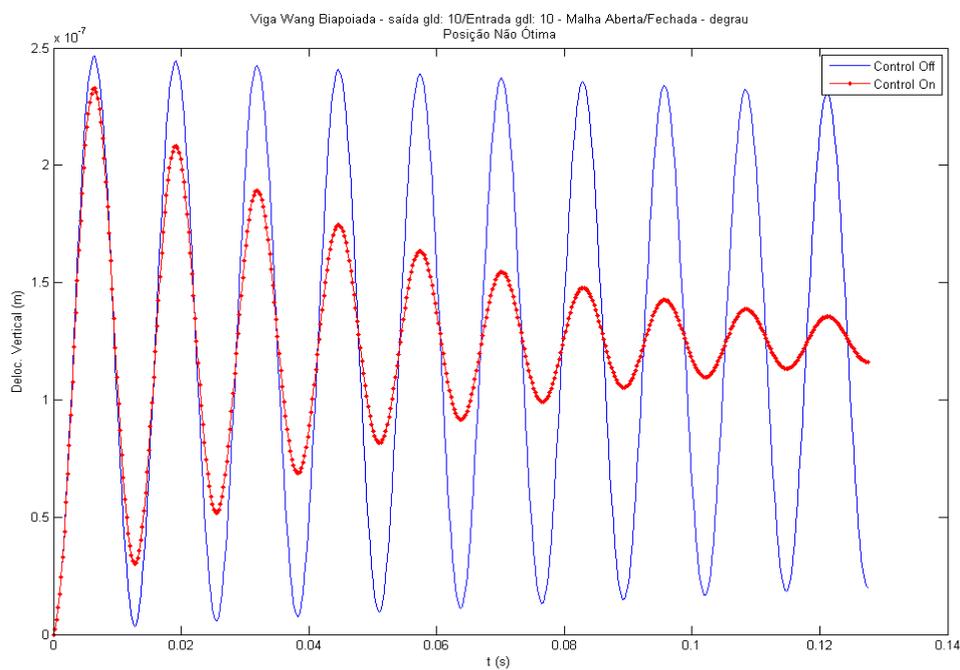


Figura 6.86 – Malha aberta/fechada degrau unitário 3 modos/3 atuadores posição não ótima.

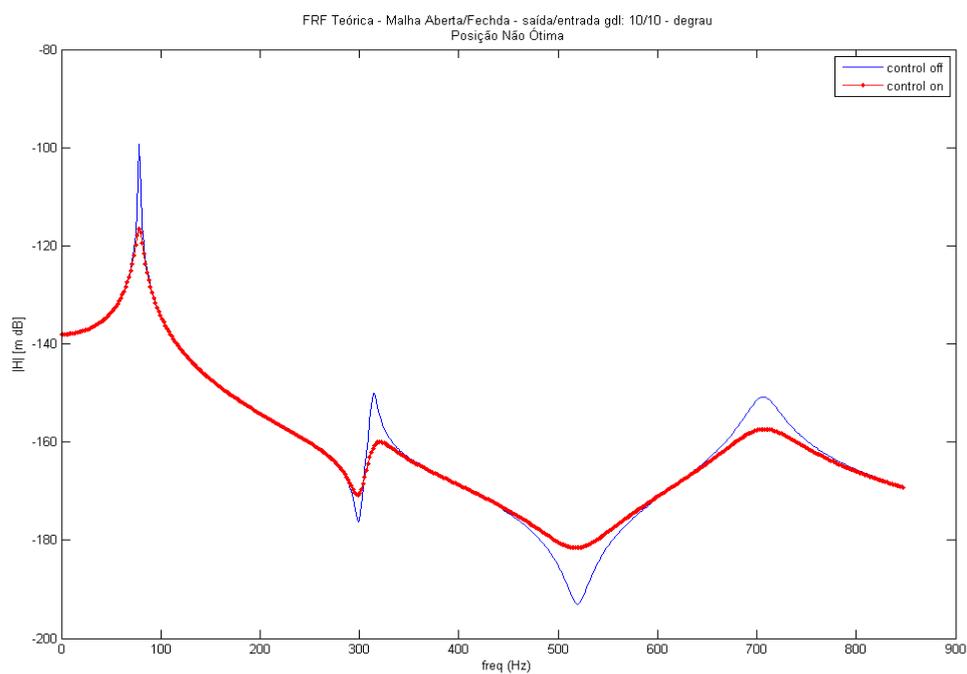


Figura 6.87 – FRF excitação degrau unitário 3 modos/3 atuadores posição não ótima.

