

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA ELÉTRICA

Fluxo de Potência Numericamente
Robusto via Método de
Levenberg-Marquardt de Ordem Superior

Guilherme Souto Chagas

Itajubá, 16 de agosto de 2018

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA ELÉTRICA**

Guilherme Souto Chagas

**Fluxo de Potência Numericamente
Robusto via Método de
Levenberg-Marquardt de Ordem Superior**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Métodos de Análise, Planejamento e Operação de Sistemas Elétricos

Orientador: Prof. Dr. Robson Pires

16 de agosto de 2018

Itajubá

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA ELÉTRICA

Fluxo de Potência Numericamente
Robusto via Método de
Levenberg-Marquardt de Ordem Superior

Guilherme Souto Chagas

Dissertação aprovada por banca examinadora em 13 de Agosto de 2018, conferindo ao autor o título de **Mestre em Ciências em Engenharia Elétrica.**

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Carlos Alberto de Castro Junior
Prof. Dr. Antonio Carlos Zambroni De Souza
Prof. Dr. Robson Pires (Orientador)

**Itajubá
2018**

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Robson Pires, pela confiança, pela oportunidade de trabalhar ao seu lado, pela paciência, empenho e dedicação com que sempre me orientou neste trabalho, sempre me corrigindo quando necessário sem nunca me desmotivar.

Aos Profs. Drs. Carlos Castro (UNICAMP) e Antônio Carlos Zambroni, que aceitaram compor minha banca de defesa.

Ao Prof. Dr. Luiz Carlos Pereira da Silva (UNICAMP) por me acolher como ouvinte na disciplina que foi a base e a motivação para todo este trabalho.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), pela bolsa de estudos e auxílio financeiro que possibilitou a dedicação integral ao programa e a realização deste trabalho.

Ao Henrique Farias e à Olívia Maria, cuja amizade é um porto seguro para todas as horas. Obrigado por acreditarem em mim.

À Raquel Miguez, além de grande amiga, uma grande inspiração a quem me espelho em meu desenvolvimento acadêmico.

Aos meus pais pelo suporte e apoio incondicional, por lutarem tanto para garantir minha educação.

*"Não há perguntas tolas
e nenhum homem será um tolo
até que ele pare de fazer
perguntas"*
(Charles Proteus Steinmetz)

Resumo

Este trabalho apresenta um algoritmo robusto por Levenberg-Marquardt de ordem superior no plano complexo para resolver problemas de fluxo de potência de sistemas bem e mal condicionados numericamente, exibindo uma taxa de convergência biquadrática e desempenho superior quando comparado com os procedimentos tradicionais. Uma vez que os modelos de fluxo de potência são não lineares, o cálculo de Wirtinger é aplicado no desenvolvimento de algoritmos baseados em expansões em séries de Taylor de funções não lineares de variáveis complexas e complexas conjugadas. Poucas alterações no código do algoritmo de Newton-Raphson são necessárias para transformá-lo no algoritmo de Levenberg-Marquardt, que é então diretamente desenvolvido no plano complexo. O presente trabalho demonstra que o domínio complexo se apresenta mais versátil e natural para incorporar a modelagem de novas tecnologias *smart grids* como os dispositivos *FACTS*. Demonstrações e análises são feitas sobre os sistemas testes bem condicionados IEEE-14, -30, -57 e -188 barras, além do sistema interligado nacional brasileiro SIN-1916 barras. Para os sistemas mal condicionados ou sem solução, o desempenho do algoritmo proposto é comparado com o desempenho do método de fluxo de potência baseado no multiplicador otimizado. Para estas últimas análises foram testados os já conhecidos sistemas mal condicionados IEEE-11, -13 e -43 barras.

Palavras-chaves: Análise de fluxo de potência no plano complexo; Newton-Raphson e Levenberg-Marquardt no sistema de coordenadas conjugadas; coordenadas retangulares; propriedade de convergência biquadrática.

Abstract

This work deals with a high-order complex-values Levenberg-Marquardt robust algorithm for solving well- and ill-conditioned power flow problems, exhibiting a biquadratic convergence rate and superior performance as compared to the usual procedures. Because power flow models are nonlinear, the Wirtinger calculus is applied to develop iterative algorithms based on Taylor series expansions of nonlinear functions of complex variables and their complex conjugates. Few changes in the codes are required to transform the Newton-Raphson power flow algorithm into the Levenberg-Marquardt power flow one, which is directly derived in complex domain in this work. Furthermore, it is shown that a power flow algorithm in complex domain lends itself well to modeling new smart grid technologies, e.g., FACTS devices. The proposed algorithm performances are demonstrated and analyzed on the well-conditioned IEEE-14, -30, -57 and -118 bus systems, besides the Brazilian Southern equivalent system termed SIN-1916 bus. For the ill-conditioned systems the performance of the proposed algorithm is compared to the optimized multiplier based power flow method. Aiming these latter analysis the testbed are the well know ill-conditioned systems IEEE-11, -13 and -43 bus.

Key-words: Complex-valued power flow analysis; the Newton-Raphson and Levenberg-Marquardt algorithms in the conjugate coordinates system; rectangular coordinates; biquadratic convergence property.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Gráfico de contornos da função real escalar de variável complexa.	19
Figura 2 – Sistema Exemplo 3 Barras.	36
Figura 3 – Estrutura de esparsidade da matriz Jacobiana no plano real (a) e no plano complexo (b) do sistema teste IEEE 14-barras.	40
Figura 4 – Estrutura de esparsidade da matriz Jacobiana no plano real (a) e no plano complexo (b) do sistema teste IEEE 30-barras.	40
Figura 5 – Estrutura de esparsidade da matriz Jacobiana no plano real (a) e no plano complexo (b) do sistema teste IEEE 57-barras.	41
Figura 6 – Estrutura de esparsidade da matriz Jacobiana no plano real (a) e no plano complexo (b) do sistema teste IEEE 118-barras.	41
Figura 7 – Estrutura de esparsidade da matriz Jacobiana no plano real (a) e no plano complexo (b) do sistema brasileiro SIN 1916-barras.	42
Figura 8 – IEEE-14 Barras: perfil de tensão e ângulo.	45
Figura 9 – IEEE-30 Barras: perfil de tensão e ângulo.	45
Figura 10 – IEEE-57 Barras: perfil de tensão e ângulo.	46
Figura 11 – IEEE-118 Barras: perfil de tensão e ângulo.	46
Figura 12 – SIN-1916 Barras: perfil de tensão e ângulo.	47
Figura 13 – IEEE-11 Barras: diagrama monofásico.	49
Figura 14 – IEEE-11 barras: variáveis de estado sob primeiro cenário.	50
Figura 15 – IEEE-11 barras: evolução do máximo mismatch sob primeiro cenário.	50
Figura 16 – IEEE-11 barras: variáveis de estado sob segundo cenário.	51
Figura 17 – IEEE-11 barras: evolução do máximo mismatch sob segundo cenário.	51
Figura 18 – IEEE-43 barras: variáveis de estado.	53
Figura 19 – IEEE-43 barras: evolução do máximo mismatch.	53

Lista de tabelas

Tabela 1 – Especificações das Barras.	35
Tabela 2 – Especificações das Linhas.	36
Tabela 3 – Vetor de correção.	37
Tabela 4 – Variáveis de Estado.	38
Tabela 5 – Vetor de <i>Mismatches</i>	38
Tabela 6 – Resultados Fluxo de Potência CV	38
Tabela 7 – Propriedades dos sistemas bem condicionados	39
Tabela 8 – Análise Numérica e de Esparsidade	43
Tabela 9 – Diferença máxima entre variáveis de estados resultantes e sua localização	44
Tabela 10 – Propriedades dos sistemas mal condicionados	47
Tabela 11 – Análise Numérica	48
Tabela 12 – IEEE-11 Barras - variáveis de estado e injeções de potência. . .	52
Tabela 13 – IEEE-11 Barras - dados das barras.	57
Tabela 14 – IEEE-11 Barras - dados dos ramos.	58
Tabela 15 – IEEE-43 Barras - dados das barras.	59
Tabela 16 – IEEE-43 Barras - dados dos ramos.	60

Lista de abreviaturas e siglas

CV	Complex-Valued
CV-LMPFA	Complex-Valued Levenberg-Marquardt Power Flow
CV-NRPFA	Complex-Valued Newton-Raphson Power Flow
CV-PFA	Complex-Valued Power Flow Analysis
FACTS	Flexible AC Transmissions System
HVDC	High-Voltage Direct Current
IEEE	Instituto de Engenheiros Eletricistas e Eletrônicos
LM	Levenberg-Marquardt
NR	Newton-Raphson
OLTC	On-Load-Tap-changer
PFA	Power Flow Analysis
PSSE	Power System State Estimation
RV	Real-Valued
RV-LMPFA	Real-Valued Levenberg-Marquardt Power Flow Analysis
RV-NRPFA	Real-Valued Newton-Raphson Power Flow Analysis
RV-OMPFA	Real-Valued Newton-Raphson with Optimal Multiplier Power Flow Analysis
RV-PFA	Real-Valued Power Flow Analysis
SIN	Sistema Interligado Nacional
VSC	Voltage-Source Converter

Lista de símbolos

x	Variável de estado complexa
x^*	Variável de estado complexa conjugada
$\Re\{\cdot\}$	Parte real de uma variável complexa
$\Im\{\cdot\}$	Parte imaginária de uma variável complexa
\mathbf{J}	Matriz Jacobiana no plano complexo
\underline{x}_c	Vetor de variáveis de estado no sistema de coordenadas conjugadas
\underline{M}	Vetor de mismatches em valores complexos
$\ \cdot\ ^2$	Quadrado da norma Euclidiana
$\ \cdot\ _\infty$	Norma infinita
η_ν	Parâmetro de regularização de Levenberg-Marquardt

Sumário

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	Considerações Iniciais	14
1.2	Organização do trabalho	15
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	16
2.1	Diferenciabilidade de Funções de Variáveis Complexas	16
2.2	Cálculo de Wirtinger ou <i>CR-Calculus</i>	17
3	ANÁLISE DE FLUXO DE POTÊNCIA NO PLANO COM- PLEXO	21
3.1	Equação Nodal	21
3.2	Equações de Fluxo de Potência no Plano Complexo	22
3.3	Cálculo de Wirtinger Aplicado às Equações de Fluxo de po- tência	22
3.4	Modelos de Barras	25
3.4.1	Barra Slack	25
3.4.2	Barra PQ	25
3.4.3	Barra PV	26
3.4.4	Barra PQV	28
3.5	Solução Iterativa	29
3.5.1	O Algoritmo Levenberg-Marquardt de Quarta Ordem Aplicado ao CV-PFA	29
3.5.2	Estrutura da Matriz Jacobinana	33
4	RESULTADOS NUMÉRICOS	35
4.1	Pequeno exemplo: CV-PFA	35
4.2	Sistemas bem condicionados: sistemas teste IEEE e sistema real brasileiro	39
4.3	Sistemas mal condicionados ou insolúveis: sistemas teste IEEE	47
4.3.1	Sistema teste IEEE-11 Barras	49

4.3.2	Sistema teste IEEE-43 Barras	52
4.4	Conclusões Parciais	52
5	CONCLUSÕES GERAIS	55
5.1	Artigo sob Revisão	55
	APÊNDICES	56
	APÊNDICE A –	
	SISTEMAS MAL CONDICIONADOS	57
A.1	Sistema IEEE-11 Barras	57
A.2	Sistema IEEE-43 Barras	58
	REFERÊNCIAS	61

1 Introdução

1.1 Considerações Iniciais

A solução numérica dos aplicativos de análise de redes em sistemas elétricos de potência é usualmente desenvolvida no domínio de números reais. Como exemplos clássicos, citam-se a Análise de Fluxo de Potência (PFA - Power Flow Analysis) e o Estimador de Estados em Sistemas de Potência (PSSE - Power System State Estimator), entre outros. Apesar da prática usual dos algoritmos de solução numérica de sistemas de equações algébricas lineares e não-lineares serem derivados no domínio de números reais, esta estratégia não é a representação natural de fasores de tensão e corrente, que sobejamente são grandezas que emergem do plano complexo [1].

Na literatura técnica recente, várias propostas de algoritmos iterativos e não-iterativos derivados no plano complexo podem ser encontradas. Como exemplos citam-se [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8] para métodos iterativos e [9, 10] para métodos não-iterativos. A análise de fluxo de potência no domínio complexo é abordado por Wang [2, 3, 4, 5] e por Nguyen e Vu [8]. Este último não contém o registro de que a contribuição fizera uso do cálculo de Wirtinger [11]. Além das aplicações em sistemas de potência, destacam-se ainda outras aplicações recentes em processamento de sinais [12, 13, 14, 15, 16], teoria de controle, redes neurais [17], biomedicina, entre muitas outras. Basicamente, todas as aplicações ora mencionadas fazem uso da principal propriedade do cálculo de Wirtinger, ou seja, se uma função de variável complexa é analítica no espaço vetorial real, isto é, $\Re\{f(x)\}$ e $\Im\{f(x)\}$ são diferenciáveis, então esta mesma função é analítica no plano complexo, isto é: $f(x, x^*)$ é analítica ou holomorfa. Destaca-se que a notação (x, x^*) é conhecida como sistema de coordenadas conjugadas ou simplesmente referida como *CR - Calculus*.

Este trabalho acadêmico objetiva dissertar sobre o comportamento do algoritmo de Levenberg-Marquardt de ordem superior quando aplicado ao problema de fluxo de potência em redes numericamente bem e mal condicionadas. Para as

redes numericamente bem condicionadas, seu desempenho será comparado ao desempenho do algoritmo de Newton-Raphson clássico [18], derivado nos domínios de números reais (em coordenadas polares e retangulares) e complexo (somente em coordenadas retangulares), ambos tomados como referência para a análise comparativa pretendida. Por outro lado, para as redes numericamente mal condicionadas, o algoritmo tomado como referência é baseado no multiplicador otimizado de Iwamoto [19, 20, 21]. Este último, derivado somente no espaço vetorial de números reais, em coordenadas retangulares.

Como principais características do algoritmo proposto neste trabalho comparadas àquelas dos algoritmos tradicionais, citam-se: i) a matriz Jacobiana possui propriedades de esparsidade mais atraentes; ii) o algoritmo proposto é naturalmente formulado em coordenadas retangulares; iii) ele possui maior robustez numérica quando a rede elétrica é significativamente estressada em termos de carregamento ou apresenta ramos com elevada relação R/X [4, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26]; iv) apresenta a propriedade de convergência biquadrática [27, 28], que é claramente superior à taxa de convergência quadrática do algoritmo de Newton-Raphson. Adicionalmente, outras contribuições sobre as questões mencionadas anteriormente podem ser encontradas em [29, 30, 31].

1.2 Organização do trabalho

A fundamentação teórica da proposta é baseada no Cálculo de Wirtinger conforme se apresenta no Capítulo 2. No Capítulo 3 os modelos de barras são derivados da maneira como são aplicados na análise de fluxo de potência, bem como no modelo de Levenberg-Marquardt de ordem superior no plano complexo, incluindo a matriz Jacobiana correspondente. O Capítulo 4 mostra a operacionalização do algoritmo proposto fazendo uso de um pequeno exemplo numérico seguido de várias simulações em sistemas testes bem, mal condicionados ou sem solução do IEEE-11; -14; -30; -43; -57 e -118 barras, além de um sistema real de 1916-barras que é um equivalente extraído do Sistema Interligado Nacional referido como SIN-1916. Por fim, no Capítulo 5 registram-se as conclusões mais relevantes do trabalho.

