

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**Teorias sobre Fasores Dinâmicos Obtidas a partir de  
Transformadas Integrais**

**Thais Presses Mendes**

**Orientador: Prof. Dr. Antonio Carlos Zambroni de Souza**

**Coorientador: Prof. Dr. Denis de Carvalho Braga**

ITAJUBÁ, 19 DE JANEIRO DE 2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

# Teorias sobre Fasores Dinâmicos Obtidas a partir de Transformadas Integrais

**Thais Presses Mendes**

**Orientador: Prof. Dr. Antonio Carlos Zambroni de Souza**

**Coorientador: Prof. Dr. Denis de Carvalho Braga**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia  
Elétrica como parte dos requisitos para obtenção do Título de  
Doutora em Engenharia Elétrica

**Área de Concentração: Sistemas Elétricos de Potência**

ITAJUBÁ – MG

19 DE JANEIRO DE 2021

*Dedico este trabalho à minha família.*

# Agradecimentos

Agradeço a Deus pela benção de concluir esta etapa e por me amparar com fé e sabedoria em todos os momentos.

Agradeço aos meus pais, Carla e Amauri, que dedicam suas vidas para cuidar de nossa família. Obrigada por serem sempre tão presentes e amorosos e pelas orações mais sinceras. Agradeço também ao meu irmão Gabriel, pela amizade e carinho. Aos meus avós, em especial, minha avó Maria de Lourdes, pelos cuidados e conselhos cheios de sabedoria e amor. Toda conquista só tem valor com minha família ao meu lado!

Agradeço ao meu namorado, Evaristo, por ser tão amigo e companheiro e por incentivar todos os meus sonhos. Minha profunda gratidão por estar sempre ao meu lado e por tudo o que faz por mim.

Agradeço ao meu orientador, Antonio Carlos Zambroni de Souza, e ao meu coorientador, Denis de Carvalho Braga, pela dedicação e comprometimento em minha orientação. Obrigada por compartilharem seus conhecimentos e suas experiências, essenciais no processo do Doutorado, e fontes de motivação e inspiração para minha carreira acadêmica.

Agradeço também aos professores da UNIFEI, especialmente, Luis Fernando de Osório Mello e Eliane Valença De Lorenci, pela atenção e contribuições à pesquisa.

Agradeço às minhas queridas amigas, Ana Carolina, Nathali, Graziane e Maria Helena, com quem pude compartilhar todos os desafios e alegrias desta etapa.

Agradeço aos meus amigos da UNIFEI, em especial, João, Priscila e Alessandro, pela amizade, troca de conhecimento e momentos descontraídos. Vocês tornaram esta etapa mais alegre.

À banca examinadora, por aceitar o convite e pelas sugestões.

À UFLA pelo apoio à capacitação e apoio financeiro.

*“Nessa estrada não nos cabe conhecer ou ver o que virá. O fim dela ninguém sabe bem ao certo onde vai dar. Vamos todos numa linda passarela de uma aquarela que um dia enfim descolorirá...”*

*Toquinho*

# Resumo

A Teoria Fasorial Clássica remonta ao trabalho pioneiro de Charles Proteus Steinmetz no estudo de circuitos elétricos de corrente alternada. Segundo Steinmetz, um fasor clássico ou estático é um número complexo que representa uma função senoidal cuja amplitude, fase e frequência angular são constantes e transforma equações diferenciais ordinárias com coeficientes constantes, que por sua vez são modelos para circuitos elétricos de corrente alternada, em sistemas lineares com coeficientes complexos. Quando a amplitude, a fase ou a frequência angular não é mais constante, a teoria sobre os fasores deve ser adaptada de modo a preservar os resultados clássicos. Nesta nova teoria, que lida com uma grande classe de funções, e não apenas as funções senoidais, o fasor é denominado dinâmico ou fasor variável no tempo. Seguindo esta linha, o principal objetivo deste trabalho é apresentar três novas teorias sobre fasores dinâmicos construídas a partir de transformadas integrais, a saber, a transformada de Fourier de curto termo, a transformada generalizada de Laplace e a transformada de Hilbert. Mais precisamente, os fasores dinâmicos surgem através de operadores lineares injetores entre espaços vetoriais adequados e têm propriedades semelhantes às dos fasores dinâmicos usualmente encontrados na literatura.

**Palavras-chave:** Fasor estático, Fasor dinâmico, Transformada de Fourier de curto termo, Transformada generalizada de Laplace, Transformada de Hilbert, Frequência variável.

# Abstract

The Classical Phasor Theory goes back to the pioneer work of Charles Proteus Steinmetz in the study of alternating current electrical circuits. According to Steinmetz, a classical or static phasor is a complex number that represents a sinusoidal function whose amplitude, phase and angular frequency are constants and it transforms ordinary differential equations with constant coefficients, which are models for alternating current electrical circuits, in linear systems with complex coefficients. When either amplitude, phase or angular frequency is no longer constant, the phasor theory must be adapted in such a way to preserve the classical results. In this new theory, which deals with a large class of functions rather than only sinusoidal functions, the phasor is called dynamic or time-variable phasor. Following this line, the main objective of this work is to present three new theories about dynamic phasors built from integral transforms, namely, the short-term Fourier transform, the generalized Laplace transform and the Hilbert transform. More precisely, the dynamic phasors arise through injective linear operators between suitable vector spaces and they have similar properties to those of the dynamic phasors usually found in the literature.

**Keywords:** Static phasor, Dynamic phasor, Short-term Fourier transform, Generalized Laplace transform, Hilbert transform, Variable frequency.

# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>ii</b>
<b>Resumo</b>	<b>iv</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Sumário</b>	<b>vi</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>viii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Contexto Histórico . . . . .	2
1.2 Revisão Bibliográfica . . . . .	3
1.3 Contribuições do Trabalho . . . . .	5
1.4 Conteúdo dos Capítulos . . . . .	6
1.5 Símbolos e Notações . . . . .	7
<b>2 Conceitos Preliminares</b>	<b>8</b>
2.1 Circuitos Elétricos . . . . .	8
2.2 Potências Ativa, Reativa e Complexa . . . . .	12
2.3 Estudo das Potências em um Contexto de Álgebra Linear . . . . .	19
2.3.1 Principais Resultados Utilizados da Álgebra Linear . . . . .	19
2.3.2 Aplicação em Circuitos Elétricos Lineares . . . . .	23

<b>3</b>	<b>Fasores Estáticos</b>	<b>30</b>
3.1	Abordagem Fasorial Clássica . . . . .	31
3.2	Abordagem Fasorial Clássica como um Operador Linear . . . . .	38
3.3	Transformada de Fourier . . . . .	43
3.3.1	Aplicação Básica do Operador Linear $\mathcal{F}$ na Teoria de Circuitos Elétricos . . . . .	45
3.4	Transformada de Laplace . . . . .	46
3.4.1	Aplicação Básica do Operador Linear $\mathcal{L}$ na Teoria de Circuitos Elétricos . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Fasores Dinâmicos Conhecidos na Literatura</b>	<b>52</b>
4.1	Coeficientes de Fourier Variáveis no Tempo . . . . .	53
4.2	Fasor Dinâmico como um Operador Linear . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Fasores Dinâmicos Via Transformadas Integrais</b>	<b>60</b>
5.1	Transformada Integral do Tipo Fourier . . . . .	60
5.1.1	Fasores Dinâmicos Via Transformada de Fourier de Curto Termo . . . . .	70
5.1.2	Aplicação Básica do Operador Linear $\mathcal{G}$ na Teoria de Circuitos Elétricos . . . . .	76
5.2	Fasores Dinâmicos Via Transformada Generalizada de Laplace . . . . .	77
5.2.1	Aplicação Básica do Operador Linear $\mathcal{T}$ na Teoria de Circuitos Elétricos . . . . .	100
5.3	Fasores Dinâmicos com Frequência Variável no Tempo . . . . .	101
5.3.1	Aplicação em Teoria de Circuitos Elétricos . . . . .	106
5.4	Comparação entre as Teorias sobre Fasores Dinâmicos e Potenciais Aplicações	109
	<b>Conclusões</b>	<b>112</b>
	<b>Trabalhos Futuros</b>	<b>114</b>
	O Problema da Potência Complexa . . . . .	114
	Injetividade do Operador Linear $\mathcal{N}$ . . . . .	117
	Fasores Dinâmicos Via Transformada de Fourier de Curto Termo Modificada . . . . .	117
	Fasores Dinâmicos Via Transformadas Wavelets . . . . .	120
	<b>Bibliografia</b>	<b>121</b>

# Lista de Figuras

2.1	Símbolos dos elementos físicos fundamentais na teoria de circuitos elétricos e suas relações matemáticas. . . . .	10
2.2	Ilustração do fato de que o Teorema da Superposição não se aplica ao sinal de potência instantânea. . . . .	17
4.1	(a) Função original $z = x(\tau)$ e determinação da janela de tempo $\tau \in [t - T, t]$ . (b) Extensão periódica $z = \tilde{x}(\tau)$ . . . . .	54
5.1	(a) Função $x$ . (b) Módulo da função janela $\psi$ , com $t \in \mathbb{R}$ fixado. (c) Produto de $x$ pelo módulo de $\psi$ , com $t \in \mathbb{R}$ fixado. . . . .	74
5.2	Gráfico da função $\phi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , definida por $\phi(u) = \varphi(u/\lambda)$ , $\forall u \in \mathbb{R}$ , com $\varphi$ como em (5.18), $\lambda = 1$ e $\rho(u) = 2u^3 - 3u^2 + 1$ , $u \in (0, 1)$ . . . . .	78
5.3	Gráfico da derivada primeira da função $\phi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , definida por $\phi(u) = \varphi(u/\lambda)$ , $\forall u \in \mathbb{R}$ , com $\varphi$ como em (5.18), $\lambda = 1$ e $\rho(u) = 2u^3 - 3u^2 + 1$ , $u \in (0, 1)$ . . . . .	79
5.4	Gráfico da função $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , definida por $\phi(u) = \varphi(u/\lambda)$ , $\forall u \in \mathbb{R}$ , com $\varphi$ como em (5.19) e $\lambda = 0.5$ . . . . .	80
5.5	Gráfico da derivada primeira da função $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , definida por $\phi(u) = \varphi(u/\lambda)$ , $\forall u \in \mathbb{R}$ , com $\varphi$ como em (5.19) e $\lambda = 0.5$ . . . . .	80

# Capítulo 1

## Introdução

O estudo de circuitos elétricos lineares de corrente alternada envolve cálculos com soluções de equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes. A fim de simplificar tais cálculos, principalmente aqueles relacionados com a potência instantânea, criou-se o conceito de **fasor** como uma alternativa mais simples para o estudo de modelos desses circuitos.

Na literatura, há dois tipos de fasores, o **fasor estático** e o **fasor dinâmico**, cada qual com sua função e suas propriedades. Uma vez que os fasores estáticos e dinâmicos têm ampla aplicação na **Teoria de Circuitos Elétricos**, este trabalho foi motivado pela necessidade de unificar tais conceitos por meio da **Teoria de Operadores Lineares**, incluindo as transformadas integrais. Assim, os principais objetivos são:

1. Revisitar a **Teoria Fasorial Clássica** sob um ponto de vista matemático mais moderno tendo em conta que, embora tal teoria seja bem estabelecida, é possível trazê-la para o século 20 utilizando conceitos simples da **Álgebra Linear**;
2. Apresentar três novas contribuições à **Teoria Fasorial Dinâmica**, todas com algo em comum: a construção dos fasores dinâmicos a partir de transformadas integrais.

É importante enfatizar que o escopo deste trabalho não inclui medições fasoriais, modelagens e simulações utilizando fasores dinâmicos, algoritmos de estimação de fasores

e frequência e análise transitória de sistemas elétricos de potência. No entanto, as teorias apresentadas aqui podem significar novas metodologias para tratar estes assuntos.

Este capítulo introdutório contém o contexto histórico dos fasores, uma revisão bibliográfica dos trabalhos mais relevantes sobre os fasores dinâmicos, um resumo das contribuições da tese e dos conteúdos dos demais capítulos e as notações empregadas no texto.

## 1.1 Contexto Histórico

O uso de fasores na análise de circuitos elétricos lineares de corrente alternada foi introduzido pelo alemão Charles Proteus Steinmetz em 1897. No entanto, alguns documentos encontrados na literatura mostram que o desenvolvimento da teoria sobre fasores teve duas tentativas anteriores a Steinmetz, a primeira com o físico e matemático James Clerk Maxwell e a segunda com o engenheiro eletricitista e matemático Oliver Heaviside [2].

Em 1868, Maxwell apresentou, pela primeira vez, a solução de um modelo de um circuito elétrico RLC em série, alimentado por uma fonte de tensão senoidal alternada. O interessante é que a forma como Maxwell encontrou a solução revela uma antecipação do uso dos números complexos na análise de modelos de circuitos elétricos. Este estudo resultou em um artigo apresentado na reunião do AIEE (*American Institute of Electrical Engineering*) [3], [19]. Posteriormente, em 1893, Heaviside teve um artigo publicado pela *Royal Society of London*, no qual ele utilizava a mesma relação empregada por Steinmetz em sua teoria sobre fasores [13]. No entanto, estes estudiosos aparentemente não conheciam o trabalho um do outro. Este é um fato curioso, uma vez que ambos viveram na mesma época e deram contribuições significativas à engenharia elétrica [2].

Steinmetz era matemático e engenheiro eletricitista e ficou muito conhecido por suas contribuições ao estudo dos circuitos de corrente alternada e dos transitórios elétricos. Seu livro *Theory and calculation of alternating current phenomena*, publicado em 1897, tornou-se uma grande referência para os engenheiros da época [4].

Segundo a Teoria Fasorial Clássica desenvolvida por Steinmetz, um fasor clássico ou **estático** é um número complexo que representa uma função senoidal cuja amplitude, frequência angular e ângulo de fase são números reais. Basicamente, o principal objetivo do fasor é transformar equações diferenciais ordinárias com coeficientes constantes, que são modelos para circuitos lineares de corrente alternada, em sistemas lineares com coeficientes complexos. Assim, os fasores forneceram uma abordagem para a análise de circuitos lineares de corrente alternada em regime permanente, uma vez que vários resultados empregados na análise de circuitos lineares de corrente contínua, que são modelados por sistemas lineares com coeficientes reais, foram adaptados para os circuitos lineares de corrente alternada, como o Teorema de Thévenin, o Teorema de Norton e o Teorema da Superposição [4].

É importante ressaltar que a introdução do conceito de fasor, no final do século XIX, eliminou boa parte das dúvidas dos engenheiros ao passar do estudo de circuitos de corrente contínua para o estudo de circuitos de corrente alternada [4].

Durante muito tempo, o conceito de fasor foi empregado apenas em análises de circuitos elétricos lineares de corrente alternada em regime permanente. Contudo, alguns estudos mais recentes romperam com este paradigma e apresentaram novas teorias, que tratam o fasor como uma função complexa e variável no tempo, fornecendo uma nova abordagem para a análise transitória de circuitos elétricos. Estas teorias, nas quais os fasores são chamados de **dinâmicos** ou **variáveis no tempo**, estendem os resultados associados com os fasores clássicos e tratam de uma ampla classe de funções, não apenas senoidais.

## 1.2 Revisão Bibliográfica

Existem algumas teorias importantes sobre os fasores dinâmicos. Uma delas é encontrada no artigo *Generalized Averaging Method for Power Conversion Circuits* [22], publicado em 1991. Nesse artigo, os fasores dinâmicos são essencialmente coeficientes variáveis no tempo de uma série de Fourier generalizada (veja Seção 4.1). Nas aplicações, tais coeficientes

representam as grandezas físicas (ou elétricas) de modelos de sistemas elétricos de potência e são determinados através de um método de média generalizada. Os autores mostraram que este método é aplicável a uma classe muito mais ampla de modelos de circuitos e sistemas.

Em 1994, no artigo intitulado *Tools for dynamic analysis of the general large power system using time-varying phasors* [29], Venkatasubramanian apresentou o fasor dinâmico através de um operador linear e bijetor entre espaços vetoriais apropriados, o que garante que as equações obtidas pelas **Leis de Kirchhoff** e as equações de balanço de potência podem ser escritas na notação fasorial. Mostrou-se que este fasor dinâmico pode ser utilizado na análise transitória de modelos de circuitos elétricos lineares com excitação senoidal e que as propriedades de estabilidade são mantidas no domínio fasorial.

Em ambas as teorias citadas anteriormente, os fasores dinâmicos têm uma propriedade derivativa útil que generaliza a mesma propriedade dos fasores estáticos e transforma modelos de elementos lineares de circuitos elétricos, como resistores, capacitores e indutores em equações diferenciais lineares complexas.

Em **Teoria da Comunicação**, os fasores dinâmicos são utilizados há algum tempo no contexto da modulação de sinais. Neste caso, a formulação envolve certos conceitos matemáticos, como transformada de Hilbert e sinal analítico. Inspirado nestes conceitos, o artigo [10] propõe uma abordagem diferente para modelar sinais de transitórios eletromecânicos de sistemas de potência através da transformada de Hilbert.

Os fasores dinâmicos também desempenham um papel importante na modelagem e análise da dinâmica de sistemas elétricos, por exemplo, de máquinas elétricas e sistemas LCC-HVDC [8], bem como no estudo da estabilidade [9]. Embora não seja o foco deste trabalho, destaca-se o interesse recente em estimação de fasores e frequência devido à importância dessas quantidades na análise de sistemas elétricos de potência. Em geral, isso é feito através de um dispositivo chamado PMU (*Phasor Measurement Unit*) que é responsável pela coleta de dados e aplicação de algoritmos de estimação, sendo amplamente utilizados aqueles baseados em DFT (*Discrete Fourier Transform*) e métodos não DFT, como Filtros de Kalman, mas também existem outros utilizando aproximações

por polinômios. Em particular, este último método tenta corrigir algumas deficiências na estimativa fasorial dinâmica. O leitor interessado neste assunto pode consultar [28] e suas referências. Também destaca-se o trabalho [12], que aborda a utilização de fasores dinâmicos no novo *software* brasileiro ANAHVDC.

### 1.3 Contribuições do Trabalho

Como citado anteriormente, existem algumas construções dos fasores dinâmicos na literatura, porém ainda há espaço para uma discussão sobre este assunto, uma vez que os trabalhos encontrados na literatura, sobretudo [22], não têm o rigor matemático desejado.

A seguir, apresenta-se um resumo das contribuições deste trabalho, sendo o principal foco o estudo dos fasores dinâmicos.

A primeira contribuição é dada na Seção 2.3, na qual os sinais de potência são apresentados em um contexto de Álgebra Linear. Outra contribuição é dada na Seção 3.2 com a Teoria Fasorial Clássica, tal como em [7], sendo reescrita a partir de um operador linear bijetor.