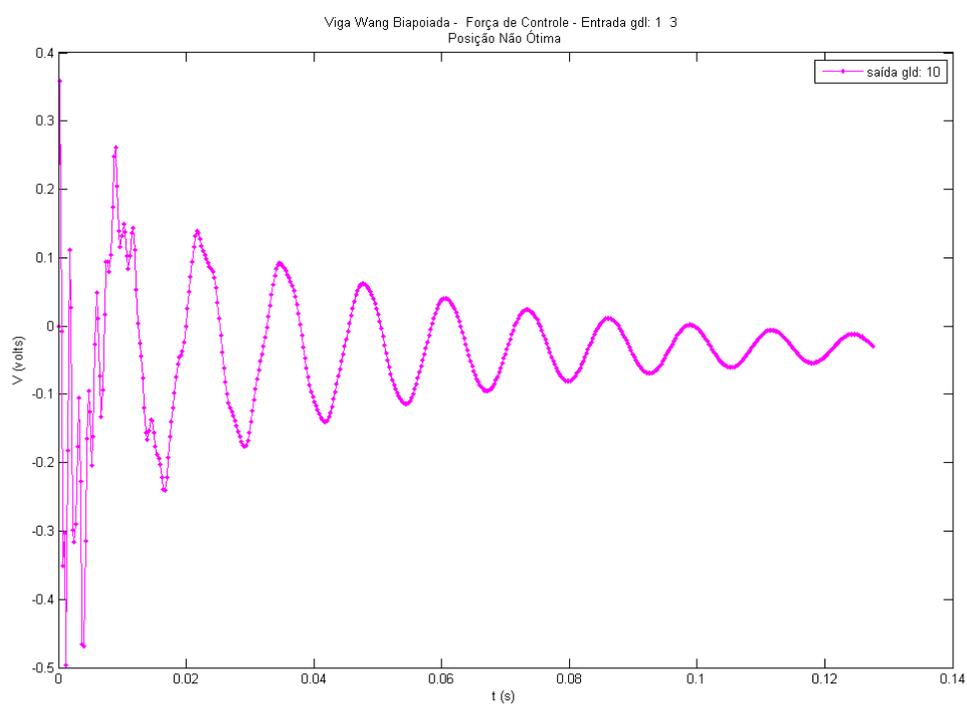


Figura 6.88 – Força de controle devido a excitação degrau unitário 3 modos/3 atuadores para o primeiro atuador piezolétrico posição não ótima.

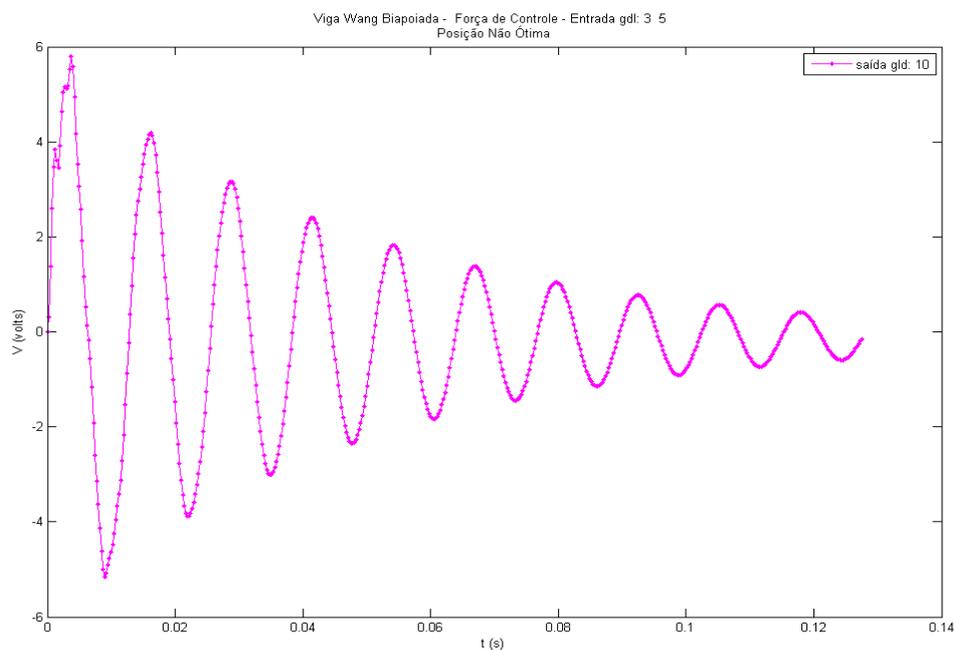


Figura 6.89 – Força de controle devido a excitação degrau unitário 3 modos/3 atuadores para o segundo atuador piezelétrico posição não ótima.

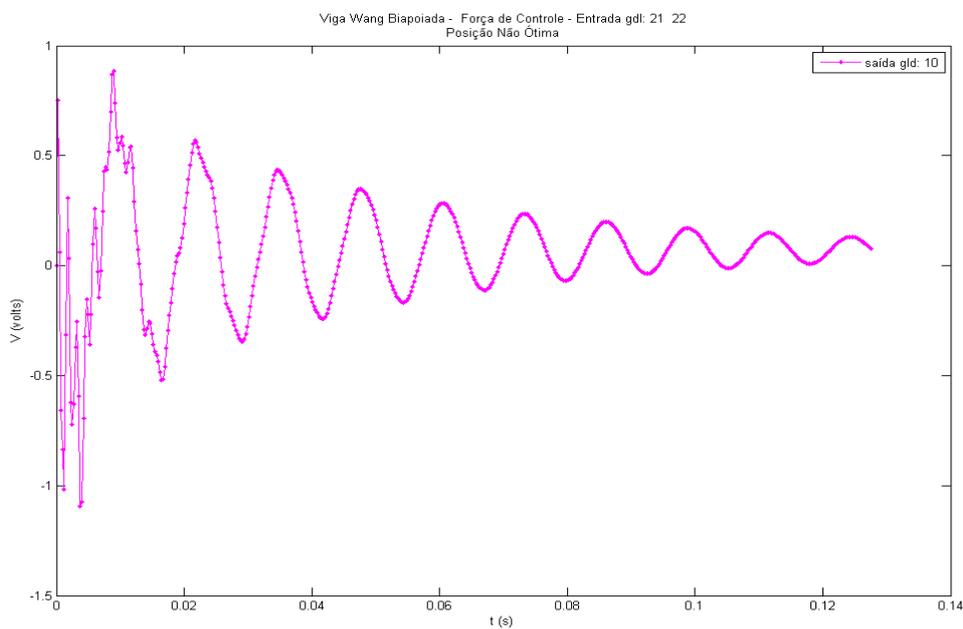


Figura 6.90 – Força de controle devido a excitação degrau unitário 3 modos/3 atuadores para o terceiro atuador piezelétrico posição não ótima.