2 Fundamentação Teórica

2.1 Diferenciabilidade de Funções de Variáveis Complexas

Uma função complexa é definida como sendo

$$f(x) = u(a, b) + j v(a, b), \quad (2.1)$$

onde $x = a + j b$; $u(a, b)$ e $v(a, b)$ são funções reais, $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Geralmente, as funções como definidas em (2.1) são funções complexas, porém podem ser funções reais em alguns casos. Por exemplo, cita-se a função custo que é usualmente uma função quadrática do erro em problemas de otimização, isto é: $J(|\mathbf{e}^2|)$. A definição de diferenciabilidade de funções de variáveis complexas requer que as derivadas sejam expressas como sendo o limite independente da direção na qual Δx se aproxima de 0 no plano complexo, tal como

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (2.2)$$

Para isto, as condições de Cauchy-Riemann devem ser satisfeitas, ou seja:

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial v}{\partial b}, \quad \frac{\partial v}{\partial a} = -\frac{\partial u}{\partial b}. \quad (2.3)$$

Estas são as condições necessárias e suficientes para que a função $f(x)$ seja diferenciável no plano complexo. Se as funções reais $u(a, b)$ e $v(a, b)$ são contínuas por todo seu domínio, então as derivadas parciais dessas funções também o serão. Assim sendo, a função complexa $f(x)$ é uma função analítica ou também denominada de função holomorfa [32]. Como exemplo considere $f(x) = x^2$ uma função complexa, sendo $x = a + j b$. Logo,

$$f(x) = x^2 = \underbrace{a^2 - b^2}_{=u} + j \underbrace{2ab}_{=v} = y,$$

que sob a regra de derivadas de uma função multi-variável, resulta

$$\frac{\partial u}{\partial a} = 2a = \frac{\partial v}{\partial b} = 2a; \quad \frac{\partial u}{\partial b} = -2b = -\left(\frac{\partial v}{\partial a} = 2b\right).$$

Esses resultados mostram que as equações de Cauchy-Riemann se satisfazem e, portanto, $f(x) = y = x^2$ é uma função analítica ou holomorfa.

2.2 Cálculo de Wirtinger ou *CR-Calculus*

Introduzido por Wilhelm Wirtinger em 1927 [11], o Cálculo de Wirtinger também é conhecido como *CR-Calculus*. Esta metodologia permite contornar o problema de funções de variáveis complexas não-analíticas ou não-holomorfas. No entanto, a metodologia desenvolvida por Wirtinger somente é aplicável às funções $f(x)$ como expressas em (2.1), se e somente se, as funções reais $u(a, b)$ e $v(a, b)$ forem diferenciáveis em ordem a a e b , resultando em

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x}. \quad (2.4)$$

Dado que as seguintes relações de funções são válidas:

$$a = \frac{(x + x^*)}{2}, \quad \partial a = \frac{(\partial x + \partial x^*)}{2}, \quad (2.5)$$

$$b = j \frac{(x^* - x)}{2}, \quad \partial b = j \frac{(\partial x^* - \partial x)}{2}, \quad (2.6)$$

e definindo $\frac{\partial x^*}{\partial x}$ como zero, então a seguinte equivalência de funções pode ser estabelecida:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial a} - j \frac{\partial f}{\partial b} \right). \quad (2.7)$$

Observe que as condições de Cauchy-Riemann para que $f(\cdot)$ seja analítica em x podem ser expressas de maneira compacta utilizando a definição de gradiente, i.é, $\frac{\partial f}{\partial x^*} = 0$, ou ainda, $f(\cdot)$ é função somente de x .

Similarmente, quando se toma a derivada de $f(\cdot)$ em ordem a x^* , isto é:

$$\frac{\partial f}{\partial x^*} = \frac{\partial f}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x^*} + \frac{\partial f}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x^*}. \quad (2.8)$$

Ao definir $\frac{\partial x}{\partial x^*}$ como zero, obtém-se

$$\frac{\partial f}{\partial x^*} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial a} + j \frac{\partial f}{\partial b} \right). \quad (2.9)$$

Analogamente, as condições de Cauchy-Riemann para que $f(\cdot)$ seja analítica em x^* podem ser igualmente expressas de maneira compacta utilizando a definição de gradiente, i.é, $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, ou seja, $f(\cdot)$ é função somente de x^* .

Diante do exposto nas equações (2.8-2.9) pode-se concluir que o operador gradiente (analogamente, gradiente conjugado) age como a derivada parcial da função em ordem a x (analogamente, a x^*), tratando x^* (analogamente, x) como uma constante. Analiticamente, tem-se

$$\frac{\partial f(x_c)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, x^*)}{\partial x} \Big|_{x^*=Const} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial a} - j \frac{\partial f}{\partial b} \right), \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial f(x_c)}{\partial x^*} = \frac{\partial f(x, x^*)}{\partial x^*} \Big|_{x=Const} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial a} + j \frac{\partial f}{\partial b} \right). \quad (2.11)$$

Assim sendo, considere como exemplo a função:

$$f(x_c) = f(x, x^*) = x^* x = \|x\|^2 = a^2 + b^2,$$

ou seja, uma função real escalar de variável complexa, cujo valor é o quadrado da distância Euclidiana da variável, $x = a + j b$, em relação origem do sistema de coordenadas cartesianas. Logo, a verificação das condições de Cauchy-Riemann, resulta:

$$f(x_c) = f(x, x^*) = x^* x = \underbrace{a^2 + b^2}_{=u} + j \underbrace{(ab - ab)}_{0=v} = y.$$

Dado que na verificação mostrada acima, $v = 0$, conclui-se que as equações de Cauchy-Riemann não se satisfazem. Portanto, $f(x_c) = f(x, x^*) = x^* x$ é uma função não-analítica, ou não-holomorfa.

Para contornar esta aparente dificuldade, ao se aplicar o Cálculo de Wirtinger, resulta:

$$\frac{\partial f(x_c)}{\partial x} = x^*; \quad \frac{\partial f(x_c)}{\partial x^*} = x,$$

o que sugere a interpretação geométrica mostrada na Fig. 1.

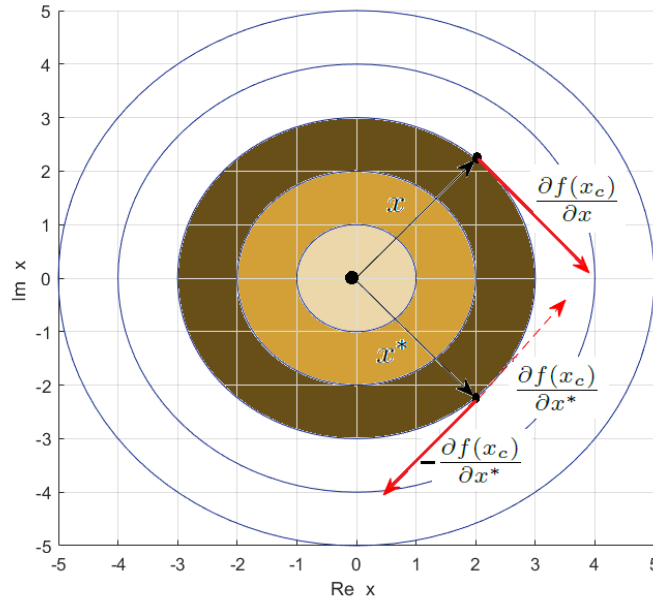


Figura 1 – Gráfico de contornos da função real escalar de variável complexa.

Sua análise permite inferir que:

1. Os círculos ou contornos da função $f(\cdot)$ apresentados na figura representam o escalar $a^2 + b^2$, que é o quadrado da distância Euclidiana da função. Então, ao imaginarmos a existência de um terceiro eixo centrado na origem do plano complexo, os contornos ou círculos descrevem a figura de um parabolóide;
2. A direção de máxima taxa de variação da função objetivo é dada pelo gradiente conjugado definido em (2.11). Observe que sua direção positiva aponta para o máximo da função (seta tracejada) enquanto que a direção oposta mostra o mínimo da função custo, usualmente, a minimização de erros. Esta peculiaridade especial do cálculo de Wirtinger vai permitir explorar sua aplicação vantajosa à família dos algoritmos baseados no método do gradiente conjugado [33].

Finalmente, há de se registrar que quando o Cálculo de Wirtinger for estendido ao espaço vetorial, i.é, caso de multivariáveis, as regras básicas para o caso escalar permanecem inalteradas.

3 Formulação do Problema de Fluxo de Potência no Plano Complexo

Neste capítulo é apresentado a derivação de um fluxo de potência no plano complexo (complex-valued power flow analysis - CV-PFA), derivado diretamente do trabalho de Wirtinger [11], em contraste com a abordagem dada em [6, 7]. Primeiramente, toda a modelagem do fluxo de potência começa baseada na clássica equação nodal como apresentada em [34]. Numa segunda abordagem o modelo analítico é derivado através das equações gerais de fluxo de potência. A razão principal para esta última opção é o modelo de transformadores com tap fora da posição nominal, incluindo deslocadores de fase [35, 36]. Discussões adicionais sobre esta questão são abordadas ao longo da derivação das abordagens.

3.1 Equação Nodal

Esta abordagem requer construir a matriz nodal de admitância, e.g.,

$$\underline{I} = \mathbf{Y}_{\text{bus}} \underline{V}, \quad (3.1)$$

portanto a potência nodal complexa pode ser expressa como

$$\underline{S} = \text{diag}(\underline{V}) \underline{I}^*, \quad (3.2)$$

ou

$$\underline{S} = \text{diag}(\underline{V}) \mathbf{Y}_{\text{bus}}^* \underline{V}^*. \quad (3.3)$$

Assim, a potência nodal complexa na barra k , i.é, S_k , é dada por

$$S_k = V_k Y_{kk}^* V_k^* + V_k \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq k}}^N Y_{km}^* V_m^*, \quad (3.4)$$

onde $N + 1$ é o número de nós da rede, e o nó 0 é atribuído como o nó *slack*.

3.2 Equações de Fluxo de Potência no Plano Complexo

As equações de fluxo de potência no plano complexo que modelam qualquer tipo de ramo em uma rede elétrica, i.é, incluindo linhas de transmissão e transformadores de fase e de deslocamento de fase, são como abaixo:

$$S_{km} = V_k \left(\frac{y_{km}^*}{a_{km} a_{km}^*} - j b_{km}^{sh} \right) V_k^* - V_k \frac{y_{km}^*}{a_{km}^*} V_m^*, \quad (3.5)$$

$$S_{mk} = V_m (y_{km}^* - j b_{km}^*) V_m^* - V_m \frac{y_{km}^*}{a_{km}} V_k^*. \quad (3.6)$$

e

$$S_{km}^* = V_k^* \left(\frac{y_{km}}{a_{km}^* a_{km}} + j b_{km}^{sh} \right) V_k - V_k^* \frac{y_{km}}{a_{km}} V_m, \quad (3.7)$$

$$S_{mk}^* = V_m^* (y_{km} + j b_{km}^{sh}) V_m - V_m^* \frac{y_{km}}{a_{km}^*} V_k. \quad (3.8)$$

No grupo de equações (3.5-3.8), o modelo geral de transformador de tap fora do nominal é composto por um transformador ideal com relação complexa de espiras $ae^{j\omega} : 1$ em série com sua admitância e impedância [35]. Note que este grupo de equações são derivadas em coordenadas retangulares.

3.3 Cálculo de Wirtinger Aplicado às Equações de Fluxo de potência

Primeiramente, assumamos que as injeções complexas de potência, S_k e S_m , sejam iguais aos fluxos de potência S_{km} e S_{mk} , respectivamente. Então, aplicando-se o cálculo de Wirtinger à equação complexa de fluxo de potência dada por (3.5), temos:

$$\left. \frac{\partial S_k}{\partial V_k} \right|_{V_k^* = \text{Const}} = \left(\frac{y_{km}^*}{a_{km} a_{km}^*} - j b_{km}^{sh} \right) V_k^* - \frac{y_{km}^*}{a_{km}^*} V_m^*, \quad (3.9)$$

$$\left. \frac{\partial S_k}{\partial V_k^*} \right|_{V_k = \text{Const}} = V_k \left(\frac{y_{km}^*}{a_{km} a_{km}^*} - j b_{km}^{sh} \right), \quad (3.10)$$

$$\left. \frac{\partial S_k}{\partial V_m} \right|_{V_m^* = \text{Const}} = 0.0, \quad (3.11)$$

$$\left. \frac{\partial S_k}{\partial V_m^*} \right|_{V_m = \text{Const}} = -V_k \frac{y_{km}^*}{a_{km}^*}, \quad (3.12)$$

$$\left. \frac{\partial S_k}{\partial a_{km}} \right|_{a_{km}^* = \text{Const}} = -V_k \left(\frac{y_{km}^*}{a_{km}^2 a_{km}^*} \right) V_k^*, \quad (3.13)$$

$$\left. \frac{\partial S_k}{\partial a_{km}^*} \right|_{a_{km} = \text{Const}} = -V_k \left(\frac{y_{km}^*}{a_{km} (a_{km}^*)^2} \right) V_k^* + V_k \frac{y_{km}^*}{(a_{km}^*)^2} V_m^*. \quad (3.14)$$

e por (3.6) temos

$$\left. \frac{\partial S_m}{\partial V_m} \right|_{V_m^* = \text{Const}} = \left(y_{km}^* - j b_{km}^{sh} \right) V_m^* - \frac{y_{km}^*}{a_{km}} V_k^*, \quad (3.15)$$

$$\left. \frac{\partial S_m}{\partial V_m^*} \right|_{V_m = \text{Const}} = V_m \left(y_{km}^* - j b_{km}^{sh} \right), \quad (3.16)$$

$$\left. \frac{\partial S_m}{\partial V_k} \right|_{V_k^* = \text{Const}} = 0.0, \quad (3.17)$$

$$\left. \frac{\partial S_m}{\partial V_k^*} \right|_{V_k = \text{Const}} = -V_m \frac{y_{km}^*}{a_{km}}, \quad (3.18)$$

$$\left. \frac{\partial S_m}{\partial a_{km}} \right|_{a_{km}^* = \text{Const}} = V_m \frac{y_{km}^*}{a_{km}^2} V_k^*, \quad (3.19)$$

$$\left. \frac{\partial S_m}{\partial a_{km}^*} \right|_{a_{km} = \text{Const}} = 0.0. \quad (3.20)$$

e por (3.7) temos

$$\left. \frac{\partial S_k^*}{\partial V_k} \right|_{V_k^*=Const} = V_k^* \left(\frac{y_{km}}{a_{km}^* a_{km}} + j b_{km}^{sh} \right), \quad (3.21)$$

$$\left. \frac{\partial S_k^*}{\partial V_k^*} \right|_{V_k=Const} = \left(\frac{y_{km}}{a_{km}^* a_{km}} + j b_{km}^{sh} \right) V_k - \frac{y_{km}}{a_{km}} V_m, \quad (3.22)$$

$$\left. \frac{\partial S_k^*}{\partial V_m} \right|_{V_m^*=Const} = - V_k^* \frac{y_{km}}{a_{km}}, \quad (3.23)$$

$$\left. \frac{\partial S_k^*}{\partial V_m^*} \right|_{V_m=Const} = 0.0, \quad (3.24)$$

$$\left. \frac{\partial S_k^*}{\partial a_{km}} \right|_{a_{km}^*=Const} = - V_k^* \left(\frac{y_{km}}{a_{km}^* a_{km}^2} \right) V_k + V_k^* \frac{y_{km}}{a_{km}^2} V_m, \quad (3.25)$$

$$\left. \frac{\partial S_k^*}{\partial a_{km}^*} \right|_{a_{km}=Const} = - V_k^* \left(\frac{y_{km}}{(a_{km}^*)^2 a_{km}} \right) V_k. \quad (3.26)$$

e finalmente por (3.8) temos

$$\left. \frac{\partial S_m^*}{\partial V_k} \right|_{V_k^*=Const} = - V_m^* \frac{y_{km}}{a_{km}^*}, \quad (3.27)$$

$$\left. \frac{\partial S_m^*}{\partial V_k^*} \right|_{V_k=Const} = 0.0, \quad (3.28)$$

$$\left. \frac{\partial S_m^*}{\partial V_m} \right|_{V_m^*=Const} = V_m^* \left(y_{km} + j b_{km}^{sh} \right), \quad (3.29)$$

$$\left. \frac{\partial S_m^*}{\partial V_m^*} \right|_{V_m=Const} = \left(y_{km} + j b_{km}^{sh} \right) V_m - \frac{y_{km}}{a_{km}^*} V_k, \quad (3.30)$$

$$\left. \frac{\partial S_m^*}{\partial a_{km}} \right|_{a_{km}^*=Const} = 0.0, \quad (3.31)$$

$$\left. \frac{\partial S_m^*}{\partial a_{km}^*} \right|_{a_{km}=Const} = V_m^* \frac{y_{km}}{(a_{km}^*)^2} V_k. \quad (3.32)$$

3.4 Modelos de Barras

3.4.1 Barra Slack

A tensão complexa na barra *slack* é conhecida, uma vez que sua magnitude e ângulo de fase são valores especificados para a barra de referência.