É conhecido que as transformadas de Fourier e de Laplace são operadores lineares injetores entre espaços vetoriais apropriados e ampliam a noção de fasor estático, aumentando a classe de funções que admitem a representação fasorial clássica. Seguindo nesta linha, mostra-se que existem outras transformadas integrais que desempenham um papel análogo na Teoria Fasorial Dinâmica. Tais contribuições são apresentadas no Capítulo 5.

Na Seção 5.1, estuda-se a transformada de Fourier de curto termo e, embora ela seja bem conhecida, nossa principal contribuição é fornecer uma nova construção que permite derivar outra teoria de fasores dinâmicos, uma abordagem não encontrada na literatura. Através de certos resultados, mostra-se que a transformada de Fourier de curto termo é dada por um operador linear entre espaços vetoriais adequados a partir dos quais é possível construir o fasor dinâmico com suas propriedades essenciais, mais especificamente, aquelas apresentadas em [22] e [29].

Na Seção 5.2, apresenta-se a transformada generalizada de Laplace, uma variação da transformada de Laplace construída neste trabalho. Analogamente, mostra-se que tal transformada, dada por um operador linear entre espaços vetoriais apropriados, também preserva as principais propriedades dos fasores dinâmicos das referências [22] e [29]. Além disso, ainda oferece a vantagem de trabalhar com as condições iniciais do modelo.

Finalmente, na Seção 5.3, apresenta-se um fasor dinâmico generalizado dado por um operador linear entre espaços de Banach e com a frequência variável no tempo. Tal fasor é construído a partir da transformada de Hilbert e, com base nas propriedades desta, é possível mostrar que o fasor generalizado também preserva as propriedades dos fasores dinâmicos usuais. Para completar, estudam-se algumas implicações da variação de frequência em uma aplicação que, no caso da Teoria Fasorial Clássica, coincide com o modelo de potência complexa em circuitos elétricos de corrente alternada. O leitor pode observar que existe uma teoria semelhante no apêndice de [22], onde os autores estudam fasores dinâmicos com frequência variável no tempo através da série generalizada de Fourier, mas o estudo aqui segue um caminho diferente. Além disso, em nossa construção, as funções não precisam ter certas propriedades envolvendo a transformada de Fourier como em [29].

## 1.4 Conteúdo dos Capítulos

O trabalho está dividido como segue. O Capítulo 2 trata de alguns conceitos básicos da Teoria de Circuitos Elétricos, tais como as potências ativa, reativa e complexa. Sob um ponto de vista matemático, mostra-se que as potências podem ser estudadas no contexto da Álgebra Linear.

O Capítulo 3 é dedicado ao estudo dos fasores estáticos. Apresentam-se revisões bibliográficas sobre a abordagem fasorial clássica e as abordagens através das transformadas de Fourier e de Laplace. Além disso, apresenta-se uma abordagem mais moderna, na qual o fasor estático é estudado no âmbito da Teoria de Operadores Lineares.

No Capítulo 4 apresentam-se a definição do fasor dinâmico e as duas principais teorias encontradas na literatura a respeito deste fasor.

O Capítulo 5 contém as contribuições mais significativas do trabalho, três novas teorias sobre os fasores dinâmicos obtidas a partir de transformadas integrais, a saber, a transformada de Fourier de curto termo, a transformada generalizada de Laplace e a transformada de Hilbert.

Este trabalho é finalizado com as principais considerações nas Conclusões.

## 1.5 Símbolos e Notações

Esta seção apresenta algumas notações e símbolos utilizados neste trabalho com o objetivo de facilitar a leitura e a compreensão do texto.

Por simplicidade, utiliza-se o termo “sinal” para representar uma função que modela uma grandeza ou um fenômeno físico. Por exemplo, as expressões “sinal de tensão” e “sinal de corrente” são empregadas para funções que modelam a tensão e a corrente em um circuito elétrico, respectivamente.

As letras latinas maiúsculas em **negrito** são usadas para denotar o sinal de potência complexa e os fasores, sejam eles estáticos ou dinâmicos. Tais fasores são obtidos, na maioria das vezes, a partir de transformações lineares chamadas aqui de operadores lineares. Além disso, como os fasores dinâmicos podem ser vistos como uma generalização dos fasores estáticos, em muitos momentos no texto utiliza-se a mesma notação para ambos e para os correspondentes operadores lineares.

Em matemática, é usual denotar a unidade imaginária  $\sqrt{-1}$  por  $i$ . No entanto, em engenharia, a letra  $i$  é utilizada para representar a corrente elétrica. Assim, para evitar ambiguidades, denota-se  $j = \sqrt{-1}$ .

Ao longo do texto, aparecem expressões sobre a classe de diferenciabilidade de uma função. Se  $U$  é um conjunto aberto e  $\mathbb{F}$  é  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , então  $C^k(U, \mathbb{F})$ , denota o conjunto de todas as funções contínuas que possuem derivadas (ordinárias ou parciais) contínuas até ordem  $k$ , sendo  $k \geq 0$  ou  $k = \infty$ . Os demais conjuntos ou espaços vetoriais estudados são definidos ao longo do texto.

# Capítulo 2

## Conceitos Preliminares

Neste capítulo, são apresentados alguns conceitos da **Teoria de Circuitos Elétricos**. Em particular, são introduzidos os elementos lineares básicos, resistores, capacitores e indutores, bem como os diferentes tipos de potências, ativa, reativa e complexa. Diferentemente da maioria dos livros básicos, o enfoque aqui é mais matemático em uma tentativa de diferenciar os elementos lineares e as potências de seus correspondentes modelos mais simples. No final do capítulo, prepara-se o terreno para a introdução dos fasores estáticos.

### 2.1 Circuitos Elétricos

Um circuito elétrico é um conjunto de componentes elétricos interconectados, tais como, resistores, indutores, capacitores, fontes de tensão e corrente, dentre outros. O tamanho e o comportamento dos circuitos elétricos variam muito, pois dependem dos seus componentes e da forma como eles estão organizados. A **Teoria Clássica de Circuitos Elétricos** trata do comportamento qualitativo e quantitativo de certas grandezas físicas, como tensão, corrente e cargas elétricas, em circuitos elétricos constituídos de conexões em série ou em paralelo de diversos componentes.

Do ponto de vista matemático, as grandezas físicas são representadas por funções do tempo, chamadas de **sinais**, e os circuitos elétricos são modelados, em geral, por equações

diferenciais. Neste sentido, a análise de circuitos elétricos se resume ao estudo da dinâmica dada por equações diferenciais. Estas equações diferenciais podem ser ordinárias, nos casos mais simples, parciais, por exemplo, em estudos de linhas de transmissão, ou mesmo fracionárias, como em [26].

Existem quatro grandezas físicas fundamentais na teoria de circuitos elétricos que são modeladas pelas seguintes variáveis ou funções:

1.  $v = v(t)$ : sinal de tensão elétrica;
2.  $i = i(t)$ : sinal de corrente elétrica;
3.  $q = q(t)$ : sinal de carga elétrica;
4.  $\varphi = \varphi(t)$ : sinal de fluxo magnético,

nas quais a variável independente  $t \in \mathbb{R}$  representa o tempo.

Combinando pares desses sinais, obtêm-se seis relações, sendo as cinco primeiras mais conhecidas:

1.  $(q, i) : dq = idt$ ;
2.  $(\varphi, v) : d\varphi = vdt$ ;
3.  $(v, i) : dv = Rdi$  (Lei de Ohm);
4.  $(\varphi, i) : d\varphi = Ldi$  (Equação do Indutor);
5.  $(q, v) : dq = Cdv$  (Equação do Capacitor);
6.  $(q, \varphi) : d\varphi = Mdq$  (Equação do Memristor).

As relações **3**, **4** e **5** têm origem na definição das propriedades de três elementos básicos ou fundamentais de circuitos elétricos de dois terminais, a saber, a resistência  $R$ , definida pela relação entre  $v$  e  $i$ , a indutância  $L$ , definida pela relação entre  $\varphi$  e  $i$  e a capacitância  $C$ , definida pela relação entre  $q$  e  $v$ .

A última relação ainda é pouco explorada na literatura. Em 1971, Leon O. Chua, baseado na simetria que deveria haver entre as grandezas físicas citadas, conjecturou a existência de um quarto elemento de dois terminais que define a relação entre a carga elétrica e o fluxo magnético de maneira similar à relação entre a tensão e a corrente em um resistor. Este elemento foi chamado de **memristor**, algo como um resistor com memória [6].

A Figura 2.1 apresenta os quatro elementos fundamentais de circuitos elétricos de dois terminais e sintetiza as relações entre eles [25].

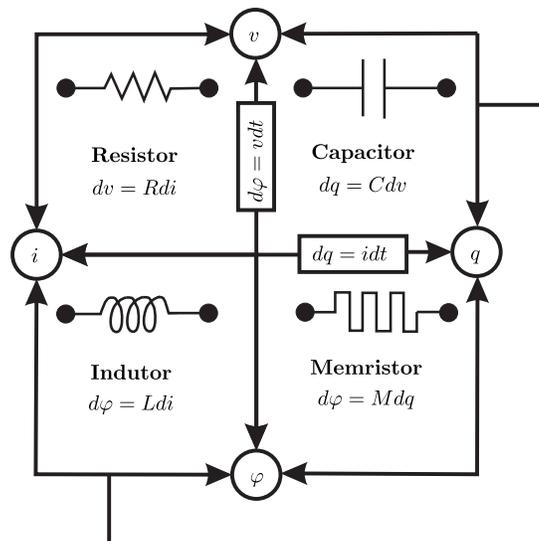


Figura 2.1: Símbolos dos elementos físicos fundamentais na teoria de circuitos elétricos e suas relações matemáticas.

O memristor possui algumas peculiaridades se comparado aos demais elementos. Enquanto os resistores, indutores e capacitores são representados, nos casos mais simples, por modelos lineares e invariantes no tempo, o memristor apresenta uma relação não linear

entre a corrente e a tensão. Essa relação é caracterizada pela propriedade conhecida como *memristência* e denotada por  $M = M(q)$ . No caso em que  $M$  é constante, a memristência é idêntica à resistência.

Considerando a relação  $d\varphi = Mdq$ ,  $M = M(q)$ , pode-se dizer que o memristor é um dispositivo cuja resistência varia conforme o fluxo de cargas elétricas. Além disso, ele mantém seu nível novo de resistência quando não há circulação de corrente elétrica através do elemento [4]. Várias aplicações mostram a utilidade dos memristores. Para mais detalhes veja [6] e [25].

Em maio de 2008, pesquisadores dos laboratórios Hewlett-Packard (HP) construíram o primeiro memristor. Cada memristor possui duas camadas de dióxido de titânio prensadas entre um fio comum inferior e seu próprio fio superior. À medida que a tensão é aplicada ao memristor, o pequeno valor de resistência de uma das camadas é modificado, o que por sua vez é usado como um método para registrar dados [4].

Neste trabalho, o interesse está apenas nos elementos básicos ou fundamentais mais conhecidos: resistores, indutores e capacitores. Conforme escrito anteriormente, os modelos mais simples desses elementos, apresentados em **3**, **4** e **5**, são lineares e invariantes no tempo e podem ser reescritos como:

- i.  $v = Ri$ : Lei de Ohm;
- ii.  $v = L \frac{di}{dt}$ : Equação do Indutor;
- iii.  $i = C \frac{dv}{dt}$ : Equação do Capacitor.

Por essa razão, esses elementos são também chamados de *elementos lineares básicos* e os circuitos elétricos constituídos somente de combinações em série ou em paralelo de tais elementos, além de outros elementos também lineares e não tratados aqui, de *circuitos elétricos lineares*.

Aplicando as *Leis de Kirchhoff das Tensões e das Correntes* [7], juntamente com as equações anteriores, obtêm-se equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes e não homogêneas que modelam circuitos elétricos lineares.

## 2.2 Potências Ativa, Reativa e Complexa

Nesta seção, são apresentadas as funções que modelam a potência ativa, a potência reativa e a potência complexa. Essas funções são chamadas de sinais de potência ativa, reativa e complexa, respectivamente, e são construídas a partir de sinais senoidais.

**Definição 2.2.1.** *Uma função senoidal  $x$  é dada por*

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi), \quad t \in \mathbb{R},$$

sendo a amplitude  $X_m$ , o ângulo de fase  $\phi$  e a frequência angular  $\omega$  números reais, com  $X_m$  não negativo e  $\omega$  positivo. O período da função  $x$  é  $T = 2\pi/\omega$ .

A maioria dos cálculos realizados nesta seção são válidos para quaisquer funções periódicas, contínuas ou descontínuas. No entanto, as funções senoidais facilitam a análise matemática e a análise dos fenômenos físicos em circuitos elétricos. De fato, se a tensão (ou a corrente) em um resistor, indutor ou capacitor for modelada por uma função senoidal, a corrente resultante (ou a tensão, respectivamente) em qualquer um desses componentes também terá como modelo uma função senoidal [4].

Assim, considere os sinais senoidais de tensão e de corrente,  $v$  e  $i$ , respectivamente, dados por

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

sendo  $V_m$  e  $I_m$  as amplitudes,  $\theta_v$  e  $\theta_i$  os ângulos de fase e  $\omega$  a frequência angular. As expressões (2.1) e (2.2) podem ser reescritas da seguinte forma

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v - \theta_i), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

Por definição, a potência instantânea consumida por um dispositivo elétrico é modelada por um sinal de potência instantânea, denotado por  $p$  e determinado, em termos dos sinais senoidais de tensão e corrente, através de

$$p(t) = v(t)i(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Então, substituindo os sinais senoidais (2.3) e (2.4) em (2.5) e utilizando identidades trigonométricas, obtém-se

$$\begin{aligned}
 p(t) &= V_m I_m \cos(\omega t + \theta_v - \theta_i) \cos(\omega t) \\
 &= V_m I_m [\cos^2(\omega t) \cos(\theta_v - \theta_i) - \cos(\omega t) \sin(\omega t) \sin(\theta_v - \theta_i)] \\
 &= \frac{V_m I_m}{2} [(1 + \cos(2\omega t)) \cos(\theta_v - \theta_i) - \sin(2\omega t) \sin(\theta_v - \theta_i)] \\
 &= \frac{V_m I_m}{2} [\cos(\theta_v - \theta_i) + \cos(\theta_v - \theta_i) \cos(2\omega t) - \sin(\theta_v - \theta_i) \sin(2\omega t)].
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Empregando (2.3) e (2.4), os valores eficazes dos sinais senoidais de tensão e de corrente são, respectivamente,

$$V = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v(t)^2 dt} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}, \tag{2.7}$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i(t)^2 dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \tag{2.8}$$

Portanto, a expressão (2.6) pode ser reescrita como

$$p(t) = VI \left[ \cos(\theta) + \cos(\theta) \cos(2\omega t) - \sin(\theta) \sin(2\omega t) \right], \tag{2.9}$$

sendo  $\theta = \theta_v - \theta_i$ .

As definições a seguir tratam de alguns conceitos importantes da Teoria de Circuitos Elétricos [7].

**Definição 2.2.2.** *O sinal de potência ativa, denotado por  $P$ , é definido como o valor médio de  $p$  no intervalo  $[0, T]$ , ou seja,*

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt.$$

Assim, efetuando cálculos simples, obtém-se a seguinte expressão para o sinal de potência ativa

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{VI}{T} \int_0^T \left[ \cos(\theta) + \cos(\theta) \cos(2\omega t) - \sin(\theta) \sin(2\omega t) \right] dt \\
 &= VI \cos(\theta).
 \end{aligned}$$

**Definição 2.2.3.** O sinal de potência reativa, denotado por  $Q$ , é dado por

$$Q = VI \operatorname{sen}(\theta).$$

Observe que os sinais de potência ativa e de potência reativa dependem dos valores eficazes  $V$  e  $I$  e do ângulo de fase  $\theta$ . A expressão  $\cos(\theta)$  é chamada fator de potência. Note também que, conhecido o período (ou a frequência), é possível reconstruir o sinal de potência instantânea dado em (2.9) através dos valores de  $P$  e  $Q$ .

**Definição 2.2.4.** O número complexo  $\mathbf{S}$  dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= P + jQ \\ &= VI \cos(\theta) + jVI \operatorname{sen}(\theta), \end{aligned} \tag{2.10}$$

é denominado sinal de potência complexa. O módulo  $S = |\mathbf{S}| = VI$  da potência complexa é chamado de potência aparente.

Para os elementos lineares básicos, há o seguinte teorema acerca dos sinais de potência.

**Teorema 2.2.1** (Sinais de Potência dos Elementos Lineares Básicos). *Sejam  $V$  e  $I$  os valores eficazes dos sinais senoidais de tensão e de corrente  $v$  e  $i$ , respectivamente, nos elementos lineares básicos de um circuito elétrico. Então, os sinais de potência complexa são dados por:*

- i. Resistor:  $\mathbf{S} = RI^2 = \frac{V^2}{R}$ ;
- ii. Indutor:  $\mathbf{S} = j\omega LI^2 = j\frac{1}{\omega L}V^2$ ;
- iii. Capacitor:  $\mathbf{S} = -j\frac{1}{\omega C}I^2 = -j\omega CV^2$ .

**Demonstração.** Considere um sinal senoidal de corrente  $i$ . A demonstração é análoga para um sinal senoidal de tensão  $v$ .

i. Pela equação do resistor,

$$v(t) = Ri(t) = RI_m \cos(\omega t + \theta_i), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Logo,  $\theta = 0$  e segue da Definição 2.2.3 que  $Q = 0$  e da Definição 2.2.2 que  $P = VI$ , ou seja,

$$P = VI = R \frac{I_m}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}} = RI^2.$$

Portanto, pela Definição 2.2.4,

$$\mathbf{S} = RI^2.$$

Analogamente, mostra-se que  $\mathbf{S} = V^2/R$ .

ii. Pela equação do indutor,

$$\begin{aligned} v(t) &= Li'(t) = -\omega LI_m \text{sen}(\omega t + \theta_i) \\ &= \omega LI_m \cos\left(\omega t + \theta_i + \frac{\pi}{2}\right), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Logo,  $\theta = \pi/2$  e segue da Definição 2.2.2 que  $P = 0$  e da Definição 2.2.3 que  $Q = VI$ , ou seja,

$$Q = VI = \omega L \frac{I_m}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \omega LI^2.$$

Portanto, pela Definição 2.2.4,

$$\mathbf{S} = j\omega LI^2.$$

De modo análogo, mostra-se que  $\mathbf{S} = jV^2/(\omega L)$ .

iii. Considere que os sinais  $i$  e  $v$  têm valores médios nulos. Pela equação do capacitor,

$$v'(t) = \frac{1}{C}i(t).$$

Assim,

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{I_m}{\omega C} \text{sen}(\omega t + \theta_i) \\ &= \frac{I_m}{\omega C} \cos\left(\omega t + \theta_i - \frac{\pi}{2}\right), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Logo,  $\theta = -\pi/2$  e segue da Definição 2.2.2 que  $P = 0$  e da Definição 2.2.3 que  $Q = -VI$ , ou seja,

$$Q = -VI = -\frac{1}{\omega C} \frac{I_m}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\omega C} I^2.$$

Portanto, pela Definição 2.2.4,

$$\mathbf{S} = -j \frac{1}{\omega C} I^2.$$

Analogamente, mostra-se que  $\mathbf{S} = -j\omega CV^2$ . ■

Enfatiza-se aqui que o sinal de potência instantânea (2.6) (ou (2.9)) não satisfaz um Teorema de Linearidade ou Superposição, ou seja, o sinal de potência instantânea total calculado em um elemento linear básico de um circuito elétrico linear não necessariamente é igual a soma dos sinais de potências instantâneas individuais neste elemento básico devido a cada uma das fontes individualmente, embora isto seja verdade para o sinal de potência ativa, segundo a Definição 2.2.2, por se tratar de uma média. Similarmente, há um Teorema de Superposição também para o sinal de potência complexa [7].