Capítulo 7

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

7.1 CONCLUSÕES

Neste trabalho é apresentado o desenvolvimento de uma técnica para se posicionarem elementos piezelétricos em estruturas flexíveis. Este posicionamento consiste em uma parte importante dentro de um projeto de estruturas inteligentes. A finalidade de se usar uma técnica de posicionamento de elementos piezelétricos em estruturas flexíveis é para minimizar o esforço do controlador. Em outras palavras pretende-se tornar de maneira mais eficiente o controle ativo em estruturas flexíveis. A técnica de posicionamento desenvolvida baseia-se nas análises de controlabilidade dos sistemas dinâmicos e pode ser aplicada independente do tipo ou da estratégia de controle adotada.

A técnica desenvolvida é baseada na decomposição dos valores singulares da matriz de controle. Esses valores singulares estão relacionados com a força de controle e assim com a energia do controlador. Este presente trabalho utiliza um método de posicionamento direto. Nesse método, diferentemente dos métodos baseados em técnicas heurísticas de otimização,

são feitas simulações de todas as combinações possíveis de posições do elemento na estrutura flexível. Um índice de quantificação baseado na controlabilidade do sistema determina a posição ótima dentre todas as combinações simuladas.

A vantagem dessa técnica é que a solução encontrada é sempre a global, diferentemente de métodos heurísticos que, dependendo da função objetivo, podem encontrar uma solução local dentro do espaço de soluções. A desvantagem é que é necessário na sua formulação o conhecimento dos parâmetros modais da estrutura a ser controlada, requerendo desta forma conhecimento mais profundo da estrutura.

Para realizar estas simulações foram desenvolvidos vários programas computacionais em elementos finitos que consideram o elemento piezelétrico como um elemento finito posicionado nó a nó, aplicando nestes mesmos nós momentos concentrados nos graus de liberdade referentes aos deslocamentos angulares. Os modelos finitos de Timoshenko, que utiliza quatro graus de liberdades por nó, desenvolvido neste trabalho apresentou bons resultados. A precisão satisfatória destes resultados validados no capítulo 5, obtidos por meio da comparação com os valores calculados numericamente e retirados da literatura especializada, é mostrada nas tabelas 5.2 a 5.17.

Baseado na expressão matemática para o número de atuadores piezelétricos, conclui-se que não existe um número ótimo de elementos piezelétricos, pois o ótimo está relacionado a uma condição ideal. Nesse caso, o número de elementos piezelétricos depende das dimensões do elemento piezelétrico e das suas propriedades. Assim, o número de elementos piezelétricos em estruturas inteligentes é uma das condições de projeto.

Quando a massa e a rigidez adicionadas pelos atuadores ou elementos piezelétricos na estrutura suporte, não forem suficientes para uma alteração significativa do modo de vibrar, as suas posições ótimas não se alteram. Esta situação pode ser observada através dos gráficos de modos anti-simétricos de vibrar, mostrados nas figuras 6.16, 6.22 e 6.43, onde a alteração do modo de vibrar da estrutura, com e sem atuadores piezelétricos, não altera as suas posições ótimas, condições estas apresentadas pelos gráficos das figuras 6.15, 6.21 e 6.42. Para o caso de um modo simétrico, não há alteração do modo de vibrar, condição mostrada pelos gráficos das figuras 6.4, 6.6, 6.28 e 6.32 e da mesma forma as suas posições ótimas, gráficos das figuras 6.3, 6.5, 6.27 e 6.31, não se alteram. As tabelas 6.4, 6.5, 6.12, 6.18, 6.23 e 6.25

mostram as posições ótimas de estruturas, com e sem atuadores piezelétricos, onde as posições 1, 2 e 3 são as extremidades esquerda, o meio e a extremidade direita do atuador piezelétrico. Posições estas devido ao efeito dos atuadores piezelétricos na controlabilidade.

Outra conclusão é que o número de ótimos é função do modo. Esta situação é apresentada pelos gráficos das figuras 6.1 e 6.2.

A técnica de posicionamento modal é coerente, pois a controlabilidade dos modos superiores são maiores que a dos inferiores. Esta condição é verificada se o número de atuadores ou elementos piezelétricos é menor que o número de modos de acordo com o gráfico da figura 6.10.

A técnica de posicionamento apresentada neste trabalho mostrou bons resultados. A sua efetividade de posicionamento pode ser verificada pelos gráficos de controle do capítulo 6. Os gráficos 6.46 e 6.47 mostram, tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência, que o controle com o atuador piezelétrico na posição ótima foi mais efetivo que o controle realizado com os atuadores piezelétricos na posição não ótima, de acordo com os gráficos 6.49 e 6.50. O gráfico da figura 6.47 mostra uma diminuição da amplitude do primeiro modo, comprovando sua eficiência no controle deste modo.

As figuras 6.47, 6.53 e 6.59, mostra uma diminuição na amplitude o primeiro modo quando o sistema está em malha fechada, demonstrando que realmente é a posição ótima de acordo com a figura 6.45, tanto em uma excitação impulso, degrau e seno.

O gráfico da figura 6.66, mostra o controle para os atuadores piezelétricos posicionados de acordo com posição ótima mostrada pela figura 6.64. Pode-se verificar uma diminuição da amplitude para o segundo modo.

Os gráficos das figuras 6.48, 6.54, 6.60, 6.67, mostram a força de controle utilizada, verifica-se que não é atingida a tensão de breakdown dos elementos piezelétricos.