3.4.2 Barra PQ

Com a demanda de potência ativa e reativa especificadas para um nó PQ , pode-se expressar as seguintes funções de mismatches complexos

$$M_k = S_k - (P_{ks} + j Q_{ks}), \quad (3.33)$$

$$M_k^* = S_k^* - (P_{ks} - j Q_{ks}), \quad (3.34)$$

onde P_{ks} e Q_{ks} são as injeções de potência ativa e reativa especificadas em um nó k , respectivamente.

Visando derivar o algoritmo de Newton-Raphson no domínio complexo, os elementos da matriz Jacobiana na forma complexa correspondentes a cada barra PQ são formados baseados nas derivadas de M_k e M_k^* com respeito às magnitudes das tensões nodais complexas e complexa conjugadas, obtendo-se

$$\left. \frac{\partial M_k}{\partial V_k} \right|_{V_k^* = Const} = \sum_{m \in \Omega_k}^N \left. \frac{\partial S_k}{\partial V_k} \right|_{V_k^* = Const}, \quad (3.35)$$

$$\left. \frac{\partial M_k}{\partial V_k^*} \right|_{V_k = Const} = \sum_{m \in \Omega_k}^N \left. \frac{\partial S_k}{\partial V_k^*} \right|_{V_k = Const}, \quad (3.36)$$

$$\left. \frac{\partial M_k}{\partial V_m} \right|_{V_m^* = Const} = 0.0, \quad (3.37)$$

$$\left. \frac{\partial M_k}{\partial V_m^*} \right|_{V_m = Const} = \sum_{m \in \Omega_k}^N \left. \frac{\partial S_k}{\partial V_m^*} \right|_{V_m = Const}, \quad (3.38)$$

e

$$\left. \frac{\partial M_k^*}{\partial V_k} \right|_{V_k^* = Const} = \sum_{m \in \Omega_k} \left. \frac{\partial S_k^*}{\partial V_k} \right|_{V_k^* = Const}, \quad (3.39)$$

$$\left. \frac{\partial M_k^*}{\partial V_k^*} \right|_{V_k = Const} = \sum_{m \in \Omega_k} \left. \frac{\partial S_k^*}{\partial V_k^*} \right|_{V_k = Const}, \quad (3.40)$$

$$\left. \frac{\partial M_k^*}{\partial V_m} \right|_{V_m^* = Const} = \sum_{m \in \Omega_k} \left. \frac{\partial S_k^*}{\partial V_m} \right|_{V_m = Const}, \quad (3.41)$$

$$\left. \frac{\partial M_k^*}{\partial V_m^*} \right|_{V_m = Const} = 0.0. \quad (3.42)$$

onde Ω_k em (3.35-3.42) é o conjunto de barramentos vizinhos conectados à barra k e N é o número total de barras. Além do mais, em (3.37-3.38) e (3.41-3.42), $m \neq 0$ e $m \neq k$. Ressaltamos que o lado direito de (3.40) é a corrente complexa nodal no nó k enquanto que o lado direito de (3.35) é o complexo conjugado da corrente nodal no nó k .

3.4.3 Barra PV

Como a geração de potência ativa e a magnitude da tensão terminal em uma barra PV são ambas especificadas, i.é, P_{ks} e V_{ks} , respectivamente, a soma de M_k em (3.33) com M_k^* em (3.34) resulta na função residual complexa M_{kg} , que é relacionado com a restrição de potência ativa:

$$M_{kg} = M_k + M_k^*, \quad (3.43)$$

$$= S_k + S_k^* - 2 \times P_{ks}.$$

A segunda função residual complexa E_{kg} para um nó gerador k é dada usando a restrição de magnitude da tensão dada por

$$|E_{kg}| = |V_k|^2 - |V_{ks}|^2, \quad (3.44)$$

onde $|V_{ks}|$ é a magnitude da tensão especificada para o nó k .

Como $|V_k|^2 = V_k V_k^*$, (3.44) pode ser expressa no domínio complexo como

$$\begin{aligned} E_{kg} &= V_k V_k^* - |V_{ks}|^2, \\ &= e_k^2 + f_k^2 - |V_{ks}|^2, \end{aligned} \quad (3.45)$$

onde e_k e f_k são, respectivamente, a parte real e imaginária de V_k . Portanto vale notar que a derivação da atual formulação no plano complexo é como o da formulação retangular no plano real, i.é, se requer uma equação extra para cada barra PV no sistema devido à necessidade de se manter a magnitude da tensão especificada (3.45). Conseqüentemente, a formulação retangular tem um maior número de equações e variáveis em relação à formulação polar relativo ao número de barras PVs no sistema. Então os elementos da matriz jacobiana associados com um nó gerador k são obtidos ao tomar as derivadas parciais das funções residuais complexas em (3.43) e (3.45) com respeito a V_k e V_k^* , obtendo-se

$$\left. \frac{\partial M_{kg}}{\partial V_k} \right|_{V_k^*=Const} = \left. \frac{\partial M_k}{\partial V_k} \right|_{V_k^*=Const} + \left. \frac{\partial M_k^*}{\partial V_k} \right|_{V_k^*=Const}, \quad (3.46)$$

$$\left. \frac{\partial M_{kg}}{\partial V_k^*} \right|_{V_k=Const} = \left. \frac{\partial M_k}{\partial V_k^*} \right|_{V_k=Const} + \left. \frac{\partial M_k^*}{\partial V_k^*} \right|_{V_k=Const}, \quad (3.47)$$

$$\left. \frac{\partial M_{kg}}{\partial V_m} \right|_{V_m^*=Const} = \left. \frac{\partial M_k}{\partial V_m} \right|_{V_m^*=Const} + \left. \frac{\partial M_k^*}{\partial V_m} \right|_{V_m^*=Const}, \quad (3.48)$$

$$\left. \frac{\partial M_{kg}}{\partial V_m^*} \right|_{V_m=Const} = \left. \frac{\partial M_k}{\partial V_m^*} \right|_{V_m=Const} + \left. \frac{\partial M_k^*}{\partial V_m^*} \right|_{V_m=Const}, \quad (3.49)$$

onde em (3.48-3.49), $m \neq 0$ e $m \neq k$. Além disso, note que o lado direito das equações (3.46-3.49) é definido em (3.35-3.42). Por outro lado, as derivadas parciais de E_{kg} em (3.45) com respeito a V_k e V_k^* são expressas como

$$\left. \frac{\partial E_{kg}}{\partial V_k} \right|_{V_k^*=Const} = V_k^*, \quad (3.50)$$

$$\left. \frac{\partial E_{kg}}{\partial V_k^*} \right|_{V_k=Const} = V_k, \quad (3.51)$$

e as derivadas parciais com respeito a V_m e V_m^* são dadas por

$$\left. \frac{\partial E_{kg}}{\partial V_m} \right|_{V_m^*=Const} = 0.0, \text{ for } m \neq 0 \text{ and } m \neq k, \quad (3.52)$$

$$\left. \frac{\partial E_{kg}}{\partial V_m^*} \right|_{V_m=Const} = 0.0, \text{ for } m \neq 0 \text{ and } m \neq k, \quad (3.53)$$

3.4.4 Barra PQV

Este tipo de barra se refere ao modelo de comutador de derivação em carga (*On-Load-Tap-Changer - OLTC*), que pode ser um transformador de fase para regulação de tensão em barras locais e próximas ou um transformador de mudança de fase para controlar a potência ativa transmitida sobre uma linha [37]. Também se encaixa ao modelar uma conexão DC de um conversor de fonte de tensão [38, 39]. Como as demandas de potência ativa e reativa são especificadas, as funções complexas de mismatches, como declaradas em (3.33) e (3.34), são empregadas. No entanto, vale lembrar que a posição do tap do *OLTC* nos permite regular a magnitude da tensão seja da barra k seja da m . Assuma que a tensão da barra m será regulada, obtemos as seguintes funções de mismatches:

$$M_m = a_{km} - a_{km}^* - 2 \times \Im\{a_{km}\}, \quad (3.54)$$

$$E_m = V_m V_m^* - |V_{m_s}|^2, \quad (3.55)$$

Aqui $\Im\{a_{km}\}$ é a parte imaginária do valor complexo especificado do tap, e.g., para um transformador de fase, tem-se $\Im\{a_{km}\} = 0.0$; caso contrário, tem-se um transformador de deslocamento de fase e, ao invés de (3.54), (3.43) é usada. Em (3.55), V_{m_s} é a tensão especificada no nó m , i.é, a tensão nodal regulada. Logo, obtemos as derivadas parciais de (3.54) e (3.55) dadas por

$$\left. \frac{\partial M_m}{\partial a_{km}} \right|_{a_{km}^* = Const} = 1.0, \quad (3.56)$$

$$\left. \frac{\partial M_m}{\partial a_{km}^*} \right|_{a_{km} = Const} = -1.0, \quad (3.57)$$

e

$$\left. \frac{\partial E_m}{\partial V_m} \right|_{V_m^* = Const} = V_m^*, \quad (3.58)$$

$$\left. \frac{\partial E_m}{\partial V_m^*} \right|_{V_m = Const} = V_m. \quad (3.59)$$

Quando (3.43) é usada, as correspondentes derivadas parciais são as definidas em (3.13-3.14) e (3.25-3.26).

3.5 Solução Iterativa

3.5.1 O Algoritmo Levenberg-Marquardt de Quarta Ordem Aplicado ao CV-PFA

Quando a barra *slack* é excluída, o vetor de variáveis de estados composto se torna

$$\underline{\mathbf{x}}_c = [V_1, V_2, \dots, V_{N-1}, V_1^*, V_2^*, \dots, V_{N-1}^*]^T, \quad (3.60)$$

e o vetor de mismatches se reduz a

$$\underline{M}(\underline{\mathbf{x}}_c) = [M_1, M_2, \dots, M_{N-1}, M_1^*, M_2^*, \dots, M_{N-1}^*]^T. \quad (3.61)$$

Caso o nó k (para $k = 1, 2, \dots, N - 1$) seja uma barra PV ou uma PQV, o par de elementos M_k e M_k^* em (3.61) são substituídos por M_{kg} e E_{kg} como em (3.43) e (3.45) ou substituídos por M_m e E_m como em (3.54) e (3.55), respectivamente. Aqui, o objetivo é calcular $\underline{\mathbf{x}}_c$ que satisfaça

$$\underline{M}(\underline{\mathbf{x}}_c) = 0. \quad (3.62)$$

No estado da arte da análise numérica, muitas propostas podem ser encontradas visando resolver sistemas de equações não lineares mal condicionadas, como em [40, 41, 42, 43, 44], para citar alguns. Na análise de sistemas de potência, os métodos de Brown e de Brent tem sido aplicado para resolver sistemas mal condicionados [23, 24, 25, 26, 21, 45]. No entanto, em [4] pesquisadores têm empregado a proposta de Yang [28], que é baseada no algoritmo Levenberg-Marquardt, que geralmente é derivado para problemas de otimização [15].

Após checar incansavelmente a robustez numérica apresentada em [27, 28, 46, 47], fazendo uso de equações de sistemas não lineares no domínio real, como as funções teste de Rosebrok, Brown 1 e 2, Brown-Conte e de Powell extraídos de [44], o algoritmo proposto por Fan [27] e por Yang [28] tem apresentado a melhor performance e facilidade de implementação. Neste trabalho, a proposta de Yang é apresentada e aplicada ao CV-PFA. No entanto, como o objetivo é aumentar a robustez numérica, assume-se o formato de equação de Barel [15] uma vez que é baseado na Jacobiana ao invés da matriz Ganho como relatado em [28], que visava principalmente acelerar a busca de uma solução.

Vale lembrar que a ideia principal da proposta de Yang é melhorar o condicionamento da matriz de coeficientes durante as atualizações dos estados no decorrer dos processos iterativos, i.é

$$\Delta \mathbf{x}_c^{(\nu)} = - \begin{pmatrix} \mathbf{J}^{(\nu)} \\ \sqrt{\eta_\nu} I \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} \mathbf{M}(\mathbf{x}_c^{(\nu)}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.63)$$

onde \mathbf{J} é a matriz Jacobiana no plano complexo; \mathbf{I} é a matriz identidade de dimensão $2n \times 2n$; o operador $(\cdot)^\dagger$ é definido como a pseudo-inversa de Moore-Penrose [48]; $\eta_\nu > 0$ é o parâmetro de regularização de Levenberg-Marquardt (LM) que influencia na extensão e na direção das correções a serem aplicadas nas variáveis de estado a cada iteração visando acelerar o alcance da solução. Como mostrado na Fig. 1, a direção do caminho da solução é definida por $-\frac{\partial f(x_c)}{\partial x^*}$, i.é, a direção oposta do gradiente conjugado complexo. Este importante recurso será explorado em problemas de fluxo de potência e também em estimação de estados de sistemas de potência. Atualmente, estas investigações são a motivação parcial para futuros trabalhos.

Perceba que se $\eta_\nu = 0$ no primeiro passo de LM, dado por (3.63), então o algoritmo de LM se torna o clássico método Newton-Raphson. Mas no caso do LM, calcula-se

$$\eta_\nu = \mu_\nu \left\| \underline{M} \left(\underline{x}_c^{(\nu)} \right) \right\|^\delta, \quad (3.64)$$

onde o valor inicial de $\mu_{(\nu=1)}$ é normalmente definido como 10^{-5} e δ é escolhido dentro de um intervalo entre $1 \leq \delta \leq 2$, sendo $\delta = 1$ um valor recomendado [28].

