

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

CAPACIDADE DE PREVISÃO
DE SOLUÇÕES PARETO ÓTIMAS

Lucas Guedes de Oliveira

Itajubá, Agosto de 2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

Lucas Guedes de Oliveira

CAPACIDADE DE PREVISÃO
DE SOLUÇÕES PARETO ÓTIMAS

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção como requisito para a obtenção do título de *Doutor em Ciências em Engenharia de Produção*.

Área de concentração: Engenharia de Produção

Orientador: Prof. Anderson Paulo de Paiva, Dr.

Agosto de 2020

Itajubá

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

Lucas Guedes de Oliveira

CAPACIDADE DE PREVISÃO
DE SOLUÇÕES PARETO ÓTIMAS

Tese aprovada por banca examinadora em 07 de
Agosto de 2020.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Anderson Paulo de Paiva (Orientador)

Prof. Dr. Antônio Fernando Branco Costa (UNIFEI)

Prof. Dr. Pedro Paulo Balestrassi (UNIFEI)

Prof. Dr. Roberto da Costa Quinino (UFMG)

Prof. Dr. Rogério Santana Peruchi (UFPB)

Itajubá

2020

DEDICATÓRIA

Aos meus pais, Luzia e Jorge.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por sua maravilhosa graça e por sua manifesta presença em minha vida.

Aos meus pais, Luzia e Jorge, pelo amor com que têm se dedicado à minha vida, pelos exemplos de conduta e pela compreensão em todos os momentos.

Ao meu orientador, Prof. Anderson Paiva, por ter confiado em meu trabalho, pelas oportunidades de crescimento e por todos os ensinamentos e orientações.

Ao Prof. Paulo Campos e a sua esposa Fabrícia, pela amizade e por todo o apoio no período em que estive na pós-graduação.

Ao Prof. Carlos Oliveira e a sua esposa Cecília, pela amizade e pelo apoio que me deram ainda antes que ingressasse na pós-graduação.

Aos professores Carlos Oliveira, Paulo Campos e Tarcísio Brito pelas parcerias para a aplicação dos modelos desenvolvidos em processos industriais.

Ao Prof. Carlos Sanches, a quem faço menção especial, pelo incentivo, pela amizade e pela generosidade, desde a graduação.

Aos professores João Roberto, Pedro Balestrassi e Sebastião pelos ensinamentos, pela consideração e pelo incentivo.

Aos professores Carlos Mello, Edson Pamplona, Fabiano, Gonzaga, José Arnaldo, José Hamilton, José Leonardo, Juliana Gaudêncio, Rafael Leme, Rafael Miranda, Renato Lima, Sandra Neves, Turrioni e a todos os professores do Instituto de Engenharia de Produção e Gestão pelo apoio, pela consideração e pela amizade.

Aos membros da banca examinadora Prof. Anderson Paiva, Prof. Antônio Branco, Prof. Pedro Balestrassi, Prof. Roberto Quinino e Prof. Rogério Peruchi por todas as sugestões e contribuições. Também agradeço ao Prof. José Henrique pela participação na banca de qualificação de doutorado e por suas sugestões e contribuições.

A todos os professores do Campus de Itabira e, em especial, aos professores Emerson Paiva, José Lacerda, Rogério Brito e Sandra Neves por terem acreditado e confiado em meu trabalho durante o curso de Engenharia e me incentivado a ingressar na pós-graduação.

A todos os amigos da UNIFEI e, em especial, do GEPE de Qualidade e Produtos. Aos irmãos e amigos da I Igreja Presbiteriana de Itajubá e das demais igrejas presbiterianas que, carinhosamente, me abraçaram.

Aos amigos, técnicos e demais funcionários da UNIFEI.

À CAPES, ao CNPq, à FAPEMIG, e à UNIFEI.

EPÍGRAFE

*O temor do Senhor é o
princípio da sabedoria.
(Provérbios 9:10a)*

RESUMO

A Metodologia de Superfície de Resposta consiste em uma estrutura eficaz para conduzir a modelagem e a otimização de processos industriais. O arranjo composto central é o arranjo experimental mais popular para análises de superfície de resposta, devido a suas boas propriedades estatísticas, como variância de previsão reduzida no centro do arranjo, onde se esperam encontrar os pontos estacionários dos modelos de regressão. No entanto, a prática comum de reduzir os pontos centrais nos estudos de superfície de resposta pode comprometer essa propriedade. Além disso, os pontos estacionários e de ótimo raramente são coincidentes em processos de fabricação, por várias razões, como modelos em formato de sela, convexidade incompatível com o sentido de otimização, respostas conflitantes e convexidades distintas. Isso significa que, mesmo quando o número de pontos centrais for apropriado, as soluções ótimas estarão em regiões com maior variância de previsão. Considerando esse cenário, neste estudo, admite-se que a variância de previsão também deva ser considerada nos problemas de otimização multiobjetivo. Para isso, propõe-se uma estratégia de otimização multi-critério com base em razões de capacidade, na qual (1) a variância de previsão é tomada como variabilidade natural do modelo e (2) as diferenças dos valores esperados aos pontos de nadir são tomadas como variabilidades permitidas. A Análise Fatorial com escores rotacionados é adotada para o agrupamento de variáveis correlacionadas. O método de Interseção Normal à Fronteira é adotado para a condução da otimização das razões de capacidade e para a obtenção das fronteiras de Pareto. Para ilustrar a viabilidade da abordagem proposta, apresentam-se dois estudos de caso: (1) do torneamento do aço ABNT H13 com ferramenta wiper CC650 e (2) do fresamento de topo do aço inoxidável duplex UNS S32205, ambos processos sem fluido de corte. Os resultados sustentaram que, em ambos os casos, a abordagem proposta foi capaz de encontrar um conjunto de soluções ótimas com capacidades de previsão satisfatórias para todas as respostas de interesse. No primeiro caso, isso se deu mesmo com número reduzido de pontos centrais, uma função em formato de sela e uma função convexa, com objetivos conflitantes. No segundo caso, resultados semelhantes foram observados para seis respostas correlacionadas, com objetivos conflitantes e fatores rotacionados modelados por selas.

Palavras-chave: variância de previsão, razões de capacidade dos modelos, planejamento de experimentos, metodologia de superfície de resposta (MSR), interseção normal à fronteira (NBI); otimização multiobjetivo.

ABSTRACT

Response Surface Methodology is an effective framework for performing modelling and optimization of industrial processes. The Central Composite Design is the most popular experimental design for response surface analyses given its good statistical properties, such as decreasing prediction variance in the design center, where it is expected to find the stationary points of the regression models. However, the common practice of reducing center points in response surface studies may damage this property. Moreover, stationary and optimum points are rarely the same in manufacturing processes, for several reasons, such as saddle-shaped models, convexity incompatible with optimization direction, conflicting responses, and distinct convexities. This means that even when the number of center points is appropriate, the optimal solutions will lie in regions with larger prediction variance. Considering that, in this paper, we advocate that the prediction variance should also be considered into multiobjective optimization problems. To do this, we propose a multi-criteria optimization strategy based on capability ratios, wherein (1) the prediction variance is taken as the natural variability of the model and (2) the differences of expected values to nadir solutions are taken as the allowed variability. Factor Analysis with rotated scores is adopted for the grouping of correlated variables. Normal Boundary Intersection method is formulated for performing the optimization of capability ratios and obtaining the Pareto frontiers. To illustrate the feasibility of the proposed approach, two case studies are presented: (1) the turning of AISI H13 steel with wiper CC650 tool and (2) the end milling of the UNS S32205 duplex stainless steel, both processes without cutting fluids. The results have supported that the proposed approach was able to find a set of optimal solutions with satisfactory prediction capabilities for all responses of interest. In the first case, this occurred even with a reduced number of center points, a saddle-shaped function and a convex function, with conflicting objectives. In the second case, similar results were observed for six correlated responses, with conflicting objectives and rotated factors modeled by saddles.

Keywords: prediction variance; model capability ratios; design of experiments; response surface methodology (RSM); normal boundary intersection (NBI); multiobjective optimization.

LISTA DE FIGURAS

| | |
|--|-----|
| Figura 2.1 - Variância Escalonada de Previsão para um Arranjo Composto Central rotacionável com $k=3$ e diferentes quantidade de pontos centrais: a) um ponto central, b) três pontos centrais e c) seis pontos centrais. | 39 |
| Figura 2.2 - Gráficos de dispersão de variância para o arranjo composto central com parâmetros $k = 3, n_c = 6$ e α variável ¹ | 51 |
| Figura 2.3 - Gráficos de dispersão de variância para o arranjo composto central com parâmetros $k = 3, n_c = 1$ e α variável ¹ | 52 |
| Figura 2.4 - Gráfico de dispersão de variância para o arranjo composto central com parâmetros $k = 3, \alpha = 1,682$ (rotacionável) e n_c variável ¹ | 53 |
| Figura 2.5 - Gráficos de dispersão de variância para o arranjo composto central com parâmetros $k = 3, \alpha = 1,000$ (face centrada) e n_c variável. | 54 |
| Figura 2.6 - Processos sob diferentes condições de centralidade com o mesmo C_p^a | 59 |
| Figura 4.1 - Fronteira de Pareto obtida via NBI para um problema bi-objetivo | 73 |
| Figura 5.1 - Regiões de capacidade de previsão para soluções Pareto ótimas ¹ | 80 |
| Figura 6.1 - Método NBI-GRG: fronteira de Pareto para a maximização das razões modificadas de capacidade construídas para variáveis originais independentes | 89 |
| Figura 6.2 - Método NBI-GRG: fronteira de Pareto para a maximização das razões multivariadas modificadas de capacidade construídas para variáveis latentes..... | 94 |
| Figura 7.1 - Processo de torneamento do aço endurecido H13 com ferramenta wiper CC650: (a) Processo de torneamento. (b) Ferramenta CC650 wiper. | 103 |
| Figura 7.2 - Imagens óticas dos mecanismos de desgaste. (a) Desgaste de Flanco e (b) Desgaste de Cratera..... | 105 |
| Figura 7.3 - Análise de efeitos sobre as variáveis de resposta. (a) Gráfico de Pareto para T . (b) Gráfico de Pareto para Ra . (c) Gráfico de efeitos principais para T . (d) Gráfico de efeitos principais para Ra | 106 |
| Figura 7.4 - Superfície de resposta para T . (a) Vc vs $f, ap=0$. (b) Vc vs $ap, f=0$. (c) f vs $ap, Vc=0$ | 108 |
| Figura 7.5 - Superfície de resposta para Ra : (a) Vc vs $f, ap=0$. (b) Vc vs $ap, f=0$. (c) f vs $ap, Vc=0$ | 109 |
| Figura 7.6 - Análise de sensibilidade para T e Ra . (a) Alteração máxima de T . (b) Alteração máxima de Ra | 111 |
| Figura 7.7 - Fronteira de Pareto para T e Ra | 113 |

| | |
|--|-----|
| Figura 7.8 - Fronteiras de Pareto dentro da região viável para as abordagens tradicional e proposta | 115 |
| Figura 7.9 - Simulação do processo para T considerando benchmarks de Ra e T e uma solução ótima (média) conveniente | 116 |
| Figura 7.10 - Simulação do processo para Ra considerando benchmarks de Ra e T e uma solução ótima (média) conveniente | 117 |
| Figura 7.11 - Fronteira de Pareto para $Cpk(T)$ e $Cpk(Ra)$ com clusters de capacidade para as soluções ótimas ¹ | 121 |
| Figura 7.12 - Fronteira de Pareto para T e Ra com clusters de capacidade para as soluções ótimas ¹ | 121 |
| Figura 7.13 - Fronteiras Pareto para $Cpk(T)$ e $Cpk(Ra)$ obtidas com diferentes métodos multiobjetivos. (a) NBI. (b) NNC. (c) WS. (d) GCM. ¹ | 122 |
| Figura 7.14 - Comparação entre os resultados simulados obtidos com as abordagens tradicional e proposta. (a) Resultados simulados para T . (b) Resultados simulados para Ra | 124 |
| Figura 7.15 - Fronteiras de Pareto para (a) $EQM(T)$ e $EQM(Ra)$ e (b) $Cpk(T)$ e $Cpk(Ra)$ convertidos | 127 |
| Figura 7.16 - Fronteiras de Pareto obtidas para $Cpk(T)$ e $Cpk(Ra)$ usando a métrica de variância de previsão $Var[\hat{y}(\mathbf{x})]$ (linhas contínuas) e a variância média integrada IV_p (linhas pontilhadas) com diferentes quantidades de pontos centrais..... | 129 |
| Figura 7.17 - Fronteiras de Pareto obtidas para $Cpk(T)$ e $Cpk(Ra)$ usando a métrica de variância de previsão $Var[\hat{y}(\mathbf{x})]$ (linhas contínuas), a variância mínima $VMIN_p$ (linhas tracejadas) e a variância máxima $VMAX_p$ (linhas pontilhadas) com diferentes quantidades de pontos centrais. | 131 |
| Figura 7.18 - Processo de fresamento de topo: (a) Centro de usinagem. (b) Processo de corte. (c) Fresa de topo. (d) Inserto. | 137 |
| Figura 7.19 - Dendograma para as variáveis originais mostrando os <i>clusters</i> de fatores ¹ | 140 |
| Figura 7.20 - Gráficos de Pareto e de efeitos principais para as variáveis de resposta latentes. (a) F1. (b) F2..... | 144 |
| Figura 7.21 - Superfície de resposta para $F1$: (a) vc vs ae , $fz=0$. (b) vc vs fz , $ae=0$. (c) ae vs fz , $vc=0$ | 148 |
| Figura 7.22 - Superfície de resposta para $F2$: (a) vc vs ae , $fz=0$. (b) vc vs fz , $ae=0$. (c) ae vs fz , $vc=0$ | 149 |

| | |
|--|-----|
| Figura 7.23 - Análise de sensibilidade para $F1$ e $F2$. Taxas de crescimento de $F1$ (a) mais baixa e (b) mais alta. Taxas de crescimento de $F2$ (c) mais baixa e (d) mais alta. (e) Taxa de descrescimento de $F2$. | 150 |
| Figura 7.24 - Fronteira de Pareto para $F1$ e $F2$ ¹ | 158 |
| Figura 7.25 - Fronteiras de Pareto inseridas dentro da região viável de solução para as abordagens (a) tradicional e (b) proposta ¹ | 159 |
| Figura 7.26 – Fronteira de Pareto para $MCpk(F1)$ e $MCpk(F2)$ com clusters de capacidade para as soluções ótimas ¹ | 163 |
| Figura 7.27 - Fronteira de Pareto para as variáveis latentes $F1$ e $F2$ com clusters de capacidade para as soluções ótimas ¹ | 164 |
| Figura 7.28 - Gráficos de intervalo para as variáveis de resposta mostrando os <i>trade-offs</i> impostos pelas abordagens tradicional e proposta. ¹ | 165 |
| Figura 7.29 - Fronteiras de Pareto para (a) $EQMM(F1)$ e $EQMM(F2)$ e (b) $MCpk(F1)$ e $MCpk(F2)$ convertidos ¹ | 169 |
| Figura 7.30 - Fronteiras de Pareto obtidas para $MCpk(F1)$ e $MCpk(F2)$ usando a métrica de variância de previsão $Var[\hat{y}(\mathbf{x})]$ (linhas contínuas) e a variância média integrada IV_p (linhas pontilhadas) com diferentes quantidades de pontos centrais. | 172 |
| Figura 7.31 - Fronteiras de Pareto obtidas para $MCpk(F1)$ e $MCpk(F2)$ usando a métrica de variância de previsão $Var[\hat{y}(\mathbf{x})]$ (linhas contínuas), a variância mínima V_{MIN_p} (linhas tracejadas) e a variância máxima V_{MAX_p} (linhas pontilhadas) com diferentes quantidades de pontos centrais. | 174 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|---|-----|
| Tabela 2.1 - Quantidades recomendadas para os pontos e para a distância axial do CCD rotacionável | 27 |
| Tabela 2.2 - Coeficientes da função de variância induzida pelo arranjo experimental CCD ¹ . | 45 |
| Tabela 2.3 - Valores calculados de $h(\rho)$ e $h^*(\rho)$ para k variáveis ¹ | 46 |
| Tabela 2.4 - Valores mínimos recomendados para as razões de capacidade | 60 |
| Tabela 3.1 - Condições suficientes para se obter o ângulo máximo de rotação varimax..... | 67 |
| Tabela 7.1 - Parâmetros de controle e seus níveis..... | 102 |
| Tabela 7.2 - Matriz experimental e respostas coletadas | 104 |
| Tabela 7.3 - Modelos de superfície de resposta estimados para T e Ra (em unidades codificadas) ¹ | 107 |
| Tabela 7.4 - Soluções ótimas para o processo investigado..... | 114 |
| Tabela 7.5 - Intervalos de confiança para T e Ra na solução ótima 9 | 116 |
| Tabela 7.6 – Soluções ótimas para o processo investigado ¹ | 120 |
| Tabela 7.7 – Intervalos de confiança para T e Ra na solução ótima 14..... | 123 |
| Tabela 7.8 – Soluções ótimas para o processo investigado via EQMs modificados ¹ | 126 |
| Tabela 7.9 - Pontos axiais em um CCD de face centrada e respostas obtidas..... | 128 |
| Tabela 7.10 – Potenciais ganhos de capacidade de previsão por meio de deslocamentos do ponto à mesma distância radial para diferentes quantidades de pontos centrais ¹ | 134 |
| Tabela 7.11 - Parâmetros de controle e seus níveis..... | 136 |
| Tabela 7.12 - Composição química (% do peso) do aço inoxidável duplex UNS S32205. ... | 137 |
| Tabela 7.13 - Matriz experimental e respostas | 139 |
| Tabela 7.14 - Cargas e comunalidades dos fatores nas análises fatorial original e rotacionada | 142 |
| Tabela 7.15 - Modelos de superfície de resposta estimados para as características CTQ e CTP (em unidades codificadas) ¹ | 147 |
| Tabela 7.16 - Resumo das análises de curvatura, convexidade e sentido de otimização para cada modelo de superfície de resposta..... | 153 |
| Tabela 7.17 - Teste de curvatura para as variáveis originais e para os fatores..... | 154 |
| Tabela 7.18 - Soluções ótimas obtidas com a abordagem multivariada tradicional..... | 160 |
| Tabela 7.19 - Soluções ótimas obtidas com a abordagem proposta | 166 |
| Tabela 7.20 – Soluções ótimas para o processo investigado via EQMMs modificados ¹ | 168 |

| | |
|---|-----|
| Tabela 7.21 - Pontos axiais em um CCD de face centrada e respostas obtidas..... | 170 |
| Tabela 7.22 – Potenciais ganhos de capacidade de previsão por meio de deslocamentos do ponto à mesma distância radial para diferentes quantidades de pontos centrais ¹ | 175 |

LISTA DE QUADROS

| | |
|---|-----|
| Quadro 2.1 - Principais medidas de variância de previsão..... | 56 |
| Quadro 7.1 - Validação das hipóteses do problema | 179 |
| Quadro 7.2 – Comparação entre a estratégia de otimização proposta e a estratégia de otimização via EQM e EQMM modificados | 181 |

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

| | |
|-------|---|
| ABNT | Associação Brasileira de Normas Técnicas |
| AHL | Comprimento Homotópico do Arco ou <i>Arc Homotopic Length</i> |
| ANOVA | Análise de Variância ou <i>Analysis of Variance</i> |
| BBD | Arranjo Box-Behnken ou <i>Box-Behnken Design</i> |
| CCD | Arranjo Composto Central ou <i>Central Composite Design</i> |
| CNC | Comando Numérico Computadorizado ou <i>Computer Numerical Control</i> |
| CTQ | Crítica para a Qualidade ou <i>Critical-to-Quality</i> |
| CTP | Crítica para o Desempenho ou <i>Critical-to-Performance</i> |
| DOE | Planejamento de Experimentos ou <i>Design of Experiments</i> |
| EQM | Erro Quadrático Médio |
| EQMM | Erro Quadrático Médio Multivariado |
| FA | Análise Fatorial ou <i>Factor Analysis</i> |
| GCM | Método do Critério Global ou <i>Global Criterion Method</i> |
| GRG | Gradiente Reduzido Generalizado ou <i>Generalized Reduced Gradient</i> |
| IV | Variância Integrada ou <i>Integrated Variance</i> |
| LIE | Limite Inferior de Especificação |
| LSE | Limite Superior de Especificação |
| MRR | Taxa de Remoção de Material ou <i>Material Removal Rate</i> |
| MSR | Metodologia de Superfície de Resposta |
| NBI | Método Interseção Normal a Fronteira ou <i>Normal Boundary Intersection</i> |
| OLS | Mínimos Quadrados Ordinários ou <i>Ordinary Least Squares</i> |
| PC | Componente Principal ou <i>Principal Component</i> |
| PCA | Análise de Componentes Principais ou <i>Principal Component Analysis</i> |
| PREN | Número Equivalente de Resistência à Corrosão por Pite ou <i>Pitting Resistance Equivalent Number</i> |
| RPD | Projeto de Parâmetro Robusto ou <i>Robust Parameter Design</i> |
| SM | Sistema de Medição |
| SPV | Variância Escalonada de Previsão ou <i>Scaled Prediction Variance</i> |
| SSL | Soma de Quadrados das Cargas ou <i>Sum of Square Loads</i> |
| UNS | Sistema de Numeração Unificada ou <i>Unified Numbering System</i> |
| VDG | Gráfico de Dispersão de Variância ou <i>Variance Dispersion Graph</i> |
| WS | Somas Ponderadas ou <i>Weighted Sums</i> |

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|--------------------------|---|
| Ra | Rugosidade média |
| T | Vida da ferramenta de corte |
| Rq | Rugosidade quadrática |
| Ry | Rugosidade máxima |
| Rt | Rugosidade total |
| H_0 | Hipótese nula |
| H_1 | Hipótese alternativa |
| β | Coefficiente estimado do modelo |
| k | Número de fatores ou variáveis de entrada |
| F_0 | Estatística de teste Fisher-Snedecor |
| MS | Média de quadrados |
| n_F | Número de pontos fatoriais |
| n_C | Número de pontos centrais |
| y | Resposta medida, valor assumido por uma função ou modelo estimado |
| \emptyset | Número de graus de liberdade em F_0 |
| P | Probabilidade |
| $\Gamma(\cdot)$ | Função Gama |
| x | Variáveis independentes |
| $y(\mathbf{x})$ | Função de interesse real |
| $\hat{y}(\mathbf{x})$ | Modelo empírico ou função gradual |
| ε | Erro experimental ou resíduo |
| μ | Média populacional |
| E | Valor esperado |
| σ^2 | Variância |
| β | Vetor de coeficientes ou constantes |
| X | Matriz de variáveis independentes |
| ε | Vetor de resíduos |
| L | Estimador de mínimos quadrados ordinários |
| T | Matriz de transição |
| $\tilde{\Sigma}_{\beta}$ | Matriz de variância-covariância |

| | |
|--------------------|---|
| C^{-1} | Matriz de precisão |
| b | Vetor de coeficientes dos termos de primeira ordem |
| B | Matriz de coeficientes dos termos de segunda ordem |
| λ | Autovalores |
| V | Vetor genérico não-nulo |
| I | Matriz identidade |
| x_0 | Vetor de coordenadas de um ponto do espaço experimental |
| x_{novo} | Vetor de coordenadas de um ponto previsto do espaço experimental |
| m | Indicador do espaço do modelo, quantidade de fatores ou quantidade de funções |
| SS_E | Soma de quadrados do erro |
| n | Número de observações em uma amostra ou rotação |
| p | Número de parâmetros estimados ou de variáveis originais |
| $V(\mathbf{x})$ | Função de variância de previsão |
| N | Número total de experimentos |
| $\eta(\mathbf{x})$ | Função real |
| J | Proximidade média |
| O | Região operacional |
| $W(\mathbf{x})$ | Função designatória da região de integração |
| R | Região de interesse |
| Ω^{-1} | Volume da região de interesse |
| V | Variância média |
| B | Viés quadrático médio |
| $w(\mathbf{x})$ | Função de penalização de custo |
| IV | Variância integrada de previsão |
| ρ | Raio da região experimental |
| A, B, C, D | Coeficientes de particionamento da matriz C^{-1} |
| $VMAX_p$ | Variância máxima |
| G | Critério G ou Variância máxima |
| $VMIN_p$ | Variância mínima |
| $h(\rho)$ | Integral do somatório dos quárticos dos fatores |
| $h^*(\rho)$ | Componente de $h(\rho)$ independente de ρ |

| | |
|-----------------------------|---|
| $\lfloor \cdot \rfloor$ | Operador de números inteiros superiores |
| α | Distância dos pontos centrais aos pontos axiais ou nível de significância |
| $W(p)$ | Função padronizada ponderada, de precisão relativa ou de capacidade de previsão |
| C_p | Razão básica de capacidade de processo |
| C_{pk} | Razão de capacidade de processo para deslocamentos da média |
| C_{pl} | Razão de capacidade de processo unilateral inferior |
| C_{pu} | Razão de capacidade de processo unilateral superior |
| C_{pm} | Razão de capacidade de processo para deslocamentos da média ao alvo |
| T | Alvo |
| χ^2 | Estatística de teste Qui-quadrado |
| A | Matriz de carregamento |
| F | Matriz de escores de fatores |
| ξ | Vetor de erros não-observáveis ou alvo de componentes |
| R | Matriz de correlação |
| r | Correlação entre variáveis |
| L | Matriz de autovalores de R |
| h^2 | Comunalidade |
| B | Matriz de pesos ou de coeficientes dos escores dos fatores |
| Z | Matriz de variáveis originais normalizadas |
| A_{rot} | Matriz de carregamento rotacionada |
| Λ | Matriz de rotação |
| γ | Ângulo de rotação |
| V^* | Critério Varimax |
| u | Soma das cargas normalizadas quadráticas |
| v | Produtório das cargas normalizadas ou percentual de explicação de componentes |
| a,b,c,d | Coefficientes auxiliares baseados em u e v |
| K_1, K_2 | Quantidades auxiliares para determinação das condições suficientes de γ |
| F(x) | Vetor de funções objetivo de variáveis originais |
| Φ | Matriz <i>pay-off</i> para variáveis originais |
| F_S(x) | Vetor de funções objetivo de fatores rotacionados |
| Ψ_F | Matriz <i>pay-off</i> para fatores rotacionados |
| w | Vetor de pesos |

| | |
|-----------------------|--|
| $\hat{\mathbf{n}}$ | Vetor normal à linha de utopia |
| t | Distância paramétrica |
| $C_{pk}(\mathbf{x})$ | Razão modificada de capacidade de previsão |
| $MC_{pk}(\mathbf{x})$ | Razão multivariada modificada de capacidade de previsão |
| d | Distância paramétrica do valor esperado até a solução de nadir ou diâmetro do corpo de prova |
| Tc | Tempo de corte |
| VB | Desgaste de flanco |
| l_f | Comprimento do corpo de prova |
| n_s | Número de passes |
| Vc, v_c | Velocidade de corte |
| f | Avanço |
| ap | Profundidade de corte |
| R^2 | Coefficiente de determinação |
| R^2 Adj. | Coefficiente de determinação ajustado |
| $f(x)$ | Função objetivo |
| a_e | Profundidade de corte radial |
| f_z | Avanço por dente |
| v_f | Velocidade de avanço |
| Pc | Potência de corte |
| z | Número de arestas de corte |
| k_c | Pressão específica de corte |
| h_m | Espessura média dos cavacos |
| Ec | Eficiência de corte |

SUMÁRIO

| | |
|---|-----------|
| 1 INTRODUÇÃO | 20 |
| 1.1 Tema e Justificativa | 20 |
| 1.2 Objetivos..... | 23 |
| 1.3 Delimitações do estudo..... | 23 |
| 1.4 Estrutura do trabalho..... | 24 |
| 2 VARIÂNCIA E CAPACIDADE DE PREVISÃO | 26 |
| 2.1 Arranjos Compostos de Superfície de Resposta..... | 26 |
| 2.1.1 Metodologia de Superfície de Resposta | 28 |
| 2.1.2 Análises de convexidade e otimalidade..... | 33 |
| 2.2 Funções de Variância de Previsão | 35 |
| 2.2.1 Intervalo de confiança para novas observações..... | 36 |
| 2.2.2 Variância Escalonada de Previsão | 37 |
| 2.2.3 Variâncias Mínima, Média e Máxima de Previsão..... | 40 |
| 2.2.4 Gráficos de Dispersão de Variância | 49 |
| 2.2.5 Resumo das principais medidas de variância de previsão | 56 |
| 2.3 Análises de Capacidade | 56 |
| 2.3.1 Conceito original de capacidade de previsão..... | 56 |
| 2.3.2 Capacidade de processos | 57 |
| 3 ANÁLISE ESTATÍSTICA MULTIVARIADA | 62 |
| 3.1 Análise Fatorial..... | 62 |
| 3.2 Escores de fatores rotacionados..... | 65 |
| 4 OTIMIZAÇÃO MULTI OBJETIVO | 68 |
| 4.1 Diretrizes básicas para a otimização multiobjetivo | 68 |
| 4.2 Métodos de otimização multiobjetivo | 71 |
| 4.2.1 Método das Somas Ponderadas | 71 |
| 4.2.2 Método do Critério Global..... | 72 |
| 4.2.3 Método da Interseção Normal à Fronteira | 73 |
| 4.3 Estratégias de otimização da variância | 75 |
| 4.4 Otimização de processos industriais via métodos e estratégias multiobjetivo | 77 |
| 5 MÉTODO DE PESQUISA..... | 78 |
| 5.1 Natureza teórica e classificação do estudo | 78 |
| 5.2 Questões e Hipóteses do Problema..... | 78 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 5.3 | Procedimentos Metodológicos..... | 82 |
| 6 | ESTRATÉGIA DE OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO BASEADA EM RAZÕES DE CAPACIDADE DE PREVISÃO | 84 |
| 6.1 | Condições de contorno | 84 |
| 6.2 | Modelos de otimização | 84 |
| 6.2.1 | Modelo para variáveis originais independentes..... | 85 |
| 6.2.2 | Modelo para variáveis originais correlacionadas | 91 |
| 6.3 | Estratégias modificadas comparáveis | 97 |
| 6.3.1 | Modelos baseados na otimização de variância | 97 |
| 6.3.2 | Modelos baseados em métricas aglutinadoras de variância de previsão | 98 |
| 6.4 | Plataforma de otimização em MS Excel..... | 100 |
| 7 | APLICAÇÕES EM PROCESSOS INDUSTRIAIS..... | 101 |
| 7.1 | Estudo de caso do processo de torneamento do aço ABNT H13 com variáveis de resposta independentes | 101 |
| 7.1.1 | Contexto do processo de torneamento | 101 |
| 7.1.2 | Procedimento experimental | 102 |
| 7.1.3 | Parâmetros influentes e modelagem das superfícies | 105 |
| 7.1.4 | Análise de sensibilidade | 109 |
| 7.1.5 | Abordagem tradicional: Otimização bi-objetivo das variáveis de resposta originais. | 112 |
| 7.1.6 | Abordagem proposta: Otimização bi-objetivo das razões de capacidade de previsão para as respostas originais | 118 |
| 7.1.7 | Otimização bi-objetivo dos Erros Quadráticos Médios modificados | 124 |
| 7.1.8 | Ganhos potenciais em capacidade de previsão via métricas aglutinadoras de variância | 127 |
| 7.2 | Estudo de caso do processo de fresamento do aço inoxidável duplex com variáveis de resposta correlacionadas | 135 |
| 7.2.1 | Contexto do processo de fresamento | 135 |
| 7.2.2 | Procedimento experimental | 136 |
| 7.2.3 | Análise multivariada fatorial | 140 |
| 7.2.4 | Parâmetros influentes, modelagem de superfícies e análise de sensibilidade | 143 |
| 7.2.5 | Análises de curvatura, convexidade e sentidos de otimização | 152 |
| 7.2.6 | Abordagem multivariada tradicional: otimização bi-objetivo de variáveis latentes .. | 155 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 7.2.7 | Abordagem proposta: otimização bi-objetivo de razões de capacidade multivariadas | 161 |
| 7.2.8 | Otimização bi-objetivo dos Erros Quadráticos Médios Multivariados modificados.. | 167 |
| 7.2.9 | Ganhos potenciais em capacidade de previsão via métricas aglutinadoras de variância | 170 |
| 7.2.10 | Extensões do método computacional proposto para outras aplicações na indústria .. | 176 |
| 7.3 | Validação das hipóteses do problema..... | 177 |
| 8 | CONCLUSÕES..... | 182 |
| 8.1 | Contribuições do trabalho..... | 187 |
| 8.2 | Sugestões para trabalhos futuros | 188 |
| | APÊNDICES | 189 |
| | Apêndice A – Determinação quantitativa da região de interesse experimental esférica..... | 189 |
| | Apêndice B – Derivação do problema de otimização NBI-Equivalente para razões modificadas de capacidade..... | 191 |
| | Apêndice C – Determinação do ângulo de rotação Varimax via esquemas de Kaiser..... | 196 |
| | Apêndice D – Plataforma de otimização desenvolvida em MS Excel | 198 |
| | Apêndice E – Produção científica no período de doutoramento | 200 |
| | REFERÊNCIAS | 203 |

1 INTRODUÇÃO

1.1 Tema e Justificativa

A atividade industrial exerce um papel indispensável para a sociedade, ao viabilizar a provisão de uma enorme gama de produtos e serviços. Essa atividade, contudo, é complexa, uma vez que envolve diversos inter-relacionamentos, incluindo aqueles entre organizações e mercados (LI, 2014; ROGERS, 2019). Além disso, há, também, complexidades internas às organizações, associadas, especialmente, a seus processos (KRAJEWSKI *et al.*, 2018), bem como a suas interações (CARPINETTI; GEROLAMO, 2016).

Nesse contexto, os estudos de engenharia ganham centralidade, ao fornecerem técnicas e métodos adequados para o projeto e a melhoria dos processos industriais. Embora o conceito de processo possa ser enunciado de diferentes maneiras, é comum apresentá-lo pelo trinômio “entradas-processamentos-saídas; isto é, um conjunto de entradas que, passando por um ou mais processamentos, resultam em um conjunto de saídas (ULUSKAN, 2019). Essa definição pressupõe relações de causa e efeito, de modo que as saídas podem ser, em grande parcela, controladas pelas entradas (MONTGOMERY, 2017).

A partir disso, uma estratégia de engenharia consiste em encontrar as configurações de entrada que garantam os melhores conjuntos de saídas (MYERS; MONTGOMERY, 2009). Desse modo, é possível assegurar maiores níveis de controle, evitando desperdícios e viabilizando melhorias para os processos. Racionalmente, porém, é difícil estabelecer essas relações sem o uso de modelos matemáticos apropriados.

Por esse motivo, embora existam abordagens concorrentes, a Metodologia de Superfície de Resposta (MSR) se apresenta, na literatura, como uma estrutura eficaz e amplamente utilizada para a modelagem e otimização de processos industriais (ARDEBILI; SOLMAZ; MOSTAFAEI, 2019; CHAUBEY; JAIN, 2019; MYERS *et al.*, 2004). Em essência, a MSR emprega técnicas e métodos estatísticos para estimar variáveis de resposta em função de fatores explanatórios, utilizando-se, para isso, de experimentos planejados (BOX; DRAPER, 2007). Frequentemente, modelos de segunda ordem são empregados na estimativa de uma dada região de interesse dessas variáveis. A ideia central é que esses modelos sejam usados como funções objetivo em problemas de otimização, os quais fornecerão valores dos fatores capazes de melhorar efetivamente os processos.

O arranjo composto central (CCD) é reconhecido na literatura como o arranjo de segunda ordem mais popular em estudos experimentais de superfície de resposta, tendo em vista suas

boas propriedades estatísticas (PARK; PARK, 2010). O CCD combina três tipos de pontos para permitir a estimação dos efeitos principais e de suas interações (por meio dos pontos fatoriais), dos efeitos quadráticos (por meio dos pontos axiais) e dos componentes de erro aleatório (por meio dos pontos centrais). Além disso, o CCD oferece a mínima variância de previsão no centro do arranjo (BORKOWSKI, 1995a), onde espera-se que o ponto estacionário, enquanto ponto de ótimo, esteja localizado. Apesar disso, no contexto dos processos industriais, esses pressupostos nem sempre são verdadeiros, o que foi recentemente demonstrado por Oliveira (2018) e Oliveira *et al.* (2019) em extensa análise de modelos de superfície de resposta.

Primeiro, em estudos experimentais de MSR, o número de pontos centrais recomendado para os CCDs (BOX; HUNTER, 1957) é frequentemente reduzido (GUPTA; JAIN, 2014; HUANG *et al.*, 2016; NAM *et al.*, 2015). Essa redução, porém, leva a profundas modificações nas funções de variância de previsão, interferindo na habilidade dos modelos de superfície de resposta representarem, adequadamente, os processos reais (HEBBLE; MITCHELL, 1972).

Segundo, os modelos de superfície de resposta usados em processos de manufatura geralmente apresentam formato de sela (KUMAR; SREEBALAJI, 2016; SENTHILKUMAR; KANNAN, 2015; VERMA *et al.*, 2017) ou sentidos de otimização incompatíveis com suas convexidades (isto é, maximizar funções convexas, como em AJITH *et al.*, 2015 e ARIAEE *et al.*, 2014, ou minimizar funções côncavas, como em CHAUBEY; JAIN, 2019 e COSTA *et al.*, 2016b). Isso implica que, para os casos em que o ponto estacionário não é o ponto de ótimo, este será levado para regiões mais distantes do centro do arranjo experimental, onde a variância de previsão é naturalmente mais elevada.

Finalmente, por natureza, os processos industriais costumam apresentar múltiplas características de interesse, geralmente divididas em críticas para a qualidade (*critical-to-quality* – CTQ) e críticas para o desempenho (*critical-to-performance* – CTP) (COSTA *et al.*, 2016a; THOMAS *et al.*, 2018). No entanto, frequentemente, os modelos usados para representar essas características apresentam conflitos, como (1) convexidades distintas – isto é, problemas envolvendo, simultaneamente, modelos côncavos, convexas e/ou em formato de sela (GUPTA; JAIN, 2014; MISAKA *et al.*, 2020; SHIN *et al.*, 2011); (2) sentidos de otimização distintos – isto é, problemas envolvendo, simultaneamente, maximização, minimização e/ou alvos (KARTHIKEYAN *et al.*, 2014; SAFEEN *et al.*, 2016); e (3) a presença de correlação – isto é, problemas envolvendo características correlacionadas e, portanto, modelos linearmente dependentes (ARRUDA *et al.*, 2019; NACEREDDINE *et al.*, 2019).

Enquanto os dois primeiros conflitos tendem a levar o ponto de ótimo para regiões de maior variância (e, portanto, menor previsibilidade), o terceiro conflito pode induzir a sobreajustes e imprecisões nos modelos (BRATCHEL, 1989; PAIVA *et al.*, 2009). Em ambos os casos, porém, os resultados numéricos da otimização são afetados pela elevação de variância e/ou covariância.

Considerando que as distorções causadas na variância de previsão pela redução no número de pontos centrais, pela incompatibilidade entre convexidade e sentido de otimização e pela otimização de múltiplas respostas (na maioria dos casos, correlacionadas) são usualmente negligenciadas em estudos de processo, analistas e engenheiros podem incorrer no erro de otimizar um processo em regiões de elevada variância de previsão. Isso implica que a probabilidade de se reproduzir os resultados obtidos com a otimização é reduzida.

Nesse sentido, a presente tese advoga que os problemas de otimização também devam considerar a variância de previsão dos modelos, de tal forma que as soluções Pareto ótimas também possuam capacidades de previsão satisfatórias para todas as respostas investigadas. Para isso, esta pesquisa resgata as noções originais de variância e de capacidade de previsão, propostas por George Box e associados nos anos 1950. Na visão deles, um arranjo experimental apropriado deveria apresentar função de variância com valores pequenos e distribuição o mais uniforme possível (BOX; WILSON, 1951; BOX; HUNTER, 1957).

No entanto, por mais plana que seja a função de variância, algumas regiões do arranjo sempre serão desfavorecidas, o que é agravado pelos problemas e conflitos mencionados anteriormente. Nos CCDs rotacionáveis, por exemplo, essas regiões são simétricas e tendem a apresentar valores maiores de variância, à medida que se afastam do centro do arranjo (BOX; DRAPER, 1959). Isso significa que a capacidade de previsão está diretamente relacionada à posição do ponto no arranjo experimental, sendo, também, inversamente proporcional à variância de previsão.

Dessarte, tendo em vista que a posição do ponto no espaço experimental está sujeita a uma dada quantidade de variância (GIOVANNITTI-JENSEN; MYERS, 1989), pode-se argumentar que soluções capazes devem ser obtidas mediante deslocamentos do ponto de ótimo, de modo que a variância seja reduzida, sem alterar significativamente o valor médio desejado para cada variável de resposta.

Assim, o presente trabalho propõe estratégias de otimização baseadas em razões modificadas de capacidade de previsão, nas quais as variâncias dos modelos são tomadas como componentes de variabilidade natural, enquanto as diferenças entre os valores esperados e os

pontos de nadir são tomados como componentes de variabilidade permitida. Dadas as suas vantagens para a obtenção de fronteiras de Pareto uniformemente distribuídas, o método de Interseção Normal à Fronteira (NBI) é associado ao algoritmo do Gradiente Reduzido Generalizado (GRG) para a otimização das razões modificadas de capacidade.

Para os casos onde as variáveis originais encontram-se correlacionadas, propõe-se o uso das análises estatísticas multivariadas como parte dos modelos de otimização. Neste trabalho, a estratégia de otimização para razões multivariadas é desenvolvida usando-se a Análise Fatorial (FA) rotacionada, baseada nos esquemas Kaiser-Varimax (KAISER, 1958).

1.2 Objetivos

Este estudo visa desenvolver estratégias de otimização de processos baseadas em razões modificadas de capacidade de previsão. Para isso, conta com os seguintes objetivos específicos:

- a) Propor uma razão modificada de capacidade de previsão para processos com variáveis independentes;
- b) Propor uma razão modificada de capacidade de previsão para processos com variáveis correlacionadas;
- b) Desenvolver uma estratégia de otimização de processos baseada nas razões propostas;
- c) Demonstrar a eficácia da estratégia desenvolvida por meio de aplicações em processos industriais.

1.3 Delimitações do estudo

Considerando os objetivos apresentados na seção 1.2, as contribuições deste trabalho encontram-se delimitadas a alguns pressupostos.

Primeiro, apenas o CCD é empregado para a coleta de dados experimentais e apenas a FA é usada para a extração de variáveis latentes. Além disso, admite-se que os modelos de superfície de resposta representam, adequadamente, as variáveis de resposta originais e latentes. Dessa forma, neste trabalho, a eficácia dos modelos de segunda ordem não é questionada para a modelagem de respostas oriundas de processos industriais, à exceção das significâncias dos termos constante, lineares, quadráticos e de interações. Eventuais benefícios de modelos de ordens superiores serão verificados em trabalhos futuros.

Segundo, admite-se que a variância medida de um processo não é aumentada pelo sistema de medição. Assim, os modelos de otimização propostos não abordam, separadamente, os

componentes de variância do processo e da medição. Além disso, este trabalho não considera o efeito dos ruídos atuantes sobre os processos. Desse modo, (1) o componente de variância observacional é usado como medida da variabilidade associada ao processo, independentemente das fontes de variação e (2) o componente de variância do arranjo é usado como medida da variabilidade associada aos pontos experimentais.

Terceiro, o método NBI é usado em conjunto com o algoritmo GRG como parte das estratégias propostas. Outros métodos, como Somas Ponderadas (*Weighted Sums* – WS) e Método do Critério Global (*Global Criterion Method* – GCM) são empregados apenas para fins de comparação.

Finalmente, para exemplificar a viabilidade da estratégia de otimização proposta, são usados dois processos industriais. No primeiro, estuda-se o processo de torneamento de aço endurecido, com variáveis linearmente independentes. No segundo, investiga-se o processo de fresamento de aço inoxidável duplex, com variáveis correlacionadas.

1.4 Estrutura do trabalho

A fim de apresentar a pesquisa desenvolvida, esta tese foi organizada em sete seções principais. A primeira seção traz luz ao contexto e à problemática da pesquisa, esclarecendo o tema e a justificativa para a sua condução (seção 1.1). Além disso, também apresenta os objetivos do trabalho (seção 1.2), cunhados em virtude da problemática apresentada. Com isso, as limitações e delimitações do estudo são discutidas (seção 1.3), tornando ainda mais claro o seu escopo.

As três seções seguintes (seções 2-4), por suas vezes, trazem um referencial teórico acerca dos temas fundamentais que permeiam e sustentam a presente pesquisa. Desse modo, apresenta-se, inicialmente, um conteúdo integrado sobre variância e capacidade de previsão, discorrendo-se sobre seu histórico e noções originais (seção 2), interfaces com os arranjos compostos e a Metodologia de Superfície de Resposta (seção 2.1), principais funções e formulações matemáticas (seção 2.2) e análises de capacidade (seção 2.3).

Em seguida, as análises estatísticas multivariadas são conceituadas (seção 3), detalhando-se a Análise Fatorial (seção 3.1) e o método de rotação de eixos baseado nos esquemas Kaiser-Varimax (seção 3.2). Finalmente, a otimização multiobjetivo e seus métodos são introduzidos (seção 4), detalhando-se os métodos de Somas Ponderadas (seção 4.2), Critério Global (4.2.2) e Interseção Normal à Fronteira (4.2.3).

Mediante os fundamentos das seções anteriores, a seção 5 apresenta o método de pesquisa, fornecendo sua natureza teórica e classificação (seção 5.1) e relacionando todas as questões e hipóteses do problema (seção 5.2). Com isso, as seções 6 e 7 dispõem os resultados do trabalho, discutindo suas razões e implicações. Inicialmente, conceitos e noções teóricas discutidos nas seções 2-4 são usados para formular as estratégias de otimização (seção 6).

Em seguida, essas estratégias são aplicadas em processos de manufatura (seção 7), de modo a demonstrar suas eficácias. Na seção 7.1, estuda-se o processo de torneamento do aço endurecido ABNT¹ H13, com ferramenta CC650 *wiper*, sem fluido de corte, cujas variáveis de interesse (rugosidade média Ra e vida da ferramenta T) apresentam-se linearmente independentes. Na seção 7.2, analisa-se o processo de fresamento do aço inoxidável duplex UNS² S32205, com fresa de topo Coromill® R390-025*25-11M, sem fluido de corte, cujas variáveis de interesse (rugosidades Ra , Rq , Ry e Rt , potência Pc e eficiência de corte Ec) apresentam-se correlacionadas. Na seção 7.3, é realizada a validação das hipóteses enunciadas na seção 5.2, com base nos resultados das seções 7.1 e 7.2.

Finalmente, a seção 8 aponta as conclusões do trabalho, retomando os principais pontos das seções anteriores e fornecendo uma perspectiva mais ampla acerca das implicações da pesquisa. A partir disso, apresentam-se as principais contribuições do estudo (seção 8.1), bem como seus direcionamentos futuros (seção 8.2).

¹ Associação Brasileira de Normas Técnicas

² *Unified Numbering System* (Sistema de Numeração Unificada)

2 VARIÂNCIA E CAPACIDADE DE PREVISÃO

As ideias de variância e capacidade de previsão datam dos anos 50, quando George Box e associados começaram a estudar técnicas de planejamento e análise de experimentos. Originalmente, esses pesquisadores propuseram a variância de previsão como critério de desempenho de arranjos experimentais. Com isso, assumindo-se que todo arranjo induz a variâncias, Box e outros admitiram que os melhores arranjos seriam aqueles que induzissem às menores quantidades possíveis.

Nos contextos matemático e estatístico, sempre foi comum tratar desempenho como uma relação do tipo “quanto maior, melhor”, o que contrastaria com a ideia de variância de previsão, que, logicamente, pressupõe a relação “quanto menor, melhor”. Assim, a estratégia original de Box e Hunter (1957) foi representar o inverso da variância de previsão, a fim de dar, à ela, foco nos desenvolvimentos teóricos e, ao final, interpretar seu inverso como critério de desempenho de arranjos. Apesar disso, essa inversão matemática não foi perpetuada pelos estudos subsequentes, que passaram a analisar os arranjos diretamente por funções de variância.

Considerando toda a evolução teórica dos conceitos de variância e capacidade de previsão, esta seção fornece a origem dos arranjos compostos de superfície de resposta (seção 2.1), apresenta as principais funções de variância de previsão (seção 2.2) e discute as análises de capacidade de processos e sua relação com a capacidade de previsão (2.3).

2.1 Arranjos Compostos de Superfície de Resposta

Historicamente, o conceito de variância de previsão teve como precursor a publicação do notório trabalho de Box e Wilson (1951), no qual os autores apresentaram, pela primeira vez, a noção de arranjos compostos. Esses arranjos foram propostos como forma de se coletar dados empíricos e, a partir deles, estimar modelos matemáticos de segunda ordem, combinando diferentes “tipos” de pontos experimentais³. O arranjo proposto por Box e Wilson (1951) foi originalmente denominado de arranjo composto, por incorporar pontos centrais e pontos axiais⁴ aos tradicionais arranjos fatoriais e fatoriais fracionados. Quando os pontos centrais e axiais são incluídos a partir do centro do arranjo, convencionou-se denominar Arranjo Composto Central

³ Neste caso, o tipo de ponto refere-se ao local do arranjo onde o dado empírico é coletado. Nos CCDs, esses pontos podem ser fatoriais, por combinarem os níveis dos fatores (como em análises combinatórias elementares), centrais, por se posicionarem ao centro do arranjo (normalmente combinando os níveis médios dos fatores) e axiais, por se posicionarem nos eixos prolongados a partir do centro do arranjo.

⁴ Os pontos axiais são, muitas vezes, denominados pontos-estrela (*star points*), por, comumente, serem representados por asteriscos (*).

(*Central Composite Design – CCD*), para diferenciar os arranjos compostos com aumento de pontos nas extremidades, denominados Arranjos Compostos Não-Centrais (BOX, 1954b). Em virtude de suas boas propriedades estatísticas, os CCDs têm sido reconhecidos como os arranjos mais utilizados em estudos experimentais de MSR (MYERS; MONTGOMERY, 2009).

A quantidade de pontos do CCD depende, especialmente, do número de fatores ou variáveis de entrada do processo. As quantidades de pontos fatoriais e axiais são calculadas, respectivamente, pelas Equações (2.1) e (2.2). No CCD rotacionável, a distância axial é dada pela Equação (2.3). Essa é uma propriedade importante, pois assegura variância constante às mesmas distâncias radiais do arranjo, conforme detalhado na seção 2.2.

$$n_f = 2^k \quad (2.1)$$

$$n_s = 2k \quad (2.2)$$

$$\alpha = 2^{k/4} \quad (2.3)$$

onde: k designa o número de fatores ou variáveis de entrada.

A quantidade de pontos centrais, por sua vez, está associada à noção de “precisão uniforme” (BOX; HUNTER, 1957), segundo a qual a acurácia de um arranjo está vinculada a sua capacidade em prover as menores variâncias, com distribuição o mais achatada e uniforme possível a partir do seu centro. Desse modo, para diferentes valores de k , algumas quantidades de pontos centrais podem ser recomendadas, conforme indicado na Tabela 2.1. Nessa tabela, também são relacionadas as quantidades calculadas de pontos fatoriais e axiais, bem como as distâncias axiais α .

Tabela 2.1 - Quantidades recomendadas para os pontos e para a distância axial do CCD rotacionável

| k | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------------------|-------|-------|-------|-------|
| n_0 ¹ | 5 | 6 | 7 | 10 |
| n_f | 4 | 8 | 16 | 32 |
| n_s | 4 | 6 | 8 | 10 |
| α | 1,414 | 1,682 | 2,000 | 2,378 |

¹ n_0 : quantidade de pontos centrais.

Fonte: Adaptado de Box e Hunter (1957)

2.1.1 Metodologia de Superfície de Resposta

A partir da noção de arranjos compostos, Box e Wilson (1951) formularam uma metodologia de investigação experimental denominada Metodologia de Superfície de Resposta (MSR – *Response Surface Methodology*). Na literatura recente, é comum encontrar a MSR listada entre as técnicas mais comuns de Planejamento de Experimentos (*Design of Experiments* – DOE) (MYERS; MONTGOMERY, 2009). Em uma perspectiva mais ampla, porém, esta pode ser vista como uma combinação do DOE, das técnicas de modelagem e dos métodos de otimização em uma abordagem matemática e estatística mais forte.

Nesse sentido, a MSR consiste em um conjunto de etapas e passos para coletar dados e, a partir deles, modelar e otimizar processos. Recentemente, Oliveira (2018) e Oliveira *et al.* (2019) trouxeram luz aos fundamentos teóricos e às diretrizes práticas para a condução efetiva da MSR. Assim, estabeleceram que os primeiros passos da metodologia deveriam cobrir: a identificação dos parâmetros de controle do processo e a análise de suas influências sobre as variáveis de resposta investigadas. A partir disso, modelos iniciais baseados em arranjos fatoriais com pontos centrais permitem identificar as regiões de curvatura. Essas regiões fornecem soluções mais benéficas para os processos e, normalmente, atuam como critérios de parada para os algoritmos de busca (KHURI; CORNELL, 1996; BOX; DRAPER, 2007). Um teste de curvatura típico baseia-se nas seguintes hipóteses teóricas:

$$H_0: \sum_{i=1}^k \beta_{ii} = 0 \text{ contra } H_1: \sum_{i=1}^k \beta_{ii} \neq 0 \quad (2.4)$$

onde: β_{ii} representa o coeficiente do termo quadrático do i -ésimo fator; e k designa o número de fatores.

As hipóteses formuladas na Equação (2.4) são usualmente testadas a partir da estatística F (MYERS; MONTGOMERY, 2009):

$$F_0 = MS_{\text{curvatura}} \cdot MS_{\text{erro}}^{-1} = \left[\frac{n_F n_C (\bar{y}_F - \bar{y}_C)^2}{n_F + n_C} \right] \left[\frac{\sum_{i=1}^{n_C} (\bar{y}_i - \bar{y}_C)^2}{n_C - 1} \right]^{-1} \quad (2.5)$$

onde: n_F é o número de pontos fatoriais, n_C é o número de pontos centrais, \bar{y}_F é a média simples das respostas medidas nos pontos fatoriais, \bar{y}_C é a média simples das respostas medidas nos pontos centrais. Geralmente, o $MS_{\text{curvatura}}$ e o MS_{erro} advêm da Análise de Variância (ANOVA).

Oliveira (2018) e Oliveira *et al.* (2019) demonstraram como o p -value, sendo uma medida mais direta de significância, pode ser obtido analiticamente a partir da Equação (2.5): tomando a integral imprópria da distribuição de Fisher-Snedecor com graus de liberdade ϕ_1 para $MS_{\text{curvatura}}$ e ϕ_2 para MS_{erro} , da seguinte forma:

$$P(X > F_0) = \int_{x=F_{\text{calc}}}^{+\infty} \frac{\Gamma[(n_C)/2]}{\Gamma[1/2]\Gamma[(n_C-1)/2]} \left(\frac{1}{n_C-1}\right)^{(n_C-1)/2} \frac{x^{(n_C-3)/2}}{[1+(1/n_C-1)x]^{(n_C)/2}} dx \quad (2.6)$$

onde: $\Gamma(\cdot)$ é a função gama e x é uma variável contínua com domínio no intervalo $[0, +\infty)$.

A probabilidade obtida na Equação (2.6) deve ser comparada a um dado nível de significância (geralmente, 0,05). A curvatura será considerada significativa se P for menor que esse nível. Uma vez que as regiões de curvatura são localizadas, as etapas seguintes da MSR consistem em empregar arranjos de superfície de resposta, como Box-Benken (BBD) e CCD, considerados os mais comuns em estudos de MSR (OZOL-GODFREY *et al.*, 2005; HE; FANG, 2011), para, então, ajustar modelos não-lineares. Finalmente, a otimização leva a combinações dos parâmetros de controle que garantem as respostas ótimas para o processo investigado.

Um modelo de superfície de resposta relacionando uma dada variável de resposta de interesse aos parâmetros de controle de um processo é usualmente expressa por um polinômio de Taylor truncado nos termos de segunda ordem, como apresentado pela Equação (2.7):

$$y(\mathbf{x}) = \hat{y}(\mathbf{x}) + \varepsilon = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j} \beta_{ij} x_i x_j + \varepsilon \quad (2.7)$$

onde: $y(\mathbf{x})$ é a função de interesse real, $\hat{y}(\mathbf{x})$ é o modelo empírico estimado a partir dos dados experimentais, β_0 é o termo constante do modelo, β_i são os coeficientes dos termos lineares,

β_{ii} são os coeficientes dos termos quadráticos, β_{ij} são os coeficientes dos termos de interação, e ε é o resíduo, também conhecido como erro aleatório do modelo, esperado que seja normalmente distribuído com média $\mu = E(\varepsilon) = 0$ e variância conhecida $Var(\varepsilon) = \sigma^2$, tal que: $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$.

Em notação matricial, o modelo da Equação (2.7) pode ser mais facilmente representado da seguinte maneira:

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.8)$$

onde: \mathbf{y} é um vetor $n \times 1$ de observações empíricas; \mathbf{X} é uma matriz $n \times k$ de variáveis independentes⁵; $\boldsymbol{\beta}$ é um vetor $k \times 1$ de constantes desconhecidas; e $\boldsymbol{\varepsilon}$ é um vetor $n \times 1$ de resíduos. Esses vetores e matriz podem ser representados como:

$$\mathbf{y}^T = [y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad \cdots \quad y_n],$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} & x_{11}^2 & x_{21}^2 & \cdots & x_{k1}^2 & (x_1 x_2)_1 & (x_1 x_3)_1 & \cdots & (x_{k-1} x_k)_1 \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{k1} & x_{12}^2 & x_{22}^2 & \cdots & x_{k2}^2 & (x_1 x_2)_2 & (x_1 x_3)_1 & \cdots & (x_{k-1} x_k)_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{kn} & x_{1n}^2 & x_{2n}^2 & \cdots & x_{kn}^2 & (x_1 x_2)_n & (x_1 x_3)_n & \cdots & (x_{k-1} x_k)_n \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}^T = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_k \quad \beta_{11} \quad \beta_{22} \quad \cdots \quad \beta_{kk} \quad \beta_{12} \quad \beta_{13} \quad \cdots \quad \beta_{(k-1)k}]$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3 \quad \cdots \quad \varepsilon_n]$$

Box e Wilson (1951) adotaram o método dos mínimos quadrados ordinários (*Ordinary Least Squares – OLS*) para ajustar os modelos de superfície de reposta, mediante a estimação dos coeficientes $\boldsymbol{\beta}$ mostrados na Equação (2.7) ou do vetor de coeficientes mostrado na Equação (2.8). Esse é um dos métodos mais comumente utilizados na literatura (FRANK;

⁵ Essa matriz foi denominada, por Box e Wilson (1951), “matriz de variáveis independentes” (*matrix of independent variables*), para se diferenciar da matriz do arranjo experimental (*design matrix*), que contém apenas os valores dos fatores principais. Box e Wilson (1951) admitiram que tanto os fatores principais como suas combinações quadráticas e de interações resultam em variáveis independentes, de onde decorre o nome da matriz.

FRIEDMAN, 1993). O estimador do OLS advém da minimização da soma dos quadrados dos resíduos (que, na prática, são as diferenças entre os valores medidos $y(\mathbf{x})$ e os valores estimados $\hat{y}(\mathbf{x})$ em corridas experimentais), tal que:

$$\min_{\beta} L = \sum_{r=1}^n \varepsilon_r^2 = \sum_{r=1}^n \left(y_r - \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_{ir} + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} x_{ir}^2 + \sum_{i<j} \sum \beta_{ij} (x_i x_j)_r \right)^2 \quad (2.9)$$

onde: r designa a corrida experimental (ou a linha do arranjo). Para cada corrida, haverá um resíduo ε_r associado.

Expressão equivalente pode ser escrita em notação matricial, de modo que:

$$\min_{\beta} \mathbf{L} = \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \beta^T \mathbf{X}^T \mathbf{Y} - \mathbf{Y}^T \mathbf{X} \beta + \beta^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \beta \quad (2.10)$$

O problema de minimização pode ser resolvido analiticamente pela diferenciação de L em relação a β , da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \beta} &= \frac{\partial (\mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \beta^T \mathbf{X}^T \mathbf{Y} - \mathbf{Y}^T \mathbf{X} \beta + \beta^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \beta)}{\partial \beta} = 0 \\ &= \frac{\partial (\mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - 2\beta^T \mathbf{X}^T \mathbf{Y} + \beta^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \beta)}{\partial \beta} = 0 \\ &= -2\mathbf{X}^T \mathbf{Y} + 2\mathbf{X}^T \mathbf{X} \hat{\beta} = 0 \\ \therefore \hat{\beta} &= (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y} \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde: $\hat{\beta}$ é o estimador do parâmetro β , obtido a partir dos dados experimentais; e $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T = \mathbf{T}$ também é chamada de matriz de transição.

Isso é possível, tendo em vista que a derivada de segunda ordem de \mathbf{L} em relação a β sempre resulta em autovalor positivo, independentemente dos valores assumidos por \mathbf{X} e \mathbf{Y} , o que denota uma função convexa e, portanto, com ponto de mínimo global. Matematicamente:

$$\frac{\partial \mathbf{L}^2}{\partial^2 \boldsymbol{\beta}} = \frac{\partial (-2\mathbf{X}^T \mathbf{Y} + 2\mathbf{X}^T \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = 2\mathbf{X}^T \mathbf{X} \quad (2.12)$$

Duas propriedades do OLS são particularmente relevantes, quais sejam: o valor esperado $E(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{\beta}$ e a covariância $Cov(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} = \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\hat{\boldsymbol{\beta}}}$, onde σ^2 é a variância experimental, calculada a partir de experimentos replicados (no CCD, os valores medidos nos pontos centrais são usados para calcular σ^2). Essas propriedades podem ser obtidas a partir das seguintes demonstrações:

$$\begin{aligned} E(\hat{\boldsymbol{\beta}}) &= E(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y} \\ &= (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T E(\mathbf{Y}) \\ &= (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} \end{aligned} \quad (2.13)$$

E:

$$\begin{aligned} Cov(\hat{\boldsymbol{\beta}}) &= E \left\{ \left[\hat{\boldsymbol{\beta}} - E(\hat{\boldsymbol{\beta}}) \right]^T \left[\hat{\boldsymbol{\beta}} - E(\hat{\boldsymbol{\beta}}) \right] \right\} \\ &= E \left[(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) \right] \\ &= E \left\{ \left[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^T \boldsymbol{\varepsilon}) \right] \left[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^T \boldsymbol{\varepsilon}) \right] \right\} \\ &= E \left\{ \left[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^T \boldsymbol{\varepsilon}) \right] \left[(\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{X})(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \right] \right\} \\ &= E \left\{ \left[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^T \mathbf{X}) \right] \left[(\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon})(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \right] \right\} \\ &= E(\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon})(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} = \sigma^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} = \sigma^2 \mathbf{C}^{-1} = \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\hat{\boldsymbol{\beta}}} \end{aligned} \quad (2.14)$$

A matriz \mathbf{C}^{-1} foi denominada por Box e Wilson (1951) de matriz de precisão, por conter soma de quadrados e produtos de variáveis independentes, que, combinada com a variância experimental σ^2 , conduz à matriz de variância-covariância $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\hat{\boldsymbol{\beta}}}$. Essa representação é uma maneira interessante de distinguir variância σ^2 , induzida pelo experimento, da variância \mathbf{C}^{-1} , induzida pela estrutura do arranjo experimental. Enquanto a primeira é uma característica inerente ao experimento e, normalmente, incorpora a variância do processo e a variância do

sistema de medição (MONTGOMERY; RUNGER 1993a), a segunda depende da forma como os pontos encontram-se arranjados.

Para um modelo quadrático completo com $k=2$, pode-se escrever:

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_{11} x_1^2 + \hat{\beta}_{22} x_2^2 + \hat{\beta}_{12} x_1 x_2 \quad (2.15)$$

Então, a matriz de variância-covariância $\tilde{\Sigma}_{\hat{\beta}}$ assume a seguinte forma:

$$\tilde{\Sigma}_{\hat{\beta}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (\beta_0) & (\beta_1) & (\beta_2) & (\beta_{11}) & (\beta_{22}) & (\beta_{12}) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (\beta_0) \\ (\beta_1) \\ (\beta_2) \\ (\beta_{11}) \\ (\beta_{22}) \\ (\beta_{12}) \end{matrix} & \begin{bmatrix} \sigma_{\beta_0}^2 & \sigma_{\beta_0\beta_1} & \sigma_{\beta_0\beta_2} & \sigma_{\beta_0\beta_{11}} & \sigma_{\beta_0\beta_{22}} & \sigma_{\beta_0\beta_{12}} \\ \sigma_{\beta_0\beta_1} & \sigma_{\beta_1}^2 & \sigma_{\beta_1\beta_2} & \sigma_{\beta_1\beta_{11}} & \sigma_{\beta_1\beta_{22}} & \sigma_{\beta_1\beta_{12}} \\ \sigma_{\beta_0\beta_2} & \sigma_{\beta_1\beta_2} & \sigma_{\beta_2}^2 & \sigma_{\beta_2\beta_{11}} & \sigma_{\beta_2\beta_{22}} & \sigma_{\beta_2\beta_{12}} \\ \sigma_{\beta_0\beta_{11}} & \sigma_{\beta_1\beta_{11}} & \sigma_{\beta_2\beta_{11}} & \sigma_{\beta_{11}}^2 & \sigma_{\beta_{11}\beta_{22}} & \sigma_{\beta_{11}\beta_{12}} \\ \sigma_{\beta_0\beta_{22}} & \sigma_{\beta_1\beta_{22}} & \sigma_{\beta_2\beta_{22}} & \sigma_{\beta_{11}\beta_{22}} & \sigma_{\beta_{22}}^2 & \sigma_{\beta_{22}\beta_{12}} \\ \sigma_{\beta_0\beta_{12}} & \sigma_{\beta_1\beta_{12}} & \sigma_{\beta_2\beta_{12}} & \sigma_{\beta_{11}\beta_{12}} & \sigma_{\beta_{22}\beta_{12}} & \sigma_{\beta_{12}}^2 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.16)$$

Uma vez que $\hat{\beta}$ é estimado a partir dos dados experimentais, cada um dos seus coeficientes produz um componente de variância para o modelo de superfície de resposta, como mostrado na Equação (2.16). Box e Wilson (1951) destacaram a relevância da matriz de precisão \mathbf{C}^{-1} para o desenvolvimento de arranjos favoráveis à redução da variância dos coeficientes, mas não se aprofundaram no estudo da variância induzida pelos arranjos, tema discutido em estudos posteriores, conforme discutido na seção 2.2.

2.1.2 Análises de convexidade e otimalidade

Uma parte importante da MSR consiste em avaliar a convexidade dos modelos estimados (OLIVEIRA, 2018). Essa avaliação viabiliza a correta caracterização dos pontos estacionários, demonstrando os seus tipos (isto é, mínimo, máximo ou sela) e se estes se encontram dentro da região experimental investigada. Além disso, permite determinar se há compatibilidade entre as convexidades de múltiplos modelos e, finalmente, se há compatibilidade entre a convexidade e o sentido de otimização de cada modelo.

Matematicamente, esses aspectos podem ser determinados de diferentes maneiras. Uma delas consiste em escrever o modelo de superfície de resposta da Equação (2.8) separando os coeficientes de primeira \mathbf{b} e segunda \mathbf{B} ordens, conforme disposto na Equação (2.17) (MYERS e MONTGOMERY, 2009).

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{X}\mathbf{b} + \mathbf{X}^T\mathbf{B}\mathbf{X} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.17)$$

$$\text{onde: } \mathbf{b} = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_k] \text{ e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \cdots & \beta_{1k} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \cdots & \beta_{2k} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \cdots & \beta_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{k1} & \beta_{k1} & \beta_{k1} & \cdots & \beta_{kk} \end{bmatrix}.$$

Derivando-se a Equação (2.17) em relação a \mathbf{x} , obtém-se uma expressão direta para determinação das coordenadas do ponto estacionário irrestrito:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} &= \frac{\partial (\mathbf{X}\mathbf{b} + \mathbf{X}^T\mathbf{B}\mathbf{X} + \boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \mathbf{x}} = 0 \\ &= \mathbf{b} + 2\mathbf{B}\mathbf{X} = 0 \\ \Rightarrow \mathbf{x}^* &= -\frac{1}{2}\mathbf{b}[\mathbf{B}]^{-1} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Admitindo-se um único modelo estimado com convexidade e sentido de otimização compatíveis, tem-se, na Equação (2.18), uma expressão apropriada para se obter o ponto de ótimo da variável de resposta investigada. No entanto, havendo múltiplos modelos e/ou incompatibilidades entre sentido de otimização e convexidade, o ponto estacionário deixa de conferir otimalidade ao problema, sendo o ponto de ótimo o melhor ponto possível dentro da região experimental investigada (DEL CASTILHO, 2007; HOERL, 1985; OLIVEIRA *et al.*, 2019).

A partir do cálculo dos autovalores da matriz \mathbf{B} , é possível concluir acerca da convexidade de um modelo. Conceitualmente, como \mathbf{B} é uma matriz diagonalizável (SANTOS, 2012), de ordem $k \times k$, pode-se definir um número real λ como autovalor de \mathbf{B} , se, e, somente se:

$$\mathbf{BV} = \lambda \mathbf{V} \quad (2.19)$$

onde: \mathbf{V} é um vetor não-nulo, denominado autovetor de \mathbf{B} .

Da Equação (2.19), é possível obter expressão equivalente, isolando-se os termos, tal que:

$$\mathbf{BV} - \lambda \mathbf{IV} = 0 \Rightarrow (\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{V} = 0 \quad (2.20)$$

Dos fundamentos de álgebra matricial (SMITH, 2010), sabe-se que uma solução não-trivial para a Equação (2.20) é obtida se, e, somente se, o determinante do termo $(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I})$, também denominado polinômio característico (SANTOS, 2012), for igual à zero:

$$|\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}| = 0 \quad (2.21)$$

de onde se obtêm os valores de λ .

Um modelo é dito côncavo, se todos os autovalores forem negativos (isto é, $\lambda_i < 0$, para qualquer i); convexo, se todos forem positivos (isto é, $\lambda_i > 0$), para qualquer i ; e em formato de sela, se apresentar autovalores com sinais opostos ($\lambda_i < 0$ ou $\lambda_i > 0$, dependendo da direção i) (BOX; DRAPER, 2007).

2.2 Funções de Variância de Previsão

No fim dos anos 50, Box e Hunter (1957) advogaram que, quando analisada individualmente, a variância de cada coeficiente do modelo traz muito pouca informação sobre a capacidade do modelo em prover estimativas precisas. Sob essa nova linha de pesquisa, a variância do modelo deveria ser estimada por meio de uma análise combinada de todas as variâncias individuais dos coeficientes. Assim como Box e Wilson (1951), Box e Hunter (1957) e, posteriormente, Box e Draper (1959), reforçaram que as posições dos pontos no espaço do arranjo também induzem a elevações ou reduções de variância do modelo (uma vez que somente alguns pontos são medidos para explorar uma dada região de interesse). Algumas décadas depois, Hebble e Mitchell (1972) demonstraram que a variância de previsão pode ser reduzida por meio da adição de pontos experimentais.

A função de variância de previsão proposta Box e Hunter (1957) é expressa da seguinte maneira:

$$Var[\hat{y}(\mathbf{x})] = Var[(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta})] \quad (2.22)$$

$$Var[\hat{y}(\mathbf{x})] = \mathbf{x}^T [Var(\boldsymbol{\beta})] \mathbf{x}$$

Considerando que:

$$[Var(\boldsymbol{\beta})] = \sigma^2 [(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}] \quad (2.23)$$

Então:

$$Var[\hat{y}(\mathbf{x})] = \sigma^2 [\mathbf{x}^{(m)T} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}^{(m)}] \quad (2.24)$$

Assim, a variância de $\hat{y}(\mathbf{x})$ em um dado ponto \mathbf{x}_0 do espaço experimental será dada por:

$$Var[\hat{y}(\mathbf{x}) | \mathbf{x}_0] = \sigma^2 [x_0^{(m)T} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} x_0^{(m)}] \quad (2.25)$$

$$\text{Para } k=3, \mathbf{x}_0^{(m)T} = \mathbf{x}_0^{(3)T} = [1, x_1, x_2, x_2, x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_1 x_2, x_1 x_3, x_2 x_3]$$

A Equação (2.25) é, na prática, a métrica de variância básica, da qual derivam todas as demais métricas encontradas na literatura.