Como conclusão final, podemos afirmar que foi apresentada uma metodologia de posicionamento de atuadores piezelétricos que funciona em uma viga em várias condições modais e de contorno.

7.2 SUGESTÕES E RECOMENDAÇÕES

Aplicar a presente técnica da decomposição em valores singulares da matriz de controle, desenvolvida neste trabalho, em estruturas mais complexas, tais como: placas e cascas;

Aplicar a técnica de estruturas com camadas viscoelásticas, introduzidas pela presença de camadas de atuadores piezelétricos do tipo polímeros na estrutura suporte;

Estudar outras técnicas de posicionamento, como por exemplo: técnicas heurísticas baseadas em algoritmos genéticos, e comparar os resultados encontrados com a técnica direta empregada neste trabalho;

Estudar o efeito da anisotropia das camadas de atuadores piezelétricos e sua influência na matriz de rigidez destes elementos;

Aplicar o método de otimização topológica para projetar simultaneamente a estrutura e o atuador piezelétrico.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abbate, S.** (1998), “Comments on a note on a finite element for vibration thin orthotropic rectangular plates”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 216, no. 2, pp. 315-321.
- Abreu, G. L. C. M., Ribeiro, J. F.** (2003), “Spatial H^∞ , Control Of Flexible Beam Containing Piezoelectric Sensors And Actuators”, *Anais do XVII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, COBEM 2003, São Paulo, Brasil, p 11.
- Abreu, G. L. C. M.** (2003), *Projeto Robusto H^∞ Aplicado no Controle de Vibrações em Estruturas Flexíveis com Materiais Piezelétricos Incorporados*, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 273p.
- Abreu, G. L. C. M., Ribeiro J. F., Valder, S. Jr.** (2005), “Optimization of the Piezoelectric Materials Positions in a Flexible Structures”, *Anais do XI Diname*, Ouro Preto, MG, Brasil
- Adali, S.J., Bruch, J.C. , Sadek, I.S.** (2000), “Robust Shape Control of Beams with Load Uncertainties by Optimally Placed Piezo Actuators”, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 19, pp. 274-281.
- Aldraihen, O. J., Singh, T., Wetherhold, R. C.** (2000), “Optimal Size and Location of Piezoelectric Actuators/Sensors: Practical Considerations”, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 23, no. 3, pp. 500-515.
- Allik, H., Huges, T. Jr.** (1970), “Finite Element Method for Piezoelectric Vibration”, *Internation Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol 2, pp 151-157.

- Ambrosio J., Nikraves, P. E.** (1992), "Elasto-Plastic Deformation in Multibody Dynamics, *Nonlinear Dynamic*", vol. 3, pp. 85-104.
- Avitabile, P.** (2001), "A comparison of some common system-modeling approaches", *The Shock and Vibration Digest*, vol. 33, no. 4, pp. 281-291.
- Balamurugan, V., Narayanan, S.** (2002), "Finite Element Formulation and Active Vibration control Study on Beam Using Smart Constrained Layer Damping (SCLD) Treatment", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 249, no. 2, pp 227-250.
- Bailey, T., Hubbard Jr., J. E.** (1985), "Distributed Piezoelectric Polymer Active Vibration Control of a Cantilever beam", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 8, no. 5, pp. 605-611.
- Banks, H. T., Smith, R. C., Wang, Y.** (1995), The Modeling of Piezoceramic Path Interactions with Shells, Plates and Beam, *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 53, no.2, pp. 353-381.
- Bathe, K. J.** (1996), *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1051p.
- Barboni, R., Mannini, A., Fantini, E.** (2000), "Optimal Placement of PZT Actuators for the Control of Beam Dynamics", *Smart Materials and Structures*, vol. 9, pp. 110-120.
- Bin, L., Yuang L., Xueng Y., Shanglian H.** (2000), "Maximal Modal Force Rule For Optimal Placement of Point Piezoelectric Actuators for Plate", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 11, pp. 512-515.
- Blevins, R. D.** (1979), *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*, Van Nostrand Company Inc., 492 p.

- Bruant I., Coffignal G., Lene F.** (2001), “A Methodology for Determination of Piezoelectric Actuators Sensors Location on Beam Structures”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 243, no. 5, pp. 861-882.
- Behrens, S., Moheimani, S. O. R., Fleming, A. J.** (2002), “Multiple mode current flowing passive piezoelectric shunt controller”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 266, pp. 929-942.
- Berkhoff, A. P.** (2001), “Piezoelectric sensor configuration for active structural acoustic control”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 246, no. 1, pp. 175-183.
- Cady, W. G. (1946)**, *Piezoelectricity – An Introduction to the Theory and Applications of Electromechanical Phenomena in Crystal*, McGraw-Hill, 806p.
- Charette, F., Berry A., Guigou C.** (1997), “Dynamic Effects of Piezoelectric Actuators on the Vibration Response of a Plate”, *Journal of intelligent Material System and Structures*, vol. 8, pp. 513-524.
- Carvalho, R., Júnior, V. L., Brennan M. J.** (2005), “A Comparison Of Two Modal Control Strategies For The Active Vibration Control Of A Truss Structure”, *Anais do XVIII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, COBEM 2005, Ouro Preto, Brasil*.
- Cesnik, C. E. S., Ortega, M.** (2001), “Active Beam Cross-Sectional Modeling, *Journal of Intelligent Material System and Structures*”, vol. 12, pp. 483-496.
- Chen, S. H., Wang Z. D., Liu, X. H.** (1997), “Active vibration control and suppression for intelligent structures”, *Journal of sound and Vibration*, vol. 200, no. 2, p. 167-177.
- Clark R. L., Burdisso A., Fuller C. R.** (1993), “Design approaches for shaping polyvinylidene fluoride sensors in active structural acoustic control (ASAC)”, *Journal of intelligent Material System and Structure*, vol. 4, pp. 354-365.