Agora, ao invés de utilizarmos somente um passo LM como apresentado em (3.63), dois passos aproximados adicionais são computados utilizando a mesma matriz Jacobiana. O segundo passo de correção portanto é

$$\Delta \underline{y}_c^{(\nu)} = - \left(\begin{array}{c} \mathbf{J}^{(\nu)} \\ \sqrt{\eta_\nu} I \end{array} \right)^\dagger \left(\begin{array}{c} \underline{M} \left(\underline{y}_c^{(\nu)} \right) \\ 0 \end{array} \right), \quad (3.65)$$

assumindo $\underline{y}_c^{(\nu)} = \underline{x}_c^{(\nu+1)} = \underline{x}_c^{(\nu)} + \Delta \underline{x}_c^{(\nu)}$. E o terceiro passo é

$$\Delta \underline{z}_c^{(\nu)} = - \left(\begin{array}{c} \mathbf{J}^{(\nu)} \\ \sqrt{\eta_\nu} I \end{array} \right)^\dagger \left(\begin{array}{c} \underline{M} \left(\underline{z}_c^{(\nu)} \right) \\ 0 \end{array} \right), \quad (3.66)$$

onde $\underline{z}_c^{(\nu)} = \underline{y}_c^{(\nu+1)} = \underline{y}_c^{(\nu)} + \Delta \underline{y}_c^{(\nu)}$. Sendo assim, a checagem de convergência deve ser feita sobre o último passo de aproximação, sendo então:

$$\left\| \Delta \underline{z}_c^{(\nu)} \right\|_\infty \leq tol \ (\approx 10^{-3}). \quad (3.67)$$

Se (3.67) for satisfeita, pare e imprima os resultados. Se não for, calcule a razão da dedução de erro $err_\nu = Ared_\nu / Pred_\nu$, onde

$$Ared_\nu = \left\| \underline{M} \left(\underline{x}_c^{(\nu)} \right) \right\|^2 - \left\| \underline{M} \left(\underline{x}_c^{(\nu)} + \Delta \underline{x}_c^{(\nu)} + \Delta \underline{y}_c^{(\nu)} + \Delta \underline{z}_c^{(\nu)} \right) \right\|^2, \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned}
\text{Pred}_\nu = & \left\| \underline{M}(\underline{\mathbf{x}}_c^{(\nu)}) \right\|^2 - \left\| \underline{M}(\underline{\mathbf{x}}_c^{(\nu)}) + \mathbf{J}^{(\nu)} \Delta \underline{\mathbf{x}}_c^{(\nu)} \right\|^2 + \\
& \left\| \underline{M}(\underline{\mathbf{y}}_c^{(\nu)}) \right\|^2 - \left\| \underline{M}(\underline{\mathbf{y}}_c^{(\nu)}) + \mathbf{J}^{(\nu)} \Delta \underline{\mathbf{y}}_c^{(\nu)} \right\|^2 + \\
& \left\| \underline{M}(\underline{\mathbf{z}}_c^{(\nu)}) \right\|^2 - \left\| \underline{M}(\underline{\mathbf{z}}_c^{(\nu)}) + \mathbf{J}^{(\nu)} \Delta \underline{\mathbf{z}}_c^{(\nu)} \right\|^2.
\end{aligned} \tag{3.69}$$

E, neste caso, o vetor de estados é atualizado da seguinte forma:

$$\underline{\mathbf{x}}_c^{(\nu+1)} = \begin{cases} \underline{\mathbf{x}}_c^{(\nu)} + \Delta \underline{\mathbf{x}}_c^{(\nu)} + \Delta \underline{\mathbf{y}}_c^{(\nu)} + \Delta \underline{\mathbf{z}}_c^{(\nu)}, & \text{se } \text{err}_\nu \geq p_0 \\ \underline{\mathbf{x}}_c^{(\nu)}, & \text{do contrário.} \end{cases} \tag{3.70}$$

onde p_0 é um parâmetro escolhido entre 0 e 1. Finalmente, o parâmetro μ_ν é atualizado como abaixo:

$$\mu_{\nu+1} = \begin{cases} 4 \mu_\nu & \text{if } \text{err}_\nu < p_1 \\ \mu_\nu & \text{if } \text{err}_\nu \in [p_1, p_2] \\ \max \left\{ \frac{\mu_\nu}{4}, \lambda \right\} & \text{if } \text{err}_\nu > p_2 \end{cases} \tag{3.71}$$

onde $0 < p_0 \leq p_1 \leq p_2 < 1$ e $\eta_\nu > \lambda > 0$. Agora o contador de iterações é atualizado, i.é, $\nu = \nu + 1$ e checa-se se o número máximo de iterações foi atingido. Se este for o caso, termina-se o algoritmo e os resultados são imprimidos; caso contrário, o processo começa novamente a partir da equação (3.63).

Note que a matriz Jacobiana \mathbf{J} é calculada apenas uma vez a cada iteração ν , o que é uma propriedade atraente para uma convergência biquadrática da abordagem proposta. Convergência essa facilmente provada pelos teoremas mostrados em [28]. Note que o cálculo da matriz Jacobiana consome considerável tempo para sistemas de grande escala, porém, graças à taxa de convergência biquadrática da abordagem proposta, o número de iterações é reduzido significativamente. Por outro lado, o erro da linearização da equação não linear é compensado através dos dois passos LM adicionais aproximados, o que aprimora a robustez numérica da abordagem proposta notavelmente quando sob condições extremas de operação ou com ramos com elevada relação R/X.

Finalmente, note que há vários parâmetros a serem ajustados antes de se iniciar o algoritmo CV-PFA baseado em LM. Dentre os parâmetros, o valor inicial de μ , p_0 , p_1 , p_2 e λ . O valor inicial de μ , geralmente 10^{-5} , tem pouco impacto no processo iterativo, uma vez que sofre atualizações, enquanto que para p_0 , p_1 , p_2 e λ , estes estão ajustados como $p_0 = 10^{-4}$, $p_1 = 0.25$, $p_2 = 0.75$ e $\lambda = 0.65$, como recomendado em [28]. Este ajuste dos parâmetros funciona bem para diferentes sistemas teste.

3.5.2 Estrutura da Matriz Jacobinana

A matriz Jacobiana do fluxo de potência no plano complexo possui a seguinte estrutura:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_{kg}}{\partial V_k} & \frac{\partial M_{kg}}{\partial V_m} & \frac{\partial M_{kg}}{\partial a_{km}} & \frac{\partial M_{kg}}{\partial V_k^*} & \frac{\partial M_{kg}}{\partial V_m^*} & \frac{\partial M_{kg}}{\partial a_{km}^*} \\ \frac{\partial M_k}{\partial V_k} & \frac{\partial M_k}{\partial V_m} & \frac{\partial M_k}{\partial a_{km}} & \frac{\partial M_k}{\partial V_k^*} & \frac{\partial M_k}{\partial V_m^*} & \frac{\partial M_k}{\partial a_{km}^*} \\ 0.0 & 0.0 & \frac{\partial M_m}{\partial a_{km}} & 0.0 & 0.0 & \frac{\partial M_m}{\partial a_{km}^*} \\ \frac{\partial E_{kg}}{\partial V_k} & 0.0 & 0.0 & \frac{\partial E_{kg}}{\partial V_k^*} & 0.0 & 0.0 \\ \frac{\partial M_k^*}{\partial V_k} & \frac{\partial M_k^*}{\partial V_m} & \frac{\partial M_k^*}{\partial a_{km}} & \frac{\partial M_k^*}{\partial V_k^*} & \frac{\partial M_k^*}{\partial V_m^*} & \frac{\partial M_k^*}{\partial a_{km}^*} \\ 0.0 & \frac{\partial E_m}{\partial V_m} & 0.0 & 0.0 & \frac{\partial E_m}{\partial V_m^*} & 0.0 \end{bmatrix}. \quad (3.72)$$

Em (3.72), as derivadas parciais da primeira e da quarta linha correspondem às barras PVs, as que estão na segunda e quinta linha correspondem às barras PQs e as que estão na terceira e sexta, às barras PQVs. Visando fatorar a matriz Jacobiana composta complexa (3.72), dois algoritmos QR são considerados e investigados em [49, 50], sendo este último escrito em coordenadas polares. Ambos são extensões do já conhecido algoritmo em números reais descrito em [51], que já foi aplicado com sucesso a Estimadores de Estado de Sistemas de Potência por [52, 53, 54]. Note que o algoritmo QR deve ser aplicado a uma matriz aumen-

tada visando evitar armazenar explicitamente a matriz Q . Com isto em mente, a transformação QR é aplicada a uma matriz \mathbf{J}_a dada por

$$\mathbf{J}_a^{(\nu)} = \left[\mathbf{J}^{(\nu)} \underline{M}(\mathbf{x}_c^{(\nu)}) \right]. \quad (3.73)$$

Por outro lado, verifica-se que se guardarmos a sequência de rotações na forma compacta, a matriz Jacobiana no plano complexo pode se manter constante, implicando que somente o vetor do lado direito é atualizado nas iterações finais. Portanto, a solução sobre os três passos do algoritmo de LM dados por (3.63-3.66) pode ser feita com uma simples substituição inversa à fatoração de (3.73), levando a

$$\tilde{\mathbf{J}}_a^{(\nu)} = \left[\mathbf{T}_c \tilde{\mathbf{M}}_c \right]. \quad (3.74)$$

onde \mathbf{T}_c é a matriz triangular superior composta de dimensão $4n \times 2n$ e $\tilde{\mathbf{M}}_c$ inclui as linhas correspondentes no vetor atualizado do lado direito, de dimensão $4n \times 1$, para $n = N - 1$. então, (3.63) pode ser expressa através de

$$\Delta \underline{\mathbf{x}}_c^{(\nu)} = \mathbf{T}_c \tilde{\mathbf{M}}_c. \quad (3.75)$$

4 Resultados Numéricos

Neste capítulo apresenta-se uma descrição detalhada da Análise de Fluxo de Potência CV por Newton-Raphson de um sistema de potência 3-barras. Em seguida comparamos a performance deste algoritmo com seu correspondente por Levenberg-Marquardt para os sistemas bem condicionados IEEE-14, -30, -57 e -118 barras, o sistema interligado nacional (SIN) 1916 barras e para os sistemas mal condicionados, ou insolúveis, IEEE-11 e -43 barras. Estes algoritmos foram desenvolvidos em Matlab utilizando-se de técnicas de esparsidade, ordenação e rotação QR. Os testes numéricos foram executados usando-se um Intel Core i5-4200 CPU @ 1.60Hz 2.30 GHz; 6GB de RAM e sistema operacional 64-bits. A condição de flat start é utilizada para as variáveis de estado em todas as simulações. Durante os processos iterativos o algoritmo utiliza-se de técnicas de esparsidade, método de ordenação de colunas e fatoração QR sobre a matriz Jacobiana.

4.1 Pequeno exemplo: CV-PFA

Na sequência a modelagem CV-PFA pelo método de Newton Raphson é aplicada a um pequeno sistema exemplo cujo diagrama é mostrado na Fig. 2

Tabela 1 – Especificações das Barras.

Barra	Grandezas Especificadas em pu			
Tipo	P_g	V	P_{carga}	Q_{carga}
PV-2	1.0000	1.0000	0.2160	0.0918
PQ-3			2.700	1.620

A matriz de admitância nodal, i.é, Y_{bus} , é dada como

$$Y_{bus} = \begin{bmatrix} 213.3474 - j 380.8922 & -205.1282 + j 358.9744 & -8.2192 + j 21.9178 \\ -205.1282 + j 358.9744 & 205.2414 - j 359.3821 & -0.1132 + j 0.6037 \\ -8.2192 + j 21.9178 & -0.1132l + j 0.6037 & 8.3324 - j 22.3256 \end{bmatrix}$$

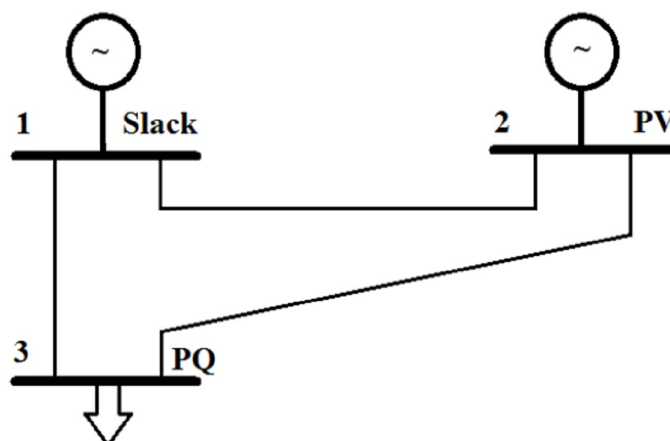


Figura 2 – Sistema Exemplo 3 Barras.

Tabela 2 – Especificações das Linhas.

Linha	Série		Shunt	
	R pu	X pu	Carregamento MVar	Y/2 pu
1-2	0.0012	0.0021		
1-3	0.0150	0.0400		
2-3	0.3000	1.6000	39.2	0.196

Todo o conjunto dos resultados intermediários através do processo iterativo é apresentado a seguir.

$$J^{(\nu=1)} = \begin{bmatrix} 205.24 - j 359.58 & -0.11 + j 0.60 & 205.24 + j 359.58 & -0.11 - j 0.60 \\ & -j 0.20 & -0.11 - j 0.60 & 8.33 + j 22.33 \\ 1.00 & & 1.00 & \\ -0.11 + j 0.60 & 8.33 - j 22.33 & & j 0.20 \end{bmatrix}$$

$$J^{(\nu=2)} = \begin{bmatrix} 205.30 - j 360.35 & -0.11 + j 0.60 & 205.30 + j 360.35 & -0.11 - j 0.60 \\ & -2.68 - j 1.64 & -0.15 - j 0.54 & 9.41 + j 19.48 \\ 1.00 - 0.01 & & 1.00 + 0.01 & \\ -0.15 + j 0.54 & 9.41 - j 19.48 & & -2.68 + j 1.64 \end{bmatrix}$$

$$J^{(\nu=3)} = \begin{bmatrix} 205.30 - j 360.34 & -0.11 + j 0.60 & 205.30 + j 360.34 & -0.11 - j 0.60 \\ & -2.85 - j 2.10 & -0.15 - j 0.52 & 9.24 + j 19.02 \\ 1.00 - 0.01 & & 1.00 + 0.01 & \\ -0.15 + j 0.52 & 9.24 - j 19.02 & & -2.85 + j 2.10 \end{bmatrix}$$

Assim como no domínio real, os elementos da matriz Jacobiana no plano complexo permanecem praticamente inalterados após a segunda iteração, o que sugere que podemos mantê-la constante a partir de então. Além do mais, a computação de algumas das entradas podem ser evitadas pois estas seriam as complexas conjugadas de outros valores da matriz, com exceção dos casos associados às barras PVs.

Os valores numéricos das correções das variáveis de estado, as variáveis e os vetores de mismatches calculados no domínio complexo são mostrados nas Tabelas 3-5. Perceba que são os mesmos valores como os calculados no domínio real. Consequentemente, os valores das injeções de potência e os fluxos de carga calculados no domínio real e no complexo também serão os mesmos; estes são mostrados na Tabela 6.

Tabela 3 – Vetor de correção.

$\underline{\Delta X}$	<i>Critério de Convergência</i> : $\ \underline{\Delta X}\ _{\infty} < tol. \approx 10^{-3}$		
	$\underline{\Delta X}^{(\nu=1)}$	$\underline{\Delta X}^{(\nu=2)} \times 10^{-2}$	$\underline{\Delta X}^{(\nu=3)} \times 10^{-4}$
ΔV_2	$0.00 + j 0.20$	$-0.0002 - j 0.0007$	$0.00 - j 0.0017$
ΔV_3	$-0.0961 - j 0.08435$	$-2.04 - j 0.0002$	$-5.4852 + j 0.0154$
ΔV_2^*	$0.00 - j 0.20$	$-0.0002 + j 0.0007$	$0.00 + j 0.0017$
ΔV_3^*	$-0.0961 + j 0.08435$	$-2.04 + j 0.0002$	$-5.4852 - j 0.0154$
$\ \underline{\Delta X}\ _{\infty}$	0.1278	0.0204	5.4852×10^{-4}

Tabela 4 – Variáveis de Estado.