De fato, o sinal de potência instantânea em um resistor varia com o quadrado do sinal de corrente ou de tensão, sendo assim um efeito não linear [4]. Por exemplo, a corrente que atravessa o resistor  $R$  da Figura 2.2 (a) em um circuito com duas fontes é modelada por  $i_1$ , levando-se em conta apenas o efeito de uma das fontes. A corrente produzida pela segunda fonte é modelada por  $i_2$ , como mostra a Figura 2.2 (b). Aplicando o Teorema da Superposição, obtém-se o sinal de corrente total  $i_T$  no resistor, dado por

$$i_T = i_1 + i_2.$$

A potência fornecida ao resistor na Figura 2.2 (a) é modelada por

$$p_1 = Ri_1^2,$$

enquanto a potência na Figura 2.2 (b) para o mesmo resistor é modelada por

$$p_2 = Ri_2^2.$$

Agora, observe que o sinal de potência instantânea total fornecida ao resistor (Figura 2.2 (c)) é

$$p_T = Ri_T^2 = R(i_1 + i_2)^2 = Ri_1^2 + Ri_1i_2 + Ri_2^2.$$

É fácil ver que esta última expressão é diferente da soma das potências fornecidas por cada uma das fontes.

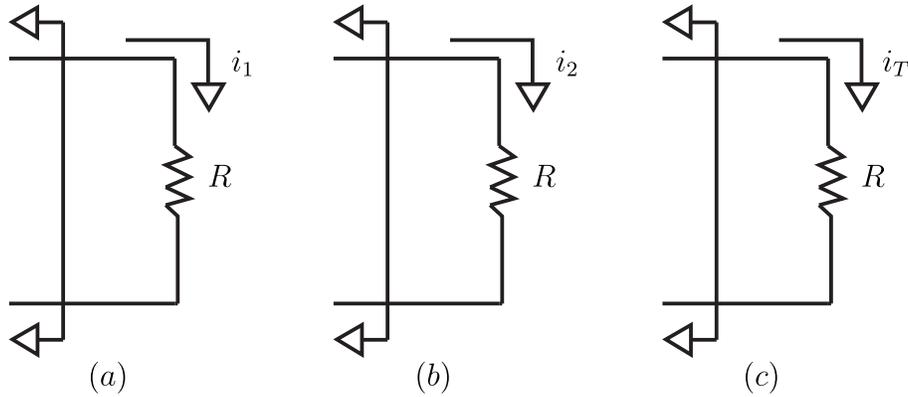


Figura 2.2: Ilustração do fato de que o Teorema da Superposição não se aplica ao sinal de potência instantânea.

Em termos físicos, a potência ativa representa a parcela da potência instantânea que se transforma em trabalho útil. Em um circuito elétrico que contém apenas resistores, no qual a tensão está em fase com a corrente ( $\theta = 0$ ), toda potência recebida é convertida em trabalho e, assim, a potência ativa é máxima. Neste caso, o princípio da superposição pode ser utilizado já que o sinal de potência ativa é dado por uma média.

A potência reativa representa a parcela da potência instantânea que não é convertida em trabalho útil. Esse tipo de potência ocorre na presença de indutores e capacitores, que são elementos armazenadores de energia. No entanto, em [16], os autores mostram que não existe uma função energia como modelo para a potência reativa, ou seja, uma função cuja taxa de variação no tempo fornece exatamente o sinal de potência reativa. Este resultado motivou alguns questionamentos que serão apresentados nos Trabalhos Futuros. Observe que, diferentemente do sinal de potência ativa que é dado por uma média, a expressão (2.9) juntamente com a Definição 2.2.3 dão uma noção da dificuldade de se generalizar o conceito de potência reativa.

Por fim, a potência complexa é a combinação das potências ativa e reativa e, seu valor em módulo, fornece a máxima potência ativa no circuito elétrico. Tal afirmação será demonstrada na Seção 2.3.

Conforme escrito na Seção 2.1, um par  $(v, i)$  de sinais de tensão e corrente sempre está relacionado através de equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes e não homogêneas da forma

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b_0 u + b_1 u' + \cdots + b_{m-1} u^{(m-1)} + b_m u^{(m)}, \quad (2.11)$$

que modelam circuitos elétricos lineares, sendo  $a_i, i = 0, 1, \dots, n$  e  $b_j, j = 0, 1, \dots, m$  números reais, para  $m \leq n, m, n \in \mathbb{N}$ , e  $y^{(n)}$  a derivada de ordem  $n$  da função  $y = y(t)$ , o mesmo valendo para a função  $u = u(t)$ . Se a função  $u = i$  é conhecida, então  $y = v$  é solução de (2.11). Por outro lado, se a função  $u = v$  é conhecida, então  $y = i$  é solução de (2.11).

Note que, se  $u$  é uma função senoidal de período  $T$ , não necessariamente  $y$  será uma função senoidal. Mas, se todas as raízes do polinômio característico

$$P_c(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0$$

tiverem partes reais negativas, então todas as soluções  $y$  de (2.11) serão atraídas por uma função senoidal  $x$  de mesmo período  $T$ , que também é solução de (2.11), ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t) - x(t)| = 0.$$

Tal comentário é um caso particular do Teorema 2.3.2 da Seção 2.3.

A interpretação física deste resultado é que se  $u = i$  é um sinal senoidal, após o transitório, se necessário,  $y = v$  é também um sinal senoidal de mesmo período de  $i$ . O mesmo raciocínio vale se  $u = v$  e  $y = i$ . Neste sentido, após o transitório, todos os resultados sobre os sinais de potências apresentados nesta seção são válidos. Além disso, este resultado também justifica o uso de fasores estáticos no cálculo dos sinais de potência.

A próxima seção apresenta uma generalização do que foi feito aqui ampliando a classe de funções periódicas que podem ser utilizadas como modelos de tensão e de corrente.

## 2.3 Estudo das Potências em um Contexto de Álgebra Linear

Alguns conceitos da Teoria de Circuitos Elétricos, citados na seção anterior, são aplicações diretas de certos resultados da Álgebra Linear. Deve-se enfatizar que não é conhecida nenhuma referência bibliográfica para esta forma de se tratar o assunto, embora seja muito provável que tal literatura já exista há algum tempo.

### 2.3.1 Principais Resultados Utilizados da Álgebra Linear

Trata-se aqui de funções reais que são contínuas por partes e periódicas, de acordo com as próximas definições.

**Definição 2.3.1.** *Uma função  $x$  tem uma descontinuidade do tipo salto em um ponto  $t_0$  do domínio, se os limites laterais*

$$x(t_0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^+} x(t_0 - h),$$

$$x(t_0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} x(t_0 + h),$$

*existem e  $x(t_0^-) \neq x(t_0^+)$ , sendo que  $h \rightarrow 0^+$  significa que  $h \rightarrow 0$  por valores positivos.*

**Definição 2.3.2.** *Uma função  $x$  é contínua por partes no intervalo  $[a, b]$ , se existir uma partição*

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

*do intervalo  $[a, b]$  tal que:*

**a.** *A função  $x$  é contínua em cada subintervalo  $(t_{i-1}, t_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;*

**b.** *Existem os limites laterais*

$$x(t_0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} x(t_0 + h),$$

$$x(t_j^-) = \lim_{h \rightarrow 0^+} x(t_j - h), \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$x(t_j^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} x(t_j + h), \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$x(t_n^-) = \lim_{h \rightarrow 0^+} x(t_n - h).$$

Em outras palavras, uma função  $x$  é contínua por partes no intervalo  $[a, b]$ , se for contínua em todos os pontos de  $[a, b]$ , exceto, possivelmente, em um número finito de pontos em que  $x$  tem descontinuidades do tipo salto. Resulta que funções contínuas por partes em  $[a, b]$  são integráveis, no sentido de Riemann, em  $[a, b]$ , o mesmo valendo para somas e produtos de tais funções.

**Definição 2.3.3.** *Uma função  $x$  é periódica, se existe o menor número real positivo  $T$ , chamado de período, tal que*

$$x(t + T) = x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.12)$$

De acordo com a Definição 2.3.3, as funções constantes não são periódicas já que não existe o ínfimo dos valores de  $T$  satisfazendo a propriedade (2.12).

Tendo em conta as definições anteriores, considere agora o conjunto  $CP_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  de todas as funções periódicas de período  $T$  e contínuas por partes em  $[0, T]$ , com  $T$  fixado. Em  $CP_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , são definidas duas operações, a adição e a multiplicação por escalar:

**O1.** Se  $x, y \in CP_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , então a função adição  $x + y$  é definida por

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t), \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

**O2.** Se  $x \in CP_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , então a função multiplicação por escalar  $\alpha x$  é definida por

$$(\alpha x)(t) = \alpha x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

O conjunto  $CP_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  munido das duas operações anteriores é um espaço vetorial real. Nesse espaço vetorial, é possível definir a seguinte função

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : CP_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times CP_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \langle x, y \rangle := \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t) dt. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Tal função é uma forma bilinear simétrica positiva semidefinida, pois se  $x, y, z \in CP_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , então:

**b1.**  $\langle x, x \rangle \geq 0$ ;

**b2.**  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ ;

**b3.**  $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ ;

**b4.**  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ .

A seminorma induzida por (2.13) é dada por

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : CP_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \\ &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x(t)^2 dt} \end{aligned} \tag{2.14}$$

uma vez que:

**s1.**  $\|x\| \geq 0$ ;

**s2.**  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ ;

**s3.**  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ,

com  $x, y \in CP_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Para a forma bilinear simétrica (2.13) e a seminorma (2.14) vale o próximo resultado.

**Teorema 2.3.1** (Desigualdade de Cauchy–Schwarz). *Se  $x, y \in CP_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , então a seguinte desigualdade é válida*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|. \tag{2.15}$$

**Demonstração.** Considere a função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto f(s) = \langle sx + y, sx + y \rangle, \end{aligned}$$

com  $x, y \in CP_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  fixados. Pelas propriedades **b1**, **b2**, **b3** e **b4**, segue que

$$f(s) = \langle x, x \rangle s^2 + 2\langle x, y \rangle s + \langle y, y \rangle \geq 0, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (2.16)$$

Se  $\langle x, x \rangle = 0$ , então  $f$  é uma função afim e a desigualdade em (2.16) só pode ser verificada se  $\langle x, y \rangle = 0$ . Neste caso, (2.15) é trivialmente satisfeita.

Por outro lado, se  $\langle x, x \rangle \neq 0$ , resulta que (2.16) é um polinômio quadrático que deve ter discriminante não positivo,

$$(2\langle x, y \rangle)^2 - 4\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leq 0,$$

ou seja,

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

■

Devido à propriedade **b1**, (2.13) não é um produto interno definido em  $CP_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , já que pode ocorrer que  $\langle x, x \rangle = 0$ , quando  $x$  é diferente da função nula. Contudo, deve-se enfatizar que o conjunto  $C_T^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  de todas as funções que possuem derivadas contínuas até ordem  $k$ ,  $k \geq 0$  ou  $k = \infty$ , sendo a derivada de ordem zero a identidade, e que são periódicas de período  $T$ , com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar definidas em  $CP_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , é um subespaço vetorial de  $CP_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  no qual (2.13) e (2.14) são um produto interno e uma norma, respectivamente. Além disto, definindo a relação de equivalência

$$x \sim y \Leftrightarrow \langle x - y, x - y \rangle = 0,$$

segue que (2.13) e (2.14) são também um produto interno e uma norma, respectivamente, no espaço quociente  $CP_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \sim$  das classes de equivalência de funções periódicas de período  $T$  que diferem apenas nos pontos de descontinuidades do tipo salto.

### 2.3.2 Aplicação em Circuitos Elétricos Lineares

Considere um sinal de tensão  $v \in CP_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  e um sinal de corrente  $i \in CP_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , isto é,  $v$  e  $i$  são funções reais, definidas em  $\mathbb{R}$ , periódicas de mesmo período  $T$  e contínuas por partes em  $[0, T]$  que modelam a tensão e a corrente em um circuito elétrico.

As seminormas de  $v$  e  $i$  são dadas, respectivamente, por

$$\|v\| = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v(t)^2 dt},$$

$$\|i\| = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i(t)^2 dt}.$$

Observe que  $\|v\|$  e  $\|i\|$  são exatamente os valores eficazes  $V$  e  $I$  dados em (2.7) e (2.8).

O sinal de potência ativa pode ser redefinido utilizando (2.13), ou seja,

$$P = \langle v, i \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T v(t)i(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt.$$

Além disso, utilizando a Desigualdade de Cauchy–Schwarz, obtém-se a seguinte relação entre o sinal de potência ativa e o módulo do sinal de potência complexa

$$P \leq |P| = |\langle v, i \rangle| \leq \|v\| \|i\| = VI = S,$$

sendo  $S = |\mathbf{S}|$ , com  $\mathbf{S}$  tal como em (2.10). Através dessa desigualdade, é possível concluir que o sinal de potência complexa fornece, em módulo, o valor máximo do sinal de potência ativa em um circuito elétrico linear.

Novamente, os resultados da seção anterior somente têm sentido quando o par  $(v, i)$  está relacionado através da dinâmica de (2.11) que modela um circuito elétrico linear. Por sua vez, é sabido que a equação diferencial ordinária (2.11) pode ser estudada em um contexto de Teoria de Controle Linear.

**Lema 2.3.1.** *Se  $u$  é uma função de classe  $C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $m \leq k \leq n$ , então a equação diferencial ordinária (2.11) pode ser reescrita como o sistema de controle linear e invariante no tempo*

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du, \end{cases} \quad (2.17)$$

com  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \vdots \\ B_{n-1} \\ B_n \end{pmatrix},$$

$C = (1, 0, \dots, 0)$  e  $D = b_n$ , sendo

$$\begin{cases} B_1 = b_{n-1} - a_{n-1}D, \\ B_2 = b_{n-2} - a_{n-1}B_1 - a_{n-2}D, \\ B_3 = b_{n-3} - a_{n-1}B_2 - a_{n-2}B_1 - a_{n-3}D, \\ \vdots \\ B_n = b_0 - a_{n-1}B_{n-1} - a_{n-2}B_{n-2} - a_{n-3}B_{n-3} - \cdots - a_1B_1 - a_0D. \end{cases}$$

**Demonstração.** Basta definir as seguintes variáveis

$$\begin{cases} x_1 = y - Du, \\ x_2 = y' - Du' - B_1u = x'_1 - B_1u, \\ x_3 = y'' - Du'' - B_1u' - B_2u = x'_2 - B_2u, \\ \vdots \\ x_n = y^{(n-1)} - Du^{(n-1)} - B_1u^{(n-2)} - B_2u^{(n-3)} - \dots - B_{n-1}u = x'_{n-1} - B_{n-1}u \end{cases}$$

e substituir (2.11) em  $x'_n$ . ■

O lema anterior ainda é válido se  $m = 0$  e  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é periódica de período  $T$  e contínua por partes em  $[0, T]$ . Além disso, empregando (2.17), é fácil mostrar que se os autovalores da matriz  $A$  em (2.18) têm partes reais negativas, então (2.11), para  $m = 0$ , possui uma única solução periódica, de mesmo período  $T$ , que é contínua em  $[0, T]$  e atratora. A demonstração do próximo teorema, que trata disto, é consequência de resultados que podem ser encontrados em [14]. Note que, nessas hipóteses, uma solução do Problema de Valor Inicial envolvendo (2.17),

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du, \\ x(0) = z, \end{cases}$$

com  $z \in \mathbb{R}^n$ , é uma função

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto \phi(t), \end{aligned}$$

contínua em  $\mathbb{R}$ , que satisfaz o Problema Integral equivalente

$$\begin{cases} x(t) = z + \int_0^t (Ax(s) + Bu(s)) ds, & t \in \mathbb{R}, \\ y(t) = Cx(t) + Du(t). \end{cases} \quad (2.19)$$

**Teorema 2.3.2.** *Seja  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica de período  $T$ .*

**a.** *Se  $u$  é de classe  $C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $0 < m \leq k \leq n$ , então cada Problema de Valor Inicial envolvendo o sistema de controle (2.17) possui solução única  $\phi = \phi(t)$  definida e de classe  $C^{k+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Além disso, se todos os autovalores de  $A$  têm partes reais negativas, (2.17) possui uma única solução  $\psi = \psi(t)$  periódica de mesmo período  $T$  e de classe  $C^{k+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  que é atratora, isto é,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t) - \psi(t)\| = 0,$$

*para qualquer solução  $\phi = \phi(t)$  de (2.17);*

**b.** *Se  $m = 0$  e  $u$  é contínua por partes em  $[0, T]$ , então cada Problema de Valor Inicial envolvendo o sistema de controle (2.17) possui solução única  $\phi = \phi(t)$  definida e contínua em  $\mathbb{R}$ . Em particular,  $\phi'$  possui descontinuidades do tipo salto nos mesmos pontos da  $u$  em  $[0, T]$ . Se todos os autovalores de  $A$  têm partes reais negativas, (2.17) possui uma única solução  $\psi = \psi(t)$  periódica de mesmo período  $T$  e contínua em  $[0, T]$  que é atratora, isto é,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t) - \psi(t)\| = 0,$$

*para qualquer solução  $\phi = \phi(t)$  de (2.17).*

**Demonstração.** Somente o item **b** será demonstrado, já que a demonstração do item **a** é análoga. Sejam  $z \in \mathbb{R}^n$  e  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica de período  $T$  e contínua por partes em  $[0, T]$ . A função  $\phi$ , dada por

$$\phi(t) = e^{tA}z + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s) ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

é solução de (2.19). De fato,  $\phi$  é contínua em  $\mathbb{R}$  e, como

$$e^{(t-s)A} = I_n + \int_s^t Ae^{(\tau-s)A} d\tau, \quad (t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

segue que

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \left( I_n + \int_0^t Ae^{\tau A} d\tau \right) z + \int_0^t \left( I_n + \int_s^t Ae^{(\tau-s)A} d\tau \right) Bu(s) ds \\ &= z + A \int_0^t e^{\tau A} z d\tau + A \int_0^t \int_s^t e^{(\tau-s)A} Bu(s) d\tau ds + \int_0^t Bu(\tau) d\tau, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

sendo  $I_n$  a matriz identidade  $n \times n$ .