- Clark, R. L., Saunders, W. R., Gibbs, G. P.** (1998), *Adaptive Structures Dynamics and Control*, John Wiley & Sons, New York, 467p.
- Costa e Silva, V. M., Arruda, J. R. F.** (1997), “Otimização do Posicionamento Piezocerâmicos em Estruturas Flexíveis Usando Algoritmo Genético”, *Anais do XIV, COBEM 97*, Bauru, SP, COB. 489, 8p.
- Craig, R. R. Jr.** (1981), *Structural Dynamics: An Introduction to Computer Methods*, John Wiley & Sons, Inc, Singapura, 527 p.
- Crawley E. F., De Luis, J.** (1987), “Use of Piezoelectric Actuators as Element of intelligent Structure”, *AIAA journal*, vol. 25, no. 10, pp. 1373-1382
- Dimitriadis, E. K., L. Fuller, C. R., Rogers, C. A.** (1991), “Piezoelectric Actuators for Distributed Vibratiob Excitation of Thin Plates”, *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 113, pp. 100-107.
- Dosch J. J., Inman, D. J.,** (1992), “A self sensing piezoelectric actuator for collocated control”, *Journal of intelligent Material Systems and Structure*, vol. 3 pp. 166-185.
- Ewins, D. J.** (1984), *Modal Testing: Theory and Prattice*, Jhon Wiley & Sons, New York, 269 p.
- Frecker, M. I.** (2003), “Recent Advances in Optimization of Smart Structures and Actuators”, *Journal of Intelligent Material System and Structures*, vol. 14, pp. 207-215.
- Friswell, M. I.** (2000), “On the design of modal actuators and sensor”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 241, no. 3, pp. 361-372.
- Gawronski, W.** (1997), “Actuator and sensor placement for structural testing and control”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 208, no. 1, pp. 101-109.

- Gawronski, W.** (2000), “Modal Actuators and Sensors”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 229, no. 4, pp. 1013-1022.
- Giovannetti, L. F. A.** (2001), “Posicionamento de Sensores e Atuadores em Estruturas Ativas do Tipo Viga”, *Relatório de Iniciação Científica, PIBIC CNPq, Projeto TEC 341/98 FAPEMIG*, 106p.
- Halin, D., Moheimani, S. O.** (2003), “An optimization approach to optimal placement of collocated piezoelectric actuators and sensors on a thin plate”, *Mechatronics*, vol. 13, pp. 27-47.
- Han, Jae-Jung, L.** (1999), “Optimal placement of piezoelectric sensors and actuators for vibration control of composite plate using genetic algorithms”, *Smart Material Structure*, vol 8, pp 257-267.
- Han, S. M., Benaroya H., Wei, T.** (1999), “Dynamics of Transversely Vibration Beams Using Four Engineering Theories”, *Journal of Sound and Vibration*, vol 225, no. 5., pp. 935-988.
- Hwang, W. S., Park, H. C., Hwang, W.** (1993), “Vibration Control of a Laminated Plate with Piezoelectric Sensor/Actuator: Active and Passive Control Methods”, *Mechanical System and Signal Processing*, vol 4, pp 317-329.
- Inman, D. J.** (1994), *Engineering Vibration*, Prentice Hall, Inc, New Jersey, 560p.
- Kusculuoglu, Z. K., Fallahi B., Royston, T. J.** (2004), “Finite element model of a beam with a piezoceramic patch actuator”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 276, no. 1, pp. 27-44.
- Kwon, Y. W.** (1997), *The finite element method using Matlab®*, ed. CRC Press, Inc, 519 p.

- Lalanne, M., Ferraris, G.** (1990), *Rotordynamics prediction in engineering*, John Wiley & Sons, New York, 197p.
- Lee, C. K., Moon, F. C.** (1990), "Modal sensor/actuator", *Journal of applied Mechanics*, vol 57, pp 434-441.
- Lee, J. V., Schultz W. W.** (2004), Eigenvalue analysis of Timoshenko beams and axisymmetric Mindlin Plates by pseudospectral method, , *Journal of Sound and Vibration*, vol. 269, pp 609-621.
- Lee, Y. S., Elliot, S. J.** (2000), "Active Position Control Of Flexible Smart Beam Using Internal Model Control", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 242, no. 5, pp. 767-791.
- Li, D. S., Cheng L., Gosselin C. M.** (2002), "Analysis of structural acoustic coupling of a cylindrical shell with an internal floor partition", *Journal of Sound and vibration*, vol. 250 no. 5 pp. 903-901.
- Li, D. S., Cheng L., Gosselin C. M.** (2003), "Optimal design of PZT actuators in active structural acoustic control of a cylindrical Shell with a floor partition", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 269, n 4, pp. 569-588.
- Lesieutre, G. A., Rusovici R. K, G. H., JJ Dosch** (2003), "Modelling and characterization of a piezoceramic inertial actuator", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 261, pp. 93-107.
- Lewis, J., Inman, D. J.** (2001), "Finite Element Modeling and Active Control of an Inflated Torus Using Piezoelectric Devices", *Journal of Intelligent Material System and Structures*, vol. 12, pp. 819-833.
- Lim, K. B., Gawronski W.** (1993), "Actuator and Sensors Placement for Control of Flexible Structures", *Control and Dynamics Systems*, ed. C. T. Leondes, vol. 57, pp. 109-152.