2.2.1 Intervalo de confiança para novas observações

Uma consequência importante da Equação (2.25) consiste na construção do intervalo de confiança para novas observações. Para isso, a variância entre os valores observados e os valores estimados pelo modelo pode ser tomada da seguinte maneira:

$$Var[y(\mathbf{x}_0) - \hat{y}(\mathbf{x}_0)] = Var[y(\mathbf{x}_0)] + Var[\hat{y}(\mathbf{x}_0)] - 2Cov[y(\mathbf{x}_0); \hat{y}(\mathbf{x}_0)] \quad (2.26)$$

Os valores observados no processo apresentam variância σ^2 , enquanto os valores modelados apresentam variância de previsão dada pela Equação (2.25). Portanto,

$$Var\left[y(\mathbf{x}_0) - \hat{y}(\mathbf{x}_0)\right] = \sigma^2 + \sigma^2 \left[\mathbf{x}_0^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0 \right] - 2Cov\left[y(\mathbf{x}_0) ; \hat{y}(\mathbf{x}_0)\right] \quad (2.27)$$

Admitindo-se que os resíduos são independentes e identicamente distribuídos (IID), então, a covariância da Equação (2.27) torna-se nula, revelando a seguinte expressão:

$$Var\left[y(\mathbf{x}_0) - \hat{y}(\mathbf{x}_0)\right] = \sigma^2 + \sigma^2 \left[\mathbf{x}_0^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0 \right] \quad (2.28)$$

Desse modo, o intervalo de confiança de um valor previsto para uma nova observação será dado por:

$$E(Y|\mathbf{x}_{novo}) = \hat{y}(\mathbf{x}_{novo}) \pm t_{\alpha/2; n-p} \times s \sqrt{\left[1 + \mathbf{x}_{novo}^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_{novo} \right]} \quad (2.29)$$

Na Equação (2.29), s representa a estimativa de σ e pode ser calculado por $s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}{n-p}}$, onde $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = SS_E$ é a soma de quadrados do erro, n é o número de observações e p é o número de parâmetros. Considerando as propriedades do CCD, SS_E pode ser obtido a partir das respostas medidas nos pontos centrais.

2.2.2 Variância Escalonada de Previsão

Com base na ideia clássica de variância de previsão, Box e Hunter (1957) apresentaram a função de Variância Escalonada de Previsão (*Scaled Prediction Variance – SPV*) com dois objetivos, à saber: avaliação do desempenho de um arranjo individual e comparação padronizada de arranjos concorrentes. Esses objetivos já haviam sido estabelecidos por Box e Wilson (1951), mas só ganharam uma métrica mais detalhada com o estudo de Box e Hunter (1957). A função de SPV é, matematicamente, expressa por:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{N}{\sigma^2} Var\left[\hat{y}(\mathbf{x})\right] \quad (2.30)$$

onde: N é o número total de experimentos no arranjo; σ^2 é a variância observacional, oriunda dos dados experimentais; e $Var[\hat{y}(\mathbf{x})]$ é a função básica de variância de previsão apresentada por Box e Hunter (1957).

Como:

$$Var[\hat{y}(\mathbf{x})] = \sigma^2 \left[\mathbf{x}_0^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0 \right] \quad (2.31)$$

Então:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{N}{\sigma^2} \sigma^2 \left[\mathbf{x}_0^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0 \right]$$

$$V(\mathbf{x}) = N \left[\mathbf{x}_0^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0 \right] \quad (2.32)$$

Originalmente, Box e Wilson (1951) e Box e Hunter (1957) propuseram o escalonamento da função de variância de previsão pelo termo N / σ^2 como um maneira de prover uma medida padronizada de variância dos arranjos, assumindo-se que para o mesmo experimento, σ^2 é esperada constante, independentemente do arranjo escolhido, de modo que pode ser eliminada; e, com a inclusão de pontos experimentais, $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$ é reduzida pelo menos em alguma região do arranjo, então, N é adicionado como um fator de compensação.

Em termos práticos, a multiplicação da função de variância de previsão por N é conhecida na literatura como um fator de penalização de custo⁶ (ANDERSON-COOK *et al.*, 2009; LIANG *et al.*, 2006; PIEPEL, 2009), isto é, quanto menos experimentos requeridos para reduzir a variância, menor o SPV e, conseqüentemente, melhor o arranjo experimental.

⁶ O termo custo é empregado, pois sempre haverá despendimento de recursos para a condução de experimentos. Dessa forma, se determinado nível de variância de previsão é garantido com menos experimentos, haverá menos custos.

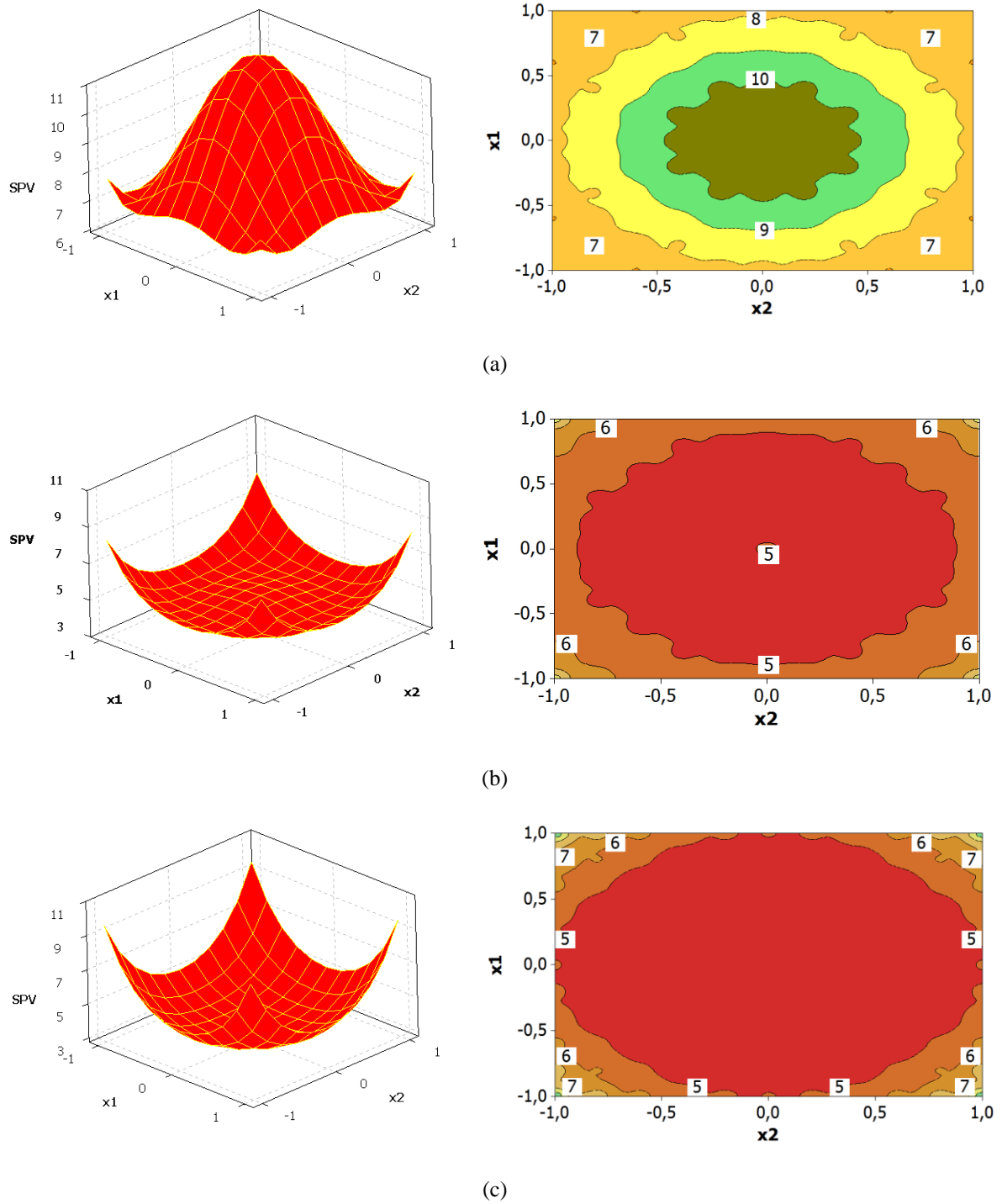


Figura 2.1 - Variância Escalonada de Previsão para um Arranjo Composto Central rotacionável com $k=3$ e diferentes quantidade de pontos centrais: a) um ponto central, b) três pontos centrais e c) seis pontos centrais.

Fonte: Autoria própria.

A Figura 2.1 apresenta os perfis das funções de SPV para um CCD de dois fatores com quatro pontos fatoriais, quatro pontos axiais e diferentes quantidades de pontos centrais. Como pode ser visto na figura, quanto menor o número de pontos centrais, maior a SPV no centro do arranjo e maiores as suas irregularidades. Por outro lado, quanto maior o número de pontos centrais, mais lisa a SPV se torna a partir do centro do arranjo.

Para o mesmo arranjo experimental, o escalonamento da função de SPV por N não afeta o comportamento da variância ao longo do espaço do arranjo. Assim, uma medida mais direta de variância provocada pela estrutura do arranjo ao longo da região experimental pode ser obtida pela eliminação de N (LIANG *et al.*, 2006):

$$\frac{V(\mathbf{x})}{N} = \left[\mathbf{x}_0^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0 \right] \quad (2.33)$$

Para se obter uma medida direta da precisão do modelo em um dado ponto do arranjo, então a variância das observações também deve ser considerada (BORROR *et al.*, 2002), o que leva novamente a Equação (2.25).

2.2.3 Variâncias Mínima, Média e Máxima de Previsão

Outra métrica bastante comum para medir a variância de previsão é denominada variância média. Esse conceito foi detalhado no trabalho de Box e Draper (1963), que defenderam que a capacidade de uma função gradual estimar uma função real deveria ser medida pela diferença entre elas. Para isso, esses autores propuseram o valor esperado da diferença quadrática como uma medida apropriada de “proximidade”, tal que:

$$E[\hat{y}(\mathbf{x}) - \eta(\mathbf{x})]^2 \quad (2.34)$$

onde: $\hat{y}(\mathbf{x})$ é a função gradual e $\eta(\mathbf{x})$ é a função real.

Considerando todo o espaço experimental, Box e Draper (1963) introduziram o conceito de proximidade média J , tomando a integral da expressão $E[\hat{y}(\mathbf{x}) - \eta(\mathbf{x})]^2$ sobre a região operacional O , conforme a Equação (2.35):

$$J = \int_0 W(\mathbf{x}) E [\hat{y}(\mathbf{x}) - \eta(\mathbf{x})]^2 d\mathbf{x}, \quad (2.35)$$

de modo que a função $W(\mathbf{x})$ indica a região de integração:

$$W(\mathbf{x}) = \begin{cases} \Omega & \text{se } \mathbf{x} \in R \\ 0 & \text{se } \mathbf{x} \notin R \end{cases} \quad (2.36)$$

onde: $\Omega^{-1} = \int_R d\mathbf{x}$ e R denota a região de interesse dentro da região operacional O .

Escrevendo $\hat{y}(\mathbf{x}) - \eta(\mathbf{x}) = \{\hat{y}(\mathbf{x}) - E[\hat{y}(\mathbf{x})]\} + \{E[\hat{y}(\mathbf{x})] - \eta(\mathbf{x})\}$, J pode ser dividido nos componentes de variância média V e viés quadrático médio B . Matematicamente:

$$\begin{aligned} J &= V + B \\ &= \int_0 W(\mathbf{x}) E [\hat{y}(\mathbf{x}) - E[\hat{y}(\mathbf{x})]]^2 d\mathbf{x} + \int_0 W(\mathbf{x}) E [E[\hat{y}(\mathbf{x})] - \eta(\mathbf{x})]^2 d\mathbf{x} \\ &= \int_0 W(\mathbf{x}) V [\hat{y}(\mathbf{x})] d\mathbf{x} + \int_0 W(\mathbf{x}) E [E[\hat{y}(\mathbf{x})] - \eta(\mathbf{x})]^2 d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Assim como em Box e Draper (1959), pode-se incluir o termo N / σ^2 à Equação (2.37) realizando-se uma mudança de variáveis, de maneira que:

$$w(\mathbf{x}) = \frac{N}{\sigma^2} \cdot W(\mathbf{x}) \quad (2.38)$$

Considerando apenas a região de interesse R , $W(\mathbf{x}) = \Omega$. Então, a Equação (2.37) se transforma em:

$$\begin{aligned}
J &= \frac{N}{\sigma^2} \int_R \Omega V[\hat{y}(\mathbf{x})] d\mathbf{x} + \frac{N}{\sigma^2} \int_R \Omega E[E[\hat{y}(\mathbf{x})] - \eta(\mathbf{x})]^2 d\mathbf{x} \\
&= \Omega \frac{N}{\sigma^2} \int_R V[\hat{y}(\mathbf{x})] d\mathbf{x} + \Omega \frac{N}{\sigma^2} \int_R E[E[\hat{y}(\mathbf{x})] - \eta(\mathbf{x})]^2 d\mathbf{x}
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Como apresentado no preâmbulo da seção 2.2, Equação (2.24), o componente de variância $V[\hat{y}(\mathbf{x})]$ é conhecido. Portanto,

$$\begin{aligned}
J &= \Omega \frac{N}{\sigma^2} \int_R \sigma^2 \left[\mathbf{x}^{(m)T} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}^{(m)} \right] d\mathbf{x} \\
&\quad + \Omega \frac{N}{\sigma^2} \int_R E[E[\hat{y}(\mathbf{x})] - \eta(\mathbf{x})]^2 d\mathbf{x}
\end{aligned} \tag{2.40}$$

que equivale a:

$$\begin{aligned}
J &= N\Omega \int_R \left[\mathbf{x}^{(m)T} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}^{(m)} \right] d\mathbf{x} \\
&\quad + \sigma^{-2} N\Omega \int_R E[E[\hat{y}(\mathbf{x})] - \eta(\mathbf{x})]^2 d\mathbf{x}
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Normalmente, admite-se que o modelo escolhido para se estimar a função real $\eta(\mathbf{x})$ não contém viés de estimação (PIEPEL, 2009), o que conduz a relação de proximidade $E[\hat{y}(\mathbf{x})] \cong \eta(\mathbf{x})$. Assim, uma consequência desse pressuposto é a seguinte expressão:

$$J \cong N\Omega \int_R \left[\mathbf{x}^{(m)T} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}^{(m)} \right] d\mathbf{x} = IV \tag{2.42}$$

A Equação (2.42) denota o valor esperado da função de SPV tomada sobre uma região de superfície com distribuição uniforme e é chamada de variância integrada de previsão ou critério IV (*Integrated Variance*). Também é comum encontrar referências a essa função como critérios I, Q e V (ANDERSON-COOK *et al.*, 2009). Dependendo do tipo de arranjo experimental, a região R pode variar muito, o que leva a modificações significativas na integral de superfície Ω .

Considerando os dois tipos de arranjos de superfície de resposta mais populares, quais sejam BBD e CCD, a região R pode ser cuboidal ou esférica. Uma vez que o presente trabalho investiga apenas os CCDs, admite-se, neste estudo, que R seja esférica. Portanto, na Equação (2.42), Ω pode ser derivada da relação apresentada na Equação (2.43), cuja demonstração é desenvolvida no Apêndice A. Embora não a tenham demonstrado, essa relação também pode ser encontrada nos trabalhos de BORKOWSKI (1995a), BORKOWSKI (1995b) e KHURI (2005).

$$\Omega^{-1} = \int_R d\mathbf{x} = S_{sphere} = \frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{k\rho^{k-1} [\sqrt{\pi}]^k}{\frac{k}{2} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} = \frac{2\rho^{k-1} [\sqrt{\pi}]^k}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \quad (2.43)$$

onde: k é o número de fatores; ρ é o raio da região experimental; e $\Gamma(\cdot)$ representa a função Gama.

Frequentemente, a variância média também é analisada em conjunto com as variâncias máxima e mínima de previsão. O conceito de variância máxima já havia sido explorado por Kiefer (1959), que propôs o critério G para comparação de arranjos experimentais. No entanto, a ideia original era apenas encontrar o arranjo com a mínima variância máxima. Em Giovannitti-Jensen e Myers (1989), a variância máxima passou a ser avaliada a diferentes raios a partir do centro de cada arranjo experimental.

A expressão de Kiefer (1959) pode ser escrita em notação moderna como:

$$V(\mathbf{x}) = G = \text{VMAX}_p = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \text{SPV} \quad (2.44)$$

Expressão análoga pode ser obtida para a variância mínima, tal que:

$$V(\mathbf{x}) = \text{VMIN}_p = \min_{\mathbf{x} \in \Omega} \text{SPV} \quad (2.45)$$

Giovannitti-Jensen e Myers (1989) demonstraram como as Equações (2.42)-(2.45) podem ser resolvidas analiticamente para modelos de primeira ordem representados pela Equação (2.46).

$$\eta(\mathbf{x}) = \hat{y}(\mathbf{x}) + \varepsilon = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \varepsilon \quad (2.46)$$

onde: $\eta(\mathbf{x})$ é a função de interesse real, $\hat{y}(\mathbf{x})$ é o modelo empírico estimado a partir dos dados experimentais, β_0 é o termo constante do modelo, β_i são os coeficientes dos termos lineares, e ε é o resíduo.

A expressão desenvolvida por Giovannitti-Jensen e Myers (1989) definiu a variância média de previsão em regiões esféricas em função do número de fatores, do raio da região experimental e dos autovalores da matriz inversa $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$:

$$\text{VMIN}_p = 1 + N(\lambda_{\min}) \rho^2 \quad (2.47)$$

$$IV_p = 1 + \frac{N\rho^2}{k} \sum_{i=1}^k \lambda_i \quad (2.48)$$

$$\text{VMAX}_p = 1 + N(\lambda_{\max}) \rho^2 \quad (2.49)$$

onde: λ representa os autovalores da matriz $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$, sendo λ_{\min} e λ_{\max} os autovalores mínimo e máximo, respectivamente.

Borkowski (1995a) e Borkowski (1995b) demonstraram que as Equações (2.42)-(2.45) podem ser resolvidas analiticamente para modelos de segunda ordem, representados pela Equação (2.7). Para isso, o pesquisador derivou a forma canônica de $\mathbf{x}^{(m)T} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}^{(m)}$, mediante o particionamento da matriz $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$, revelando que:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(m)T} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}^{(m)} &= A + B \sum_{i=1}^k x_i^2 + C \left(\sum_{i=1}^k x_i^2 \right)^2 + D \sum_{i=1}^k x_i^4 \\ &= A + B\rho^2 + C\rho^4 + D \sum_{i=1}^k x_i^4 \end{aligned} \quad (2.50)$$

onde: A, B, C e D são os coeficientes de particionamento, fornecidos na Tabela 2.2 ; k é o numero de fatores; ρ é o raio da região experimental; e \mathcal{X} é a variável independente.

Tabela 2.2 - Coeficientes da função de variância induzida pelo arranjo experimental CCD¹

| Variáveis analíticas ² | | Variáveis aglutinadoras ³ | |
|-----------------------------------|---|--------------------------------------|--|
| T | $2Nr_s\alpha^4 + kNfr_f - k(fr_f + 2r_s\alpha^2)^2$ | A | α_{11} |
| α_{11} | $\frac{kfr_f + 2r_s\alpha^4}{T}$ | B | $2\alpha_{12} + \frac{1}{fr_f + 2r_s\alpha^2}$ |
| α_{12} | $\frac{-(kfr_f + 2r_s\alpha^2)}{T}$ | C | $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{fr_f} - \frac{\alpha_{22}}{r_s\alpha^4}\right)$ |
| α_{22} | $\frac{-(kfr_f + 2r_s\alpha^2)}{T}$ | D | $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_s\alpha^4} - \frac{1}{fr_f}\right)$ |

¹ r_f : número de blocos de pontos fatoriais; r_s : número de blocos de pontos axiais

² Calculadas em função dos parâmetros do arranjo experimental

³ Calculadas em função das variáveis analíticas e dos parâmetros do arranjo experimental

Fonte: Adaptado de Borkowski (1995a) e Borkowski (1995b)

Substituindo-se a Equação (2.50) na Equação (2.42), tem-se:

$$IV_{\rho} = N\Omega \int_R \left[A + B\rho^2 + C\rho^4 + D \sum_{i=1}^k x_i^4 \right] d\mathbf{x} \quad (2.51)$$

Na Equação (2.51), muitos termos não dependem diretamente da variável \mathcal{X} . Assim, o processo de integração pode ser simplificado, de modo que:

$$IV_{\rho} = N\Omega(A + B\rho^2 + C\rho^4)\Omega^{-1} + N\Omega \int_R \left[D \sum_{i=1}^k x_i^4 \right] d\mathbf{x} \quad (2.52)$$

$$IV_{\rho} = N(A + B\rho^2 + C\rho^4) + N\Omega D \int_R \left[\sum_{i=1}^k x_i^4 \right] d\mathbf{x} \quad (2.53)$$

Borkowski (1995a) e Borkowski (1995b) definiram a função $h(\rho)$ para representar a integral do somatório dos quárticos dos fatores na Equação (2.53), tal que: $h(\rho) = \int_R \left[\sum_{i=1}^k x_i^4 \right] d\mathbf{x}$. Com isso, a expressão final para o cálculo da variância média de previsão em regiões esféricas utilizando-se de arranjos CCD pode ser reduzida à Equação (2.54):

$$IV_\rho = N(A + B\rho^2 + C\rho^4) + N\Omega Dh(\rho), \quad (2.54)$$

que é, explicitamente, dependente do raio da região experimental.

Uma maneira de resolver a integral $h(\rho)$ consiste em transformar as variáveis originais em coordenadas hiperesféricas. Outra maneira consiste em utilizar a Integral de Dirichlet. A partir desses procedimentos, $h(\rho)$ pode ser calculada para diferentes valores de k , conforme mostrado na Tabela 2.3.

Tabela 2.3 - Valores calculados de $h(\rho)$ e $h^*(\rho)$ para k variáveis¹

| k | $h(\rho)$ | $h^*(\rho)$ | k | $h(\rho)$ | $h^*(\rho)$ | k | $h(\rho)$ | $h^*(\rho)$ |
|-----|--------------------------|--------------------|-----|---------------------------------|------------------------|-----|-------------------------------------|----------------------------|
| 2 | $\frac{3\rho^5\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | 7 | $\frac{16\rho^{10}\pi^3}{45}$ | $\frac{16\pi^3}{45}$ | 12 | $\frac{\rho^{15}\pi^6}{280}$ | $\frac{\pi^6}{280}$ |
| 3 | $\frac{12\rho^6\pi}{5}$ | $\frac{12\pi}{5}$ | 8 | $\frac{\rho^{11}\pi^4}{10}$ | $\frac{\pi^4}{10}$ | 13 | $\frac{128\rho^{16}\pi^6}{51975}$ | $\frac{128\pi^6}{51975}$ |
| 4 | $\rho^7\pi^2$ | π^2 | 9 | $\frac{32\rho^{12}\pi^4}{315}$ | $\frac{32\pi^4}{315}$ | 14 | $\frac{\rho^{17}\pi^7}{1920}$ | $\frac{\pi^7}{1920}$ |
| 5 | $\frac{8\rho^8\pi^2}{7}$ | $\frac{8\pi^2}{7}$ | 10 | $\frac{\rho^{13}\pi^5}{48}$ | $\frac{\pi^5}{48}$ | 15 | $\frac{512\rho^{18}\pi^7}{1276275}$ | $\frac{512\pi^7}{1276275}$ |
| 6 | $\frac{3\rho^9\pi^3}{8}$ | $\frac{3\pi^3}{8}$ | 11 | $\frac{64\rho^{14}\pi^5}{4095}$ | $\frac{64\pi^5}{4095}$ | | | |

$$^1 h^*(\rho) = h(\rho) \cdot \rho^{1-k-4}$$

Fonte: Adaptado de Borkowski (1995a) e Borkowski (1995b)

Substituindo-se a expressão equivalente Ω , introduzida pela Equação (2.43), na Equação (2.54), é possível discriminar, após algumas manipulações algébricas, um componente $h^*(\rho)$

associado a função $h(\rho)$, mas independente do raio ρ . Isso garante que esse raio ρ seja utilizado apenas na expressão da variância integrada, simplificando o cálculo da integral de superfície. A Tabela 2.3 também apresenta os valores $h^*(\rho)$ para diferentes valores de k .

Matematicamente:

$$\begin{aligned}
IV_\rho &= N(A + B\rho^2 + C\rho^4) + N \left\{ \frac{2\rho^{k-1} [\sqrt{\pi}]^k}{\Gamma(k/2)} \right\}^{-1} Dh(\rho) \\
&= N(A + B\rho^2 + C\rho^4) + N \left\{ \frac{\Gamma(k/2)}{2\rho^{k-1} [\sqrt{\pi}]^k} \right\} Dh(\rho) \\
&= N(A + B\rho^2 + C\rho^4) + N \left\{ \frac{\Gamma(k/2)}{2[\sqrt{\pi}]^k} \right\} D \frac{h(\rho)}{\rho^{k-1}} \\
&= N(A + B\rho^2 + C\rho^4) + N \left\{ \frac{\Gamma(k/2)}{2[\sqrt{\pi}]^k} \right\} D \cdot h(\rho) \rho^{1-k} \rho^4 \rho^{-4} \\
&= N(A + B\rho^2 + C\rho^4) + N \left\{ \frac{\Gamma(k/2)}{2[\sqrt{\pi}]^k} \right\} D \cdot h(\rho) \rho^{1-k-4} \rho^4 \\
&= N(A + B\rho^2) + C\rho^4 + N \left\{ \frac{D \cdot \Gamma(k/2)}{2[\sqrt{\pi}]^k} \right\} [h(\rho) \cdot \rho^{1-k-4}] \rho^4
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Portanto, expressão matemática para a variância média em regiões esféricas é dada por:

$$IV_\rho = N \left\{ A + B\rho^2 + \left[C + \left(\frac{D \cdot \Gamma(k/2)}{2(\sqrt{\pi})^k} \right) h^*(\rho) \right] \rho^4 \right\} \tag{2.56}$$

onde: $h^*(\rho) = h(\rho) \cdot \rho^{1-k-4}$.

Combinando-se as Equações (2.44) e (2.45) com a forma canônica da variância do arranjo experimental, formulada pela Equação (2.50), as expressões para as variâncias máxima e mínima em regiões esféricas também podem ser derivadas. Para isso, substitui-se, inicialmente, o polinômio desenvolvido pela Equação (2.50) na expressão da função de SPV, dada pela Equação (2.32), de maneira que:

$$SPV = N \left[A + B\rho^2 + C\rho^4 + D \sum_{i=1}^k x_i^4 \right], \quad (2.57)$$

A Equação (2.57) pode ser colocada apenas em função dos coeficientes de particionamento de $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$ e dos parâmetros do arranjo experimental N , ρ e k . Isso advém da expressão conceitual do raio ρ e das propriedades dos somatórios.

Conceitualmente, o raio da região experimental ρ é definido como a raiz quadrada do somatório dos quadrados das variáveis x_i , com i indo de 1 até k . Portanto,

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2} \Rightarrow \rho^2 = \sum_{i=1}^k x_i^2 \Rightarrow \rho^4 = \left(\sum_{i=1}^k x_i^2 \right)^2 \Rightarrow \rho^4 = \left(\sum_{i=1}^k x_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^k x_i^2 \right) \quad (2.58)$$

Das propriedades dos somatórios, têm-se que:

$$\rho^4 = \left(\sum_{i=1}^k x_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^k x_i^2 \right) = \left(\sum_{i=1}^k \sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot x_i^2 \right) = \left(\sum_{i=1}^k \sum_{i=1}^k x_i^4 \right) \quad (2.59)$$

Como há um índice único de recursividade i , o somatório externo pode ser convertido no valor limite do índice; neste caso, igual a k . Daí:

$$\rho^4 = \left(k \cdot \sum_{i=1}^k x_i^4 \right) \therefore \sum_{i=1}^k x_i^4 = \frac{\rho^4}{k} \quad (2.60)$$

Substituindo-se a Equação (2.60) na Equação (2.57), obtêm-se as Equações (2.61) e (2.62), que fornecem, respectivamente, as variâncias mínima e máxima em regiões esféricas, exploradas por arranjos CCD. Note-se que as expressões (2.61) e (2.62) são idênticas, sendo distinguidas apenas pelo valor do parâmetro D .

$$VMIN_p = N \left[A + B\rho^2 + \left(C + \frac{D}{k} \right) \rho^4 \right], \text{ para } D > 0 \quad (2.61)$$

$$VMAX_p = N \left[A + B\rho^2 + \left(C + \frac{D}{k} \right) \rho^4 \right], \text{ para } D \leq 0 \quad (2.62)$$

onde: N é o número total de experimentos; ρ é o raio da região experimental; k é o número de fatores; e A , B , C e D são os coeficientes de particionamento de $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$.

Em regiões cuboidais, o conceito de variância média não é aplicável, uma vez que não há distorções na função de variância de previsão. Neste caso, as variâncias mínima e máxima podem ser obtidas pelas Equações (2.63) e (2.64).

$$VMAX_p = N \left\{ A + B\rho^2 + C\rho^4 + D \left[\lfloor \rho^2 \rfloor + (\rho^2 - \lfloor \rho^2 \rfloor)^2 \right] \right\}, \text{ para } D > 0 \quad (2.63)$$

$$VMAX_p = N \left\{ A + B\rho^2 + C\rho^4 + D \left[\lfloor \rho^2 \rfloor + (\rho^2 - \lfloor \rho^2 \rfloor)^2 \right] \right\}, \text{ para } D \leq 0 \quad (2.64)$$

onde: $\lfloor \cdot \rfloor$ denota o operador de números inteiros superiores.

2.2.4 Gráficos de Dispersão de Variância

Conforme apresentado no preâmbulo da seção 2, o conceito de variância de previsão foi originalmente formulado como critério de desempenho de arranjos experimentais. Arranjos que induzissem a menores variâncias de previsão e apresentassem distribuições de variância mais uniformes normalmente eram considerados mais apropriados (BOX, HUNTER, 1957). Apesar disso, o desenvolvimento de métricas de comparação tomou caminhos distintos na literatura. De um lado, foram propostos critérios de desempenho baseados em índices únicos, que ficaram conhecidos como critérios alfabéticos de otimalidade, por serem designados apenas por letras do alfabeto, como D , A , E , G , I e I_D (ANDERSON-COOK *et al.*, 2009; GOLDFARB *et al.*,

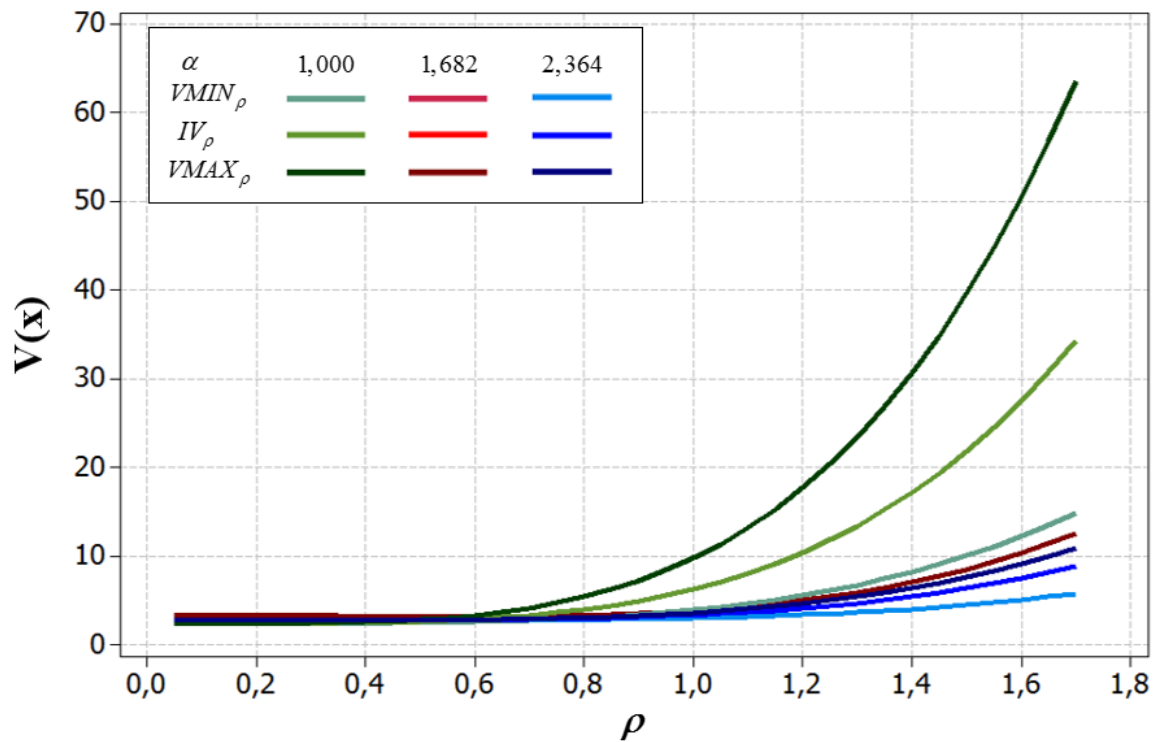
2004). Esses critérios são medidas globais do arranjo, usadas para representar toda a sua variância em um único número.

De outro lado, foram propostas abordagens gráficas, por meio das quais a variância de previsão é avaliada ao longo do raio do arranjo experimental. Os primeiros gráficos de variância foram projetados por Box e Hunter (1957) e usados para esclarecer o conceito de rotacionalidade. Um arranjo rotacionável é aquele que induz a mesma variância aos pontos localizados à mesma distância do centro do arranjo. À época, esses autores optaram por representar graficamente o inverso da função de variância, de modo a evidenciar a precisão relativa ou capacidade de previsão do arranjo.

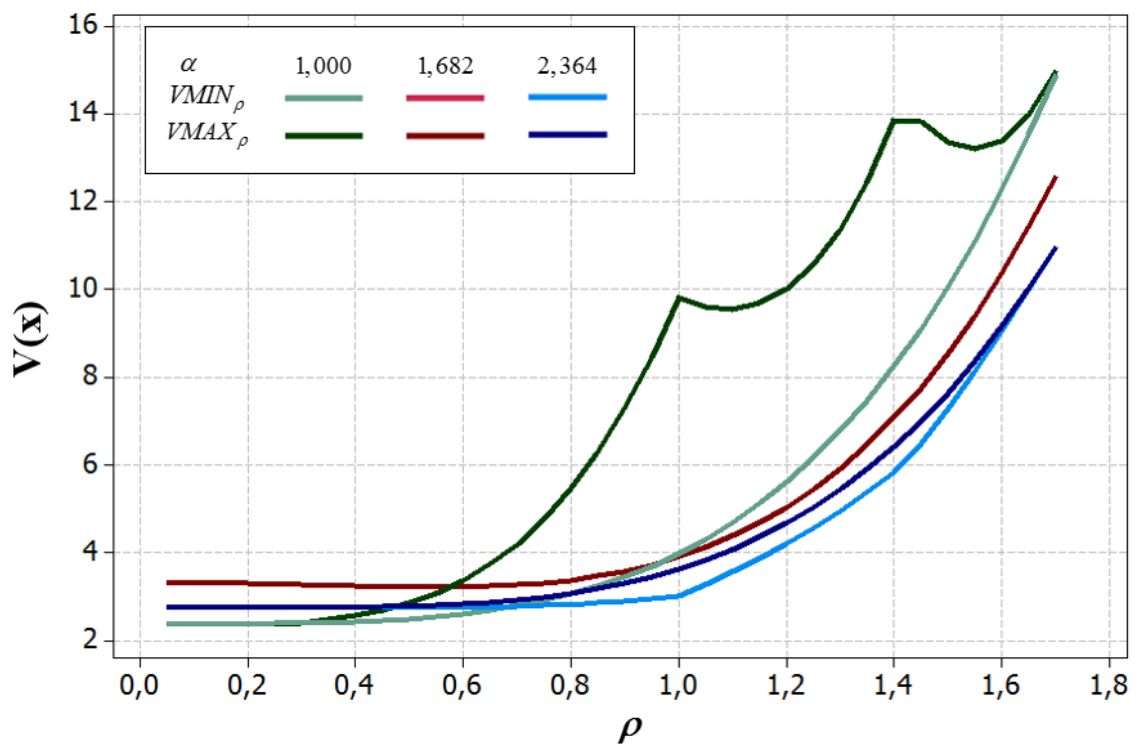
Nos anos 80, Giovannitti-Jensen e Myers (1989) apresentaram formalmente uma variação dos gráficos de Box e Hunter (1957), denominada de Gráficos de Dispersão da Variância (*Variance Dispersion Graphs* – VDGs). Essencialmente, um VDG consiste em qualquer medida de variância plotada em função do raio da região experimental. Essa medida normalmente envolve as variâncias mínima (VMINp), média (IVp) e máxima (VMAXp) de previsão, avaliadas em regiões esféricas ou cuboidais de experimentação.

A Figura 2.2 mostra exemplos de VDGs para arranjos CCD de face centrada ($\alpha=1,000$), rotacionáveis ($\alpha=1,682$) e com distância axial aumentada ($\alpha=2,364$), para $k=3$ e com número de pontos centrais $n_c = 6$, usados para investigar regiões experimentais esféricas (Figura 2.2a) e cuboidais (Figura 2.2b). Como pode ser visto na figura, o arranjo CCD rotacionável é o único que apresenta variâncias mínima, média e máxima coincidentes a qualquer distância do centro do arranjo, independentemente do formato da região investigada. Além disso, arranjos com distância axial reduzida (CCD de face centrada) induzem a maiores variâncias de previsão, revelando variâncias mínima, média e máxima não coincidentes. Por outro lado, arranjos com distância axial aumentada induzem a menores variâncias de previsão, mas com variâncias mínima, média e máxima não coincidentes.

A Figura 2.3 revela as variâncias de previsão dos mesmos arranjos da Figura 2.2, à exceção do número de pontos centrais, que, neste caso, foi reduzido para $n_c = 1$. Como pode ser visto, as curvas de variância permanecem distinguíveis apenas pelo efeito da distância axial. No entanto, uma vez que não há repetitividade adequada (único ponto central), todas elas revelam variância elevada no centro do arranjo, que é diminuída até, aproximadamente, $\rho = 1,000$; a partir desse valor, a variância cresce ilimitadamente.



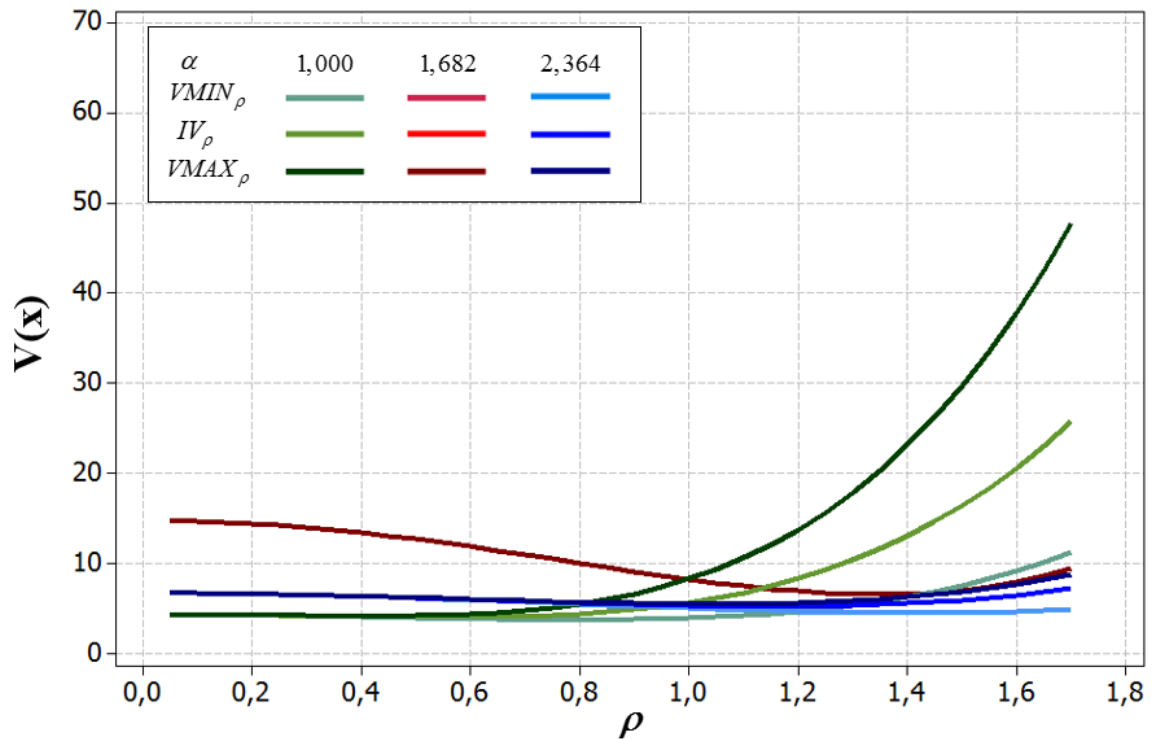
(a) Região Esférica



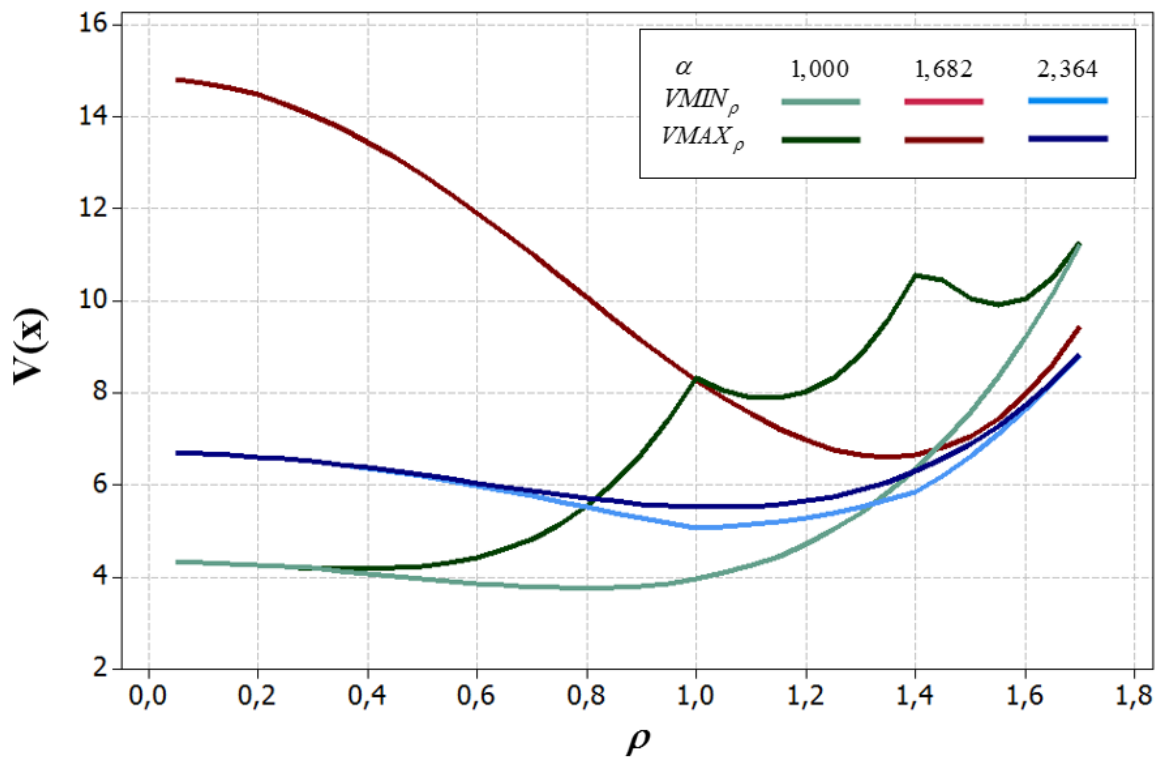
(b) Região Cuboidal

Figura 2.2 - Gráficos de dispersão de variância para o arranjo composto central com parâmetros $k = 3$, $n_c = 6$ e α variável¹

¹Para $\alpha = 1,682$, há garantia de rotacionalidade, o que leva à sobreposição das curvas de variância.



(a) Região Esférica



(b) Região Cuboidal

Figura 2.3 - Gráficos de dispersão de variância para o arranjo composto central com parâmetros $k = 3$, $n_c = 1$ e α variável¹

¹Para $\alpha = 1,682$, há garantia de rotacionalidade, o que leva à sobreposição das curvas de variância.

Comparando-se a Figura 2.2 com a Figura 2.3, é possível observar que os pontos a maiores distâncias do centro do arranjo apresentam melhor relação custo-previsibilidade nos arranjos com menores quantidades de pontos centrais. Note-se, por exemplo, o valor das métricas de variância ao raio máximo de 1,682. Na Figura 2.2 (a), a variância média do arranjo CCD rotacionável encontra-se entre 10 e 20 unidades. Na Figura 2.3 (a), porém, essa variância cai para valores inferiores a 10.

No caso do arranjo CCD de face centrada, essa diferença é ainda mais ampliada, uma vez que, na Figura 2.2 (a), apresenta variância média entre 30 e 40 unidades, e, na Figura 2.3 (a), variância média entre 20 e 30. Para distâncias axiais maiores que o padrão, contudo, as diferenças tendem a ser mínimas. Análise semelhante pode ser realizada usando os gráficos de dispersão para regiões cuboidais – Figura 2.2 (b) e Figura 2.3 (b).

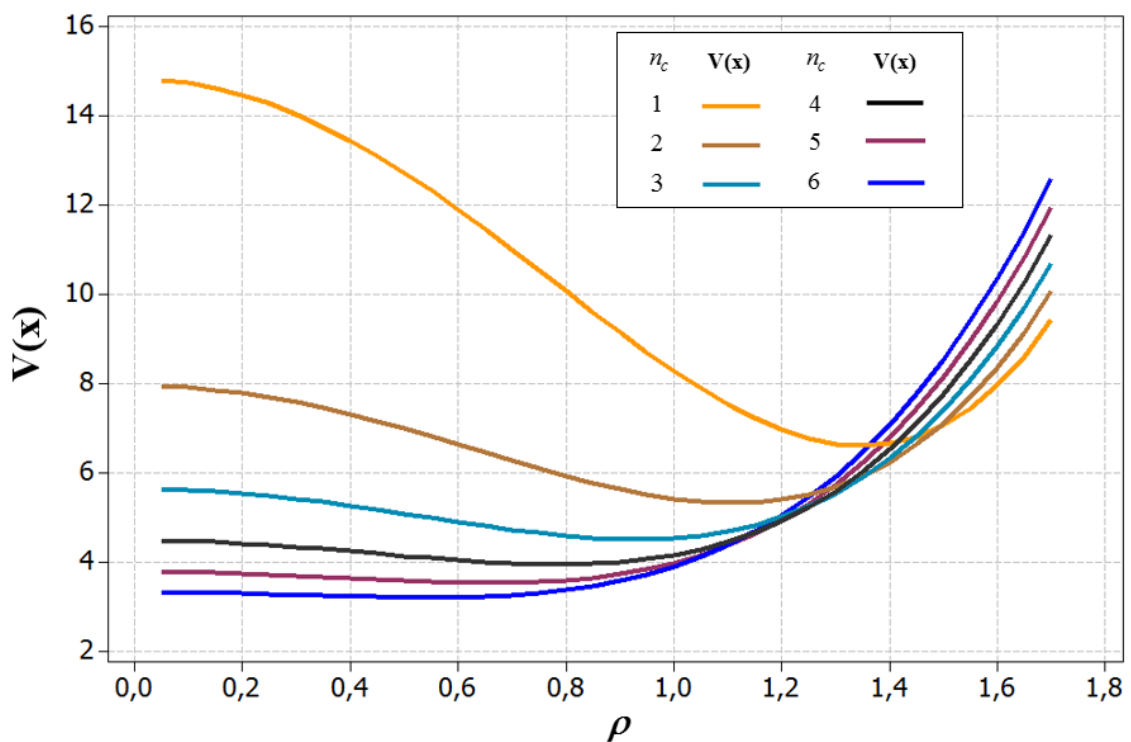
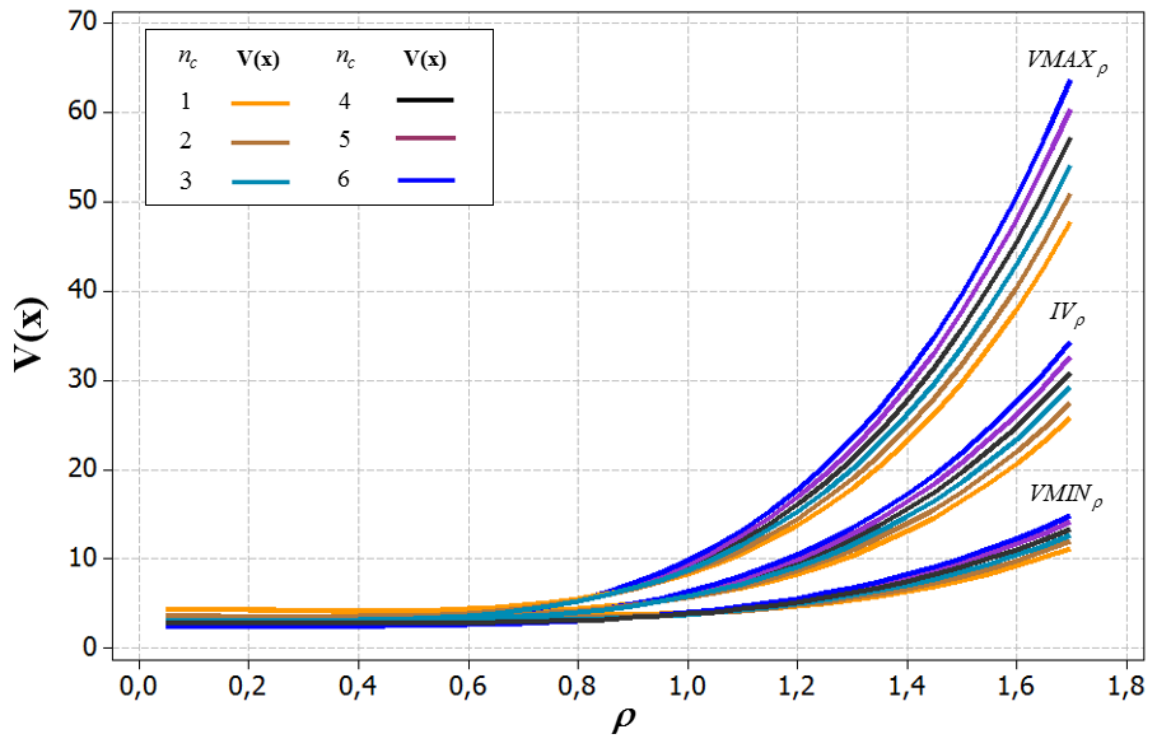
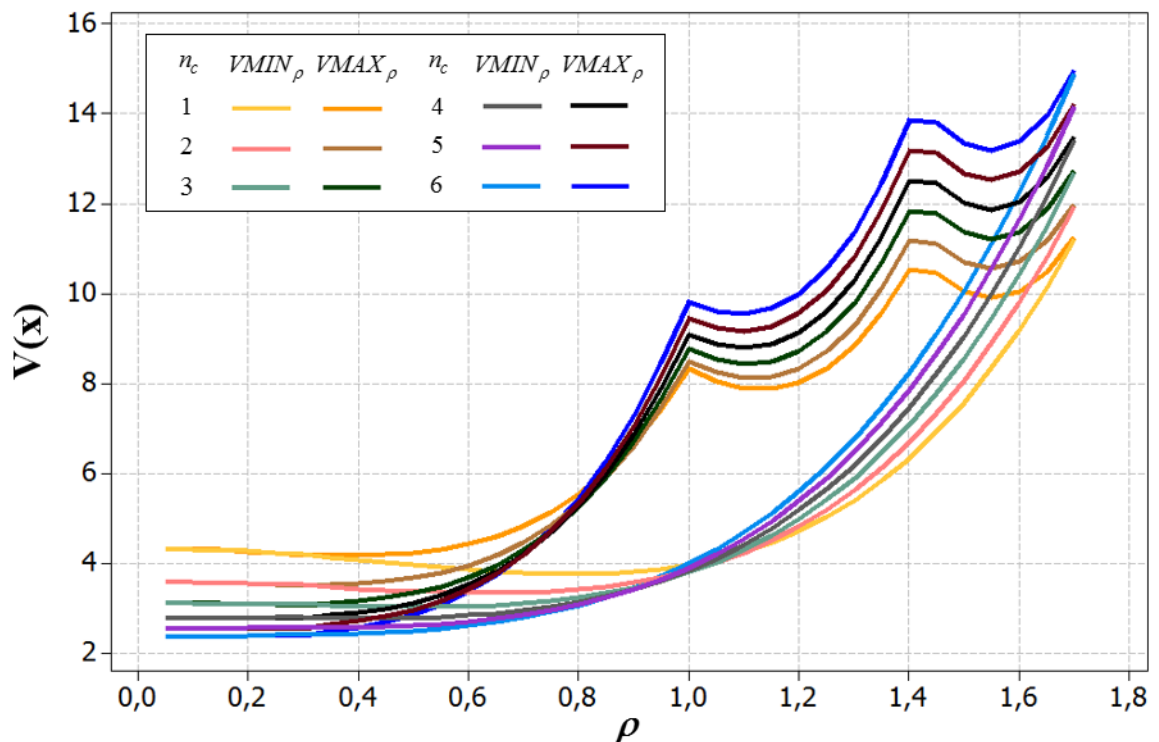


Figura 2.4 - Gráfico de dispersão de variância para o arranjo composto central com parâmetros $k = 3$, $\alpha = 1,682$ (rotacionável) e n_c variável¹

¹Neste caso, como o arranjo é rotacionável, o mesmo gráfico é obtido para regiões esféricas e cuboidais.



(a) Regiões Esféricas



(b) Regiões Cuboidais

Figura 2.5 - Gráficos de dispersão de variância para o arranjo composto central com parâmetros $k = 3$, $\alpha = 1,000$ (face centrada) e n_c variável.

Fonte: Autoria própria.

Atenção especial deve ser dada aos dois últimos parágrafos, para que o pesquisador não seja levado a conclusões equivocadas. Como os VDGs clássicos empregam um fator de penalidade de custo, expresso pela razão do número de pontos experimentais N e a variância experimental σ^2 – retome-se a Equação (2.30) –, eventuais vantagens de arranjos com menor quantidade de pontos centrais residem na obtenção de melhores relações “custo-previsibilidade” e não apenas em menores variâncias, uma vez que isso não é possível apenas com a eliminação de pontos experimentais em um arranjo.

Nos arranjos CCD rotacionáveis (Figura 2.4), quando da utilização de poucos pontos centrais, a variância no centro é significativamente aumentada. Contudo, as funções de variância mínima, média e máxima são equivalentes, pois, às mesmas distâncias radiais, a variância permanece constante.

A Figura 2.5 revela exemplos de VDGs para arranjos CCD de face centrada, com diferentes quantidades de pontos centrais. Como esperado, quanto menor o número de pontos centrais, maiores as variâncias mínima, média e máxima no centro do arranjo. A partir da região central, porém, as variâncias mínima, média e máxima tendem a aumentar progressivamente. Quando apenas um ponto central é utilizado, a variância diminui até a distância unitária do raio, e, então, cresce livremente para distâncias maiores.

É interessante notar que todas as funções de variância acompanham a distribuição de variância do arranjo, embora apresentem escalas distintas. Isso significa que, se o experimentador estiver interessado apenas em identificar as regiões de melhor capacidade de previsão, qualquer métrica pode ser usada. Contudo, se estiver interessado em uma medida que represente a tendência de uma dada região do arranjo, com respeito à previsibilidade, então, para regiões esféricas, a variância média é a mais recomendada, uma vez que, nela, as distorções causadas na função original de variância podem ser corrigidas; para regiões cuboidais, deve-se optar pela variância mínima ou máxima, sendo esta última a mais comumente adotada.

2.2.5 Resumo das principais medidas de variância de previsão

Considerando os desenvolvimentos das seções 2.2.2 a 2.2.4, esta seção reúne as principais medidas de variância de previsão propostas na literatura. O Quadro 2.1 associa a terminologia à expressão e às formulações originais de cada uma delas.

Quadro 2.1 - Principais medidas de variância de previsão

| Medida de Variância de Previsão | | Formulações Originais |
|--|---|--|
| Terminologia | Expressão | |
| Variância de previsão ¹ | $V(\mathbf{x}) = \sigma^2 \left[\mathbf{x}^{(m)T} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}^{(m)} \right]$ | Box e Wilson (1951) Box e Hunter (1957) |
| Variância Escalonada de Previsão (SPV) | $V(\mathbf{x}) = SPV = N \left[\mathbf{x}^{(m)T} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}^{(m)} \right]$ | Box e Wilson (1951) Box e Hunter (1957) |
| Variância Média ou Variância Integrada de Previsão | $V(\mathbf{x}) = IV = N \Omega \int_R \left[\mathbf{x}^{(m)T} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}^{(m)} \right] d\mathbf{x}$ | Box e Draper (1959) |
| Variância Máxima de Previsão | $V(\mathbf{x}) = G = VMAX_p = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} SPV$ | Kiefer (1959) |
| Variância Mínima de Previsão | $V(\mathbf{x}) = VMIN_p = \min_{\mathbf{x} \in \Omega} SPV$ | Giovannitti-Jensen e Myers (1989) |
| Amplitude da Variância de Previsão | $V(\mathbf{x}) = VMAX_p - VMIN_p$ $= \max_{\mathbf{x} \in \Omega} SPV - \min_{\mathbf{x} \in \Omega} SPV$ | Giovannitti-Jensen e Myers (1989) |
| Desvio Padrão da Variância de Previsão | $V(\mathbf{x}) = \sqrt{\Omega \left\{ \int_R SPV - \text{tr} S (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \right\}^2 d\mathbf{x}}$ | Giovannitti-Jensen e Myers (1989) |

¹Métrica básica de variância, a partir da qual todas as demais são derivadas. Caracteriza, diretamente, a variância de um modelo estimado a partir de um arranjo experimental.

Fonte: Autoria própria.

2.3 Análises de Capacidade

A fim de esclarecer as bases sobre as quais este trabalho desenvolve as razões modificadas de capacidade como parte da estratégia de otimização proposta, esta seção aborda o conceito original de capacidade de previsão (seção 2.3.1) e a capacidade de processos (seção 2.3.2).

2.3.1 Conceito original de capacidade de previsão

Como parte dos estudos de George Box (BOX; HUNTER, 1957; BOX; DRAPER, 1959; BOX; HUNTER, 1961; BOX; DRAPER, 1963), o conceito de capacidade de previsão surge

acompanhado das ideias de precisão e variância. Da literatura, tem-se que um modelo preciso é aquele com menor variância associada (BOX; DRAPER, 1959); o que implica, em termos modernos, em um intervalo de confiança mais estreito. Sabe-se, da seção 2.2, que a variância de um modelo está diretamente ligada à variância induzida pelo arranjo experimental.

Portanto, idealmente, um arranjo que favorece a precisão dos modelos é aquele com menores valores de variância e função de variância mais uniforme. Qualquer que seja o arranjo, porém, conforme o ponto se afasta do seu centro, a variância tende a aumentar, tornando os modelos menos precisos, dependendo dos valores que se desejam prever.

A partir dessa discussão, Box e Hunter (1957) definiram uma função padronizada ponderada $W(p)$ independente da variância experimental σ^2 e inversamente proporcional à variância do arranjo $V(p)$ ⁷. Essa função $W(p)$, introduzida pela Equação (2.65), denota diretamente a precisão relativa de um modelo, conforme o ponto se afasta do centro do arranjo.

$$W(\rho) = [V(\rho)]^{-1} \quad (2.65)$$

onde: ρ representa o raio do arranjo experimental.

Algumas décadas mais tarde, a noção de “precisão relativa” passou a ser denominada “capacidade de previsão” (GIOVANNITTI-JENSEN; MYERS, 1989; TRINCA; GILMOUR, 1998), em uma referência à capacidade de um arranjo experimental assegurar a estimação de um modelo com precisão satisfatória. Assim, onde a variância é mínima, a capacidade de previsão é máxima e vice-versa.

2.3.2 Capacidade de processos

Análises de capacidade de processos pretendem avaliar o comportamento da variabilidade natural do processo em relação à variabilidade permitida. Conceitualmente, um processo é capaz quando gera produtos dentro dos limites de especificação, isto é, quando não há produtos não conformes (MONTGOMERY, 2012). Na prática, para a avaliação da capacidade ou do desempenho de um processo, vários índices podem ser empregados (SPIRING, 1997). Por convenção, medidas de capacidade de um processo sob controle estatístico (ou seja, que contém apenas causas naturais de variação) são denominadas “razões de capacidade” (ou, razões C).

⁷ Essa métrica foi posteriormente definida como SPV.

Por outro lado, medidas de capacidade de um processo fora de controle estatístico (ou seja, que também contém causas especiais) são denominadas “índices de desempenho” (ou, índices P).

O uso de razões de capacidade é geralmente considerado mais apropriado para a investigação de um processo, uma vez que presume-se que causas especiais, como defeitos em componentes de máquinas ou ferramentas danificadas já tenham sido eliminados (KOTZ; LOVELACE, 1998). A razão C mais comum em análises de capacidade é a medida C_p , definida como a razão da variabilidade total permitida, dada pela diferença entre os limites de especificação, pela variabilidade natural do processo, usualmente representada por seis desvios padrões⁸, tal que:

$$C_p = \frac{(LSE - LIE)}{6\sigma} \quad (2.66)$$

onde: LSE e LIE representam, respectivamente, os limites superior e inferior de especificação e σ representa o desvio padrão do processo.

O intervalo de confiança de C_p é dado por:

$$\hat{C}_p \sqrt{\frac{(\chi^2_{1-\alpha/2, n-1})}{n-1}} \leq C_p \leq \hat{C}_p \sqrt{\frac{(\chi^2_{\alpha/2, n-1})}{n-1}} \quad (2.67)$$

onde: \hat{C}_p é o estimador do parâmetro C_p , obtido a partir dos dados experimentais, χ^2 é a estatística Qui-Quadrado calculada para um dado nível de significância α e $n-1$ graus de liberdade (que dependem apenas do número de observações n).

Embora seja um índice de fácil obtenção, o C_p não é sensível a deslocamentos na média do processo. A Figura 2.6 ilustra alguns casos nos quais o mesmo C_p é observado para cinco processos sob diferentes condições de centralidade. Para esses casos, outras razões de capacidade são mais apropriadas, como os índices C_{pk} e C_{pm} .

⁸ Um pressuposto comum, que advém da noção de subgrupos racionais e do teorema central do limite, é que os dados sejam provenientes de uma distribuição normal.

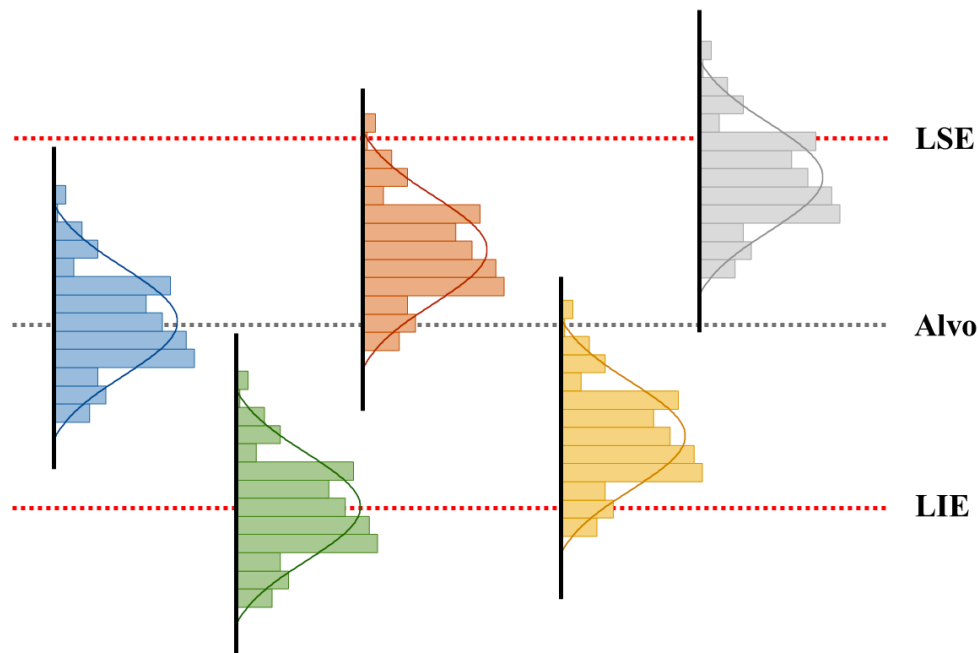


Figura 2.6 - Processos sob diferentes condições de centralidade com o mesmo C_p^a

^a LSE: Limite Superior de Especificação. LIE: Limite Inferior de Especificação.

Fonte: Autoria própria.

O índice C_{pk} foi proposto no Japão como uma medida de capacidade para detectar deslocamentos em relação à média histórica do processo⁹ (BAUER *et al.*, 2019). Uma vez que a média pode se deslocar tanto para baixo (valores menores) como para cima (valores maiores) da média histórica, a razão C_{pk} é definida como o mínimo entre as razões de capacidade unilaterais C_{pl} e C_{pu} , conforme apresentado nas Equações (2.68)-(2.70). A ideia central é que, uma vez que o desvio padrão σ é o mesmo para ambas as razões, o mínimo irá fornecer a capacidade do processo com relação ao limite mais próximo da média do processo (pior cenário). Assim, se o processo é capaz nesse cenário, também será capaz no cenário mais favorável.

$$C_{pl} = \frac{(\mu - LIE)}{3\sigma} \quad (2.68)$$

$$C_{pu} = \frac{(LSE - \mu)}{3\sigma} \quad (2.69)$$

⁹ O índice k decorre da palavra japonesa “katayori”, que significa deslocamento.

$$C_{pk} = \text{Min} \left\{ \frac{(\mu - LIE)}{3\sigma}, \frac{(LSE - \mu)}{3\sigma} \right\} \quad (2.70)$$

onde: μ representa a média do processo.

O intervalo de confiança de C_{pk} é dado por:

$$\hat{C}_{pk} \left[1 - Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{9n\hat{C}_{pk}^2} + \frac{1}{2(n-1)}} \right] \leq C_{pk} \leq \hat{C}_{pk} \left[1 + Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{9n\hat{C}_{pk}^2} + \frac{1}{2(n-1)}} \right] \quad (2.71)$$

Se a média não coincide com o alvo de centralidade T do processo, outras medidas se tornam mais adequadas. A razão C_{pm} , por exemplo, inclui o deslocamento da média do processo ao alvo T como um segundo componente de variabilidade:

$$C_{pm} = \frac{LSE - LIE}{6\sqrt{(\mu - T)^2 + \sigma^2}} \quad (2.72)$$

Tabela 2.4 - Valores mínimos recomendados para as razões de capacidade

| Classificações | | Especificações | |
|----------------|-----------------------------|----------------|-------------|
| Processos | Parâmetros | Bilateriais | Unilaterais |
| Existentes | Convencional | 1,33 | 1,25 |
| | Segurança, força ou crítico | 1,50 | 1,45 |
| Novos | Convencional | 1,50 | 1,45 |
| | Segurança, força ou crítico | 1,67 | 1,60 |

Fonte: Adaptado de Montgomery (2012)

Avaliações práticas da capacidade de um processo são, usualmente, realizadas mediante a comparação das razões de capacidade com valores de aceitabilidade padrão. Um processo é dado capaz se a razão de capacidade for maior que os valores considerados aceitáveis. A Tabela

2.4 resume os valores mínimos recomendados para essas razões de acordo com Montgomery (2012). Embora não haja consenso sobre esses valores (vejam-se, por exemplo, CHEN *et al.*, 2006; RIMANTHO; HANANTYA, 2017), a abordagem proposta por Montgomery (2012) tem a vantagem de estabelecer valores mínimos considerando os tipos de processo e parâmetros, bem como a quantidade de limites de especificação; isto é, um (especificações unilaterais) ou dois (especificações bilaterais).

3 ANÁLISE ESTATÍSTICA MULTIVARIADA

Freqüentemente, os processos industriais apresentam medidas simultâneas de múltiplas variáveis. Nesses casos, a estatística univariada torna-se bastante limitada para lidar com o volume de relações entre elas. Por meio das técnicas multivariadas, porém, é possível analisar os processos sob diferentes perspectivas, incluindo inferências sobre médias e estruturas de variância e covariância, classificações e agrupamentos e regressões multivariadas.

Essas técnicas costumam ser aplicadas com quatro objetivos clássicos: (1) reduzir a dimensionalidade dos dados; (2) extrair a correlação entre variáveis; (3) revelar mais informações sobre a relação entre elas; e (4) construir modelos mais robustos para um dado fenômeno ou processo (JOHNSON; WICHERN, 2007; RENCHER, 2002).

Na literatura, a análise fatorial (*Factor Analysis* – FA) destaca-se como uma das técnicas de inferência sobre estruturas de variância-covariância mais eficazes para a investigação de problemas multivariados. Por esse motivo, esta técnica tem sido utilizada em diferentes aplicações. Neste trabalho, a FA é adotada, segundo os fundamentos detalhados nas seções 3.1 e 3.2.

3.1 Análise Fatorial

A FA é uma técnica multivariada especialmente usada para a redução de dimensionalidade e obtenção de variáveis latentes linearmente independentes. Diferentemente da análise de componentes principais (*Principal Component Analysis* – PCA), onde as variáveis latentes geralmente não possuem significado prático (RENCHE, 2002), a FA permite obter um subconjunto de variáveis causais a partir das variáveis originais (HÄRDLE; HLÁVKA, 2015), o que usualmente fornece mais informação sobre um problema específico. Um modelo ortogonal de um fator pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\mathbf{Y} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{A}\mathbf{F} + \boldsymbol{\zeta} \quad (3.1)$$

onde: \mathbf{Y} é um vetor aleatório de variáveis originais; $\boldsymbol{\mu}$ é um vetor de constantes desconhecidas; \mathbf{A} é a matriz de carregamento; \mathbf{F} é a matriz de escores dos fatores; e $\boldsymbol{\zeta}$ é um vetor de erros não observáveis, também chamados de fatores específicos (JOHNSON; WICHERN, 2007).

Estatisticamente, a FA descreve as relações de covariância entre as variáveis originais usando variáveis aleatórias ocultas mas não observáveis, chamadas de fatores, capazes de explicar a variação dos dados originais (TABACHNICK; FIDELL, 2006). Frequentemente, essas relações também são expressas em termos de correlações entre as variáveis originais Y , o que pode ser dado em forma de uma matriz de correlação \mathbf{R} :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & r_{pp} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

onde: p denota o número de variáveis originais.

A FA parte do cálculo dos autovetores \mathbf{V} e dos autovalores \mathbf{L} da matriz \mathbf{R} , estabelecendo, com isso, a chamada matriz de carregamento $\mathbf{A}_{p \times m}$, de acordo com a Equação (3.3), cuja ordem $p \times m$ é dada pelo número de variáveis originais p e o número de fatores m .

$$\mathbf{A} = \mathbf{V} \times \sqrt{\mathbf{L}} \quad (3.3)$$

onde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & \cdots & A_{pm} \end{bmatrix}_{p \times m} ; \mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{p1} & \cdots & v_{pm} \end{bmatrix}_{p \times m} ; \text{ e } \mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & l_{mm} \end{bmatrix}_{m \times m}$$

A variação de um conjunto de variáveis para um fator específico é dada pela Soma de Quadrados das Cargas (*Sum of Square Loads – SSL*):

$$\text{Variation}_j = \text{SSL}_j = \sum_{i=1}^p A_{ij}^2, \text{ para cada fator } j, \quad (3.4)$$

que também pode ser representada como um percentual da variação total dos dados, fornecida pelo traço da matriz \mathbf{R} :

$$\%Var_j = \frac{SSL_j}{tr(\mathbf{R})} \quad (3.5)$$

A soma das porcentagens individuais de cada fator $\left(\sum_{j=1}^m \%Var_j\right)$ fornece uma medida de quanto os fatores estimados são adequados para representar o conjunto de variáveis originais. Usualmente, uma porcentagem maior que 80% é considerada aceitável.