\underline{X}	$ \underline{X} ^{(\nu=0)}$	$ \underline{X} ^{(\nu=1)}$	$ \underline{X} ^{(\nu=2)}$	$ \underline{X} ^{(\nu=3)}$
V_2	$1.0000 + j 0.0$	$1.0000 + j 0.002$	$1.0000 + j 0.002$	$1.0000 + j 0.002$
V_3	$1.0000 + j 0.0$	$0.9039 - j 0.0843$	$0.8835 - j 0.0842$	$0.8829 - j 0.0842$
V_2^*	$1.0000 - j 0.0$	$1.0000 - j 0.002$	$1.0000 - j 0.002$	$1.0000 - j 0.002$
V_3^*	$1.0000 - j 0.0$	$0.9039 + j 0.0843$	$0.8835 + j 0.0842$	$0.8829 + j 0.0842$

Tabela 5 – Vetor de *Mismatches*.

\underline{M}	$\underline{M}(\underline{X})^{(\nu=0)}$	$\underline{M}(\underline{X})^{(\nu=1)}$	$\underline{M}(\underline{X})^{(\nu=2)}$	$\underline{M}(\underline{X})^{(\nu=3)} \times 10^{-5}$
M_{2g}	$-1.5680 + j 0.0000$	$0.0015 + j 0.0000$	$0.0000 + j 0.0000$	$0.0000 + j 0.0000$
M_3	$2.7000 + j 1.4240$	$0.1363 + j 0.3648$	$0.0035 + j 0.0093$	$0.2507 + j 0.6717$
M_{2g}^*	$0.0000 - j 0.0000$	$0.0000 + j 0.0000$	$0.0000 + j 0.0000$	$0.0000 + j 0.0000$
M_3^*	$2.7000 - j 1.4240$	$0.1363 - j 0.3648$	$0.0035 - j 0.0093$	$0.2507 - j 0.6717$

Tabela 6 – Resultados Fluxo de Potência CV

S_k	<i>Coordenadas</i>	
	<i>Retangular</i>	<i>Polar</i>
	$(P_k \pm j Q_k)$	$ S_k \times e^{\pm j \varphi}$
S_1	$+2.0901 + j 2.2845$	$3.0964 \times e^{+j 47.545}$
S_2	$+0.7840 - j 0.5448$	$0.9468 \times e^{-j 34.793}$
S_3	$-2.7000 - j 1.6199$	$3.1487 \times e^{-j 149.036}$
S_{km}		
	$(P_{km} \pm j Q_{km})$	$ S_{km} \times e^{\pm j \theta_{km}}$
S_{12}	$-0.7180 + j 0.4112$	$0.8274 \times e^{+j 150.198}$
S_{21}	$+0.7188 - j 0.4098$	$0.8274 \times e^{-j 29.687}$
S_{13}	$+2.8081 + j 1.8733$	$3.3676 \times e^{+j 33.707}$
S_{31}	$-2.6372 - j 1.4175$	$2.9940 \times e^{-j 151.741}$
S_{23}	$+0.0652 - j 0.1350$	$0.1498 \times e^{-j 64.217}$
S_{32}	$-0.0628 - j 0.2025$	$0.2120 \times e^{-j 107.232}$

4.2 Sistemas bem condicionados: sistemas teste IEEE e sistema real brasileiro

Uma gama de algoritmos aplicados à análise de fluxo de potência foram utilizados para comparação e avaliação da performance de nossa proposta. Cada algoritmo utilizado será identificado como:

$\checkmark RV - NRPF A^{(p,r)}$: Real-Valued Newton-Raphson, em coordenadas polar e retangular;

$\checkmark RV - LMPFA^{(p)}$: Real-Valued Levenberg-Marquardt, em coordenada polar;

$\checkmark RV - OMPFA^{(r)}$: Real-Valued Newton-Raphson com multiplicador ótimo, em coordenada retangular;

$\checkmark CV - NRPF A^{(r)}$: Complex-Valued Newton-Raphson, em coordenada retangular;

$\checkmark CV - LMPFA^{(r)}$: Complex-Valued Levenberg-Marquardt, em coordenada retangular.

Na tabela 7 tem-se os parâmetros dos sistemas testes bem condicionados IEEE 14, 30, 57 e 118 barras, além dos parâmetros do sistema interligado nacional (SIN) brasileiro 1916 barras. As Figs. 3-7 mostram as estruturas de esparsidade das matrizes Jacobianas no domínio complexo dadas por (3.72) em comparação com as derivadas no domínio real.

Tabela 7 – Propriedades dos sistemas bem condicionados

Sistemas teste IEEE / SIN-	-14	-30	-57	-118	-1916
No. de barras PV (N_{PV})	4	5	6	53	163
No. de barras PQ (N_{PQ})	9	24	50	64	1753
No. de transformadores	3	4	15	9	835
No. de linhas de transmissão + shunt	21	43	83	200	3197
\mathbb{R} -Valued: $n = (N_{PV} + 2 \times N_{PQ})$	22	53	106	181	3669
\mathbb{C} -Valued: $n = 2 \times (N_{PV} + N_{PQ})$	26	58	112	234	3832

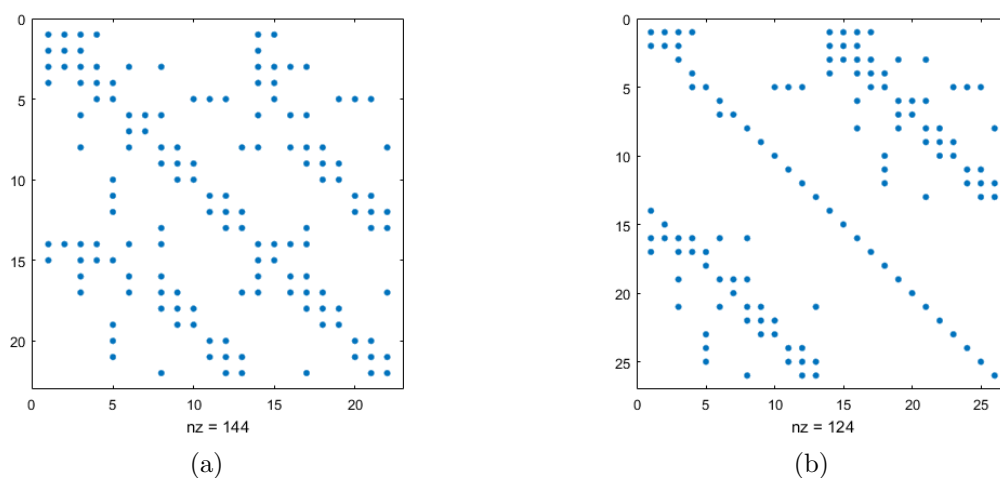


Figura 3 – Estrutura de esparsidade da matriz Jacobiana no plano real (a) e no plano complexo (b) do sistema teste IEEE 14-barras.

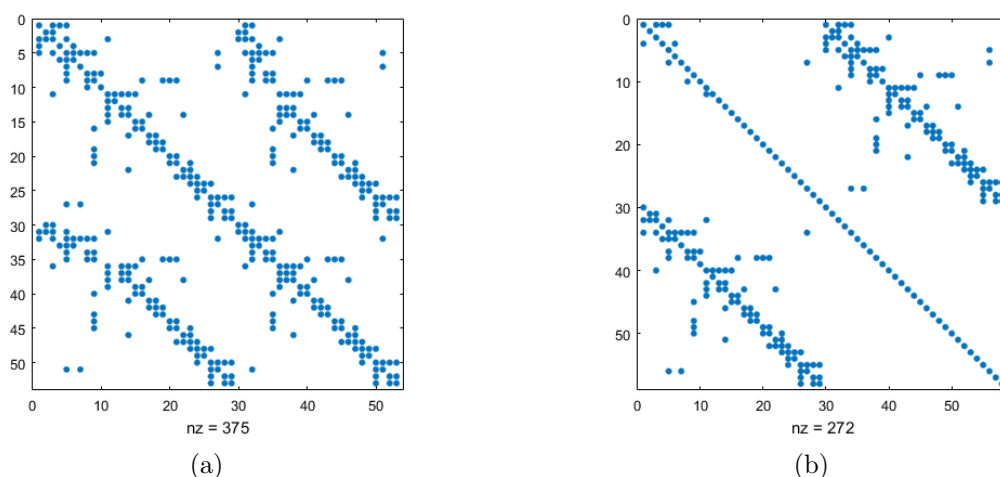


Figura 4 – Estrutura de esparsidade da matriz Jacobiana no plano real (a) e no plano complexo (b) do sistema teste IEEE 30-barras.

Claramente, os blocos diagonais da matriz Jacobiana no plano complexo são praticamente matrizes diagonais, o que acelera sua fatoração. A Tabela 8 mostra o número de iterações, o condicionamento numérico e o número de elementos não nulos associados às matrizes Jacobianas no plano real e complexos, em coordenadas polar e retangular.

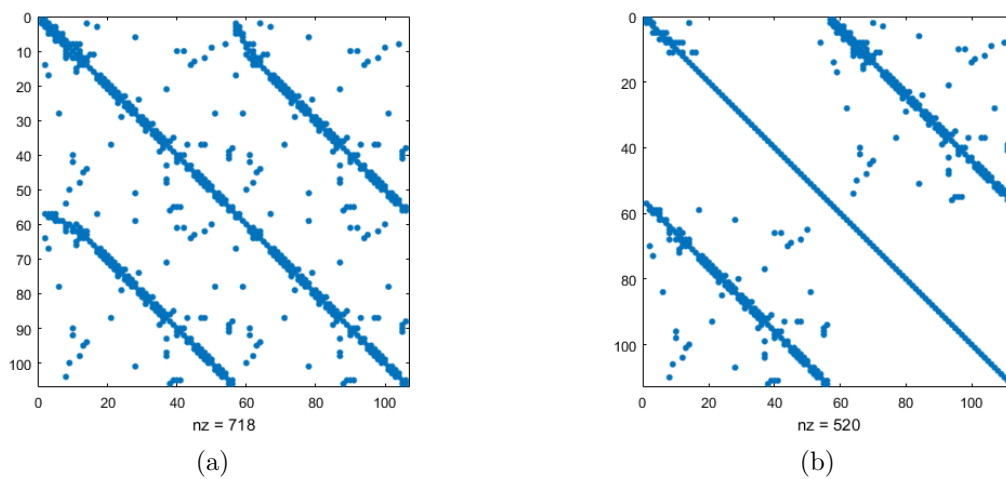


Figura 5 – Estrutura de esparsidade da matriz Jacobiana no plano real (a) e no plano complexo (b) do sistema teste IEEE 57-barras.

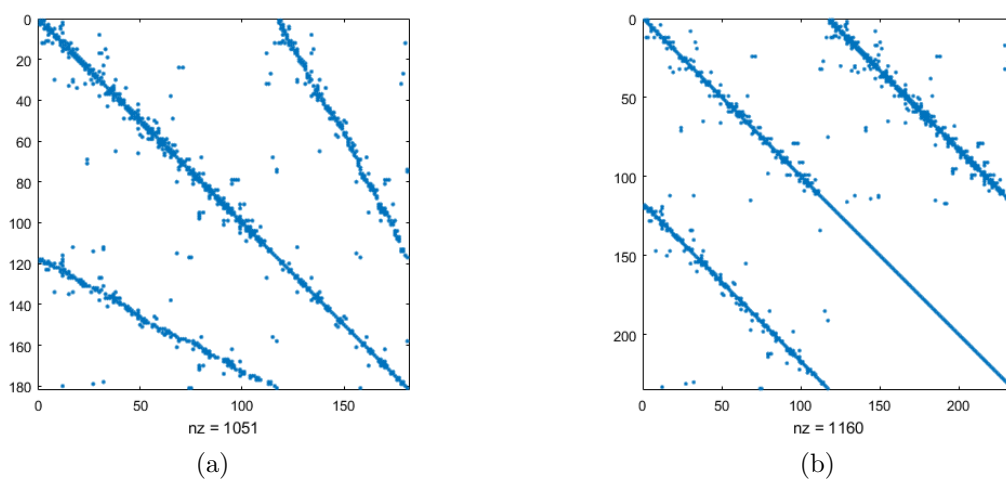


Figura 6 – Estrutura de esparsidade da matriz Jacobiana no plano real (a) e no plano complexo (b) do sistema teste IEEE 118-barras.

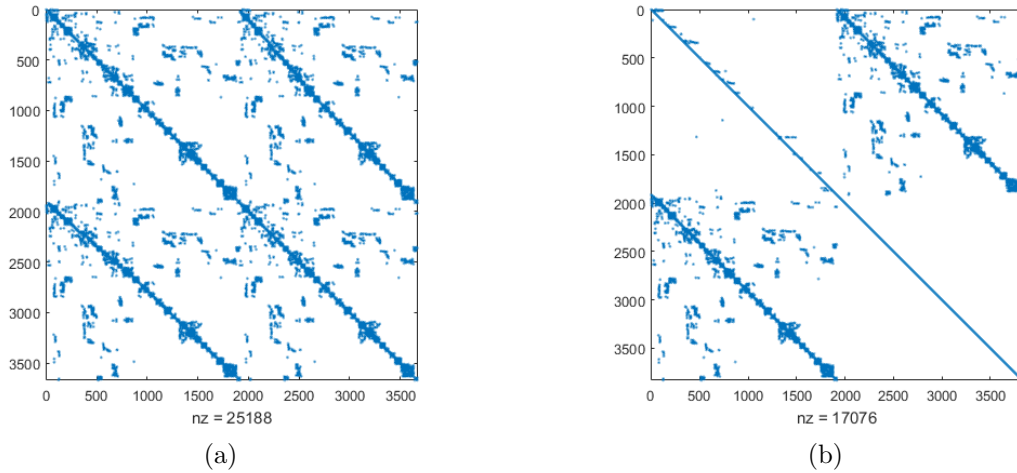


Figura 7 – Estrutura de esparsidade da matriz Jacobiana no plano real (a) e no plano complexo (b) do sistema brasileiro SIN 1916-barras.

Os resultados mostrados na Tabela 8 permitem inferir que o algoritmo de análise de fluxo de potência no plano complexo para sistemas bem condicionados tem propriedades de convergência e condicionamento numérico da matriz Jacobiana muito similares a seu equivalente em números reais. No plano complexo se requer basicamente o mesmo número de iterações para alcançar a solução ($tol. \sim 10^{-3}$), porém se apresenta melhor esparsidade da matriz Jacobiana. Por outro lado, apesar de que o tempo computacional dos algoritmos $RV - LMPFA^{(p)}$ e $CV - LMPFA^{(r)}$ serem maiores que os dos algoritmos $RV - NRPFA^{(p)}$ e $CV - NRPFA^{(r)}$, respectivamente, eles requerem em média somente 2 iterações para alcançar a solução em todos os casos de sistemas bem condicionados testados. Perceba que na Tabela 8 ambas abordagens de Newton Raphson no plano real, polar e retangular ($RV - NRPFA^{(p,r)}$), são utilizadas como tempo por iteração de referência. Ainda analisando os dados dos tempo por iteração da Tabela 8, percebe-se também que, para sistemas de grande porte, o tempo gasto nas iterações dos algoritmos pelo método de Levenberg-Marquardt são consideravelmente maiores. Isto é devido ao fato de que, com a inserção do parâmetro de regularização, a matriz Jacobiana passa a ser uma matriz redundante com o dobro do número de linhas, o que faz que seja necessário a utilização da operação da pseudo-inversa

Tabela 8 – Análise Numérica e de Esparsidade

IEEE- / SIN-	-14	-30	-57	-118	-1916
No. de iterações:					
✓ RV-NRPFA ^(p)	3	3	4	4	5
✓ RV-LMPFA ^(p)	1	2	2	2	3
✓ RV-NRPFA ^(r)	3	4	4	4	6
✓ RV-OMPFA ^(r)	3	3	4	4	6
✓ CV-NRPFA ^(r)	3	4	4	4	6
✓ CV-LMPFA ^(r)	2	2	2	2	3
Condicionamento numérico:					
✓ RV-NRPFA ^(p)	96.6	473.2	826.1	3166.9	879611
✓ RV-LMPFA ^(p)	96.6	461.4	823.4	3166.1	856274
✓ RV-NRPFA ^(r)	99.5	483.3	814.7	3127.7	810551
✓ RV-OMPFA ^(r)	99.5	483.3	814.7	3127.7	810551
✓ CV-NRPFA ^(r)	111.4	487.9	827.9	3276.8	804012
✓ CV-LMPFA ^(r)	110.6	487.9	827.6	3276.2	803913
No. de elementos não nulos:					
✓ RV-NRPFA ^(p)	128	353	654	1035	22366
✓ RV-LMPFA ^(p)	128	353	654	1035	22366
✓ RV-NRPFA ^(r)	176	410	772	1486	22743
✓ RV-OMPFA ^(r)	176	410	772	1486	22743
✓ CV-NRPFA ^(r)	124	264	516	1160	16938
✓ CV-LMPFA ^(r)	124	264	516	1160	16938
Tempo [µs] por iteração:					
✓ RV-NRPFA ^(p)	1	1	1	1	1
✓ RV-LMPFA ^(p)	2.10	2.75	2.33	2.30	7.42
✓ RV-NRPFA ^(r)	1	1	1	1	1
✓ RV-OMPFA ^(r)	2.31	2.11	2.26	2.64	1.91
✓ CV-NRPFA ^(r)	1.50	1.09	1.13	1.49	1.16
✓ CV-LMPFA ^(r)	1.91	1.68	1.95	2.31	23.52

de Moore-Penrose, que por sua vez demanda um tempo computacional relativamente maior do que simplesmente inverter uma matriz quadrada como é feito no tradicional Newton-Raphson.