- Lima Jr., J.J., Arantes, R. F.** (2000), Estudo Dinâmico Adimensional dos Modelos de Viga de Euler-Bernoulli, Vlasov e Timoshenko, *Anais do IX Congresso Chileno de Engenharia Mecânica Concim-Conae*, Valparaíso, Chile, 6p.
- Lima Jr., J. J., Arruda J. R. F.** (1997), “Finite Element Modeling of Piezoceramic Sensors and Actuators”, *Anais do XVIII CILAMCE, Congresso Ibero – Americano de Métodos Computacionais para Engenharia*, Brasília, Vol. 1, pp. 751-757.
- Lima Jr., J. J.** (1999), *Modelagem de sensores e atuadores piezelétricos com aplicações em controle ativo de estruturas*, Tese de doutorado – DMC/FEM/Unicamp, Campinas - Brasil, 207p.
- Lima Jr., J.J., Arruda J. R. F.** (1999), Viga Ativa Usando Atuadores e Sensores Piezelétricos Incorporados, *Anais do XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, COBEM 99*, Águas de Lindóia, Brasil, 9p.
- Liu, K.** (1996), “Modal parameter estimation using state space method”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 197, no. 4 pp. 387-402.
- Lopes Jr., Valder, S. Jr., Inman D. J.** (2003), “Optimal placement of piezoelectric sensor/actuators for smart structures vibration control”, Taylor & Francis book Ltd.
- Lu, P., Lee K. H.** (2003), “An alternative derivation of dynamic admittance matrix of piezoelectric cantilever bimorph”, *Journal of sound and Vibration*, vol. 266, pp. 723-735.
- Man, K. F., Tang K. S., Kwong S.** (1996), “Genetic Algorithms: Concepts and Application”, *IEEE Transactions on Industrial Eletronics*, vol. 43 no. 5, pp. 519-533.
- Maurini C., Porfiri M., Pouget J.** (2006), “Numerical methods for modal analysis of stepped piezoelectric beams”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 298, pp. 918-933.

- Maxwell, N.D., Asokanthan S. F.** (2002), “Modal characteristics of a flexible beam with multiple distributed actuators”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 269, pp. 19-31.
- Meirovitch, L., Norris M. A.** (1984), Vibration Control, *Proceedings of Inter-Noise*, vol. 84, pp. 477-482.
- Meirovitch, L.** (1986), *Elements of Vibration Analysis*, Singapore McGraw Hill, 454p.
- Mohammad K. S., Al-Dmour, A. S.** (2002), “Vibration Control of Unknown Flexible Beam Structures”, *Journal of Vibration and Control*, vol. 8, pp. 69-86.
- Moheimai S., Ryall T.** (1999), “Considerations in placement of piezoceramic actuators that are used in structural vibration control”, *In: Proceedings of the 38th Conference on Decision and Control*, Phoenix, Arizona, USA., pp. 1118-1123.
- Moreira, F. J. O.** (1998), *Um controlador H^∞ de Banda Limitada para controle ativo de vibração Estrutural*, Tese de doutorado, Depto de Mecânica computacional, UNICAMP, 199p.
- Maxwell, N. D., Asokanthan, S. F.** (2002), Modal characteristics of a flexible beam with multiple distributed actuators, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 269, no. 2004, pp. 19-31.
- Novozhilov, V. V.** (1970), *Thin Shell Theory trad. By P. G. Lowe*, second edition, Groninger Wolters-Noordhoff, 422p.
- Ogata, K.** (1994), *Solving Control Engineering Problems With Matlab®*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 359p.
- Oliveira, A. S., Lima Jr., J. J.** (2005), Placement optimization of piezoelectric in a simply supported beam, through svd analysis and shape function critic point, *6th Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, Rio de Janeiro, Brasil.

- Oliveira, A. S., Lima Jr. J. J.** (2004 a), ‘Force Actuator and Piezoactuator Placement study through SVD Analysis on the Simply Supported Plate’, *Anais do XIV ENIEF*, Bariloche Argentina.
- Oliveira, A. S., Lima Jr. J. J.** (2004 b), “Posicionamento Ótimo de sensores e atuadores piezelétricos em uma placa bi-apoiada através da análise de valores singulares”, *Anais do VI SIMMEC*, Itajubá – Brasil.
- Oliveira, A. S., Lima Jr. J. J.** (2004 c), “Optimización de Posicionamento de Sensores y Actuadores Piezoelétricos en una Placa Totalmente Libre A través Del Análisis de Valores Singulares”, *Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica*, vol. 8 no. 3 , pp. 25 -32.
- Oliveira, A. S., Lima Jr. J. J.** (2003 a), “Estudo de posicionamento de sensores e atuadores piezelétricos em uma placa bi-apoiada através da analise de valor singular”, *Congresso Ibero Americano de Engenharia Mecânica – Cibem*, Universidade de Coimbra, Portugal.
- Oliveira, A. S., Lima Jr. J. J.** (2003 b), “Piezelectric actuator placement study through singular analysis value on the cantilever plate”, *Anais do XIII ENIEF*, Bahía Blanca - Argentina
- Oliveira, A. S., Lima Jr. J. J.** (2003 c), “Actuators and Sensors placement study through singular analysis in pinned-pinned beam”, *Anais do XXIV Cilamce*, Ouro Preto – Brasil
- Oliveira, A. S.** (1999), *Cálculo das Frequências de “Whirling” Através do Método dos Elementos Finitos em Ambiente Matlab®*, EESC/USP, Dissertação, São Carlos, 117p.
- Padula, S. L., Kincaid, R. K.** (1999), *Optimization Strategies for Sensor and Actuator Placement*, Nasa Report #L-17839