A partir da matriz de carregamento \mathbf{A} , é possível obter as comunalidades h_i^2 , associadas às variáveis originais, que, em conjunto, denotam a estrutura de correlação do problema, de modo que:

$$h_i^2 = \sum_{j=1}^m A_{ij}^2, \text{ para cada variável } i. \quad (3.6)$$

Considerando a inversa da matriz de correlação \mathbf{R}^{-1} e a matriz de carregamento \mathbf{A} , uma matriz \mathbf{B} de coeficientes dos escores dos fatores, que forneça os fatores “brutos”, pode ser determinada conforme a Equação (3.7). Essa matriz também é denominada “matriz de pesos”, uma vez que fornece os pesos para a definição dos escores dos fatores, após a normalização dos dados.

$$\mathbf{B} = \mathbf{R}^{-1} \times \mathbf{A} \quad (3.7)$$

Finalmente, os escores dos fatores são obtidos pelo produto da matriz de pesos \mathbf{B} e a matriz de variáveis normalizadas \mathbf{Z} .

$$\mathbf{F} = \mathbf{Z} \times \mathbf{B} \quad (3.8)$$

onde: \mathbf{Z} contém os valores padronizados de cada variável original, tal que $Z_{ij} = (X_{ij} - \mu_i) / \sigma_i$, para toda i -ésima coluna e j -ésima linha da matriz. Note-se que: (1) μ_i e σ_i são, respectivamente, a média e o desvio-padrão de uma dada variável original i ; e (2) X_{ij} é o valor de uma dada variável original i em uma certa condição experimental j .

3.2 Escores de fatores rotacionados

Uma maneira de melhorar a explicação das variáveis originais consiste em rotacionar os fatores preservando sua ortogonalidade, de maneira a maximizar os módulos das correlações pré-existentes entre as variáveis originais e os fatores. Esse procedimento permite obter fatores mais interpretáveis, ou, em outras palavras, mais diretamente associados aos fenômenos investigados. Existem vários métodos de rotação de fatores ortogonais, como quartimax, equimax e varimax, sendo este último o mais popular em estudos experimentais (TABACHNICK; FIDELL, 2006).

Freqüentemente, as variáveis originais têm altas cargas associadas a mais de um fator. Na prática, isso dificulta a segregação dos fenômenos atuantes sobre os processos. Assim, utilizando a matriz de carregamento original, o método varimax maximiza iterativamente as variações das colunas, aumentando as cargas maiores e diminuindo as menores (RENCHER, 2002). A ideia é que cada fator tenha apenas algumas variáveis com grandes cargas, melhorando, com isso, a explicação das variáveis originais.

Para isso, a rotação varimax utiliza a matriz de rotação Λ , formada por senos e cosenos do ângulo de rotação γ , para rotacionar a matriz de carregamento \mathbf{A} , de modo que:

$$\mathbf{A}_{\text{rot}} = \mathbf{A} \times \Lambda \quad (3.9)$$

onde: \mathbf{A} é a matriz de carregamento original e $\Lambda = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{bmatrix}$ é a matriz de rotação para dois fatores ($m=2$).

Uma vez que a matriz de carregamento rotacionada \mathbf{A}_{rot} é obtida, os escores dos fatores rotacionados são derivados da mesma maneira que os fatores originais, usando a matriz de variáveis normalizadas \mathbf{Z} , a inversa da matriz de correlação \mathbf{R}^{-1} e a matriz de coeficientes dos escores de fatores rotacionados \mathbf{B}_{rot} :

$$\mathbf{F}_{\text{rot}} = \mathbf{Z} \times \underbrace{\mathbf{R}^{-1} \times \mathbf{A}_{\text{rot}}}_{\mathbf{B}_{\text{rot}}} \quad (3.10)$$

Um dos procedimentos mais eficazes para se determinar o ângulo de rotação foi proposto por Kaiser (1958). Nesta abordagem, o critério varimax, dado pela Equação (3.11), deve ser maximizado, a fim de encontrar o ângulo que mais espalha as cargas quadráticas dos fatores:

$$\max V^* = \sum_{j=1}^m \left\{ \left[p \sum_{i=1}^p \left(A_{ij}^2 / h_i^2 \right)^2 - \left[\sum_{i=1}^p A_{ij}^2 / h_i^2 \right]^2 \right] / p^2 \right\} \quad (3.11)$$

Para resolver analiticamente o problema anterior, as seguintes quantidades padrão podem ser definidas, com base nas cargas originais – Equação (3.3) – e nas comunalidades – Equação (3.6):

(1) A soma das cargas normalizadas quadráticas de m fatores, u_i :

$$u_i = \sum_{j=1}^m \left(A_{ij} / \sqrt{h_i^2} \right)^2, \text{ para cada variável original } i; \text{ e} \quad (3.12)$$

(2) O produtório das cargas normalizadas de m fatores, v_i :

$$v_i = 2 \prod_{j=1}^m A_{ij} / \sqrt{h_i^2}, \text{ para cada variável original } i \quad (3.13)$$

Assim, em notação moderna, a formulação encontrada por Kaiser (1958) para o ângulo de rotação pode ser derivada da seguinte maneira:

$$\gamma = \frac{1}{4} \arctan \left\{ \underbrace{\left[a - \left(\frac{2bc}{p} \right) \right]}_{\kappa_1} \underbrace{\left[d - \left[\frac{(b^2 - c^2)}{p} \right] \right]^{-1}}_{\kappa_2} \right\} \quad (3.14)$$

onde: $a = \sum_{i=1}^n u_i v_i$, $b = \sum_{i=1}^n u_i$, $c = \sum_{i=1}^n v_i$, e $d = \sum_{i=1}^n (u_i^2 - v_i^2)$ são os coeficientes baseados nas quantidades normalizadas definidas nas Equações (3.12) e (3.13); e p é o número de variáveis originais.

As condições suficientes para se obter o ângulo máximo de rotação γ podem ser determinadas avaliando as quantidades κ_1 e κ_2 na Equação (3.14), segundo os critérios estabelecidos na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 - Condições suficientes para se obter o ângulo máximo de rotação varimax

| κ_1 | κ_2 | Limites de γ | |
|------------|------------|---------------------|----------|
| | | Inferior | Superior |
| - | - | -45.0° | -22.5 |
| - | + | -22.5° | 0° |
| + | + | 0° | +22.5° |
| + | - | +22.5° | +45.0° |

Fonte: Adaptado de Kaiser (1958)

4 OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO

Os processos industriais, por natureza, apresentam múltiplas características de interesse, usualmente agrupadas em medidas críticas para a qualidade (CTQ) e críticas para o desempenho (CTP). Essas características consistem em aspectos relevantes para o tomador de decisão, como eficiência energética, taxa de produtividade, dimensões físicas dos produtos, percentuais de componentes de liga, entre outros. Normalmente, há clareza para o tomador de decisão sobre o que é necessário obter nos processos, como, por exemplo, aumento de eficiência e de produtividade (YÜCEL; GÖYCINCIK; 2015; ZHOU *et al.*, 2019), redução do consumo de materiais (SUNDARARAMAN *et al.*, 2014) melhoria da qualidade dos produtos (VERMA *et al.*, 2017).

No entanto, uma vez que esses processos envolvem atividades e fenômenos complexos, torna-se difícil alcançar todos os objetivos idealizados. Sem embargo, uma das maneiras mais eficazes para esse fim consiste em modelar os problemas matematicamente. Assim, como existem múltiplas metas ou objetivos, tais problemas costumam ser denominados “multiobjetivos” (JIAO; LEE, 2019) ou, ainda, “multicritérios” (LEE; JIAO, 2018). Dependendo dos objetivos estabelecidos, as métricas CTQ e CTP são usadas como funções a serem maximizadas, minimizadas ou restringidas.

Ainda que empregadas técnicas matemáticas, os problemas multiobjetivos continuam sujeitos a julgamentos e preferências do tomador de decisão. Isso ocorre, em especial, porque conjuntos de fenômenos e atividades atuantes sobre os processos tendem favorecer algumas características em detrimento de outras. Por exemplo, para se obter maior produtividade no processo de torneamento, são necessárias velocidades mais elevadas. No entanto, isso leva a maiores desgastes nas pastilhas de corte, implicando em maior consumo de ferramentas. Idealmente, seria interessante obter, simultaneamente, maior produtividade e menor consumo de ferramentas, mas a natureza do processo impede que isso aconteça.

4.1 Diretrizes básicas para a otimização multiobjetivo

Considerando os conceitos apresentados no preâmbulo da seção 4, a otimização multiobjetivo pode ser conduzida em quatro passos genéricos. Primeiro, devem-se definir que funções serão otimizadas e quais os seus sentidos de otimização. Genericamente, é comum

definir os problemas multiobjetivos como a minimização de um conjunto de funções¹⁰ (JAHN, 2011; LASSERE, 2015):

$$\underset{\mathbf{x} \in \Omega}{\text{Min}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})] \quad (4.1)$$

onde: m denota o índice da função objetivo otimizada.

Em seguida, devem-se estabelecer um vetor de funções objetivo e uma matriz *pay-off*. Nessa matriz, será possível visualizar como a melhoria em uma característica afeta as demais (COLIN, 2015), evidenciando a natureza conflitua do processo. Considerando as funções originais das características de interesse, o vetor e a matriz mencionados podem ser expressos conforme a Equação (4.2).

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1) \\ \vdots \\ f_i(x_i) \\ \vdots \\ f_m(x_m) \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} f_1^*(x_1^*) & \cdots & f_1(x_i^*) & \cdots & f_1(x_m^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ f_1(x_1^*) & \cdots & f_i^*(x_i^*) & \cdots & f_i(x_m^*) \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ f_m(x_1^*) & \cdots & f_m(x_i^*) & \cdots & f_m^*(x_m^*) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

onde: x_m^* representa o ótimo de uma dada função m , $f_m^*(x_m^*)$ denota a função ótima m , avaliada com relação ao seu ótimo x_m^* , e $f_i(x_m^*)$ denota a i -ésima função, avaliada com relação ao ótimo x_m^* (RAO, 2009).

O conjunto de soluções ótimas individuais é dado pela diagonal principal de $\mathbf{\Phi}$ e formam o ponto de Utopia $f^U = [f_1^*(x_1^*), \dots, f_i^*(x_i^*), \dots, f_m^*(x_m^*)]$. Em geral, esse ponto cai fora da região viável e representa a solução idealizada, onde todas as funções objetivo alcançam seus melhores valores. Por outro lado, o conjunto das piores soluções individuais formam o ponto de Nadir $f^N = [f_1^N, \dots, f_i^N, \dots, f_m^N]$, que representa o cenário onde todas as funções objetivo falham em fornecer soluções ótimas. Pode-se obter a solução individual de Nadir de uma função

¹⁰ Muitas vezes, quando a função apresenta sentido de maximização, esta é representada com sinal invertido, uma vez que maximizar $f(\mathbf{x})$ é equivalente a minimizar $-f(\mathbf{x})$.

f_m ao avaliar f_m com relação aos ótimos individuais $x_1^*, \dots, x_i^*, \dots, x_{m-1}^*$ de $f_1, \dots, f_i, \dots, f_{m-1}$, respectivamente. A solução individual de Nadir de f_m será o pior valor desse conjunto.

Considerando o caso multivariado, discutido na seção 3, o vetor de funções objetivo e a matrix *pay-off* para os fatores rotacionados modelados podem ser expressos conforme a Equação (4.3).

$$\mathbf{F}_S(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_{S_1}(x_1) \\ \vdots \\ f_{S_i}(x_i) \\ \vdots \\ f_{S_m}(x_m) \end{bmatrix} \Rightarrow \Psi_{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} f_{S_1}^*(x_1^*) & \cdots & f_{S_1}(x_i^*) & \cdots & f_{S_1}(x_m^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{S_1}(x_1^*) & \cdots & f_{S_i}^*(x_i^*) & \cdots & f_{S_i}(x_m^*) \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{S_m}(x_1^*) & \cdots & f_{S_m}(x_i^*) & \cdots & f_{S_m}^*(x_m^*) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

onde: x_m^* representa o ótimo de um dado fator m , $f_{S_m}^*(x_m^*)$ denota o fator ótimo m , calculado com relação ao seu ótimo x_m^* , e $f_{S_i}(x_m^*)$ denota o i -ésimo fator calculado com relação ao ótimo x_m^* .

Uma maneira típica de se obter as matrizes *pay-off* apresentadas nas Equações (4.2) e (4.3) consiste em conduzir a otimização individual de cada função objetivo envolvida no problema (COSTA, 2017; ROCHA, 2017). Esse procedimento fornece, na diagonal principal das matrizes, os melhores valores das funções; o conjunto formado por esses valores define o chamado ponto de utopia, uma condição idealizada, na qual todos os objetivos são plenamente atingidos. Por outro lado, os piores valores de cada função são obtidos nas demais células das matrizes e, combinados, formam o chamado ponto de nadir, uma condição desfavorável para todos os objetivos.

Após esse passo, diferentes métodos matemáticos podem ser aplicados de modo a fornecer uma ou mais soluções apropriadas. Embora existam diversas abordagens multiobjetivo na literatura, todas elas costumam empregar operadores de aglutinação, que, na prática, transformam os vários modelos originais em uma única função objetivo global; essa função pode ser minimizada (o que é mais convencional), maximizada ou, ainda, levada à valores-alvo. A seção 4.2 apresenta alguns dos métodos numéricos mais comumente utilizados para a otimização de processos.

Tendo em vista a natureza conflituosa dos processos, há, normalmente, interesse em resolver o problema multiobjetivo para diferentes conjuntos de pesos. Então, as diversas soluções obtidas costumam ser representadas graficamente, formando a conhecida “Froreira de Pareto” (EHRGOTT, 2005; JAHN, 2011). Essa fronteira localiza-se dentro da região viável de solução, entre os planos de nadir e de utopia.

4.2 Métodos de otimização multiobjetivo

Conquanto a literatura apresente uma enorme gama de métodos de otimização multiobjetivo, esta seção aborda apenas quatro. Esses métodos baseiam-se especialmente em operadores de aglutinação, com os quais as múltiplas funções objetivo são convertidas em uma única função.

4.2.1 Método das Somas Ponderadas

O método das somas ponderadas (*Weighted Sums* – WS) é um dos algoritmos mais simples para a otimização multiobjetivo. Em essência, esse método concatena todas as funções do problema em uma única combinação linear (YANG, 2014), de modo que:

$$\begin{aligned} \min_x F_W(\mathbf{x}) &= w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x) + \dots + w_m f_m(x) \\ \text{s.t.} \quad &x \in C \end{aligned} \quad (4.4)$$

Condensadamente, a Equação (4.4) pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \min_x \sum_{i=1}^m w_i f_i(x) &= \mathbf{w}^T \mathbf{F}(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad &x \in C \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde: $\sum_{i=1}^m w_i = 1$ e $w_i \geq 0$, com $i = 1, 2, \dots, m$.

Nas Equações (4.4) e (4.5), w_i denota os pesos com os quais as funções de interesse são ponderadas. Na prática, esses pesos estabelecem a importância relativa de cada função. Por esse

motivo, normalmente, uma seqüência de subproblemas é resolvida a partir da minimização da função global $\mathbf{w}^T \mathbf{F}(\mathbf{x})$, construída como uma combinação linear das funções originais.

4.2.2 Método do Critério Global

O método do critério global (*Global Criterion Method* – GCM) é outra técnica multiobjetivo convencional, que utiliza um operador de aglutinação baseado nas distâncias padronizadas das funções até os seus alvos (ou, valores de referência), de modo que (RAO, 2009):

$$\begin{aligned} \min_x \sum_{i=1}^m w_i \left[\frac{T_i - f_i(x)}{T_i} \right]^2 &= \mathbf{w}^T \mathbf{F}_{\text{GCM}}(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. : } x &\in C \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde: T_i denota o alvo da i -ésima função.

Uma maneira de se escolher os alvos T_i consiste em realizar as otimizações individuais das funções objetivo. Assim, a Equação (4.6) se transforma em:

$$\begin{aligned} \min_x \sum_{i=1}^m w_i \left[\frac{f_i^U - f_i(x)}{f_i^U} \right]^2 &= \mathbf{w}^T \mathbf{F}_{\text{GCM}}(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. : } x &\in C \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde: f_i^U é o ótimo individual da i -ésima função.

Exemplos dessa estratégia podem ser encontrados em Gaudêncio *et al.* (2019a), Gaudêncio *et al.* (2019b) e Pereira (2017). De modo análogo ao método WS, apresentado na seção 4.2.1, uma seqüência de subproblemas é resolvida a partir da minimização da função global $\mathbf{w}^T \mathbf{F}_{\text{GCM}}(\mathbf{x})$, construída como uma combinação linear das distâncias quadráticas padronizadas.

4.2.3 Método da Interseção Normal à Fronteira

O método de Interseção Normal à Fronteira (*Normal Boundary Intersection – NBI*), por sua vez, inaugura um novo ramo de algoritmos multiobjetivos, idealizados com vistas à correção de problemas identificados com os métodos convencionais.

Das e Dennis (1997) observaram que, se as funções originais apresentarem convexidades distintas, os métodos tradicionais formam fronteiras de Pareto não convexas e descontínuas, contendo agrupamentos de soluções ótimas em algumas regiões, mas descontínuas no espaço de solução. Para produzir fronteiras uniformemente distribuídas, independentemente das convexidades das funções e de suas escalas relativas, os autores desenvolveram o método NBI.

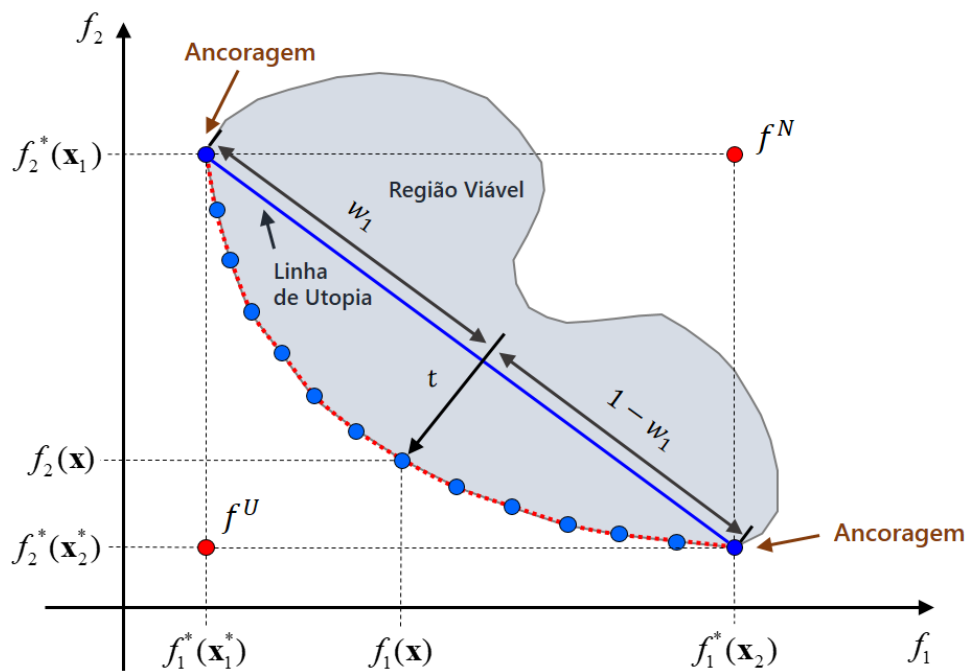


Figura 4.1 - Fronteira de Pareto obtida via NBI para um problema bi-objetivo

Fonte: Autoria própria.

Para demonstrar o funcionamento do método, considere-se a Figura 4.1. Admitindo-se \hat{n} como um vetor normal à linha de utopia, define-se o escalar t como uma distância paramétrica. Ao se maximizar t , iterativamente, para diferentes combinações das funções envolvidas, obtém-se a fronteira de Pareto. Matematicamente, esse problema pode ser expresso conforme apresentado na Equação (4.8). Nessa equação, também é apresentado o problema equivalente para a otimização de fatores rotacionados, explicitados na seção 3.

$$\begin{array}{ll}
\underset{(\mathbf{x}, t)}{\text{Max } t} & \underset{(\mathbf{x}, t)}{\text{Max } t} \\
s.t.: \bar{\Phi}\mathbf{w} + t\hat{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) & s.t.: \bar{\Psi}_{\mathbf{F}}\mathbf{w} + t\hat{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{S}}(\mathbf{x}) \\
\mathbf{x} \in \Omega & \Rightarrow \mathbf{x} \in \Omega \\
g_j(x) \leq 0 & g_j(x) \leq 0 \\
h_{j+1}(x) = 0 & h_{j+1}(x) = 0
\end{array} \tag{4.8}$$

onde: t é a distância paramétrica; \mathbf{w} é o vetor de pesos; $\bar{\Phi}$ é a matriz *pay-off* normalizada; $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor normal à linha de utopia; $\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$ é o vetor de funções objetivo normalizadas; $g_j(x)$ é a restrição do espaço experimental; e $h_{j+1}(x)$ é uma restrição genérica de igualdade (DAS; DENNIS, 1997). Para o caso multivariado, substituem-se $\bar{\Phi}$ pela matriz *pay-off* de fatores normalizados $\bar{\Psi}_{\mathbf{F}}$ e $\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$ pelo vetor de fatores normalizados $\bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{S}}(\mathbf{x})$.

Retomando as Equações (4.2) e (4.3), que introduziram as matrizes *pay-off* e os vetores de funções originais e de fatores para os casos uni e multivariados, as matrizes e vetores normalizados podem ser representados da seguinte maneira:

$$\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \bar{f}_1(x_1) \\ \vdots \\ \bar{f}_i(x_i) \\ \vdots \\ \bar{f}_m(x_m) \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{\Phi} = \begin{bmatrix} \bar{f}_1^*(x_1^*) & \cdots & \bar{f}_1(x_i^*) & \cdots & \bar{f}_1(x_m^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \bar{f}_1(x_1^*) & \cdots & \bar{f}_i^*(x_i^*) & \cdots & \bar{f}_i(x_m^*) \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \bar{f}_m(x_1^*) & \cdots & \bar{f}_m(x_i^*) & \cdots & \bar{f}_m^*(x_m^*) \end{bmatrix}, \tag{4.9}$$

para o caso univariado.

E:

$$\bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{S}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \bar{f}_{S_1}(x_1) \\ \vdots \\ \bar{f}_{S_i}(x_i) \\ \vdots \\ \bar{f}_{S_m}(x_m) \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{\Psi}_{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \bar{f}_{S_1}^*(x_1^*) & \cdots & \bar{f}_{S_1}(x_i^*) & \cdots & \bar{f}_{S_1}(x_m^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \bar{f}_{S_i}(x_1^*) & \cdots & \bar{f}_{S_i}^*(x_i^*) & \cdots & \bar{f}_{S_i}(x_m^*) \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \bar{f}_{S_m}(x_1^*) & \cdots & \bar{f}_{S_m}(x_i^*) & \cdots & \bar{f}_{S_m}^*(x_m^*) \end{bmatrix}, \tag{4.10}$$

para o caso multivariado

Em ambos os casos, os pontos de Utopia e Nadir são usados para normalizar as funções originais e latentes. Essas transformações são dadas, respectivamente, pelas Equações (4.11) e (4.12).

$$\bar{f}_i(\mathbf{x}) = \left[\frac{f_i(\mathbf{x}) - f_i^U}{f_i^N - f_i^U} \right], \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.11)$$

$$\bar{f}_{S_i}(\mathbf{x}) = \left[\frac{f_{S_i}(\mathbf{x}) - f_{S_i}^U}{f_{S_i}^N - f_{S_i}^U} \right], \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.12)$$

Os problemas bi-objetivo restritos podem ser derivados da Equação (4.8) tanto para o caso univariado como para o caso multivariado, de modo que:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} \quad \bar{f}_1(\mathbf{x}) & \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} \quad \bar{f}_{S_1}(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.:} \quad \bar{f}_1(\mathbf{x}) - \bar{f}_2(\mathbf{x}) + 2w - 1 = 0 & \text{s.t.:} \quad \bar{f}_{S_1}(\mathbf{x}) - \bar{f}_{S_2}(\mathbf{x}) + 2w - 1 = 0 \\ \mathbf{x} \in \Omega & \Rightarrow \quad \mathbf{x} \in \Omega \\ g_j(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \rho^2 \leq 0 & g_j(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \rho^2 \leq 0 \\ h_{j+1}(\mathbf{x}) = 0 & h_{j+1}(\mathbf{x}) = 0 \end{array} \quad (4.13)$$

onde: $\bar{f}_1(\mathbf{x})$ e $\bar{f}_2(\mathbf{x})$ representam as funções objetivo originais e $\bar{f}_{S_1}(\mathbf{x})$ e $\bar{f}_{S_2}(\mathbf{x})$ representam os fatores rotacionados.

4.3 Estratégias de otimização da variância

Estratégias de otimização dedicadas ao tratamento simultâneo do valor esperado e da variância normalmente encontram-se circunscritas ao contexto do projeto de parâmetro robusto (*Robust Parameter Design* – RPD) de processos. Nesse contexto, a variância do processo (também chamada “observacional”) costuma ser associada à variância da média até um alvo desejado, de modo que ambas sejam minimizadas. Uma das abordagens mais convencionais encontradas na literatura para essa finalidade é conhecida como Erro Quadrático Médio (EQM), cuja formulação genérica pode ser dada, em notação moderna, por (LIN; TU, 1995):

$$EQM = [\hat{y}(\mathbf{x}) - T]^2 + \hat{\sigma}^2(\mathbf{x}) \quad (4.14)$$

Para o caso multiobjetivo, Kksoy (2006) apresentou um EQM global, dado pelo somatório ponderado dos EQMs de cada variável de resposta. Assim, admitindo-se diferentes graus de importância para as variáveis, representados por pesos w , o EQM de Kksoy (2006) pode ser expresso da seguinte maneira:

$$\underset{\mathbf{x} \in \Omega}{Min} EQM_G = \sum_{i=1}^m w_i \cdot \left\{ [\hat{y}_i(\mathbf{x}) - T_i]^2 + \hat{\sigma}_i^2(\mathbf{x}) \right\} \quad (4.15)$$

Considerando variáveis originais linearmente dependentes, Paiva *et al.* (2009) propuseram uma métrica multivariada denominada Erro Quadrático Médio Multivariado (EQMM). Nesse caso, a análise de componentes principais  usada para extrair a correlao e reduzir a dimensionalidade do problema. Havendo um único componente capaz de representar mais de 80% da variabilidade das respostas originais, o EQMM sugerido pelos pesquisadores pode ser escrito da seguinte forma:

$$\underset{\mathbf{x} \in \Omega}{Min} EQMM = [PC(\mathbf{x}) - \zeta_{PC}]^2 + \lambda \quad (4.16)$$

onde: $PC(\mathbf{x})$ denota o modelo para o componente principal em funo dos parâmetros de controle do processo; ζ_{PC} denota o alvo do componente principal; e λ denota o autovalor (da matriz de variância-covariância das variáveis originais) associado ao componente.

Partindo do EQMM apresentado na Equao (4.16), Paiva *et al.* (2009) desenvolveram um aglutinador para vários componentes. Diferentemente do aglutinador de Kksoy (2006), que emprega um somatório ponderado, neste caso, adota-se o produtório racionalizado dos EQMMs individuais, de modo que:

$$\underset{\mathbf{x} \in \Omega}{Min} EQMM_T = \left\{ \prod_{i=1}^r [PC(\mathbf{x})_i - \zeta_{PCi}]^2 + \lambda_i \right\}^{\left(\frac{1}{r}\right)}, \quad r \leq m \quad (4.17)$$

Retomando a lógica de diferentes graus de importância, Gomes *et al.* (2013) sugeriram uma formulação ponderada para o EQMM, denominada Erro Quadrático Médio Multivariado Ponderado (EQMM_P). Nessa abordagem, os percentuais de explicação dos componentes são usados como pesos relativos dos EQMMs.

$$\underset{\mathbf{x} \in \Omega}{\text{Min}} \text{EQMM}_P = \sum_{i=1}^r \left\{ \frac{v_i}{v_T} [PC(\mathbf{x})_i - \zeta_{PCi}]^2 + \lambda_i \right\}, \quad r \leq m \quad (4.18)$$

onde: v_i denota o percentual de explicação do i -ésimo componente principal; e v_T denota o percentual total de explicação dos componentes principais, tal que: $v_T = \sum_{i=1}^r v_i$.

4.4 Otimização de processos industriais via métodos e estratégias multiobjetivo

No contexto da otimização de processos industriais, vasta literatura pode ser usada para ilustrar o uso dos métodos e estratégias apresentadas nas seções 4.2 e 4.3. Em muitos dos estudos existentes, o método NBI tem se destacado como um método eficaz para a otimização de múltiplas respostas, com geração de fronteiras uniformemente equispaçadas. De igual modo, o MMSE tem se mostrado uma estratégia apropriada para a otimização de respostas correlacionadas do RPD.

Brito *et al.* (2014), por exemplo, estudaram a rugosidade superficial de peças no processo de fresamento de topo do aço ABNT 1045, utilizando RPD. Os autores aplicaram tanto o NBI como o método WS para minimizar o MMSE para as rugosidades Ra , Rt e suas variâncias. Os pesquisadores concluíram que, em regiões onde o método WS-MMSE revelou descontinuidades, o método NB-MMSE foi capaz de encontrar soluções viáveis.

Conclusões similares foram obtidas por Costa *et al.* (2016a), que conduziram a otimização de cinco resposta de rugosidade (métricas de qualidade) e uma resposta de taxa de remoção de material (*Material Removal Rate* – MRR; métrica de desempenho) para o processo de fresamento de topo a seco do aço ABNT 1045. Os autores usaram a PCA e o MMSE para reduzir a dimensionalidade do problema e extrair a correlação entre as respostas originais. Como resultado da otimização, os pesquisadores observaram que o método NBI-PCA-MMSE

proposto superou o método WS-PCA-MMSE, mostrando que o método baseado no NBI foi o único capaz de produzir uma fronteira de Pareto com pontos equispaçados.

Liu *et al.* (2016) demonstraram que o NBI foi mais favorável que o método WS para a maximização da produtividade e a minimização do consumo em um processo biotecnológico em lote, concluindo que o método NBI fornece uma representação mais precisa do conjunto de soluções de Pareto. Diferentemente de Brito *et al.* (2014) e Costa *et al.* (2016a), que minimizaram todas as funções latentes do MMSE, Liu *et al.* (2016) otimizaram respostas com diferentes sentidos de otimização; mesmo nesse caso, o NBI se mostrou mais satisfatório.

Gaudencio *et al.* (2018) propuseram a otimização do processo de torneamento do aço endurecido ABNT H13 utilizando o método NBI-MMSE *fuzzy*. Os autores demonstraram que o método proposto apresentou um desempenho superior na construção da fronteira de Pareto, em comparação com outros três métodos, à saber: WS-MMSE, GCM-MMSE, e comprimento homotópico do arco (*Arc homotopic length* – AHL)-MMSE.

5 MÉTODO DE PESQUISA

5.1 Natureza teórica e classificação do estudo

Uma vez que o presente trabalho propõe uma nova estratégia de otimização de processos, este estudo é classificado como uma pesquisa quantitativa de natureza exploratória do gênero modelagem e otimização (GIL, 2002; MARTINS *et al.*, 2014).

5.2 Questões e Hipóteses do Problema

O presente trabalho visa responder a quatro questões de pesquisa, que se relacionam a problemas enfrentados pelo experimentador durante a modelagem e otimização de processos. Os problemas abordados neste estudo decorrem da natureza estocástica dos fenômenos e das estruturas de coleta de dados, que, como mostrado na seção 2, induzem os modelos matemáticos a variâncias, denominadas de variâncias de previsão¹¹. Essas variâncias podem ser controladas mediante algumas estratégias.

¹¹ A variância de previsão sempre incorpora dois componentes, à saber: a variância experimental (também denominada variância observacional ou variância dos dados); e a variância da estrutura de coleta de dados, geralmente definida por arranjos experimentais. Eventualmente, a variância experimental pode ser repartida nas variâncias do processo, do sistema de medição e do erro aleatório. No entanto, a variância do arranjo depende exclusivamente da dispersão com que os dados são coletados.

A primeira delas está associada à coleta de dados. Normalmente, quando um experimento é realizado, o pesquisador está interessado em compreender melhor as características de um ou mais fenômenos e/ou melhorar as características dos processos¹². Uma maneira de se conduzir essas análises consiste em medir, sob condições definidas, um conjunto de variáveis de interesse, que representam, quantitativamente, as características críticas para a qualidade ou para o desempenho do processo. Para isso, o planejamento e análise de experimentos assume um papel indispensável, pois fornece, ao experimentador, a possibilidade de escolher a estrutura de coleta de dados (ou, arranjo experimental) mais eficiente. Em termos globais, isso garante, ao menos, que a variância induzida pelo arranjo será controlável e conhecida.

A partir dos dados coletados, pode-se, então, produzir modelos matemáticos relacionando as condições originalmente impostas (descritas pelos valores dos parâmetros de controle) aos valores medidos em cada variável de resposta (também denominadas variáveis de interesse). Como discutido na seção 2, esses modelos sempre contam com certo grau de imprecisão, oriunda das variâncias combinadas dos coeficientes. Isso demonstra que os modelos de superfície de resposta são de natureza estocástica e não determinística.

Apesar disso, grande parte dos modelos estimados na literatura são utilizados deterministicamente, ao conduzir rotinas de otimização sobre os valores médios dos coeficientes, negligenciando, com isso, seus componentes de variância. Como consequência, embora as médias das variáveis de resposta sejam otimizadas, em muitos casos, a presença de alta variabilidade impede que melhorias reais sejam observadas na prática. Além disso, uma vez que os processos industriais normalmente projetam a produção de milhares ou, até mesmo, de milhões de produtos, grandes quantidades de variância podem implicar em muitas não-conformidades. Isso conduz a primeira questão do problema e a sua hipótese associada:

Q.1. Como combinar a otimização das características críticas dos processos com a minimização da variância de previsão dos modelos?

H.1. A maximização de razões modificadas de capacidade de previsão garante a otimização das características críticas dos processos e a minimização da variância de previsão dos modelos.

¹² Cientificamente, um processo pode ser visto como um conjunto de fenômenos.

Frequentemente, há mais de uma característica crítica em um processo. Isso eleva a complexidade dos problemas, uma vez que, as soluções ótimas serão, na verdade, combinações de soluções viáveis das múltiplas características. Se coletadas pelo mesmo arranjo experimental, a variância induzida pelo arranjo terá a mesma distribuição para todas as características. No entanto, cada uma delas terá uma variância experimental distinta, decorrente da ação dos fenômenos do processo. Além disso, como as variáveis de resposta apresentam convexidades distintas e, nem sempre, possuem ponto estacionário localizado no centro do arranjo ou contido no espaço experimental, a variância induzida pelo arranjo pode favorecer alguma variável.

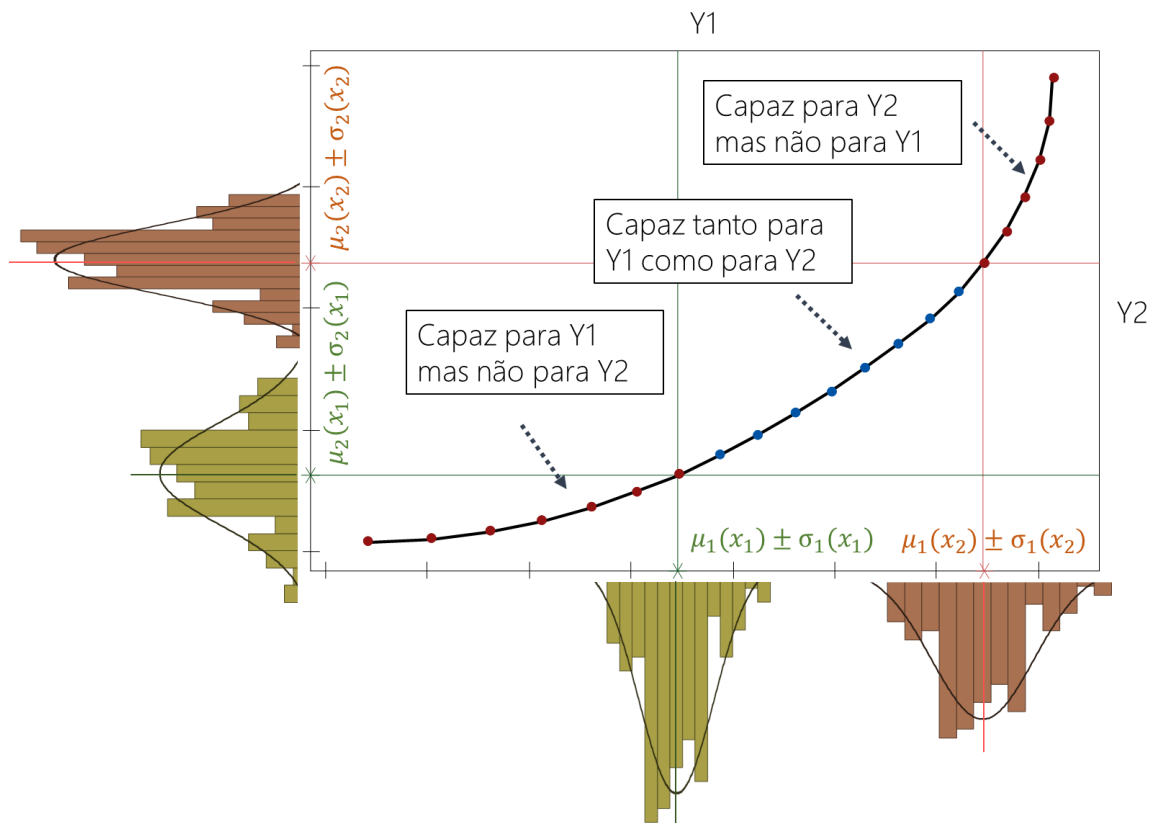


Figura 5.1 - Regiões de capacidade de previsão para soluções Pareto ótimas¹

¹Os dois pontos selecionados delimitam a região capaz para ambas as variáveis de resposta.

Fonte: Autoria própria.

Na seção 2.3, foi demonstrado como o conceito de capacidade de previsão se associa ao inverso da variância de previsão. Tendo em vista que cada modelo possui uma variância de previsão associada, logo, também possui uma capacidade de previsão. Em problemas multi-critério, espera-se que a solução ótima apresente capacidade de previsão satisfatória para todas as características críticas dos processos. No entanto, dependendo da convexidade dos modelos,

dos sentidos de otimização, da estrutura do arranjo experimental e das variâncias de cada conjunto de dados, as capacidades de previsão das variáveis de resposta podem apresentar relações conflituosas.

A Figura 5.1 ilustra diferentes níveis de capacidades dos modelos para o caso bidimensional. A ideia central é que as soluções ótimas de Pareto podem ser distribuídas em quatro categorias de capacidade, à saber: (1) capaz para Y1, mas não para Y2; (2) capaz para ambas as variáveis Y1 e Y2; (3) capaz para Y2, mas não para Y1; e (4) incapaz para ambas as variáveis Y1 e Y2, o que não é desejável. Assim, a segunda questão de pesquisa e a sua hipótese associada podem ser formuladas da seguinte forma:

Q.2. Como assegurar capacidades de previsão satisfatórias para todas as características críticas dos processos?

H.2. Estratégias de otimização multiobjetivo para razões modificadas de capacidades de previsão dos modelos podem garantir conjuntos de soluções capazes para todas as características críticas dos processos.

Quando da presença de correlação entre as características de interesse, porém, surge, também, um terceiro componente de variabilidade, não mais devido à variância individual dos modelos, como discutido anteriormente, mas a suas covariâncias (BRATCHEL, 1989; PAIVA *et al.*, 2009). Portanto, quando as variáveis de interesse encontram-se correlacionadas, técnicas multivariadas são necessárias para extrair a correlação e fornecer variáveis linearmente independentes. Assim, uma terceira questão, com sua hipótese associada, pode ser formulada da seguinte maneira:

Q.3. Como assegurar capacidades de previsão satisfatórias para características críticas correlacionadas dos processos?

H.3. Estratégias de otimização multiobjetivo para razões multivariadas modificadas de capacidades de previsão dos modelos podem garantir conjuntos de soluções capazes para todas as características críticas correlacionadas dos processos.

Uma vez que as razões de capacidade combinam diferentes fontes de variância, deve-se tomar cuidado ao desenvolvê-las, pois combinações inadequadas podem elevar, em muito, a não-linearidade dos problemas de otimização, reduzindo a eficácia de alguns algoritmos de

busca, como o GRG, por exemplo. Como apresentado na seção 2.2.5, este trabalho identificou oito métricas de variância de previsão. Algumas delas podem ser mais eficazes na composição das razões de capacidade. Assim, a quarta questão de pesquisa levantada no presente estudo é apresentada a seguir:

Q.4. Qual métrica de variância deve ser utilizada nas razões modificadas de capacidade de previsão dos modelos?

H.4. Métricas baseadas na variância integrada de previsão são as mais apropriadas.

5.3 Procedimentos Metodológicos

Inicialmente, uma cuidadosa revisão de literatura foi conduzida, a fim de assentar um pano de fundo sobre as métricas de variância e as noções originais de capacidade de previsão. Em seguida, a partir de revisão das técnicas de análise de processos, suscitou-se a ideia de razões de capacidade, que foram detalhadas segundo os principais indicadores e padrões de referência.

Dessa forma, o presente trabalho realizou uma combinação de conceitos, desenvolvendo razões de capacidade de previsão. Essas razões foram construídas, usando a função de variância de previsão original, proposta por Box e Hunter (1957). Contudo, também foram estendidas para outros tipos de funções aglutinadoras de variância, usadas como forma de explorar ganhos potenciais em capacidade de previsão, especialmente para arranjos com propriedades corrompidas, como alterações na distância axial e reduções no número de pontos centrais.

A metodologia de superfície de resposta foi, então, proposta como roteiro para a coleta de dados experimentais, modelagem de características críticas e otimização de processos. Para o caso multivariado, foi proposto o uso da análise fatorial rotacionada, conhecidas as suas vantagens para a redução da dimensionalidade dos problemas e extração da correlação. Com isso, razões multivariadas de capacidade de previsão foram, também, desenvolvidas com base em fatores rotacionados.

Diante dos métodos de otimização multiobjetivo disponíveis na literatura, selecionou-se o método NBI como esquema de otimização das razões de capacidade de previsão desenvolvidas. Outros métodos, porém, como WS e GCM, foram usados para comparação. Associados a eles, empregou-se o algoritmo GRG como rotina para solução dos subproblemas gerados pela variação dos pesos (que denotam o grau de importância) das razões de capacidade.

A fim de atestar a viabilidade da estratégia de otimização proposta, foram apresentados dois estudos de caso, com aplicações dos modelos de otimização em dois processos de manufatura, à saber: (1) torneamento de aços endurecidos e (2) fresamento de topo de aços inoxidáveis duplex. Em ambos, as propriedades dos arranjos experimentais foram discutidas, bem como os aspectos críticos das análises de superfície de resposta, suscitados por Oliveira (2018) e Oliveira *et al.* (2019), tais como convexidade, sentido de otimização, correlação e número de pontos centrais. Suas influências sobre a modelagem e otimização de processos também foram abordadas, demonstrando como a estratégia proposta é capaz de lidar com as relações conflitantes existentes. Finalmente, as questões e hipóteses inicialmente levantadas foram avaliadas mediante os resultados dos estudos.

6 ESTRATÉGIA DE OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO BASEADA EM RAZÕES DE CAPACIDADE DE PREVISÃO

A fim de responder às questões de pesquisa levantadas na seção 5.2, desenvolve-se, nesta seção, uma estratégia de otimização multicritério baseada em razões modificadas de capacidade de previsão. Essa estratégia combina os fundamentos apresentados nas seções 2 e 4, ao propor problemas multiobjetivo, contendo as funções de variância de previsão como componentes de variabilidade dos modelos de superfície de resposta. Para isso, a seção 6.1 dispõe as condições de contorno da estratégia proposta, enquanto a seção 6.2 fornece o modelo de otimização.

6.1 Condições de contorno

Para formular os modelos de otimização, são admitidas as seguintes condições de contorno:

- a) O sistema de medição (SM) é apropriado para medir as resposta originais, o que implica que o SM não aumenta a variância dos dados ($\sigma_{gage}^2 \cong 0$) e não há vício de medição;
- b) Os modelos polinomiais estimados são apropriados para representarem as regiões de interesse de cada variável de resposta, o que implica que o modelo não contém viés de estimação ($B \cong 0$).
- c) A média do processo coincide com o seu alvo ($\mu - T \cong 0$).
- d) No espaço experimental investigado, o processo não é sensível a perturbações devido às variáveis de ruído ($\sigma_z^2 \cong 0$).

6.2 Modelos de otimização

O objetivo da estratégia proposto é otimizar simultaneamente as variáveis originais do processo, ao mesmo tempo em que as variâncias de previsão são minimizadas. Devido a natureza de cada resposta, os modelos de regressão estimados apresentam variâncias distintas. Portanto, este trabalho propõe que a variância de cada modelo seja embutida em seu valor esperado, transformando a otimização multi-critério com n funções objetivo ($n/2$ médias e $n/2$ variâncias) em um problema com $n/2$ funções objetivo latentes.

Com isso, deve-se tomar cuidado ao combinar valor esperado e variância, uma vez que essa combinação pode elevar a não-linearidade do problema, reduzindo a eficácia de alguns algoritmos de busca, como o GRG, por exemplo. Por esse motivo, este trabalho desenvolve uma estratégia de otimização onde as variâncias dos modelos são usadas como componentes de variabilidade das razões de capacidade, enquanto os pontos de nadir são usados como limites de especificação.

6.2.1 Modelo para variáveis originais independentes

O desenvolvimento do modelo de otimização para variáveis originais independentes segue as etapas a seguir:

Etapa 1. Propõe-se a variável $\zeta_{pk}(\mathbf{x})$ modificada como medida da capacidade processo-modelo. No $\zeta_{pk}(\mathbf{x})$ proposto, a média é o valor esperado $E[Y(\mathbf{x})]$ da resposta de interesse e a variância é a combinação do erro experimental $\sigma_{f(\mathbf{x})}$ e a variância $V(\mathbf{x})$ do arranjo, denominada variância do modelo ou variância de previsão $Var[Y(\mathbf{x})|\mathbf{x}_0]$, como apresentado na Equação (2.25) – Seção 2.2. O $\zeta_{pk}(\mathbf{x})$ proposto, assim, é dado pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \zeta_{pk}(\mathbf{x}) &= \min(\zeta_{pu}, \zeta_{pl}) \\ &= \min \left\{ \frac{LSE - E[Y(\mathbf{x})]}{3 \cdot \sqrt{Var[Y(\mathbf{x})|\mathbf{x}_0]}}, \frac{E[Y(\mathbf{x})] - LIE}{3 \cdot \sqrt{Var[Y(\mathbf{x})|\mathbf{x}_0]}} \right\} \\ &= \min \left\{ \frac{LSE - E[Y(\mathbf{x})]}{3 \cdot \sigma_{f_i(\mathbf{x})} \sqrt{[x_0^{(m)T} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} x_0^{(m)}]}}, \frac{E[Y(\mathbf{x})] - LIE}{3 \cdot \sigma_{f_i(\mathbf{x})} \sqrt{[x_0^{(m)T} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} x_0^{(m)}]}} \right\} \end{aligned} \quad (6.1)$$

Considerando que $Y(\mathbf{x})$ possui um sentido de otimização definido, a variável $\zeta_{pk}(\mathbf{x})$ terá um limite de especificação unilateral; portanto, se $Y(\mathbf{x})$ deve ser minimizado, então $\zeta_{pk}(\mathbf{x}) = \zeta_{pu}$, e se $Y(\mathbf{x})$ deve ser maximizado, então $\zeta_{pk}(\mathbf{x}) = \zeta_{pl}$.

Etapa 2. Para ambos os casos (minimização ou maximização de $Y(\mathbf{x})$), propõe-se a solução individual de Nadir das variáveis de resposta originais como limite de especificação,

uma vez que esta consiste na pior solução para a resposta investigada, mas implica que pelo menos uma outra resposta alcança sua melhor solução. Então, a solução individual de Nadir é o limite natural para as respostas usadas na otimização multicritério, pois valores menores (problema de maximização) ou maiores (problema de minimização) que a solução de Nadir não melhoram as outras respostas. Além disso, valores maiores (problema de maximização) ou menores (problema de minimização) que a solução de Nadir implicam em reduções do espaço de solução. Portanto:

- Se $Y(\mathbf{x})$ deve ser minimizada:

$$\zeta_{pk}^i(\mathbf{x}) = \frac{LSE - E[Y_i(\mathbf{x})]}{3 \cdot \sqrt{\text{Var}[Y_i(\mathbf{x})|\mathbf{x}_0]}} = \frac{[f_i^N - f_i(\mathbf{x})]}{3 \cdot \sigma_{f_i(\mathbf{x})} \sqrt{[x_0^{(m)\text{T}} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} x_0^{(m)}]}}, \text{ para } i=1,2,\dots,m. \quad (6.2)$$

- Se $Y(\mathbf{x})$ deve ser maximizada:

$$\zeta_{pk}^i(\mathbf{x}) = \frac{E[Y_i(\mathbf{x})] - LIE}{3 \cdot \sqrt{\text{Var}[Y_i(\mathbf{x})|\mathbf{x}_0]}} = \frac{[f_i(\mathbf{x}) - f_i^N]}{3 \cdot \sigma_{f_i(\mathbf{x})} \sqrt{[x_0^{(m)\text{T}} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} x_0^{(m)}]}}, \text{ para } i=1,2,\dots,m. \quad (6.3)$$

Etapa 3. Considerando as razões de capacidade $\zeta_{pk}^i(\mathbf{x})$ como funções objetivo, o problema de otimização multicritério é formulado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}} \mathbf{C}_{pk}(\mathbf{x}) &= [\zeta_{pk}^1(\mathbf{x}), \dots, \zeta_{pk}^i(\mathbf{x}), \dots, \zeta_{pk}^m(\mathbf{x})] \\ \text{s.t.: } \mathbf{x}^T \mathbf{x} &\leq \rho^2 \end{aligned} \quad (6.4)$$

Como apresentado na seção 4, para resolver esse problema, é necessário, antes, estabelecer uma matriz *pay-off*. Isso é obtido a partir da otimização individual das funções $\zeta_{pk}^i(\mathbf{x})$. Uma vez que é desejado que $\zeta_{pk}^i(\mathbf{x})$ seja maximizado, a matriz *pay-off* \mathbf{K} do problema proposto é obtida pela maximização individual de $\zeta_{pk}^i(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}} C_{\rho k}^i(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.: } \mathbf{x}^T \mathbf{x} \leq \rho^2 \end{aligned}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (6.5)$$

Substituindo os valores na matriz apresentada na Equação (4.2), encontra-se:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} C_{\rho k}^{1*}(x_1^*) & \cdots & C_{\rho k}^1(x_i^*) & \cdots & C_{\rho k}^1(x_m^*) \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ C_{\rho k}^i(x_1^*) & \cdots & C_{\rho k}^{i*}(x_i^*) & \cdots & C_{\rho k}^i(x_m^*) \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ C_{\rho k}^m(x_1^*) & \cdots & C_{\rho k}^m(x_i^*) & \cdots & C_{\rho k}^{m*}(x_m^*) \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

onde: x_m^* denota o ótimo de uma dada razão de capacidade m , $C_{\rho k}^{m*}(x_m^*)$ denota a razão de capacidade ótima m , calculada em relação ao seu ótimo x_m^* , e $C_{\rho k}^{i*}(x_i^*)$ denota a i -ésima razão de capacidade, calculada em relação ao ótimo x_m^* .

A partir das Equações (6.5) e (6.6), pode-se revisitar a Etapa 2, ressaltando que o problema de otimização apresentado é mais um argumento prático para usar os pontos de Nadir como limites de especificação, uma vez que, na prática, como $C_{\rho k}^i(\mathbf{x})$ será maximizado para todo $i > 0$, e, por questões de simplificação, considera-se que as variáveis do processo admitem apenas valores positivos, então, as otimizações individuais da Equação (6.5) fornecem a relação de maior distância das variáveis originais aos pontos de Nadir (ao mesmo tempo combinadas com a menor variância do modelo).

Etapa 4. O problema multiobjetivo formulado na Etapa 3 pode ser abordada de diferentes maneiras, como discutido na seção 4. No entanto, propõe-se o uso do método NBI, uma vez que essa técnica produz fronteiras uniformemente distribuídas, independentemente das convexidades das funções e de suas escalas relativas (DAS; DENNIS, 1997). Usando a teoria original do método, apresentada na seção 4.2.3, pode-se obter um problema numérico conveniente para a maximização das razões de capacidade.

Utilizando a lógica original do método NBI, pode-se obter uma transformação conveniente para $C_{\rho k}^i(\mathbf{x})$, de maneira que as várias razões de capacidade sejam aglutinadas em um único operador. A Figura 6.1(a) apresenta a fronteira de Pareto para a maximização das razões de capacidade. A partir dessa figura, deduzem-se as seguintes relações:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{\underline{C}_{pk}^2(x_2^*) - \underline{C}_{pk}^2(\mathbf{x})}{\underline{C}_{pk}^2(x_2^*) - \underline{C}_{pk}^2(x_1^*)} = \frac{w_2}{w_1 + w_2} = \frac{\underline{C}_{pk}^{iU} - \underline{C}_{pk}^i(\mathbf{x})}{\underline{C}_{pk}^{iU} - \underline{C}_{pk}^{iN}} = \frac{\underline{C}_{pk}^i(\mathbf{x}) - \underline{C}_{pk}^{iU}}{\underline{C}_{pk}^{iN} - \underline{C}_{pk}^{iU}} = \bar{C}_{pk}^i(x_i) \quad (6.7)$$

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{\underline{C}_{pk}^1(x_1^*) - \underline{C}_{pk}^1(\mathbf{x})}{\underline{C}_{pk}^1(x_1^*) - \underline{C}_{pk}^1(x_2^*)} = \frac{w_2}{w_1 + w_2} = \frac{\underline{C}_{pk}^{iU} - \underline{C}_{pk}^i(\mathbf{x})}{\underline{C}_{pk}^{iU} - \underline{C}_{pk}^{iN}} = \frac{\underline{C}_{pk}^i(\mathbf{x}) - \underline{C}_{pk}^{iU}}{\underline{C}_{pk}^{iN} - \underline{C}_{pk}^{iU}} = \bar{C}_{pk}^i(x_i) \quad (6.8)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \underline{C}_{pk}^2(x) &= \underline{C}_{pk}^2(x_2^*) + w_1 \underline{C}_{pk}^2(x_1^*) - w_1 \underline{C}_{pk}^2(x_2^*) \\ &= w_1 \underline{C}_{pk}^2(x_1^*) + (1 - w_1) \underline{C}_{pk}^2(x_2^*) = w_1 \underline{C}_{pk}^2(x_1^*) + w_2 \underline{C}_{pk}^2(x_2^*) \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} \underline{C}_{pk}^1(x) &= \underline{C}_{pk}^1(x_1^*) + w_2 \underline{C}_{pk}^1(x_2^*) - w_2 \underline{C}_{pk}^1(x_1^*) \\ &= w_2 \underline{C}_{pk}^1(x_2^*) + (1 - w_2) \underline{C}_{pk}^1(x_1^*) = w_1 \underline{C}_{pk}^1(x_1^*) + w_2 \underline{C}_{pk}^1(x_2^*) \end{aligned} \quad (6.10)$$

Em notação matricial, as equações representando as coordenadas dos pontos P_0 e P_{max} podem ser escritas como:

$$\begin{cases} \underline{C}_{pk}^1(x) = w_1 \underline{C}_{pk}^1(x_1^*) + w_2 \underline{C}_{pk}^1(x_2^*) \\ \underline{C}_{pk}^2(x) = w_1 \underline{C}_{pk}^2(x_1^*) + w_2 \underline{C}_{pk}^2(x_2^*) \end{cases} \quad (6.11)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{C}_{pk}^1(x) \\ \underline{C}_{pk}^2(x) \end{bmatrix}}_{\bar{C}_{pk}(x)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{C}_{pk}^1(x_1^*) & \underline{C}_{pk}^1(x_2^*) \\ \underline{C}_{pk}^2(x_1^*) & \underline{C}_{pk}^2(x_2^*) \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}} \quad (6.12)$$

$$\bar{C}_{pk}(x) = \mathbf{Kw} \quad (6.13)$$

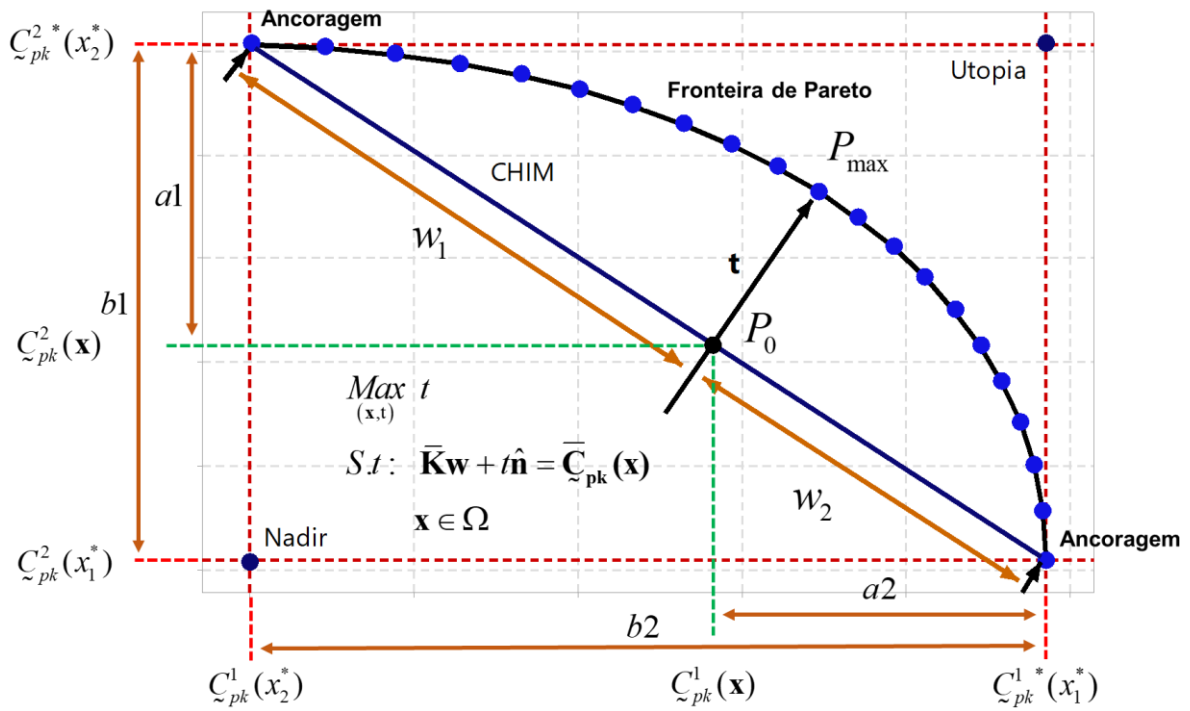


Figura 6.1 - Método NBI-GRG: fronteira de Pareto para a maximização das razões modificadas de capacidade construídas para variáveis originais independentes

Fonte: Autoria própria.

Então, aplicando-se as Equações (6.9) e (6.10), obtêm-se a matriz *payoff* normalizada e o vetor normalizado de funções objetivo de capacidade:

$$\bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{pk}^1(x_1^*) & \cdots & \bar{C}_{pk}^1(x_i^*) & \cdots & \bar{C}_{pk}^1(x_m^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{C}_{pk}^i(x_1^*) & \cdots & \bar{C}_{pk}^i(x_i^*) & \cdots & \bar{C}_{pk}^i(x_m^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{C}_{pk}^m(x_1^*) & \cdots & \bar{C}_{pk}^m(x_i^*) & \cdots & \bar{C}_{pk}^m(x_m^*) \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{C}}_{pk}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \bar{C}_{pk}^1(x_1) \\ \vdots \\ \bar{C}_{pk}^i(x_i) \\ \vdots \\ \bar{C}_{pk}^m(x_m) \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

A formulação clássica do NBI é escrita como maximização de t :

$$\begin{aligned} & \text{Max}_{(x,t)} t \\ & \text{s.t.} : \bar{\Phi}\mathbf{w} + t\hat{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) \\ & \mathbf{x} \in \Omega \\ & g_j(x) \leq 0 \\ & h_j(x) = 0 \end{aligned} \quad (6.15)$$

Substituindo $\bar{\Phi}$ por $\bar{\mathbf{K}}$ e $\bar{\mathbf{F}}(x)$ por $\bar{\mathbf{C}}_{pk}(\mathbf{x})$ na Equação (6.15), obtém-se o problema bi-objetivo do NBI para a otimização da capacidade do modelo como a seguir:

$$\begin{aligned}
 & \underset{(\mathbf{x}, t)}{\text{Max}} \quad t \\
 & \text{s.t.} : \bar{\mathbf{K}}\mathbf{w} + t\hat{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{C}}_{pk}(\mathbf{x}) \\
 & \mathbf{x} \in \Omega \\
 & g_j(x) \leq 0 \\
 & h_j(x) = 0
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

E, com isso, o problema equivalente pode ser derivado, conforme apresentado na Equação (6.17). A demonstração completa dessa equação é desenvolvida no Apêndice B.

$$\begin{aligned}
 & \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} \quad F(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{C}}_{pk}^{-1}(\mathbf{x}) \\
 & \text{s.t.} : \bar{\mathbf{C}}_{pk}^{-1}(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{C}}_{pk}^{-2}(\mathbf{x}) + 2w - 1 = 0 \\
 & \mathbf{x} \in \Omega \\
 & g_j(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \rho^2 \leq 0 \\
 & h_{j+1}(\mathbf{x}) = 0
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

Etapa 5. Ao resolver o problema NBI iterativamente para diferentes pesos W , gera-se a fronteira de Pareto para as razões modificadas de capacidade. Nessa etapa, propõe-se a utilização do algoritmo GRG como uma subrotina do NBI. Esse algoritmo tem sido apresentado, na literatura, como um dos algoritmos gradientes mais eficientes para essa finalidade de busca (COSTA *et al.*, 2016b; GAUDÊNCIO *et al.*, 2019a) e que encontra-se disponível em ambientes computacionais modernos, como o MS Excel (ROCHA *et al.*, 2017a).

Etapa 6. Após a otimização, as regiões de capacidade de previsão são identificadas na fronteira de Pareto, considerando limites apropriados. Admitindo-se que as respostas originais possuem especificações unilaterais, adota-se o valor mínimo recomendado para processos novos, com parâmetros críticos ou relacionados a força e/ou segurança, como proposto por Montgomery (2012): $\bar{\mathbf{C}}_{pk}^i(x_i) > 1,60$ (Tabela 2.4).

6.2.2 Modelo para variáveis originais correlacionadas

O modelo proposto na seção 6.2.1 pode ser adaptado para a otimização de variáveis originais correlacionadas. Para isso, incorpora-se, às formulações anteriormente indicadas, a análise fatorial rotacionada introduzida nas seções 3.1 e 3.2. As etapas desse modelo seguem o seguinte roteiro:

Etapa 1. Propõe-se uma razão multivariada modificada de capacidade de previsão $MC_{\sim pk}(\mathbf{x})$ como uma medida da capacidade de previsão combinada para múltiplas variáveis de respostas analisadas a partir de um mesmo experimento planejado. Nessa abordagem, considera-se a diferença entre o valor esperado do fator rotacionado $E[F(\mathbf{x})]$ e um dado valor limite como a variação permitida do modelo, e a variância de previsão como a variação natural do processo, investigado com base em um dado arranjo experimental.

Tradicionalmente, na literatura, essa variação é medida apenas pela variância das observações $\sigma_{f(\mathbf{x})}^2$. No entanto, uma vez que $V(\mathbf{x})$ incorpora tanto a variância das observações $\sigma_{f(\mathbf{x})}^2$ como a variância do arranjo experimental $x_0^{(m)\text{T}} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} x_0^{(m)}$, propõe-se $V(\mathbf{x})$ como uma expressão mais apropriada. A razão multivariada $MC_{\sim pk}(\mathbf{x})$ proposta pode ser dada pelas seguintes expressões:

$$MC_{\sim pk}(\mathbf{x}) = \min (MC_{\sim pu}, MC_{\sim pl}) \quad (6.18)$$

$$MC_{\sim pk}(\mathbf{x}) = \min \left\{ \frac{LSE - E[F(\mathbf{x})]}{3 \cdot \sqrt{\text{Var}[F(\mathbf{x})|\mathbf{x}_0]}}, \frac{E[F(\mathbf{x})] - LIE}{3 \cdot \sqrt{\text{Var}[F(\mathbf{x})|\mathbf{x}_0]}} \right\} \quad (6.19)$$

$$MC_{\sim pk}(\mathbf{x}) = \min \left\{ \frac{LSE - E[F(\mathbf{x})]}{3 \cdot \sigma_{f_{S_i}(\mathbf{x})} \sqrt{x_0^{(m)\text{T}} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} x_0^{(m)}}}, \frac{E[F(\mathbf{x})] - LIE}{3 \cdot \sigma_{f_{S_i}(\mathbf{x})} \sqrt{x_0^{(m)\text{T}} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} x_0^{(m)}}} \right\} \quad (6.20)$$

Etapa 2. Com base nas correlações entre as respostas originais, cada fator $F(\mathbf{x})$ possui um sentido de otimização específico, o que leva a razão $MC_{\sim pk}(\mathbf{x})$ a ter limites unilaterais. Para a minimização de $F(\mathbf{x})$, então: $MC_{\sim pk}(\mathbf{x}) = MC_{\sim pu}$. Para a maximização de $F(\mathbf{x})$, então:

$MC_{\sim pk}^i(\mathbf{x}) = MC_{\sim pl}^i$. Na otimização multiobjetivo, frequentemente, há conflito entre as variáveis de resposta investigadas, o que torna cada resposta limitada aos ótimos das demais. Uma vez que os fatores rotacionados representam grupos de variáveis de resposta, estes também estão sujeitos a essa natureza conflituosa. Assim, propõe-se o uso das soluções de nadir de cada fator, condicionadas às melhores soluções dos demais fatores, como limites para os valores esperados. Isso significa adotar as soluções de nadir como limites unilaterais das razões $MC_{\sim pk}^i(\mathbf{x})$.

Portanto:

- Se $F(\mathbf{x})$ deve ser minimizado:

$$MC_{\sim pk}^i(\mathbf{x}) = MC_{\sim pu}^i(\mathbf{x}) = \frac{LSE - E[F_i(\mathbf{x})]}{3 \cdot \sqrt{Var[F_i(\mathbf{x})|\mathbf{x}_0]}} = \frac{[f_S^N - f_{S_i}(\mathbf{x})]}{3 \cdot \sigma_{f_{S_i}(\mathbf{x})} \sqrt{[x_0^{(m)\mathbf{T}} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} x_0^{(m)}]}}, \quad (6.21)$$

para $i=1,2,\dots,m$.

- Se $F(\mathbf{x})$ deve ser maximizado:

$$MC_{\sim pk}^i(\mathbf{x}) = MC_{\sim pl}^i(\mathbf{x}) = \frac{E[F_i(\mathbf{x})] - LIE}{3 \cdot \sqrt{Var[F_i(\mathbf{x})|\mathbf{x}_0]}} = \frac{[f_{S_i}(\mathbf{x}) - f_S^N]}{3 \cdot \sigma_{f_{S_i}(\mathbf{x})} \sqrt{[x_0^{(m)\mathbf{T}} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} x_0^{(m)}]}}, \quad (6.22)$$

para $i=1,2,\dots,m$.

Etapa 3. Considerando as razões multivariadas modificadas de capacidade de previsão $MC_{\sim pk}^i(\mathbf{x})$ como funções objetivo, o problema de otimização multi-critério pode ser formulado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}} \mathbf{MC}_{\sim pk}(\mathbf{x}) &= [MC_{\sim pk}^1(\mathbf{x}), \dots, MC_{\sim pk}^i(\mathbf{x}), \dots, MC_{\sim pk}^m(\mathbf{x})] \\ \text{s.t.: } \mathbf{x}^T \mathbf{x} &\leq \rho^2 \end{aligned} \quad (6.23)$$

Como apresentado na seção 4, para resolver esse problema, é necessário, primeiramente, estabelecer uma matriz *pay-off*. De modo análogo ao modelo da seção 6.2.1, isso é obtido a

partir da otimização individual das funções $MC_{pk}^i(\mathbf{x})$. Matematicamente, a matriz *pay-off* \mathbf{MK} é construída da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}} MC_{pk}^i(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.: } \mathbf{x}^T \mathbf{x} \leq \rho^2 \end{aligned}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (6.24)$$

$$\mathbf{MK} = \begin{bmatrix} MC_{pk}^{1*}(x_1^*) & \cdots & MC_{pk}^1(x_i^*) & \cdots & MC_{pk}^1(x_m^*) \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ MC_{pk}^i(x_1^*) & \cdots & MC_{pk}^{i*}(x_i^*) & \cdots & MC_{pk}^i(x_m^*) \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ MC_{pk}^m(x_1^*) & \cdots & MC_{pk}^m(x_i^*) & \cdots & MC_{pk}^{m*}(x_m^*) \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

onde: x_m^* denota o “ótimo” de uma dada razão de capacidade multivariada m , $MC_{pk}^{m*}(x_m^*)$ denota a razão de capacidade multivariada “ótima” m , calculada com relação ao seu ótimo x_m^* , e $MC_{pk}^{i*}(x_i^*)$ denota a i -ésima razão de capacidade multivariada, calculada com relação ao ótimo x_m^* .

A partir das Equações (2.33) e (2.34), é possível notar um benefício adicional de usar as soluções nadir como limites de especificação, conforme proposto na Etapa 2. Como mencionado anteriormente, a diferença entre $E[F_i(\mathbf{x})]$ e f_S^N fornece a distância relativa de $F_i(\mathbf{x})$, avaliada em uma dada configuração de parâmetros de controle, para $i=m$, até a pior solução, restrita a outros fatores $F_i(\mathbf{x})$, para $i=1, 2, \dots, m-1$. Uma vez que as razões $MC_{pk}^i(\mathbf{x})$ são maximizadas, todas as distâncias até as piores soluções são maximizadas, ao mesmo tempo em que as variâncias de previsão são minimizadas.

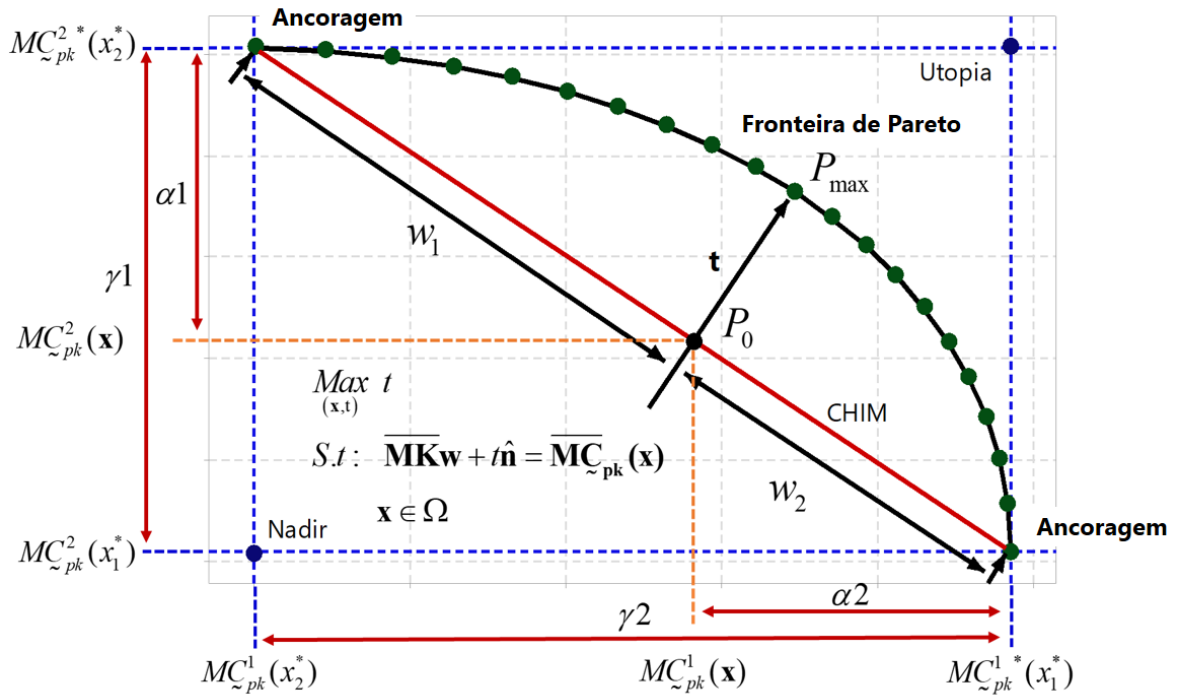


Figura 6.2 - Método NBI-GRG: fronteira de Pareto para a maximização das razões multivariadas modificadas de capacidade construídas para variáveis latentes.