Considere agora a função  $g$  definida por

$$g(\tau, s) = e^{(\tau-s)A}Bu(s), \quad (\tau, s) \in \mathbb{R}^2.$$

Para cada  $t \in \mathbb{R}$ , sendo

$$R = \{(\tau, s) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \tau \leq t, 0 \leq s \leq \tau\},$$

resulta que

$$\iint_R g(\tau, s) \, dA = \int_0^t \int_s^t g(\tau, s) \, d\tau ds = \int_0^t \int_0^\tau g(\tau, s) \, ds d\tau,$$

pois vale o Teorema de Fubini para funções de duas variáveis que sejam contínuas por partes em um conjunto compacto  $R$ .

Assim,

$$\begin{aligned} \phi(t) &= z + A \int_0^t e^{\tau A} z \, d\tau + A \int_0^t \int_s^t e^{(\tau-s)A} Bu(s) \, d\tau ds + \int_0^t Bu(\tau) \, d\tau \\ &= z + A \int_0^t e^{\tau A} z \, d\tau + A \int_0^t \int_0^\tau e^{(\tau-s)A} Bu(s) \, ds d\tau + \int_0^t Bu(\tau) \, d\tau \\ &= z + \int_0^t \left( A \left( e^{\tau A} z + \int_0^\tau e^{(\tau-s)A} Bu(s) \, ds \right) + Bu(\tau) \right) \, d\tau \\ &= z + \int_0^t (A\phi(\tau) + Bu(\tau)) \, d\tau, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

mostrando que  $\phi$  é solução em  $\mathbb{R}$  do Problema Integral equivalente (2.19).

Em relação à unicidade, suponha que  $\phi_1$  e  $\phi_2$  sejam soluções de (2.19). Então,

$$\begin{aligned} \|\phi_1(t) - \phi_2(t)\| &= \left\| z + \int_0^t (A\phi_1(s) + Bu(s)) \, ds - \left( z + \int_0^t (A\phi_2(s) + Bu(s)) \, ds \right) \right\| \\ &= \left\| \int_0^t A(\phi_1(s) - \phi_2(s)) \, ds \right\| \\ &\leq \|A\| \left| \int_0^t \|\phi_1(s) - \phi_2(s)\| \, ds \right|, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Sejam  $\Phi$  e  $\Lambda$ , funções definidas por

$$\Phi(t) = \|\phi_1(t) - \phi_2(t)\|, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\Lambda(t) = \int_0^t \Phi(s) \, ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Por (2.20),  $\Phi(t) \leq \|A\|\Lambda(t)$ ,  $\forall t \geq 0$  e

$$\Lambda'(t) = \Phi(t) \leq \|A\|\Lambda(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Logo,

$$(\Lambda(t)e^{-\|A\|t})' \leq 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Como a função

$$t \in [0, \infty) \mapsto \Lambda(t)e^{-\|A\|t}$$

é decrescente e  $\Lambda(0) = 0$ , segue que  $\Lambda$  é identicamente nula para  $t \geq 0$ , já que

$$0 \leq \Lambda(t) \leq \Lambda(0)e^{\|A\|t} = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Assim,  $\phi_1(t) = \phi_2(t)$ ,  $\forall t \geq 0$ , pois

$$0 \leq \Phi(t) \leq \|A\|\Lambda(t) = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Para  $t \leq 0$ ,  $\Phi(t) \leq -\|A\|\Lambda(t)$  e, procedendo como anteriormente, mostra-se que  $\phi_1(t) = \phi_2(t)$ ,  $\forall t \leq 0$ .

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\frac{d}{dt} \left( \int_0^t e^{(t-s)A} Bu(s) ds \right)$$

deixa de ser contínua nos mesmos pontos  $t \in \mathbb{R}$  de descontinuidades do tipo salto da função  $u$ . Logo, segue que  $\phi'$  possui pontos de descontinuidades do tipo salto nos mesmos pontos da função  $u$ .

A função  $\phi$  será periódica de período  $T$ , se, e somente se,

$$z = \phi(0) = \phi(T) = e^{TA}z + \int_0^T e^{(T-s)A} Bu(s) ds,$$

ou seja,

$$(I_n - e^{TA})z = \int_0^T e^{(T-s)A} Bu(s) ds. \quad (2.21)$$

Por hipótese, todos os autovalores de  $A$  possuem partes reais negativas e, portanto, a matriz  $I_n - e^{TA}$  é não singular e o sistema linear (2.21) possui solução única

$$x_0 = (I_n - e^{TA})^{-1} \int_0^T e^{(T-s)A} Bu(s) ds. \quad (2.22)$$

Além disso, vale que

$$\|e^{tA}x\| \leq Ke^{-\mu t}\|x\|, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

sendo  $K$  e  $\mu$  números reais positivos e  $\|\cdot\|$  qualquer norma em  $\mathbb{R}^n$ .

Assim, a função  $\psi$ , dada por

$$\psi(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s) ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

é periódica de período  $T$  e contínua em  $[0, T]$ .

Tomando como condição inicial  $z = (z_0 - x_0) + x_0$ , com  $x_0$  tal como em (2.22) e  $z_0 \in \mathbb{R}^n$  arbitrário, porém fixado, a função  $\phi$ , dada por

$$\begin{aligned} \phi(t) &= e^{tA}(z_0 - x_0) + e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s) ds \\ &= e^{tA}(z_0 - x_0) + \psi(t), \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

satisfaz

$$\|\phi(t) - \psi(t)\| = \|e^{tA}(z_0 - x_0)\| \leq Ke^{-\mu t}\|z_0 - x_0\|, \quad \forall t \geq 0$$

e, assim,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t) - \psi(t)\| = 0.$$

■

# Capítulo 3

## Fasores Estáticos

Um fasor estático, tal como proposto por Steinmetz, é um número complexo obtido através de uma operação que transforma equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes, com a propriedade de estabilidade tal como aquela discutida no final das Seções 2.2 e 2.3, em sistemas lineares com coeficientes complexos. Neste sentido, os fasores estáticos simplificam os cálculos, particularmente dos sinais de potência, trazendo a teoria de circuitos lineares de corrente alternada para mais perto da teoria de circuitos lineares de corrente contínua.

É sabido na literatura que as transformadas de Fourier e de Laplace estendem ou generalizam o conceito de fasor estático permitindo que este possa ser uma função complexa. Assim, genericamente, sejam  $V$  um espaço vetorial real de funções diferenciáveis e  $U$  um espaço vetorial complexo. Um vetor  $\mathbf{X} \in U$  é um fasor clássico ou estático se  $\mathbf{X} = T_u(x)$ , sendo

$$\begin{aligned} T_u : V &\longrightarrow U \\ x &\longmapsto T_u(x), \end{aligned}$$

um operador linear injetor satisfazendo

$$T_u(x') = uT_u(x) + c,$$

com  $u$  um parâmetro real ou complexo e  $c$  uma constante real ou complexa.

Esta definição não será citada no texto, mas o leitor deve observar que os fasores clássicos estudados nas Seções 3.1 e 3.2 satisfazem esta definição.

Tendo em vista os comentários anteriores, a proposta deste capítulo é apresentar três abordagens a respeito dos fasores estáticos, a abordagem clássica e as abordagens através das transformadas de Fourier e de Laplace, além de uma análise dos sinais de potência em cada caso.

### 3.1 Abordagem Fasorial Clássica

Subjacente à teoria tratada nesta seção, há uma noção de estabilidade de equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes a qual foi comentada no final da Seção 2.2, mas tratada de maneira mais rigorosa no Teorema 2.3.2. Isto porque o interesse é sempre em pares de sinais de tensão e corrente que estão relacionados (um deles como solução particular) através da equação diferencial ordinária que é modelo de um circuito elétrico linear.

A abordagem clássica é, com a notação moderna, essencialmente a mesma proposta por Steinmetz em 1897. Na formulação dos fasores estáticos, tal como apresentada em [7], associa-se a cada função senoidal segundo a Definição 2.2.1, isto é,

$$\begin{aligned} x : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto x(t) = X \cos(\omega t + \phi), \end{aligned} \tag{3.1}$$

um número complexo  $\mathbf{X} = X e^{j\phi}$ , denominado **fasor clássico** ou **estático**. Observe que, pela fórmula de Euler,

$$\mathbf{X} = X e^{j\phi} = X \cos \phi + j X \operatorname{sen} \phi.$$

Nesta teoria, as funções senoidais consideradas nos cálculos têm todas a mesma frequência angular  $\omega > 0$ . Além disso, usualmente, o número real não negativo  $X$  em  $\mathbf{X}$  é substituído pelo **valor eficaz**

$$\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x(t)^2 dt} = \frac{X}{\sqrt{2}} \tag{3.2}$$

da função senoidal  $x$ , embora isso não seja adotado nesta seção.

Por outro lado, conhecendo a frequência angular  $\omega > 0$ , o fasor  $\mathbf{X}$  determina um único sinal senoidal  $x$  através da relação

$$x(t) = \operatorname{Re}(\mathbf{X}e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(Xe^{j(\omega t + \phi)}) = X \cos(\omega t + \phi), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

Portanto, a correspondência entre sinais senoidais e fasores estáticos é bijetora (veja Lema 3.1.1).

A construção anterior acerca dos fasores estáticos tem pelo menos três propriedades interessantes apresentadas nos próximos lemas.

**Lema 3.1.1** (Unicidade). *Duas funções senoidais são iguais se, e somente se, são representadas pelo mesmo fasor. Simbolicamente,*

$$x_1(t) = \operatorname{Re}(\mathbf{X}_1 e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(\mathbf{X}_2 e^{j\omega t}) = x_2(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

*se, e somente se,*

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2.$$

**Demonstração.** Suponha que

$$x_1(t) = \operatorname{Re}(\mathbf{X}_1 e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(\mathbf{X}_2 e^{j\omega t}) = x_2(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Em particular, para  $t_0 = 0$ , obtém-se

$$\operatorname{Re}(\mathbf{X}_1) = \operatorname{Re}(\mathbf{X}_2). \quad (3.4)$$

Analogamente, em  $t_1 = \pi/2\omega$ , obtém-se

$$e^{j\omega t_1} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = j$$

e, portanto,

$$-\operatorname{Im}(\mathbf{X}_1) = \operatorname{Re}(j\mathbf{X}_1) = \operatorname{Re}(j\mathbf{X}_2) = -\operatorname{Im}(\mathbf{X}_2). \quad (3.5)$$

Portanto, de (3.4) e (3.5),

$$\mathbf{X}_1 = \operatorname{Re}(\mathbf{X}_1) + j\operatorname{Im}(\mathbf{X}_1) = \operatorname{Re}(\mathbf{X}_2) + j\operatorname{Im}(\mathbf{X}_2) = \mathbf{X}_2.$$

Suponha agora que  $X_1 e^{j\phi_1} = \mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2 = X_2 e^{j\phi_2}$ . Então, segue que  $X_1 = X_2$  e  $\phi_1 = \phi_2 + k2\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ . Assim,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \operatorname{Re}(\mathbf{X}_1 e^{j\omega t}) \\ &= \operatorname{Re}(X_1 e^{j(\omega t + \phi_1)}) \\ &= \operatorname{Re}(X_2 e^{j(\omega t + \phi_2 + k2\pi)}) \\ &= \operatorname{Re}(X_2 e^{j(\omega t + \phi_2)}) \\ &= \operatorname{Re}(\mathbf{X}_2 e^{j\omega t}) \\ &= x_2(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

■

**Lema 3.1.2** (Linearidade). *Considere as funções senoidais  $x_1$  e  $x_2$  dadas, respectivamente, por*

$$x_1(t) = \operatorname{Re}(\mathbf{X}_1 e^{j\omega t}), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$x_2(t) = \operatorname{Re}(\mathbf{X}_2 e^{j\omega t}), \quad t \in \mathbb{R},$$

sendo  $\mathbf{X}_1$  o fasor associado a  $x_1$  e  $\mathbf{X}_2$  o fasor associado a  $x_2$ . Então, a função senoidal

$$a_1 x_1 + a_2 x_2$$

é representada pelo fasor

$$a_1 \mathbf{X}_1 + a_2 \mathbf{X}_2,$$

com  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ .

**Demonstração.** Por hipótese,

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) = a_1 \operatorname{Re}(\mathbf{X}_1 e^{j\omega t}) + a_2 \operatorname{Re}(\mathbf{X}_2 e^{j\omega t}), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.6)$$

Como  $a_1$  e  $a_2$  são números reais, então para quaisquer números complexos  $z_1$  e  $z_2$ , as seguintes relações são válidas

$$a_i \operatorname{Re}(z_i) = \operatorname{Re}(a_i z_i), \quad i = 1, 2,$$

$$a_1 \operatorname{Re}(z_1) + a_2 \operatorname{Re}(z_2) = \operatorname{Re}(a_1 z_1 + a_2 z_2).$$

Usando as expressões anteriores, pode-se reescrever (3.6) da forma

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) = \operatorname{Re}((a_1 \mathbf{X}_1 + a_2 \mathbf{X}_2) e^{j\omega t}).$$

Portanto, a função senoidal  $a_1 x_1 + a_2 x_2$  é representada pelo fasor  $a_1 \mathbf{X}_1 + a_2 \mathbf{X}_2$ . ■

Note que este resultado pode ser estendido para uma combinação linear (com coeficientes constantes) de  $n$  funções senoidais, isto é,

$$\sum_{k=1}^n a_k x_k$$

pode ser representada pelo fasor

$$\sum_{k=1}^n a_k \mathbf{X}_k.$$

**Lema 3.1.3** (Derivada). *O operador linear  $\operatorname{Re}$  e a derivada  $d/dt$  comutam, ou seja,*

$$\operatorname{Re}\left(\frac{d}{dt} \mathbf{X} e^{j\omega t}\right) = \operatorname{Re}(j\omega \mathbf{X} e^{j\omega t}) = \frac{d}{dt} \operatorname{Re}(\mathbf{X} e^{j\omega t}), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

**Demonstração.** Empregando o Lema 3.1.1, segue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \operatorname{Re}(\mathbf{X} e^{j\omega t}) &= \frac{d}{dt} \operatorname{Re}(X e^{j(\omega t + \phi)}) \\ &= \frac{d}{dt} \operatorname{Re}(X \cos(\omega t + \phi) + jX \operatorname{sen}(\omega t + \phi)) \\ &= \frac{d}{dt} X \cos(\omega t + \phi) \\ &= -X\omega \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \\ &= \operatorname{Re}(j\omega X e^{j(\omega t + \phi)}) \\ &= \operatorname{Re}(j\omega \mathbf{X} e^{j\omega t}) \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{d}{dt} \mathbf{X} e^{j\omega t}\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$



Com base nos lemas apresentados, é possível enunciar e provar um importante resultado a respeito dos três elementos lineares básicos de circuitos elétricos.

**Teorema 3.1.1** (Equações dos Elementos Lineares Básicos). *Considere os sinais senoidais de tensão e de corrente  $v$  e  $i$ , respectivamente, nos elementos lineares básicos de um circuito elétrico. Sejam  $\mathbf{V}$  o fasor associado ao sinal de tensão e  $\mathbf{I}$  o fasor associado ao sinal de corrente. Então, as equações dos elementos lineares básicos podem ser reescritas, em termos dos fasores estáticos, como:*

i. Resistor:  $\mathbf{V} = R\mathbf{I}$ ;

ii. Indutor:  $\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$ ;

iii. Capacitor:  $\mathbf{V} = \frac{1}{j\omega C}\mathbf{I}$ .

**Demonstração.**

i. Considere a equação do resistor. De acordo com a relação (3.3), pode-se escrever

$$\operatorname{Re}(\mathbf{V}e^{j\omega t}) = R\operatorname{Re}(\mathbf{I}e^{j\omega t}), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.7)$$

Em  $t_0 = t - (\pi/2\omega)$ , obtém-se

$$\operatorname{Re}(\mathbf{V}e^{j\omega(t-\frac{\pi}{2\omega})}) = R\operatorname{Re}(\mathbf{I}e^{j\omega(t-\frac{\pi}{2\omega})}).$$

Aplicando a Fórmula de Euler,  $e^{-j\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - j\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -j$ . Assim,

$$\operatorname{Re}(-j\mathbf{V}e^{j\omega t}) = R\operatorname{Re}(-j\mathbf{I}e^{j\omega t}), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Como consequência do Lema 3.1.1, a relação anterior pode ser reescrita da forma

$$\operatorname{Im}(\mathbf{V}e^{j\omega t}) = R\operatorname{Im}(\mathbf{I}e^{j\omega t}), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.8)$$

Assim, de (3.7) e (3.8), obtém-se

$$\operatorname{Re}(\mathbf{V}e^{j\omega t}) + j\operatorname{Im}(\mathbf{V}e^{j\omega t}) = R(\operatorname{Re}(\mathbf{I}e^{j\omega t}) + j\operatorname{Im}(\mathbf{I}e^{j\omega t})),$$

ou seja,

$$\mathbf{V}e^{j\omega t} = R\mathbf{I}e^{j\omega t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Portanto,

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I}.$$

ii. Agora, considere a equação do indutor. Utilizando o Lema 3.1.3, obtém-se

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\mathbf{V}e^{j\omega t}) &= L \frac{d}{dt} \operatorname{Re}(\mathbf{I}e^{j\omega t}) \\ &= L \operatorname{Re}(j\omega \mathbf{I}e^{j\omega t}), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Em  $t_0 = t - (\pi/2\omega)$ ,

$$\operatorname{Re}(-j\mathbf{V}e^{j\omega t}) = L \operatorname{Re}(-j(j\omega \mathbf{I}e^{j\omega t})).$$

Novamente, pelo Lema 3.1.1,

$$\operatorname{Im}(\mathbf{V}e^{j\omega t}) = L \operatorname{Im}(j\omega \mathbf{I}e^{j\omega t}), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Procedendo de maneira análoga à demonstração do item (i), conclui-se que

$$\mathbf{V}e^{j\omega t} = j\omega L \mathbf{I}e^{j\omega t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Portanto,

$$\mathbf{V} = j\omega L \mathbf{I}.$$

iii. Esta demonstração é análoga ao item ii. ■

As expressões  $R$ ,  $j\omega L$  e  $1/j\omega C$  são chamadas de **resistência**, **reatância indutiva** e **reatância capacitiva**, respectivamente. De forma geral, estas expressões são as impedâncias de frequência  $\omega$  dos elementos lineares básicos, resistor, indutor e capacitor, respectivamente. As expressões  $1/R$ ,  $1/j\omega L$  e  $j\omega C$  são chamadas de **admitâncias**.

À luz dos fasores estáticos, apresenta-se uma definição para o sinal de potência complexa [7].

**Definição 3.1.1.** O número complexo  $\mathbf{S}$  dado por

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}\bar{\mathbf{I}} \tag{3.9}$$

é chamado sinal de potência complexa, sendo  $\bar{\mathbf{I}}$  o complexo conjugado de  $\mathbf{I}$ .