- Pai, P. F., Wen B., Naser A. S., Sculz M. J.** (1998), “Structural Vibration Control Using PZT Patches and Non-Linear Phenomena”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 215, no. 2, pp. 273-296.
- Park, Y. K., Chol S. B.** (1999), “Vibration control of cantilevered beam via hybridization of electro-rheological fluids and piezoelectric films”, *Journal of Soud and Vibration*, vol. 225, no. 2, pp. 391-398.
- Rao, S. S., Sunnar M.** (1994), “Piezoeletric and its Use in Disturbance Sensing and Control of Flexible Structures: A Survey”, *Applied Mechanics Review*, vol. 47, no. 4, pp. 113-123.
- Sampaio, R., Leckar H.** (1999), “Comparação Entre Diferentes Modelos De Vibrações Transversais de Viga”, *Anais do XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, COBEM 99*, Águas de Lindóia, Brasil, 9p.
- Segerlind, L. J.** (1976), *Applied Finite Element Analysis*, Joh Wiley & Sons Inc., 422p
- Silva, S. L., Valder J., Assunção E.** (2004), “Robust Control to Parametric Uncertainties in Smart Structures using Linear Matrix Inequalities”, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Science & Engineering*, vol. 26, no. 4, pp. 430-437.
- Simpson, M. T., Hansen, C. H.** (1996), “Use of genetic algorithms to optimize vibration placement for active control of harmonic interior noise in a cylinder with floor structure”, *Noise Control Engineering Journal*, vol. 44 no. 4, pp. 169-184.
- Sun, J. Q., Norris M. A., Rossetti, D. J., Highfill, J. H.** (1996), “Distributed Piezoelectric Actuators for Shell Interior Noise control”, *Journal of Vibration and Acoustic*, vol. 118, pp. 676-680.
- Stöbener, U., Lothar G.** (2000), “Modal Vibration Control for PVDF Coated Plates”, *Journal of Intelligent Material System and Structures*, vol. 11, pp. 283-292.

- Tong, S. Y. Y., Nikravesh P. E.** (2001), "Extraction of Free-Free Modes From Constrained Vibration Data for Flexible Multibody Models", *Journal of Sound and Acoustic*, vol 123, pp. 383-389.
- Tseng, C. I.**, (1989), *Eletromechanical Dynamics of a Coupled Piezoelectric/Mechanical System Applied to Vibration Control and Distributed*, Phd thesis, Departament of Mechanical Engineering, University of Kentucky, 240p.
- Tzou, H. S., Fu H. Q.** (1994), "A Study of Segmentation of Distributed Piezoelectric Sensors and Actuators, Part I: Theoretical Analysis", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 171, no. 2, pp. 247-259.
- Varandan, J. K., Varandan V. K., Bao X. Q.**(1996) "Finite element modeling of smart cantilever plate and comparison with experiments", vol 5, pp. 165-170.
- Wang, Q., Wang, C. M.** (2001), "Controllability Index For Optimal Desing Piezoeletric Actuators In Vibration Control Of Beam Structures", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 242(3), pp. 507-518.
- Yang, S. M., Lee, Y. J.** (1994), "Modal Analysis of Stepped Beams with Piezoelectric" Materials, *Journal of Sound and Vibration*, v 176 no.3, pp 289-300.

Apêndice A

CONCEITUAÇÃO SOBRE VALORES SINGULARES

A decomposição em valores singulares (SVD) é uma poderosa técnica em análise e cálculo de matrizes. Usando-se o (SVD) da matriz, ao invés da própria matriz original, tem-se a grande vantagem desta matriz de (SVD) ser mais robusta e ter menos erro numérico. Adicionalmente, o (SVD), expõe a estrutura geométrica da matriz, um importante aspecto em muitos cálculos de matrizes. A matriz pode ser descrita como uma transformação de um vetor de um espaço a outro. Os componentes do (SVD) quantifica o resultado de troca entre a geometria adjacente daqueles vetores.

O (SVD) é empregado em uma variedade de aplicações desde de mínimos quadrados a problemas de sistemas de equações lineares. Cada uma destas aplicações explicita a propriedade chave do (SVD), a sua relação com a ordem da matriz e a sua habilidade de aproximar matrizes de uma certa ordem. Muitos aspectos da álgebra linear utilizam-se da determinação da ordem da matriz, fazendo-se do (SVD) uma importante técnica amplamente usada.

A decomposição em valores singulares e o associado conceito de condicionamento são ferramentas de suma importância em métodos numéricos e análise numérica. É uma transformação linear do tipo homotética que altera o módulo do vetor sob transformação.

Uma matriz $[A]$ do tipo m por n (real ou complexa) pode sempre ser escrita como :

$$[A] = [U][S][V] \quad (\text{A.1})$$

Sendo que $[U]$ e $[V]$ são ortogonais (unitárias) e $[S]$ diagonal. As colunas da matriz m por m $[U]$ são os autovetores da matriz $[A][A]^T$ enquanto que as colunas da matriz n por n $[V]$ são os autovetores da matriz $[A]^T[A]$. Além disso os chamados valores singulares, que são os elementos da diagonal de $[S]$, são as raízes quadradas dos autovalores não nulos de matriz $[A][A]^T$ e da matriz $[A]^T[A]$.