Fonte: Autoria própria.

Etapa 4. Para a solução numérica do problema de otimização formulado na Etapa 3, similarmente ao modelo da seção 6.2.1, propõe-se o uso do método NBI.

Esse método viabiliza a aglutinação das razões $MC_{pk}^i(\mathbf{x})$, a partir de algumas relações matemáticas. Na Figura 6.2, a fronteira de Pareto para a maximização das razões de capacidade multivariadas é apresentada, de onde é possível extrair as relações desejadas, usando semelhança de triângulos, de modo que:

$$\frac{\alpha_1}{\gamma_1} = \frac{MC_{pk}^2(x_2^*) - MC_{pk}^2(\mathbf{x})}{MC_{pk}^2(x_2^*) - MC_{pk}^2(x_1^*)} = \frac{w_2}{w_1 + w_2}$$

(6.26)

$$= \frac{MC_{pk}^i U - MC_{pk}^i(\mathbf{x})}{MC_{pk}^i U - MC_{pk}^i N} = \frac{MC_{pk}^i(\mathbf{x}) - MC_{pk}^i U}{MC_{pk}^i N - MC_{pk}^i U} = \overline{MC}_{pk}^i(x_i)$$

$$\frac{\alpha_2}{\gamma_2} = \frac{MC_{pk}^1(x_1^*) - MC_{pk}^1(\mathbf{x})}{MC_{pk}^1(x_1^*) - MC_{pk}^1(x_2^*)} = \frac{w_2}{w_1 + w_2} \quad (6.27)$$

$$= \frac{MC_{pk}^{iU} - MC_{pk}^i(\mathbf{x})}{MC_{pk}^{iU} - MC_{pk}^{iN}} = \frac{MC_{pk}^i(\mathbf{x}) - MC_{pk}^{iU}}{MC_{pk}^{iN} - MC_{pk}^{iU}} = \overline{MC}_{pk}^i(x_i)$$

Portanto:

$$MC_{pk}^2(x) = MC_{pk}^2(x_2^*) + w_1 MC_{pk}^2(x_1^*) - w_1 MC_{pk}^2(x_2^*) \quad (6.28)$$

$$= w_1 MC_{pk}^2(x_1^*) + (1 - w_1) MC_{pk}^2(x_2^*) = w_1 MC_{pk}^2(x_1^*) + w_2 MC_{pk}^2(x_2^*)$$

$$MC_{pk}^1(x) = MC_{pk}^1(x_1^*) + w_2 MC_{pk}^1(x_2^*) - w_2 MC_{pk}^1(x_1^*) \quad (6.29)$$

$$= w_2 MC_{pk}^1(x_2^*) + (1 - w_2) MC_{pk}^1(x_1^*) = w_1 MC_{pk}^1(x_1^*) + w_2 MC_{pk}^1(x_2^*)$$

Ao se combinar as Equações (6.28) e (6.29), têm-se:

$$\begin{cases} MC_{pk}^1(x) = w_1 MC_{pk}^1(x_1^*) + w_2 MC_{pk}^1(x_2^*) \\ MC_{pk}^2(x) = w_1 MC_{pk}^2(x_1^*) + w_2 MC_{pk}^2(x_2^*) \end{cases} \quad (6.30)$$

As equações representando as coordenadas dos pontos P_0 e P_{max} também podem ser reescritas como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} MC_{pk}^1(x) \\ MC_{pk}^2(x) \end{bmatrix}}_{\overline{MC}_{pk}(x)} = \underbrace{\begin{bmatrix} MC_{pk}^1(x_1^*) & MC_{pk}^1(x_2^*) \\ MC_{pk}^2(x_1^*) & MC_{pk}^2(x_2^*) \end{bmatrix}}_{\text{MK}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}} \quad (6.31)$$

$$\overline{MC}_{pk}(x) = \text{MKw} \quad (6.32)$$

Com base na equação anterior, a segunda etapa consiste em obter a matriz *pay-off* e o vetor de funções objetivo normalizados, formados pelas razões de capacidade. Em seguida, aplicando-se as Equações (6.26) e (6.27), têm-se:

$$\overline{\mathbf{MC}}_{pk}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \overline{MC}_{pk}^1(x_1) \\ \vdots \\ \overline{MC}_{pk}^i(x_i) \\ \vdots \\ \overline{MC}_{pk}^m(x_m) \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{\mathbf{MK}} = \begin{bmatrix} \overline{MC}_{pk}^{1*}(x_1^*) & \cdots & \overline{MC}_{pk}^1(x_i^*) & \cdots & \overline{MC}_{pk}^1(x_m^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{MC}_{pk}^i(x_1^*) & \cdots & \overline{MC}_{pk}^{i*}(x_i^*) & \cdots & \overline{MC}_{pk}^i(x_m^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{MC}_{pk}^m(x_1^*) & \cdots & \overline{MC}_{pk}^m(x_i^*) & \cdots & \overline{MC}_{pk}^m(x_m^*) \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

Tomando novamente a teoria original, o problema NBI bi-objetivo para a otimização da capacidade de previsão multivariada é formulado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \underset{(\mathbf{x}, t)}{\text{Max}} \quad t \\ & \text{s.t.} : \overline{\mathbf{MK}}\mathbf{w} + t\hat{\mathbf{n}} = \overline{\mathbf{MC}}_{pk}(\mathbf{x}) \\ & \mathbf{x} \in \Omega \\ & g_j(x) \leq 0 \\ & h_j(x) = 0 \end{aligned} \quad (6.34)$$

Finalmente, o problema equivalente pode ser derivado, conforme apresentado na Equação (6.35). A demonstração dessa equação é desenvolvida no Apêndice B.

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} \quad \overline{MC}_{pk}^1(\mathbf{x}) \\ & \text{s.t.} : \overline{MC}_{pk}^1(\mathbf{x}) - \overline{MC}_{pk}^2(\mathbf{x}) + 2w - 1 = 0 \\ & \mathbf{x} \in \Omega \\ & g_j(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \rho^2 \leq 0 \\ & h_{j+1}(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \quad (6.35)$$

Etapa 5. Para construir a fronteira de Pareto, o problema NBI apresentado na Equação (6.35) é resolvido para um conjunto de pesos w que denotam o grau de importância de uma função em relação a outra. Nesta etapa, propomos o algoritmo GRG como uma sub-rotina, por duas razões especiais: (a) a literatura existente sobre o tópico demonstrou recentemente que o GRG é um dos algoritmos de gradiente mais robustos e eficientes para construir o Fronteira de Pareto com o método NBI (COSTA *et al.*, 2016b; GAUDÊNCIO *et al.*, 2019b); (b) o algoritmo

GRG está disponível em ambientes computacionais modernos, como o MS Excel (ROCHA *et al.*, 2017a), o que facilita aplicações industriais.

Etapa 6. Após a otimização, a fronteira de Pareto para as razões de capacidade multivariada é analisada, considerando limites apropriados. Como essas razões possuem especificações unilaterais, adota-se o valor mínimo recomendado para novos processos, com parâmetros relacionados à segurança, resistência ou outra categoria de criticidade, conforme proposto por Montgomery (2012): $\overline{MC}_{pk}^i(x_i) > 1.60$ (Tabela 2.4). Essa estratégia também foi adotada no modelo da seção 6.2.1 como uma maneira de assegurar capacidades máximas.

6.3 Estratégias modificadas comparáveis

Como evidenciado na seção 1.1, este trabalho desenvolve, pela primeira vez, uma estratégia de otimização envolvendo as noções de capacidade e variância de previsão, até então usadas somente para avaliação do desempenho de arranjos experimentais. Portanto, dado o ineditismo do estudo, estratégias comparáveis revelam-se escassas. Apesar disso, modificações dos modelos de otimização de variância (seção 6.3.1) ou o uso de outras métricas de variância de previsão como parte das razões de capacidade (seção 6.3.2) podem ser empregadas como modelos de comparação.

6.3.1 Modelos baseados na otimização de variância

Modificações diretas das estratégias disponíveis na literatura para otimização da variância (seção 4.3) podem ser empregadas para comparações com a estratégia desenvolvida nas seções 6.1 e 6.2. Nesse sentido, substituindo-se o termo de variância na Equação (4.14) pela variância de previsão, pode-se obter uma expressão modificada com objetivos similares aos da estratégia proposta. Comparativamente ao modelo da seção 6.2.1, um EQM modificado pode ser construído da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} EQM_i &= [Y_i(\mathbf{x}) - T_i]^2 + Var[Y_i(\mathbf{x})|\mathbf{x}_0] \\ &= [Y_i(\mathbf{x}) - T_i]^2 + \sigma_{f_i(\mathbf{x})}^2 \left[x_0^{(m)\mathbf{T}} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} x_0^{(m)} \right], \text{ para } i=1,2,\dots,m. \end{aligned} \quad (6.36)$$

onde: o ótimo individual de $Y_i(\mathbf{x})$ pode ser usado como alvo T_i .

Expressão equivalente pode ser usada para o caso multivariado, onde os fatores são modelados por superfície de resposta, usando-se o mesmo arranjo experimental. Portanto, comparativamente ao modelo da seção 6.2.2, um EQMM modificado pode ser construído da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} EQMM_i &= [F_i(\mathbf{x}) - T_i]^2 + Var[F_i(\mathbf{x}) | \mathbf{x}_0] \\ &= [F_i(\mathbf{x}) - T_i]^2 + \sigma_{f_{S_i}(\mathbf{x})}^2 \left[\mathbf{x}_0^{(m)\top} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0^{(m)} \right], \text{ para } i=1,2,\dots,m. \end{aligned} \quad (6.37)$$

onde: o ótimo individual de $F_i(\mathbf{x})$ pode ser usado como alvo T_i .

Para ambos os casos expressos pelas Equações (6.36) e (6.37), podem-se empregar os métodos introduzidos na seção 4.2.

6.3.2 Modelos baseados em métricas aglutinadoras de variância de previsão

Como apresentado na seção 2.2 e sumarizado na seção 2.2.5, a literatura apresenta um conjunto de diferentes métricas de variância de previsão, originalmente projetadas para a comparação entre arranjos. Para o desenvolvimento dos modelos propostos na seção 6.2, foi adotada a métrica básica, proposta por Box e Hunter (1957), considerada, na literatura, uma medida direta de variância. No entanto, modelos comparáveis também podem ser construídos usando métricas aglutinadoras de variância de previsão.

À priori, não se espera haver diferença entre a otimização de razões modificadas de capacidade com diferentes métricas de variância, uma vez que o comportamento delas acompanha, à seu modo, a previsibilidade das regiões do arranjo. Contudo, como discutido ao longo deste trabalho, modificações nas propriedades originais dos arranjos tendem a causar muitas distorções na função direta de variância de previsão. Dessa maneira, outras métricas podem ser mais adequadas para os casos onde há, especialmente, redução do número de pontos centrais e alteração da distância axial.

Expressões para os casos uni e multivariados podem ser dadas pelas Equações (6.38) e (6.39), respectivamente:

$$C_{pk}^i(\mathbf{x}) = \frac{d_Y}{3 \cdot V(x)}, \text{ para } i=1,2,\dots,m. \quad (6.38)$$

$$MC_{pk}^i(\mathbf{x}) = \frac{d_F}{3 \cdot V(x)}, \text{ para } i=1,2,\dots,m. \quad (6.39)$$

onde: d_y denota a diferença entre o modelo de superfície de resposta e o ponto de nadir, tal que $d_y = [f_i^N - f_i(\mathbf{x})]$, para o caso de minimização, e $d_y = [f_i(\mathbf{x}) - f_i^N]$, para o caso de maximização; d_F denota a diferença entre o modelo de superfície de resposta para o fator rotacionado e o ponto de nadir, tal que: $d_F = [f_S^N - f_{S_i}(\mathbf{x})]$, para o caso de minimização e $d_F = [f_{S_i}(\mathbf{x}) - f_S^N]$, para o caso de maximização; e $V(x)$ é uma designação genérica das métricas de variância de previsão indicadas no Quadro 2.1.

6.4 Plataforma de otimização em MS Excel

A fim de viabilizar a implementação e o uso dos modelos de otimização apresentados nas seções anteriores, foi desenvolvida, como parte do presente trabalho, uma plataforma de otimização em MS Excel para estudo da capacidade de previsão de soluções Pareto ótimas. Essencialmente, essa plataforma contém as seguintes funcionalidades e recursos principais:

- a) A geração de VDGs personalizados, como aqueles apresentados na seção 2.2.4.

Os VDGs foram construídos considerando diferentes malhas gráficas, que dependem de valores estabelecidos para a estrutura do arranjo e das métricas de variância comparadas. Programações em *Visual Basic for Application* (VBA) foram utilizadas para otimizar o formato e a apresentação das curvas, conforme configurações dos CCDs.

- b) A estimativa imediata de modelos de superfície de resposta via OLS a partir do lançamento de dados experimentais.

O método OLS foi implementado mediante a construção de múltiplas matrizes, partindo das matrizes dos CCDs, criadas para até 6 variáveis de entrada. Além disso, também foi criada uma matriz centralizada para a coleta de dados experimentais, com capacidade para até 8 variáveis de resposta originais.

- c) A opção de métricas de variância de previsão para cálculo das razões de capacidade.

As métricas de variância apresentadas na seção 2.2 foram implementadas analiticamente na plataforma, de modo a viabilizar a construção de razões modificadas de capacidade, conforme a necessidade do experimentador (isto é, envolvendo a métrica básica de variância ou as variâncias mínima, máxima ou média, em regiões esféricas ou cuboidais).

- d) A otimização bi-objetivo tradicional de quaisquer pares de variáveis de resposta, incluindo as métricas de variância.
- e) A otimização bi-objetivo de razões modificadas de capacidade para quaisquer variáveis de resposta escolhidas.

As otimizações bi-objetivo tradicional (d) e de razões modificadas de capacidade (e) via NBI foram implementadas a partir de cálculos analíticos e programações em VBA. Com essas funcionalidades, o experimentador pode otimizar tanto variáveis originais do processo, quanto variáveis latentes oriundas de análises fatoriais, por exemplo. Além disso, também pode otimizar razões modificadas construídas a partir dessas variáveis.

A plataforma de otimização desenvolvida é exibida no Apêndice D.

7 APLICAÇÕES EM PROCESSOS INDUSTRIAIS

A fim de se ilustrar a eficácia da estratégia de otimização proposta, tanto para variáveis originais independentes como para variáveis correlacionadas, esta seção desenvolve dois estudos de caso. O primeiro aborda o processo de torneamento do aço ABNT H13 (seção 7.1), ao qual aplica-se o modelo de otimização proposto na seção 6.2.1. O segundo, por sua vez, aborda o processo de fresamento de topo do aço inoxidável duplex UNS S32205 (seção 7.2), ao qual aplica-se o modelo de otimização proposto na seção 6.2.2. Em ambos os casos, as abordagens tradicionais de otimização uni e multivariadas, apresentadas na seção 4, são, também, aplicadas. Com isso, realizam-se análises comparativas, por meio das quais os benefícios da estratégia proposta são evidenciados.

7.1 Estudo de caso do processo de torneamento do aço ABNT H13 com variáveis de resposta independentes

Nesta seção, o modelo de otimização proposto na seção 6.2.1 é aplicado ao processo de torneamento, sem fluido de corte, do aço endurecido ABNT H13, empregando ferramenta de cerâmica com geometria alisadora (*wiper*). Os dados e os detalhes experimentais foram obtidos de Campos (2015).

7.1.1 Contexto do processo de torneamento

O processo de torneamento de materiais endurecidos (materiais na faixa de dureza de 45-65 HRC) tem sido estudado por mais de três décadas (GRZESIK *et al.*, 2014). No entanto, muitas de suas tecnologias ainda necessitam de pesquisas mais aprofundadas para possibilitar algumas generalizações, como é o caso dos insertos com geometria *wiper*. Há alguns anos, os processos de retificação eram a estratégia de manufatura mais apropriada para a usinagem de materiais endurecidos (DAVIM, 2011; CAMPOS *et al.*, 2014). Com a melhoria dos materiais usados em ferramentas de corte e o desenvolvimento de novas geometrias, porém, a operação de torneamento de aços endurecidos se tornou mais popular.

A vida da ferramenta (T) e a rugosidade (Ra) são as variáveis de resposta mais comumente utilizadas para caracterizar, respectivamente, as medidas de produtividade (CTP) e qualidade (CTQ) do processo de torneamento de materiais endurecidos. No estudo de T e Ra , existem vários fatores influentes, como velocidade de corte, avanço, profundidade de corte e geometria da ferramenta de corte (GAMARRA *et al.*, 2018; ROCHA *et al.*, 2017b). O uso de experimentos

planejados tem se tornado popular para estudar a influência desses fatores, onde, no passado, apenas a estratégia “um fator por vez” era empregada (CZITROM, 1999). A vantagem analítica do DOE é que mais informação sobre o processo pode ser obtida, como as interações entre os fatores. Dentre as vantagens operacionais, encontram-se a redução do número de testes, menor consumo de materiais e ferramentas, e redução da quantidade de horas-máquina, o que, em geral, leva a menores custos de experimentação (BOUACHA *et al.*, 2010; MONTGOMERY, 2017).

7.1.2 Procedimento experimental

Para a coleta de dados experimentais, foi utilizado um CCD com oito pontos fatoriais, seis pontos axiais e cinco pontos centrais, totalizando 19 experimentos baseados em diferentes combinações dos níveis das variáveis de controle mostradas na Tabela 7.1. Com exceção da quantidade reduzida de pontos centrais, as demais quantidade de pontos e a distância axial $\alpha = 1,682$ foram obtidas conforme conjunto de Equações (2.1)-(2.3) e os valores da Tabela 2.1.

Os experimentos foram conduzidos usando um centro de usinagem CNC “Kingsbury MHP 50” com potência de 18kW, rotação máxima de 4.500 rpm, torre do porta ferramenta com 12 posições e placa com diâmetro de 200 mm. Essas informações e outros detalhes acerca da condução do experimento podem ser encontrados em Campos (2015).

Tabela 7.1 - Parâmetros de controle e seus níveis.

| Níveis Codificados | Parâmetros de Controle | | |
|--------------------|------------------------|---------------|-----------------------|
| | Velocidade de Corte | Avanço | Profundidade de Corte |
| | V_c [m/min.] | f [mm/rev.] | a_p [mm] |
| 1,682 | 267,62 | 0,26 | 0,39 |
| 1,000 | 225,00 | 0,22 | 0,33 |
| 0,000 | 162,50 | 0,16 | 0,24 |
| -1,000 | 100,00 | 0,10 | 0,15 |
| -1,682 | 57,38 | 0,06 | 0,09 |

Fonte: Adaptado de Campos (2015)

Para condução dos experimentos, foram empregados insertos de cerâmica, com geometria *wiper*, CC650WG, código ISO CNGA120408 T01020WG. A matriz do inserto CC650 é uma cerâmica mista baseada em alumina com composição de 70% Al₂O₃ + Ti [22,5% C; 7,5% N].

As peças usadas no processo de torneamento são fabricadas de aço ABNT H13 com composição química de 0,40 % C; 0,35 % Mn; 1,0 % Si; 5,25 % Cr; 1,00 % V; e 1,50 % Mo, dimensões $\varnothing 50 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}$ e dureza média de $54 \pm 1 \text{ HRC}$. Foi utilizado um porta ferramentas com geometria negativa e ângulo de entrada $\chi_r = 95^\circ$, código ISO DCLNL 2020K12. A Figura 7.1 mostra o processo de torneamento com ferramenta *wiper* CC650.

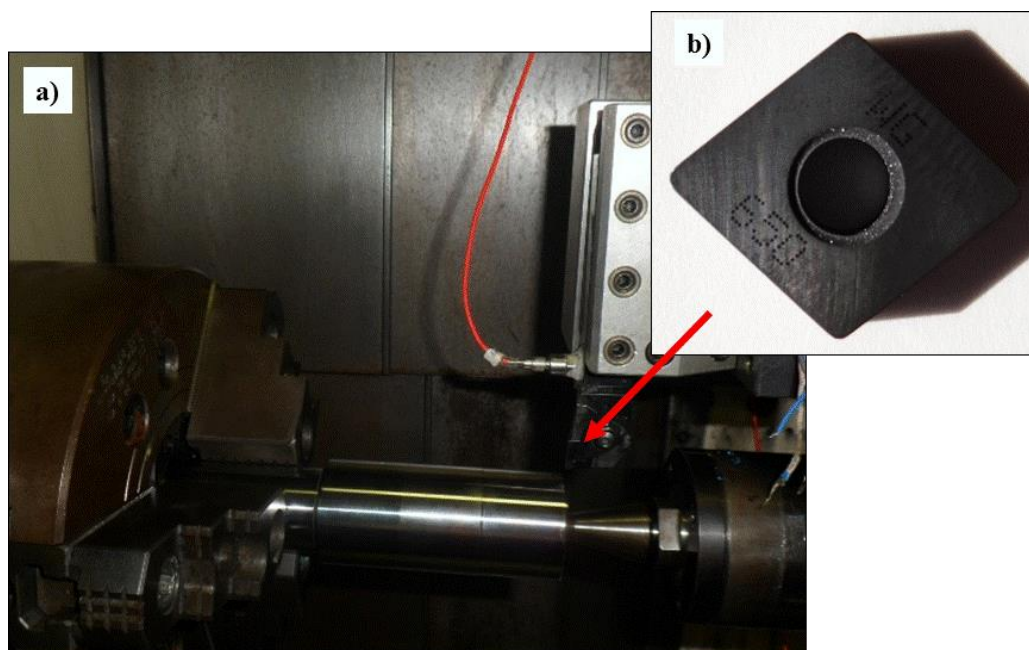


Figura 7.1 - Processo de torneamento do aço endurecido H13 com ferramenta *wiper* CC650: (a) Processo de torneamento. (b) Ferramenta CC650 *wiper*.

Fonte: Adaptado de Campos (2015)

Para a medição da rugosidade (Ra) dos corpos de prova, foi utilizado um perfilômetro Hommel Tester T1000 de acordo com as diretrizes de medição da norma ISO/DIS 4287/1E. A vida da ferramenta (T), medida em minutos, foi obtida pela multiplicação do número total de passes pelo tempo de corte (T_c) até que o desgaste de flanco atingisse o máximo permitido pela norma internacional ISO 3685 (isto é, $VB = 0,30 \text{ mm}$), conforme mostrado pelas Equações (7.1) e (7.2). Os desgastes, por suas vezes, foram medidos após cada passe, utilizando um microscópio com ampliação de 30 vezes e resolução de $1 \mu\text{m}$. A Figura 7.2 mostra os desgastes de flanco e de cratera do inserto de CC650 *wiper* com $VB = 0,30 \text{ mm}$. A matriz experimental com as respostas coletadas é apresentada na Tabela 7.2.

$$T_c = \frac{l_f \cdot \pi \cdot d}{1000 \cdot f \cdot V_c} \quad (7.1)$$

$$T = n_s T_c = \frac{n_s \cdot l_f \cdot \pi \cdot d}{1000 \cdot f \cdot V_c} \quad (7.2)$$

onde: l_f é o comprimento do corpo de prova; d é o diâmetro do corpo de prova; n_s = número de passes; f é o avanço [mm /rev]; e V_c é a velocidade de corte [m /min].

Tabela 7.2 - Matriz experimental e respostas coletadas

| Exp. No. | Parâmetros de Controle | | | | | | Respostas | |
|----------|------------------------|---------|---------------|-------|------------|------------|-----------------|-----------|
| | V_c [m/min.] | | f [mm/rev.] | | a_p [mm] | | CTP | CTQ |
| | | | | | | | Maximizar | Minimizar |
| Cod. | Descod. | Cod. | Descod. | Cod. | Descod. | T [min.] | Ra [μ m] | |
| 1 | -1,000 | 100,000 | -1,000 | 0,100 | -1,000 | 0,150 | 61,000 | 0,450 |
| 2 | 1,000 | 225,000 | -1,000 | 0,100 | -1,000 | 0,150 | 32,250 | 0,540 |
| 3 | -1,000 | 100,000 | 1,000 | 0,225 | -1,000 | 0,150 | 50,500 | 0,980 |
| 4 | 1,000 | 225,000 | 1,000 | 0,225 | -1,000 | 0,150 | 30,000 | 1,220 |
| 5 | -1,000 | 100,000 | -1,000 | 0,100 | 1,000 | 0,330 | 62,250 | 0,550 |
| 6 | 1,000 | 225,000 | -1,000 | 0,100 | 1,000 | 0,330 | 28,500 | 0,620 |
| 7 | -1,000 | 100,000 | 1,000 | 0,225 | 1,000 | 0,330 | 50,500 | 0,930 |
| 8 | 1,000 | 225,000 | 1,000 | 0,225 | 1,000 | 0,330 | 27,500 | 0,890 |
| 9 | -1,682 | 57,388 | 0,000 | 0,163 | 0,000 | 0,240 | 58,000 | 0,670 |
| 10 | 1,682 | 267,612 | 0,000 | 0,163 | 0,000 | 0,240 | 23,500 | 1,160 |
| 11 | 0,000 | 162,500 | -1,682 | 0,057 | 0,000 | 0,240 | 37,500 | 0,310 |
| 12 | 0,000 | 162,500 | 1,682 | 0,268 | 0,000 | 0,240 | 40,000 | 1,250 |
| 13 | 0,000 | 162,500 | 0,000 | 0,163 | -1,682 | 0,089 | 49,500 | 0,910 |
| 14 | 0,000 | 162,500 | 0,000 | 0,163 | 1,682 | 0,391 | 46,000 | 0,720 |
| 15 | 0,000 | 162,500 | 0,000 | 0,163 | 0,000 | 0,240 | 42,000 | 0,310 |
| 16 | 0,000 | 162,500 | 0,000 | 0,163 | 0,000 | 0,240 | 42,500 | 0,320 |
| 17 | 0,000 | 162,500 | 0,000 | 0,163 | 0,000 | 0,240 | 41,500 | 0,350 |
| 18 | 0,000 | 162,500 | 0,000 | 0,163 | 0,000 | 0,240 | 42,000 | 0,320 |
| 19 | 0,000 | 162,500 | 0,000 | 0,163 | 0,000 | 0,240 | 43,000 | 0,340 |

Fonte: Adaptado de Campos (2015)

Na Tabela 7.2, os valores descodificados X_{descod} são calculados a partir dos níveis +1 e -1 dos parâmetros de controle, introduzidos pela Tabela 7.1, e dos valores codificados X_{cod} , dados pela estrutura do CCD, de modo que $X_{descod} = 0.5(N_{+1} + N_{-1}) + X_{cod}(N_{+1} - N_{-1})$, onde: N_{+1} e N_{-1} denotam, respectivamente, os níveis +1 e -1 dos parâmetros de controle x (neste caso, V_c, f e a_p).¹³

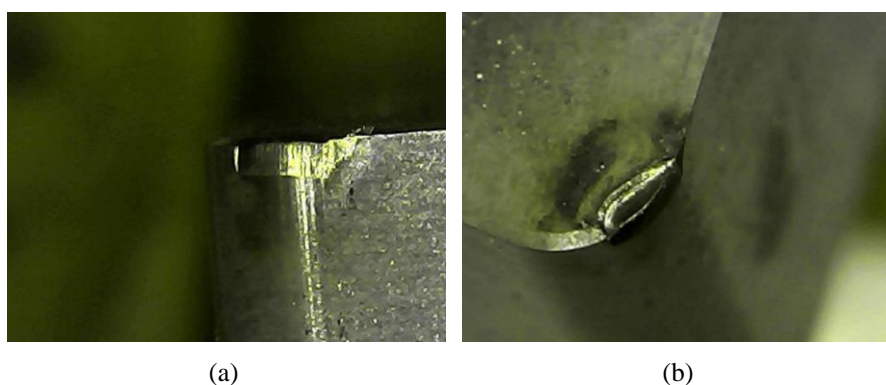


Figura 7.2 - Imagens óticas dos mecanismos de desgaste. (a) Desgaste de Flanco e (b) Desgaste de Cratera.

Fonte: Adaptado de Campos (2015)

7.1.3 Parâmetros influentes e modelagem das superfícies

Com os dados dispostos na Tabela 7.2 da seção 7.1.2, foram analisadas as influências dos efeitos principais e das interações dos parâmetros de corte sobre as variáveis de resposta. Em seguida, foram estimados os modelos de superfície de resposta, utilizando-se do método OLS, conforme as formulações apresentadas na seção 2.1.1. Esta seção apresenta os resultados da modelagem das respostas T e Ra , como uma função dos parâmetros de controle do processo V_c , f e a_p .

Empregando-se, inicialmente, os dados coletados nos pontos fatoriais e centrais, análises dos fatores principais e interações influentes sobre as variáveis de respostas foram conduzidas, como mostrado na Figura 7.3. Para a resposta T , o parâmetro V_c foi o mais influente, pois, quanto maior a velocidade de corte, maior a progressão do desgaste na ferramenta, o que reduz a sua vida. O parâmetro f contribuiu para a progressão do desgaste em menores proporções,

¹³ Essa formulação também é adotada na Tabela 7.9, na qual empregam-se os níveis da Tabela 7.1, e nas Tabelas 7.18, 7.19 e 7.21, nas quais empregam-se os níveis da Tabela 7.11. Em ambos os casos, em lugar da estrutura do arranjo, os valores X_{cod} são dados pelas soluções ótimas obtidas.

também apresentando alguma interação com V_c . Para a resposta R_a , o parâmetro f foi o mais influente, uma vez que avanços intermediários facilitam o corte e melhoram a qualidade das superfícies usinadas. Os parâmetros V_c e ap também tendem a fornecer rugosidades melhores, quando configurados em níveis intermediários.

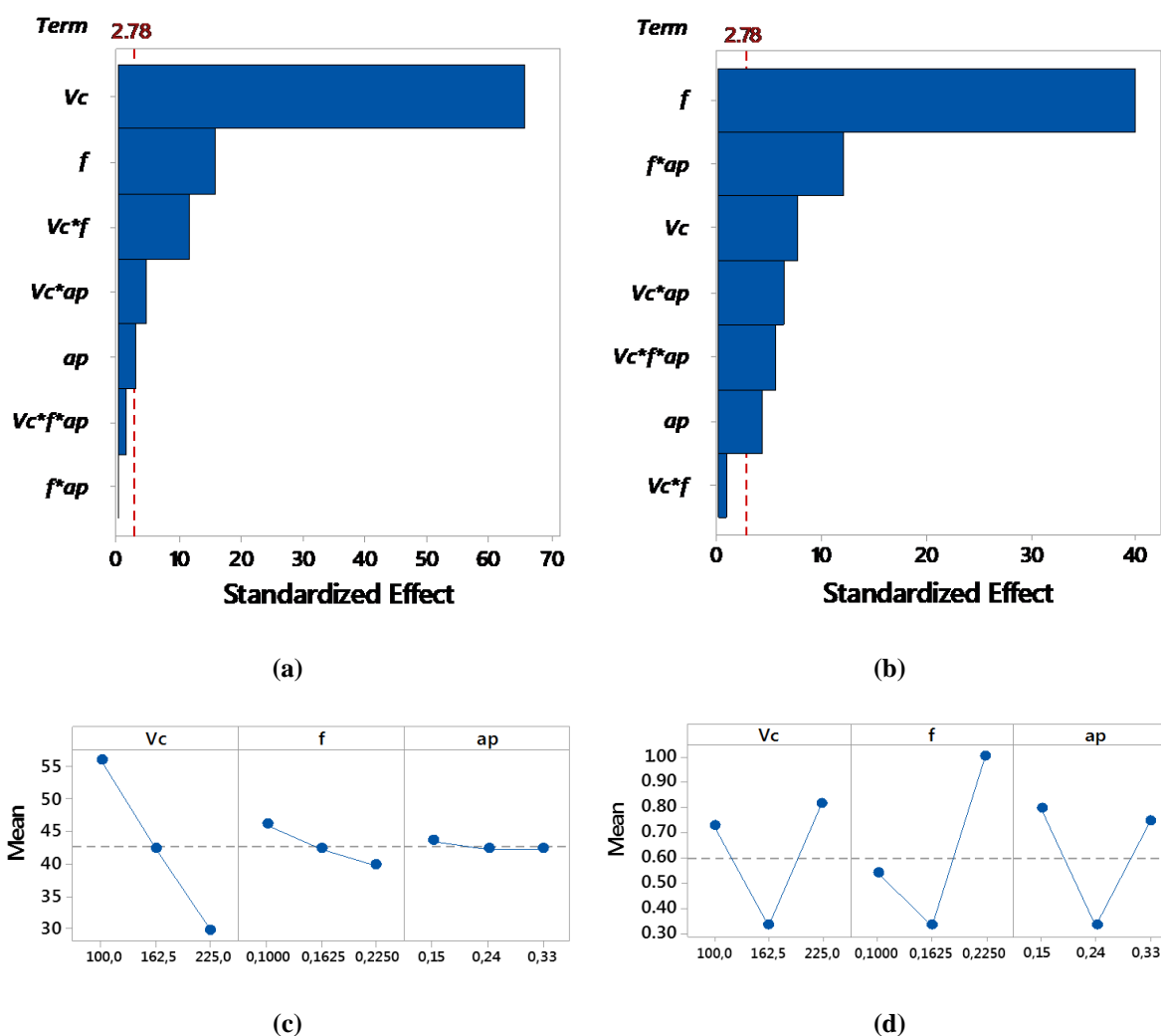


Figura 7.3 - Análise de efeitos sobre as variáveis de resposta. (a) Gráfico de Pareto para T . (b) Gráfico de Pareto para R_a . (c) Gráfico de efeitos principais para T . (d) Gráfico de efeitos principais para R_a .

Fonte: Autoria própria.

Após a adição de pontos axiais ao arranjo, o método OLS foi aplicado ao conjunto completo de dados experimentais, conforme a Equação (2.9), a fim de estimar os coeficientes mostrados na Tabela 7.3. Para cada variável de resposta, foram substituídos os coeficientes da

regressão na Equação (2.7) a fim de se obter os modelos de superfície de resposta. As Equações (7.3) e (7.4) fornecem, respectivamente, os modelos quadráticos completos para T e Ra .

$$T = 42,19 - 12,01Vc - 1,56f - 0,80ap - 0,43Vc^2 - 1,14f^2 + 2,04ap^2 + 2,38Vc \times f - 0,94Vc \times ap \quad (7.3)$$

$$Ra = 0,33 - 0,09Vc - 0,25f - 0,04ap - 0,19Vc^2 - 0,14f^2 + 0,15ap^2 + 0,01Vc \times f - 0,04Vc \times ap - 0,07f \times ap \quad (7.4)$$

Tabela 7.3 - Modelos de superfície de resposta estimados para T e Ra (em unidades codificadas)¹

| Termo | T | | | | | Ra | | | | |
|----------------|--------|---------|---------|-------------|------|-------|---------|---------|-------------|------|
| | Coef | SE Coef | T-Value | P-Value | VIF | Coef | SE Coef | T-Value | P-Value | VIF |
| Constante | 42,19 | 1,36 | 30,91 | 0,00 | | 0,33 | 0,04 | 7,75 | 0,00 | |
| Vc | -12,01 | 0,83 | -14,53 | 0,00 | 1,00 | 0,09 | 0,03 | 3,35 | 0,01 | 1,00 |
| F | -1,56 | 0,83 | -1,89 | 0,09 | 1,00 | 0,25 | 0,03 | 9,72 | 0,00 | 1,00 |
| Ap | -0,80 | 0,83 | -0,96 | 0,36 | 1,00 | -0,04 | 0,03 | -1,47 | 0,18 | 1,00 |
| $Vc*Vc$ | -0,43 | 0,83 | -0,52 | 0,62 | 1,04 | 0,19 | 0,03 | 7,23 | 0,00 | 1,04 |
| $f*f$ | -1,14 | 0,83 | -1,38 | 0,20 | 1,04 | 0,14 | 0,03 | 5,38 | 0,00 | 1,04 |
| $ap*ap$ | 2,04 | 0,83 | 2,47 | 0,04 | 1,04 | 0,15 | 0,03 | 5,86 | 0,00 | 1,04 |
| $Vc*f$ | 2,38 | 1,08 | 2,20 | 0,06 | 1,00 | 0,01 | 0,03 | 0,15 | 0,89 | 1,00 |
| $Vc*ap$ | -0,94 | 1,08 | -0,87 | 0,41 | 1,00 | -0,04 | 0,03 | -1,11 | 0,30 | 1,00 |
| $f*ap$ | 0,00 | 1,08 | 0,00 | 1,00 | 1,00 | -0,07 | 0,03 | -2,07 | 0,07 | 1,00 |
| R^2 (%) | 96,25 | | | | | 95,76 | | | | |
| R^2 Adj. (%) | 92,49 | | | | | 91,53 | | | | |

¹Termos significativos (p-value <5 %) são destacados em negrito.

Fonte: Autoria própria.

Com a análise mostrada na Tabela 7.3, pode-se notar que, estatisticamente, a vida da ferramenta CC650 *wiper* depende apenas do efeito linear da velocidade de corte (Vc) e do efeito quadrático da profundidade de corte (ap^2), enquanto a rugosidade Ra das peças com inserto CC650 depende dos efeitos lineares da velocidade de corte (Vc) e do avanço (f) e dos efeitos quadráticos dos parâmetros Vc , f e ap .

A Tabela 7.3 também revela que os modelos canônicos das Equações (7.3) e (7.4) apresentam bom ajuste, uma vez que possuem R^2 e R^2 ajustado próximo de 100%. Para T , foi

obtido o melhor modelo, com R^2 ajustado igual a 92,49%. A fim de compreender melhor o comportamento de cada modelo, as Equações (7.3) e (7.4) foram calculadas em uma malha gráfica com 225 pontos usando a ferramenta *3D surface plot* do pacote comercial Minitab. A Figura 7.4 e a Figura 7.5 fornecem, em conjunto, os resultados desse procedimento, mostrando as superfícies de resposta como funções dos pares de parâmetros. Como pode ser visto nas figuras, a superfície de T é uma sela, o que implica que possui máximos locais, mas não um máximo global, enquanto a superfície de Ra é convexa, o que implica que possui mínimo global. Os resultados matemáticos das análises de convexidade das funções de T e Ra são discutidos na seção 7.1.5.

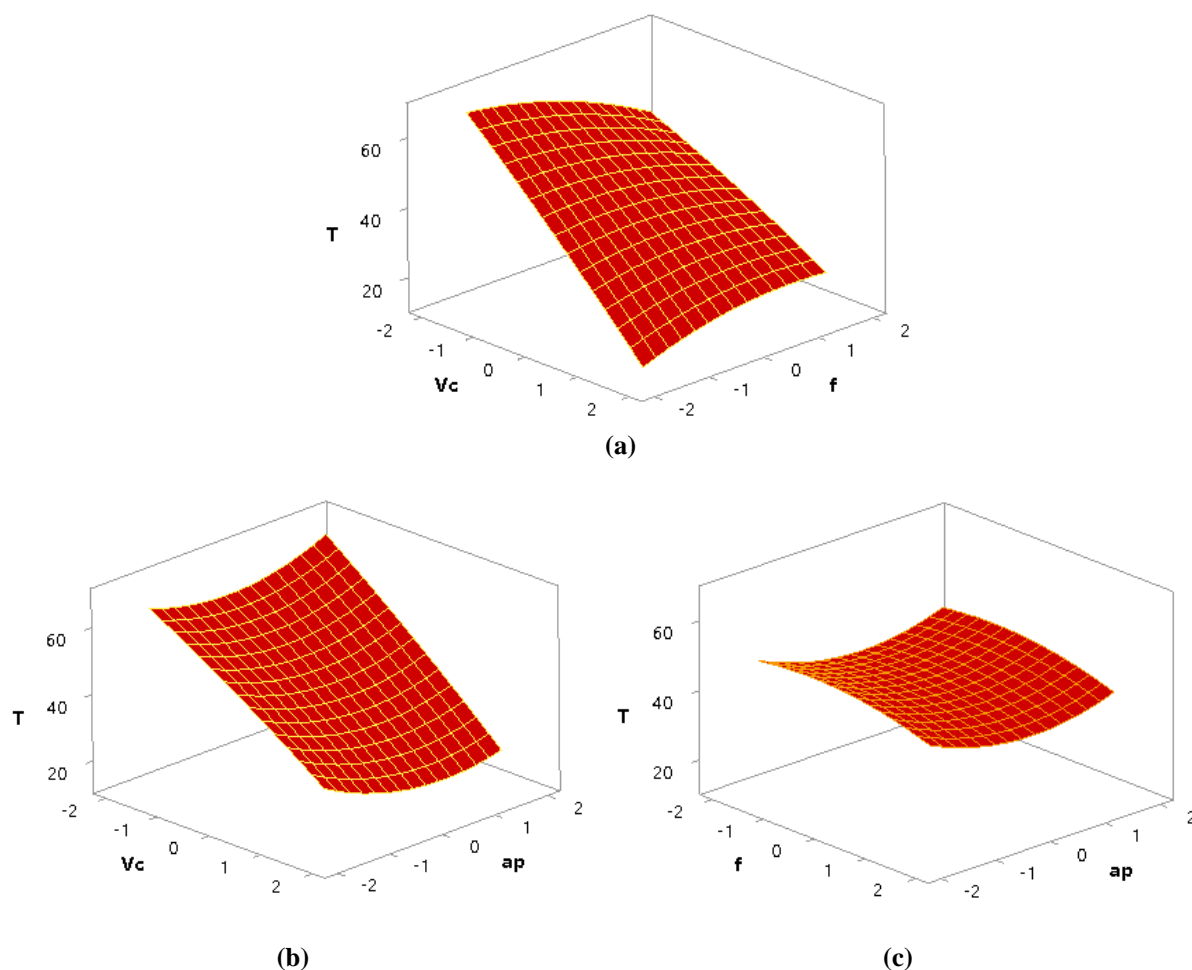


Figura 7.4 - Superfície de resposta para T . (a) Vc vs f , $ap=0$. (b) Vc vs ap , $f=0$. (c) f vs ap , $Vc=0$.

Fonte: Autoria própria.

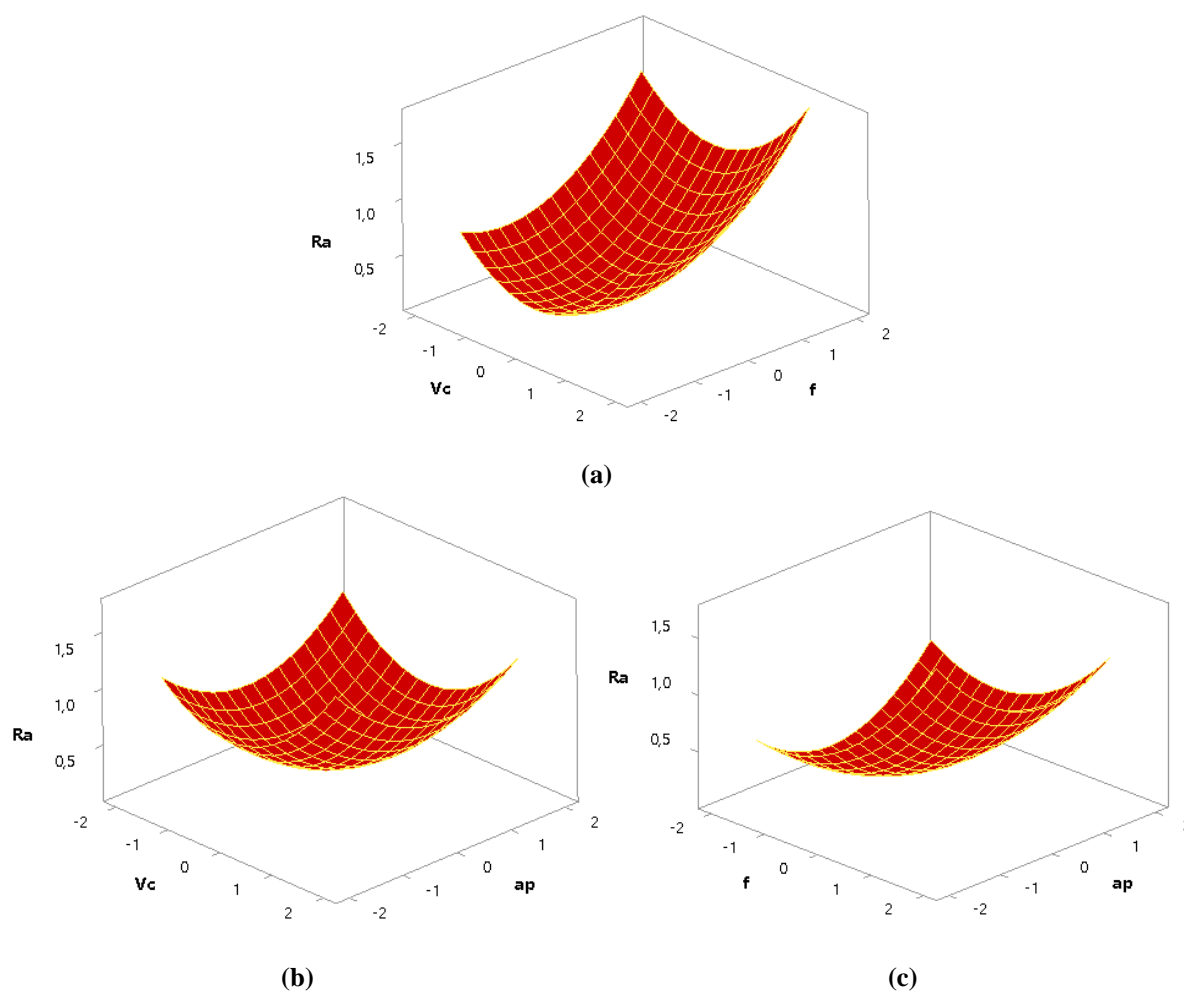


Figura 7.5 - Superfície de resposta para Ra : (a) Vc vs f , $ap=0$. (b) Vc vs ap , $f=0$. (c) f vs ap , $Vc=0$.

Fonte: Autoria própria.

7.1.4 Análise de sensibilidade

Com base nos modelos de superfície de resposta apresentados na Tabela 7.3, foi conduzida uma análise de sensibilidade dos parâmetros de corte. Para isso, as derivadas parciais de cada modelo em relação a cada variável do arranjo foram obtidas algebricamente (PAIVA *et al.*, 2009; KARAOĞLUS; SEÇGIN, 2008).

Para T , obtêm-se:

$$\frac{\partial T}{\partial V_c} = -12,0 - 0,86Vc + 2,38f - 0,94ap \quad (7.5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial f} = -1,56 - 2,28f + 2,38Vc \quad (7.6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial a_p} = -0,80 + 4,08ap - 1,88Vc \quad (7.7)$$

Para Ra , obtêm-se:

$$\frac{\partial Ra}{\partial V_c} = 0,09 + 0,38Vc + 0,01f - 0,04ap \quad (7.8)$$

$$\frac{\partial Ra}{\partial f} = 0,25 + 0,28f + 0,01Vc - 0,07ap \quad (7.9)$$

$$\frac{\partial Ra}{\partial a_p} = -0,04 + 0,30ap - 0,08Vc - 0,07f \quad (7.10)$$

Substituindo-se os valores dos pontos fatoriais planejados (Tabela 7.3) no conjunto de Equações (7.5)-(7.7) e (7.8)-(7.10), foi obtida a análise de sensibilidade mostrada na Figura 7.6. As mudanças na variável de resposta T variam de -16,19 a +5,16 min., o que implica em uma variação total de 21,35 min. A alteração máxima de -16,19 min. é observada ao combinar os níveis altos dos parâmetros Vc e ap com o nível baixo do parâmetro f , pois essa é a condição de maior progressão do desgaste do inserto. As mudanças na variável de resposta Ra variam de -0,48 a +0,61 μm , o que implica em uma variação total de 1,10 μm . A variação máxima de +0,61 é observada ao combinar os níveis altos dos parâmetros Vc e f com o nível baixo do parâmetro ap , pois, nessa condição, existe um aumento na MRR e, portanto, na energia de corte, contribuindo para rugosidades maiores (ROGOV *et al.*, 2017; SUYAMA *et al.*, 2017).

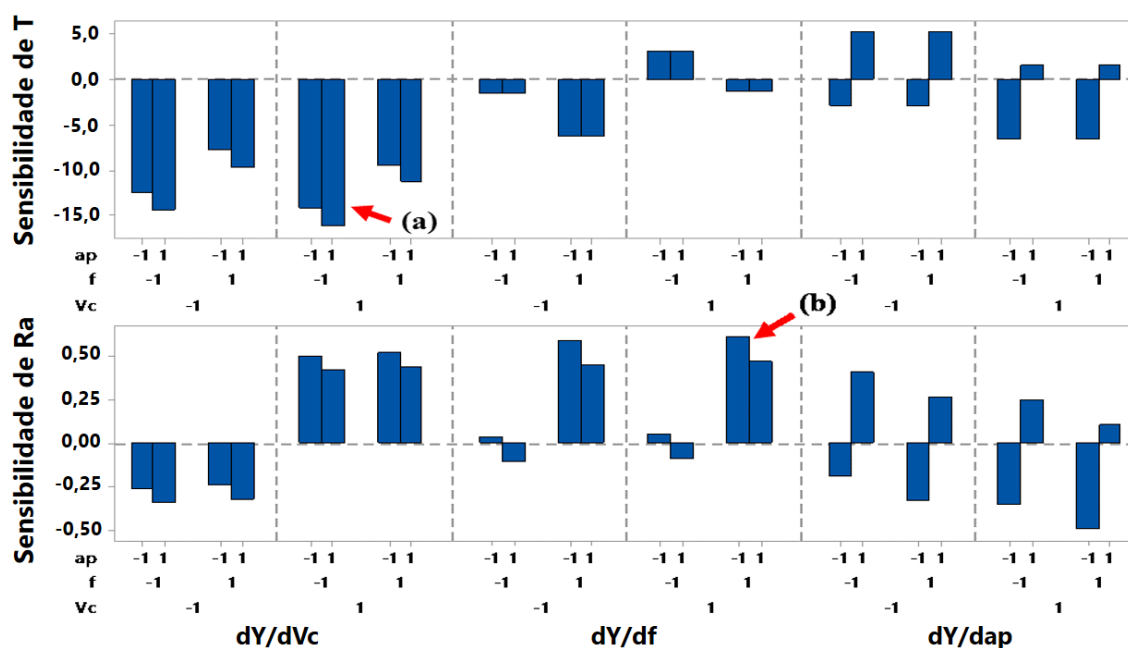


Figura 7.6 - Análise de sensibilidade para T e Ra . (a) Alteração máxima de T . (b) Alteração máxima de Ra .

Fonte: Autoria própria.

Essas modificações também podem ser tomadas em termos percentuais. Admitindo-se a diferença entre a maior e a menor observações da Tabela 7.2 como a faixa máxima para cada variável de resposta no espaço experimental, então, pode-se utilizar essa informação para normalizar a análise de sensibilidade da Figura 7.6. A partir dessa análise, pode-se inferir sobre o comportamento de ambas as respostas em unidades padronizadas (ou, em termos percentuais). Na Tabela 7.3, o maior e o menor valores de T são, respectivamente, 62,25 min e 23,50 min, o que fornece uma faixa de 38,75 min. Para Ra , o maior e o menor valores são, respectivamente, 1,25 e 0,31 μm , o que fornece uma faixa de 0,94 μm . Dividindo-se os valores extremos anteriormente mencionados pelas faixas de cada resposta, obtêm-se que, para T , existe uma mudança percentual de -49,03% (-16,19/38,75) para +13,32% (+ 5,16/38,75) e, para Ra , existe uma mudança percentual de -52,13% (-0,49/0,94) para +64,89% (+0,61/0,94). Esses resultados permitem concluir que, no espaço experimental considerado, Ra é mais sensível a mudanças nos parâmetros de controle, sendo, assim, uma resposta mais difícil de controlar.

7.1.5 Abordagem tradicional: Otimização bi-objetivo das variáveis de resposta originais

Uma vez que os modelos de superfície de resposta são conhecidos, a otimização do processo pode ser conduzida utilizando-se dos modelos como funções objetivo do problema de otimização. Antes desse passo, são necessários alguns cuidados, como a análise de convexidade. Para T , o modelo tem tanto autovalores positivos como negativos [2,1461; -2,0431; 0,3716], o que denota uma função em formato de sela. Para Ra , o modelo tem apenas autovalores positivos [0,2012; 0,1687; 0,1088], o que denota uma função convexa. Considerando a natureza do processo investigado, deseja-se obter uma máxima vida da ferramenta T e uma mínima rugosidade Ra para as peças. Como o modelo para T é uma sela, o ponto estacionário não será o ótimo individual, pois o sentido de maximização conduz a um máximo local, usualmente localizado na borda do arranjo experimental. Isso demonstra que o uso de uma restrição do espaço experimental é obrigatória para a otimização de T (DEL CASTILHO, 2007).

Por outro lado, como o modelo para Ra é convexo, o ponto estacionário será seu ótimo individual, pois o sentido é de minimização. A análise de convexidade também indica que o método WS não é apropriado para otimizar T e Ra concomitantemente, pois o problema multiobjetivo tem funções com convexidades distintas (DAS; DENNIS, 1997). Esse resultado motivou o uso do NBI com restrição do espaço experimental no presente trabalho. Utilizando-se do método NBI tradicional introduzido na Equação (4.13), as funções de interesse são, primeiramente, escaladas por uma matriz *pay-off* Φ , obtida a partir das otimizações individuais de $f_1(x)$ e $f_2(x)$, sujeitas a restrição do espaço experimental, tal que: $g_j(x) = \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \rho^2 \leq 0$ ou $g_j(x) = \mathbf{x}^T \mathbf{x} \leq \rho^2$. Essa restrição garante que as soluções ótimas caiam dentro do espaço do arranjo. Para conduzir as otimizações individuais, foi empregado o algoritmo GRG. Os resultados numéricos são mostrados na Equação (7.11):

$$\Phi = \begin{pmatrix} f_1^U & f_1^N \\ f_2^N & f_2^U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 62,845 & 46,006 \\ 0,590 & 0,207 \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

onde: N e U indicam as soluções de nadir e utopia, respectivamente.

Então, aplicando-se a Equação (4.11), as funções escalonadas são obtidas da seguinte forma:

$$\bar{f}_1(\mathbf{x}) = \left[\frac{f_1(\mathbf{x}) - f_1^U}{f_1^N - f_1^U} \right] = \left[\frac{f_1(\mathbf{x}) - 62,845}{-16,839} \right] \quad (7.12)$$

$$\bar{f}_2(\mathbf{x}) = \left[\frac{f_2(\mathbf{x}) - f_2^U}{f_2^N - f_2^U} \right] = \left[\frac{f_2(\mathbf{x}) - 0,207}{0,383} \right] \quad (7.13)$$

Com a aplicação do algoritmo GRG como uma subrotina do problema bi-objetivo via NBI formulado na Equação (4.13), as combinações ótimas de T e Ra são obtidas como uma função dos parâmetros de corte V_c , f e a_p . A Figura 7.7 mostra a fronteira de Pareto, contendo 21 soluções para o problema. A Figura 7.8 mostra a fronteira de Pareto para a abordagem tradicional dentro da região viável, formada pelos gráficos de contorno sobrepostos das respostas e o lado direito da restrição do espaço experimental $g_j(x) = \mathbf{x}^T \mathbf{x} \leq \rho^2$.

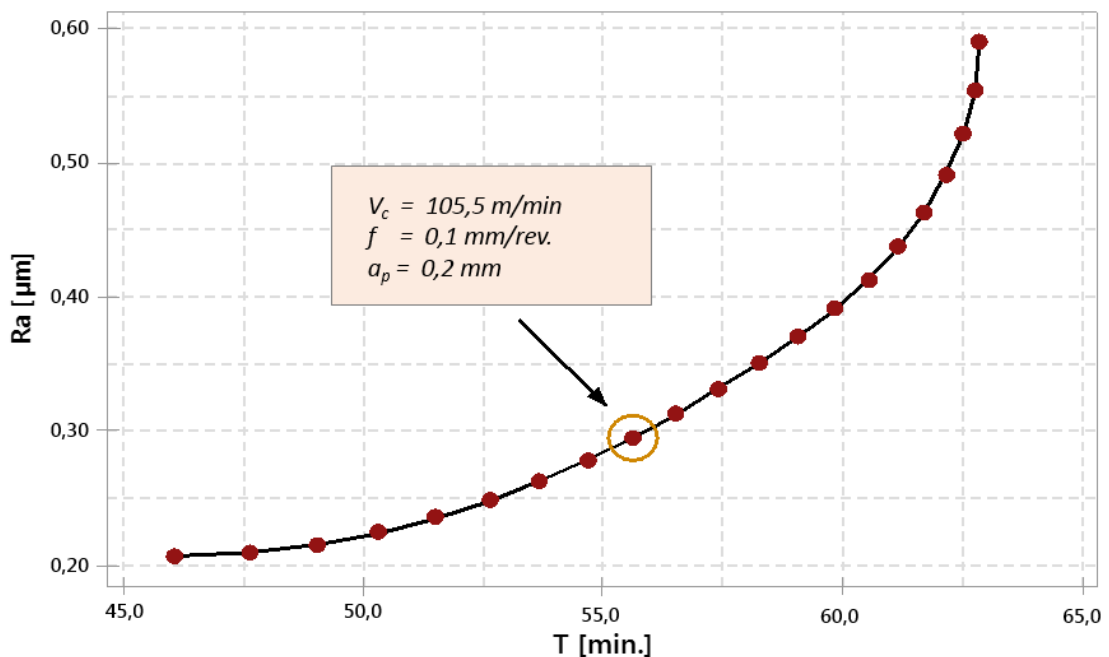


Figura 7.7 - Fronteira de Pareto para T e Ra

Fonte: Autoria própria.

Como pode ser visto na Figura 7.7 e na Figura 7.8, as respostas investigadas apresentam uma natureza conflitua, uma vez que um aumento em T (resultado desejável) leva a um aumento em Ra (resultado indesejável) e uma redução em Ra (resultado desejável) leva a um aumento em T (resultado indesejável). Apesar desse conflito, uma análise de correlação de

Pearson revelou que as respostas são linearmente independentes ($\rho_{T|Ra} = -0,252$; $p\text{-value} = 0,299$).

Tabela 7.4 - Soluções ótimas para o processo investigado

| No. | w_i | Parâmetros de Controle Codificados | | | Respostas | | | |
|----------|--------------|------------------------------------|---------------|---------------|----------------|------------------------|---------------|---------------|
| | | V_c | f | a_p | Otimizadas | | Calculadas | |
| | | | | | T [min.] | Ra [μm] | $Cpk(T)$ | $Cpk(Ra)$ |
| 1 | 0,000 | -0,231 | -0,928 | -0,117 | 46,0060 | 0,2070 | 0,0000 | 2,9086 |
| 2 | 0,050 | -0,343 | -0,935 | -0,142 | 47,5868 | 0,2093 | 0,3649 | 2,8018 |
| 3 | 0,100 | -0,444 | -0,946 | -0,167 | 49,0017 | 0,2155 | 0,6643 | 2,6480 |
| 4 | 0,150 | -0,536 | -0,960 | -0,190 | 50,2925 | 0,2244 | 0,9063 | 2,4647 |
| 5 | 0,200 | -0,620 | -0,976 | -0,214 | 51,4865 | 0,2355 | 1,0990 | 2,2662 |
| 6 | 0,250 | -0,700 | -0,993 | -0,236 | 52,6022 | 0,2484 | 1,2493 | 2,0624 |
| 7 | 0,300 | -0,774 | -1,011 | -0,258 | 53,6532 | 0,2628 | 1,3650 | 1,8618 |
| 8 | 0,350 | -0,845 | -1,030 | -0,279 | 54,6495 | 0,2785 | 1,4517 | 1,6680 |
| 9 | 0,400 | -0,912 | -1,050 | -0,301 | 55,5989 | 0,2952 | 1,5153 | 1,4847 |
| 10 | 0,450 | -0,976 | -1,070 | -0,321 | 56,5076 | 0,3128 | 1,5608 | 1,3134 |
| 11 | 0,500 | -1,036 | -1,091 | -0,342 | 57,3805 | 0,3312 | 1,5907 | 1,1536 |
| 12 | 0,550 | -1,095 | -1,112 | -0,364 | 58,2216 | 0,3504 | 1,6092 | 1,0062 |
| 13 | 0,600 | -1,151 | -1,133 | -0,384 | 59,0343 | 0,3702 | 1,6197 | 0,8710 |
| 14 | 0,650 | -1,215 | -1,104 | -0,367 | 59,8114 | 0,3908 | 1,6763 | 0,7708 |
| 15 | 0,700 | -1,282 | -1,040 | -0,320 | 60,5155 | 0,4131 | 1,7601 | 0,6839 |
| 16 | 0,750 | -1,346 | -0,974 | -0,262 | 61,1413 | 0,4371 | 1,8383 | 0,5915 |
| 17 | 0,800 | -1,405 | -0,904 | -0,192 | 61,6856 | 0,4630 | 1,9123 | 0,4932 |
| 18 | 0,850 | -1,460 | -0,828 | -0,112 | 62,1430 | 0,4909 | 1,9849 | 0,3880 |
| 19 | 0,900 | -1,508 | -0,745 | -0,018 | 62,5036 | 0,5210 | 2,0578 | 0,2738 |
| 20 | 0,950 | -1,549 | -0,650 | 0,084 | 62,7494 | 0,5537 | 2,1351 | 0,1469 |
| 21 | 1,000 | -1,582 | -0,536 | 0,193 | 62,8449 | 0,5898 | 2,2184 | 0,0000 |

Fonte: Autoria própria.

Neste trabalho, demonstra-se que o tomador de decisão deve optar por combinações que melhor favoreçam a realidade do processo investigado. Para ilustrar essa tomada de decisão, a solução 9 foi destacada na Figura 7.7 e na Tabela 7.4, mostrando que uma vida de ferramenta T de aproximadamente 55,6 min. e uma rugosidade média Ra de aproximadamente 0,295 μm podem ser obtidas simultaneamente com uma configuração ótima $V_c = 105,5$ m/min; $f = 0,1$ mm/rev. e $a_p = 0,2$ mm. Essa rugosidade é apropriada para operações de acabamento e é, usualmente, obtida com processos de retificação (JOUINI *et al.*, 2013; REVEL *et al.*, 2016).

Se o experimentador está interessado em usar o processo de torneamento sem fluido de corte como uma alternativa ao processo de retificação, a solução 9 fornece um bom resultado

para Ra (CTQ), ao mesmo tempo em que permite o prolongamento de T (CTP). O conjunto de combinações ótimas obtidas nesse estudo é apresentado na Tabela 7.4. Como pode ser visto nessa tabela, nenhuma solução apresenta razões de capacidade satisfatórias para ambas as respostas, considerando o valor aceitável para parâmetros críticos de novos processos com limite de especificação unilateral ($C_{pk} \geq 1,60$), sendo a solução 9 uma das soluções com melhor resultado global ($C_{pk} \cong 1,50$).

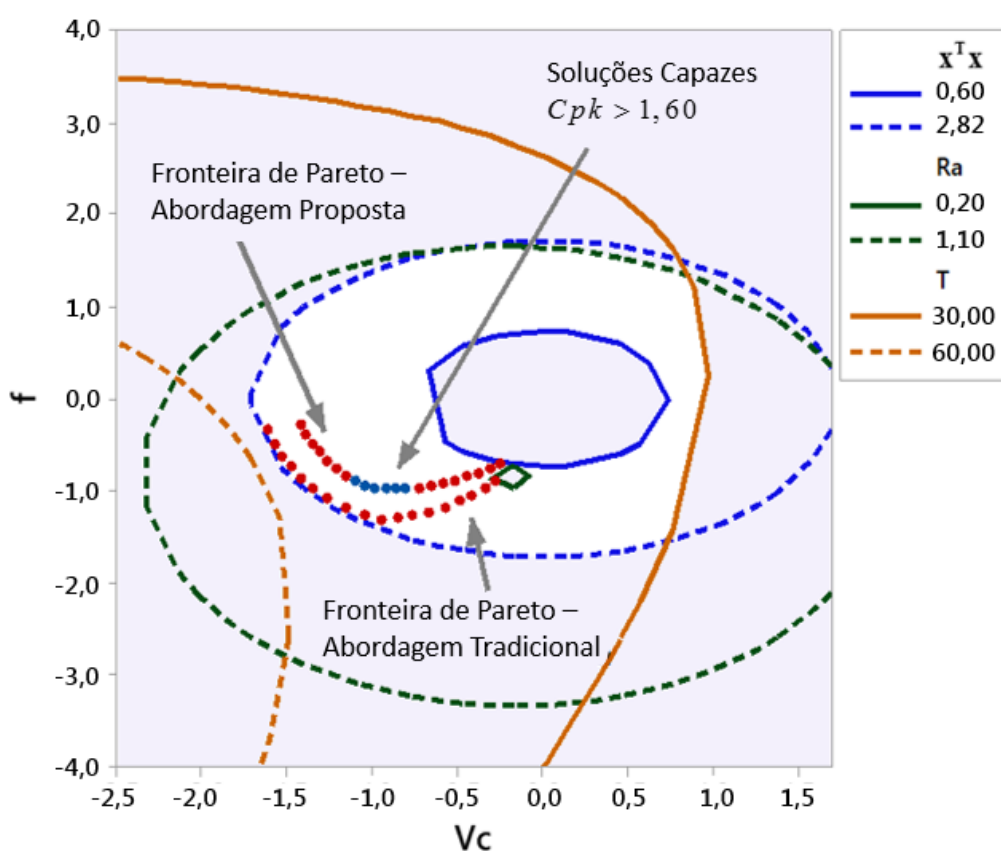


Figura 7.8 - Fronteiras de Pareto dentro da região viável para as abordagens tradicional e proposta

Fonte: Autoria própria.

A Tabela 7.5 mostra os intervalos de confiança para T e Ra com a solução ótima 9, calculados pela Equação (2.29), revelando que o intervalo de confiança para T é mais estreito que o intervalo de confiança para Ra . A Figura 7.9 e a Figura 7.10 apresentam simulações do processo para os *benchmarks* das respostas observadas experimentalmente (Tabela 7.2) e a solução ótima 9. A Tabela 7.2 mostra que, para T , o experimento 5 fornece o melhor valor

médio ($T = 62,50$ min.), e, para Ra , ambos os experimentos 11 e 15 forçaram o melhor valor médio ($Ra = 0,310$ μm); no entanto, o experimento 15 fornece um valor melhor para T ($T = 42,00$ min.), o que o torna um *benchmark* mais apropriado.

Tabela 7.5 - Intervalos de confiança para T e Ra na solução ótima 9

| Resposta | Limite Inferior | Média | Limite Superior |
|----------|-----------------|---------|-----------------|
| T | 51,5224 | 55,5989 | 59,9679 |
| Ra | 0,1688 | 0,2952 | 0,4335 |

Fonte: Autoria própria.

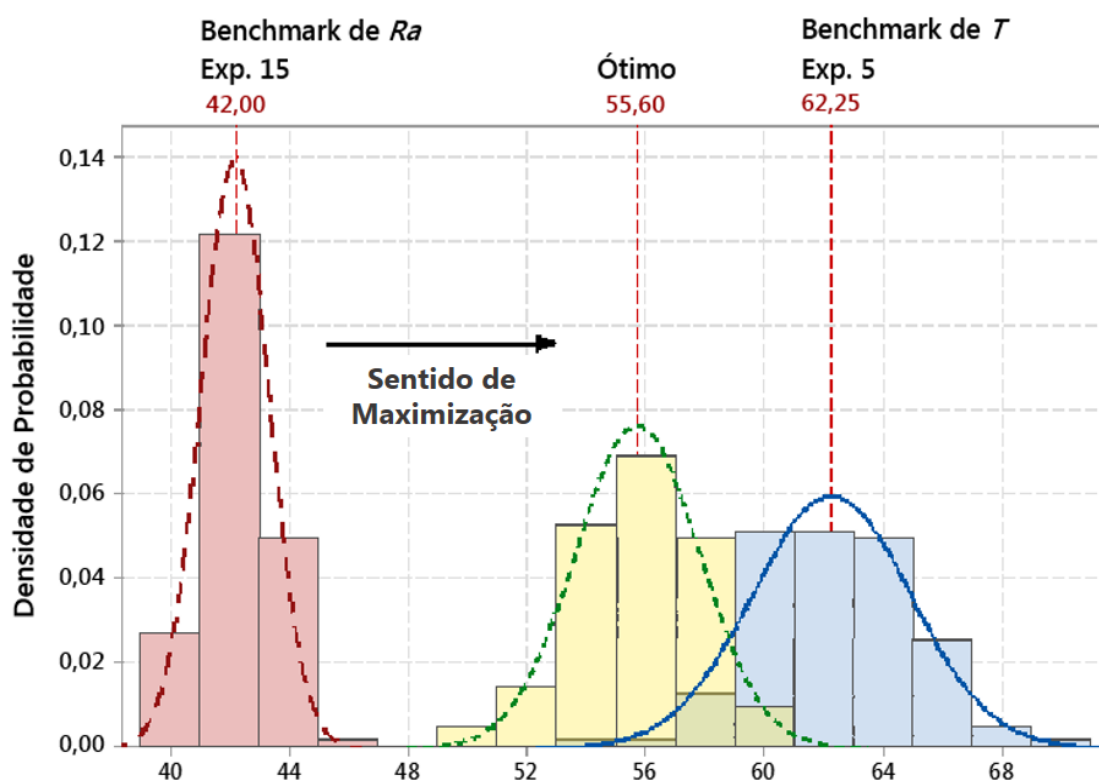


Figura 7.9 - Simulação do processo para T considerando benchmarks de Ra e T e uma solução ótima (média) conveniente

Fonte: Autoria própria.

Com base na Figura 7.9 e na Figura 7.10, demonstra-se que o procedimento de otimização tradicional é capaz de encontrar soluções médias apropriadas entre (Figura 7.9) ou, até mesmo, melhores que os *benchmarks* (Figura 7.10). No entanto, devido ao efeito da variabilidade, as distribuições de probabilidade podem não se diferenciar muito, conduzindo a perdas de

qualidade (Ra) ou de desempenho (T). Além disso, a distribuição de probabilidade de T difere mais das distribuições dos *benchmarks* do que a distribuição do ótimo de Ra . Isso demonstra que Ra é uma variável de resposta mais difícil de controlar, pois apresenta maior variabilidade, como também foi explicado na análise de sensibilidade da seção 7.1.4. Resultados similares foram encontrados por Rocha *et al.* (2017a) para o torneamento do aço endurecido ABNT H13 com ferramenta CC 6050 *wiper*.