Os sinais senoidais (2.1) e (2.2) podem ser reescritos usando a notação fasorial. Assim,

$$\mathbf{V} = V e^{j\theta_v},$$

$$\mathbf{I} = I e^{j\theta_i},$$

representam os fasores associados aos sinais senoidais (com valores eficazes)  $v$  e  $i$ , respectivamente. Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= VI e^{j(\theta_v - \theta_i)} \\ &= VI \cos(\theta) + jVI \sin(\theta) \\ &= P + jQ. \end{aligned}$$

sendo  $P$  o sinal de potência ativa e  $Q$  o sinal de potência reativa, como nas Definições 2.2.2 e 2.2.3.

**Teorema 3.1.2** (Sinais de Potência dos Elementos Lineares Básicos). *Sejam  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{I}$  os fasores estáticos associados aos sinais senoidais de tensão e de corrente  $v$  e  $i$ , respectivamente, nos elementos lineares básicos de um circuito elétrico. Então, os sinais de potência complexa dos elementos lineares básicos são dados por:*

i. *Resistor:*  $\mathbf{S} = R|\mathbf{I}|^2 = \frac{|\mathbf{V}|^2}{R};$

ii. *Indutor:*  $\mathbf{S} = j\omega L|\mathbf{I}|^2 = j\frac{1}{\omega L}|\mathbf{V}|^2;$

iii. *Capacitor:*  $\mathbf{S} = -j\frac{1}{\omega C}|\mathbf{I}|^2 = -j\omega C|\mathbf{V}|^2.$

**Demonstração.** As demonstrações dos itens i, ii e iii seguem diretamente do Teorema 3.1.1 e da Definição 3.1.1. ■

Conforme escrito anteriormente, o uso de fasores simplifica os cálculos envolvendo sinais de tensão e de corrente, tendo em conta que agora os modelos de circuitos elétricos lineares são sistemas lineares com coeficientes complexos, ao invés de equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes. A mesma simplificação ocorre no cálculo dos diversos sinais de potência quando é considerada a expressão (3.9). Além

disso, é importante lembrar que os teoremas da teoria de circuitos elétricos lineares de corrente contínua, como Thévenin, Norton, Superposição e outros, ainda são válidos para os circuitos elétricos lineares de corrente alternada quando a abordagem fasorial clássica é empregada e a frequência não é alta.

A próxima seção mostra que a abordagem fasorial clássica pode ser vista de outra forma mais propícia a generalizações.

## 3.2 Abordagem Fasorial Clássica como um Operador Linear

Embora a Teoria Fasorial Clássica esteja bem estabelecida, aqui apresenta-se uma abordagem alternativa para os mesmos resultados da seção anterior, pois de um ponto de vista moderno, o fasor clássico pode ser estudado no contexto da Teoria de Operadores Lineares.

Denote por  $X_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  o conjunto de todas as funções senoidais da forma (3.1), quando os números reais  $X \geq 0$  e  $\phi$  variam, mas com  $\omega \in \mathbb{R}$ ,  $\omega > 0$ , fixado. Com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar real,  $X_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  é um espaço vetorial real. Deste modo, define-se o produto interno

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : X_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times X_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \langle x, y \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t) dt, \end{aligned} \quad (3.10)$$

sendo  $T = 2\pi/\omega$ . Este produto interno, por sua vez, induz a norma

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : X_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{1}{T} \int_0^T x(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.11)$$

chamada de valor eficaz na Teoria Fasorial Clássica. Um cálculo simples usando (3.1) e (3.11) mostra que para qualquer  $x \in X_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  obtém-se  $\|x\| = X/\sqrt{2}$  tal como em (3.2).

Agora, para cada  $x \in X_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , pode-se associar um número complexo  $\mathbf{X}$ , denominado fasor clássico ou estático, através do operador

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : X_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \mathbf{X} = \mathcal{P}(x) = \|x\|e^{j\phi}, \end{aligned}$$

com  $\mathbb{C}$  visto como espaço vetorial real. Nesta nova formulação, os próximos lemas são análogos aos Lemas 3.1.1, 3.1.2 e 3.1.3.

**Lema 3.2.1.** *O operador  $\mathcal{P}$  é bijetor.*

**Demonstração.** Tome  $x_1, x_2 \in X_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , isto é,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= X_1 \cos(\omega t + \phi_1), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ x_2(t) &= X_2 \cos(\omega t + \phi_2), \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

e suponha  $\mathcal{P}(x_1) = \mathcal{P}(x_2)$ . Assim,

$$\mathcal{P}(x_1) = \|x_1\|e^{j\phi_1} = \|x_2\|e^{j\phi_2} = \mathcal{P}(x_2),$$

implica que  $X_1 = X_2$  e  $\phi_1 = \phi_2 + k2\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ . Logo,

$$x_1(t) = X_1 \cos(\omega t + \phi_1) = X_2 \cos(\omega t + \phi_2 + k2\pi) = x_2(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Portanto,  $\mathcal{P}$  é injetor.

Agora, dado  $\mathbf{X} \in \mathbb{C}$ , então  $\mathbf{X} = Xe^{j\phi}$ . Assim, a função  $x \in X_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  dada por

$$x(t) = \sqrt{2}X \cos(\omega t + \phi), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

é tal que  $\mathcal{P}(x) = \mathbf{X}$ , mostrando que  $\mathcal{P}$  é sobrejetor. ■

Como  $\mathcal{P}$  é um operador bijetor, fica bem definido o operador inverso  $\mathcal{P}^{-1}$ , da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{-1} : \mathbb{C} &\longrightarrow X_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ \mathbf{X} &\longmapsto \mathcal{P}^{-1}(\mathbf{X}) = x, \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned} x : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto x(t) = \sqrt{2}\operatorname{Re}(\mathbf{X}e^{j\omega t}). \end{aligned}$$

**Lema 3.2.2.** *O operador  $\mathcal{P}$  é linear.*

**Demonstração.** Tome  $x_1, x_2 \in X_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  e sejam  $\mathbf{X}_1 = \mathcal{P}(x_1)$  e  $\mathbf{X}_2 = \mathcal{P}(x_2)$ . Para qualquer número real  $\alpha$ , obtém-se  $\mathcal{P}^{-1}(\mathbf{X}_1 + \alpha\mathbf{X}_2) = x$ , sendo

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{2}\operatorname{Re}((\mathbf{X}_1 + \alpha\mathbf{X}_2)e^{j\omega t}) \\ &= \sqrt{2}\operatorname{Re}(\mathbf{X}_1 e^{j\omega t}) + \alpha\sqrt{2}\operatorname{Re}(\mathbf{X}_2 e^{j\omega t}) \\ &= x_1(t) + \alpha x_2(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

ou seja,  $\mathcal{P}^{-1}(\mathbf{X}_1 + \alpha\mathbf{X}_2) = x_1 + \alpha x_2$ . Pelo Lema 3.2.1,

$$\mathcal{P}(x_1 + \alpha x_2) = \mathbf{X}_1 + \alpha\mathbf{X}_2 = \mathcal{P}(x_1) + \alpha\mathcal{P}(x_2).$$

■

Pelo lema anterior,

$$\mathcal{P}\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\right) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathcal{P}(x_k),$$

para quaisquer números reais  $\alpha_k$  e  $x_k \in X_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Portanto,  $\mathcal{P}$  é um isomorfismo linear entre os espaços vetoriais  $X_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  e  $\mathbb{C}$  e, conseqüentemente, leva a base  $\{\sqrt{2}\cos(t), -\sqrt{2}\sin(t)\}$  de  $X_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  na base  $\{1, j\}$  de  $\mathbb{C}$ . Além disso,  $\mathcal{P}$  tem uma propriedade derivativa útil para encontrar uma solução particular quando a função não homogênea na equação diferencial está na forma (3.1).

**Lema 3.2.3.** *O operador  $\mathcal{P}$  possui a propriedade*

$$\mathcal{P}(x') = j\omega\mathcal{P}(x),$$

sendo  $x'$  a derivada de  $x \in X_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  com respeito à variável  $t$ .

**Demonstração.** Note que, se  $x \in X_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , então  $x' \in X_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , pois

$$x'(t) = -\omega X \sin(\omega t + \phi) = \omega X \cos\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

e  $X\omega \geq 0$ . Assim, sendo  $\mathbf{X} = \|x\|e^{j\phi} = \mathcal{P}(x)$ , então

$$\mathcal{P}(x') = \frac{\omega X}{\sqrt{2}} e^{j(\phi + \frac{\pi}{2})} = \frac{\omega X}{\sqrt{2}} e^{j\phi} e^{j\frac{\pi}{2}} = j\omega \|x\| e^{j\phi} = j\omega \mathcal{P}(x).$$

■

Uma generalização deste resultado é apresentada a seguir.

**Corolário 3.2.1.** *Se  $x \in X_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , então*

$$\mathcal{P}(x^{(m)}) = (j\omega)^m \mathcal{P}(x), \quad (3.12)$$

sendo  $x^{(m)}$  a derivada de ordem  $m \in \{1, 2, \dots\}$  de  $x$  com respeito à variável  $t$ .

**Demonstração.** Calculando a derivada de ordem  $m \in \{1, 2, \dots\}$  de  $x \in X_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , com respeito ao parâmetro  $t$  e, usando indução em  $m$ , obtém-se

$$x^{(m)}(t) = \begin{cases} \omega^m X \cos\left(\omega t + \phi + (-1)^{\frac{m+3}{2}} \frac{\pi}{2}\right), & m \in \{1, 3, 5, \dots\}, \\ \omega^m X \cos\left(\omega t + \phi + \left(1 + (-1)^{\frac{m+2}{2}}\right) \frac{\pi}{2}\right), & m \in \{2, 4, 6, \dots\}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Então,  $x^{(m)} \in X_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  e

$$\mathcal{P}(x^{(m)}) = \begin{cases} e^{j(-1)^{\frac{m+3}{2}} \frac{\pi}{2}} \frac{\omega^m X}{\sqrt{2}} e^{j\phi} = (j\omega)^m \|x\| e^{j\phi}, & m \in \{1, 3, 5, \dots\}, \\ e^{j\left(1 + (-1)^{\frac{m+2}{2}}\right) \frac{\pi}{2}} \frac{\omega^m X}{\sqrt{2}} e^{j\phi} = (j\omega)^m \|x\| e^{j\phi}, & m \in \{2, 4, 6, \dots\}. \end{cases}$$

■

Agora, considere novamente a equação diferencial linear com coeficientes constantes tal como em (2.11). Se  $u \in X_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , sabe-se que esta equação tem uma solução particular, denotada por  $y$ , que também é um elemento de  $X_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Esta solução particular pode ser encontrada aplicando o operador  $\mathcal{P}$  em ambos os membros da equação e usando a propriedade de linearidade juntamente com o Lema 3.2.3. Ao fazer isto, segue que

$$\mathcal{P}(y) = \frac{b_0 + b_1(j\omega) + \dots + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + b_m(j\omega)^m}{a_0 + a_1(j\omega) + \dots + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + a_n(j\omega)^n} \mathcal{P}(u). \quad (3.13)$$

Embora não seja amplamente utilizada nos cálculos, a função  $y$  pode ser obtida através do operador inverso  $\mathcal{P}^{-1}$ .

A demonstração do Teorema 3.1.1 é muito mais simples neste contexto. De fato, empregando os Lemas 3.2.2 e 3.2.3, se  $\mathbf{V} = \mathcal{P}(v)$  e  $\mathbf{I} = \mathcal{P}(i)$ , então a equação  $v = Ri$  assume a forma

$$\mathbf{V} = \mathcal{P}(v) = \mathcal{P}(Ri) = R\mathcal{P}(i) = R\mathbf{I}.$$

Da mesma forma, a equação  $i = Cv'$  assume a forma

$$\mathbf{I} = \mathcal{P}(i) = \mathcal{P}(Cv') = C\mathcal{P}(v') = Cj\omega\mathcal{P}(v) = j\omega C\mathbf{V},$$

ou seja,

$$\mathbf{V} = \frac{1}{j\omega C}\mathbf{I}.$$

Usualmente, o fasor estático está associado à seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : X_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times X_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\longmapsto \mathcal{S}(x, y) = \mathcal{P}(x)\overline{\mathcal{P}(y)}, \end{aligned} \tag{3.14}$$

com a barra denotando o complexo conjugado. É fácil ver que (3.14) é uma aplicação  $\mathbb{R}$ -bilinear Hermitiana simétrica de acordo com a próxima definição.

**Definição 3.2.1.** *Sejam  $U$ ,  $V$  e  $W$  espaços vetoriais normados. A aplicação  $B : U \times V \longrightarrow W$  é:*

**a.** *Uma aplicação  $\mathbb{R}$ -bilinear, se  $U$  e  $V$  são espaços vetoriais reais e*

$$\begin{aligned} B_x : V &\longrightarrow W & B_y : U &\longrightarrow W \\ y &\longmapsto B_x(y) = B(x, y), & x &\longmapsto B_y(x) = B(x, y), \end{aligned}$$

*são operadores lineares para cada  $x \in U$  e  $y \in V$  fixados, respectivamente;*

**b.** *Uma aplicação Hermitiana simétrica, se  $W$  é um espaço vetorial complexo e  $B(x, y) = \overline{B(y, x)}$ , para todo  $(x, y) \in U \times V$ .*

A relação entre (3.10) e (3.14) segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz uma vez que  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| = |\mathcal{S}(x, y)|$ .

Como apresentado nas Seções 2.2 e 3.1, em aplicações, existem três conceitos importantes de potência envolvendo (3.14), a saber, os sinais de potência complexa, ativa e reativa, denotados por  $\mathbf{S}$ ,  $P$  e  $Q$ , respectivamente. Com base na Teoria de Circuitos Elétricos e nas expressões (3.10) e (3.14), segue que  $\mathbf{S} = \mathcal{S}(x, y) = \mathbf{X}\overline{\mathbf{Y}}$ ,  $P = \text{Re}(\mathbf{S}) = \langle x, y \rangle$  e  $Q = \text{Im}(\mathbf{S})$ .

### 3.3 Transformada de Fourier

Nesta seção, estudam-se os principais aspectos da transformada de Fourier no contexto da Teoria Fasorial Clássica, em conexão com o que foi apresentado na seção anterior.

É conhecido na literatura que a transformada de Fourier pode ser usada para determinar uma solução particular de uma equação diferencial ordinária linear com coeficientes constantes [5], [30]. Neste sentido, a transformada de Fourier amplia a noção de fasor, aumentando a classe de funções que admitem a representação fasorial clássica.

Uma classe de funções apropriada para o estudo da transformada de Fourier é o espaço de Schwartz. Essa escolha é motivada por um princípio importante que relaciona o decréscimo da transformada de Fourier de uma função com as propriedades de continuidade e diferenciabilidade desta função e vice-versa.

As definições e os teoremas, bem como as demonstrações, apresentados nesta seção podem ser encontrados em [11] e [15].

**Definição 3.3.1.** *O espaço de Schwartz, denotado por  $S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , é o espaço vetorial complexo das funções infinitamente diferenciáveis  $x = x(\tau)$  satisfazendo*

$$\left| \tau^p \frac{d^q x}{d\tau^q}(\tau) \right| < K_{p,q}, \quad \forall \tau \in \mathbb{R},$$

sendo  $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  e  $K_{p,q} \in \mathbb{R}$ .

A expressão anterior pode ser reescrita, analogamente, como

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} \tau^p x^{(q)}(\tau) = 0,$$

sendo  $x^{(q)}$  a  $q$ -ésima derivada da função  $x$  com respeito à variável  $\tau$ . Assim, quando  $|\tau| \rightarrow \infty$ , a função  $x$  e suas derivadas vão mais rápido para 0 do que as potências  $\tau^p$  vão para o infinito.

Se  $x \in S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , pode-se definir uma outra função  $\mathbf{X}$  da seguinte forma

$$\mathbf{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad \omega \in \mathbb{R}. \quad (3.15)$$

**Lema 3.3.1.** *Se  $x \in S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , então  $\mathbf{X} \in S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .*

Pelo lema anterior, é possível definir o operador

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : S(\mathbb{R}, \mathbb{C}) &\longrightarrow S(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \\ x &\longmapsto \mathcal{F}(x) = \mathbf{X}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

chamado de transformada de Fourier.

Por definição, toda função de  $S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  é absolutamente integrável. Logo, a integral imprópria (3.15) converge e o operador (3.16) está bem definido.

A transformada de Fourier (3.16) é um operador linear e bijetor [11] e sua inversa é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} : S(\mathbb{R}, \mathbb{C}) &\longrightarrow S(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \\ \mathbf{X} &\longmapsto \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{X}) = x, \end{aligned} \quad (3.17)$$

sendo

$$\begin{aligned} x : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \tau &\longmapsto x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{X}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \end{aligned}$$

Uma propriedade da transformada de Fourier, semelhante a (3.12), é apresentada a seguir.

**Teorema 3.3.1.** *Se  $x \in S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , então*

$$\mathcal{F}(x^{(m)}) = (j\omega)^m \mathcal{F}(x),$$

*sendo  $x^{(m)}$  a derivada de ordem  $m \in \{1, 2, \dots\}$  de  $x$  com respeito à variável  $t$ .*

O resultado anterior mostra que o operador derivada agindo em  $S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  é levado, via transformada de Fourier, no operador multiplicação por  $j\omega$  no espaço  $\{\mathcal{F}(x) : x \in S(\mathbb{R}, \mathbb{C})\}$ . Isso permite transformar equações diferenciais ordinárias em equações algébricas. Note que, aplicando a transformada de Fourier em ambos os membros da equação diferencial dada em (2.11), também obtém-se a expressão (3.13), apenas trocando  $\mathcal{P}$  por  $\mathcal{F}$ .

### 3.3.1 Aplicação Básica do Operador Linear $\mathcal{F}$ na Teoria de Circuitos Elétricos

Usando a propriedade da derivada, apresentada no Teorema 3.3.1 desta seção, é possível reescrever as equações dos elementos lineares básicos de um circuito elétrico em termos da transformada de Fourier.

**Teorema 3.3.2** (Equações dos Elementos Lineares Básicos). *Sejam  $v, i \in S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  sinais de tensão e de corrente, respectivamente, nos elementos lineares básicos de um circuito elétrico. Suponha que as transformadas de Fourier de  $v$  e  $i$  sejam dadas por  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\omega)$  e  $\mathbf{I} = \mathbf{I}(\omega)$ , respectivamente. Então, as equações dos elementos lineares básicos podem ser reescritas, em termos das transformadas de Fourier, como:*

i. *Resistor:*  $\mathbf{V} = R\mathbf{I}$ ;

ii. *Indutor:*  $\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$ ;

iii. *Capacitor:*  $\mathbf{V} = \frac{1}{j\omega C}\mathbf{I}$ .