Para validação das convergência dos algoritmos, foram sobrepostos os perfis de tensão e ângulo das barras dos sistemas testados resultantes dos algoritmos $RV - NRPF A^{(p)}$, $CV - NRPF A^{(r)}$ e $CV - LMPF A^{(r)}$. As Figs. 8 - 12 mostram as sobreposições mencionada acima dos 5 sistemas bem condicionados testados nesta seção. Percebe-se que os resultados obtidos pelos algoritmos propostos com números complexos se sobrepõem perfeitamente sobre o tradicional algoritmo Newton-Raphson no plano real. A Tabela 9 mostra a diferença máxima entre as variáveis de estado entre o método no plano real e o no plano complexo, onde pode-se confirmar que os resultados são os mesmos, com uma estreita diferença bem abaixo da tolerância exigida aos algoritmos.

Tabela 9 – Diferença máxima entre variáveis de estados resultantes e sua localização

Sistema IEEE- / SIN-	14-barras	30-barras	57-barras	118-barras	1916-barras
$\ \Delta \underline{\mathbf{V}}\ _{\infty} \times 10^{-8} _{(barra)}$	2.34 ₍₁₄₎	4.57 ₍₃₀₎	0.17 ₍₃₁₎	0.23 ₍₈₎	1.62 ₍₁₀₃₄₎
$\ \Delta \underline{\delta}\ _{\infty} \times 10^{-8} _{(barra)}$	8.81 ₍₈₎	26.6 ₍₃₀₎	0.06 ₍₃₂₎	0.57 ₍₈₎	2.27 ₍₁₀₄₀₎

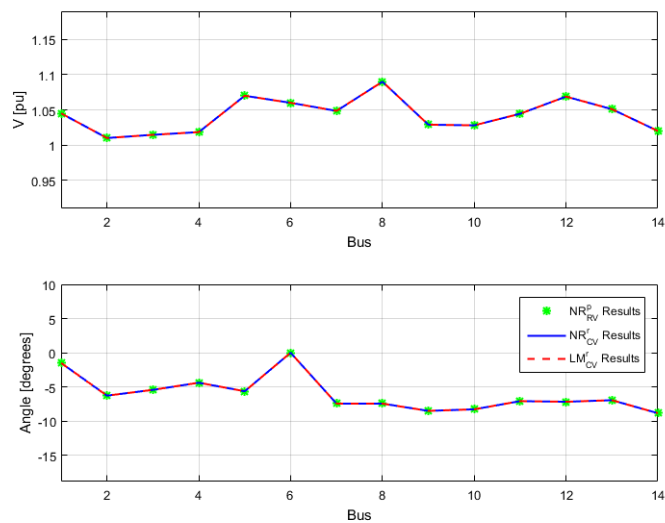


Figura 8 – IEEE-14 Barras: perfil de tensão e ângulo.

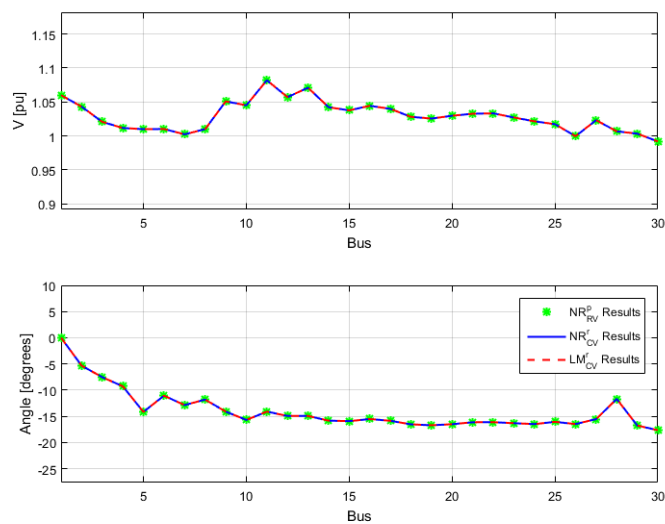


Figura 9 – IEEE-30 Barras: perfil de tensão e ângulo.

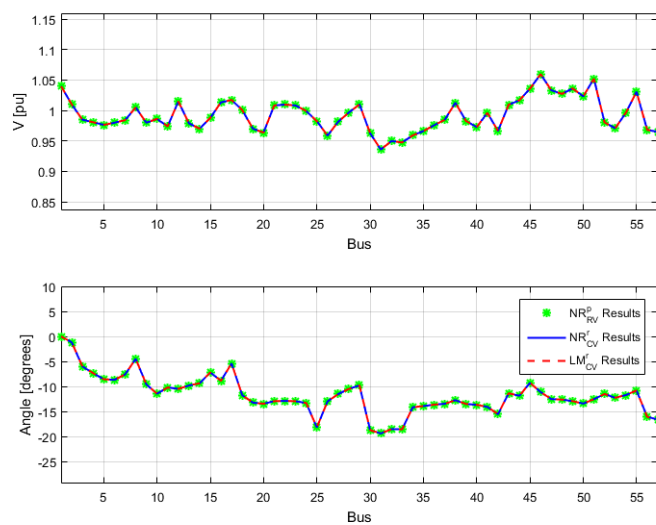


Figura 10 – IEEE-57 Barras: perfil de tensão e ângulo.

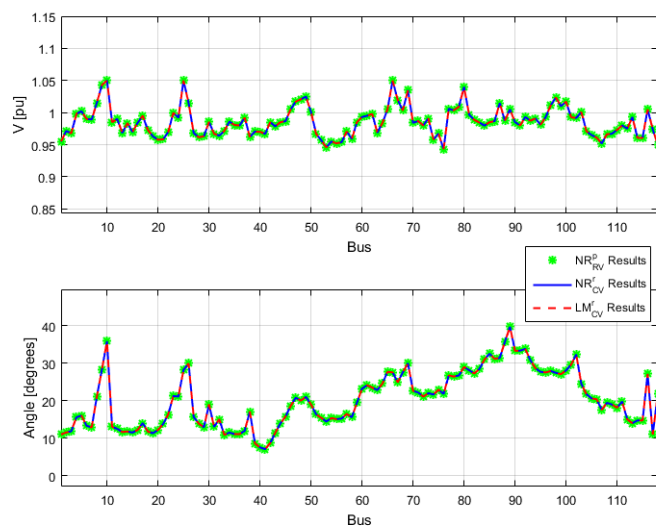


Figura 11 – IEEE-118 Barras: perfil de tensão e ângulo.

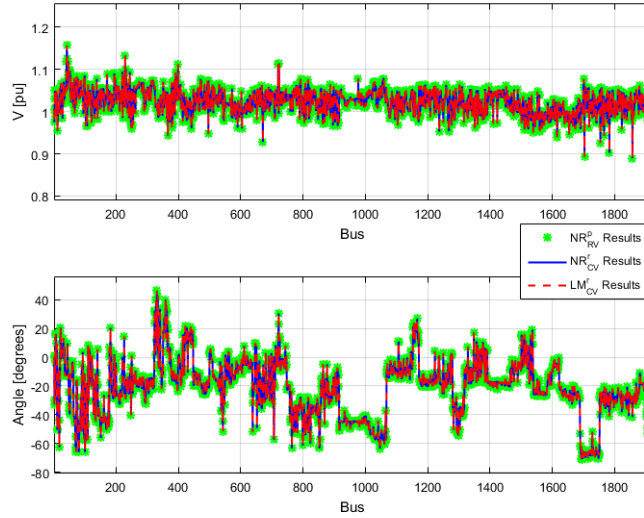


Figura 12 – SIN-1916 Barras: perfil de tensão e ângulo.

4.3 Sistemas mal condicionados ou insolúveis: sistemas teste IEEE

Nesta seção são feitas simulações sobre os conhecidos sistemas IEEE 11 e 43 barras. Os dados das redes destes sistemas testes estão disponíveis no Apêndice A. As propriedades destes sistemas testes estão na Tabela 10 .

Tabela 10 – Propriedades dos sistemas mal condicionados

Sistemas teste IEEE-	-11	-43
No. de barras PV (N_{PV})	5	0
No. de barras PQ (N_{PQ})	5	42
No. de transformadores	0	0
No. de linhas de transmissão + shunt	11	42
\mathbb{R} -Valued: $n = (N_{PV} + 2 \times N_{PQ})$	15	84
\mathbb{C} -Valued: $n = 2 \times (N_{PV} + N_{PQ})$	20	84

A Tabela 11 mostra o comportamento numérico para cada um dos algoritmos testados para os casos dos sistemas testes mal condicionados. Percebe-se logo, como esperado, que os algoritmos com métodos clássicos, como o Newton-Raphson no domínio real ($RV - NR^{PFA}^{(p)}$), tendem a divergir em tais casos. O

algoritmo proposto por Iwamoto ($RV - OMPFA^{(r)}$) teve sua robustez confirmada juntamente com a robustez do algoritmo $CV - LMPFA^{(r)}$, que por sua vez também apresenta comportamentos que indicam melhor convergência, menor tempo computacional por iteração e necessita de menos iterações. Note também que o algoritmo Newton Raphson demonstra ter maior robustez quando implementado no domínio complexo ($CV - NRPFA^{(r)}$), uma vez que, mesmo gastando um número elevado de iterações, foi capaz de encontrar a solução para o sistema IEEE-43 Barras enquanto seu correspondente no domínio dos números reais divergia.

Tabela 11 – Análise Numérica

IEEE-	-11	-43
No. de iterações:		
✓ $RV-NRPFA^{(p)}$	<i>divergência</i>	<i>divergência</i>
✓ $RV-LMPFA^{(p)}$	3	2
✓ $RV-NRPFA^{(r)}$	<i>divergência</i>	<i>divergência</i>
✓ $RV-OMPFA^{(r)}$	12	6
✓ $CV-NRPFA^{(r)}$	<i>divergência</i>	26
✓ $CV-LMPFA^{(r)}$	4	4
Condicionamento numérico:		
✓ $RV-NRPFA^{(p)}$	<i>divergência</i>	<i>divergência</i>
✓ $RV-LMPFA^{(p)}$	3.21E+05	1.47E+08
✓ $RV-NRPFA^{(r)}$	<i>divergência</i>	<i>divergência</i>
✓ $RV-OMPFA^{(r)}$	1.62E+06	2.10E+08
✓ $CV-NRPFA^{(r)}$	<i>divergência</i>	4.29E+04
✓ $CV-LMPFA^{(r)}$	1.13E+08	1.66E+08
Tempo [pu] por iteração:		
✓ $RV-NRPFA^{(p)}$	<i>divergência</i>	<i>divergência</i>
✓ $RV-LMPFA^{(p)}$	0.52	0.42
✓ $RV-NRPFA^{(r)}$	<i>divergência</i>	<i>divergência</i>
✓ $RV-OMPFA^{(r)}$	1	1
✓ $CV-NRPFA^{(r)}$	<i>divergência</i>	0.42
✓ $CV-LMPFA^{(r)}$	0.68	0.53

Nos próximos tópicos os resultados obtidos dos sistemas testes IEEE-11 e -43 Barras são mais detalhadamente discutidos.

4.3.1 Sistema teste IEEE-11 Barras

O diagrama unifilar do sistema 11 barras é descrito na Fig. 13. As principais características deste sistema teste são a sua condição de intensamente carregado e sua topologia radial cuja configuração torna o sistema insolúvel.

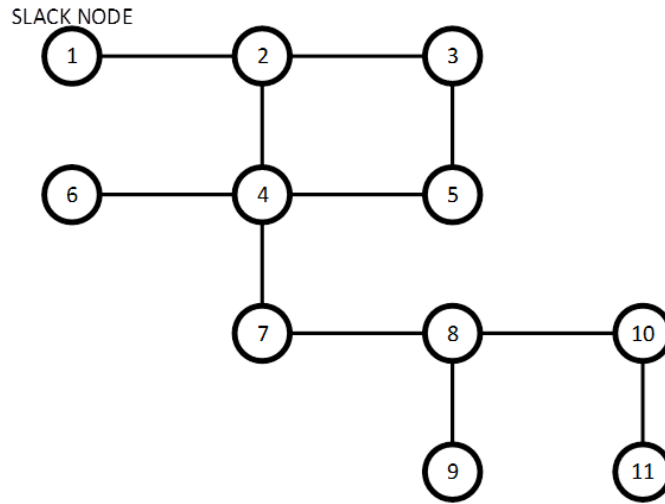


Figura 13 – IEEE-11 Barras: diagrama monofásico.

Dois cenários são considerados com respeito ao sistema IEEE-11 barras visando analisar a performance e os resultados de nossa proposta com a abordagem de Iwamoto [21]. No primeiro cenário, todas as barras são barras do tipo PQ, tal como é especificado em [21]; e no segundo as barras 2, 4, 7, 8 e 10 são especificadas como barras do tipo PV. Em ambos cenários a performance do algoritmo $CV - LMPFA^{(r)}$ proposto é comparado com o $RV - OMPFA^{(r)}$. Na sequência se demonstra que o algoritmo proposto possui melhor performance e convergência do que a abordagem de Iwamoto. A Fig. 14 mostra o perfil das variáveis de estado do sistema sob o primeiro cenário. Note que os resultados do algoritmo $RV - LMPFA^{(p)}$ também foram incluídos neste caso, e estes se sobrepõem aos resultados de $CV - LMPFA^{(r)}$. Os resultados de $RV - OMPFA^{(r)}$ são muito próximos dos obtidos através da abordagem proposta. Adicionalmente, a Fig. 15 apresenta a norma infinita do vetor de mismatch a cada iteração para estes três algoritmos. As performances dos algoritmos por Levenberg-Marquardt aparentam ser melhores uma vez que uma magnitude de mismatch menor foi alcançada.