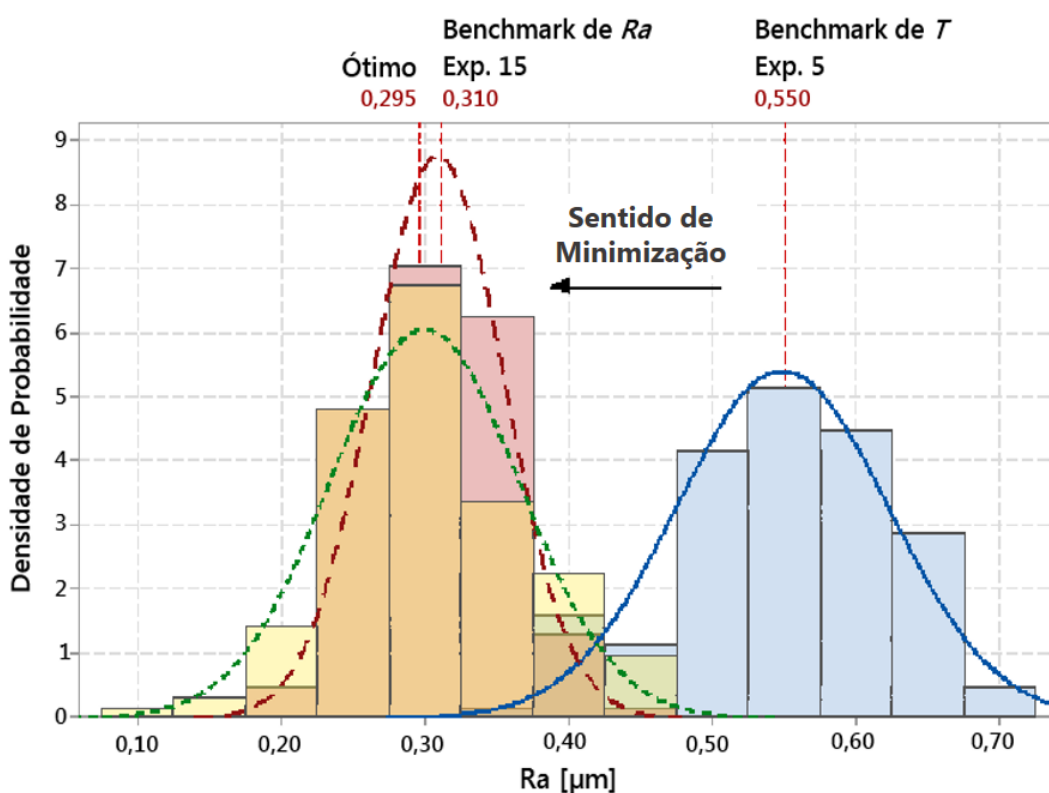


Figura 7.10 - Simulação do processo para Ra considerando benchmarks de Ra e T e uma solução ótima (média) conveniente

Fonte: Autoria própria.

Para lidar com os efeitos da variabilidade sobre as respostas estudadas, a seção 7.1.6 emprega a estratégia de otimização baseada nas razões de capacidade sobre o conjunto de dados apresentado na Tabela 7.2 da seção 7.1.2.

7.1.6 Abordagem proposta: Otimização bi-objetivo das razões de capacidade de previsão para as respostas originais

Nesta seção, a abordagem proposta é aplicada ao processo de torneamento do aço endurecido H13. Uma vez que se deseja o máximo de T e o mínimo de Ra , podem-se obter as razões de capacidade para T e Ra , aplicando-se as Equações (6.2) e (6.3).

Para T , tem-se:

$$\begin{aligned}
 \tilde{C}_{pk}^1(\mathbf{x}) &= \frac{E[Y_1(\mathbf{x})] - LIE}{3 \cdot \sqrt{\text{Var}[Y_1(\mathbf{x})|\mathbf{x}_0]}} \\
 &= \frac{[f_1(\mathbf{x}) - f_1^N]}{3 \cdot \sigma_{f_1(\mathbf{x})} \sqrt{[x_0^{(m)\text{T}} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} x_0^{(m)}]}} \\
 &= \frac{[f_1(\mathbf{x}) - 46,006]}{3 \cdot (3,055) \sqrt{[x_0^{(m)\text{T}} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} x_0^{(m)}]}}
 \end{aligned} \tag{7.14}$$

Para Ra , tem-se:

$$\begin{aligned}
 \tilde{C}_{pk}^2(\mathbf{x}) &= \frac{LSE - E[Y_2(\mathbf{x})]}{3 \cdot \sqrt{\text{Var}[Y_2(\mathbf{x})|\mathbf{x}_0]}} \\
 &= \frac{[f_2^N - f_2(\mathbf{x})]}{3 \cdot \sigma_{f_2(\mathbf{x})} \sqrt{[x_0^{(m)\text{T}} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} x_0^{(m)}]}} \\
 &= \frac{[0,590 - f_2(\mathbf{x})]}{3 \cdot (0,096) \sqrt{[x_0^{(m)\text{T}} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} x_0^{(m)}]}}
 \end{aligned} \tag{7.15}$$

Ao se realizarem as otimizações individuais dessas funções, como formulado na Equação (6.5), os pontos de Nadir e de Utopia foram obtidos, conforme exibido na Equação (7.17). Essa equação é a versão da matriz *pay-off* da Equação (6.6) para o caso bi-objetivo. Neste caso, porém, admite-se que o tomador de decisão está interessado apenas em soluções com

capacidades de previsão não-negativas, o que implica na adição de uma restrição de não-negatividade das razões de capacidade junto à Equação (6.5), de modo que:

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{x}} \zeta_{pk}^i(\mathbf{x}) \\ & \text{s.t.: } \mathbf{x}^T \mathbf{x} \leq \rho^2, \quad i = 1, 2 \\ & \begin{bmatrix} \zeta_{pk}^1(\mathbf{x}) \\ \zeta_{pk}^2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.16)$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \zeta_{pk}^{1 \ U} & \zeta_{pk}^{1 \ N} \\ \zeta_{pk}^{2 \ N} & \zeta_{pk}^{2 \ U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,423 & 0,000 \\ 0,542 & 3,035 \end{pmatrix} \quad (7.17)$$

Então, com a aplicação das Equações (6.7) e (6.8), obtêm-se as funções escalonadas, da seguinte forma:

$$\bar{\zeta}_{pk}^1(\mathbf{x}) = \frac{\zeta_{pk}^1(\mathbf{x}) - \zeta_{pk}^{1 \ U}}{\zeta_{pk}^{1 \ N} - \zeta_{pk}^{2 \ U}} = \frac{\zeta_{pk}^1(\mathbf{x}) - 2,423}{-2,423} \quad (7.18)$$

$$\bar{\zeta}_{pk}^2(\mathbf{x}) = \frac{\zeta_{pk}^2(\mathbf{x}) - \zeta_{pk}^{2 \ U}}{\zeta_{pk}^{2 \ N} - \zeta_{pk}^{2 \ U}} = \frac{\zeta_{pk}^2(\mathbf{x}) - 3,035}{2,493}$$

E o problema de otimização utilizando NBI pode ser formulado como previamente introduzido na Equação (6.17):

$$\begin{aligned} & \text{Min}_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}) = \bar{\zeta}_{pk}^1(\mathbf{x}) \\ & \text{s.t.: } \bar{\zeta}_{pk}^1(\mathbf{x}) - \bar{\zeta}_{pk}^2(\mathbf{x}) + 2w - 1 = 0 \\ & \quad \mathbf{x} \in \Omega \\ & \quad g_j(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \rho^2 \leq 0 \\ & \quad h_{j+1}(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \quad (7.19)$$

Para diferentes pesos w , obtêm-se as soluções ótimas dispostas na Tabela 7.6, utilizando o algoritmo GRG. A Figura 7.11 fornece a fronteira de Pareto para as razões $\zeta_{pk}(\mathbf{x})$ e a Figura 7.12 apresenta a fronteira de Pareto convertida para as variáveis originais. Em ambas as figuras, os *clusters* de capacidade foram indicados. Diferentemente do que foi observado na abordagem tradicional da seção 7.1.5, neste caso, foram obtidas várias soluções com capacidade aceitável ($\zeta_{pk}(\mathbf{x}) \geq 1.60$).

Tabela 7.6 – Soluções ótimas para o processo investigado¹

| No. | w | Parâmetros de controle codificados | | | Respostas | | | |
|-----------|--------------|------------------------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|----------------|---------------|
| | | | | | Otimizadas | | Calculadas | |
| | | Vc | f | ap | $Cpk(T)$ | $Cpk(Ra)$ | $T [min.]$ | $Ra[\mu m]$ |
| 1 | 0,000 | -0,237 | -0,756 | -0,069 | 0,0000 | 3,0355 | 45,8535 | 0,2048 |
| 2 | 0,050 | -0,303 | -0,747 | -0,078 | 0,2256 | 3,0182 | 46,7164 | 0,2047 |
| 3 | 0,100 | -0,367 | -0,736 | -0,084 | 0,4371 | 2,9865 | 47,5313 | 0,2064 |
| 4 | 0,150 | -0,427 | -0,724 | -0,090 | 0,6359 | 2,9417 | 48,3050 | 0,2096 |
| 5 | 0,200 | -0,486 | -0,712 | -0,094 | 0,8230 | 2,8848 | 49,0431 | 0,2141 |
| 6 | 0,250 | -0,543 | -0,699 | -0,097 | 0,9991 | 2,8167 | 49,7497 | 0,2199 |
| 7 | 0,300 | -0,597 | -0,685 | -0,099 | 1,1648 | 2,7379 | 50,4289 | 0,2268 |
| 8 | 0,350 | -0,651 | -0,671 | -0,099 | 1,3205 | 2,6488 | 51,0844 | 0,2348 |
| 9 | 0,400 | -0,704 | -0,657 | -0,099 | 1,4666 | 2,5497 | 51,7210 | 0,2438 |
| 10 | 0,450 | -0,756 | -0,642 | -0,096 | 1,6032 | 2,4410 | 52,3391 | 0,2539 |
| 11 | 0,500 | -0,807 | -0,627 | -0,093 | 1,7305 | 2,3225 | 52,9460 | 0,2649 |
| 12 | 0,550 | -0,858 | -0,611 | -0,086 | 1,8484 | 2,1945 | 53,5401 | 0,2770 |
| 13 | 0,600 | -0,909 | -0,595 | -0,080 | 1,9568 | 2,0567 | 54,1308 | 0,2903 |
| 14 | 0,650 | -0,961 | -0,579 | -0,071 | 2,0555 | 1,9089 | 54,7175 | 0,3048 |
| 15 | 0,700 | -1,014 | -0,562 | -0,059 | 2,1443 | 1,7509 | 55,3049 | 0,3206 |
| 16 | 0,750 | -1,067 | -0,544 | -0,044 | 2,2225 | 1,5821 | 55,8978 | 0,3381 |
| 17 | 0,800 | -1,123 | -0,526 | -0,026 | 2,2897 | 1,4019 | 56,5005 | 0,3574 |
| 18 | 0,850 | -1,180 | -0,506 | -0,003 | 2,3448 | 1,2092 | 57,1190 | 0,3791 |
| 19 | 0,900 | -1,241 | -0,486 | 0,026 | 2,3867 | 1,0030 | 57,7624 | 0,4035 |
| 20 | 0,950 | -1,306 | -0,464 | 0,061 | 2,4137 | 0,7815 | 58,4413 | 0,4316 |
| 21 | 1,000 | -1,376 | -0,440 | 0,107 | 2,4234 | 0,5421 | 59,1719 | 0,4645 |

¹ Soluções capazes para ambas as respostas foram destacadas em negrito.

Fonte: Autoria própria.

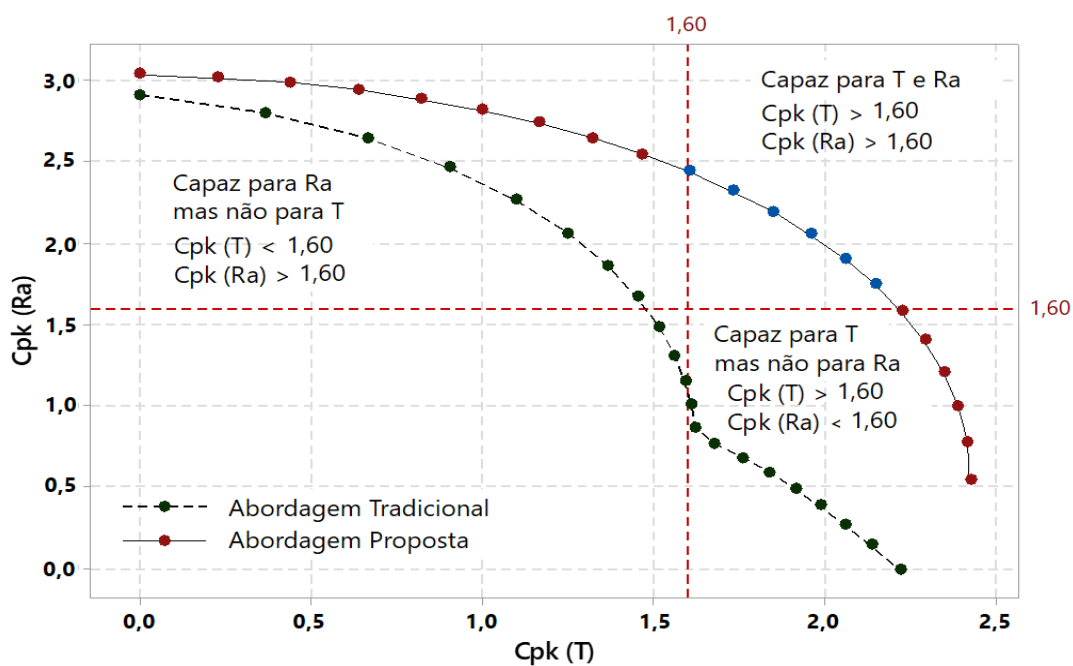


Figura 7.11 - Fronteira de Pareto para Cpk (T) e Cpk (Ra) com clusters de capacidade para as soluções ótimas¹

¹Os pontos azuis indicam que a abordagem proposta pode encontrar soluções capazes para ambas as respostas.

Fonte: Autoria própria.

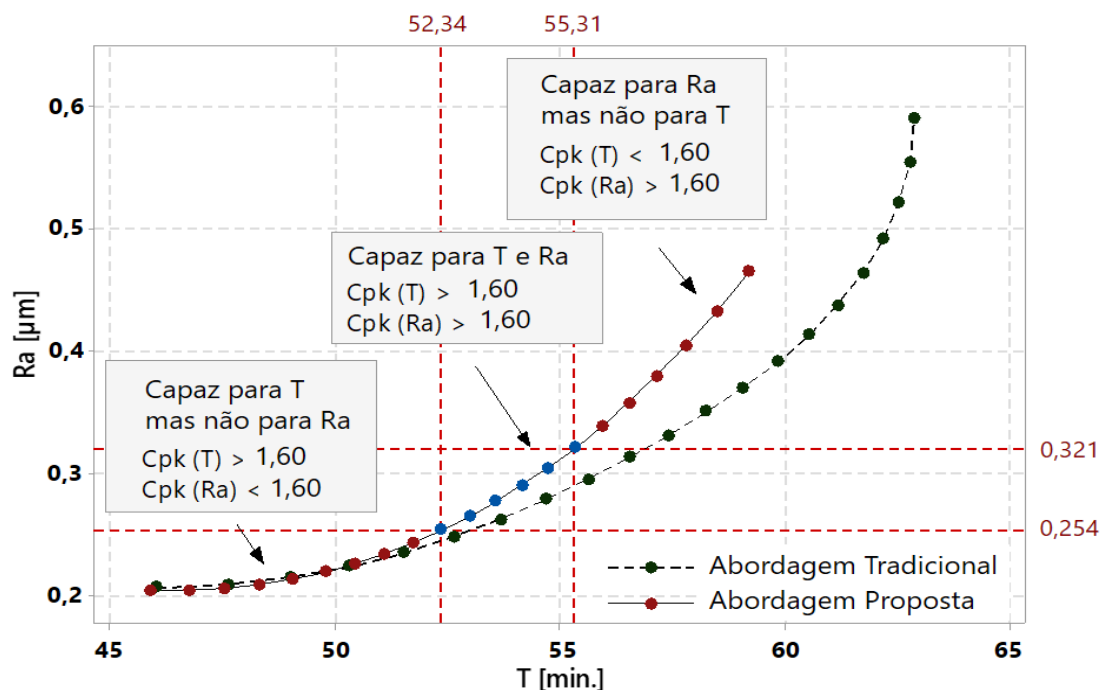


Figura 7.12 - Fronteira de Pareto para T e Ra com clusters de capacidade para as soluções ótimas¹

¹Os pontos azuis indicam que a abordagem proposta pode encontrar soluções capazes para ambas as respostas.

Fonte: Autoria própria.

Resultados similares também podem ser encontrados com a aplicação de outros métodos numéricos introduzidos na seção 4.2. Além disso, um método comparável ao NBI, denominado Restrição Normal Normalizada (*Normalized Normal Constraint – NNC*), que tornou-se bastante popular para encontrar fronteiras de Pareto uniformemente distribuídas, também pode ser usado. Em essência, o NNC combina os fundamentos originais do NBI com o método ε -*constraint*, empregando restrições de inequações para reduzir, iterativamente, o espaço de solução da(s) função(ões) objetivo e, com isso, encontrar os pontos de ótimo. Explicações detalhadas sobre o método NNC podem ser encontradas em Messac *et al.* (2003) e Logist *et al.* (2010).

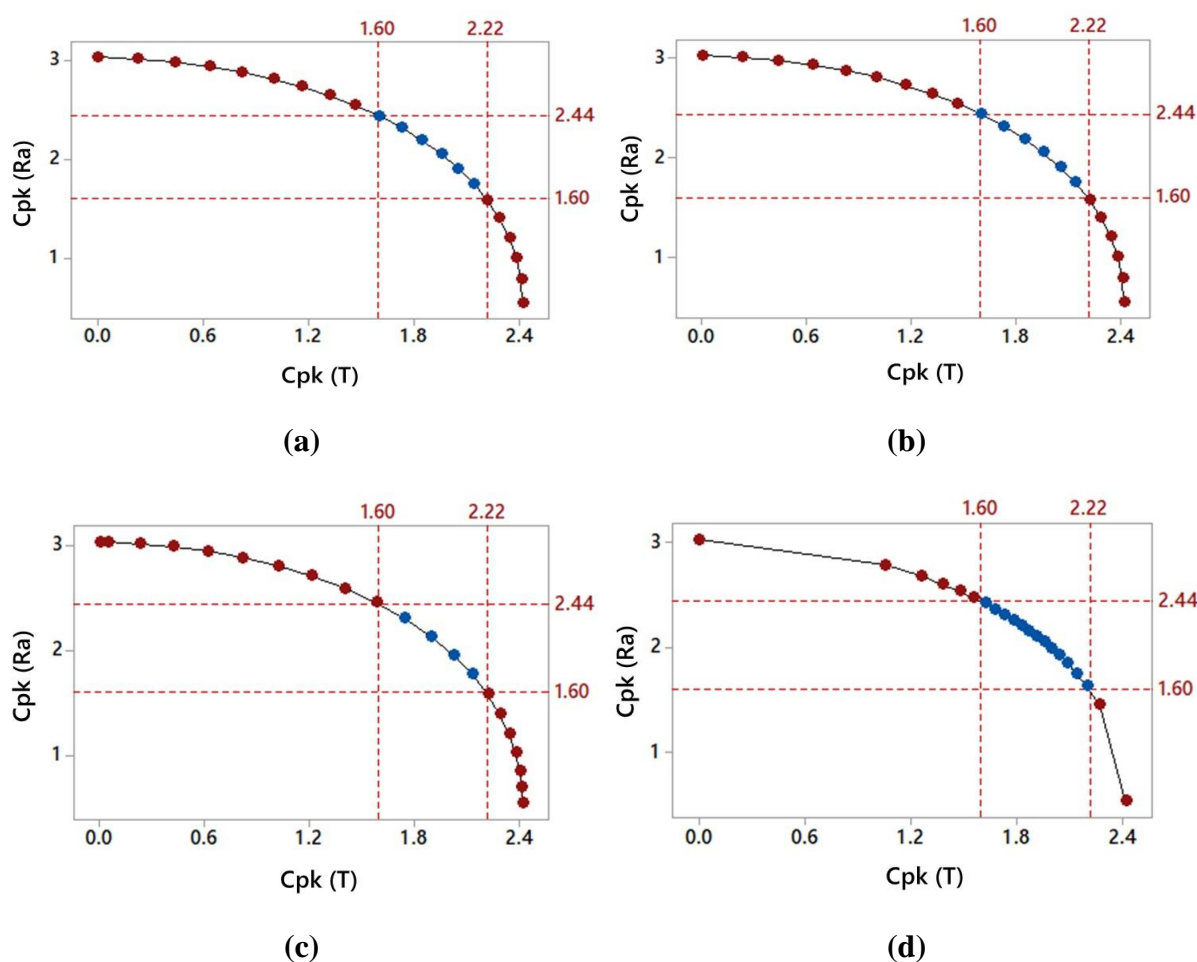


Figura 7.13 - Fronteiras Pareto para $Cpk(T)$ e $Cpk(Ra)$ obtidas com diferentes métodos multiobjetivos. (a) NBI. (b) NNC. (c) WS. (d) GCM.¹

¹Os pontos azuis indicam soluções capazes para ambas as variáveis T e Ra .

Fonte: Autoria própria.

Como pode ser visto na Figura 7.13, os métodos NBI (Figura 7.13a) e NNC fornecem fronteiras de Pareto idênticas, o que é esperado, considerando a proximidade entre seus fundamentos matemáticos (MESSAC *et al.*, 2003; LOGIST *et al.*, 2010). Além disso, esses foram os únicos a oferecerem soluções uniformemente distribuídas (conhecida como uma de suas principais vantagens) com seis soluções capazes.

Aplicando-se a Equação (4.5), o método WS concentrou algumas soluções próximas aos pontos de ancoragem e forneceu quatro soluções capazes (Figura 7.13c). Finalmente, ao aplicar a Equação (4.7), o GCM concentrou quase todas as soluções na região central da fronteira (Figura 7.13d); embora isso possa ser visto como um resultado satisfatório, dada a ideia de encontrar soluções capazes para ambas as respostas, essas soluções podem ser indistinguíveis na prática, por causa do efeito da variabilidade. Esse problema é discutido nos parágrafos seguintes.

Admitindo-se, novamente, que o experimentador está interessado em usar o processo de torneamento sem fluido de corte como uma alternativa ao processo de retificação, a solução 14 foi selecionada como uma condição de corte apropriada na Tabela 7.6 porque fornece uma rugosidade Ra próxima de $0,30 \mu\text{m}$ e uma vida T de, aproximadamente, 55 min. (valores médios próximos daqueles obtidos com a solução 9 na Tabela 7.4. A Tabela 7.7 apresenta o intervalo de confiança para essa solução, conforme a Equação (2.29). Como pode ser visto na tabela, para ambas as variáveis de resposta, a abordagem proposta estreitou o intervalo de confiança, mas revelou melhor resultado para T .

Tabela 7.7 – Intervalos de confiança para T e Ra na solução ótima 14

| Resposta | Limite Inferior | Média | Limite Superior |
|----------|-----------------|---------|-----------------|
| T | 51,8108 | 54,7175 | 58,5384 |
| Ra | 0,2176 | 0,3048 | 0,4285 |

Fonte: Autoria própria.

Como anteriormente mostrado na Figura 7.8, com a abordagem proposta, a fronteira é deslocada para uma região mais próxima ao centro do arranjo, onde a variância de previsão é menor. Por meio desse processo, as soluções médias de Ra são mais favorecidas, uma vez que Ra é uma função convexa e apresenta ponto de mínimo mais próximo do centro do arranjo (notem-se as linhas verde e azul na Figura 7.8). Por outro lado, as soluções médias de T tornam-se piores, uma vez que T é uma função em formato de sela e apresenta máximo local próximo às bordas do arranjo (notem-se as linhas laranja e azul na Figura 7.8).

Apesar disso, com a estratégia proposta, o tomador de decisão pode escolher perder um pouco em valores médios e ganhar em capacidade de previsão, beneficiando, assim, a produção com maiores níveis de precisão e menores taxas de não-conformidades e ineficiências. A Figura 7.14 apresenta uma simulação para a solução selecionada usando a abordagem tradicional (seção 7.1.5), bem como a estratégia proposta. Com a solução escolhida, perde-se mais no valor esperado de T , mas para ambas as respostas, há uma redução de variabilidade, como proposto inicialmente.

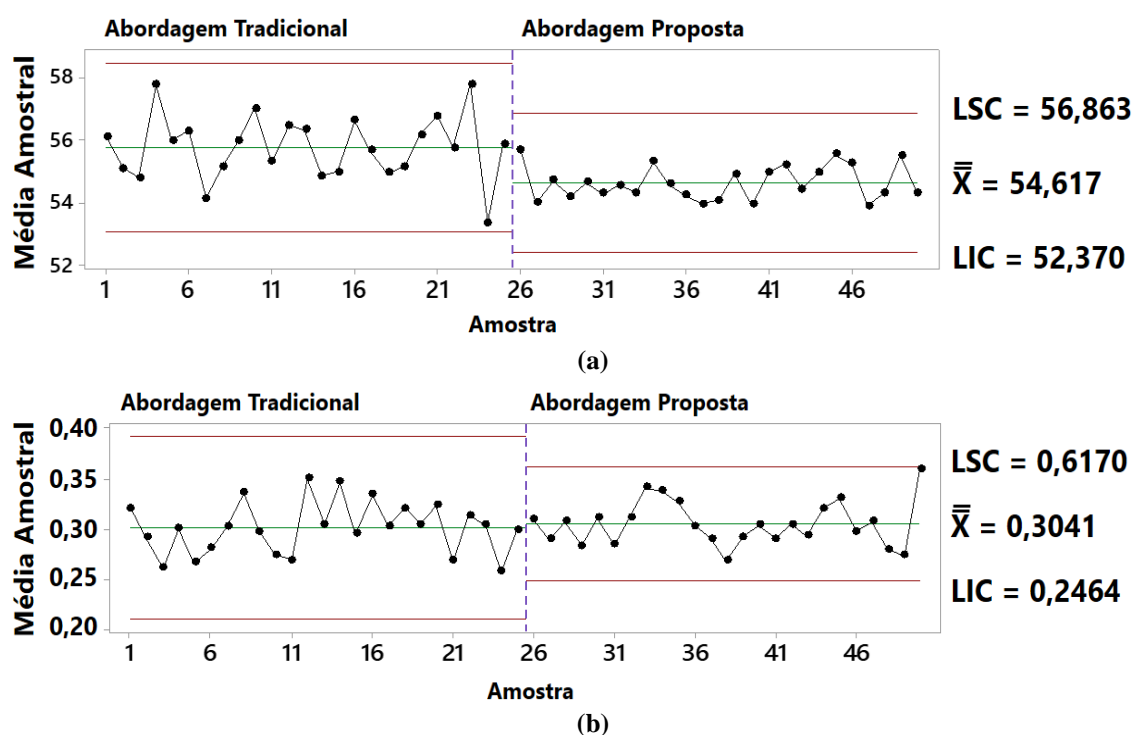


Figura 7.14 - Comparação entre os resultados simulados obtidos com as abordagens tradicional e proposta. (a) Resultados simulados para T . (b) Resultados simulados para Ra .

Fonte: Autoria própria.

7.1.7 Otimização bi-objetivo dos Erros Quadráticos Médios modificados

Nesta seção, uma abordagem comparável àquela proposta para razões modificadas de capacidade de previsão é aplicada ao processo de torneamento do aço endurecido H13. Essa abordagem foi desenvolvida na seção 6.3 e emprega modelos EQM modificados. Aplicando-se a Equação (4.14), assim, podem-se construir expressões para T e Ra .

Para T , tem-se:

$$\begin{aligned}
EQM_1 &= [Y_1(\mathbf{x}) - T_1]^2 + Var[Y_1(\mathbf{x})|\mathbf{x}_0] \\
&= [Y_1(\mathbf{x}) - T_1]^2 + \sigma_{f_1(\mathbf{x})}^2 \left[x_0^{(m)\top} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} x_0^{(m)} \right] \\
&= [Y_1(\mathbf{x}) - 62,845]^2 + (3,055)^2 \left[x_0^{(m)\top} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} x_0^{(m)} \right]
\end{aligned} \tag{7.20}$$

Para Ra , tem-se:

$$\begin{aligned}
EQM_2 &= [Y_2(\mathbf{x}) - T_2]^2 + Var[Y_2(\mathbf{x})|\mathbf{x}_0] \\
&= [Y_2(\mathbf{x}) - T_2]^2 + \sigma_{f_2(\mathbf{x})}^2 \left[x_0^{(m)\top} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} x_0^{(m)} \right] \\
&= [Y_2(\mathbf{x}) - 0,207]^2 + (0,096)^2 \left[x_0^{(m)\top} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} x_0^{(m)} \right]
\end{aligned} \tag{7.21}$$

Ao se realizarem as otimizações individuais dessas funções, os pontos de Nadir e de Utopia foram obtidos, conforme exibido na *pay-off* da Equação (7.22).

$$\mathbf{EQM} = \begin{pmatrix} EQM_1^U & EQM_1^N \\ EQM_2^N & EQM_2^U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,884 & 299,250 \\ 0,160 & 0,000 \end{pmatrix} \tag{7.22}$$

Aplicando-se o método NBI-GRG para a otimização bi-objetivo de $EQM(T)$ e $EQM(Ra)$, foram obtidas as soluções ótimas apresentadas na Tabela 7.8. Neste caso, como as funções objetivos, mostradas nas Equações (7.20) e (7.21), envolvem polinômios de quarta ordem, recomenda-se o uso dos pontos centrais como solução inicial do problema. A fronteira de Pareto para os EQMs é apresentada na Figura 7.15 em conjunto com a fronteira convertida de Cpk.

Como pode ser observado a partir de ambas as Tabela 7.8 e Figura 7.15, a abordagem baseada no conceito original dos EQMs é apropriada para identificar soluções capazes para ambas as variáveis de resposta. Contudo, possui algumas limitações, que a abordagem desenvolvida nesta tese vem superar.

Tabela 7.8 – Soluções ótimas para o processo investigado via EQMs modificados¹

| No. | w | Parâmetros de controle codificados | | | Respostas | | | | | |
|----------|--------------|------------------------------------|----------------|---------------|---------------|-----------------------|---------------|--------------|--------------|--------------|
| | | Vc [m/min.] | f [mm/rev.] | ap [mm] | Otimizadas | | Calculadas | | | |
| | | | | | EQM (T) | EQM (Ra) ² | T [min.] | Ra[μ m] | Cpk (T) | Cpk (Ra) |
| 1 | 0,000 | -0,228 | -0,897 | -0,107 | 299,250 | 0,018 | 45,961 | 0,207 | -0,011 | 2,970 |
| 2 | 0,050 | -0,340 | -0,900 | -0,134 | 249,709 | 0,025 | 47,533 | 0,209 | 0,368 | 2,915 |
| 3 | 0,100 | -0,446 | -0,868 | -0,057 | 210,480 | 0,052 | 48,899 | 0,217 | 0,695 | 2,851 |
| 4 | 0,150 | -0,540 | -0,854 | -0,085 | 176,468 | 0,101 | 50,182 | 0,226 | 0,989 | 2,742 |
| 5 | 0,200 | -0,628 | -0,840 | -0,112 | 147,913 | 0,187 | 51,360 | 0,237 | 1,245 | 2,608 |
| 6 | 0,250 | -0,701 | -0,942 | -0,231 | 122,254 | 0,303 | 52,565 | 0,248 | 1,405 | 2,326 |
| 7 | 0,300 | -0,777 | -0,957 | -0,255 | 101,337 | 0,486 | 53,625 | 0,263 | 1,561 | 2,131 |
| 8 | 0,350 | -0,849 | -0,973 | -0,277 | 83,354 | 0,733 | 54,631 | 0,279 | 1,684 | 1,932 |
| 9 | 0,400 | -0,917 | -0,989 | -0,301 | 67,882 | 1,054 | 55,590 | 0,296 | 1,776 | 1,735 |
| 10 | 0,450 | -0,982 | -1,007 | -0,325 | 54,588 | 1,455 | 56,509 | 0,313 | 1,843 | 1,542 |
| 11 | 0,500 | -1,045 | -1,024 | -0,349 | 43,204 | 1,946 | 57,391 | 0,332 | 1,890 | 1,360 |
| 12 | 0,550 | -1,104 | -1,044 | -0,373 | 33,512 | 2,532 | 58,244 | 0,352 | 1,918 | 1,187 |
| 13 | 0,600 | -1,162 | -1,062 | -0,397 | 25,331 | 3,219 | 59,066 | 0,372 | 1,935 | 1,027 |
| 14 | 0,650 | -1,217 | -1,082 | -0,421 | 18,510 | 4,013 | 59,864 | 0,393 | 1,940 | 0,878 |
| 15 | 0,700 | -1,286 | -1,015 | -0,378 | 13,111 | 4,948 | 60,571 | 0,416 | 2,039 | 0,776 |
| 16 | 0,750 | -1,353 | -0,946 | -0,323 | 9,096 | 6,071 | 61,198 | 0,440 | 2,127 | 0,665 |
| 17 | 0,800 | -1,415 | -0,872 | -0,254 | 6,201 | 7,414 | 61,742 | 0,467 | 2,203 | 0,546 |
| 18 | 0,850 | -1,473 | -0,794 | -0,171 | 4,199 | 9,013 | 62,194 | 0,496 | 2,266 | 0,418 |
| 19 | 0,900 | -1,524 | -0,708 | -0,074 | 2,896 | 10,920 | 62,544 | 0,527 | 2,315 | 0,279 |
| 20 | 0,950 | -1,566 | -0,611 | 0,037 | 2,146 | 13,200 | 62,770 | 0,561 | 2,347 | 0,128 |
| 21 | 1,000 | -1,600 | -0,495 | 0,157 | 1,884 | 15,980 | 62,828 | 0,598 | 2,355 | -0,039 |

¹ Soluções capazes para ambas as respostas foram destacadas em negrito.

² Valores multiplicados por 10².

Fonte: Autoria própria.

Conforme pontuado na seção 7.1.6, admitiu-se que o tomador de decisão estaria interessado apenas em soluções com capacidade não-negativa. Desse modo, adicionalmente à Equação (6.5), foi incluída uma restrição de não-negatividade para os Cpk's na Equação (7.16). Isso, no entanto, não foi possível com a abordagem via EQMs modificados, uma vez que não há uma escala padronizada para os EQMs e, portanto, os seus limites máximos aceitáveis são, à priori, desconhecidos. Além disso, ainda que haja associação entre a escala EQM e a escala Cpk (o que, de fato, ocorre; notem-se as soluções ótimas com capacidades de previsão satisfatórias na Tabela 7.8), tal associação será sempre variável e dependente das grandezas físicas investigadas.

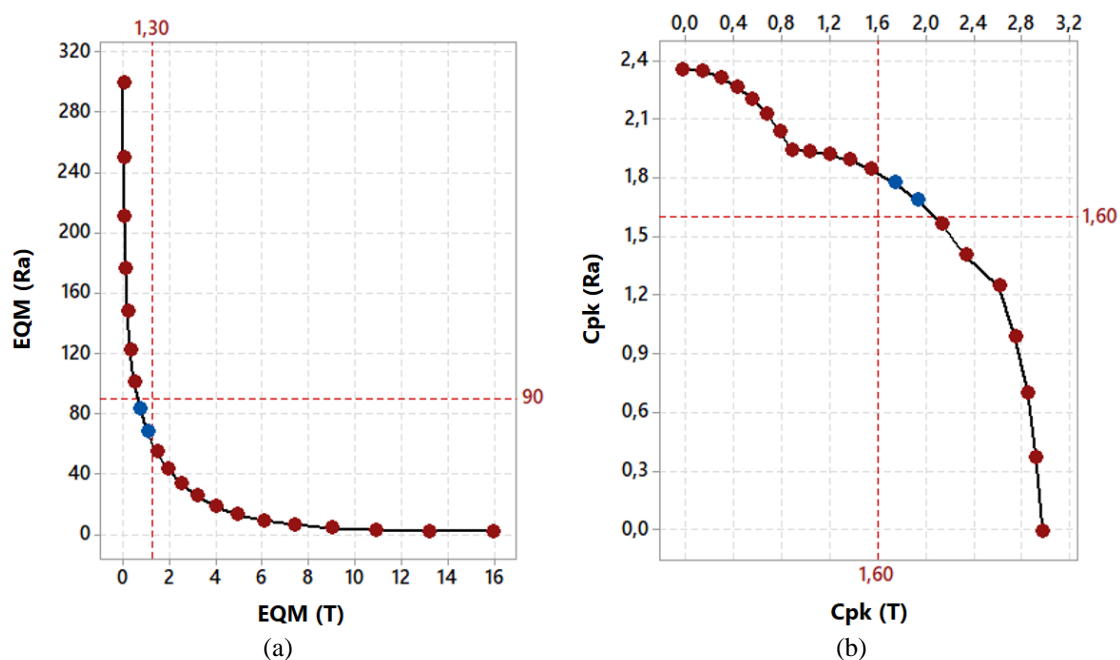


Figura 7.15 - Froteiras de Pareto para (a) $EQM(T)$ e $EQM(Ra)$ e (b) $Cpk(T)$ e $Cpk(Ra)$ convertidos

Fonte: Autoria própria.

Nesse aspecto, há vantagem da abordagem via Cpk's, uma vez que a interpretação das razões de capacidade é direta e generalizável para qualquer processo investigado. Portanto, a adição de restrições de não-negatividade dos Cpk's ou de outras restrições de capacidade é possível independentemente do conhecimento das variáveis do processo e de suas escalas. Além disso, após a otimização, há significado comparativo entre as razões de capacidade de cada variável, o que é mais difícil com os EQMs.

7.1.8 Ganhos potenciais em capacidade de previsão via métricas aglutinadoras de variância

Como discutido na seção 6.3.2, eventuais vantagens de métricas aglutinadoras de variância serão melhor observadas nos casos onde as propriedades dos arranjos experimentais encontram-se corrompidas, especialmente pela alteração da distância axial. Evidências disso foram apresentadas na seção 2.2.4, ao introduzir os VDGs. Assim, nesta seção, em conjunto com o CCD rotacionável, um CCD de face centrada foi construído usando os dados experimentais originais dispostos na Tabela 7.2, à exceção dos pontos axiais, que foram estimados usando valores simulados dentro dos intervalos de confiança dos modelos quadráticos completos obtidos para T , na Equação (7.3), e para Ra , na Equação (7.4). Os pontos

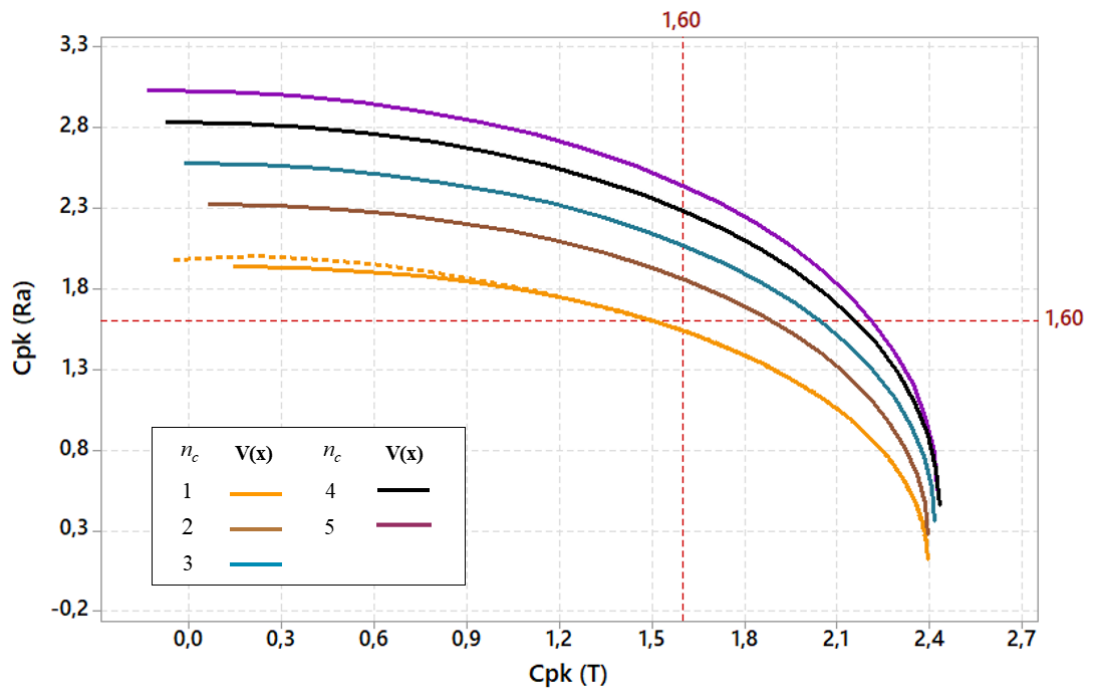
axiais desse novo arranjo, bem como as respostas obtidas encontram-se dispostos na Tabela 7.9.

Tabela 7.9 - Pontos axiais em um CCD de face centrada e respostas obtidas

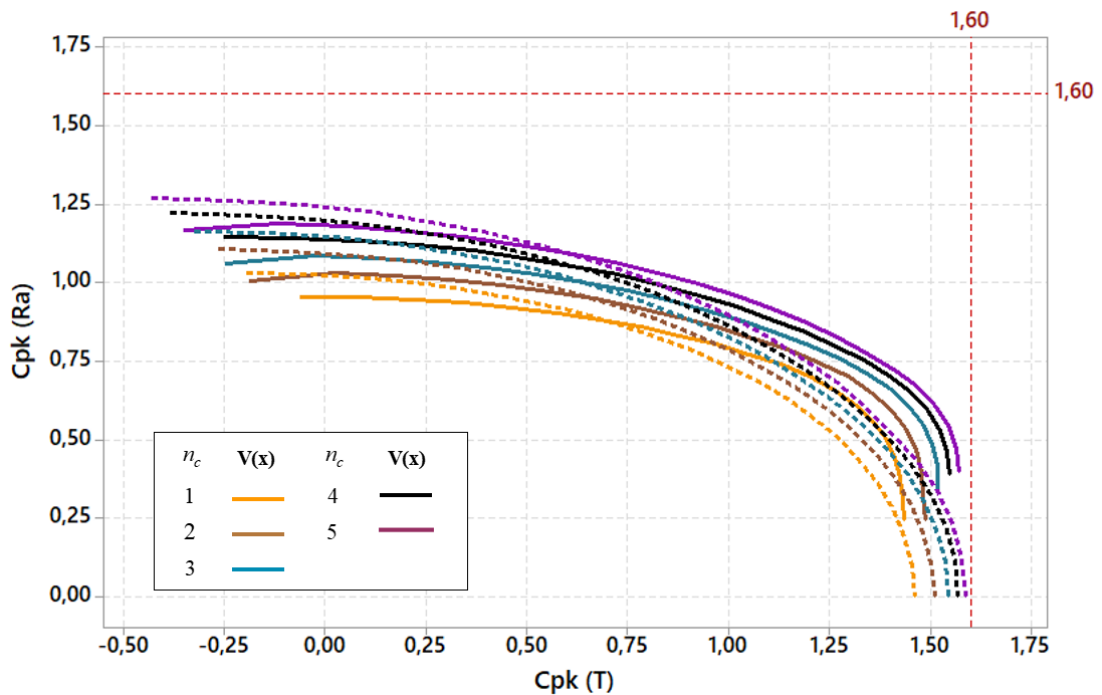
| Exp. No. | Parâmetros de Controle | | | | | | Respostas | |
|----------|------------------------|---------|---------------|---------|------------|---------|-----------|-----------|
| | V_c [m/min.] | | f [mm/rev.] | | a_p [mm] | | CTP | CTQ |
| | Cod. | Descod. | Cod. | Descod. | Cod. | Descod. | Maximizar | Minimizar |
| 9 | -1,000 | 100,000 | 0,000 | 0,163 | 0,000 | 0,240 | 52,895 | 0,448 |
| 10 | 1,000 | 225,000 | 0,000 | 0,163 | 0,000 | 0,240 | 28,808 | 0,599 |
| 11 | 0,000 | 162,500 | -1,000 | 0,100 | 0,000 | 0,240 | 43,175 | 0,196 |
| 12 | 0,000 | 162,500 | 1,000 | 0,225 | 0,000 | 0,240 | 40,598 | 0,697 |
| 13 | 0,000 | 162,500 | 0,000 | 0,163 | -1,000 | 0,150 | 44,236 | 0,534 |
| 14 | 0,000 | 162,500 | 0,000 | 0,163 | 1,000 | 0,330 | 42,290 | 0,434 |

Fonte: Autoria própria.

Retomando-se a Equação (6.38), as razões modificadas de capacidade de previsão podem ser construídas usando as métricas aglutinadoras apresentadas no Quadro 2.1. Em teoria, a variância integrada de previsão pode ser entendida como a métrica mais apropriada, uma vez que considera as distorções causadas pela região investigada sobre a função de variância de previsão original proposta por Box e Hunter (1957). Desse modo, as Equações (7.32) e (7.33) expressam, primeiramente, as razões de capacidade baseadas na variância integrada de previsão para T e Ra , respectivamente. Note-se que, por princípio teórico, a transformação proposta na Equação (2.38) não foi adotada, a fim de tornar a métrica aglutinadora uma medida direta de variância (ANDERSON-COOK *et al.*, 2009; BORROR *et al.*, 2002).



(a) CCD rotacionável



(b) CCD de face centrada

Figura 7.16 - Fronteiras de Pareto obtidas para $Cpk(T)$ e $Cpk(Ra)$ usando a métrica de variância de previsão $Var[\hat{y}(\mathbf{x})]$ (linhas contínuas) e a variância média integrada ν_{V_ρ} (linhas pontilhadas) com diferentes quantidades de pontos centrais.

Fonte: Autoria própria.

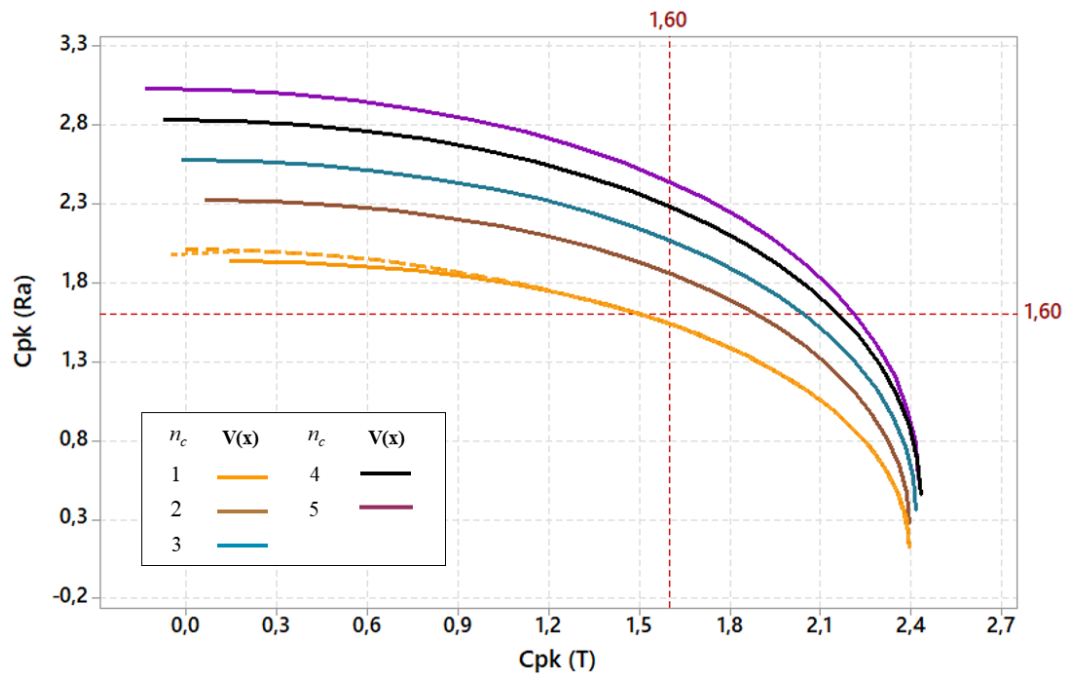
A Figura 7.16 fornece as fronteiras de Pareto baseadas na métrica de variância de previsão $Var[\hat{y}(\mathbf{x})]$ e na variância integrada IV_ρ para diferentes quantidades de pontos centrais no CCD rotacionável (Figura 7.16a) e no CCD de face centrada (Figura 7.16b).

$$\zeta_{pk}^1(\mathbf{x}) = \frac{[f_1(\mathbf{x}) - 46,006]}{3 \cdot (3,055) \sqrt{\Omega \int_R [\mathbf{x}^{(m)\top} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}^{(m)}] d\mathbf{x}}} \quad (7.23)$$

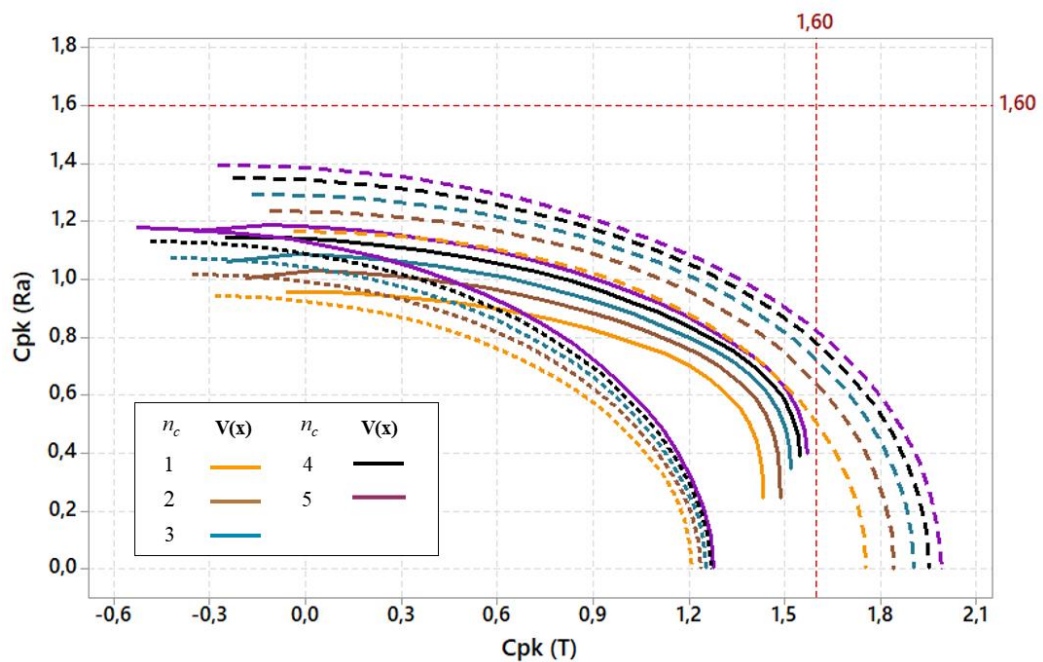
$$\zeta_{pk}^2(\mathbf{x}) = \frac{[0,590 - f_2(\mathbf{x})]}{3 \cdot (0,096) \sqrt{\Omega \int_R [\mathbf{x}^{(m)\top} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}^{(m)}] d\mathbf{x}}} \quad (7.24)$$

Como pode ser visto na Figura 7.16a, para o CCD rotacionável, não há diferença entre o uso da variância de previsão $Var[\hat{y}(\mathbf{x})]$ e da variância integrada IV_ρ , à exceção do caso onde um único ponto central é empregado. Nesse caso, como mostrado na seção 2.2, como não há réplica no centro do arranjo, a previsibilidade é significativamente prejudicada nessa região, mas suavizada pela medida integrada; ainda assim, a diferença entre as fronteiras de Pareto contínua e pontilhada é muito pequena para justificar alguma vantagem.

Por meio da Figura 7.16b, porém, nota-se que a métrica de variância de previsão $Var[\hat{y}(\mathbf{x})]$ consegue identificar soluções mais capazes que a variância integrada IV_ρ , qualquer que seja a quantidade de pontos centrais. Diferentemente do CCD rotacionável (Figura 7.16a), no CCD de face centrada (Figura 7.16b), há nítida diferença entre as fronteiras geradas por $Var[\hat{y}(\mathbf{x})]$ (linhas contínuas) e aquelas geradas por IV_ρ (linhas pontilhadas). No caso da Figura 7.16b, com a medida IV_ρ , encontram-se fronteiras mais uniformemente distribuídas em relação à capacidade das duas variáveis de resposta. Isso pode ser justificado especialmente pelo efeito alisador da variância média sobre a função de variância de previsão original $Var[\hat{y}(\mathbf{x})]$.



(a) CCD rotacionável



(b) CCD de face centrada

Figura 7.17 - Fronteiras de Pareto obtidas para $Cpk (T)$ e $Cpk (Ra)$ usando a métrica de variância de previsão $Var[\hat{y}(\mathbf{x})]$ (linhas contínuas), a variância mínima v_{MIN_p} (linhas tracejadas) e a variância máxima v_{MAX_p} (linhas pontilhadas) com diferentes quantidades de pontos centrais.

Fonte: Autoria própria.

É interessante observar que as fronteiras da Figura 7.16 se diferenciam mais entre as soluções que atribuem pesos maiores à razão de capacidade $Cpk(Ra)$. Isso reforça o que foi identificado na análise de sensibilidade da seção 7.1.4 e discutido nas seções 7.1.5 e 7.1.6. Como T apresenta um modelo em formato de sela, cujos máximos restritos encontram-se nas bordas do arranjo experimental, essa variável torna-se menos sensível a alterações na quantidade de pontos centrais. A rugosidade Ra , ao contrário, encontra-se mais centralizada (retome-se a Figura 7.8); portanto, reduções no número de pontos centrais levam a maiores prejuízos na capacidade de previsão $Cpk(Ra)$, diferenciando mais as fronteiras.

A Figura 7.17, por sua vez, apresenta as fronteiras obtidas com as medidas de variâncias mínima v_{MIN_p} , máxima v_{MAX_p} e de previsão $Var[\hat{y}(\mathbf{x})]$. O conjunto de Equações (7.25)-(7.28) fornece as razões modificadas de capacidade, usando as variâncias v_{MIN_p} e v_{MAX_p} . À semelhança do que foi observado na Figura 7.16, para o arranjo rotacionável, as fronteiras tendem a ser coincidentes independentemente da métrica de variância utilizada.

Isso condiz com o que foi discutido na seção 2.2, onde se demonstrou que o comportamento das métricas de variância em arranjos rotacionáveis é coincidente. Novamente, porém, verifica-se que, quando usado apenas um ponto central, as fronteiras tendem a se diferenciar para soluções cujos pesos maiores são atribuídos a $Cpk(Ra)$. Como foi mencionado anteriormente, isso se deve à centralidade da superfície de Ra sobre o arranjo e a sua convexidade, o que leva a uma maior sensibilidade de $Cpk(Ra)$ em relação ao número de pontos centrais utilizados.

$$\zeta_{pk}^1(\mathbf{x}) = \frac{[f_1(\mathbf{x}) - 46,006]}{3 \cdot (3,055) \sqrt{v_{MIN_p}}} \quad (7.25)$$

$$\zeta_{pk}^2(\mathbf{x}) = \frac{[0,590 - f_2(\mathbf{x})]}{3 \cdot (0,096) \sqrt{v_{MIN_p}}} \quad (7.26)$$

$$\zeta_{pk}^1(\mathbf{x}) = \frac{[f_1(\mathbf{x}) - 46,006]}{3 \cdot (3,055) \sqrt{v_{MAX_p}}} \quad (7.27)$$

$$\zeta_{pk}^2(\mathbf{x}) = \frac{[0,590 - f_2(\mathbf{x})]}{3 \cdot (0,096) \sqrt{v_{MAX_p}}} \quad (7.28)$$

Retomando o que foi apresentado nas seções 2.2.3 e 2.2.4, sabe-se que as variâncias v_{MIN_p} e v_{MAX_p} não determinam a capacidade de previsão de um ponto específico do arranjo, mas, respectivamente, a melhor e a pior capacidades de previsão observadas à mesma distância radial do centro do arranjo. Isso significa que as fronteiras obtidas com essas métricas não traduzem, necessariamente, a capacidade de previsão das soluções, mas, na verdade, o potencial de melhoria dessa capacidade, mediante deslocamentos do ponto no arranjo.

Isto é, observando-se as fronteiras da Figura 7.17a, nota-se que a capacidade máxima a ser alcançada para as variáveis T e Ra já é conseguida com os *set-ups* obtidos via otimização bi-objetivo de $Cpk(T)$ e $Cpk(Ra)$. Contudo, com as fronteiras da Figura 7.17b, isso não ocorre, uma vez que o arranjo não possui rotacionalidade. Desse modo, há potencial de ganho da capacidade de previsão, mediante deslocamentos do ponto, com perdas em valores médios, ou mediante modificações no processo de torneamento, com manutenção dos valores médios.

A Tabela 7.10 apresenta potenciais ganhos de capacidade de previsão por meio de deslocamentos do ponto à mesma distância radial para um peso $w_i = 0,500$. Como pode ser visto na Tabela 7.10, para $n_c=1$, pequena redução de velocidade (de 127,761 para 125,568 m/min.; i.e., 1,72%) e pequeno aumento de profundidade (de 0,215 para 0,229 mm; i.e., 6,51%) poderiam garantir elevações da capacidade de 19,90% para T e de 8,92% para Ra , com perda em T (de 52,208 para 51,107 min; i.e., 2,10%) e ganho em Ra (de 0,245 para 0,200 μm ; i.e., 18,37%). No entanto, para assegurar os ganhos reais de capacidade em T , o experimentador deve encontrar alguma maneira no processo de manter os valores médios originais, ao deslocar-lo para regiões de variância mínima.

Para quantidades maiores de pontos centrais, há notórios ganhos em capacidade para ambas as variáveis de resposta, ao se deslocar o ponto para a região de variância mínima. No entanto, as perdas para T e Ra tendem a ser proporcionais. Para $n_c=5$, por exemplo, há ganhos de 32,78% e 4,81% em capacidade para T e Ra , respectivamente. Contudo, há reduções da vida em 0,26% e da rugosidade em 4,06%.

Tabela 7.10 – Potenciais ganhos de capacidade de previsão por meio de deslocamentos do ponto à mesma distância radial para diferentes quantidades de pontos centrais¹

| n_c | Variância de previsão no ponto $Var[\hat{y}(\mathbf{x})]$ | | | | | | | Variância de previsão mínima à mesma distância radial $VMIN_p$ | | | | | | |
|-------|---|---------------|-----------|--------|-------|----------|-----------|--|---------------|-----------|--------|-------|----------|-----------|
| | Vc [m/min.] | f [mm/rev.] | ap [mm] | T | Ra | $Cpk(T)$ | $Cpk(Ra)$ | Vc [m/min.] | f [mm/rev.] | ap [mm] | T | Ra | $Cpk(T)$ | $Cpk(Ra)$ |
| 1 | 127,761 | 0,114 | 0,215 | 52,208 | 0,245 | 1,050 | 0,773 | 125,568 | 0,112 | 0,229 | 51,107 | 0,200 | 1,259 | 0,842 |
| 2 | 128,366 | 0,116 | 0,217 | 51,988 | 0,244 | 1,060 | 0,823 | 126,023 | 0,112 | 0,229 | 51,253 | 0,220 | 1,304 | 0,895 |
| 3 | 129,559 | 0,118 | 0,219 | 51,547 | 0,246 | 1,035 | 0,877 | 126,441 | 0,111 | 0,229 | 51,042 | 0,232 | 1,332 | 0,936 |
| 4 | 130,365 | 0,119 | 0,220 | 51,265 | 0,245 | 1,020 | 0,922 | 126,955 | 0,111 | 0,229 | 50,971 | 0,233 | 1,345 | 0,973 |
| 5 | 130,852 | 0,120 | 0,222 | 51,176 | 0,246 | 1,019 | 0,956 | 127,381 | 0,111 | 0,229 | 51,041 | 0,236 | 1,353 | 1,002 |

¹ $w_i = 0,500$

Fonte: Autoria própria.

7.2 Estudo de caso do processo de fresamento do aço inoxidável duplex com variáveis de resposta correlacionadas

Nesta seção, o modelo de otimização proposto na seção 6.2.2 é aplicado ao processo de fresamento, sem fluido de corte, do aço inoxidável duplex UNS S32205 com insertos de metal duro.

7.2.1 Contexto do processo de fresamento

Os aços inoxidáveis duplex são uma classe de material usada em ambientes altamente corrosivos, como indústrias de petróleo, química, petroquímica e de papel e celulose (MARTINHO *et al.*, 2019; SEVARAJ *et al.*, 2018). Esses aços exibem excelentes propriedades mecânicas, como alta tenacidade, ductilidade, resistência mecânica e resistência à corrosão por pites e cloretos (IMOIA, 2014). Os aços duplex podem ser divididos de acordo com um índice de resistência à corrosão denominado PREN (*Pitting Resistance Equivalent Number*), que, nesses tipos de aço, assume valores superiores a 20, dependendo da composição da liga. O aço padrão UNS S32205 tem PREN entre 34 e 38 e é, portanto, o mais amplamente utilizado nos processos de fabricação de plataformas marítimas (*offshore*) e gasodutos (IMOIA, 2014; POLICENA *et al.*, 2018).

Devido a sua alta dureza e baixa condutividade térmica, esses materiais são de baixa usinabilidade, representando um grande desafio para as indústrias de máquinas-ferramenta e fabricação mecânica (PHILIP *et al.*, 2015). O fresamento é uma das operações de usinagem mais comuns para aços inoxidáveis, especialmente para aços duplex. Esse processo pode produzir vários tipos de perfis, ranhuras, contornos e usinar superfícies geométricas complexas com precisão e acabamento satisfatório (CUI *et al.*, 2018).

Normalmente, a qualidade de uma peça usinada é medida em termos de rugosidades (R_a , R_t , R_y , R_q , etc.). Processos de usinagem convencionais, como fresamento, geram perfis rugosos devido à interação entre a ferramenta de corte e a peça durante o processamento; se não for controlado, isso pode ser perigoso, especialmente em ambientes altamente corrosivos (POLICENA *et al.*, 2018). Por outro lado, a interação é benéfica para a remoção de cavacos e, portanto, para a produtividade. Assim, uma maneira de controlar a interação ao mesmo tempo em que se permite produtividade satisfatória consiste em analisar, simultaneamente, a MRR e as forças de corte (PHILIP *et al.*, 2015; ZHOU *et al.*, 2019).

7.2.2 Procedimento experimental

Para a coleta de dados experimentais, foi utilizado um CCD com 8 pontos fatoriais, 6 pontos axiais e 6 pontos centrais, totalizando 20 experimentos baseados em diferentes combinações dos níveis dos parâmetros de controle mostrados na Tabela 7.11. Essas quantidades de pontos, assim como a distância axial $\alpha = 1,682$, foram obtidas conforme o conjunto de Equações (2.1)-(2.3) e os valores da Tabela 2.1.

Os experimentos foram realizados utilizando um centro de usinagem Eurostec, com 15 kW de potência e rotação máxima de 10.000 rpm. As peças foram fabricadas em aço inoxidável duplex UNS S32205, com composição química exibida na Tabela 7.12, dureza média de 250 HB, diâmetro de 160 mm e comprimento de 300 mm. Para evitar vibrações, os corpos de prova foram fixados em um dispositivo rígido.

Tabela 7.11 - Parâmetros de controle e seus níveis

| Nível Codificado | Parâmetros de Controle | | |
|------------------|------------------------|------------------------------|------------------|
| | Velocidade de corte | Profundidade de corte radial | Avanço por dente |
| | v_c [m/min.] | a_e [mm] | f_z [mm/tooth] |
| 1,682 | 73,41 | 19,02 | 0,13 |
| 1,000 | 70,00 | 18,00 | 0,12 |
| 0,000 | 65,00 | 16,50 | 0,10 |
| -1,000 | 60,00 | 15,00 | 0,08 |
| -1,682 | 56,60 | 13,98 | 0,07 |

Fonte: Elaborado pelo autor¹⁴.

Durante os testes, foi utilizada uma fresa de topo Coromill® R390-025A25-11M, com ângulo de posição $\chi_r = 90^\circ$, haste cilíndrica, com 3 arestas de corte, fixação mecânica do grampo e pastilhas de metal duro Coromill® R390-11T308-MM GC2030, com revestimento de nitreto de titânio (TiN) e nitreto de alumínio e titânio (TiAlN). Os detalhes da montagem experimental do processo são apresentados na Figura 7.18.

¹⁴ No estudo de caso do processo de fresamento do aço inoxidável duplex UNS S32205, adota-se a terminologia “Elaborado pelo autor” para se referir à Tabela 7.11, à Figura 7.18 e à Tabela 7.13, que contam com dados experimentais fornecidos pelos Professores MSc. Carlos Henrique de Oliveira e Dr. Tarcísio Gonçalves de Brito, também usados em artigo intitulado “Nonlinear optimization strategy based on multivariate prediction capability ratios: analytical schemes and model validation for duplex stainless steel end milling”, de autoria de: Lucas Guedes de Oliveira, Carlos Henrique de Oliveira, Tarcísio Gonçalves de Brito, Emerson José de Paiva, Anderson Paulo de Paiva e João Roberto Ferreira.

Tabela 7.12 - Composição química (% do peso) do aço inoxidável duplex UNS S32205.

| C | Si | Mn | P | S | N | Al | Cr | Mo | Ni | Cu | W | Co |
|-------|------|------|-------|-------|------|-------|-------|------|------|------|------|------|
| 0,013 | 0,47 | 1,22 | 0,019 | 0,010 | 0,19 | 0,008 | 22,24 | 3,14 | 5,62 | 0,19 | 0,02 | 0,05 |

Fonte: Adaptado de IMO A (2014).

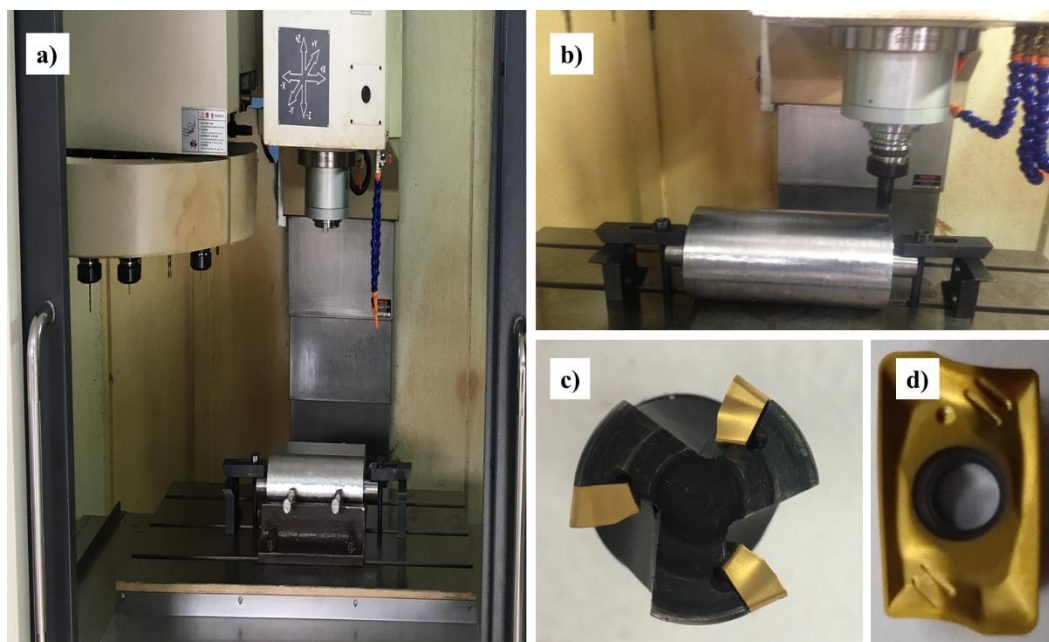


Figura 7.18 - Processo de fresamento de topo: (a) Centro de usinagem. (b) Processo de corte. (c) Fresa de topo. (d) Inserto.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para medir as rugosidades Ra , Rq , Ry e Rt , foi utilizado um rugosímetro portátil Mitutoyo SJ-201 M/P, com *cut-off* de 0,80 mm, conforme norma internacional ISO/DIS 4287/1E. Os valores foram coletados em três pontos equidistantes das superfícies das peças usinadas (isto é, nas duas extremidades e no centro da peça); no presente caso, foram adotados os valores médios dessas medições.

A potência de corte (P_c) para o processo de fresamento é dada pela Equação (7.29):

$$P_c = \frac{a_e \times a_p \times v_f \times k_c}{60 \times 10^6} \quad (7.29)$$

onde: a_e é a profundidade de corte radial [mm]; a_p é a profundidade de corte axial [mm]; v_f é a velocidade de avanço [mm/min.], calculada pelo produto do avanço por dente f_z [mm/tooth],

rotação n [rpm], e o número de arestas de corte na ferramenta de metal duro Z [un.], tal que: $v_f = f_z \times n \times z$; e k_c é a pressão específica de corte [N/mm²], calculada pela razão $k_c = k_{c1} / h_m^{m_c}$, na qual h_m é a espessura média dos cavacos e k_{c1} e m_c são valores fornecidos pelo fabricante de ferramentas de corte.

A eficiência de corte (E_c) é dada pela Equação (7.30) e relaciona a MRR [cm³/min] (ZHOU *et al.*, 2019) e a força de corte F_c [N] (SEVARAJ *et al.*, 2018).

$$E_c = \frac{MRR}{F_c} \quad (7.30)$$

onde: MRR é determinada pelo produto dos parâmetros a_e , a_p , e v_f .

A matriz experimental e as respostas coletadas são apresentadas na Tabela 7.13.

Tabela 7.13 - Matriz experimental e respostas

| Exp. | Parâmetros de controle | | | Respostas | | | | | | | |
|---------------------|------------------------|--------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|--------------|--------------------------|---------|----------------------|--------|
| | | | | Medidas | | | | Calculadas | | Fatores Rotacionados | |
| | | | | CTQ | | | | CTP | | CTQ | CTP |
| | | | | Min. | | | | Max. | | Min. | Max. |
| v_c | a_e | f_z | Ra [μm] | Rq [μm] | Ry [μm] | Rt [μm] | Pc [kW] | Ec [$cm^3/N.min$] | $F1$ | $F2$ | |
| 1 | -1,000 | -1,000 | -1,000 | 0,333 | 0,453 | 2,199 | 2,936 | 0,202 | 0,0126 | -1,512 | 1,235 |
| 2 | 1,000 | -1,000 | -1,000 | 0,565 | 0,622 | 2,851 | 3,578 | 0,236 | 0,0147 | -0,615 | 0,045 |
| 3 | -1,000 | 1,000 | -1,000 | 0,361 | 0,428 | 2,617 | 2,918 | 0,245 | 0,0125 | -1,518 | 0,730 |
| 4 | 1,000 | 1,000 | -1,000 | 0,380 | 0,507 | 2,366 | 3,663 | 0,286 | 0,0146 | -1,532 | -0,475 |
| 5 | -1,000 | -1,000 | 1,000 | 0,423 | 0,627 | 2,959 | 3,927 | 0,274 | 0,0139 | -0,518 | 0,210 |
| 6 | 1,000 | -1,000 | 1,000 | 0,569 | 0,653 | 3,890 | 3,784 | 0,320 | 0,0162 | -0,718 | -1,693 |
| 7 | -1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,767 | 0,763 | 4,400 | 4,891 | 0,332 | 0,0138 | 1,418 | -0,196 |
| 8 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,696 | 0,668 | 3,994 | 4,669 | 0,387 | 0,0161 | -0,046 | -2,180 |
| 9 | -1,682 | 0,000 | 0,000 | 0,509 | 0,702 | 3,479 | 4,080 | 0,249 | 0,0125 | 0,582 | 1,325 |
| 10 | 1,682 | 0,000 | 0,000 | 0,630 | 0,757 | 3,423 | 4,542 | 0,323 | 0,0162 | 0,038 | -1,296 |
| 11 | 0,000 | -1,682 | 0,000 | 0,517 | 0,632 | 2,822 | 4,032 | 0,223 | 0,0133 | -0,016 | 1,055 |
| 12 | 0,000 | 1,682 | 0,000 | 0,639 | 0,610 | 3,153 | 4,467 | 0,307 | 0,0131 | 0,299 | 0,226 |
| 13 | 0,000 | 0,000 | -1,682 | 0,378 | 0,365 | 2,648 | 2,925 | 0,210 | 0,0130 | -1,722 | 0,657 |
| 14 | 0,000 | 0,000 | 1,682 | 0,735 | 0,590 | 4,579 | 4,604 | 0,356 | 0,0154 | 0,169 | -1,784 |
| 15 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,614 | 0,746 | 3,678 | 4,610 | 0,281 | 0,0138 | 0,835 | 0,380 |
| 16 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,618 | 0,795 | 3,557 | 4,530 | 0,278 | 0,0140 | 0,886 | 0,427 |
| 17 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,601 | 0,820 | 3,517 | 4,405 | 0,283 | 0,0141 | 0,826 | 0,392 |
| 18 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,592 | 0,870 | 3,639 | 4,500 | 0,287 | 0,0142 | 1,023 | 0,405 |
| 19 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,604 | 0,837 | 3,825 | 4,679 | 0,286 | 0,0142 | 1,097 | 0,339 |
| 20 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,592 | 0,864 | 3,786 | 4,618 | 0,288 | 0,0145 | 1,024 | 0,196 |
| Resumo dos Dados | Média | | | 0,5562 | 0,6655 | 3,3691 | 4,1179 | 0,2827 | 0,01414 | 0,0000 | 0,0000 |
| | Desvio Padrão | | | 0,1245 | 0,1464 | 0,6511 | 0,6308 | 0,0473 | 0,00116 | 1,0000 | 1,0000 |

Fonte: Elaborado pelo autor.