Observe que este resultado é análogo ao Teorema 3.1.1, com a vantagem de que os sinais de tensão e de corrente não são senoidais. Além disso, recordando a aplicação bilinear (3.14), segue que o sinal de potência complexa pode ser calculado neste contexto como  $\mathbf{S} = \mathcal{F}(v)\overline{\mathcal{F}(i)} = \mathbf{V}(\omega)\overline{\mathbf{I}(\omega)}$ .

O próximo resultado trata dos sinais de potência ativa, reativa e complexa.

**Teorema 3.3.3** (Sinais de Potência dos Elementos Lineares Básicos). *Sejam  $v, i \in S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  sinais de tensão e de corrente, respectivamente, nos elementos lineares básicos de um circuito elétrico. Suponha que as transformadas de Fourier de  $v$  e  $i$  sejam  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\omega)$  e  $\mathbf{I} = \mathbf{I}(\omega)$ , respectivamente. Então, os sinais de potência complexa dos elementos lineares básicos são dados por:*

i. *Resistor:*  $\mathbf{S} = R|\mathbf{I}|^2 = \frac{|\mathbf{V}|^2}{R};$

ii. *Indutor:*  $\mathbf{S} = j\omega L|\mathbf{I}|^2 = j\frac{1}{\omega L}|\mathbf{V}|^2;$

iii. *Capacitor:*  $\mathbf{S} = -j\frac{1}{\omega C}|\mathbf{I}|^2 = -j\omega C|\mathbf{V}|^2.$

**Demonstração.** As demonstrações dos itens i, ii e iii seguem diretamente do Teorema 3.3.2 e de (3.14), trocando  $\mathcal{P}$  por  $\mathcal{F}$ . ■

## 3.4 Transformada de Laplace

Analogamente à seção anterior, apresenta-se a transformada de Laplace no contexto da Teoria Fasorial Clássica, isto é, como um operador linear entre espaços vetoriais apropriados. Sabe-se da literatura que tal transformada fornece a solução geral de uma equação diferencial ordinária linear [23]. Assim, ela representa uma generalização da noção de fasor, uma vez que pode ser aplicada não só às funções senoidais, mas a uma grande classe de funções. Para a construção da transformada de Laplace como um operador, tal como feito em [17], são necessárias algumas definições enunciadas a seguir.

**Definição 3.4.1.** Uma função  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada *causal*, se  $x(\tau) = 0$  para  $\tau < 0$ .

A noção de funções contínuas por partes apresentada na Definição 2.3.2 pode ser estendida para intervalos não limitados como  $[0, \infty)$ .

**Definição 3.4.2.** Uma função  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é *contínua por partes em  $[0, \infty)$* , se for contínua por partes em cada intervalo da forma  $[0, b]$ , com  $b > 0$ .

**Definição 3.4.3.** Uma função  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é de *ordem exponencial em  $[0, \infty)$* , se existem números reais  $A > 0$  e  $a$  tais que, para algum  $\tau_0 \geq 0$ ,

$$|x(\tau)| \leq Ae^{a\tau}, \quad \tau \geq \tau_0.$$

As funções de ordem exponencial são frequentemente encontradas no estudo de equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes. Alguns exemplos são

$$1, \quad \tau^n, \quad e^{a\tau}, \quad \text{sen}(b\tau), \quad \text{cos}(b\tau), \quad \tau^n e^{a\tau} \text{sen}(b\tau), \quad \tau^n e^{a\tau} \text{cos}(b\tau), \quad \tau \geq 0,$$

com  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $n = 0, 1, 2, \dots$

Denote por  $E(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  o conjunto de todas as funções causais, contínuas por partes e de ordem exponencial em  $[0, \infty)$ . Com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar real,  $E(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  é um espaço vetorial real.

Dado  $x \in E(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , define-se uma função  $\mathbf{X}$  como

$$\mathbf{X}(s) = \int_0^{\infty} x(\tau) e^{-s\tau} d\tau, \quad (3.18)$$

cujos domínio é o conjunto de todos os  $s \in \mathbb{C}$  com  $\text{Re}(s) > a$ , pois  $x$  é uma função contínua por partes e de ordem exponencial em  $[0, \infty)$ , o que garante a convergência da integral em (3.18). Na realidade, é possível mostrar que, para cada  $x \in E(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , existe  $\sigma_c$  tal que a integral imprópria converge quando  $\text{Re}(s) > \sigma_c$ , com  $\sigma_c \in \mathbb{R}$  ou  $\sigma_c = -\infty$ . No entanto, quando  $\text{Re}(s) = \sigma_c$  e  $\sigma_c \in \mathbb{R}$ , nada se pode concluir.

Agora, seja  $U(\Omega, \mathbb{C})$  o conjunto de todas as funções definidas em conjuntos da forma  $\Omega = \{s \in \mathbb{R} : \text{Re}(s) > c\}$  para algum  $c$ . Dadas quaisquer funções  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in U(\Omega, \mathbb{C})$ ,

define-se a adição  $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$  como uma função cujo domínio é a interseção dos domínios de  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  e cujo valor em qualquer ponto  $s$  nesta interseção é dado por  $\mathbf{X}(s) + \mathbf{Y}(s)$ . Assim, com a multiplicação usual por escalar complexo,  $U(\Omega, \mathbb{C})$  é um espaço vetorial complexo.

O objetivo é definir um operador linear injetor envolvendo (3.18). Para isso, serão consideradas duas relações de equivalência, uma em  $E(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  e a outra em  $U(\Omega, \mathbb{C})$ .

Se  $x, y \in E(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , então  $x \sim y$  se, e somente se,  $x$  e  $y$  diferem apenas em pontos de descontinuidade do tipo salto. Em  $U(\Omega, \mathbb{C})$ , considere a relação de equivalência:

$$\mathbf{X} \sim \mathbf{Y} \Leftrightarrow \mathbf{X}(s) = \mathbf{Y}(s),$$

para todo  $s$  em algum conjunto  $\Omega$ .

Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : E(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \sim &\longrightarrow U(\Omega, \mathbb{C}) / \sim \\ x &\longmapsto \mathcal{L}(x) = \mathbf{X}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

com  $\mathbf{X}$  dado em (3.18), é um operador linear chamado de transformada de Laplace.

A relação de equivalência em  $U(\Omega, \mathbb{C})$  é necessária para garantir a linearidade do operador, uma vez que se  $x, y \in E(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , então  $\mathcal{L}(x + y)$  não é, necessariamente, igual a  $\mathcal{L}(x) + \mathcal{L}(y)$ . De fato, tomando  $x(\tau) = \cos(a\tau)$  e  $y(\tau) = -\cos(a\tau)$ , para  $\tau \geq 0$ , tem-se que  $\mathcal{L}(x) + \mathcal{L}(y)$  é a função na qual o domínio é tal que  $\sigma_c = 0$  e, por outro lado,  $\mathcal{L}(x + y)$  é a função na qual o domínio é tal que  $\sigma_c = -\infty$ .

Observe ainda que, se  $x, y \in E(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  diferem apenas em pontos de descontinuidade do tipo salto, então  $\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(y)$  mesmo que  $x \neq y$ . Neste caso, a injetividade de (3.19) é garantida pelo teorema a seguir, que é um dos resultados mais importantes da teoria da transformada de Laplace.

**Teorema 3.4.1** (Teorema de Lerch). *Sejam  $x, y \in E(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  e suponha que exista  $\sigma_c$  tal que  $\mathbf{X}(s) = \mathbf{Y}(s)$ , para todo  $s \in \mathbb{C}$  com  $\text{Re}(s) > \sigma_c$ , sendo  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  obtidas a partir de (3.18). Então, excetuando os pontos de descontinuidade do tipo salto,  $x(\tau) = y(\tau)$ , para todo  $\tau > 0$ .*

Segue diretamente do teorema anterior que, dado  $\mathbf{X} \in U(\Omega, \mathbb{C})/\sim$ , a equação

$$\mathcal{L}(x) = \mathbf{X}(s)$$

possui no máximo uma solução em  $E(\mathbb{R}, \mathbb{R})/\sim$ . Tal solução é denominada transformada inversa de Laplace da função  $\mathbf{X}$  e é denotada por  $\mathcal{L}^{-1}(\mathbf{X})$ . Assim,  $\mathcal{L}^{-1}(\mathbf{X}) = x$  se, e somente se,  $\mathcal{L}(x) = \mathbf{X}$ .

O resultado a seguir é necessário para a análise da sobrejetividade do operador (3.19).

**Teorema 3.4.2.** *Se  $x \in E(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , então*

$$\lim_{\operatorname{Re}(s) \rightarrow \infty} \mathbf{X}(s) = 0,$$

sendo  $\mathbf{X} = \mathcal{L}(x)$ .

Em outras palavras,  $\mathbf{X}(s) \rightarrow 0$  quando  $\operatorname{Re}(s) \rightarrow \infty$ . Assim, qualquer função  $\mathbf{X} \in U(\Omega, \mathbb{C})/\sim$  que não possui este comportamento, por exemplo,  $(s-1)/(s+1)$ ,  $e^s/s$  ou  $s^2$ , não pode ser a transformada de Laplace de alguma função  $x \in E(\mathbb{R}, \mathbb{R})/\sim$ , o que mostra que o operador (3.19) não é sobrejetor.

Novamente, uma propriedade similar a (3.12) para a transformada de Laplace é apresentada.

**Teorema 3.4.3** (Derivada). *Sejam  $x, x', \dots, x^{(m-1)}$  funções contínuas em  $(0, \infty)$  e de ordem exponencial em  $[0, \infty)$  e  $x^{(m)}$  contínua por partes em  $[0, \infty)$ . Então,*

$$\mathcal{L}(x^{(m)}) = s^m \mathcal{L}(x) - s^{m-1}x(0) - s^{m-2}x'(0) - \dots - x^{(m-1)}(0),$$

sendo  $x^{(m)}$  a derivada de ordem  $m \in \{1, 2, \dots\}$  de  $x$  com respeito à variável  $\tau$ .

Novamente aqui, aplicando a transformada de Laplace à equação (2.11) e considerando todas as condições iniciais nulas, obtém-se uma expressão análoga à (3.13), trocando o operador  $\mathcal{P}$  pelo operador  $\mathcal{L}$ .

### 3.4.1 Aplicação Básica do Operador Linear $\mathcal{L}$ na Teoria de Circuitos Elétricos

Usando a propriedade da derivada, apresentada no Teorema 3.4.3, é possível reescrever as equações dos elementos lineares básicos de um circuito elétrico em termos da transformada de Laplace.

**Teorema 3.4.4** (Equações dos Elementos Lineares Básicos). *Sejam  $v, i \in E(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  sinais de tensão e de corrente, respectivamente, nos elementos lineares básicos de um circuito elétrico. Suponha que as transformadas de Laplace de  $v$  e  $i$  sejam  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(s)$  e  $\mathbf{I} = \mathbf{I}(s)$ , respectivamente. Então, as equações dos elementos lineares básicos podem ser reescritas, em termos das transformadas de Laplace, como:*

- i. *Resistor:  $\mathbf{V} = R\mathbf{I}$ ;*
- ii. *Indutor:  $\mathbf{V} = Ls\mathbf{I} - Li(0)$ ;*
- iii. *Capacitor:  $\mathbf{I} = Cs\mathbf{V} - Cv(0)$ .*

Observe que, se as condições iniciais  $v(0)$  e  $i(0)$  forem nulas, este resultado é análogo ao Teorema 3.1.1, no entanto não é necessário que os sinais de tensão e de corrente sejam senoidais. Portanto, a transformada de Laplace também pode ser vista como uma generalização dos fasores estáticos para sinais não senoidais. Além disso, a aplicação bilinear (3.14) pode ser redefinida em termos da transformada de Laplace como  $\mathbf{S} = \mathcal{L}(v)\overline{\mathcal{L}(i)} = \mathbf{V}(s)\overline{\mathbf{I}(s)}$ .

**Teorema 3.4.5** (Sinais de Potência dos Elementos Lineares Básicos). *Sejam  $v, i \in E(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  sinais de tensão e de corrente, respectivamente, nos elementos lineares básicos de um circuito elétrico. Suponha que as transformadas de Laplace de  $v$  e  $i$  sejam  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(s)$  e  $\mathbf{I} = \mathbf{I}(s)$ , respectivamente. Então, os sinais de potência complexa dos elementos lineares básicos são dados por:*

- i. *Resistor:  $\mathbf{S} = R\mathbf{I}(s)\overline{\mathbf{I}(s)}$ ;*

ii. *Indutor*:  $\mathbf{S} = Ls\mathbf{I}(s)\overline{\mathbf{I}(s)} - Li(0)\overline{\mathbf{I}(s)}$ ;

iii. *Capacitor*:  $\mathbf{S} = \frac{1}{C_s} \left( \mathbf{I}(s)\overline{\mathbf{I}(s)} + Cv(0)\overline{\mathbf{I}(s)} \right)$ .

**Demonstração.** As demonstrações dos itens **i**, **ii** e **iii** seguem diretamente do Teorema 3.4.4 e de (3.14), trocando  $\mathcal{P}$  por  $\mathcal{L}$ . ■

# Capítulo 4

## Fasores Dinâmicos Conhecidos na Literatura

O conceito de fasor dinâmico surgiu da necessidade de modelar fenômenos dinâmicos rápidos em sistemas elétricos de potência, isto é, os fasores dinâmicos são utilizados na modelagem de transitórios.

Matematicamente, sejam  $V$  um espaço vetorial real de funções diferenciáveis e  $U$  um espaço vetorial complexo de funções. Uma função  $\mathbf{X} \in U$  é chamada de fasor dinâmico ou fasor variável no tempo se  $\mathbf{X} = T_u(x)$ , sendo

$$\begin{aligned} T_u : V &\longrightarrow U \\ x &\longmapsto T_u(x), \end{aligned}$$

um operador linear injetor satisfazendo

$$T_u(x') = D_t T_u(x) + \Omega(t, u) T_u(x) + \Lambda(t),$$

com  $D_t$  a derivada com relação à variável  $t$ ,  $\Omega$  e  $\Lambda$  funções satisfazendo certas propriedades e  $u$  um parâmetro real ou complexo.

Novamente, esta definição não será citada no texto, mas o leitor pode observar que os fasores dinâmicos apresentados neste capítulo e no Capítulo 5 satisfazem tal definição.

Este capítulo é dedicado à apresentação de duas teorias importantes sobre os fasores dinâmicos. A primeira é baseada no artigo *Generalized averaging method for power conversion circuits* [22] e a segunda, proposta por Venkatasubramanian, é baseada no artigo *Tools for dynamic analysis of the general large power system using time-varying phasors* [29]. As notações de ambos artigos são preservadas.

## 4.1 Coeficientes de Fourier Variáveis no Tempo

A teoria sobre fasores dinâmicos, detalhada nesta seção, é baseada no artigo intitulado *Generalized averaging method for power conversion circuits* [22]. Tal teoria foi construída sem hipóteses e é apresentada aqui, de maneira resumida, sem o rigor matemático, assim como feito em [22].

Considere uma função  $x = x(t)$  definida para todo  $t \in \mathbb{R}$  e defina uma janela (intervalo) de tempo  $\tau \in [t - T, t]$ , sendo  $T$  um número real positivo fixado (veja a Figura 4.1 (a)). Para cada  $t$  escolhido, fazendo a extensão periódica da função  $x$ , em  $[t - T, t]$ , obtém-se uma nova função que está definida para todo  $\tau \in \mathbb{R}$  e que é periódica de período  $T$ , conforme a Figura 4.1 (b).

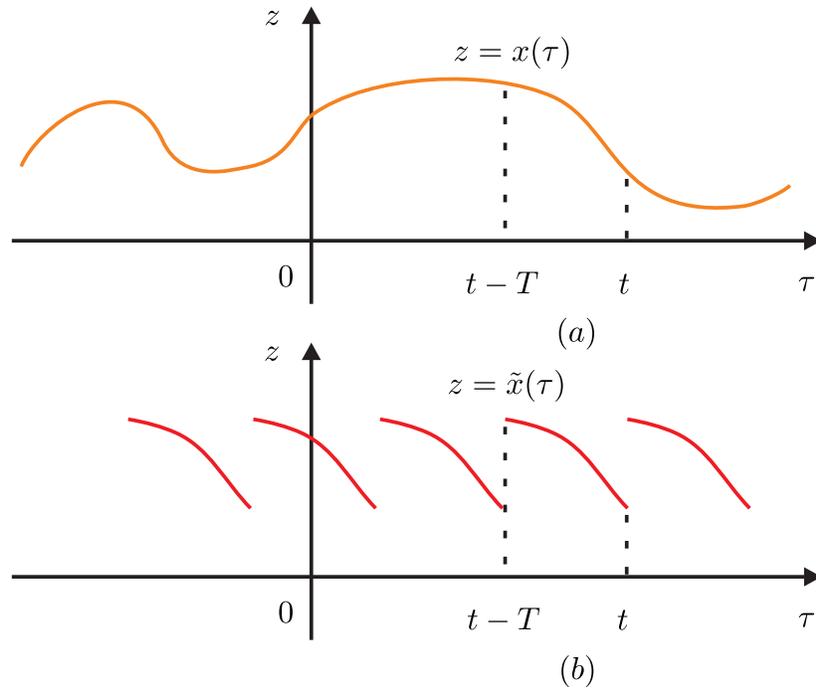


Figura 4.1: (a) Função original  $z = x(\tau)$  e determinação da janela de tempo  $\tau \in [t - T, t]$ . (b) Extensão periódica  $z = \tilde{x}(\tau)$ .

Se as condições de algum Teorema de Convergência de Séries de Fourier forem satisfeitas, então essa nova função possui uma representação em série de Fourier. Além disso, tal representação, excetuando possivelmente os pontos de descontinuidade, converge para  $x = x(\tau)$  para cada  $\tau \in (t - T, t)$ .

Quando o procedimento anterior é realizado, para cada  $t \in \mathbb{R}$ , a função original  $x$  é representada como

$$x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k(t) e^{jk\omega_s\tau}, \quad \tau \in (t - T, t), \quad (4.1)$$

sendo  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega_s = 2\pi/T$  e  $X_k = X_k(t)$  o  $k$ -ésimo coeficiente de Fourier, na forma complexa, calculado como

$$X_k(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(\tau) e^{-jk\omega_s\tau} d\tau.$$

O coeficiente  $X_k$  é chamado de fasor dinâmico e emprega-se a notação  $X_k(t) = \langle x \rangle_k(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Ao contrário dos coeficientes de Fourier tradicionais, este coeficiente varia conforme o intervalo de integração (janela).

Observe que, fazendo a mudança de variável  $\tau = t - T + s$  em (4.1), obtém-se

$$x(t - T + s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k(t) e^{jk\omega_s(t-T+s)}, \quad s \in (0, T), \quad t \in \mathbb{R},$$

sendo a nova expressão para o coeficiente de Fourier variável no tempo dada por

$$X_k(t) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t - T + s) e^{-jk\omega_s(t-T+s)} ds,$$

tal como apresentada em [22].

A seguir, há um resultado associado com a derivada do fasor dinâmico, cuja demonstração é apenas formal.