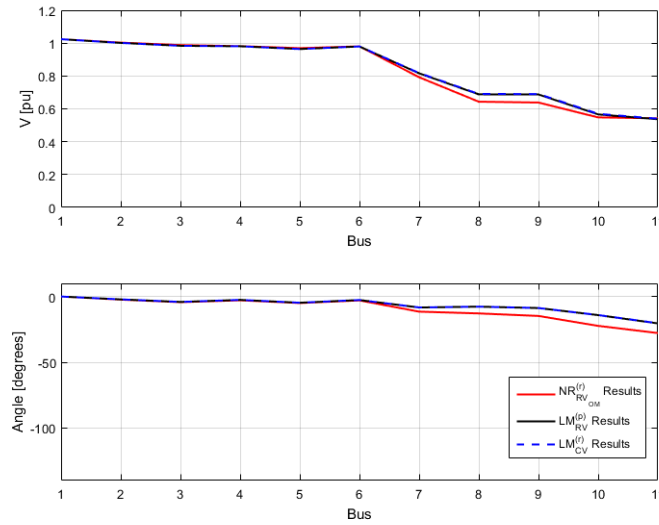


Figura 14 – IEEE-11 barras: variáveis de estado sob primeiro cenário.

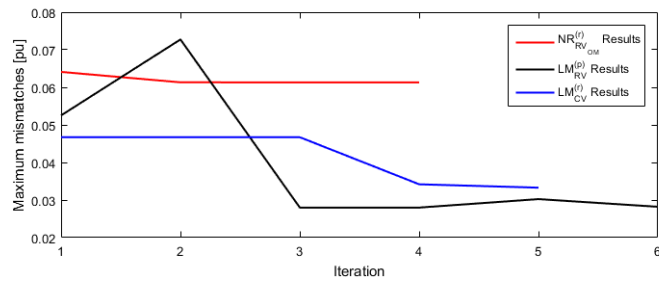


Figura 15 – IEEE-11 barras: evolução do máximo mismatch sob primeiro cenário.

Com respeito ao segundo cenário, a Fig. 16 mostra as variáveis de estados resultantes dos algoritmos $RV - OMPFA^{(r)}$ e $CV - LMPFA^{(r)}$ e a Fig. 17 mostra a evolução do máximo mismatch. A magnitude da tensão dada por $RV - OMPFA^{(r)}$ apresenta sobretensão a partir da barra 7, o que não condiz com a configuração da rede. A Tabela 12 apresenta os resultados obtidos através do algoritmo $CV - LMPFA^{(r)}$ sob o segundo cenário. Os resultados numéricos apresentados na Tabela 11 se referem a este cenário.

Na Tabela 12 pode-se verificar uma significativa abertura angular com referência à barra *slack*, o que demonstra que a rede está fortemente carregada, principalmente na secção após a barra 7. Apesar disso, o perfil das magnitudes

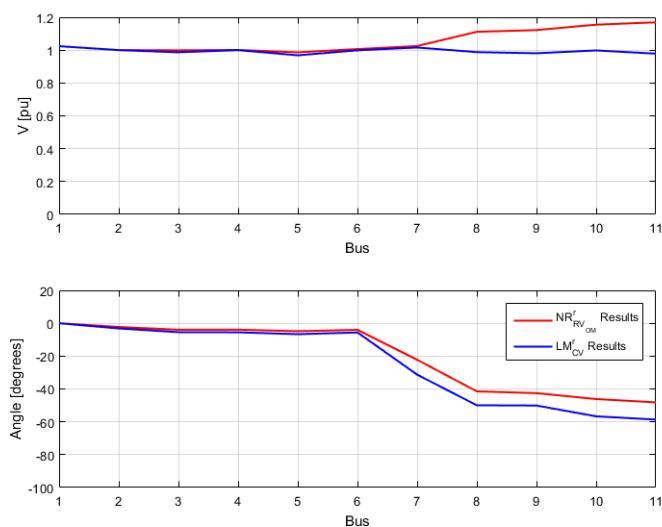


Figura 16 – IEEE-11 barras: variáveis de estado sob segundo cenário.

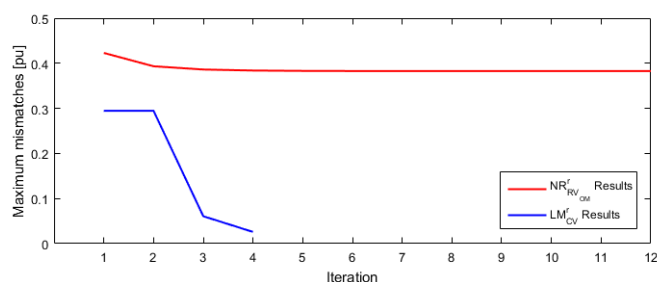


Figura 17 – IEEE-11 barras: evolução do máximo mismatch sob segundo cenário.

das tensões nodais é praticamente plano devido à inserção de barras PVs, ou seja, barras de tensão controladas. Note, porém, que as cargas ativas especificadas nas barras 9 e 11 não são supridas e há uma pequena violação da tensão especificada para as barras PVs 7, 8 e 10, junto ao aparecimento de uma injeção de potência ativa nessas barras. Estes resíduos são esperados uma vez que o sistema é insolúvel, ou seja, não há solução que zere o mismatch. Apesar disso, o algoritmo proposto é o que então mais se aproxima de uma melhor solução possível com um mismatch residual mínimo.

Tabela 12 – IEEE-11 Barras - variáveis de estado e injeções de potência.

Barra No.	V pu	δ graus	P MW	Q MVar
1	1.0240	0.0000	82.666	37.184
2	1.0000	-3.2673	-0.000	-72.670
3	0.9869	-5.5463	-12.800	-6.200
4	1.0000	-5.7015	-0.000	46.270
5	0.9683	-6.7948	-16.500	-8.000
6	0.9988	-5.7923	-9.000	-6.800
7	1.0159	-32.7704	-0.003	-5.945
8	0.9878	-52.0557	1.082	39.686
9	0.9810	-52.2028	-0.436	-0.897
10	0.9982	-58.7867	1.285	18.093
11	0.9787	-60.7492	-13.212	-5.691

4.3.2 Sistema teste IEEE-43 Barras

O sistema testes IEEE-43 Barras é um exemplo onde a elevada relação R/X de seus ramos leva o sistema à insolubilidade.

A Fig. 18 mostra as variáveis de estado resultantes dos algoritmos $RV - OMPFA^{(r)}$ e $CV - LMPFA^{(r)}$ e a Fig. 19 mostra a evolução do máximo mismatch para estes dois algoritmos. Neste caso ambos algoritmos convergem para o mesmo ponto. Ainda assim, o algoritmo $CV - LMPFA^{(r)}$ apresenta melhor performance, como pode ser observado pelos dados da Tabela 11.

4.4 Conclusões Parciais

As conclusões extraídas da análise comparativa de desempenho apresentada anteriormente podem ser discutidas sob duas óticas.

A primeira discorre sobre o desempenho comparativo do algoritmo de Newton-Raphson derivado no plano complexo ($CV - NRPF A^{(r)}$) frente o mesmo algoritmo implementado no domínio dos números reais ($RV - NRPF A^{(r)}$). Ambos apresentam o mesmo desempenho em coordenadas retangulares. Porém, as seguintes discordâncias podem ocorrer:

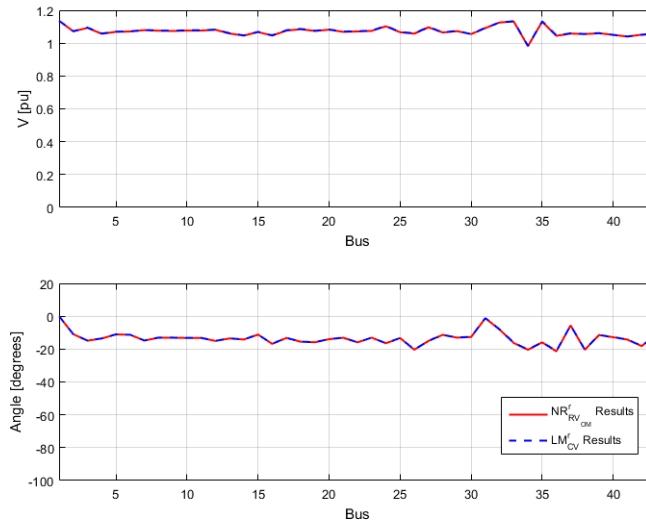


Figura 18 – IEEE-43 barras: variáveis de estado.

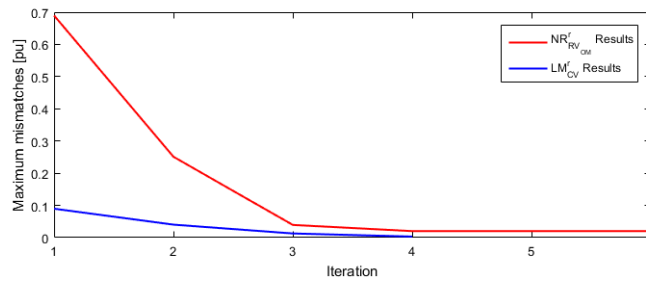


Figura 19 – IEEE-43 barras: evolução do máximo mismatch.

1. O número desigual de iterações necessárias para a convergência do processo iterativo, quando o algoritmo de Newton-Raphson é implementado em coordenadas polares e retangulares. Tal discrepância pode ser explicada pela própria diferença entre as aritméticas de números reais e complexo, bem como pelas diferenças entre as implementações em coordenadas polares e retangulares, propriamente dito. Esta última, amplamente documentada na literatura [30].
2. Apesar de prematuro, há de se destacar que os algoritmos implementados no plano complexo tendem a apresentar robustez numérica superior aos seus pares implementados no domínio de números reais, pois permitem obter a

melhor solução possível para as redes mal condicionadas numericamente. Por exemplo, observe que o algoritmo de Newton-Raphson no plano complexo em coordenadas retangulares ($CV - NRPF A^{(r)}$) é capaz de capturar a solução para a rede IEEE-43 barras, enquanto o seu par ($RV - NRPF A^{(r)}$) colapsa.

A segunda análise refere-se ao estudo comparativo do desempenho do algoritmo de Levenberg-Marquadt de Ordem Superior em coordenadas retangulares ($CV - LMPFA^{(r)}$) com o desempenho do algoritmo proposto por Iwamoto [21], que é igualmente derivado em coordenadas retangulares ($RV - OMPFA^{(r)}$). Tal análise revela:

1. O algoritmo de Levenberg-Marquadt apresenta desempenho superior em dois aspectos relevantes. O primeiro quanto ao número inferior de iterações necessárias para atingir a convergência, que em média é a metade do número de iterações exigidas pelos seus pares tradicionais, independentemente do condicionamento numérico da matriz Jacobiana, ou seja, redes bem ou mal condicionadas.
2. Para as redes mal condicionadas, ou insolúveis, o algoritmo de Levenberg-Marquadt apresenta a melhor solução possível quando comparada com aquela produzida pelo algoritmo de Iwamoto. Tal análise comparativa ocorre tanto pela qualidade da solução, isto é, menores magnitudes dos mismatches, bem como pelo número inferior de iterações.
3. Apesar das técnicas de ordenação e de armazenamento esparsos ainda não terem sido totalmente exploradas, por exemplo, o não armazenamento das variáveis complexas conjugadas e a ordenação de linhas da matriz Jacobiana, o tempo por iteração do algoritmo de Levenberg-Marquadt em média é inferior ao de seus pares.

Finalmente, destaca-se que o algoritmo de Levenberg-Marquadt se mostrou superior na captura de uma solução para redes mal condicionadas ou mesmo insolúveis pela condição de elevado carregamento ou pela característica própria dos parâmetros de elevada relação R/X.

5 Conclusões Gerais

O trabalho acadêmico apresentado nesta dissertação de mestrado desenvolve e implementa o algoritmo de Levenberg-Marquardt de ordem superior totalmente derivado num sistema de coordenadas unificado—Plano Complexo, diferentemente do que ocorre há mais de sessenta anos. Como destaque, é oportuno ressaltar o desempenho superior demonstrado nas simulações e análises comparativas frente o desempenho dos algoritmos já consolidados na indústria. Além disso, a proposta apresentada mostra-se com grande potencial de uso no futuro próximo, face às facilidades de implementação de novas funcionalidades requeridas pela modelagem das redes ativas inteligentes, além da comodidade de implementação das funcionalidades já amplamente conhecidas. Por exemplo, a modelagem de dispositivos FACTS tais como STATCOM, links VSC-HVDC bem como o desafio de modelar explicitamente as redes híbridas, isto é, AC. Além desta última pretensão, como investigações futuras pretende-se revisitar a família de métodos do gradiente conjugado, por conta da motivação mostrada na Fig. 1.

5.1 Artigo sob Revisão

1. Pires, R. e Mili, L. e Chagas, G. - "Complex-Valued High-Order Levenberg-Marquardt Algorithm as Applied to Power Flow Analysis", IEEE Transaction on Power Systems, TPWRS-00321-2018.R1, pp. 1-10.

Apêndices

APÊNDICE A –

Sistemas Mal Condicionados

Os dados dos sistemas mal comportados descritos a seguir podem ser encontrados em [55] (IEEE-11 barras) e em [26] (IEEE-43 barras).

A.1 Sistema IEEE-11 Barras

Tabela 13 – IEEE-11 Barras - dados das barras.

Barra No.	Barra tipo ^a	V pu	δ graus	Carga		Geração	
				MW	MVAr	Mw	MVAr
1	1	1.024	0.0	0.0	0.0	-	-
2	2	1.000		0.0	0.0	0.0	0.0
3	0			12.8	6.2	0.0	0.0
4	2	1.000		0.0	0.0	0.0	0.0
5	0			16.5	8.0	0.0	0.0
6	0			9.0	6.8	0.0	0.0
7	2	1.000		0.0	0.0	0.0	0.0
8	2	1.000		0.0	0.0	0.0	0.0
9	0			2.6	0.9	0.0	0.0
10	2	1.000		0.0	0.0	0.0	0.0
11	0			15.8	5.7	0.0	0.0

^a 0: Barra PQ
1: Barra Slack
2: Barra PV

Tabela 14 – IEEE-11 Barras - dados dos ramos.

Ramos		Impedância		Susceptância	Transformador
De	Para	R [pu]	X [pu]	pu	Tap
1	2	0.0	0.0706	0	1
2	3	0.0	0.1540	0	1
2	4	0.0377	0.0413	0	1
3	5	0.1228	0.1803	0	1
4	5	0.0	0.4593	0	1
4	6	0.0	0.0176	0	1
4	7	0.6114	0.8117	0	1
7	8	0.6209	0.2167	0	1
8	9	0.0718	0.7179	0	1
8	10	0.4097	0.5600	0	1
10	11	0.0264	0.2646	0	1

A.2 Sistema IEEE-43 Barras

Tabela 15 – IEEE-43 Barras - dados das barras.

Barra No.	Barra tipo	V pu	δ graus	Carga		Geração	
				MW	MVAr	Mw	MVAr
1	1	1.1360	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0			0.0	0.0	0.0	0.0
3	0			16	12	0.0	0.0
4	0			0.0	0.0	0.0	0.0
5	0			53	40	0.0	0.0
6	0			0.0	0.0	0.0	0.0
7	0			160	120	0.0	0.0
8	0			0.0	0.0	0.0	0.0
9	0			0.0	0.0	0.0	0.0
10	0			0.0	0.0	0.0	0.0
11	0			0.0	0.0	0.0	0.0
12	0			80	60	0.0	0.0
13	0			0.0	0.0	0.0	0.0
14	0			80	60	0.0	0.0
15	0			0.0	0.0	0.0	0.0
16	0			64	48	0.0	0.0
17	0			0.0	0.0	0.0	0.0
18	0			24	18	0.0	0.0
19	0			0.0	0.0	0.0	0.0
20	0			88	66	0.0	0.0
21	0			0.0	0.0	0.0	0.0
22	0			0.0	0.0	0.0	0.0
23	0			0.0	0.0	0.0	0.0
24	0			64	48	0.0	0.0
25	0			0.0	0.0	0.0	0.0
26	0			80	60	0.0	0.0
27	0			32	24	0.0	0.0
28	0			0.0	0.0	0.0	0.0
29	0			0.0	0.0	0.0	0.0
30	0			0.0	0.0	0.0	0.0
31	0			0.0	0.0	116	52
32	0			0.0	0.0	290	257
33	0			0.0	0.0	28.5	30
34	0			0.0	0.0	0.0	0.0
35	0			0.0	0.0	58	56
36	0			5.0	3.0	0.0	0.0
37	0			0.0	0.0	0.0	0.0
38	0			144	102	0.0	0.0
39	0			0.0	0.0	0.0	0.0
40	0			0.0	0.0	0.0	0.0
41	0			80	30	0.0	0.0
42	0			224	168	0.0	0.0
43	0			0.0	0.0	0.0	0.0

Tabela 16 – IEEE-43 Barras - dados dos ramos.