7.2.3 Análise multivariada fatorial

A fim de abordar corretamente o problema multiobjetivo proposto, a FA foi aplicada conforme as formulações apresentadas na seção 3. As variáveis de resposta originais mostradas na Tabela 7.13 incluem as características CTQ Ra [μm], Rq [μm], Ry [μm] e Rt [μm] e as características CTP Pc [kW] e Ec [$\text{cm}^3/\text{N}\cdot\text{min}$]. Com base nos valores da Tabela 7.13, a matriz de correlação foi obtida, como apresentado na Equação (7.31).

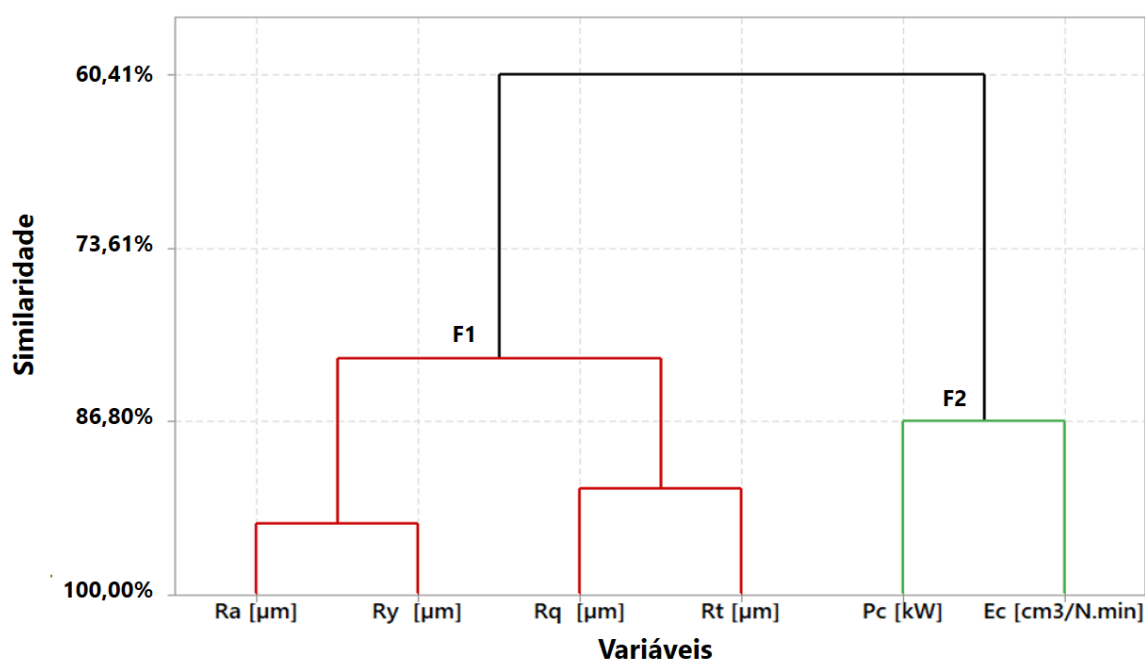


Figura 7.19 - Dendrograma para as variáveis originais mostrando os *clusters* de fatores¹

¹ Note-se que os fatores segregam apropriadamente as medidas CTQ e CTP

Fonte: Autoria própria.

Essa matriz permite visualizar os agrupamentos naturais formados pelas variáveis originais, como resumidos na representação gráfica da Figura 7.19. Como pode ser visto na figura, as características CTQ e CTP foram naturalmente segregadas. Esse é um resultado desejado, uma vez que as direções de otimização das variáveis latentes encontram-se diretamente associadas às variáveis do processo e, com isso, a fronteira de Pareto pode ser facilmente interpretada após a otimização.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} & Ra & Rq & Ry & Rt & Pc & Ec \\ Ra & 1,000 & 0,667 & 0,893 & 0,887 & 0,768 & 0,535 \\ Rq & 0,667 & 1,000 & 0,648 & 0,840 & 0,408 & 0,345 \\ Ry & 0,893 & 0,648 & 1,000 & 0,813 & 0,774 & 0,523 \\ Rt & 0,887 & 0,840 & 0,813 & 1,000 & 0,717 & 0,450 \\ Pc & 0,768 & 0,408 & 0,774 & 0,717 & 1,000 & 0,743 \\ Ec & 0,535 & 0,345 & 0,523 & 0,450 & 0,743 & 1,000 \end{bmatrix} \quad (7.31)$$

Para se obter a matriz de carregamento, conforme a Equação (3.3), calculam-se, primeiramente, os autovetores e os autovalores da matriz de correlação \mathbf{R} , da seguinte maneira:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0,449 & -0,084 & 0,313 & -0,155 & -0,726 & 0,378 \\ 0,365 & -0,538 & -0,595 & -0,042 & 0,248 & 0,400 \\ 0,439 & -0,049 & 0,382 & -0,631 & 0,450 & -0,243 \\ 0,444 & -0,299 & -0,007 & 0,483 & -0,149 & -0,677 \\ 0,412 & 0,425 & 0,249 & 0,539 & 0,394 & 0,377 \\ 0,325 & 0,657 & -0,583 & -0,230 & -0,179 & -0,195 \end{bmatrix} \quad (7.32)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 4,387 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,886 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,412 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,168 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,116 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,031 \end{bmatrix} \quad (7.33)$$

Ambas as matrizes \mathbf{V} e \mathbf{L} são matrizes de ordem 6, uma vez que há seis variáveis originais. No entanto, a matriz de carregamento é obtida de acordo com o número de fatores desejados. Seguindo a natureza do processo capturada pela Figura 7.19, foram adotados dois fatores para representar o conjunto de variáveis originais. Então, aplicando-se a Equação (3.3), têm-se:

$$A_{F1} = \begin{bmatrix} 0,449 \\ 0,365 \\ 0,439 \\ 0,444 \\ 0,412 \\ 0,325 \end{bmatrix} \times \sqrt{4,387} = \begin{bmatrix} 0,940 \\ 0,765 \\ 0,920 \\ 0,930 \\ 0,862 \\ 0,681 \end{bmatrix}, \text{ para o primeiro fator.} \quad (7.34)$$

$$A_{F2} = \begin{bmatrix} -0,084 \\ -0,538 \\ -0,049 \\ -0,299 \\ 0,425 \\ 0,657 \end{bmatrix} \times \sqrt{0,886} = \begin{bmatrix} -0,079 \\ -0,506 \\ -0,046 \\ -0,282 \\ 0,400 \\ 0,618 \end{bmatrix}, \text{ para o segundo fator.} \quad (7.35)$$

Com base nas cargas, foram calculadas as comunalidades de cada fator, conforme a Equação (3.6), que, na prática, descrevem a estrutura de correlação das variáveis analisadas. Para explicar essa estrutura de modo mais preciso, a análise fatorial rotacionada foi adotada, segundo os procedimentos introduzidos na seção 3.2.

Tabela 7.14 - Cargas e comunalidades dos fatores nas análises fatorial original e rotacionada

| Variável | Análise Fatorial Original | | | Análise Fatorial Rotacionada | | |
|--|---------------------------|----------|--------------|------------------------------|--------------|--------------|
| | Cargas | | Comunalidade | Cargas | | Comunalidade |
| | A_{F1} | A_{F2} | h_i^2 | $A_{Rot.F1}$ | $A_{Rot.F2}$ | h_i^2 |
| Ra [μm] | 0,940 | -0,079 | 0,890 | 0,783 | 0,525 | 0,890 |
| Rq [μm] | 0,765 | -0,506 | 0,842 | 0,914 | 0,082 | 0,842 |
| Ry [μm] | 0,920 | -0,046 | 0,848 | 0,747 | 0,538 | 0,848 |
| Rt [μm] | 0,930 | -0,282 | 0,944 | 0,902 | 0,360 | 0,944 |
| Pc [kW] | 0,862 | 0,400 | 0,903 | 0,424 | 0,851 | 0,903 |
| Ec [$\text{cm}^3/\text{N}\cdot\text{min}$] | 0,681 | 0,618 | 0,846 | 0,146 | 0,908 | 0,846 |
| Resumo da | | | | | | |
| Variância | | | | | | |
| SSL | 4,387 | 0,886 | 5,273 | 3,022 | 2,251 | 5,273 |
| Var [%] | 73,10 | 14,80 | 87,90 | 50,40 | 37,50 | 87,90 |

Fonte: Autoria própria.

Então, aplicando-se as formulações Kaiser-Varimax – notem-se as Equações (3.9)-(3.14), foi encontrado um ângulo de rotação $\gamma = -0.674$ rad. Com essa estratégia de rotação, novas cargas foram obtidas, preservando-se as comunalidades originais. As cargas e as comunalidades dos fatores obtidas com as análises fatorial original e rotacionada são apresentadas na Tabela 7.14. Uma explicação detalhada sobre como foi obtido o ângulo de rotação com base na estratégia é apresentada no Apêndice C.

Considerando a inversa da matriz de correlação \mathbf{R}^{-1} e as cargas rotacionadas A_{Rot} , obtém-se, inicialmente, a matriz de pesos \mathbf{B} e, com isso, os escores dos fatores \mathbf{F} , representando os dados originais do processo de fresamento.

$$\mathbf{B} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A}_{Rot} = \begin{bmatrix} 9,532 & 2,954 & -4,827 & -7,623 & 1,791 & -1,503 \\ 2,954 & 6,866 & -2,480 & -8,860 & 4,945 & -2,349 \\ -4,827 & -2,480 & 6,404 & 2,931 & -3,191 & 1,147 \\ -7,623 & -8,860 & 2,931 & 16,375 & -7,222 & 3,615 \\ 1,791 & 4,945 & -3,191 & -7,222 & 8,007 & -3,704 \\ -1,503 & -2,349 & 1,147 & 3,615 & -3,704 & 3,144 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,783 & 0,525 \\ 0,914 & 0,082 \\ 0,747 & 0,538 \\ 0,902 & 0,360 \\ 0,424 & 0,851 \\ 0,146 & 0,908 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,223 & 0,064 \\ 0,493 & -0,337 \\ 0,196 & 0,090 \\ 0,364 & -0,116 \\ -0,128 & 0,475 \\ -0,314 & 0,642 \end{bmatrix} \quad (7.36)$$

Os escores dos fatores \mathbf{F} , no entanto, são calculados a partir dos dados normalizados. Assim, considerando as médias e os desvios padrões das variáveis de resposta originais mostradas na Tabela 7.13, obtém-se a matriz normalizada \mathbf{Z} , cujo produto com a matriz \mathbf{B} , de acordo com a Equação (3.7), fornece os fatores rotacionados. Para facilitar a compreensão do trabalho e evitar o uso excessivo de matrizes no texto, os fatores rotacionados também foram exibidos juntamente com os parâmetros de controle e as variáveis de resposta originais na Tabela 7.13. Como pode ser visto na tabela, ambos os fatores revelam média de zero e desvio padrão unitário, o que são resultados esperados da análise fatorial, considerando o procedimento de normalização (KAISER, 1958).

7.2.4 Parâmetros influentes, modelagem de superfícies e análise de sensibilidade

Após a coleta de dados e a análise fatorial, foram analisadas a influência dos parâmetros de controle e de suas interações sobre os fatores rotacionados, representando as rugosidades Ra , Rq , Ry e Rt , a potência de corte Pc e a eficiência de corte Ec . Essa análise foi utilizada para explorar a natureza do processo e o comportamento esperado dos modelos de superfície de resposta em função dos parâmetros de corte, utilizando, inicialmente, um número menor de

experimentos (fatoriais e centrais) – conforme a primeira etapa da MSR (seção 2.1.1). Para introduzir a análise realizada, a Figura 7.20 apresenta os gráficos de Pareto e os gráficos de efeitos principais para as variáveis de resposta latentes $F1$ e $F2$.

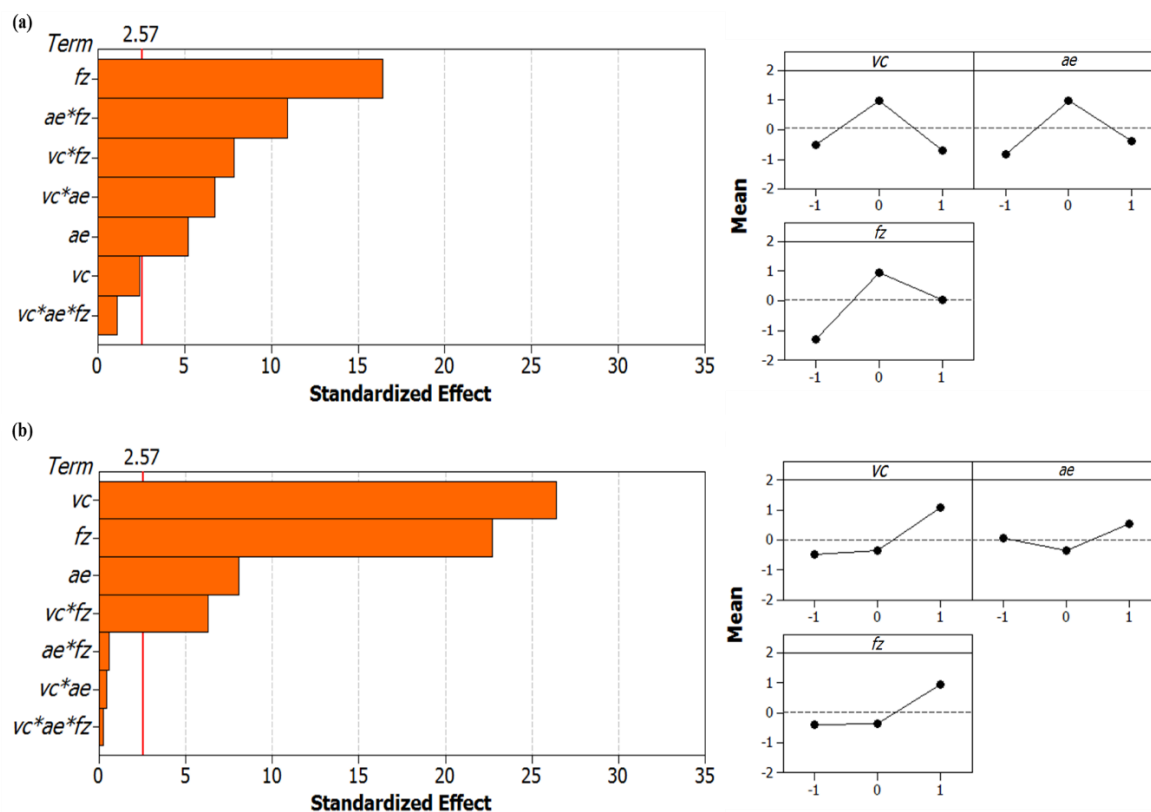


Figura 7.20 - Gráficos de Pareto e de efeitos principais para as variáveis de resposta latentes. (a) $F1$. (b) $F2$.

Fonte: Autoria própria.

Como pode ser visto na Figura 7.20a, para $F1$, o avanço por dente (ae) é o parâmetro mais influente. Na seção 7.2.3, foi constatado que as rugosidades (medidas CTQ) apresentam altas cargas associadas à $F1$; portanto, o que a análise da Figura 7.20a revela, na prática, é que aumentos no avanço por dente conduzem a aumentos na rugosidade Ra , Rq , Ry e Rt . Fisicamente, isso ocorre porque o aumento de fz aumenta a área de contato entre a ferramenta de corte e a peça de trabalho, o que contribui para maiores irregularidades na superfície usinada (PHILIP *et al.*, 2015). Interações significativas de fz com vc e ae demonstram que esse efeito é acentuado quando há maior força de corte envolvida.

Para $F2$, como mostrado na Figura 7.20b, pode-se verificar que a velocidade de corte (vc) é o parâmetro mais influente, seguido pelo avanço por dente (fz) e pela profundidade de corte

radial (ae). Nesse caso, como as medidas CTP têm altas cargas associadas a $F2$, aumentos nesses parâmetros de corte tendem a aumentar os valores das variáveis Pc e Ec . Fisicamente, à medida que esses parâmetros são aumentados, há maior consumo de energia pela máquina-ferramenta, principalmente devido ao maior movimento do eixo do motor (diretamente associado a vc) e à maior força necessária para remover o material (diretamente associado à profundidade de corte ae) (CAMPOSECO-NEGRETE; CALDERÓN-NÁJERA, 2019).

Analisando os gráficos de efeitos principais da Figura 7.20, nota-se que ambos os fatores $F1$ e $F2$ apresentam curvatura, o que, como discutido na seção 2.1.1, é um resultado desejado para a modelagem baseada na MSR. Além disso, pode-se verificar que, ao definir, individualmente, os parâmetros de corte em seus níveis intermediários, $F1$ tende a aumentar, mas $F2$ tende a diminuir.

No caso de $F1$, isso ocorre porque, com menores faixas dos parâmetros, a distância entre as ranhuras da peça tende a diminuir, principalmente devido a fz (parâmetro mais influente de $F1$); como há eliminações dos picos de rugosidade, as superfícies se tornam mais lisas. Para faixas maiores, porém, as distâncias tendem a aumentar, levando a preservação de mais picos de rugosidade e, portanto, produzindo superfícies mais deterioradas. Apesar disso, para algumas combinações dos parâmetros de corte, nos níveis mais altos, as superfícies também podem ser melhoradas, resultando nos perfis curvos da Figura 7.20a.

No caso de $F2$, um comportamento inverso pode ser observado, no qual, para faixas maiores dos parâmetros de corte, o desempenho tende a diminuir e, para faixas menores, tende a aumentar, especialmente como uma função da velocidade de corte (parâmetro mais influente de $F2$). Esse efeito advém do processo cinemático, que torna a remoção de material mais ágil, conforme vc , fz e ae aumentam (SELAIMIA *et al.*, 2017).

Esse comportamento contraditório entre as medidas CTQ e CTP é o que estabelece os conflitos multiobjetivos. Uma vez que a rugosidade deve ser minimizada e a potência e a eficiência de corte devem ser maximizadas, então, essa análise demonstra que é provável haver uma incompatibilidade entre as convexidades dos modelos e seus sentidos de otimização. Além disso, ainda que os níveis dos parâmetros sejam redefinidos, a análise da Figura 7.20 indica direções opostas para os fatores rotacionados (isto é, níveis menores para $F1$ e níveis maiores para $F2$), mostrando que somente a redefinição dos níveis não é capaz de eliminar os conflitos entre as medidas CTQ e CTP.

A literatura recente tem reportado esses conflitos na usinagem de vários aços, incluindo os aços inoxidáveis. Selaimia *et al.* (2017), por exemplo, mostraram que, ao privilegiar a

rugosidade, há diminuição da produtividade e, ao privilegiar a produtividade, há aumento da rugosidade durante o fresamento de topo do aço inoxidável austenítico. Esse resultado também foi reportado por Krishnaprasad *et al.* (2019), que estudaram o fresamento de topo do aço inoxidável AISI 304.

Para avaliar matematicamente esses aspectos e suas influências, análises de curvatura, convexidade e sentido otimização são realizadas na seção 7.2.5, considerando os modelos quadráticos completos. Esses modelos podem ser obtidos a partir do conjunto de pontos experimentais apresentados na Tabela 7.13, incluindo os pontos axiais. Aplicando-se o método OLS de acordo com as Equações (2.9)-(2.11), obtêm-se os coeficientes de regressão para variáveis de resposta originais e seus fatores associados, conforme apresentado na Tabela 7.15.

Como pode ser visto na tabela, todos os modelos apresentam ajustes satisfatórios, com R^2 e R^2 -adj superiores a 90%. Dentro do conjunto de variáveis originais, P_c apresentou o melhor modelo, com R^2 -adj de 98,73%. Para os fatores, o melhor modelo foi obtido para F_2 , com R^2 -adj de 96,68%. Substituindo os coeficientes dos fatores no modelo padrão da Equação (2.7), os modelos de superfície de resposta para os fatores rotacionados podem ser escritos da seguinte forma:

$$F_1 = 0.284 + 0.022v_c + 0.026a_e + 0.043f_z + 0.002v_c^2 - 0.005a_e^2 + 0.001f_z^2 + 0.002v_c \times a_e + 0.003v_c \times f_z + 0.004a_e \times f_z \quad (7.37)$$

$$F_2 = -0.366 + 0.782v_c + 0.243a_e + 0.696f_z + 0.184v_c^2 - 0.037a_e^2 + 0.389f_z^2 + 0.012v_c \times a_e + 0.187v_c \times f_z - 0.017a_e \times f_z \quad (7.38)$$

Na Tabela 7.15, pode-se verificar que, com um nível de significância de 0,05, F_1 depende de um efeito constante, do efeito linear do avanço por dente (f_z), dos efeitos quadráticos dos parâmetros v_c , a_e e f_z e dos efeitos de suas interações. Por outro lado, F_2 depende de um efeito constante, dos efeitos lineares dos parâmetros v_c , a_e e f_z , dos efeitos quadráticos de v_c e f_z e do efeito da interação entre eles.

Tabela 7.15 - Modelos de superfície de resposta estimados para as características CTQ e CTP (em unidades codificadas)¹

| Termo | CTQ | | | | | CTP | | |
|--------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|---------------|-------------------|--|---------------|
| | <i>Ra</i> [μm] | <i>Rq</i> [μm] | <i>Ry</i> [μm] | <i>Rt</i> [μm] | <i>F1</i> | <i>Pc</i> [kW] | <i>Ec</i> [cm ³ /N.min.] | <i>F2</i> |
| <i>Constante</i> | 0,605 | 0,822 | 3,673 | 4,566 | 0,284 | 0,014 | 0,963 | -0,366 |
| <i>vc</i> | 0,039 | 0,020 | 0,061 | 0,132 | 0,022 | 0,001 | -0,124 | 0,782 |
| <i>ae</i> | 0,038 | -0,002 | 0,149 | 0,194 | 0,026 | 0,000 | 0,162 | 0,243 |
| <i>fz</i> | 0,104 | 0,079 | 0,619 | 0,513 | 0,043 | 0,001 | 0,622 | 0,696 |
| <i>vc*vc</i> | -0,023 | -0,034 | -0,113 | -0,147 | 0,002 | 0,000 | -0,322 | 0,184 |
| <i>ae*ae</i> | -0,020 | -0,072 | -0,277 | -0,169 | -0,005 | 0,000 | -0,381 | -0,037 |
| <i>fz*fz</i> | -0,028 | -0,123 | -0,055 | -0,340 | 0,001 | 0,000 | -0,707 | 0,389 |
| <i>vc*ae</i> | -0,054 | -0,026 | -0,280 | 0,003 | 0,002 | 0,000 | -0,272 | 0,012 |
| <i>vc*fz</i> | -0,022 | -0,040 | 0,016 | -0,219 | 0,003 | 0,000 | -0,319 | 0,187 |
| <i>ae*fz</i> | 0,079 | 0,036 | 0,202 | 0,223 | 0,004 | 0,000 | 0,442 | -0,017 |
| R ² (%) | 96,57 | 96,86 | 96,34 | 95,30 | 95,57 | 99,33 | 97,19 | 98,25 |
| R ² -adj. (%) | 93,49 | 94,03 | 93,04 | 91,08 | 91,58 | 98,73 | 94,67 | 96,68 |

¹Os termos significativos (p-value <5 %) são destacados em negrito.

Fonte: Autoria própria.

Os modelos de superfície de resposta podem ser melhor interpretados graficamente, atribuindo um conjunto de valores a *vc*, *ae* e *fz* nas Equações (7.37) e (7.38). Usando malhas gráficas com 225 pontos, a Figura 7.21 e a Figura 7.22 fornecem gráficos de superfície de resposta para *F1* e *F2*, respectivamente. Com base nessas figuras, também é possível observar o que foi apresentado na análise da Figura 7.20; ou seja, os fatores apresentam comportamentos diferentes para as mesmas variações dos parâmetros de controle, evidenciados principalmente em seus níveis intermediários, que levam, ao mesmo tempo, ao aumento de *F1* e à redução de *F2*.

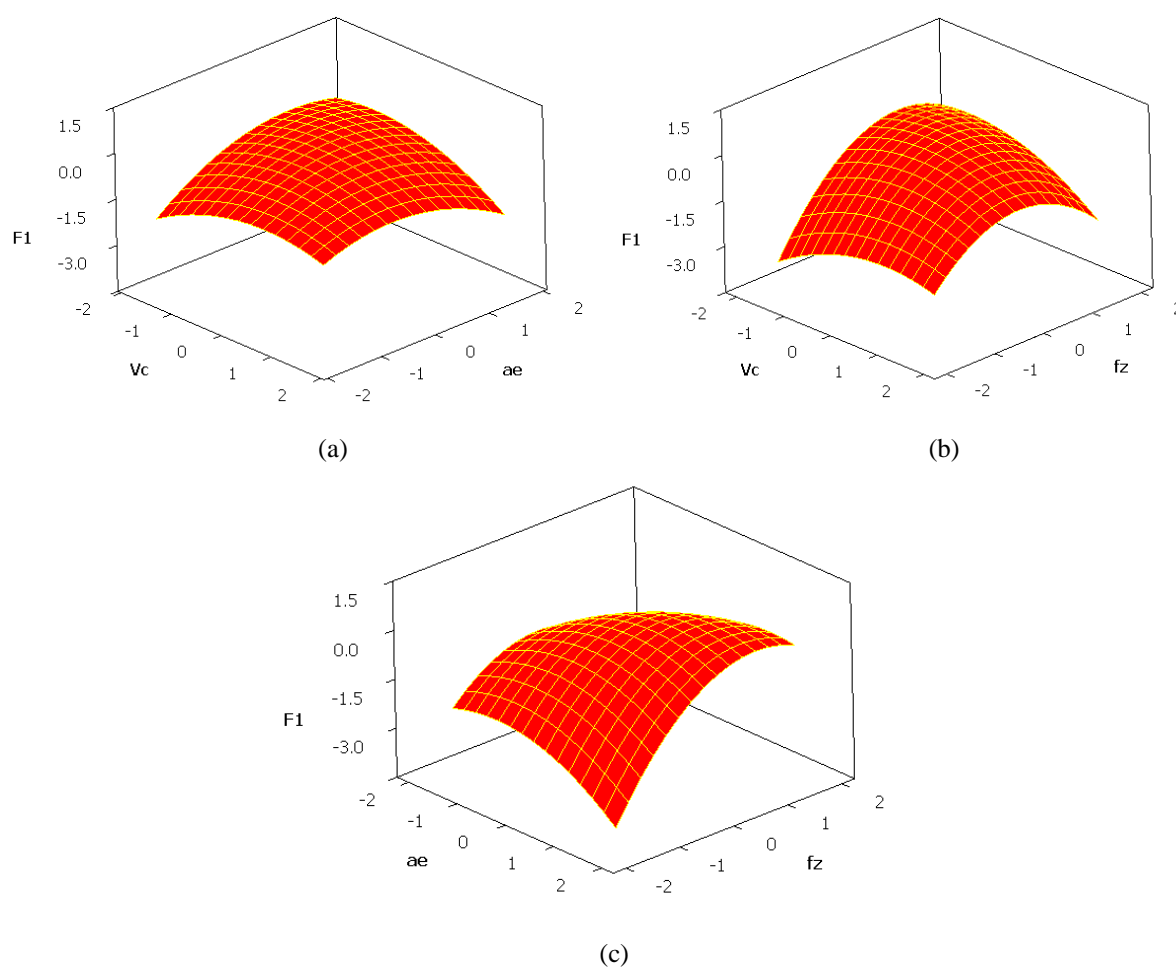


Figura 7.21 - Superfície de resposta para $F1$: (a) vc vs ae , $fz=0$. (b) vc vs fz , $ae=0$. (c) ae vs fz , $vc=0$.

Fonte: Autoria própria.

Embora representações gráficas de modelos de superfície de resposta ajudem a esclarecer aspectos práticos do processo, algumas características intrínsecas precisam ser avaliadas matematicamente para evitar interpretações equivocadas. Visualmente, por exemplo, os fatores $F1$ e $F2$ podem parecer côncavos e convexos, respectivamente. No entanto, como será mostrado na próxima seção, ambos apresentam formato de sela. Isso ocorre porque os gráficos de superfície, para um número de parâmetros maior que dois (ou seja, $k > 2$), são apresentados aos pares de parâmetros e, portanto, não são capazes de revelar a convexidade adequadamente; matematicamente, no entanto, é possível avaliar a convexidade, seja qual for o valor de k (BOX; DRAPER, 2007).

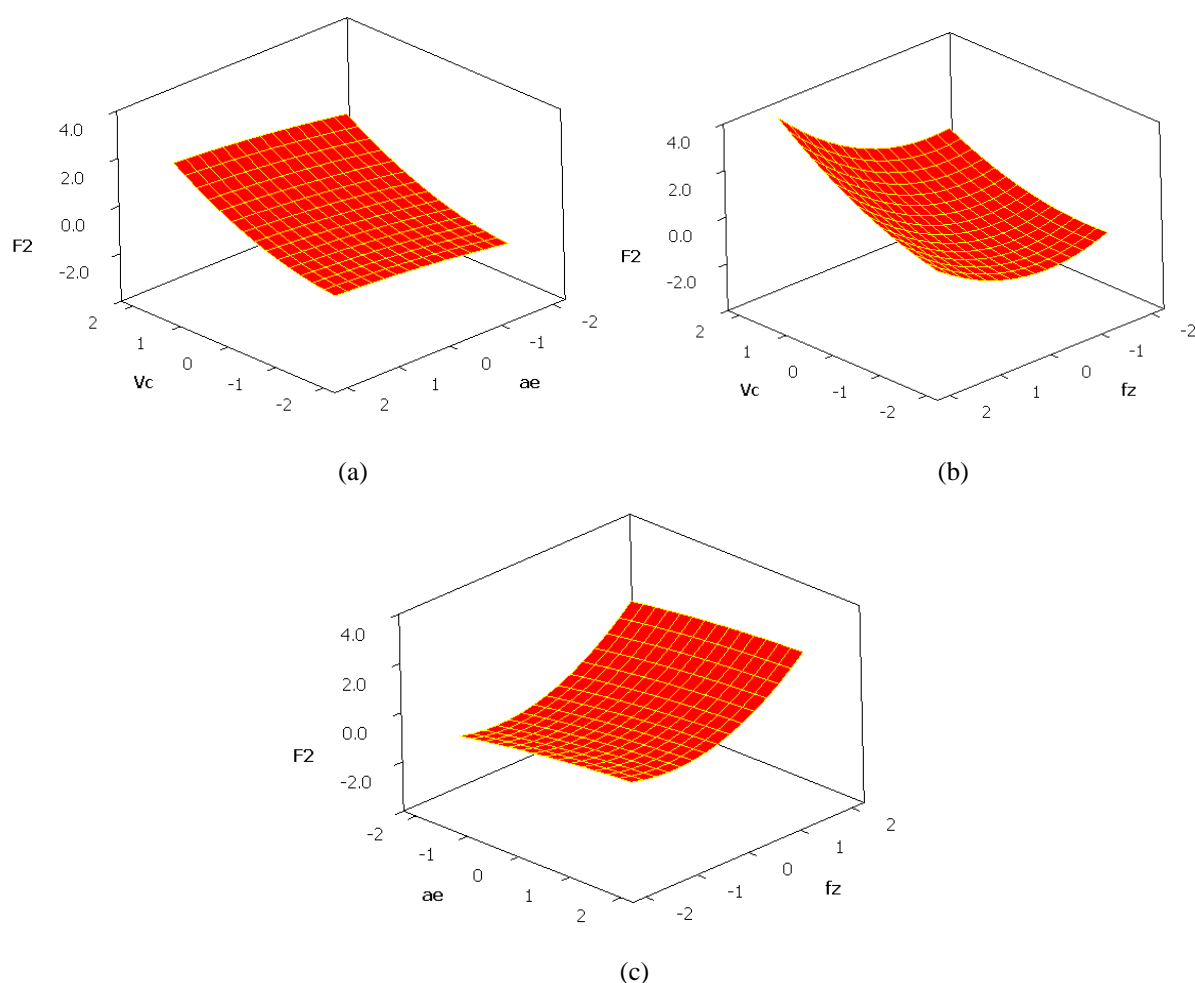


Figura 7.22 - Superfície de resposta para F_2 : (a) v_c vs a_e , $f_z=0$. (b) v_c vs f_z , $a_e=0$. (c) a_e vs f_z , $v_c=0$.

Fonte: Autoria própria.

Além disso, o comportamento dos fatores pode ser melhor explorado por meio de uma análise de sensibilidade. Para isso, as derivadas parciais de F_1 e F_2 são calculadas com relação a cada um dos parâmetros de controle.

Para F_1 , têm-se:

$$\frac{\partial F_1}{\partial v_c} = 0,022 + 0,004 v_c + 0,002 a_e + 0,003 f_z \quad (7.39)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial a_e} = 0,026 - 0,01 a_e + 0,002 v_c + 0,004 f_z \quad (7.40)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial f_z} = 0,043 + 0,002 f_z + 0,003 v_c + 0,004 a_e \quad (7.41)$$

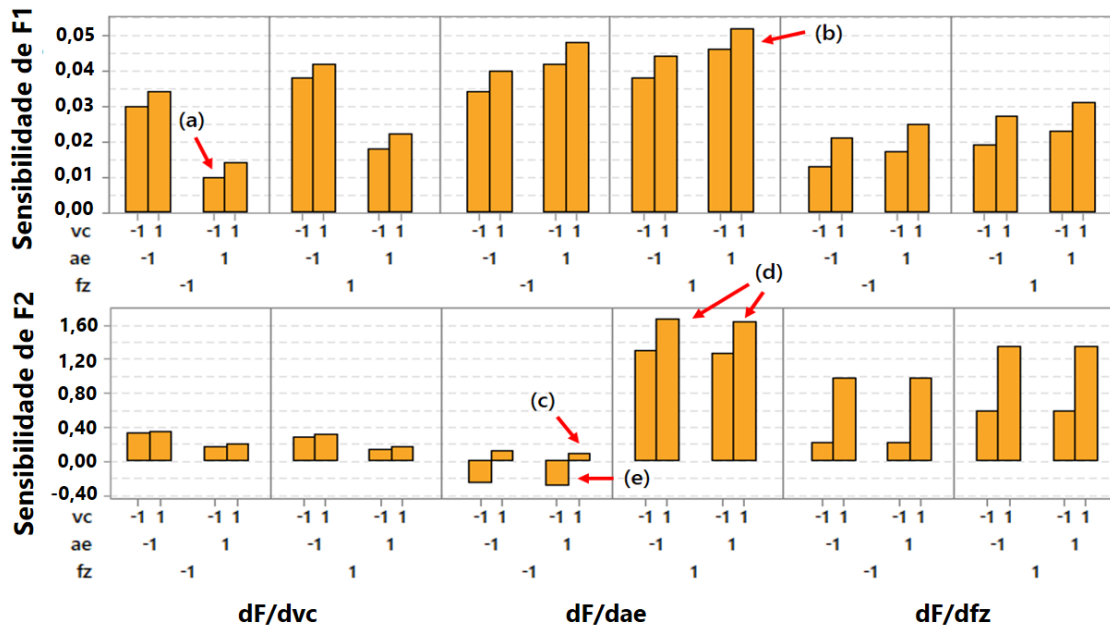


Figura 7.23 - Análise de sensibilidade para $F1$ e $F2$. Taxas de crescimento de $F1$ (a) mais baixa e (b) mais alta. Taxas de crescimento de $F2$ (c) mais baixa e (d) mais alta. (e) Taxa de decréscimo de $F2$.

Fonte: Autoria própria.

Para $F2$, têm-se:

$$\frac{\partial F_2}{\partial v_c} = 0,782 + 0,368v_c + 0,012a_e + 0,187f_z \quad (7.42)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial a_e} = 0,243 - 0,074a_e + 0,012v_c - 0,017f_z \quad (7.43)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial f_z} = 0,696 + 0,778f_z + 0,187v_c - 0,017a_e \quad (7.44)$$

Então, substituindo os valores dos experimentos fatoriais, apresentados na Tabela 7.13, nas Equações (7.39)-(7.44), a análise de sensibilidade pode ser realizada, como mostrado na Figura 7.23. Com base na figura, pode-se verificar que todos os parâmetros contribuem para o aumento de $F1$; no entanto, para todas as condições de corte, o avanço por dente é o parâmetro mais influente. Isso significa que qualquer aumento nos parâmetros vc , ae e fz leva a um aumento em Ra , Rq , Ry e Rt , o que é um resultado indesejável para o processo. Isso implica que, em comparação com as características CTP, a rugosidade é mais difícil de controlar.

Resultados semelhantes foram encontrados por Arruda *et al.* (2019), que investigou o processo de fresamento de topo, e Rocha *et al.* (2017b) que analisou o processo de torneamento do aço endurecido ABNT H13.

Como mostrado em Figura 7.23a, a menor taxa de crescimento da rugosidade (representada por $F1$) foi obtida por meio da combinação dos níveis mais baixos (-1, -1) de velocidade de corte (vc) e avanço por dente (fz) com o nível mais alto (+1) de profundidade de corte radial (ae). Nessa condição, são gerados perfis de rugosidade mais uniformes, o que é desejado para a fabricação industrial. Por outro lado, a maior taxa de crescimento de $F1$ foi obtida a partir da combinação dos níveis mais altos dos parâmetros de corte vc (+1), ae (+1) e fz (+1) – Figura 7.23b. Nessa condição, a área de contato entre a ferramenta e a peça de trabalho é aumentada, com conseqüente aumento no volume de cavaco removido; além disso, há uma maior progressão do desgaste da ferramenta, e maiores esforços de corte, com conseqüente aumento na vibração da máquina (PHILIP *et al.*, 2015).

Na Figura 7.23c, observa-se a menor taxa de crescimento de $F2$, ao se configurar o processo com os mais altos níveis de vc e ae (+1,+1) e o menor nível de fz (-1). Por outro lado, na Figura 7.23d, pode-se observar que, independentemente do valor do ae , as maiores taxas de crescimento de $F2$ são obtidas quando fz e vc são fixados em seus níveis mais altos (+1, +1). Como mencionado anteriormente, isso é devido ao movimento do eixo da máquina, que consome mais energia à medida que a velocidade de corte aumenta. Além disso, nessas condições, a MRR aumenta, mantendo forças moderadas (CAMPOSECO-NEGRETE, CALDERÓN-NÁJERA, 2019), o que também conduz a uma maior eficiência.

Esses resultados destacam a importância do parâmetro fz para o controle de qualidade (Figura 7.23a) e para melhorar o desempenho do processo (Figura 7.23b). Além disso, eles também destacam a natureza conflitante do processo com múltiplas características de interesse, uma vez que tanto $F1$ como $F2$ são positivamente influenciados pelo aumento de fz , embora isso seja desejável apenas para $F2$ (que representa as medidas CTP). Esse conflito também é observado ao avaliar a condição que minimiza $F1$, uma vez que indesejavelmente leva a uma taxa de crescimento muito baixa de $F2$, tornando-a uma condição inviável para a melhoria do processo.

Assim, as estratégias de otimização devem ter muito cuidado para equilibrar matematicamente esse conflito, ao mesmo tempo em que trazem significado e benefícios práticos para o processo industrial. Nesse sentido, na próxima seção, são discutidos alguns aspectos computacionais que podem prejudicar as estratégias convencionais de otimização.

7.2.5 Análises de curvatura, convexidade e sentidos de otimização

Tendo em vista os modelos de superfície de resposta para variáveis originais e fatores rotacionados, foram realizadas análises de curvatura, convexidade e sentidos de otimização, que encontram-se resumidas na Tabela 7.16. Essas análises permitem identificar aspectos computacionais que poderiam diminuir a eficácia das estratégias de otimização convencionais.

Conforme discutido na seção 2.1.1, para uma variável de resposta, a investigação da curvatura resulta em um ponto de decisão para prosseguir com as etapas da MSR; regiões curvas são preferíveis porque podem fornecer soluções melhores e, muitas vezes, servir como critério de parada para os algoritmos de busca (BOX; DRAPER, 2007). No entanto, nem sempre elas estão disponíveis, especialmente quando múltiplas variáveis de resposta são consideradas. Como a região experimental é definida por um conjunto de níveis dos parâmetros de controle (o mesmo conjunto para todas as variáveis de resposta), dificilmente as regiões de curvatura de todas as variáveis de resposta serão coincidentes.

Neste trabalho, todas as medidas de CTQ estão em regiões de curvatura, o que levou a um fator curvo. No entanto, todas as medidas de CTP estão fora das regiões de curvatura, mas também levaram a um fator curvo. Esses resultados podem ser interpretados sob diferentes perspectivas, dentre as quais se destacam: (1) por que elas ocorrem e (2) quais são seus benefícios para a otimização de processos.

Tabela 7.16 - Resumo das análises de curvatura, convexidade e sentido de otimização para cada modelo de superfície de resposta

| Análise | CTQ | | | | CTP | | | |
|--|-------------|----------------|-------------|----------------|-------------|-------------|---------------------------------|-------------|
| | Ra [μm] | Rq [μm] | Ry [μm] | Rt [μm] | F1 | Pc [kW] | Ec [cm ³ /N.min.] | F2 |
| <i>Curvatura</i> | | | | | | | | |
| ▪ Encontra-se em região de curvatura? | Sim | Sim | Sim | Sim | Sim | Não | Não | Sim |
| <i>Convexidade</i> | | | | | | | | |
| ▪ Qual é a sua convexidade? Autovalores* | Sela | Côncavo | Sela | Côncavo | Sela | Sela | Côncavo | Sela |
| λ_1 | -6,66 | -13,14 | -38,27 | -43,06 | -0,58 | -0,02 | -83,33 | 42,53 |
| λ_2 | -3,49 | -7,44 | -7,27 | -15,73 | 0,41 | 0,02 | -48,02 | 14,82 |
| λ_3 | 2,95 | -2,38 | 1,09 | -6,86 | 0,03 | 0,01 | -9,67 | -3,78 |
| <i>Ponto Estacionário</i> | | | | | | | | |
| ▪ Qual é a natureza do ponto estacionário? | Sela | Máximo | Sela | Máximo | Sela | Sela | Máximo | Sela |
| ▪ O ponto estacionário encontra-se dentro da região experimental? ** | Não | Sim | Não | Não | Não | Não | Não | Não |
| x_{s_1} | 1,011 | 0,092 | 13,472 | -0,619 | 75,000 | -8,747 | -1,360 | -2,054 |
| x_{s_2} | -0,239 | 0,048 | -11,421 | 1,529 | -20,000 | 0,996 | 1,382 | 3,028 |
| x_{s_3} | 0,388 | 0,313 | -13,387 | 1,455 | -94,000 | 2,503 | 1,179 | -0,335 |
| ρ^2 | 3,038 | 0,109 | 491,145 | 4,837 | 14,861 | 83,772 | 5,147 | 13,496 |
| <i>Otimização</i> | | | | | | | | |
| ▪ Qual é o seu sentido de otimização? | Min. | Min. | Min. | Min. | Min. | Max. | Max. | Max. |
| ▪ O sentido de otimização é compatível com a convexidade? | Não | Não | Não | Não | Não | Não | Sim | Não |

*Valores multiplicados por $1,0 \times 10^2$. **Essa questão é respondida comparando o raio máximo do arranjo, $\rho = \alpha = 1,682$, com a distância radial ρ do ponto estacionário até o centro do arranjo. **Nota:** Resultados satisfatórios são destacados em negrito.

Fonte: Autoria própria.

Ao realizar testes de curvatura para cada variável de resposta, como mostrado na Tabela 7.17, nota-se que, para fatores rotacionados, tanto as diferenças entre os pontos fatoriais e os

pontos centrais quanto as diferenças entre os pontos centrais são exageradas em relação às variáveis originais. Isso ocorre porque a análise fatorial pondera os autovetores pela raiz quadrada dos autovalores (RENCHEER, 2002), produzindo maior dispersão dos dados e, portanto, acentuando a curva.

Considerando que a região de curvatura contém um ponto estacionário, a análise fatorial pode favorecer os algoritmos de busca utilizados na otimização, fornecendo um critério natural de parada, que, para regiões planas, deve ser fornecido (às vezes arbitrariamente) pelo tomador de decisão.

Tabela 7.17 - Teste de curvatura para as variáveis originais e para os fatores

| | <i>Ra</i> | <i>Rq</i> | <i>Ry</i> | <i>Rt</i> | <i>F1</i> | <i>Pc</i> | <i>Ec</i> | <i>F2</i> |
|--|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------------------------|-----------|
| Cálculos* | | | | | | | | |
| \bar{y}_F | 51,175 | 59,013 | 315,950 | 379,575 | -62,968 | 28,536 | 142,963 x 10 ⁻² | 28,956 |
| \bar{y}_C | 60,350 | 82,200 | 366,700 | 455,700 | 94,815 | 28,392 | 141,600 x 10 ⁻² | -35,611 |
| $(\bar{y}_F - \bar{y}_C)$ | -9,175 | -23,188 | -50,750 | -76,125 | -157,783 | 0,144 | 1,363 x 10 ⁻² | 64,567 |
| $(\bar{y}_F - \bar{y}_C)^2$ | 0,842 | 5,377 | 25,756 | 57,950 | 248,956 | 0,000 | 0,000 x 10 ⁻² | 41,689 |
| $MS_{\text{curvatura}}$ | 2,886 | 18,434 | 88,305 | 198,686 | 853,563 | 0,001 | 0,001 x 10 ⁻² | 142,933 |
| $\sum_{i=1}^{n_c} (\bar{y}_i - \bar{y}_C)^2$ | 0,059 | 1,080 | 7,463 | 4,850 | 6,563 | 0,008 | 0,003 x 10 ⁻² | 3,534 |
| MS_{erro} | 0,012 | 0,216 | 1,493 | 0,970 | 1,313 | 0,002 | 0,001 x 10 ⁻² | 0,707 |
| Estatísticas | | | | | | | | |
| F_0 | 243,97 | 85,33 | 59,16 | 204,85 | 650,31 | 0,44 | 1,16 | 202,21 |
| P-value | 0,000 | 0,000 | 0,001 | 0,000 | 0,000 | 0,538 | 0,330 | 0,000 |

*Valores multiplicados por 10². **Nota:** Neste caso, para todas as variáveis de resposta, $n_F = 8$ e $n_C = 6$.

Fonte: Autoria própria.

Com base nos autovalores da matriz **B**, a convexidade e a natureza do ponto estacionário de cada modelo de superfície de resposta também foram analisadas. Como demonstrado na Tabela 7.16, uma vez que todos os seus autovalores são negativos, *Rq*, *Rt* e *Ec* apresentam modelos côncavos e, portanto, seus pontos estacionários são máximos. Esse é um resultado desejado para *Rq* e *Rt*, tendo em vista que possuem sentidos de minimização, o que revela compatibilidade computacional. No entanto, as demais respostas exibem formatos de sela (*Ra*, *Ry*, *F1*, *Pc* e *F2*) ou côncavo (*Ec*), revelando, assim, incompatibilidades com as direções de

minimização. Nesses casos, as soluções ótimas sempre estarão nas bordas da região experimental, onde a variância de previsão é, naturalmente, maior – conforme discutido na seção 2.2.4.

Esses resultados seguem o que foi identificado por Oliveira *et al.* (2019), que apontaram uma probabilidade de, aproximadamente, 68,00% dos modelos de manufatura apresentarem convexidade em formato de sela. Nesta seção do estudo, foi identificada uma proporção de 62,50% (5/8). Além disso, foi constatado que 87,50% (7/8) dos modelos apresentam convexidade incompatível com a direção da otimização; em Oliveira *et al.* (2019), a probabilidade associada foi superior a 78% (com proporção amostral de 86,61%).

Ademais, verificou-se que apenas o ponto estacionário de Rt encontra-se dentro da região experimental, o que significa que, mesmo na otimização de uma única variável, com compatibilidade computacional entre a convexidade e o sentido de otimização (casos de Rq e Rt), o ponto estacionário, admitido como ponto de ótimo, tende a apresentar elevada variância de previsão. De outro modo, optando-se pelo uso da restrição do espaço experimental, conforme recomendado na literatura (DEL CASTILHO, 2007; HOERL, 1985), será encontrada uma solução intermediária, com pior valor médio, mas com melhor capacidade de previsão.

7.2.6 Abordagem multivariada tradicional: otimização bi-objetivo de variáveis latentes

Nesta seção, o método NBI é aplicado para a solução do problema multiobjetivo mutivariado elaborado para $F1$ e $F2$. Considerando as discussões anteriores, esse problema pode ser genericamente formulado para os modelos de superfície de resposta dos fatores rotacionados, da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} F_1(\mathbf{x}) \\ \max_{\mathbf{x}} F_2(\mathbf{x}) \end{cases}, \text{ s.t.: } \mathbf{x}^T \mathbf{x} \leq \rho^2 \quad (7.45)$$

Como apresentado na seção 4, o primeiro passo para a otimização multiobjetivo consiste na construção da matriz *pay-off*, usualmente obtida a partir da otimização individual de cada variável de resposta, de acordo com os sentidos de otimização mostrados na Tabela 7.16. Para o caso analisado, a matriz *pay-off* construída inclui tanto as variáveis originais como os fatores rotacionados, conforme disposto na Equação (7.46).

$$\Psi = \begin{bmatrix} & Ra & Rq & Ry & Rt & Pc & Ec & F_1 & F_2 \\ Ra & 0.307 & 0.313 & 0.348 & 0.312 & 0.743 & 0.654 & 0.312 & 0.371 \\ Rq & 0.323 & 0.317 & 0.417 & 0.326 & 0.649 & 0.705 & 0.318 & 0.557 \\ Ry & 2.447 & 2.444 & 2.278 & 2.496 & 4.389 & 4.057 & 2.419 & 2.347 \\ Rt & 2.623 & 2.603 & 3.278 & 2.566 & 4.682 & 4.347 & 2.641 & 3.466 \\ Pc & 0.223 & 0.218 & 0.258 & 0.214 & 0.386 & 0.362 & 0.221 & 0.210 \\ Ec & 0.013 & 0.013 & 0.014 & 0.013 & 0.016 & 0.017 & 0.013 & 0.013 \\ F_1 & -2.206 & -2.245 & -1.797 & -2.159 & 0.093 & -0.286 & -2.254 & -0.752 \\ F_2 & 0.554 & 0.524 & 0.107 & 0.673 & -2.307 & -2.276 & 0.465 & 1.481 \end{bmatrix} \quad (7.46)$$

Ψ_F

onde: Ψ é a matriz *pay-off* genérica para todas as variáveis originais e fatores; e Ψ_F é a matriz *pay-off* para os fatores dentro da matriz genérica.

Mediante a Equação (7.46), é possível notar que a otimização individual de $F1$ leva os valores de Ra , Rq , Ry e Rt a acompanharem suas respectivas utopias. Em relação à $F2$, contudo, há menos aderência às utopias de Pc e Ec . Isso pode ser explicado, em termos globais, pelo menor percentual de variação $\text{Var} [\%]$ de $F2$ e, mais especificamente, por cargas médias de $F2$ associadas a Ra e a Ry (note-se que as utopias dessas variáveis também acompanham, em certo grau, os valores de $F2$). Além disso, a variável Pc também está minimamente representada em $F1$ – vide a Tabela 7.14.

Apesar disso, esses resultados demonstram que os fatores rotacionados são capazes de representar as variáveis originais do processo, considerando alguns ganhos em relação aos fatores originais. Como mostrado na Tabela 7.14, com a análise fatorial original, seria possível representar 73,10% da variação dos dados usando um único fator, de modo a tratar as medidas CTQ e CTP conjuntamente. Contudo, usualmente, uma porcentagem considerada aceitável é superior a 80% (retome-se a seção 3). Nesse caso, portanto, seriam necessários dois fatores, representando 87,50% da variação dos dados, mas sem uma separação clara das medidas CTQ e CTP através dos fatores.

Assim, a análise fatorial rotacionada mostrou-se como uma alternativa satisfatória, viabilizando a representação de 87,50% da variação original e discriminando mais claramente as medidas CTQ e CTP, respectivamente através dos fatores $F1$ e $F2$. Apesar disso, como $F1$ apresenta uma porcentagem maior de variação $\text{Var} [\%]$, conforme apresentado na seção 7.2.3, as medidas CTQ são ligeiramente favorecidas; esse é um resultado benéfico para a otimização, pois, como discutido na seção 7.2.4, a rugosidade é uma resposta mais difícil de controlar.

Com base na matriz *pay-off*, então, foram obtidos o vetor de fatores e a matriz *pay-off* normalizados. Para isso, retomando a Equação (4.12), empregam-se as seguintes transformações:

$$\bar{F}_1(\mathbf{x}) = \left[\frac{F_1(\mathbf{x}) - F_1^U}{F_1^N - F_1^U} \right] = \left[\frac{F_1(\mathbf{x}) - (-2,254)}{1,502} \right] \quad (7.47)$$

$$\bar{F}_2(\mathbf{x}) = \left[\frac{F_2(\mathbf{x}) - F_2^U}{F_2^N - F_2^U} \right] = \left[\frac{F_2(\mathbf{x}) - (1,481)}{-1,017} \right] \quad (7.48)$$

O vetor de funções objetivo normalizado $\bar{\mathbf{F}}_S(\mathbf{x})$ e a matriz *pay-off* $\bar{\Psi}_F$, por suas vezes, são expostos na Equação (7.49).

$$\bar{\mathbf{F}}_S(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{F_1(\mathbf{x}) - (-2,254)}{1,502} \\ \frac{F_2(\mathbf{x}) - (1,481)}{-1,017} \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{\Psi}_F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.49)$$

Assim, aplicando-se a Equação (4.13), o problema NBI tradicional para fatores rotacionados pode ser resolvido. Neste trabalho, à semelhança do estudo da seção 7.1, adota-se o algoritmo GRG para solucionar os subproblemas do NBI, considerando um conjunto de 21 pares de pesos complementares ($w, 1-w$), como comumente empregado na literatura (ARRUDA *et al.*, 2019; BACCI *et al.*, 2019; LOPES *et al.*, 2016). O conjunto de 21 soluções ótimas obtidas é apresentado na Tabela 7.18. A Figura 7.24 fornece a fronteira de Pareto para F_1 e F_2 , construída a partir dessas soluções. Para ilustrar o significado prático dessa otimização, foi destacada uma solução conveniente da fronteira de Pareto, na qual, para $vc=60,070$ m/min, $ae=15,589$ mm e $fz=0,076$ mm/dente, obtiveram-se $Ra=0,345$ μm , $Rq=0,428$ μm , $Ry=2,473$ μm , $Rt=2,885$ μm , $Pc=0,204$ kW e $Ec=1,246 \times 10^{-2}$ $\text{cm}^3/(\text{N}\cdot\text{min})$.

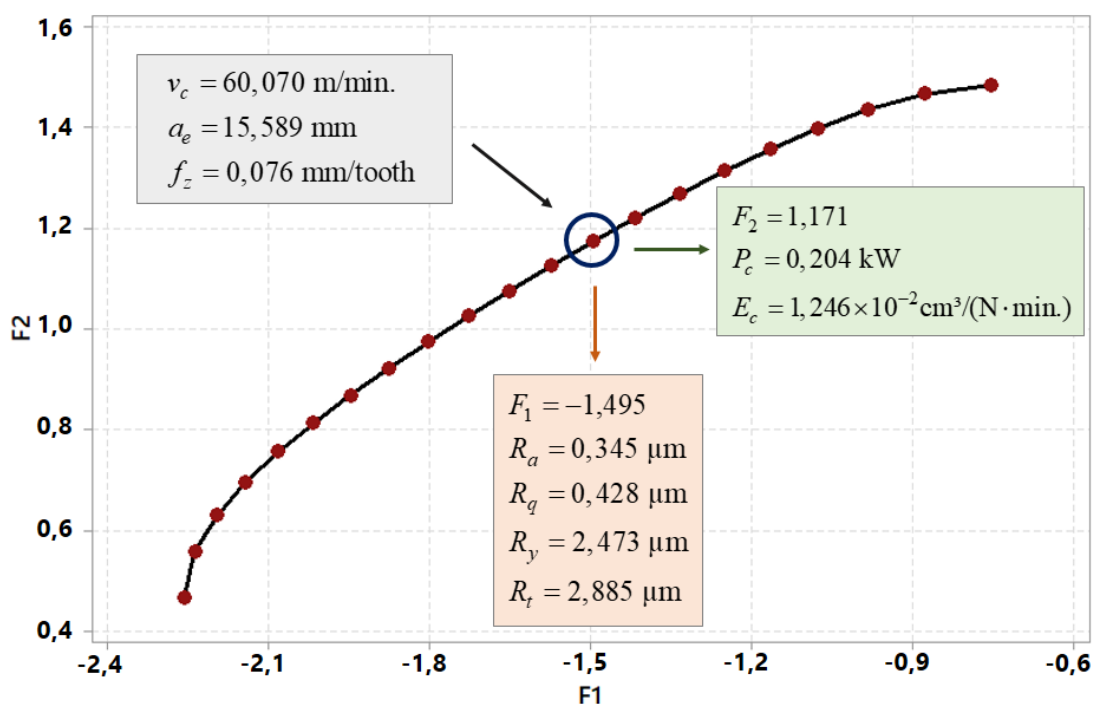


Figura 7.24 - Fronteira de Pareto para $F1$ e $F2$ ¹

¹O ponto selecionado ilustra uma solução ótima em termos de seus fatores e variáveis originais.

Fonte: Autoria própria.

A fronteira de Pareto mostrada na Figura 7.24 também pode ser vista dentro da região viável de solução, como mostrado na Figura 7.25a. Essa figura fornece, para todas as variáveis (originais e latentes), as projeções bidimensionais das superfícies de resposta. Além disso, também fornece a projeção da restrição do espaço experimental, estabelecendo, assim, a região viável dentro da região do arranjo.

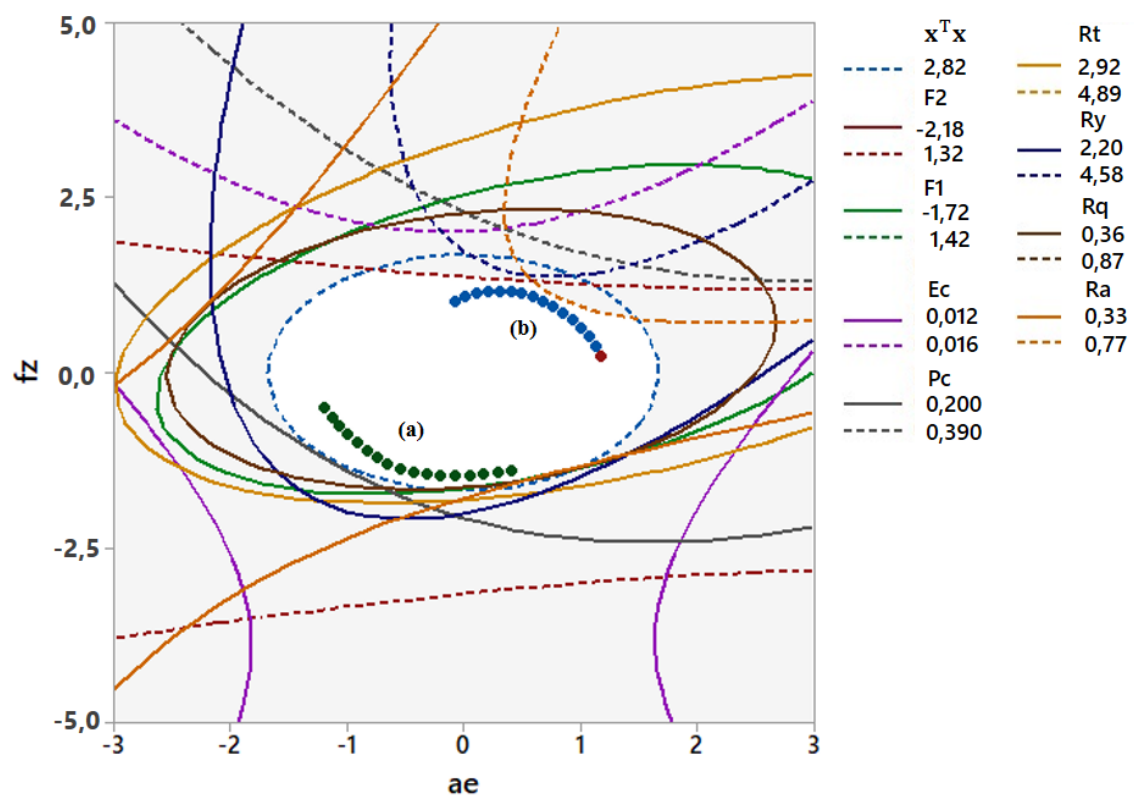


Figura 7.25 - Fronteiras de Pareto inseridas dentro da região viável de solução para as abordagens (a) tradicional e (b) proposta¹

¹Os pontos em azul indicam as soluções capazes encontradas pela abordagem proposta

Fonte: Autoria própria.

Tabela 7.18 - Soluções ótimas obtidas com a abordagem multivariada tradicional

| No. | w_i | Parâmetros de Controle | | | | | | Respostas | | | | | | | | | |
|-----|-------|------------------------|---------|------------|---------|------------------|---------|------------|-------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------|--|--------------------|--------------------|
| | | v_c [m/min.] | | a_e [mm] | | f_z [mm/dente] | | Otimizados | | | | | Avaliados | | | | |
| | | Cod. | Descod. | Cod. | Descod. | Cod. | Descod. | $F1$ | $F2$ | Ra [μ m] | Rq [μ m] | Ry [μ m] | Rt [μ m] | Pc [kW] | $Ec \times 10^{-2}$ [cm ³ /N.min.] | $MCpk$ ($F1$) | $MCpk$ ($F2$) |
| 1 | 0,000 | -1,053 | 59,737 | -1,215 | 14,678 | -0,495 | 0,090 | -0,753 | 1,482 | 0,371 | 0,557 | 2,346 | 3,466 | 0,210 | 1,254 | 0,000 | -2,379 |
| 2 | 0,050 | -1,038 | 59,808 | -1,140 | 14,790 | -0,671 | 0,087 | -0,878 | 1,465 | 0,369 | 0,533 | 2,352 | 3,354 | 0,206 | 1,249 | -0,185 | -2,340 |
| 3 | 0,100 | -1,034 | 59,832 | -1,064 | 14,904 | -0,793 | 0,084 | -0,982 | 1,433 | 0,366 | 0,515 | 2,367 | 3,267 | 0,205 | 1,247 | -0,338 | -2,266 |
| 4 | 0,150 | -1,034 | 59,828 | -0,985 | 15,023 | -0,888 | 0,082 | -1,076 | 1,395 | 0,362 | 0,498 | 2,386 | 3,191 | 0,204 | 1,246 | -0,476 | -2,178 |
| 5 | 0,200 | -1,039 | 59,804 | -0,901 | 15,148 | -0,968 | 0,081 | -1,165 | 1,354 | 0,358 | 0,483 | 2,407 | 3,121 | 0,204 | 1,245 | -0,608 | -2,081 |
| 6 | 0,250 | -1,024 | 59,881 | -0,834 | 15,249 | -1,042 | 0,079 | -1,251 | 1,310 | 0,355 | 0,468 | 2,423 | 3,057 | 0,204 | 1,245 | -0,734 | -1,979 |
| 7 | 0,300 | -1,022 | 59,891 | -0,752 | 15,372 | -1,104 | 0,078 | -1,334 | 1,265 | 0,351 | 0,455 | 2,443 | 2,996 | 0,204 | 1,245 | -0,856 | -1,873 |
| 8 | 0,350 | -1,003 | 59,986 | -0,683 | 15,476 | -1,165 | 0,077 | -1,415 | 1,219 | 0,348 | 0,441 | 2,458 | 2,939 | 0,204 | 1,246 | -0,976 | -1,764 |
| 9 | 0,400 | -0,986 | 60,070 | -0,608 | 15,589 | -1,220 | 0,076 | -1,495 | 1,171 | 0,345 | 0,428 | 2,473 | 2,885 | 0,204 | 1,246 | -1,094 | -1,652 |
| 10 | 0,450 | -0,975 | 60,125 | -0,521 | 15,718 | -1,268 | 0,075 | -1,574 | 1,122 | 0,341 | 0,415 | 2,490 | 2,832 | 0,205 | 1,247 | -1,209 | -1,538 |
| 11 | 0,500 | -0,945 | 60,276 | -0,451 | 15,824 | -1,317 | 0,074 | -1,651 | 1,073 | 0,338 | 0,403 | 2,500 | 2,785 | 0,205 | 1,248 | -1,323 | -1,423 |
| 12 | 0,550 | -0,910 | 60,451 | -0,380 | 15,930 | -1,363 | 0,073 | -1,727 | 1,023 | 0,335 | 0,390 | 2,508 | 2,741 | 0,206 | 1,250 | -1,435 | -1,305 |
| 13 | 0,600 | -0,889 | 60,554 | -0,282 | 16,077 | -1,400 | 0,072 | -1,802 | 0,972 | 0,330 | 0,379 | 2,519 | 2,697 | 0,207 | 1,251 | -1,545 | -1,186 |
| 14 | 0,650 | -0,848 | 60,762 | -0,202 | 16,197 | -1,439 | 0,071 | -1,875 | 0,919 | 0,327 | 0,367 | 2,523 | 2,659 | 0,208 | 1,254 | -1,652 | -1,064 |
| 15 | 0,700 | -0,803 | 60,984 | -0,114 | 16,330 | -1,474 | 0,071 | -1,946 | 0,866 | 0,323 | 0,357 | 2,525 | 2,625 | 0,209 | 1,256 | -1,757 | -0,939 |
| 16 | 0,750 | -0,753 | 61,235 | -0,016 | 16,476 | -1,504 | 0,070 | -2,015 | 0,811 | 0,319 | 0,346 | 2,523 | 2,597 | 0,210 | 1,258 | -1,859 | -0,810 |
| 17 | 0,800 | -0,680 | 61,600 | 0,059 | 16,588 | -1,537 | 0,069 | -2,081 | 0,754 | 0,317 | 0,336 | 2,513 | 2,578 | 0,211 | 1,262 | -1,956 | -0,677 |
| 18 | 0,850 | -0,603 | 61,983 | 0,159 | 16,738 | -1,562 | 0,069 | -2,142 | 0,693 | 0,313 | 0,328 | 2,501 | 2,566 | 0,213 | 1,267 | -2,046 | -0,535 |
| 19 | 0,900 | -0,504 | 62,481 | 0,247 | 16,870 | -1,586 | 0,068 | -2,195 | 0,628 | 0,311 | 0,321 | 2,481 | 2,569 | 0,215 | 1,273 | -2,124 | -0,382 |
| 20 | 0,950 | -0,380 | 63,098 | 0,341 | 17,012 | -1,603 | 0,068 | -2,237 | 0,554 | 0,310 | 0,317 | 2,453 | 2,590 | 0,218 | 1,281 | -2,185 | -0,210 |
| 21 | 1,000 | -0,217 | 63,914 | 0,447 | 17,171 | -1,607 | 0,068 | -2,255 | 0,465 | 0,311 | 0,319 | 2,415 | 2,644 | 0,222 | 1,294 | -2,211 | 0,000 |

Fonte: Autoria própria.

A Figura 7.24 e a Figura 7.25 denotam a natureza conflitante entre o conjunto de respostas representadas pelos fatores $F1$ e $F2$. Ou seja, uma redução em $F1$ (resultado desejável) implica em uma redução em $F2$ (resultado indesejável); por outro lado, um aumento em $F2$ (resultado desejável) implica em um aumento em $F1$ (resultado indesejável). Portanto, este estudo fornece um conjunto de soluções ótimas que devem ser avaliadas pelo tomador de decisão de acordo com a aplicação desejada. Se, para a indústria analisada, a qualidade da superfície usinada é uma importante vantagem competitiva, a solução 21 pode ser recomendada, pois atinge o menor valor de rugosidade medido por Ra , Rq , Ry e Rt . No entanto, se o tomador de decisão admitir alguma perda de qualidade em prol da produtividade e da eficiência do processo, outras soluções da Tabela 7.18 poderão ser endossadas.

Como pode ser visto na Tabela 7.18, a abordagem multivariada tradicional pode fornecer faixas de valores médios apropriadas para as características CTQ e CTP (GUPTA; JAIN, 2014). No entanto, para o caso estudado, todas as soluções têm capacidades de previsão indesejáveis. Isso ocorre porque a otimização é realizada usando as expressões de valor esperado dos fatores, nas quais as variâncias não são levadas em consideração. Tendo em vista que $F1$ e $F2$ apresentam formato de sela, como mostrado na seção 7.2.5, sabe-se que as soluções obtidas na fronteira de Pareto da Figura 7.25 tendem às bordas do arranjo, onde a capacidade de previsão é reduzida. Isso demonstra que, embora sejam soluções médias satisfatórias, a probabilidade de serem observadas repetidamente é baixa.

Para superar esse problema, uma estratégia de otimização que considera tanto os valores médios como as variâncias de previsão de modelos correlacionados foi desenvolvida, conforme introduzido na seção 6.2.2. Assim, tomando o mesmo conjunto de dados apresentado na Tabela 7.13, na próxima seção, aplica-se a estratégia proposta para o processo de fresamento do aço inoxidável duplex e comparam-se os resultados obtidos com a abordagem tradicional.

7.2.7 Abordagem proposta: otimização bi-objetivo de razões de capacidade multivariadas

Nesta seção, aplica-se a abordagem proposta na seção 6.2.2 ao processo de fresamento. Como discutido na seção 7.2.5, $F1$ deve ser minimizado e $F2$ deve ser maximizado. Então, com a aplicação das Equações (6.21) e (6.22), os índices de capacidade multivariada são dados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned}
MC_{\sim pk}^1(\mathbf{x}) &= \frac{LSE - E[F_{S_1}(\mathbf{x})]}{3 \cdot \sqrt{Var[F_{S_1}(\mathbf{x})|\mathbf{x}_0]}} \\
&= \frac{[f_{S_1}^N - f_{S_1}(\mathbf{x})]}{3 \cdot \sigma_{f_{S_1}(\mathbf{x})} \sqrt{[x_0^{(m)\top} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} x_0^{(m)}]}} \quad , \text{ para } F1 \\
&= \frac{-[0,752 + f_{S_1}(\mathbf{x})]}{3 \cdot (0,290) \sqrt{[x_0^{(m)\top} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} x_0^{(m)}]}}
\end{aligned} \tag{7.50}$$

$$\begin{aligned}
MC_{\sim pk}^2(\mathbf{x}) &= \frac{E[F_2(\mathbf{x})] - LIE}{3 \cdot \sqrt{Var[F_2(\mathbf{x})|\mathbf{x}_0]}} \\
&= \frac{[f_{S_2}^N - f_{S_2}(\mathbf{x})]}{3 \cdot \sigma_{f_{S_2}(\mathbf{x})} \sqrt{[x_0^{(m)\top} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} x_0^{(m)}]}} \quad , \text{ para } F2 \\
&= \frac{[0,465 - f_{S_2}(\mathbf{x})]}{3 \cdot (0,182) \sqrt{[x_0^{(m)\top} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} x_0^{(m)}]}}
\end{aligned} \tag{7.51}$$

Uma vez construídas as razões de capacidade, a Equação (6.23) pode ser utilizada para formular o problema bi-objetivo da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\max_{\mathbf{x}} \mathbf{MC}_{pk}(\mathbf{x}) &= [MC_{\sim pk}^1(\mathbf{x}), MC_{\sim pk}^2(\mathbf{x})] \\
\text{s.t.: } \mathbf{x}^T \mathbf{x} &\leq \rho^2
\end{aligned} \tag{7.52}$$

A partir do problema apresentado na Equação (7.52), o primeiro passo para resolvê-lo consiste em estabelecer uma matriz *pay-off* para as razões de capacidade multivariadas. Em seguida, aplicando-se as (6.24) e (6.25), encontra-se a seguinte matriz:

$$\mathbf{MK} = \begin{pmatrix} MC_{\sim pk}^{1\ U} & MC_{\sim pk}^{1\ N} \\ MC_{\sim pk}^{2\ N} & MC_{\sim pk}^{2\ U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,772 & 1,824 \\ 1,490 & 7,188 \end{pmatrix} \tag{7.53}$$

Então, a partir das Equações (6.26) e (6.27), obtêm-se as funções escalonadas para $\overline{MC}_{\tilde{p}k}^1(\mathbf{x})$ e $\overline{MC}_{\tilde{p}k}^2(\mathbf{x})$, como mostrado na Equação (7.54).

$$\overline{MC}_{\tilde{p}k}^1(\mathbf{x}) = \left[\frac{MC_{\tilde{p}k}^1(\mathbf{x}) - MC_{\tilde{p}k}^{1U}}{MC_{\tilde{p}k}^{1N} - MC_{\tilde{p}k}^{2U}} \right] = \left[\frac{MC_{\tilde{p}k}^1(\mathbf{x}) - 5,772}{-3,948} \right]$$

$$\overline{MC}_{\tilde{p}k}^2(\mathbf{x}) = \left[\frac{MC_{\tilde{p}k}^2(\mathbf{x}) - MC_{\tilde{p}k}^{2U}}{MC_{\tilde{p}k}^{2N} - MC_{\tilde{p}k}^{2U}} \right] = \left[\frac{MC_{\tilde{p}k}^2(\mathbf{x}) - 7,188}{-5,699} \right]$$
(7.54)

Desse modo, o problema multiobjetivo via NBI, estabelecido na Equação (6.33), pode ser resolvido para diferentes pesos w , variando de 0 a 1 com incrementos de 0,05, usando o algoritmo GRG. A Tabela 11 apresenta as 21 soluções obtidas com este procedimento. A Figura 7.26 mostra as fronteiras de Pareto para as razões de capacidade e a Figura 7.27 revela a fronteira de Pareto convertida nos fatores rotacionados $F1$ e $F2$.