**Teorema 4.1.1** (Derivada). *A derivada no tempo do  $k$ -ésimo coeficiente de Fourier é dada por*

$$\frac{d}{dt} \langle x \rangle_k = \left\langle \frac{dx}{dt} \right\rangle_k - jk\omega_s \langle x \rangle_k.$$

**Demonstração.** Observe que, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle x \rangle_k &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(\tau) e^{-jk\omega_s \tau} d\tau \right] \\ &= \frac{1}{T} x(\tau) e^{-jk\omega_s \tau} \Big|_{t-T}^t. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dx}{dt} \right\rangle_k &= \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x'(\tau) e^{-jk\omega_s \tau} d\tau \\ &= \frac{1}{T} x(\tau) e^{-jk\omega_s \tau} \Big|_{t-T}^t - \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(\tau) (-jk\omega_s e^{-jk\omega_s \tau}) d\tau \\ &= \frac{1}{T} x(\tau) e^{-jk\omega_s \tau} \Big|_{t-T}^t + jk\omega_s \left[ \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(\tau) e^{-jk\omega_s \tau} d\tau \right] \\ &= \frac{d}{dt} \langle x \rangle_k + jk\omega_s \langle x \rangle_k. \end{aligned}$$

■

Este teorema é análogo ao Teorema 4.2.1 da próxima seção. Por esse motivo, as aplicações deste resultado em circuitos elétricos serão enunciadas somente na seção seguinte.

## 4.2 Fazor Dinâmico como um Operador Linear

Nesta seção, apresenta-se uma formulação de fasores dinâmicos proposta por Venkatasubramanian [29]. Neste caso, a base teórica dos fasores dinâmicos é desenvolvida a partir dos fasores estáticos.

Assim, considere a função  $x$  dada por

$$x(t) = X(t) \cos(\omega_c t + \delta(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.2)$$

sendo a amplitude  $X$  e o ângulo de fase  $\delta$  funções reais e a frequência  $\omega_c > 0$  constante. Além disso,  $X(t) \geq 0$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Com base na teoria da Seção 3.1, pode-se associar à função  $x$  uma função  $\mathbf{X}$  da forma

$$\mathbf{X}(t) = X(t)e^{j\delta(t)} = X(t)\angle\delta(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

chamada fazor dinâmico. Então, a relação entre a função  $x$  e o fazor  $\mathbf{X}$  é dada por

$$x(t) = \operatorname{Re}(\mathbf{X}(t)e^{j\omega_c t}) = \operatorname{Re}(X(t)e^{j(\omega_c t + \delta(t))}), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.3)$$

Aqui destaca-se uma dificuldade desta formulação, a saber, a unicidade dos fasores dinâmicos. De fato, dado qualquer fazor  $\mathbf{X}$ , é possível encontrar uma única função  $x$  através da relação (4.3). No entanto, dada uma função  $x$ , pode-se determinar vários fasores que resultam nesta mesma função. Para ilustrar essa dificuldade, considere a função  $x_0$  dada por

$$x_0(t) = X_0 \cos(\omega_c t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

com  $X_0 \geq 0$  e  $\omega_c > 0$ .

É fácil ver que o fazor  $\mathbf{X}_0$ , dado por

$$\mathbf{X}_0(t) = X_0\angle 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

está associado à função  $x_0$ . Por outro lado, o fazor  $\mathbf{X}_1$ , dado por

$$\mathbf{X}_1(t) = X_0 \cos(\omega_c t)e^{-j\omega_c t}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

também está associado à função  $x_0$  pela relação (4.3), pois

$$\operatorname{Re}(\mathbf{X}_1(t)e^{j\omega_c t}) = \operatorname{Re}(X_0 \cos(\omega_c t)e^{-j\omega_c t}e^{j\omega_c t}) = X_0 \cos(\omega_c t) = x_0(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

A solução para este problema é detalhada em [29]. Considere o conjunto de todas as funções reais  $x \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , tais como em (4.2), e que são do tipo **passa-banda**, isto é, sua transformada de Fourier  $X = X(\omega)$  existe e satisfaz

$$X(\omega) = 0, \quad \omega = 0 \quad \text{ou} \quad \omega \geq \omega_c.$$

Munido das operações usuais de adição e multiplicação por escalar real, esse conjunto é um espaço vetorial real denotado por  $B(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . De modo análogo, o conjunto de todas as funções complexas  $\mathbf{X} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  que são do tipo **passa-baixa**, ou seja, sua transformada de Fourier  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\omega)$  existe e satisfaz

$$\mathbf{X}(\omega) = 0, \quad \omega \geq \omega_c \quad \text{ou} \quad \omega \leq -\omega_c,$$

com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar complexo é também um espaço vetorial, agora complexo, denotado por  $V(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

Com os espaços vetoriais anteriores, o fasor dinâmico é dado pelo operador

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : B(\mathbb{R}, \mathbb{R}) &\longrightarrow V(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \\ x &\longmapsto \mathcal{P}(x) = \mathbf{X}, \end{aligned}$$

com  $\mathbf{X}(t) = X(t)e^{j\delta(t)}$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ . É possível mostrar que esse operador é linear e bijetor. Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{-1} : V(\mathbb{R}, \mathbb{C}) &\longrightarrow B(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ \mathbf{X} &\longmapsto \mathcal{P}^{-1}(\mathbf{X}) = x, \end{aligned}$$

com  $x$  obtido a partir de (4.3).

Observe que, como  $\mathcal{P}$  é bijetor, o problema da unicidade está resolvido. Além disso, a linearidade de  $\mathcal{P}$  implica que as equações resultantes das **Leis de Kirchhoff** e as equações dos elementos lineares básicos de um circuito elétrico podem ser reescritas em termos dos fasores dinâmicos.

Como mostrado na Seção 3.1, no caso dos fasores estáticos, a derivada no tempo resulta na multiplicação do fasor pelo número complexo  $j\omega$ . No caso dos fasores dinâmicos, há uma modificação na derivada, conforme o Teorema 4.1.1 e o teorema a seguir.

**Teorema 4.2.1** (Derivada). *Se  $x \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , então*

$$\mathcal{P}(x') = \frac{d}{dt}\mathcal{P}(x) + j\omega_c\mathcal{P}(x),$$

sendo  $x'$  a derivada da função  $x = x(t)$  com respeito à variável  $t$ .

**Demonstração.** Considere  $x \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  e  $\mathbf{X} = \mathcal{P}(x) \in V(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . Então, pela relação (4.3),

$$x(t) = \text{Re}(\mathbf{X}e^{j\omega_c t}), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.4)$$

Derivando ambos os lados da expressão (4.4), obtém-se

$$x'(t) = \text{Re}\left(\left(\frac{d}{dt}\mathbf{X} + j\omega_c\mathbf{X}\right)e^{j\omega_c t}\right), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.5)$$

Por outro lado, como  $x' \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , existe um único  $\mathcal{P}(x') \in V(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  tal que

$$x'(t) = \text{Re}(\mathcal{P}(x')(t)e^{j\omega_c t}), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.6)$$

Como  $\mathcal{P}$  é bijetora, comparando (4.5) e (4.6), resulta que

$$\mathcal{P}(x') = \frac{d}{dt}\mathcal{P}(x) + j\omega_c\mathcal{P}(x). \quad (4.7)$$

■

Com base na expressão (4.7), segue o seguinte resultado.

**Teorema 4.2.2** (Equações dos Elementos Lineares Básicos). *Sejam  $v$  e  $i$  os sinais de tensão e corrente, respectivamente, nos elementos lineares básicos de um circuito elétrico. Suponha que  $v, i \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  e sejam  $\mathbf{V}, \mathbf{I} \in V(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  os respectivos fasores dinâmicos. Então, as equações dos elementos lineares básicos podem ser reescritas, em termos dos fasores dinâmicos, como:*

- i. Resistor:  $\mathbf{V} = R\mathbf{I}$ ;
- ii. Indutor:  $\mathbf{V} = L\frac{d\mathbf{I}}{dt} + j\omega_c L\mathbf{I}$ ;
- iii. Capacitor:  $\mathbf{I} = C\frac{d\mathbf{V}}{dt} + j\omega_c C\mathbf{V}$ .

Além disso, com base nesta teoria, pode-se definir novamente os sinais de potência ativa, reativa e complexa [29].

**Definição 4.2.1.** *Sejam  $v, i \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  sinais de tensão e corrente, respectivamente, em um circuito elétrico linear. Sejam também  $\mathbf{V} = \mathcal{P}(v)$  e  $\mathbf{I} = \mathcal{P}(i)$  os respectivos fasores dinâmicos. Então, o sinal de potência complexa  $\mathbf{S}$  é dado por*

$$\mathbf{S} = \mathcal{P}(v)\overline{\mathcal{P}(i)} = \mathbf{V}\bar{\mathbf{I}}.$$

O sinal de potência ativa  $P$  é a parte real de  $\mathbf{S}$ , ou seja,

$$P = \text{Re}(\mathbf{S}).$$

De maneira similar, o sinal de potência reativa  $Q$  é a parte imaginária de  $\mathbf{S}$ , ou seja,

$$Q = \text{Im}(\mathbf{S}).$$

**Teorema 4.2.3** (Sinais de Potência dos Elementos Lineares Básicos). *Sejam  $v$  e  $i$  os sinais de tensão e corrente, respectivamente, nos elementos lineares básicos de um circuito elétrico. Suponha que  $v, i \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  e sejam  $\mathbf{V}, \mathbf{I} \in V(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  os respectivos fasores dinâmicos. Então, os sinais de potência complexa dos elementos lineares básicos são dados por:*

- i. Resistor:  $\mathbf{S} = R|\mathbf{I}|^2 = \frac{|\mathbf{V}|^2}{R}$ ;
- ii. Indutor:  $\mathbf{S} = L\bar{\mathbf{I}}\frac{d\mathbf{I}}{dt} + j\omega_c L|\mathbf{I}|^2$ ;
- iii. Capacitor:  $\mathbf{S} = C\mathbf{V}\frac{d\bar{\mathbf{V}}}{dt} - j\omega_c C|\mathbf{V}|^2$ .

**Demonstração.** As demonstrações dos itens **i**, **ii** e **iii** seguem diretamente do Teorema 4.2.2 e da Definição 4.2.1. ■

# Capítulo 5

## Fasores Dinâmicos Via Transformadas Integrais

No Capítulo 3, mostrou-se que as transformadas de Fourier e de Laplace, definidas através de operadores lineares entre espaços vetoriais adequados, ampliam a noção de fasor, pois aumentam a classe de funções que admitem a representação fasorial clássica. Neste sentido, é natural questionar se há outras transformadas integrais que desempenham uma função semelhante para os fasores dinâmicos. A resposta para esta questão motivou as principais contribuições deste trabalho, três novas teorias sobre fasores dinâmicos construídos a partir de transformadas integrais, a saber, a transformada de Fourier de curto termo, a transformada generalizada de Laplace e a transformada de Hilbert. Essas teorias são detalhadas a seguir.

### 5.1 Transformada Integral do Tipo Fourier

Fixe duas funções,  $g$  e  $h$ , satisfazendo as seguintes exigências:

**A1.**  $g \in S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ;

**A2.**  $h \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ . Além disto, para cada  $k = 0, 1, 2, \dots$ , existe um polinômio  $p_k$ , com coeficientes reais não negativos, tal que

$$\left| \frac{\partial^k h}{\partial y^k}(y, z) \right| \leq p_k(|z|), \quad \forall (y, z) \in \mathbb{R}^2,$$

com a derivada parcial de ordem 0 da função  $h$ , com respeito à variável  $y$ , sendo a identidade.

Considere a função  $F$  definida por

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)g(z-x)h(y, z) dz, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (5.1)$$

com  $f \in S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . O próximo teorema, cuja demonstração é longa, porém simples, mostra que a função  $F$  está bem definida e é diferenciável em  $\mathbb{R}^2$  quando  $g$  e  $h$  satisfazem as hipóteses **A1** e **A2**.

**Teorema 5.1.1.** *Se  $g$  e  $h$  satisfazem as hipóteses **A1** e **A2**, então, para cada  $f \in S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , a função  $F$ , dada em (5.1), tem as seguintes propriedades:*

- a. *É bem definida e contínua em  $\mathbb{R}^2$ ;*
- b. *Possui derivadas parciais de primeira ordem contínuas em  $\mathbb{R}^2$  e*

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(z)g'(z-x)h(y, z) dz, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(z)g(z-x)\frac{\partial h}{\partial y}(y, z) dz, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

**Demonstração.**

- a. Considere a família a um parâmetro de funções

$$\begin{aligned} f_x^{l,m,n} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto f_x^{l,m,n}(z) = z^l f(z)^m g(z-x)^n, \end{aligned}$$

com  $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $m, n \in \{0, 1\}$  e  $m + n \neq 0$ . Pela hipótese **A1**, para cada  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f_x^{l,m,n} \in S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . Assim, fixados os números  $l$ ,  $m$  e  $n$ , como anteriormente, para cada  $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , existe  $K_{p,q} = K_{p,q}(x) \in \mathbb{R}$  tal que

$$\left| z^p \frac{d^q f_x^{l,m,n}}{dz^q}(z) \right| < K_{p,q}(x), \quad \forall z \in \mathbb{R},$$

e, portanto, fica bem definida a função  $L_{p,q}$  dada por

$$L_{p,q}(x) = \sup_{z \in \mathbb{R}} \left| z^p \frac{d^q f_x^{l,m,n}}{dz^q}(z) \right|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Resulta que

$$|f_x^{l,m,n}(z)| \leq L_{0,0}(x), \quad |z^2 f_x^{l,m,n}(z)| \leq L_{2,0}(x), \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

e

$$|f_x^{l,m,n}(z)| \leq \frac{L(x)}{1+z^2}, \quad \forall z \in \mathbb{R},$$

sendo  $L$  a função definida por

$$L(x) = 2\max\{L_{0,0}(x), L_{2,0}(x)\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} z^l f(z)^m g(z-x)^n dz \right| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f_x^{l,m,n}(z)| dz \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L(x)}{1+z^2} dz = \pi L(x). \end{aligned}$$

Isto mostra que, para cada  $x \in \mathbb{R}$  e para  $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  e  $m, n \in \{0, 1\}$ , com  $m+n \neq 0$ , a integral

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} z^l f(z)^m g(z-x)^n dz \right|$$

é convergente.

Seja agora  $q_k$  um polinômio com coeficientes complexos, isto é,

$$q_k(z) = \sum_{l=0}^{n_k} a_{k,l} z^l, \quad z \in \mathbb{C},$$

com  $n_k = \text{grau}(q_k)$  e  $a_{k,l}$  números complexos para  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  e  $0 \leq l \leq n_k$ . Neste caso, para cada  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} q_k(z) f(z)^m g(z-x)^n dz \right| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |q_k(z) f(z)^m g(z-x)^n| dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{l=0}^{n_k} a_{k,l} f_x^{l,m,n}(z) \right| dz \\ &\leq \sum_{l=0}^{n_k} |a_{k,l}| \int_{-\infty}^{\infty} |f_x^{l,m,n}(z)| dz \\ &\leq \left( \pi \sum_{l=0}^{n_k} |a_{k,l}| \right) L(x). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Em particular, a partir de (5.2), sendo  $p_0$  o polinômio tal que  $|h(y, z)| \leq p_0(|z|)$ ,  $\forall (y, z) \in \mathbb{R}^2$ , então

$$\begin{aligned} |F(x, y)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(z)g(z-x)h(y, z) dz \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(z)g(z-x)||h(y, z)| dz \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} p_0(|z|)|f(z)g(z-x)| dz, \end{aligned}$$

para cada  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , mostrando que a função  $F$  é bem definida.

Como consequência dos resultados anteriores, para cada  $x \in \mathbb{R}$  e para cada  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  e  $m, n \in \{0, 1\}$ , com  $m + n \neq 0$ , existe um número real  $M_{k,m,n} = M_{k,m,n}(x) \geq 1$  tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_k(|z|)|f(z)|^m |g(z-x)|^n dz < M_{k,m,n}.$$

Para provar a continuidade da função  $F$ , considere a função  $J_F$  dada por

$$J_F(\eta, \xi) = |F(x + \eta, y + \xi) - F(x, y)|, \quad (\eta, \xi) \in \mathbb{R}^2,$$

com  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  fixado. Assim,

$$\begin{aligned} J_F(\eta, \xi) &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(z) (g(z-x-\eta)h(y+\xi, z) - g(z-x)h(y, z)) dz \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(z)| |g(z-x-\eta)h(y+\xi, z) - g(z-x)h(y, z)| dz \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(z)| |g(z-x-\eta) - g(z-x)| |h(y+\xi, z)| dz + \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(z)| |g(z-x)| |h(y+\xi, z) - h(y, z)| dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(u+x)| |g(u-\eta) - g(u)| |h(y+\xi, u+x)| du + \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(u+x)| |g(u)| |h(y+\xi, u+x) - h(y, u+x)| du, \end{aligned} \tag{5.3}$$

sendo a última passagem obtida através da mudança de variável  $u = z - x$ , com  $x$  fixado.

Tal mudança será utilizada com frequência daqui em diante.

Utilizando a hipótese **A2**, segue que

$$\begin{aligned}
|h(y + \xi, u + x) - h(y, u + x)| &= \left| \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial y}(y + s\xi, u + x) \xi \, ds \right| \\
&\leq \int_0^1 \left| \frac{\partial h}{\partial y}(y + s\xi, u + x) \right| |\xi| \, ds \\
&\leq \int_0^1 p_1(|u + x|) |\xi| \, ds \\
&= p_1(|u + x|) |\xi|
\end{aligned} \tag{5.4}$$

e, substituindo (5.4) em (5.3), obtém-se

$$\begin{aligned}
J_F(\eta, \xi) &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(u + x)| |g(u - \eta) - g(u)| |h(y + \xi, u + x)| \, du + \\
&\quad |\xi| \int_{-\infty}^{\infty} p_1(|u + x|) |f(u + x)| |g(u)| \, du \\
&< \int_{-\infty}^{\infty} p_0(|u + x|) |f(u + x)| |g(u - \eta) - g(u)| \, du + M_{1,1,1} |\xi|.
\end{aligned}$$

Como  $g \in S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ,  $g$  é Lipschitziana e, conseqüentemente, uniformemente contínua em  $\mathbb{R}$ . Assim, dado  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta_x \in \mathbb{R}$ ,  $\delta_x > 0$ , tal que se  $|\eta| < \delta_x$ , então

$$|g(u - \eta) - g(u)| < \frac{\varepsilon}{2M_{0,1,0}}, \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Para o mesmo  $\varepsilon$  anterior, tomando  $\delta_y = \varepsilon/(2M_{1,1,1})$ , se  $|\xi| < \delta_y$  e

$$\|(\eta, \xi)\| < \delta = \min\{\delta_x, \delta_y\},$$

então

$$\begin{aligned}
J_F(\eta, \xi) &< \int_{-\infty}^{\infty} p_0(|u + x|) |f(u + x)| |g(u - \eta) - g(u)| \, du + M_{1,1,1} |\xi| \\
&< \frac{\varepsilon}{2M_{0,1,0}} \int_{-\infty}^{\infty} p_0(|u + x|) |f(u + x)| \, du + M_{1,1,1} \delta_y < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Como  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  é arbitrário, isto mostra que  $F$  é contínua em  $\mathbb{R}^2$ .