Ramos		Impedância		Susceptância	Transformador
De	Para	R [pu]	X [pu]	pu	Tap
1	2	0.00000	0.03267	0	1
2	5	0.00033	0.00104	0	1
2	6	0.00267	0.00840	0	1
2	15	0.00054	0.00170	0	1
3	4	0.00000	0.16625	0	1
4	13	0.00795	0.00815	0	1
5	7	0.00000	0.04700	0	1
5	8	0.00000	0.04875	0	1
6	12	0.00000	0.09400	0	1
8	9	0.00169	0.00173	0	1
8	23	0.00299	0.00305	0	1
9	10	0.04050	0.04150	0	1
9	16	0.00000	0.11369	0	1
10	11	0.00000	0.35002	0	1
10	17	0.00000	0.17501	0	1
13	18	0.00000	0.16625	0	1
13	25	0.01580	0.01610	0	1
14	43	0.00000	0.06494	0	1
15	19	0.00000	0.11562	0	1
15	20	0.00000	0.06333	0	1
15	28	0.00109	0.00228	0	1
19	22	0.00162	0.00269	0	1
21	24	0.00000	0.10791	0	1
21	29	0.00363	0.00465	0	1
22	26	0.00000	0.11083	0	1
23	29	0.00309	0.00317	0	1
25	27	0.00000	0.11083	0	1
25	29	0.00750	0.00880	0	1
28	39	0.00190	0.00240	0	1
29	30	0.00000	0.26553	0	1
29	37	0.00000	0.12666	0	1
30	32	0.00000	0.03250	0	1
30	38	0.00000	0.24207	0	1
30	40	0.00050	0.00193	0	1
31	37	0.00000	0.07670	0	1
33	38	0.00000	0.30120	0	1
34	38	0.00000	0.14594	0	1
35	38	0.00000	0.16181	0	1
36	38	0.00000	0.36996	0	1
39	41	0.00000	0.06660	0	1
39	43	0.00323	0.00000	0	1
40	42	0.00000	0.04625	0	1

Referências

- 1 STEINMETZ, C. P. Complex quantities and their use in electrical engineering. *Proceedings of the International Electrical Congress*, p. 33–74, 1893. [14](#)
- 2 DZAFIC, I.; JABR, R. A.; HRNJIĆ, T. High performance distribution network power flow using wirtinger calculus. *IEEE Transactions on Smart Grid*, p. 1–9, 2018. ISSN 1949-3053. [14](#)
- 3 DZAFIC, I.; JABR, R. A.; HRNJIC, T. Hybrid state estimation in complex variables. *IEEE Transactions on Power Systems*, p. 1–8, 2018. ISSN 0885-8950. [14](#)
- 4 POURBAGHER, R.; DERAKHSHANDEH, S. Y. Application of high-order Levenberg -Marquardt method for solving the power flow problem in the ill-conditioned systems. *IET Generation, Transmission Distribution*, v. 10, n. 12, p. 3017–3022, 2016. ISSN 1751-8687. [14](#), [15](#), [30](#)
- 5 WANG, Z.; CUI, B.; WANG, J. A necessary condition for power flow insolvability in power distribution systems with distributed generators. *IEEE Transactions on Power Systems*, PP, n. 99, p. 1–1, 2016. ISSN 0885-8950. [14](#)
- 6 NGUYEN, H. L. Newton-raphson method in complex form [power flow analysis]. In: *Transmission and Distribution Conference, 1996. Proceedings., 1996 IEEE*. [S.l.: s.n.], 1996. p. 591–595. [14](#), [21](#)
- 7 NGUYEN, H. L. Newton-raphson method in complex form [power system load flow analysis]. *Power Systems, IEEE Transactions on*, v. 12, n. 3, p. 1355–1359, Aug 1997. ISSN 0885-8950. [14](#), [21](#)
- 8 NGUYEN, T.; VU, C. Complex-variable newton-raphson load-flow analysis with facts devices. In: *Transmission and Distribution Conference and Exhibition, 2005/2006 IEEE PES*. [S.l.: s.n.], 2006. p. 183–190. [14](#)
- 9 BAGHSORKHI, S. S.; SUETIN, S. P. Embedding AC power flow with voltage control in the complex plane : The case of analytic continuation via padé approximants. *CoRR*, abs/1504.03249, 2015. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/1504.03249>. [14](#)
- 10 TRIAS, A. The holomorphic embedding load flow method. In: *2012 IEEE Power and Energy Society General Meeting*. [S.l.: s.n.], 2012. p. 1–8. ISSN 1932-5517. [14](#)

- 11 WIRTINGER, W. Zur Formalen Theorie der Functionen Von Mehr Complexen Veranderlichen. *Math. Ann.*, v. 97, p. 357–375, 1927. [14](#), [17](#), [21](#)
- 12 ADALÝ, T.; SCHREIER, P. J. Optimization and estimation of complex-valued signals. *IEEE Signal Processing Magazine*, p. 112–128, September 2014. [14](#)
- 13 BONET, P. A. *Theory and Applications of Bounded Component Analysis in Complex Valued Signal Processing*. 238 p. Tese (Doutorado) — Department of Signal Theory and Communications, University of Seville, Spain, February 2013. [14](#)
- 14 TRAMPITSCH, S. *Complex-Valued Data Estimation: Second-Order Statistics and Widely Linear Estimators*. 123 p. Dissertação (Mestrado) — Institut für Vernetzte und Eingebettete Systeme, Klagenfurt, Austria, April 2013. [14](#)
- 15 SORBER, L.; BAREL, M. V.; LATHAUWER, L. de. Unconstrained optimization of real functions in complex variables. *Society for Industrial and Applied Mathematics - SIAM*, v. 22, No. 3, p. 879–898, 2012. [14](#), [30](#)
- 16 ADALÝ, T.; HAYKIN, S. *Adaptive Signal Processing: Next-Generation Solutions*. [S.l.]: John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2010. [14](#)
- 17 AMIN, M. F.; MURASE, K. *Complex-Valued Neural Networks - Advances and Applications*. [S.l.: s.n.], 2013. (IEEE Press Series on Computational Intelligence). [14](#)
- 18 WARD, J. B.; HALE, H. W. Digital computer solution of power-flow problems [includes discussion]. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers. Part III: Power Apparatus and Systems*, v. 75, n. 3, p. 398–404, Jun 1956. ISSN 0097-2460. [15](#)
- 19 BRAZ, L. M. C.; CASTRO, C. A.; MURATI, C. A. F. A critical evaluation of step size optimization based load flow methods. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 15, n. 1, p. 202–207, Feb 2000. ISSN 0885-8950. [15](#)
- 20 IWAMOTO, S.; TAMURA, Y. A fast load flow method retaining nonlinearity. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-97, n. 5, p. 1586–1599, Sept 1978. ISSN 0018-9510. [15](#)
- 21 IWAMOTO, S.; TAMURA, Y. A load flow calculation method for ill-conditioned power systems. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-100, n. 4, p. 1736–1743, April 1981. ISSN 0018-9510. [15](#), [30](#), [49](#), [54](#)

- 22 ZHAO, J.; MILL, L.; PIRES, R. C. Statistical and numerical robust state estimator for heavily loaded power systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, p. 1–10, 2018. ISSN 0885-8950. 15
- 23 TAMURA, Y.; SAKAMOTO, K.; TAYAMA, Y. Voltage instability proximity index (vipi) based on multiple load flow solutions in ill-conditioned power systems. In: *Proceedings of the 27th IEEE Conference on Decision and Control*. [S.l.: s.n.], 1988. p. 2114–2119 vol.3. 15, 30
- 24 TRIPATHY, S. C.; PRASAD, G. S. S. S. K. P. Load flow solution for ill-conditioned power systems by quadratically convergent newton-like method. *IEE Proceedings C - Generation, Transmission and Distribution*, v. 127, n. 5, p. 273–280, September 1980. ISSN 0143-7046. 15, 30
- 25 TRIPATHY, S. C. et al. Load-flow solutions for ill-conditioned power systems by a newton-like method. *IEEE Power Engineering Review*, PER-2, n. 10, p. 25–26, Oct 1982. ISSN 0272-1724. 15, 30
- 26 TRIPATHY, S. C. et al. Late discussion and closure to "load-flow solutions for ill-conditioned power systems by a newton-like method". *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-103, n. 8, p. 2368–2368, Aug 1984. ISSN 0018-9510. 15, 30, 57
- 27 FAN, J. Accelerating the modified Levenberg-Marquardt method for nonlinear equations. *Mathematics of Computation*, v. 287, n. 83, p. 1173 – 1187, 2014. ISSN 0377-0427. 15, 30
- 28 YANG, X. A higher-order Levenberg–Marquardt method for nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation*, v. 219, n. 22, p. 10682 – 10694, 2013. ISSN 0096-3003. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300313004487>>. 15, 30, 31, 32, 33
- 29 SHAHRIARI, A.; MOKHLIS, H.; BAKAR, A. Critical reviews of load flow methods for well, ill and unsolvable condition. *Journal of Electrical Engineering*, v. 63, n. 3, p. 144 – 152, 2012. Disponível em: <<https://content.sciendo.com/view/journals/jee/63/3/article-p144.xml>>. 15
- 30 TATE, J. E.; OVERBYE, T. J. A comparison of the optimal multiplier in polar and rectangular coordinates. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 20, n. 4, p. 1667–1674, Nov 2005. ISSN 0885-8950. 15, 53
- 31 SACHDEV, M. S.; MEDICHERLA, T. K. P. A second order load flow technique. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, v. 96, n. 1, p. 189–197, Jan 1977. ISSN 0018-9510. 15

- 32 KREUTZ-DELGADO, K. The complex gradient operator and the CR-calculus. *ArXIV e-print, arXIV:0906.4835v1 [math.OA]*, p. 1–74, June 25, 2009. [16](#)
- 33 HAGER, W. W.; ZHANG, H. A survey of nonlinear conjugate gradient method. *Pacific Journal of Optimization*, p. 35–58, 01 2006. [19](#)
- 34 NGUYEN, T. T.; VU, C. Complex-variable newton-raphson load-flow analysis with FACTS devices. In: IEEE (Ed.). *Transmission and Distribution Conference and Exhibition, 2005/2006 IEEE PES*. <http://dx.doi.org/10.1109/TDC.2006.1668480>: IEEE, 2006. p. 183 – 190. [21](#)
- 35 BARBOZA, L.; ZÜRN, H.; SALGADO, R. Load tap change transformer: A modeling reminder. *IEEE Power Engineering Review*, p. 51–52, 2001. [21](#), [22](#)
- 36 PIRES, R. Unbalanced phase-to-phase voltage compensators applied to radial distribution feeders. *Power Delivery, IEEE Transactions on*, v. 19, n. 2, p. 806–812, April 2004. ISSN 0885-8977. [21](#)
- 37 VERBOOMEN, J. et al. Phase shifting transformers: principles and applications. In: *2005 International Conference on Future Power Systems*. [S.l.: s.n.], 2005. p. 6 pp.–6. [28](#)
- 38 BHOWMICK, S. *Flexible Transmission Systems (FACTS) - Newton Power Flow Modeling of Voltage-Sourced Converter Based Controllers*. [S.l.: s.n.], 2016. (International Standard Book Number-13: 978-1-4987-5620-4 (eBook - PDF)). [28](#)
- 39 ZHANG, X.-P. Multiterminal voltage-sourced converter-based **HVDC** models for power flow analysis. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 19, n. 4, p. 1877–1884, Nov 2004. ISSN 0885-8950. [28](#)
- 40 BROWN, K. M. A quadratically convergent newton-like method based upon gaussian elimination. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 6, n. 4, p. 560–569, 1969. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/0706051>. [30](#)
- 41 BRENT, R. P. Some efficient algorithms for solving systems of nonlinear equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 10, n. 2, p. 327–344, 1973. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/0710031>. [30](#)
- 42 MARTINEZ, J. M. Generalization of the Methods of Brent and Brown for Solving Nonlinear Simultaneous equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 16, n. 3, p. 434–448, 1979. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/0716036>. [30](#)

- 43 MORÉ, J. J.; COSNARD, M. Y. Numerical solution of nonlinear equations. *ACM Trans. Math. Softw.*, ACM, New York, NY, USA, v. 5, n. 1, p. 64–85, mar. 1979. ISSN 0098-3500. Disponível em: <<http://doi.acm.org/10.1145/355815.355820>>. 30
- 44 MARTÍNEZ, J. M. Solving nonlinear simultaneous equations with a generalization of brent's method. *BIT Numerical Mathematics*, v. 20, n. 4, p. 501–510, Dec 1980. ISSN 1572-9125. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01933643>>. 30
- 45 KLOS, A.; KERNER, A. The non-uniqueness of load flow solutions. *Proceedings of 5th power system computation conference (PSCC) - Cambridge - UK*, p. 268–276, July 1975. 30
- 46 AMINI, K.; ROSTAMI, F. A modified two steps Levenberg-Marquardt method for nonlinear equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 288, n. Supplement C, p. 341 – 350, 2015. ISSN 0377-0427. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042715002666>>. 30
- 47 AMINI, K.; ROSTAMI, F. Three-steps modified Levenberg-Marquardt method with a new line search for systems of nonlinear equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 300, n. Supplement C, p. 30 – 42, 2016. ISSN 0377-0427. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042715006251>>. 30
- 48 MEYER, C. D. *Matrix Analysis and Linear Algebra*. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics - SIAM, 2000. 30
- 49 AWASTHI, A. et al. Complex QR decomposition using fast plane rotations for MIMO applications. *IEEE Communications Letters*, v. 18, No. 10, p. 1743–1746, 2014. 33
- 50 MALTSEV, A. et al. Triangular systolic array with reduced latency for QR-decomposition of complex matrices. *IEEE International Symposium on Circuits and Systems - ISCAS*, p. 385–388, 2006. 33
- 51 GENTLEMAN, W. Least Squares Computations by Givens Transformations Without Square Roots. *Journal of Mathematics Applications*, v. 12, p. 329–336, 1974. 33
- 52 SIMÕES-COSTA, A.; QUINTANA, V. An Orthogonal Row Processing Algorithm for Power Sequential State Estimation. *IEEE-Transaction on Power Apparatus and Systems*, v. 100, n. 8, p. 3791–3800, August 1981. 33

-
- 53 WANG, J. W.; QUINTANA, V. H. A decoupled orthogonal row processing algorithm for power system state estimation. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-103, n. 8, p. 2337–2344, Aug 1984. ISSN 0018-9510. [33](#)
- 54 VEMPATI, N.; SLUTSKER, I. W.; TINNEY, W. F. Enhancement to givens rotations for power system state estimation. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 6, n. 2, p. 842–849, May 1991. ISSN 0885-8950. [33](#)
- 55 REDDY, S. *Load Flow Analysis With Facts Devices for Well and Ill Conditioned Systems*. 198 p. Tese (Doutorado) — Jawaharlal Nehru Technological University, Kukatpally, India, June 2009. [57](#)