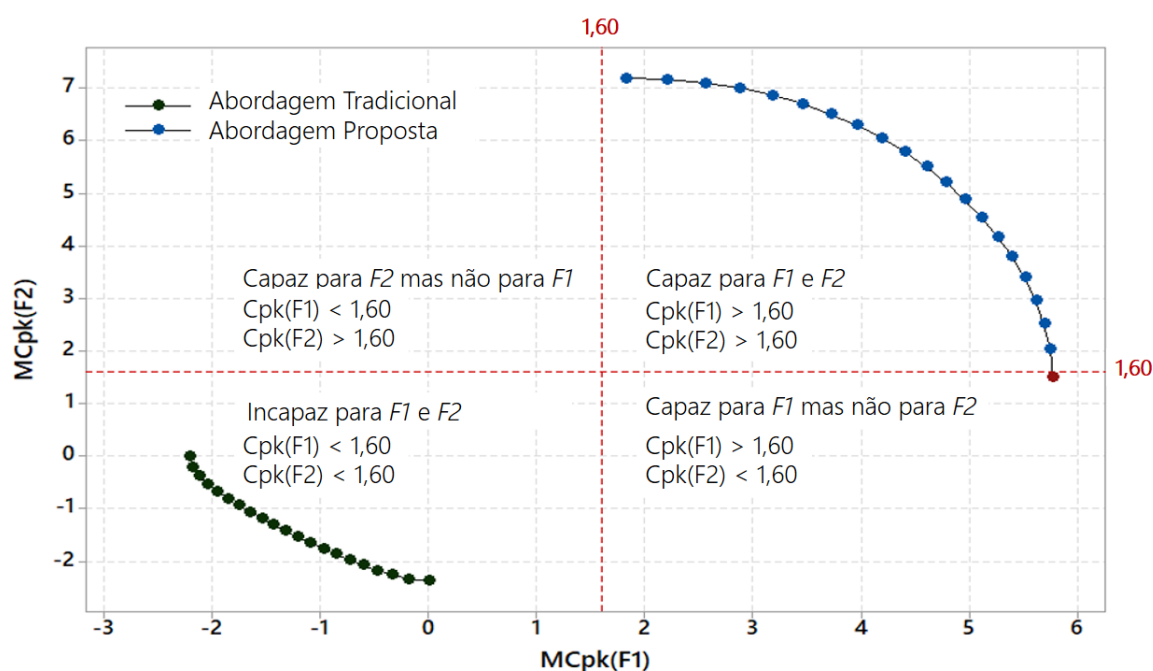


Figura 7.26 – Fronteira de Pareto para $MCpk(F1)$ e $MCpk(F2)$ com clusters de capacidade para as soluções ótimas¹

¹ Os pontos em azul indicam que a abordagem proposta pode encontrar soluções capazes para $F1$ e $F2$.

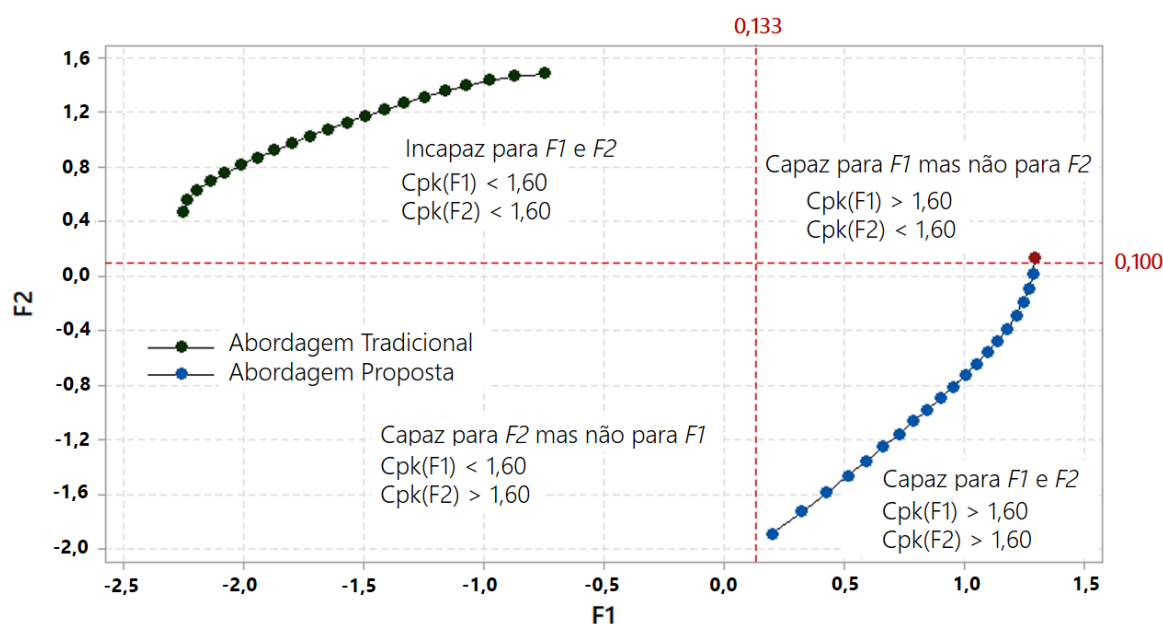


Figura 7.27 - Fronteira de Pareto para as variáveis latentes $F1$ e $F2$ com clusters de capacidade para as soluções ótimas¹

¹Os pontos em azul indicam que a abordagem proposta pode encontrar soluções capazes para ambos os fatores, onde a abordagem tradicional encontra valores adequados para a média com variância desfavorável

Fonte: Autoria própria.

Nas duas figuras, pode-se observar que, diferentemente da abordagem tradicional da seção 7.2.6, quase todo o conjunto de soluções ótimas geradas pela abordagem proposta estava localizado em regiões com boa previsibilidade para as duas variáveis de resposta. No entanto, uma solução provou ser capaz para $F1$, mas incapaz de $F2$ (solução 21). Isso demonstra que, embora $F1$ seja uma variável mais difícil de controlar (seção 7.2.4), ela foi favorecida com a otimização proposta, pelo menos no que diz respeito à capacidade de previsão.

Considerando os gráficos de intervalo das soluções ótimas obtidas com ambas as abordagens, a Figura 7.28 revela que, de fato, a abordagem multivariada tradicional tende a fornecer valores médios mais satisfatórios para $F1$ e, portanto, para as rugosidades Ra , Rq , Ry e Rt . No entanto, assumindo algumas perdas nas características CTQ (e até mesmo alguns ganhos nas características CTP), a estratégia proposta pode ser efetiva para mais que quadruplicar a capacidade de previsão das soluções Pareto ótimas.

Comparando-se a Tabela 7.18 e a Tabela 7.19, essa análise também revela que faixas maiores dos parâmetros de controle conferem maior capacidade de previsão às soluções de Pareto. No entanto, como discutido anteriormente, qualquer aumento nos parâmetros de controle do processo de fresamento tende a piorar a rugosidade, ao mesmo tempo em que as

características CTP são melhoradas. Portanto, dependendo da aplicação, o tomador de decisão pode escolher melhorar tanto a produtividade como a capacidade de previsão, com perdas na qualidade; ou, melhorar a qualidade, admitindo perdas na produtividade e na previsibilidade.

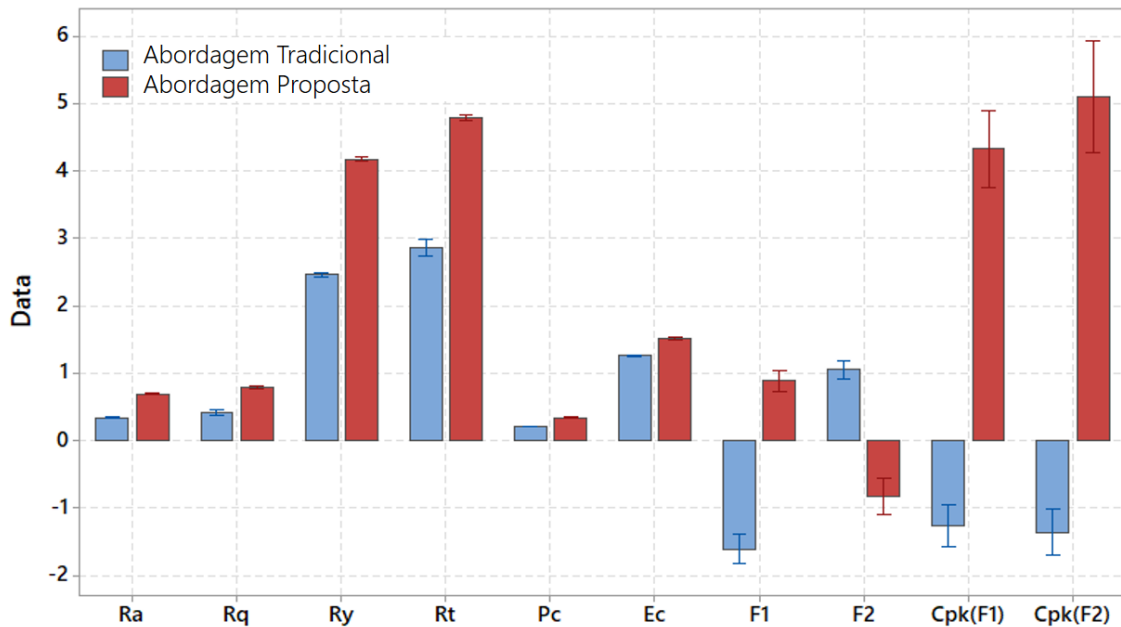


Figura 7.28 - Gráficos de intervalo para as variáveis de resposta mostrando os *trade-offs* impostos pelas abordagens tradicional e proposta.¹

¹As barras de *Ec* foram multiplicadas por 10^2

Fonte: Autoria própria.

Tabela 7.19 - Soluções ótimas obtidas com a abordagem proposta

| No. | w_i | Parâmetros de Controle | | | | | | Respostas | | | | | | | | | |
|-----|-------|------------------------|---------|------------|---------|------------------|---------|----------------|----------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------|--|-------|--------|
| | | v_c [m/min.] | | a_e [mm] | | f_z [mm/tooth] | | Otimizadas | | | | Avaliadas | | | | | |
| | | Cod. | Descod. | Cod. | Descod. | Cod. | Descod. | $MCpk$ (F1) | $MCpk$ (F2) | Ra [μ m] | Rq [μ m] | Ry [μ m] | Rt [μ m] | Pc [kW] | $Ec \times 10^{-2}$ [cm ³ /N.min.] | $F1$ | $F2$ |
| 1 | 0,000 | 0,846 | 69,229 | 0,145 | 16,717 | 1,113 | 0,122 | 1,824 | 7,188 | 0,692 | 0,714 | 4,293 | 4,576 | 0,361 | 1,615 | 0,198 | -1,893 |
| 2 | 0,050 | 0,797 | 68,987 | 0,163 | 16,745 | 1,053 | 0,121 | 2,203 | 7,165 | 0,693 | 0,730 | 4,268 | 4,622 | 0,358 | 1,602 | 0,321 | -1,732 |
| 3 | 0,100 | 0,750 | 68,752 | 0,180 | 16,771 | 1,002 | 0,120 | 2,553 | 7,100 | 0,693 | 0,744 | 4,248 | 4,660 | 0,354 | 1,591 | 0,423 | -1,593 |
| 4 | 0,150 | 0,704 | 68,519 | 0,197 | 16,795 | 0,958 | 0,119 | 2,877 | 6,998 | 0,694 | 0,755 | 4,231 | 4,691 | 0,351 | 1,580 | 0,511 | -1,470 |
| 5 | 0,200 | 0,657 | 68,284 | 0,213 | 16,819 | 0,921 | 0,118 | 3,178 | 6,863 | 0,694 | 0,765 | 4,216 | 4,718 | 0,348 | 1,570 | 0,589 | -1,359 |
| 6 | 0,250 | 0,609 | 68,043 | 0,229 | 16,843 | 0,889 | 0,118 | 3,459 | 6,699 | 0,694 | 0,773 | 4,205 | 4,741 | 0,346 | 1,560 | 0,660 | -1,257 |
| 7 | 0,300 | 0,559 | 67,795 | 0,245 | 16,867 | 0,861 | 0,117 | 3,721 | 6,507 | 0,695 | 0,780 | 4,195 | 4,762 | 0,344 | 1,550 | 0,724 | -1,161 |
| 8 | 0,350 | 0,507 | 67,537 | 0,262 | 16,893 | 0,836 | 0,117 | 3,965 | 6,290 | 0,695 | 0,786 | 4,187 | 4,781 | 0,342 | 1,541 | 0,785 | -1,070 |
| 9 | 0,400 | 0,454 | 67,268 | 0,279 | 16,919 | 0,815 | 0,116 | 4,193 | 6,049 | 0,696 | 0,791 | 4,181 | 4,798 | 0,340 | 1,532 | 0,842 | -0,983 |
| 10 | 0,450 | 0,397 | 66,986 | 0,298 | 16,946 | 0,796 | 0,116 | 4,406 | 5,787 | 0,697 | 0,796 | 4,176 | 4,814 | 0,338 | 1,523 | 0,897 | -0,899 |
| 11 | 0,500 | 0,338 | 66,692 | 0,316 | 16,974 | 0,778 | 0,116 | 4,604 | 5,503 | 0,697 | 0,800 | 4,172 | 4,828 | 0,336 | 1,513 | 0,949 | -0,816 |
| 12 | 0,550 | 0,277 | 66,385 | 0,334 | 17,002 | 0,761 | 0,115 | 4,789 | 5,200 | 0,698 | 0,804 | 4,168 | 4,841 | 0,334 | 1,504 | 1,000 | -0,733 |
| 13 | 0,600 | 0,214 | 66,068 | 0,352 | 17,029 | 0,744 | 0,115 | 4,960 | 4,877 | 0,698 | 0,807 | 4,163 | 4,852 | 0,332 | 1,494 | 1,048 | -0,650 |
| 14 | 0,650 | 0,148 | 65,742 | 0,369 | 17,054 | 0,726 | 0,115 | 5,119 | 4,536 | 0,698 | 0,810 | 4,158 | 4,860 | 0,330 | 1,484 | 1,094 | -0,565 |
| 15 | 0,700 | 0,081 | 65,407 | 0,384 | 17,077 | 0,707 | 0,114 | 5,264 | 4,176 | 0,698 | 0,813 | 4,150 | 4,866 | 0,327 | 1,475 | 1,137 | -0,479 |
| 16 | 0,750 | 0,013 | 65,064 | 0,398 | 17,096 | 0,684 | 0,114 | 5,396 | 3,796 | 0,696 | 0,816 | 4,140 | 4,868 | 0,325 | 1,464 | 1,176 | -0,390 |
| 17 | 0,800 | -0,058 | 64,712 | 0,408 | 17,112 | 0,659 | 0,113 | 5,513 | 3,395 | 0,694 | 0,819 | 4,127 | 4,867 | 0,322 | 1,454 | 1,212 | -0,297 |
| 18 | 0,850 | -0,130 | 64,352 | 0,415 | 17,122 | 0,628 | 0,113 | 5,613 | 2,970 | 0,691 | 0,821 | 4,111 | 4,861 | 0,319 | 1,443 | 1,243 | -0,200 |
| 19 | 0,900 | -0,204 | 63,979 | 0,417 | 17,126 | 0,593 | 0,112 | 5,694 | 2,517 | 0,687 | 0,823 | 4,089 | 4,850 | 0,316 | 1,432 | 1,268 | -0,097 |
| 20 | 0,950 | -0,282 | 63,591 | 0,414 | 17,121 | 0,550 | 0,111 | 5,750 | 2,028 | 0,681 | 0,824 | 4,061 | 4,832 | 0,312 | 1,420 | 1,284 | 0,012 |
| 21 | 1,000 | -0,364 | 63,178 | 0,402 | 17,103 | 0,497 | 0,110 | 5,772 | 1,490 | 0,672 | 0,825 | 4,023 | 4,804 | 0,307 | 1,408 | 1,289 | 0,133 |

Fonte: Autoria própria.

7.2.8 Otimização bi-objetivo dos Erros Quadráticos Médios Multivariados modificados

Como mostrado na seção 7.2.7, a abordagem baseada em razões multivariadas de capacidade forneceu soluções capazes para ambos os fatores rotacionados. No entanto, a fim de avalia-la frente a uma abordagem comparável, desenvolvida na seção 6.3, a presente seção realiza a otimização do processo de fresamento utilizando modelos EQMM modificados. Aplicando-se a Equação (4.14), então, podem-se construir, inicialmente, expressões para $F1$ e $F2$.

Para $F1$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 EQMM_1 &= [F_1(\mathbf{x}) - T_1]^2 + Var[F_1(\mathbf{x})|\mathbf{x}_0] \\
 &= [F_1(\mathbf{x}) - T_1]^2 + \sigma_{f_{s1}(\mathbf{x})}^2 \left[x_0^{(m)\mathbf{T}} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} x_0^{(m)} \right] \\
 &= [F_1(\mathbf{x}) - (-2,254)]^2 + (0,290)^2 \left[x_0^{(m)\mathbf{T}} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} x_0^{(m)} \right]
 \end{aligned} \tag{7.55}$$

Para $F2$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 EQMM_2 &= [F_2(\mathbf{x}) - T_2]^2 + Var[F_2(\mathbf{x})|\mathbf{x}_0] \\
 &= [F_2(\mathbf{x}) - T_2]^2 + \sigma_{f_{s2}(\mathbf{x})}^2 \left[x_0^{(m)\mathbf{T}} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} x_0^{(m)} \right] \\
 &= [F_2(\mathbf{x}) - 1,481]^2 + (0,182)^2 \left[x_0^{(m)\mathbf{T}} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} x_0^{(m)} \right]
 \end{aligned} \tag{7.56}$$

Em seguida, mediante otimizações individuais dessas funções, os pontos de Nadir e de Utopia foram obtidos, conforme exibido na *pay-off* da Equação (7.22).

$$EQMM = \begin{pmatrix} EQMM_1^U & EQMM_1^N \\ EQMM_2^N & EQMM_2^U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14,074 & 3,937 \\ 2,336 & 16,053 \end{pmatrix} \tag{7.57}$$

Ao se aplicar o método NBI-GRG para a otimização bi-objetivo de $EQMM (F1)$ e $EQMM (F2)$, foram obtidas as soluções ótimas apresentadas na Tabela 7.20. Neste caso, como as funções objetivos, mostradas nas Equações (7.55) e (7.56), envolvem polinômios de quarta ordem, recomenda-se o uso dos pontos centrais como solução inicial do problema. A fronteira de Pareto para os EQMMs é exibida na Figura 7.29 em conjunto com a fronteira convertida de MCpk. Observe-se que, ao contrário do caso da seção 7.1.7, neste caso não foi adotada restrição de não-negatividade para as razões de capacidade. Assim, a estratégia de otimização via EQMM apresentou uma maior convergência com a abordagem proposta via MCpk, pelo menos em termos da quantidade de soluções com capacidade de previsão satisfatória.

Tabela 7.20 – Soluções ótimas para o processo investigado via EQMMs modificados¹

| No. | W | Parâmetros de controle codificados | | | Respostas | | | | | |
|-----------|--------------|------------------------------------|---------------|---------------------|---------------|---------------|--------------|---------------|--------------|--------------|
| | | v_c [m/min.] | a_e [mm] | f_z [mm/dente] | Otimizadas | | Calculadas | | | |
| | | | | | $EQMM (F1)$ | $EQMM (F2)$ | F1 | F2 | MCpk (F1) | MCpk (F2) |
| 1 | 0,000 | 0,983 | 0,155 | 1,356 | 3,937 | 16,053 | -0,283 | -2,523 | 0,693 | 7,021 |
| 2 | 0,050 | 0,856 | 0,391 | 1,394 | 4,646 | 15,640 | -0,111 | -2,471 | 0,946 | 6,898 |
| 3 | 0,100 | 0,736 | 0,506 | 1,425 | 5,205 | 15,025 | 0,016 | -2,392 | 1,133 | 6,714 |
| 4 | 0,150 | 0,628 | 0,586 | 1,446 | 5,731 | 14,365 | 0,129 | -2,306 | 1,300 | 6,511 |
| 5 | 0,200 | 0,529 | 0,649 | 1,458 | 6,245 | 13,689 | 0,235 | -2,216 | 1,456 | 6,299 |
| 6 | 0,250 | 0,437 | 0,701 | 1,465 | 6,754 | 13,007 | 0,335 | -2,122 | 1,604 | 6,079 |
| 7 | 0,300 | 0,348 | 0,746 | 1,467 | 7,263 | 12,324 | 0,431 | -2,026 | 1,746 | 5,854 |
| 8 | 0,350 | 0,263 | 0,785 | 1,464 | 7,773 | 11,642 | 0,525 | -1,928 | 1,884 | 5,622 |
| 9 | 0,400 | 0,181 | 0,820 | 1,457 | 8,285 | 10,963 | 0,615 | -1,827 | 2,017 | 5,385 |
| 10 | 0,450 | 0,100 | 0,851 | 1,447 | 8,800 | 10,288 | 0,704 | -1,723 | 2,148 | 5,141 |
| 11 | 0,500 | 0,020 | 0,879 | 1,434 | 9,316 | 9,615 | 0,790 | -1,616 | 2,275 | 4,890 |
| 12 | 0,550 | -0,059 | 0,905 | 1,417 | 9,835 | 8,945 | 0,874 | -1,506 | 2,399 | 4,631 |
| 13 | 0,600 | -0,138 | 0,928 | 1,396 | 10,355 | 8,277 | 0,956 | -1,392 | 2,520 | 4,363 |
| 14 | 0,650 | -0,219 | 0,949 | 1,371 | 10,876 | 7,610 | 1,036 | -1,273 | 2,638 | 4,085 |
| 15 | 0,700 | -0,300 | 0,968 | 1,342 | 11,395 | 6,941 | 1,114 | -1,149 | 2,753 | 3,793 |
| 16 | 0,750 | -0,385 | 0,985 | 1,308 | 11,912 | 6,268 | 1,190 | -1,018 | 2,865 | 3,485 |
| 17 | 0,800 | -0,473 | 1,000 | 1,267 | 12,421 | 5,586 | 1,263 | -0,878 | 2,973 | 3,155 |
| 18 | 0,850 | -0,567 | 1,012 | 1,218 | 12,918 | 4,887 | 1,333 | -0,725 | 3,076 | 2,795 |
| 19 | 0,900 | -0,672 | 1,020 | 1,156 | 13,392 | 4,156 | 1,398 | -0,552 | 3,172 | 2,389 |
| 20 | 0,950 | -0,795 | 1,022 | 1,073 | 13,815 | 3,357 | 1,456 | -0,345 | 3,257 | 1,903 |
| 21 | 1,000 | -0,974 | 1,007 | 0,930 | 14,074 | 2,336 | 1,491 | -0,040 | 3,308 | 1,186 |

¹ Soluções capazes para ambas as respostas foram destacadas em negrito.

Contudo, as limitações de escala e de interpretação dos EQMMs também estão presentes no caso multivariado. Adicionalmente, assim como discutido na seção 7.1.7, comparações com outros processos (uni ou multivariados) tornam-se difíceis com essa abordagem. Por exemplo, no caso da seção 7.1.7, a solução 8 (capaz para ambas as variáveis investigadas, com capacidades próximas de 1,60) apresentou $EQM(T)=83,354$ e $EQM(Ra)=0,733 \times 10^{-2}$. Na Tabela 7.20, por outro lado, encontram-se soluções capazes (revelando capacidades superiores a 5,00) com EQMMs variando entre 6,00 e 10,00.

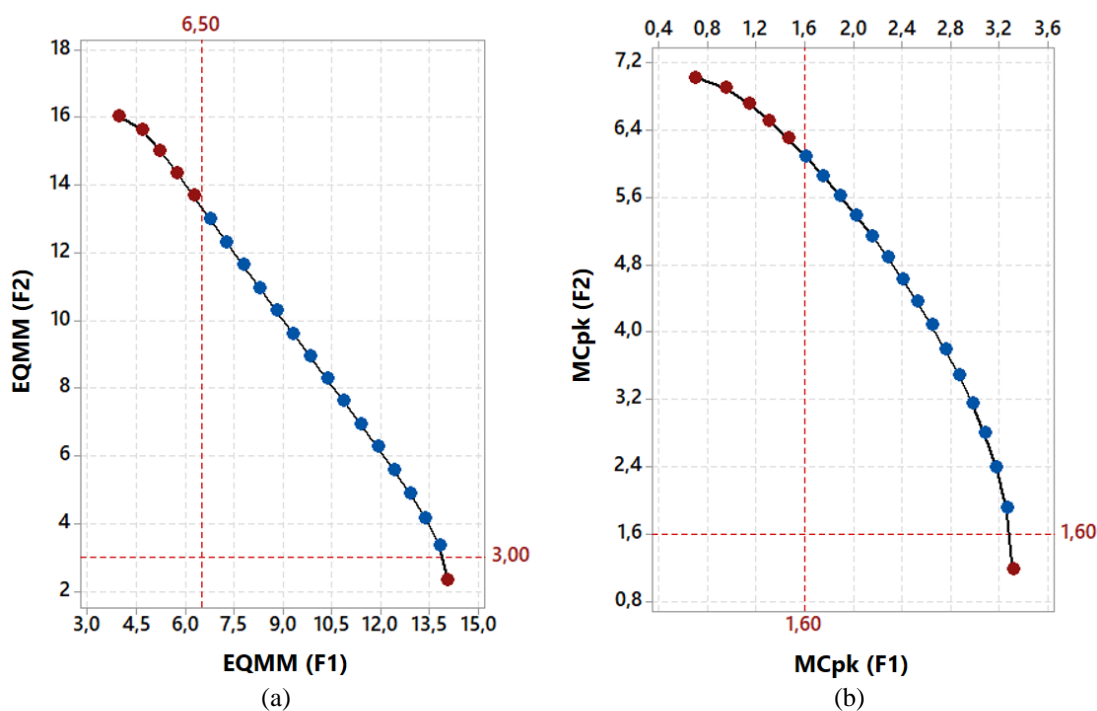


Figura 7.29 - Froteiras de Pareto para (a) $EQMM(F1)$ e $EQMM(F2)$ e (b) $MCpk(F1)$ e $MCpk(F2)$ convertidos¹

¹Os pontos em azul indicam soluções capazes para ambos os fatores

Fonte: Autoria própria.

Apesar disso, por meio da abordagem proposta (Figura 7.29b), pode-se dizer que as variáveis do processo de fresamento estão em condições de capacidade mais satisfatórias que as variáveis do processo de torneamento. Conforme discutido ao longo das seções anteriores, isso, de fato, ocorre, por vários fatores, tais como: (1) o arranjo usado no processo de fresamento possui quantidade superior de pontos centrais; (2) as variáveis desse processo apresentam variâncias experimentais menores; e (3) ambos os fatores encontram-se mais centralizados em relação ao arranjo experimental.

7.2.9 Ganhos potenciais em capacidade de previsão via métricas aglutinadoras de variância

A partir das discussões promovidas na seção 6.3.2, esta seção estabelece novas razões de capacidade de previsão, baseadas em métricas aglutinadoras de variância disponíveis no Quadro 2.1. Uma vez que essas métricas são mais distinguíveis em arranjos com propriedades modificadas (ou, corrompidas), especialmente a distância axial, experimentos axiais para um CCD de face centrada foram simulados usando valores dentro dos intervalos de confiança de $F1$ e $F2$, conforme mostrado na Tabela 7.21. Assim, análises dos ganhos potenciais em capacidade de previsão foram realizadas tanto para o CCD rotacionável, com os dados da Tabela 7.13, como para o CCD de face centrada, com os pontos fatoriais e centrais da Tabela 7.13 e os pontos axiais da Tabela 7.21.

Tabela 7.21 - Pontos axiais em um CCD de face centrada e respostas obtidas

| Exp. No. | Parâmetros de Controle | | | | | | Respostas | |
|----------|------------------------|--------|------------|--------|------------------|-------|-----------|-----------|
| | | | | | | | CTQ | CTP |
| | v_c [m/min.] | | a_e [mm] | | f_z [mm/dente] | | Minimizar | Maximizar |
| Cod. | Descod. | Cod. | Descod. | Cod. | Descod. | $F1$ | $F2$ | |
| 9 | -1,000 | 60,000 | 0,000 | 16,500 | 0,000 | 0,100 | 0,493 | 0,649 |
| 10 | 1,000 | 70,000 | 0,000 | 16,500 | 0,000 | 0,100 | 0,423 | -0,279 |
| 11 | 0,000 | 65,000 | -1,000 | 15,000 | 0,000 | 0,100 | 0,290 | 0,325 |
| 12 | 0,000 | 65,000 | 1,000 | 18,000 | 0,000 | 0,100 | 0,530 | 0,010 |
| 13 | 0,000 | 65,000 | 0,000 | 16,500 | -1,000 | 0,080 | 0,015 | 0,526 |
| 14 | 0,000 | 65,000 | 0,000 | 16,500 | 1,000 | 0,120 | 0,867 | -0,245 |

Fonte: Autoria própria.

Aplicando-se a Equação (6.39), obtêm-se, então, as razões multivariadas modificadas baseadas na variância média integrada para $F1$ e $F2$, conforme apresentado nas Equações (7.58) e (7.59), respectivamente. Assim como no caso da seção 7.1, a transformação formulada pela Equação (2.38) é desconsiderada, a fim de tornar IV_ρ uma medida direta de variância (ANDERSON-COOK *et al.*, 2009; BORROR *et al.*, 2002).

$$MC_{\rho k}^1(\mathbf{x}) = \frac{-[0,752 + f_{s_1}(\mathbf{x})]}{3 \cdot (0,290) \sqrt{\Omega \int_R [\mathbf{x}^{(m)\top} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}^{(m)}] d\mathbf{x}}} \quad (7.58)$$

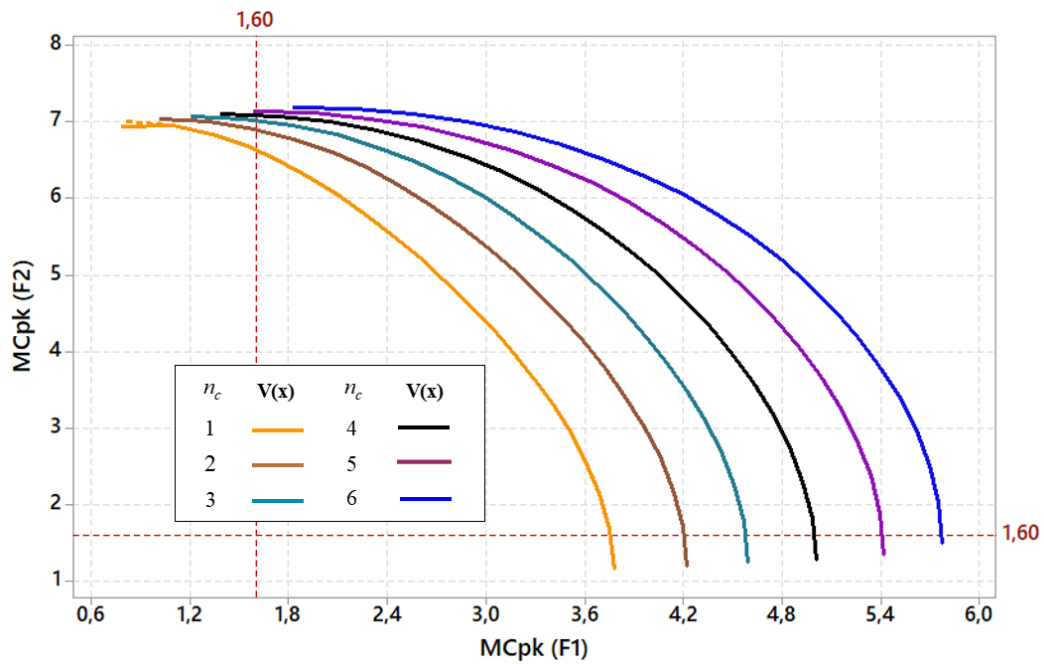
$$MC_{\rho k}^2(\mathbf{x}) = \frac{[0,465 - f_{s_2}(\mathbf{x})]}{3 \cdot (0,182) \sqrt{\Omega \int_R [\mathbf{x}^{(m)\top} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}^{(m)}] d\mathbf{x}}} \quad (7.59)$$

A Figura 7.30 apresenta as fronteiras de Pareto obtidas para $MCpk (F1)$ e $MCpk (F2)$ usando a métrica de variância de previsão original $Var[\hat{y}(\mathbf{x})]$ e a variância média integrada IV_ρ , considerando o CCD rotacionável e o CCD de face centrada. Essas fronteiras também foram construídas para diferentes quantidades de pontos centrais.

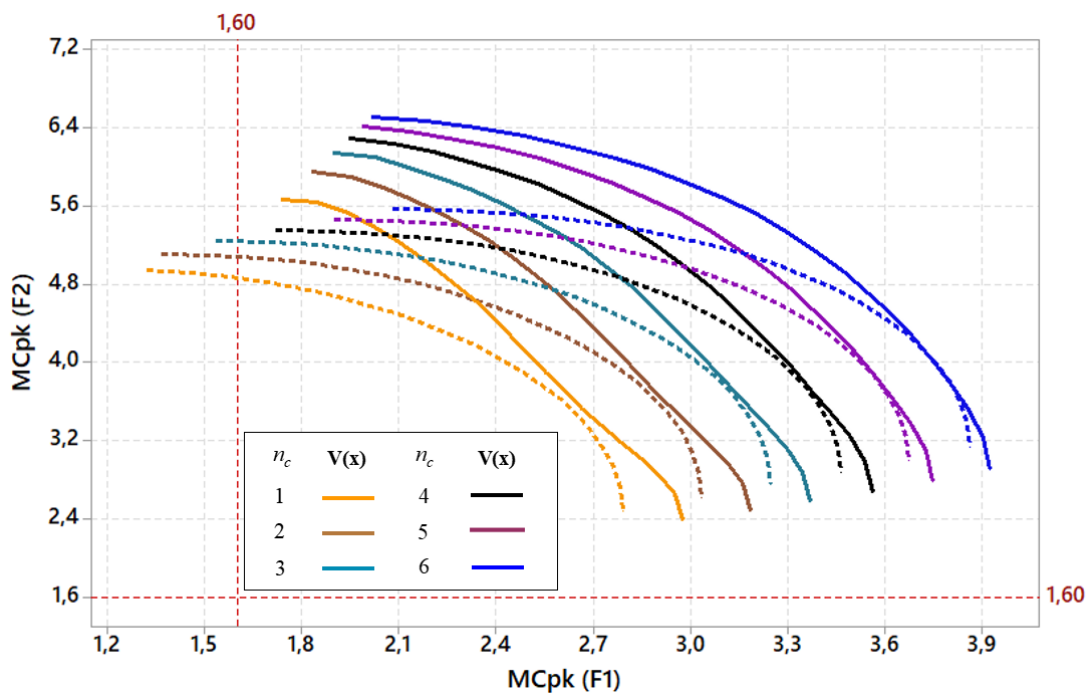
Por meio da Figura 7.30a, pode-se demonstrar que, como esperado, as fronteiras obtidas com $Var[\hat{y}(\mathbf{x})]$ e IV_ρ são indistintas, à exceção da fronteira para $n_c=1$, que revela uma pequena diferença para a combinação de pesos (1,000; 0,000) de $MCpk (T)$ e $MCpk (Ra)$, respectivamente. Essa diferença é devida ao processo de suavização de IV_ρ sobre a variância de previsão $Var[\hat{y}(\mathbf{x})]$, cuja não-linearidade é mais elevada no centro do arranjo quando $n_c=1$.

Uma vez comparadas as letras (a) e (b) da Figura 7.30, nota-se que a máxima capacidade de previsão é obtida com o arranjo rotacionável. Além disso, devido a modificação da distância axial recomendada (CCD de face centrada), há nítido descolamento das fronteiras obtidas com $Var[\hat{y}(\mathbf{x})]$ e IV_ρ . Isso ocorre porque, no CCD de face centrada, há o surgimento de “ilhas” de variância, em regiões localizadas à mesma distância do centro do arranjo, o que implica na alteração da variância média IV_ρ .

À semelhança do que foi discutido na análise da seção 7.1.8, as fronteiras geradas convergem na direção de uma das razões modificadas de capacidade. Justificativa adequada para esse fato pode ser encontrada na seção 7.2.5, na qual demonstrou-se que $F2$ encontra-se mais centralizado dentro do arranjo (note-se a distância radial da Tabela 7.16), com regiões convexas compatíveis com seu sentido de otimização. Assim, embora ambos os modelos de $F1$ e de $F2$ apresentem formato de sela, a razão $MCpk (F2)$ é mais favorecida, pois contém mínimos locais mais centralizados, enquanto $F1$ apresenta máximos locais mais afastados do centro.



(a) CCD rotacionável



(b) CCD de face centrada

Figura 7.30 - Fronteiras de Pareto obtidas para $MCpk(F1)$ e $MCpk(F2)$ usando a métrica de variância de previsão $Var[\hat{y}(\mathbf{x})]$ (linhas contínuas) e a variância média integrada ν_{V_ρ} (linhas pontilhadas) com diferentes quantidades de pontos centrais.

Fonte: Autoria própria.

A fim de avaliar o comportamento das funções de variância mínima e máxima em regiões esféricas, foram construídas as razões modificadas de previsão apresentadas no conjunto de Equações (7.60)-(7.63).

$$MC_{\sim pk}^1(\mathbf{x}) = \frac{-[0,752 + f_{s_1}(\mathbf{x})]}{3 \cdot (0,290) \sqrt{V\text{MIN}_p}} \quad (7.60)$$

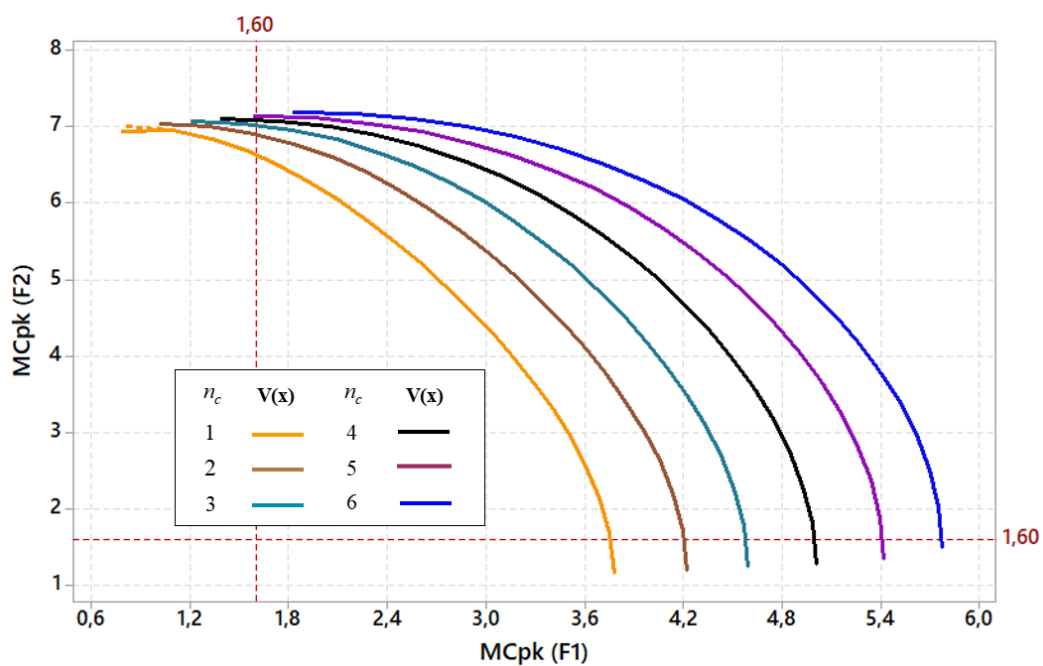
$$MC_{\sim pk}^2(\mathbf{x}) = \frac{[0,465 - f_{s_2}(\mathbf{x})]}{3 \cdot (0,182) \sqrt{V\text{MIN}_p}} \quad (7.61)$$

$$MC_{\sim pk}^1(\mathbf{x}) = \frac{-[0,752 + f_{s_1}(\mathbf{x})]}{3 \cdot (0,290) \sqrt{V\text{MAX}_p}} \quad (7.62)$$

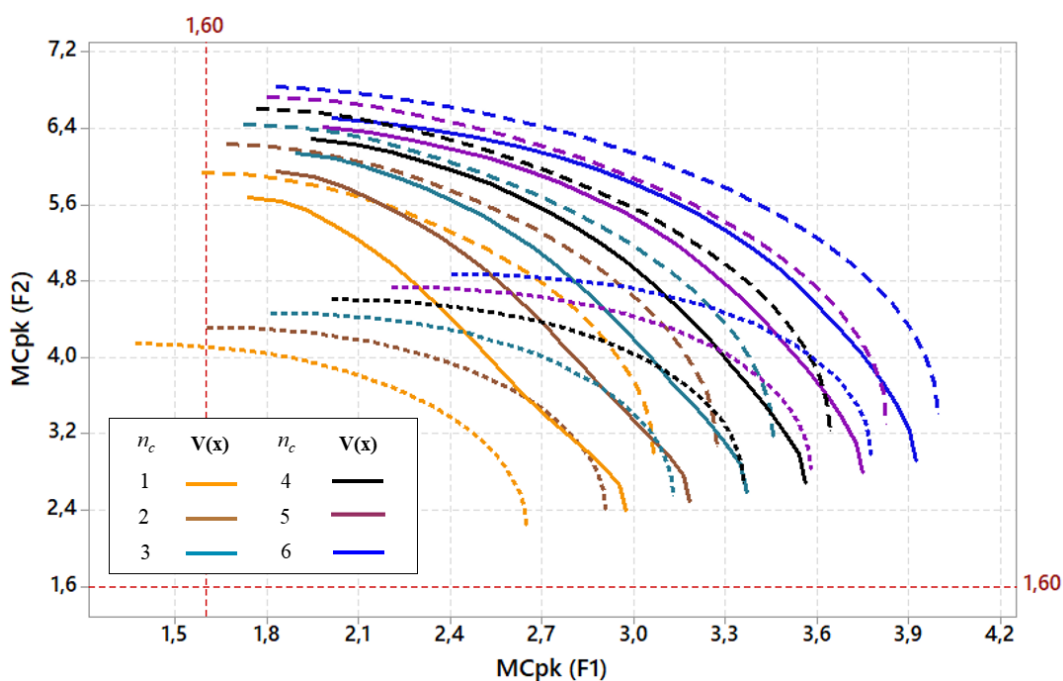
$$MC_{\sim pk}^2(\mathbf{x}) = \frac{[0,465 - f_{s_2}(\mathbf{x})]}{3 \cdot (0,182) \sqrt{V\text{MAX}_p}} \quad (7.63)$$

Como discutido na seção 2.2.3, as funções de variância mínima e máxima de previsão não indicam a variância de pontos específicos do arranjo, mas constituem-se de métricas aglutinadoras de variância a uma mesma distância radial de seu centro. Assim, por meio dessas métricas, é possível avaliar os ganhos potenciais em capacidade de previsão, mediante deslocamentos do ponto no arranjo experimental e/ou modificações no processo investigado.

Do mesmo modo que na seção 7.1.8, para o CCD rotacionável (Figura 7.31a), quase nenhuma diferença pode ser identificada entre as fronteiras obtidas com métricas de variância mínima $V\text{MIN}_p$, máxima $V\text{MAX}_p$ e de previsão $Var[\hat{y}(\mathbf{x})]$, à exceção do primeiro ponto para $n_c=1$. Para o CCD de face centrada (Figura 7.31b), porém, nenhuma das fronteiras se sobrepõe. Isso demonstra que, em princípio, há potencial de ganhos em capacidade de previsão, conforme ilustrado na Tabela 7.22. Nessa tabela, as soluções ótimas para $w_i = 0,500$ são avaliadas nas fronteiras geradas a partir variância de previsão no ponto $Var[\hat{y}(\mathbf{x})]$ e a partir da variância de previsão mínima à mesma distância radial $V\text{MIN}_p$.



(a) CCD rotacionável



(b) CCD de face centrada

Figura 7.31 - Fronteiras de Pareto obtidas para $MCpk(F1)$ e $MCpk(F2)$ usando a métrica de variância de previsão $Var[\hat{y}(\mathbf{x})]$ (linhas contínuas), a variância mínima $VMIN_p$ (linhas tracejadas) e a variância máxima $VMAX_p$ (linhas pontilhadas) com diferentes quantidades de pontos centrais.

Fonte: Autoria própria.

Tabela 7.22 – Potenciais ganhos de capacidade de previsão por meio de deslocamentos do ponto à mesma distância radial para diferentes quantidades de pontos centrais¹

| n_c | Variância de previsão no ponto $Var[\hat{y}(\mathbf{x})]$ | | | | | | | Variância de previsão mínima à mesma distância radial $VMIN_p$ | | | | | | |
|-------|---|------------|------------------|-------|--------|-----------|-----------|--|------------|------------------|-------|--------|-----------|-----------|
| | v_c [m/min.] | a_e [mm] | a_p [mm/dente] | F1 | F2 | MCpk (F1) | MCpk (F2) | v_c [m/min.] | a_e [mm] | a_p [mm/dente] | F1 | F2 | MCpk (F1) | MCpk (F2) |
| 1 | 66,150 | 17,240 | 0,112 | 1,091 | -0,456 | 2,447 | 4,267 | 65,820 | 17,175 | 0,118 | 1,063 | -0,457 | 2,595 | 4,997 |
| 2 | 66,305 | 17,169 | 0,111 | 1,063 | -0,412 | 2,641 | 4,552 | 65,859 | 17,147 | 0,117 | 1,071 | -0,382 | 2,751 | 5,205 |
| 3 | 66,386 | 17,119 | 0,111 | 1,037 | -0,382 | 2,811 | 4,787 | 66,003 | 17,086 | 0,116 | 1,075 | -0,325 | 2,891 | 5,370 |
| 4 | 66,446 | 17,076 | 0,110 | 1,041 | -0,354 | 2,980 | 4,988 | 66,113 | 17,032 | 0,115 | 1,076 | -0,279 | 3,033 | 5,506 |
| 5 | 66,479 | 17,041 | 0,110 | 1,054 | -0,335 | 3,146 | 5,164 | 66,198 | 16,985 | 0,114 | 1,077 | -0,239 | 3,177 | 5,629 |
| 6 | 66,487 | 17,010 | 0,109 | 1,058 | -0,330 | 3,300 | 5,327 | 66,259 | 16,946 | 0,113 | 1,040 | -0,576 | 3,313 | 5,751 |

¹ $w_i = 0,500$

Fonte: Autoria própria.

Por meio da análise da Tabela 7.22, pode-se notar que, embora as capacidades reais possam ser medidas usando-se a variância de previsão no ponto $Var[\hat{y}(\mathbf{x})]$, alguns ganhos em capacidade podem ser obtidos mediante pequenos deslocamentos das soluções para regiões onde a variância de previsão, à mesma distância radial, é menor. Como pode ser visto na Tabela 7.22, para $n_c=1$, pequena redução de velocidade (de 66,150 para 65,820 m/min.; i.e., 0,50%), pequena redução de profundidade (de 17,240 para 17,175 mm; i.e., 0,37%) e pequeno aumento do avanço (de 0,112 para 0,118 mm/dente; i.e., 5,36%) poderiam garantir elevações da capacidade de 6,05% para $F1$ e de 17,11% para $F2$, com manutenção em $F2$ e ganho em $F1$ (de 1,091 para 1,063; i.e., 2,57%).

Para quantidades maiores de pontos centrais, há notórios ganhos em capacidade para ambas as variáveis de resposta, ao se deslocar o ponto para a região de variância mínima. No entanto, as perdas para $F1$ e $F2$ tendem a ser proporcionais. Para $n_c=5$, por exemplo, há ganhos de 0,39% e 7,95% em capacidade para $F1$ e $F2$, respectivamente. No entanto, para assegurar os ganhos reais de capacidade, o experimentador deve encontrar alguma maneira no processo de manter os valores médios originais, ao deslocá-lo para regiões de variância mínima.

7.2.10 Extensões do método computacional proposto para outras aplicações na indústria

Como ilustrado na seção 7.2.7, o método proposto se mostrou adequado para a otimização do processo de fresamento utilizando a maximização de razões multivariadas modificadas de capacidade de previsão. Além disso, o uso da FA e do método combinado NBI-GRG revelou-se satisfatório para tratar os problemas levantados na seção 7.2.5, como a necessidade de se otimizar múltiplas características correlacionadas com convexidades e sentidos de otimização distintos e incompatíveis, ao mesmo tempo em que boas capacidades de previsão são asseguradas.

Conforme discutido anteriormente, esses problemas estão presentes em diversos processos industriais, tais como torneamento (MISAKA *et al.*, 2020; COSTA *et al.*, 2016b) fresamento (ARRUDA *et al.*, 2019; COSTA *et al.*, 2016a; POLICENA *et al.*, 2018), soldagem (AJITH *et al.*, 2015; CHAUBEY; JAIN, 2019; NACEREDDINE *et al.*, 2019) e adesão (ARIAEE *et al.*, 2014), o que torna o método versátil. Nos trabalhos de Oliveira (2018) e Oliveira *et al.* (2019), mais detalhes sobre esses problemas em outros processos de manufatura podem ser encontrados.

Além disso, como as questões abordadas estão relacionadas especialmente às etapas de modelagem e otimização, o método proposto pode ser facilmente estendido a outros tipos de

problemas computacionais da indústria, como parametrização de algoritmos (PONTES *et al.*, 2016), onde várias métricas correlacionadas podem ser modeladas por um conjunto de variáveis de entrada; controle de robôs, cuja performance pode ser associada a múltiplas características físicas (ROUT; MITTAL, 2009); e estudos da segurança de produtos, como automóveis, nos quais múltiplas variáveis de resposta apresentam sentidos de otimização distintos (GU; LU 2014), com provável incompatibilidade destes com as convexidades de seus modelos.

Considerando os domínios da indústria e do controle da qualidade, algumas vantagens adicionais do método também podem ser destacadas, tais como a sistematização do processo de obtenção de soluções ótimas capazes, que possibilite a imediata tomada de decisão (NOYEL *et al.*, 2016), e a aquisição de informações mais detalhadas sobre a condição de capacidade do processo com respeito a algumas variáveis de respostas. Além disso, o controle de desempenho e da precisão do processo é considerada uma pré-condição para a manufatura de zero-defeito, originalmente associada aos sistemas de produção enxuta (WESTKÄMPER, 1997) e, mais recentemente, à indústria 4.0 (GHOBAKHLOO, 2020). Assim, aplicações da abordagem proposta nesse campo de estudo podem cobrir não apenas algumas das referências mencionadas anteriormente, como o controle de robôs, mas também a parametrização de plantas industriais (SIKORSKI *et al.*, 2016), a criação de plataformas *off-line* e *on-line* para a análise e otimização de processos (GRADIŠAR *et al.*, 2015) e a manufatura aditiva (MAJEED *et al.*, 2020).

7.3 Validação das hipóteses do problema

Após a condução do estudo, as questões e hipóteses levantadas na seção 5.2 podem ser retomadas. Assim, com base no que foi discutido nas análises anteriores, esta seção apresenta os resultados da validação das hipóteses, resumidos no Quadro 7.1. Como foi demonstrado nos estudos das seções 7.1 e 7.2, a maximização das razões modificadas assegura afastamentos apropriados de cada modelo até a respectiva solução de nadir, ao mesmo tempo em que a variância de previsão é minimizada. Isso revela que o modelo proposto é adequado para combinar a otimização das características críticas dos processos com a minimização da variância de previsão dos modelos. Portanto, como os modelos de otimização propostos alcançam os objetivos pretendidos, a primeira hipótese do problema pode ser confirmada.

Dada a primeira questão de pesquisa, uma segunda questão foi suscitada na seção 5.2, correspondendo ao problema multiobjetivo formulado com as razões modificadas de capacidade. Isto é, tendo em vista que os processos de manufatura apresentam múltiplas características, há interesse em se assegurar capacidades de previsão satisfatórias para todas

elas. Nesse sentido, o presente trabalho propôs uma estratégia de otimização para razões modificadas das variáveis originais independentes, a qual possibilitou uma região de soluções capazes para todas as características críticas dos processos, confirmando, assim, a segunda hipótese formulada. Resultado idêntico foi observado para o modelo proposto para razões modificadas das variáveis originais correlacionadas, o que também permitiu a confirmação da terceira hipótese.

Além disso, uma vez comparados os modelos de otimização propostos com a estratégia de otimização via EQM e EQMM modificados, algumas vantagens adicionais foram observadas. Essa comparação é apresentada no Quadro 7.2, em conjunto com a designação de aspectos especialmente vantajosos da abordagem proposta. Por meio dele, destaca-se que, em termos da obtenção de soluções Pareto ótimas com capacidades de previsão satisfatórias, ambas as estratégias se mostram adequadas, conforme demonstrado nas seções 7.1.7 e 7.2.8, embora a interpretação das variáveis latentes $Cpks$ e $MCpks$ e EQMs e EQMMs seja invertida; isto é, “quanto maior, melhor” para as primeiras e “quanto menor, melhor” para as últimas.

Apesar disso, a estratégia de otimização desenvolvida no presente trabalho se mostrou particularmente vantajosa para uso de restrições de capacidade de previsão, para a comparação entre processos distintos, e para conferir maior compatibilidade com o algoritmo GRG. Como demonstrado no caso da seção 7.1, a inclusão de uma restrição de não-negatividade às razões modificadas foi possível, uma vez que se conhece a escala de $Cpks$ e é desejável que a capacidade seja sempre positiva. Contudo, para o problema via EQMs, isso não foi possível, dado que suas escalas são específicas para as grandezas de cada processo estudado. Por esse mesmo motivo, comparações entre as capacidades de previsão de diferentes processos são viabilizadas pela estratégia proposta.

Finalmente, a otimização via NBI-GRG é facilitada pela formulação de razões de polinômios. Isso ocorre porque os algoritmos gradientes são muito influenciados pelas convexidades das superfícies, tendo o aumento de não-linearidade um impacto negativo sobre eles. Dessa forma, o uso de somatórios tende a dificultar a otimização, especialmente pelo comportamento da função de variância de previsão.

Quadro 7.1 - Validação das hipóteses do problema

| Questões | Hipóteses | Validada? | Breve explicação |
|---|---|-----------|--|
| Q.1. Como combinar a otimização das características críticas dos processos com a minimização da variância de previsão dos modelos? | H.1. A maximização de razões modificadas de capacidade de previsão garante a otimização das características críticas dos processos e a minimização da variância de previsão dos modelos. | Sim | A maximização das razões modificadas assegura afastamentos apropriados de cada modelo até a respectiva solução de nadir, ao mesmo tempo em que a variância de previsão é minimizada. |
| Q.2. Como assegurar capacidades de previsão satisfatórias para todas as características críticas dos processos? | H.2. Estratégias de otimização multiobjetivo para razões modificadas de capacidades de previsão dos modelos podem garantir conjuntos de soluções capazes para todas as características críticas dos processos. | Sim | A estratégia de otimização proposta para razões modificadas das variáveis originais independentes fornece uma região de soluções capazes para todas as características críticas dos processos. |
| Q.3. Como assegurar capacidades de previsão satisfatórias para características críticas correlacionadas dos processos? | H.3. Estratégias de otimização multiobjetivo para razões multivariadas modificadas de capacidades de previsão dos modelos podem garantir conjuntos de soluções capazes para todas as características críticas correlacionadas dos processos. | Sim | A estratégia de otimização proposta para razões modificadas das variáveis originais correlacionadas fornece uma região de soluções capazes para todas as características críticas dos processos. |
| Q.4. Qual métrica de variância deve ser utilizada nas razões modificadas de capacidade de previsão dos modelos? | H.4. Métricas baseadas na variância integrada de previsão são as mais apropriadas. | Não | Para arranjos experimentais rotacionáveis, com propriedades preservadas (tal como o número de pontos experimentais), não há diferença de desempenho entre as métricas de variância. Para arranjos não rotacionáveis e/ou com propriedades corrompidas, métricas aglutinadoras de variância permitem avaliar potenciais benefícios. |

Fonte: Autoria própria

Como discutido ao longo do trabalho, para se manter fiel aos conceitos originais de variância e capacidade de previsão, foi adotada a métrica de variância desenvolvida por Box e Hunter (1957) como medida de variabilidade natural das razões modificadas de capacidade, cuja formulação é considerada uma medida direta de variância dos pontos do arranjo. Apesar disso, suscitou-se a possibilidade da variância média integrada apresentar-se como uma medida mais apropriada, uma vez que procura corrigir (ou, suavizar) o comportamento da variância de previsão ao longo da região de interesse investigada (BORKOWSKI, 1995a; KHURI, 2005).

Na prática, porém, para as razões modificadas desenvolvidas, não houve, por si só, diferença entre o uso das métricas básica e integrada, sendo esta diferença causada apenas por modificações no arranjo experimental; isto é, alterações da distância axial ou reduções na quantidade de pontos centrais. No entanto, outras métricas aglutinadoras de variância também foram testadas (à saber, as variâncias mínima e máxima de previsão em regiões esféricas), evidenciando ganhos potenciais em capacidade de previsão para as variáveis investigadas.

Como esperado, esses ganhos só foram revelados para os CCDs de face centrada, onde diferentes regiões de variância foram observadas, mantendo-se as mesmas distâncias radiais a partir do centro do arranjo. Além disso, as capacidades máximas, em qualquer cenário, foram constatadas para os casos com maior quantidade de pontos centrais. Finalmente, eventuais modificações nos processos foram sugeridas para condições específicas, nas quais, ao se deslocar o ponto, ganha-se em previsibilidade, mas perde-se em valor médio, interferindo nas razões de capacidade de previsão.

É interessante observar que, em teoria (BOX; DRAPER, 2007; KHURI; CORNELL, 1996; MYERS; MONTGOMERY, 2009), esses problemas não existiriam se, usando níveis apropriados para os fatores, todas as superfícies de resposta estivessem centralizadas em relação ao arranjo e, ao mesmo tempo, fossem côncavas ou convexas. Desse modo, mesmo em CCDs de face centrada, valores médios idênticos seriam observados para combinações às mesmas distâncias do centro do arranjo. Contudo, conforme discutido ao longo do presente trabalho, a maior parte dos modelos apresentam formato de sela, com frequentes deslocamentos em relação ao arranjo (OLIVEIRA, 2018; OLIVEIRA *et al.*, 2019), o que ressalta a importância da análise das diferentes métricas de variância e de seus potenciais benefícios.

Quadro 7.2 – Comparação entre a estratégia de otimização proposta e a estratégia de otimização via EQM e EQMM modificados

| Critério | Estratégia de Otimização | | Aspecto especialmente vantajoso da abordagem proposta |
|--|--|---|---|
| | Razões modificadas de capacidade de previsão | EQM e EQMM modificados | |
| Obtenção de soluções Pareto ótimas com capacidade de previsão | A maximização das razões de capacidade assegura a obtenção dessas soluções | A minimização dos EQMs ou EQMMs assegura a obtenção dessas soluções | |
| Uso de restrições de capacidade de previsão ou de erros quadráticos médios | A inclusão de restrições pode ser feita para qualquer processo investigado, conhecidos os limites de capacidade apropriados para as razões modificadas | A inclusão de restrições é dificultada por dois fatores: (1) desconhecimento das escalas dos EQMs ou EQMMs, determinadas pelas grandezas de cada processo; e (2) desconhecimento de limites apropriados para os EQMs ou EQMMs | X |
| Interpretação das variáveis latentes (Cpks, MCpks, EQMs ou EQMMs) | A interpretação das razões Cpks ou MCpks é do tipo “quanto maior, melhor” | A interpretação dos EQMs ou EQMMs é do tipo “quanto menor, melhor” | |
| Comparação entre processos | A comparação entre processos pode ser feita mediante comparação dos valores das razões de capacidade, que apresentam escala universal | A comparação entre processos é dificultada pela diferença de escalas dos EQMs ou EQMMs | X |
| Compatibilidade com o algoritmo GRG | A utilização de razões de polinômios tende a facilitar o uso de algoritmos gradientes na otimização via NBI. | A utilização de somatórios de polinômios tende a dificultar o uso de algoritmos gradientes na otimização via NBI, especialmente pelo comportamento da função de variância de previsão. | X |

Fonte: Autoria própria.

8 CONCLUSÕES

O conceito original de variância de previsão surgiu nos anos 1950, quando Box e Wilson (1951) lançaram o notório trabalho na área de planejamento de experimentos, no qual apresentaram, pela primeira vez, a metodologia de superfície de resposta, uma abordagem experimental dedicada à modelagem e otimização de processos. Para isso, naquele momento, os autores aventaram a noção de “precisão relativa” de arranjos, que, posteriormente, teve expressão equivalente cunhada como “variância escalonada de previsão”, uma das métricas mais convencionais de análise da variância induzida por arranjos experimentais, conforme foi discutido na seção 2.2.

Assim, originalmente, a ideia de variância de previsão foi usada como uma maneira de se avaliar o desempenho individual de um arranjo, bem como comparar diferentes arranjos experimentais. Desde a sua concepção, a variância de previsão tem sido, costumeiramente, avaliada em função do raio do arranjo, uma vez que a previsibilidade encontra-se relacionada à disposição de seus pontos e, normalmente, tende a diminuir conforme o ponto se afasta de seu centro. Contudo, outras abordagens posteriores começaram a propor índices globais, com a pretensão de representar, em um único número, a variância de previsão de um arranjo. Embora consideradas simplistas, essas estratégias também foram muito usadas para fins comparativos.

Aliado a isso, ao longo do tempo, os arranjos experimentais, incluindo os arranjos compostos, ganharam muita popularidade em estudos de processos. Além disso, a metodologia de superfície de resposta, enquanto estrutura de análise, se mostrou muito satisfatória ao combinar o planejamento de experimentos, as técnicas de modelagem e os métodos de otimização. Em geral, características críticas para a qualidade ou para o desempenho de um processo passaram a ser modeladas a partir de dados de experimentos planejados, sendo os modelos resultantes usados como funções-objetivo em problemas de otimização.

Contudo, embora tipicamente os valores esperados das características críticas sejam otimizados, na maioria dos estudos, métricas de variância costumam ser negligenciadas. Exceções disso incluem otimizações de “média e variância” e o projeto de parâmetro robusto, baseado nos conhecidos arranjos de Taguchi. Ainda assim, até o presente momento, nenhum trabalho da área apresentou a variância induzida pelo arranjo como parte da otimização de processos.

Conforme tratado ao longo deste trabalho, do ponto de vista operacional, isso tende a ser problemático, pois, admitindo-se elevadas variâncias, os valores médios obtidos, via otimizações tradicionais, podem perder o significado prático. Isto é, para grandes quantidades

de itens produzidos, sob condições ótimas (em termos de médias), muitas perdas podem ser observadas. Desse modo, os responsáveis pelos processos industriais e os experimentadores devem buscar não apenas soluções ótimas, mas, também, soluções com capacidades de previsão adequadas; em outra palavras, com níveis aceitáveis de variabilidade.

Nesse sentido, visando a preencher esta lacuna, a presente tese trouxe uma nova perspectiva sobre os problemas de otimização de processos, ao defender que, para se otimizar suas características críticas, deve-se, concomitantemente, minimizar a variância de previsão dos modelos. Isso implica que, ao mesmo tempo em que os valores esperados são otimizados (isto é, minimizados ou maximizados, à depender do sentido de otimização), tanto a variância do processo quanto a variância do modelo são minimizadas. Em outras palavras, considerar a variância de previsão em um modelo de otimização significa assegurar soluções ótimas (em termos de valores médios), com capacidades de previsão satisfatórias (em termos de variâncias).

É importante destacar, porém, que as abordagens tradicionais de otimização, uni e multivariadas, tratam adequadamente a otimalidade das soluções de Pareto. No entanto, a maioria delas associa o conceito de “otimalidade” à obtenção de um conjunto de valores médios para as variáveis de resposta analisadas. E, como mencionado, mesmo aquelas que incluem a variabilidade como um critério de decisão, consideram essencialmente a variância do processo investigado, deixando de avaliar a variância induzida pelos procedimentos de coleta de dados (arranjos experimentais).

Com isso, propôs-se, neste trabalho, uma estratégia de otimização multiobjetivo baseada em razões de capacidade de previsão (seção 6). Dessarte, a variância de previsão foi empregada como uma medida da capacidade do arranjo experimental fornecer resultados ótimos previsíveis. Além disso, as soluções individuais de nadir foram usadas como limites naturais para as variáveis de resposta originais, bem como para os fatores rotacionados. Tendo em vista esses aspectos, razões modificadas de capacidade de previsão foram desenvolvidas para a otimização das características críticas do processo, via variáveis originais (para características linearmente independentes) ou variáveis latentes (para características correlacionadas), simultaneamente à otimização da variância de previsão.

Com base nas razões modificadas desenvolvidas, foram propostos dois modelos de otimização multiobjetivo, conforme apresentado na seção 6.2. No primeiro, construído para características linearmente independentes, adotaram-se os modelos de superfície de resposta estimados para as variáveis originais do processo. No segundo, construído para características correlacionadas, adotaram-se os modelos de superfície de resposta estimados para as variáveis

latentes do processo. Essas variáveis foram calculadas empregando-se uma análise fatorial rotacionada, baseada em esquemas Kaiser-Varimax.

A fim de comparar a estratégia desenvolvida com outros modelos baseados em funções de variância de previsão, estratégias modificadas comparáveis foram formuladas, a partir (1) das noções de Erro Quadrático Médio e Erro Quadrático Médio Multivariado e (2) de métricas aglutinadoras de variância. Com a primeira estratégia, foram discutidas as vantagens dos modelos propostos e, com a segunda, foram discutidos os ganhos potenciais em capacidade de previsão, ao se empregar outras métricas.

Para ilustrar a viabilidade de cada modelo proposto, escolheram-se dois casos de processos de manufatura. Considerando o primeiro modelo, proposto para variáveis originais independentes, foi analisado o processo de torneamento do aço ABNT H13 com ferramenta wiper CC650. Experimentos planejados com base em um CCD para três parâmetros de controle (V_c , f e ap) foram empregados para modelar a vida da ferramenta (T) e a rugosidade média (Ra). Uma vez que os modelos de regressão estimados apresentaram bons ajustes, os problemas de otimização foram formulados usando-os como funções objetivo.

Inicialmente, a fim de resolver o problema bi-objetivo tradicional para T e Ra , foi aplicado o método NBI-GRG; com esse procedimento, diferentes combinações ótimas dos parâmetros do processo foram obtidas, com as quais uma fronteira de Pareto contendo 21 pontos foi construída. A partir disso, foi possível demonstrar a natureza conflitante entre variáveis de resposta, mostrando que o tomador de decisão deve escolher as combinações ótimas que melhor favoreçam a aplicação investigada. Além disso, revelou-se que a abordagem de otimização tradicional para variáveis originais independentes é apropriada para otimizar valores médios, mas não para obter soluções ótimas com capacidade de previsão adequada.

Em seguida, aplicou-se a abordagem proposta ao mesmo conjunto de dados experimentais do processo de torneamento. Assim, para se obter as soluções do problema bi-objetivo construído para as razões de capacidade de T e Ra , o método NBI-GRG foi novamente empregado. Com esse procedimento, fronteiras de Pareto uniformemente distribuídas para as razões de capacidade, bem como para as variáveis de resposta originais convertidas, foram elaboradas. Então, comparações com a fronteira anterior e com os dados de capacidade obtidos com a abordagem tradicional também foram realizadas. Além disso, outros métodos numéricos foram usados para testar o comportamento das fronteiras de Pareto frente ao NBI. Os resultados mostraram que os métodos NBI e NNC foram os mais eficazes para a obtenção de fronteiras uniformemente distribuídas.

Finalmente, as estratégias modificadas comparáveis foram aplicadas ao conjunto de dados do processo de torneamento. Por meio da abordagem via EQM, também foi possível encontrar soluções ótimas com capacidade de previsão satisfatória; no entanto, uma série de limitações dessa abordagem foi identificada. Ao se alterar as métricas de variância, contudo, verificou-se que, quando há alteração de rotacionalidade, o uso da variância mínima pode evidenciar novos *trade-offs* para o tomador de decisão. Especificamente, para o primeiro caso, também pode-se constatar:

- A abordagem proposta foi capaz de encontrar um conjunto de soluções ótimas com capacidades de previsão satisfatórias para ambas as respostas de interesse. Isso se deu considerando o processo de torneamento do aço endurecido H13 com um número reduzido de pontos centrais, uma função em formato de sela para T e uma função convexa para Ra , com objetivos conflitantes;
- As fronteiras de Pareto obtidas com a estratégia proposta foram deslocadas para regiões mais próximas do centro do arranjo, preservando-se valores médios satisfatórios para as respostas originais. Isso foi possível usando razões modificadas de capacidade;
- Embora Ra tenha sido uma variável mais difícil de controlar, a estratégia de otimização proposta permitiu que ela fosse favorecida tanto em relação aos valores médios quanto em relação à capacidade de previsão. Isso ocorreu porque Ra foi modelada por uma função convexa, com direção de minimização, e seu ponto estacionário estava mais próximo do centro do arranjo, onde a variância de previsão é naturalmente menor;
- O modelo de otimização via EQMs se mostrou adequado para a obtenção de soluções Pareto ótimas com capacidades de previsão satisfatórias. No entanto, escalas não-generalizáveis para os EQMs trouxeram dificuldade para a interpretação das soluções e para a comparação com outros processos; e
- O uso de métricas aglutinadoras de variância demonstrou-se elucidativo para os casos onde há modificações nas propriedades do arranjo, como reduções da distância axial e da quantidade de pontos centrais. Nesses casos, novos *trade-offs* podem ser evidenciados para o tomador de decisão, especialmente usando a função de variância mínima.

Aplicando-se o segundo modelo de otimização, proposto para variáveis originais correlacionadas, foi possível analisar o processo de fresamento de topo do aço inoxidável duplex UNS S32205. Nesse caso, experimentos planejados a partir de um CCD para três parâmetros de controle (vc , ae e fz) foram empregados para modelar tanto as rugosidades Ra ,

Rq , Ry e Rt (características CTQ), como a potência Pc e a eficiência de corte Ec (características CTP). Além disso, por meio da análise fatorial rotacionada, foi possível segregar essas características em dois fatores distintos, ambos modelados por superfície de resposta.