A idéia geométrica fundamental que permeia a decomposição em valores singulares é obter duas bases ortonormais nas quais a transformação linear possa ser escrita como uma aplicação que associa elementos de uma base em múltiplos de elementos a outra. A análise da solução de sistemas lineares pode ser feita com base na decomposição em valores singulares. Através da equação (A.1) e supondo-se que $m = n$ e que todos os valores singulares de $[A]$ sejam não nulos. Para resolver-se o seguinte sistema:

$$[A]\{x\} = \{y\} \quad (\text{A.2})$$

Faz-se:

$$\{x\} = [V][S]^{-1}[U]\{y\} \quad (\text{A.3})$$

Como a matriz $[S]$ é diagonal, $[S]^{-1}$ é bastante simples de ser calculada. Basta inverter os elementos da diagonal da matriz $[S]$. Por outro lado, se alguns dos valores singulares estiverem próximos de zero, isto significa que o sistema de equações é potencialmente instável e que pequenas alterações no lado direito da equação (A.2) podem levar a um distanciamento da solução do sistema.

Apêndice B

CONTROLE MODAL

O projeto do controle modal independente é baseado na teoria de análise modal. A equação global dada pela equação (3.62) é reproduzida pela equação (B.1):

$$[M_{qq}]\{\ddot{q}\} + ([K_{qq}] - [K_{q\phi}][K_{\phi\phi}]^{-1}[K_{\phi q}])\{q\} = \{F_s\} + \{F_i\} + \{F_{el}\} \quad (\text{B.1})$$

A resposta do sistema, para um modo particular i , pode ser escrita pela superposição modal através da relação:

$$\{q(x,t)\} = [\bar{\chi}_i]\{\eta(t)\} \quad (\text{B.2})$$

Aplicando-se a equação (B.2) na equação (B.1), obtém-se:

$$[M_{qq}][\bar{\chi}_i]\{\ddot{\eta}(t)\} + [K^*][\bar{\chi}_i]\{\eta(t)\} = \{F(t)\} \quad (\text{B.3})$$

A equação (B.3) pode ser expressa, na formulação de espaço de estados, como:

$$\{\dot{z}\} = [A]\{z\} + [B]\{u\} \quad (\text{B.4})$$

O vetor de controle pode ser escrito, quando se usa realimentação de estados, como:

$$\{u\} = -[G]\{z\} \quad (\text{B.5})$$

Com: $[G]$ a matriz de ganho ótimo de realimentação. O ganho ótimo satisfaz a equação:

$$[G] = [R]^{-1} [B]^T [S_r] \quad (\text{B.6})$$

Com: $[S_r]$ a matriz de Ricatti e $[R]$ uma matriz de ponderação. A matriz de ganho de realimentação ótima pode ser particionada para representar os ganhos ótimos referentes aos deslocamentos e as velocidades.

Então, tem-se:

$$[G] = \begin{bmatrix} G_{\dot{q}} & G_q \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Considerando-se nenhuma força externa atuando no sistema, a equação (B.1), torna-se:

$$[M_{qq}]\{\ddot{q}\} + ([K_{qq}] - [K_{q\phi}][K_{\phi\phi}]^{-1}[K_{\phi q}])\{q\} = [B]\{u\} \quad (\text{B.8})$$

Substituindo-se as equações (B.7) e (B.5) na equação (B.8), tem-se:

$$[M_{qq}]\{\ddot{q}\} + [B][G_{\dot{q}}]\{\dot{q}\} + ([K^+] + [B][G_q])\{q\} = \{0\} \quad (\text{B.9})$$

Sendo que:

$$[K^+] = [K_{qq}] - [K_{q\phi}][K_{\phi\phi}]^{-1}[K_{\phi q}] \quad (\text{B.10})$$

Apêndice C

NÚMERO DE ELEMENTOS PIEZELÉTRICOS NECESSÁRIO PARA CONTROLAR UM DETERMINADO MODO

O número de elementos piezelétricos necessários ou requeridos em um projeto de estrutura inteligente é resultante do quociente entre a energia de deformação flexional elástica da estrutura e a energia potencial interna do elemento piezelétrico. Esta energia de deformação flexional, (Craig 1981), é:

$$U_{df} = \frac{1}{2} \{\chi_i\}^T [K^*] \{\chi_i\} \quad (C.1)$$

A energia potencial interna devido ao efeito dielétrico da camada piezelétrica, (Kusculuoglu et al., 2004), é expresso como:

$$U_{dp} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (E_3 D_3) d\Omega \quad (C.2)$$

Para o elemento piezolétrico tem-se:

$$\Omega = L_{pe} b_{pe} h_{pe}, \quad E_3 = \phi^a \quad (C.3)$$

E das equações (2.48) e (2.66), com a tensão medida nos eletrodos igual a zero, efeito indireto, e densidade superficial de cargas constante, tem-se:

$$D_3 = e_{31} = Y_{pe} d_{31} \quad (C.4)$$

Substituindo-se a equação (C.4) e (C.3) na equação (C.2), tem-se que a energia interna do elemento piezolétrico é:

$$U_{dp} = \frac{1}{2} Y_{pe} L_{pe} b_{pe} h_{pe} \phi^a d_{31} \quad (C.5)$$

O número de elementos piezolétricos é dado por:

$$n_{elp} = \frac{U_{df}}{U_{dp}} \quad (C.6)$$

A energia de deformação de flexão da viga é calculada de acordo com a deformação modal, específico para um determinado modo de vibrar, onde os seus valores máximos representam os locais de posicionamento ótimo para os elementos piezolétricos de acordo com Bin et al. (2000).

A energia de deformação do elemento piezolétrico é calculada através da deformação piezolétrica devido ao coeficiente piezolétrico indireto.