O problema bi-objetivo multivariado tradicional foi, então, formulado usando fatores rotacionados $F1$ e $F2$ como funções objetivo. Para resolvê-lo, também aplicou-se o método NBI-GRG; esse procedimento forneceu um conjunto de combinações ótimas dos parâmetros de processo, a partir do qual a fronteira de Pareto foi construída. Diante disso, analogamente ao primeiro caso, foi possível demonstrar a natureza conflitante das respostas, evidenciando que o tomador de decisão deve optar por níveis satisfatórios de melhoria da qualidade e do desempenho do processo. Nesse caso, nenhuma das soluções obtidas via otimização tradicional apresentaram capacidade de previsão satisfatória.

Posteriormente, a abordagem multivariada proposta também foi aplicada ao processo de fresamento. O método NBI, usando subrotina GRG, foi empregado para obter as soluções do problema para as razões de capacidade de $F1$ e $F2$. Essa estratégia forneceu fronteiras de Pareto uniformemente distribuídas para as razões de capacidade, bem como para os fatores rotacionados convertidos. Assim, mediante comparação entre as fronteiras e entre os dados de capacidade, verificou-se que, embora a abordagem tradicional seja bastante adequada para otimizar os valores médios, a abordagem proposta admite algumas perdas nas médias para favorecer a capacidade de previsão.

Para esse processo, estratégias modificadas comparáveis também foram aplicadas. No entanto, por se tratar de um problema multivariado, foram empregados EQMMs, em vez dos EQMs do primeiro caso. Novamente, verificou-se que essa estratégia é apropriada para identificar soluções Pareto ótimas com capacidades de previsão satisfatórias. No entanto, as dificuldades de interpretação e comparação de seus índices foram, ainda, observadas. Ao empregar as métricas aglutinadoras de variância, verificou-se que, para o CCD de face centrada, nenhuma das fronteiras se sobrepôs, revelando, assim, ganhos potenciais em capacidade de previsão para o processo. Especificamente, para o segundo caso, também pode-se constatar:

- A análise fatorial rotacionada foi capaz de capturar a natureza estocástica das variáveis de resposta originais do processo de fresamento de topo, agrupando as características CTQ e CTP separadamente em dois fatores, com 87,90% de explicação;
- Independentemente da curvatura das respostas originais, os fatores modelados revelaram curvatura significativa, beneficiando as otimizações tradicional e proposta;

- A abordagem proposta foi capaz de encontrar soluções ótimas com capacidades de previsão satisfatórias para ambos os fatores rotacionados, considerando o caso de fresamento de topo com funções em formato de sela para $F1$ e $F2$ e objetivos conflitantes;
- Embora $F1$ tenha sido uma variável mais difícil de controlar, a estratégia de otimização proposta permitiu que ela fosse favorecida, pelo menos em relação à capacidade de previsão das soluções de Pareto;
- A abordagem baseada nos EQMMs se mostrou satisfatória para a obtenção de soluções ótimas com capacidades de previsão adequadas. No entanto, também se mostrou limitada em relação ao uso de restrições, à interpretação de seus índices e à comparação destes com os índices obtidos em outros processos; e
- O uso de métricas aglutinadoras de variância não trouxe benefícios diretos para a otimização baseada em razões de capacidade. No entanto, a variância mínima revelou ganhos potenciais em previsibilidade, para os casos onde há modificações nas propriedades do arranjo.

8.1 Contribuições do trabalho

A presente pesquisa defende que, não apenas a variância do processo, mas, também, a própria variância da estrutura de coleta de dados, influenciam na precisão dos modelos de superfície de resposta. Assim, este trabalho manifesta a importância do uso da variância de previsão como parte da otimização de processos. Com isso, a contribuição sumária deste trabalho consiste no desenvolvimento de modelos de otimização, que consideram, simultaneamente, os valores médios das variáveis de interesse e suas capacidades de previsão. Tendo em vista o escopo deste estudo, portanto, as seguintes contribuições podem ser destacadas:

- A apresentação de um conteúdo integrado sobre capacidade e variância de previsão e suas principais métricas;
- A utilização da função de variância de previsão e de outras métricas aglutinadoras de variância como parte da otimização de processos;
- O desenvolvimento de razões modificadas de capacidade, relacionando a noção de capacidade de processos e o conceito original de capacidade de previsão;

- O desenvolvimento de modelos de otimização para a maximização das razões modificadas de capacidade de previsão, para os casos de variáveis originais independentes e de variáveis originais correlacionadas;
- O estudo aplicado dos modelos de otimização propostos em processos de torneamento e de fresamento; e
- O desenvolvimento de uma plataforma de otimização em MS Excel para estudo da capacidade de previsão de soluções Pareto ótimas (vide Apêndice D).

8.2 Sugestões para trabalhos futuros

A partir da pesquisa desenvolvida nesta tese, sugerem-se os seguintes trabalhos futuros:

- A extensão da estratégia de otimização baseada em razões de capacidade de previsão para projetos de parâmetro robustos;
- O uso dos componentes de variância de processos e sistemas de medição como parte das razões modificadas de capacidade;
- A análise comparativa entre otimizações das razões de capacidade tradicionais usadas no controle estatístico de processo e otimizações das razões modificadas de capacidade de previsão;
- A avaliação do modelo de otimização, desenvolvido para variáveis originais correlacionadas, mediante diferentes esquemas de rotação de fatores e ângulos de rotação; e
- A aplicação da estratégia desenvolvida em outros processos industriais, como processos químicos, soldagem e conformação mecânica.

APÊNDICES

Apêndice A – Determinação quantitativa da região de interesse experimental esférica

Proposição. A área da superfície, calculada pela integral Ω^{-1} , pode ser representada pela integral numérica equivalente, tal que:

$$\Omega^{-1} = \int_R d\mathbf{x} \text{ é equivalente a } \Omega^{-1} = S_{sphere} = \frac{2\rho^{k-1} [\sqrt{\pi}]^k}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \quad (\text{A.1})$$

Prova. Tome-se, inicialmente, o termo Ω , definido por Box e Draper (1957) como o inverso da área da região de interesse:

$$\Omega^{-1} = \int_R d\mathbf{x} \quad (\text{A.2})$$

Sabe-se que o arranjo composto central foi projetado pra investigar regiões esféricas. Logo, admite-se que, para esse tipo de arranjo, a região R indicada na Equação A.2 seja esférica, Portanto, para resolver essa integral sobre uma região esférica, considere-se o volume de uma esfera da seguinte maneira:

$$V_R = \iiint_R dx_1 dx_2 dx_3 \quad (\text{A.3})$$

Uma aplicação prática da Integral de Dirichlet é a determinação de um volume de uma região esférica $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \rho^2$ no primeiro octante. A região esférica pode ser escrita como:

$$\left(\frac{x_1}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{\rho}\right)^2 = 1 \quad (\text{A.4})$$

Como consequência, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_1}{\rho}\right)^2 = \alpha & \quad \therefore x_1 = \rho\alpha^{1/2} \quad \Rightarrow \quad dx_1 = \frac{1}{2}\rho\alpha^{-1/2}d\alpha \\ \left(\frac{x_2}{\rho}\right)^2 = \beta & \quad \therefore x_2 = \rho\beta^{1/2} \quad \Rightarrow \quad dx_2 = \frac{1}{2}\rho\beta^{-1/2}d\beta \\ \left(\frac{x_3}{\rho}\right)^2 = \gamma & \quad \therefore x_3 = \rho\gamma^{1/2} \quad \Rightarrow \quad dx_3 = \frac{1}{2}\rho\gamma^{-1/2}d\gamma \end{aligned}$$

$$V_{oct} = \iiint_R \frac{1}{2^3} \rho^3 \alpha^{\left(\frac{1}{2}-1\right)} \beta^{\left(\frac{1}{2}-1\right)} \gamma^{\left(\frac{1}{2}-1\right)} d\alpha d\beta d\gamma \quad (\text{A.5})$$

Utilizando-se da estratégia de Dirichlet, pode-se escrever o volume da região esférica no primeiro octante como:

$$V_{oct} = \frac{1}{2^3} \rho^3 \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1\right)} \right\} = \frac{1}{2^3} \rho^3 \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^3}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right)} \quad (\text{A.6})$$

Note-se que o resultado da equação refere-se a uma região 3D ($k=3$). Então, é possível generalizá-lo para escrever o volume de uma hipersfera:

$$V_{sphere} = 2^k V_{oct} = \rho^k \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^k}{\Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right)} \quad (\text{A.7})$$

Na Equação A.7, o volume do primeiro octante foi multiplicado por 2^k , que estabelece o número total de octantes em uma esfera. Com base nesse resultado, a área da superfície da hipersfera pode ser derivada, de modo que:

$$\Omega^{-1} = \int_R d\mathbf{x} = S_{sphere} = \frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{k\rho^{k-1} [\sqrt{\pi}]^k}{\frac{k}{2}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} = \frac{2\rho^{k-1} [\sqrt{\pi}]^k}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \quad (\text{A.8})$$

Apêndice B – Derivação do problema de otimização NBI-Equivalente para razões modificadas de capacidade

Proposição. A formulação do NBI clássico, escrita como maximização de t , pode ser representada como um problema bi-objetivo com funções objetivo escalonadas e uma restrição de igualdade, tal que:

$$\begin{array}{ll}
 \underset{(x,t)}{\text{Max}} t & \underset{x}{\text{Min}} \bar{C}_{pk}^{-1}(\mathbf{x}) \\
 \text{s.t.: } \bar{\mathbf{K}}\mathbf{w} + t\hat{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{C}}_{pk}(\mathbf{x}) & \text{s.t.: } g_1(\mathbf{x}) = \bar{C}_{pk}^{-1}(\mathbf{x}) - \bar{C}_{pk}^2(\mathbf{x}) + 2w - 1 = 0 \\
 \mathbf{x} \in \Omega & \text{é equivalente a } g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \\
 g_j(x) \leq 0 & h_{j+1}(x) = 0 \\
 h_j(x) = 0 & \mathbf{x} \in \Omega
 \end{array} \tag{B.1}$$

Prova. Para provar a igualdade formulada anteriormente, prova-se, em primeiro lugar, que o problema de maximização do NBI é equivalente a sua minimização, tal que:

$$\begin{array}{ll}
 \underset{(x,t)}{\text{Max}} t & \underset{(x,t)}{\text{Min}} -t \\
 \text{s.t.: } \bar{\mathbf{K}}\mathbf{w} + t\hat{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{C}}_{pk}(\mathbf{x}) & \text{s.t.: } \bar{\mathbf{K}}\mathbf{w} + t\hat{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{C}}_{pk}(\mathbf{x}) \\
 \mathbf{x} \in \Omega & = \mathbf{x} \in \Omega \\
 g_j(x) \leq 0 & g_j(x) \leq 0 \\
 h_j(x) = 0 & h_j(x) = 0
 \end{array} \tag{B.2}$$

Apliquem-se as condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) à formulação do NBI, escrevendo o Lagrangeano do problema de maximização, $L_1\{x, t, \lambda\}$, e tomando suas derivadas parciais, de modo que:

$$L_1\{x, t, \lambda\} = t + \lambda \left[\bar{\mathbf{K}}\mathbf{w} + t\hat{\mathbf{n}} - \bar{\mathbf{C}}_{pk}(\mathbf{x}^*) \right] \tag{B.3}$$

$$\nabla_x L_1\{x, t, \lambda\} = \frac{\partial L_1\{x, t, \lambda\}}{\partial x} = -\lambda \nabla_x \bar{\mathbf{C}}_{pk}(\mathbf{x}) = 0 \therefore \nabla_x \bar{\mathbf{C}}_{pk}(\mathbf{x}^*) = 0 \tag{B.4}$$

$$\nabla_t L_1 \{x, t, \lambda\} = \frac{\partial L_1 \{x, t, \lambda\}}{\partial t} = 1 + \lambda \hat{\mathbf{n}} = 0 \therefore \lambda = -\frac{1}{\hat{\mathbf{n}}} \quad (\text{B.5})$$

$$\nabla_\lambda L_1 \{x, t, \lambda\} = \frac{\partial L_1 \{x, t, \lambda\}}{\partial \lambda} = \bar{\mathbf{K}}\mathbf{w} + t\hat{\mathbf{n}} - \bar{\mathbf{C}}_{\text{pk}}(\mathbf{x}^*) = 0 \therefore \bar{\mathbf{C}}_{\text{pk}}(\mathbf{x}^*) = \bar{\mathbf{K}}\mathbf{w} + t\hat{\mathbf{n}} \quad (\text{B.6})$$

Analogamente, tomando o gradiente do Lagrangeano para a minimização do método NBI, $L_2 \{x, t, \lambda\}$, leva a:

$$\begin{cases} \text{Min}_{(x,t)} & -t \\ \text{S.t:} & \bar{\mathbf{C}}_{\text{pk}}(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{K}}\mathbf{w} - t\hat{\mathbf{n}} = 0 \\ & \mathbf{x} \in \Omega, g_j(x) \leq 0, h_j(x) \leq 0 \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

$$L_2 \{x, t, \lambda\} = -t + \lambda [\bar{\mathbf{C}}_{\text{pk}}(\mathbf{x}^*) - \bar{\mathbf{K}}\mathbf{w} - t\hat{\mathbf{n}}] \quad (\text{B.8})$$

$$\nabla L_2 \{x, t, \lambda\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L_2 \{x, t, \lambda\}}{\partial x} \\ \frac{\partial L_2 \{x, t, \lambda\}}{\partial t} \\ \frac{\partial L_2 \{x, t, \lambda\}}{\partial \lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \nabla_x \bar{\mathbf{C}}_{\text{pk}}(\mathbf{x}^*) \\ -1 - \lambda \hat{\mathbf{n}} \\ \bar{\mathbf{C}}_{\text{pk}}(\mathbf{x}^*) - \bar{\mathbf{K}}\mathbf{w} - t\hat{\mathbf{n}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

$$\nabla L_2 \{x, t, \lambda\} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \nabla_x \bar{\mathbf{C}}_{\text{pk}}(\mathbf{x}^*) \\ \lambda \\ \bar{\mathbf{C}}_{\text{pk}}(\mathbf{x}^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\hat{\mathbf{n}}} \\ \bar{\mathbf{K}}\mathbf{w} + t\hat{\mathbf{n}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

Comparando as Equações (B.4)-(B.6) à Equação (B.10), obtém-se diretamente que $\nabla L_1 \{x, t, \lambda\} = \nabla L_2 \{x, t, \lambda\}$. Na Equação (B.10), o valor de $\hat{\mathbf{n}}$ deve ser escolhido como um vetor quase-normal, tal que:

$$\hat{\mathbf{n}} = -\bar{\mathbf{K}}\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

Substituindo esse vetor na formulação geral, a primeira restrição do NBI será formulada como:

$$\bar{\mathcal{C}}_{pk}(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{K}}\boldsymbol{\beta} - t(-\bar{\mathbf{K}}\mathbf{e}) = 0 \quad (\text{B.12})$$

$$\bar{\mathcal{C}}_{pk}(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{K}}\mathbf{w} - t\hat{\mathbf{n}} = \bar{\mathcal{C}}_{pk}(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{K}}\mathbf{w} - t(-\bar{\mathbf{K}}\mathbf{e}) = 0 \quad (\text{B.13})$$

$$\bar{\mathcal{C}}_{pk}(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{K}}\mathbf{w} + t\bar{\mathbf{K}}\mathbf{e} = \bar{\mathcal{C}}_{pk}(\mathbf{x}) + \bar{\mathbf{K}}(-\mathbf{w} + t\mathbf{e}) \quad (\text{B.14})$$

Para problemas bi-objectivos, a formulação anterior pode ser escrita como:

$$\bar{\mathcal{C}}_{pk}(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{K}}(\mathbf{w} - t\mathbf{e}) = \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{C}}_{pk}^{-1}(\mathbf{x}) \\ \bar{\mathcal{C}}_{pk}^{-2}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 - t \\ w_2 - t \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

$$\bar{\mathcal{C}}_{pk}(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{K}}(\mathbf{w} - t\mathbf{e}) = \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{C}}_{pk}^{-1}(\mathbf{x}) - w_2 + t \\ \bar{\mathcal{C}}_{pk}^{-2}(\mathbf{x}) - w_1 + t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

$$\begin{bmatrix} -t \\ -t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{C}}_{pk}^{-1}(\mathbf{x}) - w_2 \\ \bar{\mathcal{C}}_{pk}^{-2}(\mathbf{x}) - w_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{C}}_{pk}^{-1}(\mathbf{x}) - (1 - w_1) \\ \bar{\mathcal{C}}_{pk}^{-2}(\mathbf{x}) - w_1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.17})$$

$$\bar{\mathcal{C}}_{pk}(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{K}}(\mathbf{w} - t\mathbf{e}) = \begin{bmatrix} -t \\ -t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{C}}_{pk}^{-1}(\mathbf{x}) + w_1 - 1 \\ \bar{\mathcal{C}}_{pk}^{-2}(\mathbf{x}) - w_1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.18})$$

Formulando a expressão definida em termos de t , a primeira restrição do NBI torna-se:

$$\bar{\mathcal{C}}_{pk}^{-1}(\mathbf{x}) + w_1 - 1 = \bar{\mathcal{C}}_{pk}^{-2}(\mathbf{x}) - w_1 \quad \text{or} \quad \bar{\mathcal{C}}_{pk}^{-1}(\mathbf{x}) - \bar{\mathcal{C}}_{pk}^{-2}(\mathbf{x}) + 2w_1 - 1 = 0 \quad (\text{B.19})$$

Então:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underset{(\mathbf{x}, t)}{\text{Min}} \quad -t \\ \text{St.} : \quad \bar{\mathbf{C}}_{\mathbf{pk}}(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{K}}\mathbf{w} - t\hat{\mathbf{n}} = 0 \\ \quad \mathbf{x} \in \Omega \\ \quad g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \\ \quad h_{j+1}(\mathbf{x}) = 0 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} \quad \bar{\mathbf{C}}_{\mathbf{pk}}(\mathbf{x}) = w_1 \bar{\mathbf{C}}_{pk}^1(\mathbf{x}) + (1-w_1) \bar{\mathbf{C}}_{pk}^2(\mathbf{x}) \\ \text{St.} : \quad \bar{\mathbf{C}}_{pk}^1(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{C}}_{pk}^2(\mathbf{x}) + 2w_1 - 1 = 0 \\ \quad \mathbf{x} \in \Omega \\ \quad g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \\ \quad h_{j+1}(\mathbf{x}) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{B.20})$$

Nota-se na Equação (B.20) que $\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} [\bar{\mathbf{C}}_{\mathbf{pk}}(\mathbf{x}) | w_1 = 1] = \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} [\bar{\mathbf{C}}_{pk}^1(\mathbf{x})]$, então, pode-se reescrever a Equação (B.20) como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} \quad \bar{\mathbf{C}}_{\mathbf{pk}}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{C}}_{pk}^1(\mathbf{x}) \\ \text{St.} : \quad \bar{\mathbf{C}}_{pk}^1(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{C}}_{pk}^2(\mathbf{x}) + 2w_1 - 1 = 0 \\ \quad \mathbf{x} \in \Omega \\ \quad g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \\ \quad h_{j+1}(\mathbf{x}) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{B.21})$$

A mesma ideia pode ser estendida para o caso multivariado, de modo que o problema NBI original para as razões multivariadas, introduzido pela Equação (6.34) – seção 6, pode ser substituído pela Equação (6.35) por analogia à Equação (B.21). Isto é, tomando-se $\bar{\mathbf{C}}_{\mathbf{pk}}(\mathbf{x})$ como $\overline{\mathbf{M}\mathbf{C}}_{\mathbf{pk}}(\mathbf{x})$ e $\bar{\mathbf{C}}_{pk}^1(\mathbf{x})$ e $\bar{\mathbf{C}}_{pk}^2(\mathbf{x})$ como $\overline{\mathbf{M}\mathbf{C}}_{pk}^1(\mathbf{x})$ e $\overline{\mathbf{M}\mathbf{C}}_{pk}^2(\mathbf{x})$, respectivamente, pode-se escrever a seguinte expressão:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} \quad \overline{\mathbf{MC}}_{pk}(\mathbf{x}) = \overline{MC}_{pk}^1(\mathbf{x}) \\ \text{St.} : \quad \overline{MC}_{pk}^1(\mathbf{x}) - \overline{MC}_{pk}^2(\mathbf{x}) + 2w_1 - 1 = 0 \\ \quad \mathbf{x} \in \Omega \\ \quad g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \\ \quad h_{j+1}(x) = 0 \end{array} \right. , \quad (\text{B.22})$$

que é o problema NBI-Equivalente para as razões multivariadas modificadas de variância de previsão.

Apêndice C – Determinação do ângulo de rotação Varimax via esquemas de Kaiser

Proposição. Com base nos esquemas Varimax, obtém-se, para as variáveis de resposta originais do processo de fresamento investigado, um ângulo de rotação apropriado $\gamma = -0.674$ rad com uma matriz de rotação Λ correspondente, tal que:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \cos(-0.674) & -\sin(-0.674) \\ \sin(-0.674) & \cos(-0.674) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.781 & 0.624 \\ -0.624 & 0.781 \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

Prova. Para encontrar um ângulo de rotação apropriado, definem-se, inicialmente, algumas variáveis auxiliares:

(1) A soma quadrática de cargas normalizadas para m fatores, u_i , é dada por:

$$u_i = \sum_{j=1}^m \left(A_{ij} / \sqrt{h_i^2} \right)^2, \text{ para cada variável original } i \quad (\text{C.2})$$

(2) O produtório de cargas normalizadas para m fatores, v_i , é dado por:

$$v_i = 2 \prod_{j=1}^m A_{ij} / \sqrt{h_i^2}, \text{ para cada variável original } i \quad (\text{C.3})$$

Table E.1

Quantidades-resumo para a análise fatorial rotacionada

| Variável | Cargas Originais* | | Comunalidade | Variáveis Auxiliares | | | |
|---|-------------------|----------|--------------|----------------------|--------|-------------------|-------------|
| | A_{F1} | A_{F2} | h_i^2 | u_i | v_i | $(u_i^2 - v_i^2)$ | $2 u_i v_i$ |
| R _a [μm] | 0.940 | -0.079 | 0.890 | 0.986 | -0.167 | 0.945 | -0.328 |
| R _q [μm] | 0.765 | -0.506 | 0.842 | 0.391 | -0.921 | -0.695 | -0.720 |
| R _y [μm] | 0.920 | -0.046 | 0.848 | 0.995 | -0.100 | 0.980 | -0.198 |
| R _t [μm] | 0.930 | -0.282 | 0.944 | 0.832 | -0.555 | 0.383 | -0.924 |
| P _c [kW] | 0.862 | 0.400 | 0.903 | 0.646 | 0.764 | -0.166 | 0.986 |
| E _c [cm ³ /N.min] | 0.681 | 0.618 | 0.846 | 0.097 | 0.995 | -0.981 | 0.194 |
| $\sum_{i=1}^p$ | - | - | - | 3.946 | 0.017 | 0.466 | -0.991 |

* As cargas originais vêm da Tabela 7.14 – seção 7.2.3

Usando as cargas originais, obtidas na 7.2.3, pode-se calcular as variáveis auxiliares apresentadas anteriormente, aplicando-se as Eqs. (C.2) e (C.3). Então, conforme a teoria da análise factorial, obtêm-se as quantidades resumidas na Tabela C.1.

A partir da Tabela C.1, extraem-se quatro coeficientes:

$$a = \sum_{i=1}^n u_i v_i = 3.946; \quad b = \sum_{i=1}^n u_i = 0.017; \quad c = \sum_{i=1}^n v_i = 0.466; \quad \text{and} \quad d = \sum_{i=1}^n (u_i^2 - v_i^2) = -0.991$$

Agora, relembando o esquema Varimax para o ângulo de rotação, dado previamente pela Eq. (3.14), e substituindo os coeficientes a, b, c e d , têm-se:

$$\gamma = \frac{1}{4} \arctg \left(\frac{a - \left(\frac{2bc}{p} \right)}{d - \left[\frac{(b^2 - c^2)}{p} \right]} \right) = \frac{1}{4} \arctg \left(\frac{-0.991 - \left(\frac{2 \times 3.946 \times 0.017}{6} \right)}{0.466 - \left[\frac{(3.946)^2 - (0.017)^2}{6} \right]} \right) \quad (\text{C.4})$$

$$= \frac{1}{4} \arctg(0.476) = 0.111 \text{ rad} = 6.359^\circ$$

De acordo com Kaiser (1958), os valores do ângulo devem estar entre -22.5° e -45° . Então, a seguinte transformação é necessária:

$$\gamma = 6.359^\circ - 45^\circ = -38.641^\circ = -0.674 \text{ rad} \quad (\text{C.5})$$

Considerando o ângulo de rotação obtido, a matriz de rotação Λ pode ser encontrada, aplicando-se a Eq. (3.14):


$$\Lambda = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-0.674) & -\sin(-0.674) \\ \sin(-0.674) & \cos(-0.674) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.781 & 0.624 \\ -0.624 & 0.781 \end{bmatrix} \quad (\text{C.6})$$

As cargas rotacionadas são derivadas do produto da matriz original Λ pelas cargas originais contidas na Tabela C.1.

Apêndice D – Plataforma de otimização desenvolvida em MS Excel

| Menu | | | | | | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------|-------|------------------------------|----|----|--|-------|----------|-------|-------|--------|--|
| Experimental Data | | | Ordinary Least Squares | | | Please, define the following parameters: | | | | | | |
| Prediction Variance Parameters | | | Normal Boundary Intersection | | | k | 3,000 | α | 1,682 | n_c | 5,000 | |
| Matrix Calculations | | | Report | | | Central Composite Design | | | | | | |
| | | | | | | f | 8,000 | s | 6,000 | N | 19,000 | |
| Please, define the control parameters | | | | | | Please, define the response variables: | | | | | | |
| | | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | y1 | y2 | y3 | y4 | |
| 1 | 225,000 | 0,220 | 0,330 | | | | | T | Ra | | | |
| -1 | 100,000 | 0,100 | 0,150 | | | | | y5 | y6 | y7 | y8 | |

(a) Menu de Opções

| Prediction Capability of Pareto Optimal Solutions | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|--------|-------|-------|--------|--------|---|--------|--------|---------------|----------|--------------------|------------|-----|-------|-------|----|----|----|
| Lucas Guedes de Oliveira, PhD | | | | | | Please, select the number of factors | | | Center points | α | | | | | | | | |
| lucasguedesdeoliveira@gmail.com | | | | | |  | | | k=2 | k=3 | k=4 | k=5 | k=6 | 5,000 | 1,682 | | | |
| Experimental Data | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Design | | | | | | | | | | | Response Variables | Clean Data | | | | | | |
| StdOrd | RunOrd | PtCod | PTyp | Consta | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | y1 | y2 | y3 | y4 | y5 | y6 | y7 | y8 |
| 1,000 | 1,000 | f1 | 1,000 | 1,000 | -1,000 | -1,000 | -1,000 | -1,000 | -1,000 | -1,000 | 61,000 | 0,450 | | | | | | |
| 2,000 | 2,000 | f2 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | -1,000 | -1,000 | -1,000 | -1,000 | -1,000 | 32,250 | 0,540 | | | | | | |
| 3,000 | 3,000 | f3 | 1,000 | 1,000 | -1,000 | 1,000 | -1,000 | -1,000 | -1,000 | -1,000 | 50,500 | 0,980 | | | | | | |
| 4,000 | 4,000 | f4 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | -1,000 | -1,000 | -1,000 | -1,000 | 30,000 | 1,220 | | | | | | |
| 5,000 | 5,000 | f5 | 1,000 | 1,000 | -1,000 | -1,000 | 1,000 | -1,000 | -1,000 | -1,000 | 62,250 | 0,550 | | | | | | |
| 6,000 | 6,000 | f6 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | -1,000 | 1,000 | -1,000 | -1,000 | -1,000 | 28,500 | 0,620 | | | | | | |
| 7,000 | 7,000 | f7 | 1,000 | 1,000 | -1,000 | 1,000 | 1,000 | -1,000 | -1,000 | -1,000 | 50,500 | 0,930 | | | | | | |
| 8,000 | 8,000 | f8 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | -1,000 | -1,000 | -1,000 | -1,000 | 27,500 | 0,890 | | | | | | |

(b) Lançamento de Dados Experimentais

| Parameters of prediction variance $V(x)$ for CCD | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|--------|----------|----------|----------|--------|---------------|---------|---|--------|----------|-------|-----------|--|----------|--|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--|--|
| k | $h(p)$ | $h^*(p)$ | $r(k/2)$ | k | 3,000 | T | 200,471 | A | 0,200 | p | 0,000 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2,000 | 0,000 | 4,712 | 1,000 | f | 8,000 | α_{11} | 0,200 | B | -0,063 | $h^*(p)$ | 7,540 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3,000 | 0,000 | 7,540 | 0,886 | rf | 1,000 | α_{12} | -0,068 | C | 0,073 | $r(k/2)$ | 0,886 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4,000 | 0,000 | 9,870 | 1,000 | rs | 1,000 | α_{22} | -0,172 | D | 0,000 | - | - | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5,000 | 0,000 | 11,280 | 1,329 | α | 1,682 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6,000 | 0,000 | 11,627 | 2,000 | N | 19,000 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <table border="1" style="width: 100%;"> <thead> <tr> <th colspan="2">Spherical</th> <th colspan="2">Cuboidal</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Vp</td> <td>3,791</td> <td>VMAXp</td> <td>3,791</td> </tr> <tr> <td>VMAXp</td> <td>3,791</td> <td>VMINp</td> <td>3,791</td> </tr> <tr> <td>VMINp</td> <td>3,791</td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> | | | | | | | | | | | | Spherical | | Cuboidal | | Vp | 3,791 | VMAXp | 3,791 | VMAXp | 3,791 | VMINp | 3,791 | VMINp | 3,791 | | |
| Spherical | | Cuboidal | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Vp | 3,791 | VMAXp | 3,791 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| VMAXp | 3,791 | VMINp | 3,791 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| VMINp | 3,791 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">Results</div> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

(c) Configuração e cálculo dos parâmetros de variância de previsão

Figura D.1 – Plataforma de otimização desenvolvida em MS Excel para estudo da Capacidade de Previsão de Soluções Pareto Ótimas: principais funções e recursos

Fonte: Autoria própria.

| Run Payoff | | Run NBI | | Run NBI for the selected weight | | Run Payoff for capability ratios | | Run NBI for capability ratios | | | | | | |
|---------------|--------|---------|--------|---------------------------------|--------|----------------------------------|--------|-------------------------------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|
| Payoff Matrix | | | | | | | | | | | | | | |
| | T | Ra | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | SPV | S-Vp | S-VMAXp | S-VMINp | C-VMAXp | C-VMINp |
| T | 62,842 | 46,006 | 42,185 | 42,185 | 42,185 | 42,185 | 42,185 | 42,185 | 42,185 | 42,185 | 42,185 | 42,185 | 42,185 | 42,185 |
| Ra | 0,590 | 0,207 | 0,332 | 0,332 | 0,332 | 0,332 | 0,332 | 0,332 | 0,332 | 0,332 | 0,332 | 0,332 | 0,332 | 0,332 |
| 0 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 0 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 0 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 0 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 0 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 0 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| SPV | 11,539 | 3,879 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 |
| S-Vp | 11,539 | 3,879 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 |
| S-VMAXp | 11,539 | 3,879 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 |
| S-VMINp | 11,539 | 3,879 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 |
| C-VMAXp | 11,539 | 3,879 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 |
| C-VMINp | 11,539 | 3,879 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 | 3,791 |

(d) Opções de Otimização e Matriz Payoff

| Normal Bo | | | | | | | | | | | | | | | |
|------------------------|---------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|--------------|-----------------|-----------------|----------------|----------------|-------|
| Response Variable | T | Ra | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | SPV | Spherical Vp | Spherical VMAXp | Spherical VMINp | Cuboidal VMAXp | Cuboidal VMINp | z(x) |
| Optimization Direction | Max | Min | Max | Min | Min | Min | Min | Min | Min | Min | Min | Min | Min | Min | |
| Constant | 42,185 | 0,332 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | - | - | - | - | - | - | 1,000 |
| x1 | -12,010 | 0,087 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | - | - | - | - | - | - | |
| x2 | -1,559 | 0,252 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | - | - | - | - | - | - | |
| x3 | -0,797 | -0,038 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | - | - | - | - | - | - | |
| x4 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | - | - | - | - | - | - | |
| x5 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | - | - | - | - | - | - | |
| x6 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | - | - | - | - | - | - | |
| x1A2 | -0,431 | 0,187 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | - | - | - | - | - | - | 0,000 |
| x2A2 | -1,138 | 0,140 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | - | - | - | - | - | - | 0,000 |
| x3A2 | 2,044 | 0,152 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | - | - | - | - | - | - | 0,000 |
| x4A2 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | - | - | - | - | - | - | 0,000 |
| x5A2 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | - | - | - | - | - | - | 0,000 |
| x6A2 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | - | - | - | - | - | - | 0,000 |
| x1x2 | 2,375 | 0,005 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | - | - | - | - | - | - | 0,000 |
| x1x3 | -0,938 | -0,038 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | - | - | - | - | - | - | 0,000 |

(e) Sentidos de Otimização e Funções Objetivo

| Payoff for 2 response variables | | | | | Function Value |
|---------------------------------|--------|--------|--|--|----------------|
| | T | Ra | | | |
| T | 62,842 | 46,006 | | | 42,185 |
| Ra | 0,590 | 0,207 | | | 0,332 |

| NBI Weights | |
|-------------|--------|
| w1 | (1-w1) |
| 1,000 | 0,000 |

| Variance Measure | | Sqrt(MSE) | 3,055 | 0,096 | 3,055 | 0,096 |
|------------------|--------|-----------|-------|-------|-------|-------|
| Direct | Cpk(x) | -0,933 | | | 2,006 | |
| SPV | | | | | | |

| Payoff for 2 capability ratios | | | Function Value |
|--------------------------------|--------|---------|----------------|
| | Cpk(T) | Cpk(Ra) | |
| Cpk(T) | 2,392 | 0,000 | -0,933 |
| Cpk(Ra) | 0,118 | 2,013 | 2,006 |

Run Limit Values

| Limit Values for Original Responses Based on Cpk' Cut-offs | | | | | | | | | |
|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Cpk Limit | T | Ra | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Cpk(T) | 1,800 | 0,515 | 0,727 | 3,288 | 4,072 | 0,251 | 0,013 | 0,393 | 0,943 |
| Cpk(Ra) | 1,600 | 0,672 | 0,825 | 4,023 | 4,804 | 0,307 | 0,014 | 1,290 | 0,133 |

| NBI Functions | |
|---------------|--------|
| f1(x) | f2(x) |
| 1,2269 | 0,3258 |
| g2(x) | 1,9011 |
| 0 | |

| NBI Functions | |
|---------------|---------|
| Cpk1(x) | Cpk2(x) |
| 1,3901 | 0,0040 |
| g2(x) | 2,3861 |
| 0 | |

| NBI/MSE Functions | |
|-------------------|----------|
| MSE1(x) | MSE2(x) |
| 428,5746 | 0,0174 |
| MSE(x) | 428,5746 |
| g2(x) | 429,5572 |
| 0 | |

(f) Opções de personalização das variáveis e métricas de variância de previsão utilizadas

Figura D.1 – Plataforma de otimização desenvolvida em MS Excel para estudo da Capacidade de Previsão de Soluções Pareto Ótimas: principais funções e recursos (Continuação)

Fonte: Autoria própria.

Apêndice E – Produção científica no período de doutoramento


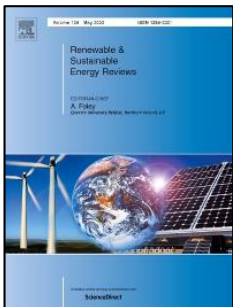



| Periódico | Qualis | Publicação |
|---|--------|---|
|  | A1 | OLIVEIRA, L. G.; OLIVEIRA, C. H.; BRITO, T.G.; PAIVA, E. J.; PAIVA, A. P.; FERREIRA, J.R. Nonlinear optimization strategy based on multivariate prediction capability ratios: analytical schemes and model validation for duplex stainless steel end milling. Precision Engineering , v. 66, p. 229-254, 2020. DOI: 10.1016/j.precisioneng.2020.06.005 |
|  | A1 | OLIVEIRA, L. G.; AQUILA, G. BALESTRASSI, P. P.; PAIVA, A. P.; QUEIROZ, A. R.; PAMPLONA, E. O.; CAMATTA, U. P. Evaluating economic feasibility and maximization of social welfare of photovoltaic projects developed for the Brazilian northeastern coast: An Attribute Agreement Analysis. Renewable & Sustainable Energy Reviews , v. 123, p. 109786, 2020. DOI: 10.1016/j.rser.2020.109786 |
|  | A1 | OLIVEIRA, L. G.; PAIVA, A. P.; CAMPOS, P. H. S.; PAIVA, E. J.; BALESTRASSI, P. P. Prediction capability of Pareto optimal solutions: a multi-criteria optimization strategy based on model capability ratios. Precision Engineering , v. 59, p. 185-210, 2019. DOI: 10.1016/j.precisioneng.2019.06.008 |
|  | A2 | OLIVEIRA, L. G.; PAIVA, A. P.; BALESTRASSI, P. P.; FERREIRA, J. R.; COSTA, S. C.; CAMPOS, P. H. S. Response surface methodology for advanced manufacturing technology optimization: theoretical fundamentals, practical guidelines, and survey literature review. International Journal of Advanced Manufacturing Technology , v. 104, p. 1785-1837, 2019. Pub. Online: 18/06/2019. DOI: 10.1007/s00170-019-03809-9 |
|  | A2 | PAPANDREA, P. J.; MAIA, P. R.; FRIGIERI, E. P.; OLIVEIRA, L. G.; PAIVA, A. P. Surface roughness diagnosis in hard turning using acoustic signals and support vector machine: A PCA-based approach. Applied Acoustics , v. 159, p. 107102, 2020. DOI: 10.1016/j.apacoust.2019.107102 |

Tabela E.1 - Publicações Internacionais


| Revista | Publicação |
|---|--|
|  | <p>OLIVEIRA, L. G.; PAIVA, A. P.; PAIVA, E. J. Aplicação do método de Monte Carlo para a previsão de falhas: uma ferramenta de apoio à gestão da manutenção. Revista Produção Online, v. 19, p. 72-101, 2019.</p> |

Tabela E.2 - Publicação Nacional

| Evento Científico | Publicação |
|---|---|
| | <p>OLIVEIRA, L. G.; CAMPOS, P. H. S.; PAIVA, A. P. Previsão da demanda de voos comerciais domésticos: comparação entre abordagens econômicas e estatísticas. In: XXXVIII Encontro Nacional de Engenharia de Produção (ENEGEP), 2018, Maceió/AL.</p> |
|  | <p>OLIVEIRA, L. G.; MARTINS, Y. S.; LEITE, R. R.; CAMPOS, P. H. S.; LACERDA, J. C. Panorama de abordagens da gestão de projetos em P&D: contexto atual e direcionamentos futuros. In: XXXVIII Encontro Nacional de Engenharia de Produção (ENEGEP), 2018, Maceió/AL.</p> |
| | <p>LEITE, R. R.; MELO, D. J.; CARVALHO, H.; OLIVEIRA, L. G.; PAIVA, A. P. Aplicação de métodos de balanceamento de linha em uma empresa do setor alimentício. Encontro Nacional de Engenharia. In: XXXVIII Encontro Nacional de Engenharia de Produção (ENEGEP), 2018, Maceió/AL.</p> |
|  | <p>NORONHA, J. L.; CAMPOS, P. H. S.; OLIVEIRA, L. G. Aplicação na Obtenção da Qualidade e Produtividade utilizando Tecnologia 4.0 determinada pelo uso de um Torno CNC. In: XIV Encontro Mineiro de Engenharia de Produção (EMEPRO), 2018, Juiz de Fora - MG.</p> |
|  | <p>RABELO, Y. S.; OLIVEIRA, L. G.; CAMPOS, P. H. S.; NORONHA, J. L.; PAIVA, A. P. Estudo Gage R&R para análise das medições de desgaste em ferramentas de corte usadas no processo de torneamento. In: XXXIX Encontro Nacional de Engenharia de Produção (ENEGEP), 2019, Santos/SP.</p> |

Tabela E.3 - Artigos publicados em anais de congresso

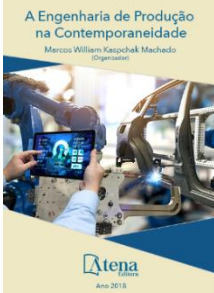
| Livro | Publicação |
|---|---|
|  | <p>OLIVEIRA, L. G.; CAMPOS, P. H. S.; MARTINS, A. X.; OLIVEIRA, J. A. A.; PAIVA, A. P. Gestão de Serviços por Meio do uso de Técnicas de Planejamento e Controle da Produção: Aplicações Nos Setores De Saúde, Construção Civil E Alimentício. In: Marcos William Kaspchak Machado. (Org.). A engenharia de produção na contemporaneidade. 1ed. Ponta Grossa-PR: Atena Editora: Antonella Carvalho de Oliveira, 2018, v. 1, p. 109-125.</p> |

Tabela E.4 - Capítulo de livro publicado

REFERÊNCIAS

AJITH P.M., HUSAIN, T.M.A., SATHIYA P., ARAVINDAN S., Multi-objective optimization of continuous drive friction welding process parameters using response surface methodology with intelligent optimization algorithm. **Journal of Iron and Steel Research International**, v. 22, p. 954-60, 2015. DOI: 10.1016/S1006-706X(15)30096-0.

ANDERSON-COOK, C.M.; BORROR, C.M.; MONTGOMERY, D.C. Response surface design evaluation and comparison. **Journal of Statistical Planning and Inference**, v. 139, p. 629–41, 2009. DOI: 10.1016/j.jspi.2008.04.004.

ARDEBILI S.M.S.; SOLMAZ H.; MOSTAFAEI M. Optimization of fusel oil – gasoline blend ratio to enhance the performance and reduce emissions. **Applied Thermal Engineering**, v. 148, p. 1334-45, 2019. DOI: 10.1016/j.applthermaleng.2018.12.005.

ARIAEE S.; TUTUNCHI A.; KIANVASH A.; ENTEZAMI A.A. Modeling and optimization of mechanical behavior of bonded composite-steel single lap joints by response surface methodology. **International Journal of Adhesion and Adhesives**, v. 54, p. 30-9, 2014. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2014.05.002.

ARRUDA, É.M.; PAIVA, A.P.; BRANDÃO, L.C.; FERREIRA, J.R. Robust optimisation of surface roughness of AISI H13 hardened steel in the finishing milling using ball nose end mills, **Precision Engineering**, v. 60, p. 194–214, 2019. DOI: 10.1016/j.precisioneng.2019.07.013.

BACCI, L.A.; MELLO, L.G.; INCERTI, T.; PAIVA, A.P.; BALESTRASSI, P.P. Optimization of combined time series methods to forecast the demand for coffee in Brazil: A new approach using Normal Boundary Intersection coupled with mixture designs of experiments and rotated factor scores. **International Journal of Production Economics**, v. 212, p. 186–211, 2019. DOI: 10.1016/j.ijpe.2019.03.001.

BAUER, N.; ICKSTADT, K.; LÜBKE, K.; SZEPAÑNEK, G. **Applications in Statistical Computing**. Cham: Springer International Publishing, 2019. DOI: 10.1007/978-3-030-25147-5.

BORKOWSKI J.J. Spherical prediction variance properties of central composite and Box-Behnken designs. **Technometrics**, v. 37, p. 399-410, 1995a. DOI: 10.1080/00401706.1995.10484373

BORKOWSKI J.J. Minimum, maximum, and average spherical prediction variances for central composite and box-behnken designs. **Communications in Statistics - Theory and Methods**, v. 24, n. 10, p. 2581-600, 1995b. DOI: 10.1080/03610929508831634.

BORROR, C.M.; MONTGOMERY, D.C.; MYERS, R.H. Evaluation of statistical designs for experiments involving noise variables. **Journal of Quality Technology**, v. 34, p. 54–70, 2002. DOI: 10.1080/00224065.2002.11980129.

BOUACHA K.; YALLESE M.A.; MABROUKI T.; RIGAL J.F. Statistical analysis of surface roughness and cutting forces using response surface methodology in hard turning of AISI 52100 bearing steel with CBN tool. **International Journal of Refractory Metals and Hard Materials**, v. 28, p. 349-61, 2010. DOI: 10.1016/j.ijrmhm.2009.11.011.

BOX G.E.P. The Exploration and Exploitation of Response Surfaces: Some General Considerations and Examples. **Biometrics**, v. 10, n. 1, p. 16-60, 1954b. DOI: 10.2307/3001663

BOX G.E.P.; DRAPER N.R. A Basis for the Selection of a Response Surface Design. **Journal of the American Statistical Association**, v. 54, p. 622-54, 1959. DOI: 10.2307/2282542.

BOX G.E.P.; DRAPER N.R. **Response surfaces, mixtures, and ridge analyses**. 2 ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2007.

BOX, G.E.P.; DRAPER, N.R. The Choice of a Second Order Rotatable Design. **Biometrika**, v. 50, p. 335, 1963. DOI: 10.2307/2333904.

BOX, G.E.P.; HUNTER, J.S. Multi-Factor Experimental Designs for Exploring Response Surfaces. **Annals of Mathematical Statistics**, v. 28, p. 195–241, 1957. DOI: 10.1214/aoms/1177707047.

BOX, G. E. P.; WILSON, K. B. On the Experimental Attainment of Optimum Conditions. **Journal of the Royal Statistical Society**, v. 13, n. 1, p. 1-45, 1951.

BRATCHELL, N. Multivariate response surface modelling by principal components analysis. **Journal of Chemometrics**, v. 3, p. 579–88, 1989. DOI: 10.1002/cem.1180030406.

BRITO, T.G.; PAIVA, A.P.; FERREIRA, J.R.; GOMES, J.H.F.; BALESTRASSI, P.P. A normal boundary intersection approach to multiresponse robust optimization of the surface roughness in end milling process with combined arrays. **Precision Engineering**, v. 38, p. 628-38, 2014. DOI: 10.1016/j.precisioneng.2014.02.013.

CAMPOS, P.H.S.; DAVIM, J.P.; FERREIRA, J.R.; PAIVA, A.P.; BALESTRASSI, P.P. The Machinability of Hard Materials: A Review. **Machinability of Advanced Materials**. 45 ed. London: John Wiley & Sons, 2014,

CAMPOS, Paulo Henrique da Silva. **Metodologia DEA-OTS: Uma contribuição para a seleção ótima de ferramentas no Torneamento do Aço ABNT H13 Endurecido**. 2015. 205 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) – Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2015.

CAMPOSECO-NEGRETE, C.; CALDERÓN-NÁJERA, J.D. Sustainable machining as a mean of reducing the environmental impacts related to the energy consumption of the machine tool: a case study of AISI 1045 steel machining. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 102, p. 27-41, 2019. DOI: 10.1007/s00170-018-3178-0.

CARPINETTI, L.C.R.; GEROLAMO, M.C. **Gestão da Qualidade ISO 9001:2015: Requisitos e Integração com a ISO 14001:2015**. 1 ed. São Paulo: Atlas, 2016.

CHAUBEY, S.K.; JAIN, N.K. Analysis and multi-response optimization of gear quality and surface finish of meso-sized helical and bevel gears manufactured by WSEM process. **Precision Engineering**, v. 55, p. 293–309, 2019. DOI: 10.1016/j.precisioneng.2018.09.019.

CHEN, K.S.; YU, K.T.; SHEU, S.H. Process capability monitoring chart with an application in the silicon-filler manufacturing process. **International Journal of Production Economics**, v. 103, p. 565–71, 2006. DOI: 10.1016/j.ijpe.2005.11.004.

COLIN, E.C. **Pesquisa operacional: 170 aplicações em estratégia, finanças, logística, produção, marketing e vendas.** Rio de Janeiro: LTC, 2015.

COSTA, Danielle Martins Duarte. **Método NBI-EQMM com restrições multivariadas para otimização do processo de Torneamento Duro.** 2017. 239 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) – Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2017.

COSTA, D.M.D.; BRITO, T.G.; PAIVA, A.P.; LEME, R.C.; BALESTRASSI, P.P. A normal boundary intersection with multivariate mean square error approach for dry end milling process optimization of the AISI 1045 steel. **Journal of Cleaner Production**, v. 135, p. 1658-1672, 2016a. DOI 10.1016/j.jclepro.2016.01.062

COSTA, D.M.D.; PAULA, T.I.; SILVA, P.A.P.; PAIVA, A.P. Normal boundary intersection method based on principal components and Taguchi's signal-to-noise ratio applied to the multiobjective optimization of 12L14 free machining steel turning process. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 87, n. 1-4, p. 825–834, 2016b. DOI 10.1007/s00170-016-8478-7

CUI, X.; ZHENG, X.; GUO, J. Optimization of cutting conditions in hard milling with the performance of cemented carbide tool material considered. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 96, p. 2161–73, 2018. DOI: 10.1007/s00170-018-1782-7.

CZITROM, V. One-Factor-at-a-Time versus Designed Experiments. **The American Statistician**, v. 53, p. 126-31, 1999. DOI: 10.1080/00031305.1999.10474445.

DAS I.; DENNIS J.E. A closer look at drawbacks of minimizing weighted sums of objectives for Pareto set generation in multicriteria optimization problems. **Structural Optimization**, v. 14, p. 63-9, 1997. DOI: 10.1007/BF01197559.

DAVIM J.P. **Machine of Hard Materials.** London: Springer, 2011.

DEL CASTILHO, E. **Process Optimization: A Statistical Approach.** 1 ed. New York: Springer, 2007.

EHRGOTT, M. **Multicriteria Optimization.** 2 ed. Heidelberg: Springer, 2005.

FRANK, L.E.; FRIEDMAN, J. H. A statistical view of some chemometrics regression tools. **Technometrics**, v. 35, n. 2, p. 109-35, 1993. DOI: 10.1080/00401706.1993.10485033.

GAMARRA J.R.; DINIZ A.E. Taper turning of super duplex stainless steel: tool life, tool wear and workpiece surface roughness. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 40, p. 39, 2018. DOI: 10.1007/s40430-018-0991-1.

GAUDÊNCIO J.H.D.; ALMEIDA F.A.; SABIONI R.C.; TURRIONI J.B.; PAIVA A.P.; CAMPOS P.H.S. Fuzzy multivariate mean square error in equispaced pareto frontiers considering manufacturing process optimization problems. **Engineering with Computers**, v. 35, n. 4, p. 1213-36, 2019a. DOI: 10.1007/s00366-018-0660-0.

GAUDÊNCIO J.H.D.; ALMEIDA F.A.; TURRIONI J.B.; QUININO R.C.; BALESTRASSI P.P.; PAIVA A.P. A multiobjective optimization model for machining quality in the AISI

12L14 steel turning process using fuzzy multivariate mean square error. **Precision Engineering**, v. 56, 303-20, 2019b. DOI: 10.1016/j.precisioneng.2019.01.001.

GHOBAKHLOO, M. Industry 4.0, digitization, and opportunities for sustainability. **Journal of Cleaner Production**, v. 252, p. 119869, 2020. DOI: 10.1016/j.jclepro.2019.119869.

GIL, A.C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GIOVANNITTI-JENSEN A.; MYERS R.H. Graphical Assessment of the Prediction Capability of Response Surface Designs. **Technometrics**, v. 31, p. 159-71, 1989. DOI: 10.1080/00401706,1989,10488510

GOLDFARB, H.B.; BORROR, C.M.; MONTGOMERY, D.C.; ANDERSON-COOK, C.M. Evaluating mixture-process designs with control and noise variables. **Journal of Quality Technology**, v. 36, p. 245–62, 2004. DOI: 10.1080/00224065.2004.11980272.

GOMES, J. H. F.; PAIVA, A. P.; COSTA, S. C.; BALESTRASSI, P. P.; PAIVA, E. J. Weighted Multivariate Mean Square Error for processes optimization: A case study on fluxcored arc welding for stainless steel claddings. **European Journal of Operational Research**, v. 226, n. 3, p. 522-35, 2013.

GRADIŠAR, D.; GLAVAN, M.; STRMČNIK, S.; MUŠIČ, G. ProOpter: An advanced platform for production analysis and optimization. **Computers in Industry**, v. 70, p. 102–15, 2015. DOI: 10.1016/j.compind.2015.02.010.

GRZESIK W.; ŽAK K.; KISZKA P. Comparison of surface textures generated in hard turning and grinding operations. **Procedia CIRP**, v. 13, p. 84-9, 2014. DOI: 10.1016/j.procir.2014.04.015.

GU, X.; LU, J. Reliability-based robust assessment for multiobjective optimization design of improving occupant restraint system performance. **Computers in Industry**, v. 65, p. 1169–80, 2014. DOI: 10.1016/j.compind.2014.07.003.

GUPTA, K.; JAIN, N.K. Analysis and optimization of micro-geometry of miniature spur gears manufactured by wire electric discharge machining. **Precision Engineering**, v. 38, p. 728–37, 2014. DOI: 10.1016/j.precisioneng.2014.03.009.

HÄRDLE, W.K.; HLÁVKA, Z. **Multivariate Statistics**. Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2015. DOI: 10.1007/978-3-642-36005-3.

HE, Z.; FANG, J. Comparative study of response surface designs with errors-in-variables model. **Transactions of Tianjin University**, v. 17, p. 146–50, 2011. DOI: 10.1007/s12209-011-1605-5.

HEBBLE T.L.; MITCHELL, T.J. “Repairing” Response Surface Designs. **Technometrics**, v. 14, p. 767-79, 1972. DOI: 10.1080/00401706.1972.10488965.

HOERL, R.W. Ridge Analysis 25 Years Later. **American Statistician**, v. 39, p. 186, 1985. DOI: 10.2307/2683926.

HUANG C.; RADİ B.; HAMI A. Uncertainty analysis of deep drawing using surrogate model based probabilistic method. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 86, p. 3229–40, 2016. DOI: 10.1007/s00170-016-8436-4.

IMOA – International Molybdenum Association. **Practical Guidelines for the Fabrication of Duplex Stainless Steel**. 3 ed. Londres: International, 2014. Disponível em: <https://www.imoa.info/download_files/stainless-steel/Duplex_Stainless_Steel_3rd_Edition.pdf>. Acesso em 03 fev. 2020.

JAHN, J.. **Vector Optimization: Theory, Applications, and Extensions**. 2 ed. Heidelberg: Springer, 2011. DOI: 10.1007/978-3-642-17005-8.

JIAO, L.; LEE, J.H. Finding efficient solutions in robust multiple objective optimization with SOS-convex polynomial data. **Annals of Operations Research**, 2019. DOI: 10.1007/s10479-019-03216-z

JOHNSON, R.A.; WICHERN, D.W. **Applied Multivariate Statistical Analysis**. 6 ed. Upper Saddle River: Pearson Prentice Hall, 2007.

JOUNI N.; REVEL P.; MAZERAN P.; BIGERELLE M. The ability of precision hard turning to increase rolling contact fatigue life. **Tribology International**, v. 59, p. 141-46, 2013. DOI: 10.1016/j.triboint.2012.07.010.

KAISER, H.F. The varimax criterion for analytic rotation in factor analysis. **Psychometrika**, v. 23, p. 187–200, 1958. DOI: 10.1007/BF02289233.

KARAOĞLU S.; SEÇGIN A. Sensitivity analysis of submerged arc welding process parameters. **Journal of Materials Processing Technology**, v. 202, p. 500-7, 2008. DOI: 10.1016/j.jmatprotec.2007.10.035.

KARTHIKEYAN S.; BALASUBRAMANIAN V.; RAJENDRAN R. Developing empirical relationships to estimate porosity and microhardness of plasma-sprayed YSZ coatings. **Ceramics International**, v. 40, p. 3171-83, 2014. DOI: 10.1016/j.ceramint.2013.09.125.

KHURI, A. **Response surface methodology and related topics**. Singapore: World Scientific Publishing, 2005.

KHURI, A.; CORNELL, J. **Response surface: design and analyses**. 2 ed. New York: Marcel Dekker, 1996.

KIEFER. J. Optimum Experimental Designs (with discussion). **Journal of the Royal Statistical Society**, v. 21, n. 2, p. 272-319, 1959.

KÖKSOY, O. Multiresponse robust design: Mean square error (MSE) criterion. **Applied Mathematics and Computation**, v. 175, n. 2, p. 1716-29, 2006.

KOTZ, S.; LOVELACE, C. **Process Capability Indices in Theory and Practice**. 1 ed. London: Arnold, 1998.

KRAJEWSKI, L.J.; RITZMAN, L.P.; MALHOTRA, M.K. **Operations management: processes and supply chains**. 12 ed. Upper Saddle River: Pearson, 2018.

KRISHNAPRASAD K.; SUMESH C.S.; RAMESH A. Numerical modeling and multi objective optimization of face milling of AISI 304 steel. **Journal of Applied and Computational Mechanics**, v. 5, p. 749–62, 2019. DOI: 10.22055/JACM.2019.27528.1414.

KUMAR K.R.; SREEBALAJI V.S. Modeling and analysis on the influence of reinforcement particle size during EDM of aluminum (Al/3,25Cu/8,5Si)/Fly ash composites. **Journal of Advanced Manufacturing Systems**, v. 15, p. 189-207, 2015. DOI: 10.1142/S0219686716500141

LASSERRE, J.B. **An introduction to polynomial and semi-algebraic optimization**. United Kingdom: Cambridge University Press, 2015. DOI: 10.1017/CBO9781107447226

LEE, J.H.; JIAO, L. Solving Fractional Multicriteria Optimization Problems with Sum of Squares Convex Polynomial Data. **Journal of Optimization Theory & Applications**, v. 176, p. 428–55, 2018. DOI: 10.1007/s10957-018-1222-8

LI, L. **Managing supply chain and logistics: Competitive strategy for a sustainable future**. World Scientific Publishing Company, 2014. DOI: 10.1142/9151.

LIANG, L.; ANDERSON-COOK C.M.; ROBINSON T.J.; MYERS R.H. Three-Dimensional Variance Dispersion Graphs for Split-Plot Designs. **Journal of Computational and Graphical Statistics**, v. 15, p. 757-78, 2006. DOI: 10.1198/106186006X157117.

LIN, D.K.J.; TU, W. Dual response surface optimization. **Journal of Quality Technology**, v. 27, n. 1, p. 34-9, 1995. DOI: 10.1080/00224065.1995.11979556.

LIU C.; GONG Z.; TEO K.L.; FENG E. Multi-objective optimization of nonlinear switched time-delay systems in fed-batch process. **Applied Mathematical Modelling**, v. 40, p. 10533-548, 2016. DOI: 10.1016/j.apm.2016.07.010.

LOGIST F.; HOUSKA B.; DIEHL M.; IMPE J.V. Fast Pareto set generation for nonlinear optimal control problems with multiple objectives. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 42, p. 591-603, 2010. DOI: 10.1007/s00158-010-0506-x.

LOPES, L.G.D.; BRITO, T.G.; PAIVA, A.P.; PERUCHI, R.S.; BALESTRASSI, P.P. Robust parameter optimization based on multivariate normal boundary intersection. **Computers & Industrial Engineering**, v. 93, p. 55–66, 2016. DOI: 10.1016/j.cie.2015.12.023.

MAJEED, A.; ZHANG, Y.; LV, J.; PENG, T.; ATTA, Z.; AHMED, A. Investigation of T4 and T6 heat treatment influences on relative density and porosity of AlSi10Mg alloy components manufactured by SLM. **Computers & Industrial Engineering**, v. 139, p. 106194, 2020. DOI: 10.1016/j.cie.2019.106194.

MARTINHO, R.P.; SILVA, F.J.G.; MARTINS, C.; LOPES, H. Comparative study of PVD and CVD cutting tools performance in milling of duplex stainless steel. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 102, p. 2423–39, 2019. DOI: 10.1007/s00170-019-03351-8.

MARTINS, R.A.; MELLO, C.H.P.; TURRIONI, J.B. **Guia para elaboração de monografia e TCC em Engenharia de Produção**. São Paulo: Atlas, 2014.

MESSAC A.; ISMAIL-YAHAYA A.; MATTSON C.A. The normalized normal constraint method for generating the Pareto frontier. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 25, p. 86-98, 2003. DOI: 10.1007/s00158-002-0276-1.

MISAKA, T.; HERWAN, J.; RYABOV, O.; KANO, S.; SAWADA, H.; KASASHIMA, N.; FURUKAWA, Y. Prediction of surface roughness in CNC turning by model-assisted response surface method. **Precision Engineering**, v. 62, p. 196–203, 2020. DOI: 10.1016/j.precisioneng.2019.12.004.

MONTGOMERY D.C. **Designs and Analysis of Experiments**. 9 ed. USA: John Wiley & Sons, 2017.

MONTGOMERY D.C. **Introduction to Statistical Quality Control**. 7 ed. New York: John Wiley & Sons, 2012.

MONTGOMERY D.C.; RUNGER G.C. Gauge Capability and Designed Experiments, Part I: Basic Methods. **Quality Engineering**, v. 6, n. 1, p. 115-35, 1993a.

MYERS R.H.; MONTGOMERY D.C.; VINING G.G.; BORROR C.M.; KOWALSKI, S.M. **Response Surface Methodology: A Retrospective and Literature Survey**, Journal of Quality Technology, v. 36, p. 53-77, 2004. DOI: 10.1080/00224065.2004.11980252.

MYERS R.H.; MONTGOMERY D.C.; ANDERSON-COOK, C.M. **Response Surface Methodology: process and product optimization using designed experiments**. 3 ed. New York: John Wiley & Sons, 2009.

NACEREDDINE, N.; GOUMEIDANE, A.B.; ZIOU, D. Unsupervised weld defect classification in radiographic images using multivariate generalized Gaussian mixture model with exact computation of mean and shape parameters. **Computers in Industry**, v. 108, p. 132–49, 2019. DOI: 10.1016/j.compind.2019.02.010.

NAM J.S.; KIM D.H.; CHUNG H.; LEE S.W. Optimization of environmentally benign micro-drilling process with nanofluid minimum quantity lubrication using response surface methodology and genetic algorithm. **Journal of Cleaner Production**, v. 102, p. 428-36, 2015. DOI: 10.1016/j.jclepro.2015.04.057.

NOYEL, M.; THOMAS, P.; THOMAS, A.; CHARPENTIER, P. Reconfiguration process for neuronal classification models: Application to a quality monitoring problem. **Computers in Industry**, v. 83, p. 78–91, 2016. DOI: 10.1016/j.compind.2016.09.004.

OLIVEIRA, Lucas Guedes de. **Fundamentos da Metodologia de Superfície de Resposta e suas aplicações em Manufatura Avançada: Uma análise crítica**. 2018. 98 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2018.

OLIVEIRA, L.G.; PAIVA, A.P.; BALESTRASSI, P.P.; FERREIRA, J. R.; COSTA, S.C.; CAMPOS, P.H.S. Response surface methodology for advanced manufacturing technology optimization: theoretical fundamentals, practical guidelines, and survey literature review. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, p. 1785–837, 2019. DOI: 10.1007/s00170-019-03809-9.

OZOL-GODFREY, A.; ANDERSON-COOK, C.M.; MONTGOMERY, D.C. Fraction of design space plots for examining model robustness. **Journal of Quality Technology**, v. 37, p. 223–35, 2005. DOI: 10.1080/00224065.2005.11980323.

PAIVA A.P.; PAIVA E.J.; FERREIRA J.R.; BALESTRASSI P.P.; COSTA S.C. A multivariate mean square error optimization of AISI 52100 hardened steel turning. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 43, p. 631-43, 2009. DOI: 1007/s00170-008-1745-5.

PARK H.J.; PARK S.H. Extension of Central Composite Design for Second-Order Response Surface Model Building. **Communications in Statistics – Theory and Methods**, v. 39, p. 1202-11, 2010. DOI: 10.1080/03610920902871412.

PEREIRA, Robson Bruno Dutra. **Otimização Robusta Multi-objetivo do processo de Fresamento Helicoidal do Aço AISI H13 endurecido pelo método da Restrição Normal**. 2017. 296 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) – Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2017.

PHILIP, S.D.; CHANDRAMOHAN, P.; RAJESH, P.K. Prediction of surface roughness in end milling operation of duplex stainless steel using response surface methodology. **Journal of Engineering Science and Technology**, v. 10, p. 340–52, 2015.

PIEPEL G.F. Discussion of “Response surface design evaluation and comparison” by C.M. Anderson-Cook, C.M. Borror, and D.C. Montgomery. **Journal of Statistical Planning and Inference**, v. 139, p. 653-65, 2009. DOI: 10.1016/j.jspi.2008.04.008.

POLICENA, M.R.; DEVITTE, C.; FRONZA, G.; GARCIA, R.F.; SOUZA, A.J. Surface roughness analysis in finishing end-milling of duplex stainless steel UNS S32205. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 98, p. 1617–25, 2018. DOI: 10.1007/s00170-018-2356-4.

PONTES, F.J.; AMORIM, G.F.; BALESTRASSI, P.P.; PAIVA, A.P.; FERREIRA, J.R. Design of experiments and focused grid search for neural network parameter optimization. **Neurocomputing**, v. 186, p. 22–34, 2016. DOI: 10.1016/j.neucom.2015.12.061.

RAO S.S. **Engineering optimization: theory and practice**. 4 ed. Upper Saddle River: John Wiley & Sons, 2009.

RENCHER, A.C. **Methods of Multivariate Analysis**. New York: John Wiley & Sons, 2002. DOI: 10.1002/0471271357.

REVEL P.; JOUINI N.; THOQUENNE G.; LEFEBVRE F. High precision hard turning of AISI 52100 bearing steel. **Precision Engineering**, v. 43, p. 24-33, 2016. DOI: 10.1016/j.precisioneng.2015.06.006.

RIMANTHO D.; HANANTYA M.W. Enhancing the management of the noise level using six sigma method: a case study on the machining industry. **IOP Conference Series: Materials Science and Engineering**, v. 277, 2017. DOI: 10.1088/1757-899X/277/1/012055.

ROCHA, Luiz Célio Souza. **Método da Ponderação Entrópica para Otimização Multiobjetivo Robusta de Modelos de Superfície de Resposta**. 2017. 225 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) – Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2017.

ROCHA L.C.S.; PAIVA A.P.; ROTELA JUNIOR P.; BALESTRASSI P.P.; CAMPOS P.H.S.; DAVIM J.P. Robust weighting applied to optimization of AISI H13 hardened-steel turning process with ceramic wiper tool: A diversity-based approach. **Precision Engineering**, v. 50, p. 235-47, 2017a. DOI: 10.1016/j.precisioneng.2017.05.011.

ROCHA L.C.S.; PAIVA A.P.; ROTELA JUNIOR P.; BALESTRASSI P.P.; CAMPOS P.H.S. Robust multiple criteria decision making applied to optimization of AISI H13 hardened steel turning with PCBN wiper tool. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 89, p. 2251-68, 2017b. DOI: 10.1007/s00170-016-9250-8.

ROGERS, J. **Strategy, Value and Risk: Industry Dynamics and Advanced Financial Management**. New York: Palgrave Macmillan, 2019.

ROGOV V.A.; GHORBANI S.; POPIKOV A.N.; POLUSHIN N.I. Improvement of cutting tool performance during machining process by using different shim. **Archives of Civil and Mechanical Engineering**, v. 17, p. 694-710, 2017. DOI: 10.1016/j.acme.2017.01.008.

ROUT, B.K.; MITTAL, R.K. Screening of factors influencing the performance of manipulator using combined array design of experiment approach. **Robotics and Computer-Integrated Manufacturing**, v. 25, p. 651–66, 2009. DOI: 10.1016/j.rcim.2008.05.004.

SAFEEN W.; HUSSAIN S.; WASIM A.; JAHANZAIB M.; AZIZ H.; ABDALLA H. Predicting the tensile strength, impact toughness, and hardness of friction stir-welded AA6061-T6 using response surface methodology. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 87, p. 1765-81, 2016. DOI: 10.1007/s00170-016-8565-9.

SANTOS, R.J. **Um Curso de Geometria Analítica e Álgebra Linear**. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2012.

SMITH, S.W. **Matrix Algebra Theory, Computations, And Applications In Statistics**. New York: Springer, 2010.

SELAIMIA A-A.; YALLESE M.A.; BENSOUILAH H.; MEDDOUR I.K.; KHATTABI R.; MABROUKI T. Modeling and optimization in dry face milling of X2CrNi18-9 austenitic stainless steel using RMS and desirability approach. **Measurement**, v. 107, p. 53–67, 2017. DOI: 10.1016/j.measurement.2017.05.012.

SENTHILKUMAR B.; KANNAN T. Effect of flux cored arc welding process parameters on bead geometry in super duplex stainless steel claddings. **Measurement**, v. 62, p. 127-36, 2015. DOI: 10.1016/j.measurement.2014.11.007.

SEVARAJ, D.P.; CHANDRAMOHAN, P.; CHANDRASEKAR, P. Experimental investigations of nitrogen alloyed duplex stainless steel in dry milling process. **Journal of Engineering Science and Technology**, v. 13, p. 321–31, 2018.

SHIN, S.; TRUONG, N.K.V.; CHO, B.R.; HONG, S.H. Development of a sequential robust-tolerance design model for a destructive quality characteristic. **Computers & Industrial Engineering**, v. 60, p. 777–89, 2011. DOI: 10.1016/j.cie.2011.01.014.

SIKORSKI, J.J.; BROWNBIDGE, G.; GARUD, S.S.; MOSBACH, S.; KARIMI, I.A.; KRAFT, M. Parameterisation of a biodiesel plant process flow sheet model. **Computers & Chemical Engineering**, v. 95, p. 108–22, 2016. DOI: 10.1016/j.compchemeng.2016.06.019.

SPIRING F.A. A Unifying Approach to Process Capability Indices. **Journal of Quality Technology**, v. 29, p. 49-58, 1997. DOI: 10.1080/00224065.1997.11979724.

SUNDARARAMAN, K.A.; GUHARAJA, S.; PADMANABAN, K.P.; SABAREESWARAN, M. Design and optimization of machining fixture layout for end-milling operation. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 73, n. 5-8, p 669–679, 2014. DOI 10.1007/s00170-014-5848-x

SUYAMA D.I.; DINIZ A.E.; PEDERIVA R. Tool vibration in internal turning of hardened steel using CBN tool. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 88, p. 2485-95, 2017. DOI: 10.1007/s00170-016-8964-y.

TABACHNICK, B.G.; FIDELL, L.S. **Using Multivariate Statistics**. 5 ed. Boston: Pearson Education, 2006.

THOMAS, P.; BRIL EL HAOUZI, H.; SUHNER, M.C.; THOMAS, A.; ZIMMERMANN, E.; NOYEL, M. Using a classifier ensemble for proactive quality monitoring and control: The impact of the choice of classifiers types, selection criterion, and fusion process. **Computers in Industry**, v. 99, p. 193–204, 2018. DOI: 10.1016/j.compind.2018.03.038.

TRINCA, L.A.; GILMOUR, S.G. Variance Dispersion Graphs for Comparing Blocked Response Surface Designs, **Journal of Quality Technology**, v. 30, n. 4, p. 314-27, 1998. DOI: 10.1080/00224065.1998.11979868

ULUSKAN, M. Analysis of Lean Six Sigma tools from a multidimensional perspective. **Total Quality Management & Business Excellence**, v. 30, n. 9-10, p. 1167-1188, 2019. DOI: 10.1080/14783363.2017.1360134

VERMA G.C.; KALA P.; PANDEY P.M. Experimental investigations into internal magnetic abrasive finishing of pipes. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 88, p. 1657-68, 2017. DOI: 10.1007/s00170-016-8881-0.

WESTKÄMPER, E. Supervision of quality in process chains by means of learning process models. **Computers in Industry**, v. 33, p. 71–82, 1997. DOI: 10.1016/s0166-3615(97)00012-2.

YANG, X-S. **Nature-Inspired Optimization**. London: Elsevier, 2014.

YÜCEL, Y.; GÖYCINCIK, S.. Optimization of ethanol production from spent tea waste by *Saccharomyces cerevisiae* using statistical experimental designs. **Biomass Conversion and Biorefinery**, v. 5, p. 247-255, 2015. DOI 10.1007/s13399-014-0138-2

ZHOU, L.; LI, F.; ZHAO, F.; LI, J.; SUTHERLAND, J.W. Characterizing the effect of process variables on energy consumption in end milling. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 101, p. 2837–48, 2019. DOI: 10.1007/s00170-018-3015-5.