**b.** Visto que  $g' \in S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , procedendo como na prova do item **a** do Teorema 5.1.1, mostra-se que a função  $G$ , dada por

$$G(x, y) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(z) g'(z - x) h(y, z) \, dz, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

está bem definida e, além disto, é contínua em  $\mathbb{R}^2$ . O objetivo é mostrar que  $G$  é exatamente a derivada parcial de primeira ordem da função  $F$  com relação à variável  $x$ . Para isto, fixe um ponto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  e defina a função  $dJ_G$  por

$$\begin{aligned} dJ_G(\eta) &= \left| \frac{F(x + \eta, y) - F(x, y)}{\eta} - G(x, y) \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \left( \frac{g(z - x - \eta) - g(z - x)}{\eta} + g'(z - x) \right) h(y, z) dz \right|, \quad \eta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Novamente, com a mudança de variável  $u = z - x$  é possível reescrever a expressão (5.5) como

$$dJ_G(\eta) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(u + x) \left( \frac{g(u - \eta) - g(u)}{\eta} + g'(u) \right) h(y, u + x) du \right|.$$

Observe agora que

$$\begin{aligned} \frac{g(u - \eta) - g(u)}{\eta} + g'(u) &= - \int_0^1 g'(u - s\eta) ds + g'(u) \\ &= \int_0^1 (g'(u) - g'(u - s\eta)) ds \end{aligned}$$

e, pelo Teorema do Valor Médio, para cada  $u \in \mathbb{R}$ , existe um número real  $s_u \in (0, 1)$  tal que

$$\left| \frac{g(u - \eta) - g(u)}{\eta} + g'(u) \right| \leq |g'(u - s_u\eta) - g'(u)|.$$

Como a função  $g'$  também é uniformemente contínua em  $\mathbb{R}$ , dado  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta \in \mathbb{R}$ ,  $\delta > 0$ , tal que se  $0 < |s_u\eta| < |\eta| < \delta$ , então

$$\left| \frac{g(u - \eta) - g(u)}{\eta} + g'(u) \right| < \frac{\varepsilon}{M_{0,1,0}}, \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} dJ_G(\eta) &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(u + x)| \left| \frac{g(u - \eta) - g(u)}{\eta} + g'(u) \right| |h(y, u + x)| du \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} p_0(|u + x|) |f(u + x)| \left| \frac{g(u - \eta) - g(u)}{\eta} + g'(u) \right| du \\ &< \frac{\varepsilon}{M_{0,1,0}} \int_{-\infty}^{\infty} p_0(|u + x|) |f(u + x)| du < \varepsilon, \end{aligned}$$

se  $0 < |\eta| < \delta$ . Em outras palavras, como  $(x, y)$  é arbitrário,

$$G(x, y) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{F(x + \eta, y) - F(x, y)}{\eta} = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y).$$

Seja agora  $H$  tal que

$$H(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)g(z-x)\frac{\partial h}{\partial y}(y, z) dz, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

A função  $H$  está bem definida, já que, para cada  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{aligned} |H(x, y)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(z)g(z-x)\frac{\partial h}{\partial y}(y, z) dz \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(z)| |g(z-x)| \left| \frac{\partial h}{\partial y}(y, z) \right| dz \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} p_1(|z|) |f(z)| |g(z-x)| dz < M_{1,1,1}, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Para verificar a continuidade da função  $H$ , defina  $J_H$  por

$$J_H(\eta, \xi) = |H(x + \eta, y + \xi) - H(x, y)|, \quad (\eta, \xi) \in \mathbb{R}^2,$$

com  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  fixado. Para todo  $(y, u) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial h}{\partial y}(y + \xi, u + x) - \frac{\partial h}{\partial y}(y, u + x) \right| &= \left| \int_0^1 \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(y + s\xi, u + x) \xi ds \right| \\ &\leq \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(y + s\xi, u + x) \right| |\xi| ds \\ &\leq \int_0^1 p_2(|u + x|) |\xi| ds = p_2(|u + x|) |\xi| \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} J_H(\eta, \xi) &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \left( g(z-x-\eta)\frac{\partial h}{\partial y}(y+\xi, z) - g(z-x)\frac{\partial h}{\partial y}(y, z) \right) dz \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(z)| \left| g(z-x-\eta)\frac{\partial h}{\partial y}(y+\xi, z) - g(z-x)\frac{\partial h}{\partial y}(y, z) \right| dz \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(z)| |g(z-x-\eta) - g(z-x)| \left| \frac{\partial h}{\partial y}(y+\xi, z) \right| dz + \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(z)| |g(z-x)| \left| \frac{\partial h}{\partial y}(y+\xi, z) - \frac{\partial h}{\partial y}(y, z) \right| dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(u+x)| |g(u-\eta) - g(u)| \left| \frac{\partial h}{\partial y}(y+\xi, u+x) \right| du + \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(u+x)| |g(u)| \left| \frac{\partial h}{\partial y}(y+\xi, u+x) - \frac{\partial h}{\partial y}(y, u+x) \right| du \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} p_1(|u+x|) |f(u+x)| |g(u-\eta) - g(u)| du + \\ &\quad |\xi| \int_{-\infty}^{\infty} p_2(|u+x|) |f(u+x)| |g(u)| du. \end{aligned}$$

Assim, dado  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ , existe um número real positivo  $\delta_x$  tal que

$$|g(u - \eta) - g(u)| < \frac{\varepsilon}{2M_{1,1,0}}, \quad \forall u \in \mathbb{R},$$

se  $|\eta| < \delta_x$ . Além disto, tomando  $\delta_y = \varepsilon/(2M_{2,1,1})$ , segue que

$$\begin{aligned} J_H(\eta, \xi) &\leq \int_{-\infty}^{\infty} p_1(|u+x|) |f(u+x)| |g(u-\eta) - g(u)| du + \\ &\quad |\xi| \int_{-\infty}^{\infty} p_2(|u+x|) |f(u+x)| |g(u)| du \\ &< \frac{\varepsilon}{2M_{1,1,0}} \int_{-\infty}^{\infty} p_1(|u+x|) |f(u+x)| du + \delta_y \int_{-\infty}^{\infty} p_2(|u+x|) |f(u+x)| |g(u)| du \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

se  $\|(\eta, \xi)\| < \delta = \min\{\delta_x, \delta_y\}$ .

Novamente, fixe um ponto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  e considere a função  $dJ_H$  definida por

$$\begin{aligned} dJ_H(\xi) &= \left| \frac{F(x, y + \xi) - F(x, y)}{\xi} - H(x, y) \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(z)g(z-x) \left( \frac{h(y + \xi, z) - h(y, z)}{\xi} - \frac{\partial h}{\partial y}(y, z) \right) dz \right|, \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(z)g(z-x)h_\xi(z) dz \right|, \quad \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned} h_\xi(z) &= \frac{h(y + \xi, z) - h(y, z)}{\xi} - \frac{\partial h}{\partial y}(y, z) \\ &= \int_0^1 \left( \frac{\partial h}{\partial y}(y + s\xi, z) - \frac{\partial h}{\partial y}(y, z) \right) ds, \quad z \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Para  $x$  fixado, resulta da convergência da integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_1(|z|) |f(z)| |g(z-x)| dz,$$

que dado  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ , existe um número real positivo  $a$  tal que

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-a, a]} p_1(|z|) |f(z)| |g(z-x)| dz < \frac{\varepsilon}{4}.$$

O integrando na integral em (5.6) é uma função uniformemente contínua para  $(s, z) \in [0, 1] \times [-a, a]$  e, portanto, para o mesmo  $\varepsilon$  anterior, tomando  $\delta = \varepsilon/(2M_{0,1,1})$ , se  $0 < |s\xi| \leq |\xi| < \delta$ , então

$$\left| \frac{\partial h}{\partial y}(y + s\xi, z) - \frac{\partial h}{\partial y}(y, z) \right| < \frac{\varepsilon}{2M_{0,1,1}}.$$

Consequentemente, se  $0 < |\xi| < \delta$ , então

$$\begin{aligned}
dJ_H(\xi) &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(z)| |g(z-x)| |h_\xi(z)| dz \\
&= \int_{[-a,a]} |f(z)| |g(z-x)| |h_\xi(z)| dz + \int_{\mathbb{R} \setminus [-a,a]} |f(z)| |g(z-x)| |h_\xi(z)| dz \\
&< \frac{\varepsilon}{2M_{0,1,1}} \int_{[-a,a]} |f(z)| |g(z-x)| dz + 2 \int_{\mathbb{R} \setminus [-a,a]} p_1(|z|) |f(z)| |g(z-x)| dz \\
&< \frac{\varepsilon}{2M_{0,1,1}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(z)| |g(z-x)| dz + 2 \int_{\mathbb{R} \setminus [-a,a]} p_1(|z|) |f(z)| |g(z-x)| dz \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Logo, para cada  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$H(x, y) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{F(x, y + \xi) - F(x, y)}{\xi} = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y).$$

■

O Teorema 5.1.2 generaliza os resultados apresentados no item **b** do teorema anterior. Novamente, as derivadas, ordinárias ou parciais, de ordem 0 são identidades.

**Teorema 5.1.2.** *Para qualquer função  $f \in S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , a função  $F$ , definida através de (5.1), possui derivadas parciais de quaisquer ordens contínuas em  $\mathbb{R}^2$  e*

$$\frac{\partial^{p+q} F}{\partial x^p \partial y^q}(x, y) = (-1)^p \int_{-\infty}^{\infty} f(z) g^{(p)}(z-x) \frac{\partial^q h}{\partial y^q}(y, z) dz, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (5.7)$$

para  $p, q \in \{0, 1, 2, \dots\}$ .

**Demonstração.** Inicialmente, considere o caso  $q = 0$  em (5.7). A prova é feita por indução em  $p \in \{1, 2, \dots\}$ . A partir do item **b** do Teorema 5.1.1, o resultado é verdadeiro para  $p = 1$ . Agora, supondo que o resultado é verdadeiro para  $p = k$ , basta observar que  $g^{(p)} \in S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  e, consequentemente, a prova para  $p = k + 1$  segue análoga àquela dada no Teorema 5.1.1. Logo,

$$\frac{\partial^p F}{\partial x^p}(x, y) = (-1)^p \int_{-\infty}^{\infty} f(z) g^{(p)}(z-x) h(y, z) dz, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (5.8)$$

De modo semelhante, fazendo  $p = 0$  em (5.7), segue que

$$\frac{\partial^q F}{\partial y^q}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)g(z-x)\frac{\partial^q h}{\partial y^q}(y, z) dz, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (5.9)$$

já que, para  $q = 0, 1, \dots$ , a função  $\partial^q h/\partial y^q$  também satisfaz a hipótese **A2**.

Finalmente, note que  $g^{(p)}$  e  $\partial^q h/\partial y^q$  satisfazem as hipóteses **A1** e **A2**, respectivamente. Assim, utilizando novamente indução e o Teorema 5.1.1, por um lado, pode-se derivar parcialmente (5.8), com relação à variável  $y$  até ordem  $q \in \{1, 2, \dots\}$  obtendo  $\partial^{p+q}F/\partial y^q \partial x^p$ . Por outro lado, derivando parcialmente (5.9), com relação à variável  $x$  até ordem  $p \in \{1, 2, \dots\}$ , obtém-se  $\partial^{p+q}F/\partial x^p \partial y^q$ . Como ambas as derivadas parciais mistas são funções contínuas em  $\mathbb{R}^2$ , a prova está concluída. ■

Agora, considere o conjunto das funções de classe  $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$  que são contínuas e possuem derivadas parciais de quaisquer ordens contínuas em  $\mathbb{R}^2$  e defina as seguintes operações:

**O1.** Se  $F, G \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ , então a função adição  $F + G$  é definida por

$$(F + G)(x, y) = F(x, y) + G(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2;$$

**O2.** Se  $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$  e  $\alpha \in \mathbb{C}$ , então a função multiplicação por escalar  $\alpha F$  é definida por

$$(\alpha F)(x, y) = \alpha F(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Com estas operações de adição e multiplicação por escalar complexo, segue que  $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$  é um espaço vetorial complexo. Assim, pode-se definir o operador

$$\begin{aligned} \mathcal{N} : S(\mathbb{R}, \mathbb{C}) &\longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) \\ f &\longmapsto \mathcal{N}(f) = F, \end{aligned} \quad (5.10)$$

com  $F$  tal como em (5.1). O operador  $\mathcal{N}$  é linear e possui a seguinte propriedade associada com a derivada da função  $f$ .

**Teorema 5.1.3.** *Para cada  $f \in S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ,  $\mathcal{N}(f') = W$ , com*

$$W(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) - \int_{-\infty}^{\infty} f(z)g(z-x)\frac{\partial h}{\partial z}(y, z) dz, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

**Demonstração.** Basta integrar por partes e utilizar o item **b** do Teorema 5.1.1. ■

Na próxima seção será feita uma escolha particular para a função  $h$  visando o estudo dos fasores dinâmicos.

### 5.1.1 Fasores Dinâmicos Via Transformada de Fourier de Curto Termo

Nesta seção, a transformada de Fourier de curto termo é extraída como um caso particular do operador linear (5.10) mediante uma escolha específica da função  $h$  na expressão (5.1). Como o nome sugere, há uma relação entre esta transformada e a transformada de Fourier apresentada na Seção 3.3. Assim, tendo em conta que a transformada de Fourier permite estender a Teoria dos Fasores Clássicos para outras classes de funções, não apenas as funções senoidais, é natural questionar se a transformada de Fourier de curto termo desempenha um papel análogo na Teoria dos Fasores Dinâmicos.

Considere uma função  $\psi \in S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt = 1. \quad (5.11)$$

Note que tal função sempre existe, pois fixando uma função não identicamente nula  $\varphi \in S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , com

$$\chi = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2 dt,$$

segue que  $\psi(t) = \varphi(t)/\sqrt{\chi}$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Sendo  $h$  a função definida por

$$h(\omega, \tau) = e^{-j\omega\tau}, \quad (\omega, \tau) \in \mathbb{R}^2, \quad (5.12)$$

então:

**B1.**  $h \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$  e  $|h(\omega, \tau)| = |e^{-j\omega\tau}| = 1$ , para todo  $(\omega, \tau) \in \mathbb{R}^2$ ;

**B2.** Por indução, é possível mostrar que, para  $k = 1, 2, \dots$ ,

$$\frac{\partial^k h}{\partial \omega^k}(\omega, \tau) = (-j\tau)^k h(\omega, \tau), \quad \forall (\omega, \tau) \in \mathbb{R}^2$$

e, assim,

$$\left| \frac{\partial^k h}{\partial \omega^k}(\omega, \tau) \right| = |(-j\tau)^k h(\omega, \tau)| = |\tau|^k, \quad \forall (\omega, \tau) \in \mathbb{R}^2.$$

Logo, a função  $h$ , dada em (5.12), satisfaz a hipótese **A2** e, portanto, pelo Teorema 5.1.1, dada uma função  $x \in S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , a função  $\mathbf{X}$ , definida por

$$\mathbf{X}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \psi(\tau - t) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (t, \omega) \in \mathbb{R}^2, \quad (5.13)$$

é contínua em  $\mathbb{R}^2$ . A variável  $t$  é chamada de tempo e a variável  $\omega$  de frequência angular.

A partir de (5.10), e tendo em vista o Teorema 5.1.2, fica bem definido o operador linear

$$\begin{aligned} \mathcal{G} : S(\mathbb{R}, \mathbb{C}) &\longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) \\ x &\longmapsto \mathcal{G}(x) = \mathbf{X}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

com  $\mathbf{X}$  como em (5.13), chamado de transformada de Fourier de curto termo.

O próximo teorema trata da injetividade do operador linear  $\mathcal{G}$ .

**Teorema 5.1.4.** *O operador linear  $\mathcal{G}$  dado em (5.14) é injetor.*

**Demonstração.** Se  $x, y \in S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  e  $\mathbf{X}(t, \omega) = \mathbf{Y}(t, \omega)$ , para todo  $(t, \omega) \in \mathbb{R}^2$ , então

$$\mathbf{Z}(t, \omega) = \mathbf{X}(t, \omega) - \mathbf{Y}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} z(\tau) \psi(\tau - t) e^{-j\omega\tau} d\tau = 0, \quad \forall (t, \omega) \in \mathbb{R}^2,$$

com  $z = x - y$ ,  $\mathbf{X} = \mathcal{G}(x)$ ,  $\mathbf{Y} = \mathcal{G}(y)$  e  $\mathbf{Z} = \mathcal{G}(z)$ .

Observe que, para cada  $t \in \mathbb{R}$ , resulta que  $z_t \in S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , sendo

$$\begin{aligned} z_t : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \tau &\longmapsto z_t(\tau) = z(\tau) \psi(\tau - t). \end{aligned}$$

Logo, para cada  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{Z}_t = \mathcal{F}(z_t) \in S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , com  $\mathbf{Z}_t(\omega) = \mathbf{Z}(t, \omega)$ . Utilizando a transformada inversa de Fourier (3.17), obtém-se

$$z(\tau)\psi(\tau - t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{Z}_t(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = 0, \quad \forall \tau \in \mathbb{R},$$

para cada  $t \in \mathbb{R}$ .

Como  $z(\tau) |\psi(\tau - t)|^2 = 0$ , para todo  $(t, \tau) \in \mathbb{R}^2$ , resulta de (5.11) que

$$\int_{-\infty}^{\infty} z(\tau) |\psi(\tau - t)|^2 dt = z(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\tau - t)|^2 dt = z(\tau) = 0, \quad \tau \in \mathbb{R},$$

implicando que  $x(\tau) = y(\tau)$  para todo  $\tau \in \mathbb{R}$ . ■

Denotando por  $R^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$  o subespaço vetorial de  $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$  que é imagem de  $S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  por  $\mathcal{G}$ , resulta que o operador inverso é

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{-1} : R^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) &\longrightarrow S(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \\ \mathbf{X} &\longmapsto \mathcal{G}^{-1}(\mathbf{X}) = x, \end{aligned}$$

o qual também é linear. Neste caso, a função  $x$  é calculada através de

$$x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{X}(t, \omega) \overline{\psi(\tau - t)} e^{j\omega\tau} d\omega dt, \quad \tau \in \mathbb{R}. \quad (5.15)$$

De fato, procedendo como na demonstração do Teorema 5.1.4, considere a família de funções a um parâmetro definida por

$$\begin{aligned} x_t : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \tau &\longmapsto x_t(\tau) = x(\tau)\psi(\tau - t). \end{aligned}$$

Para cada  $t \in \mathbb{R}$ , resulta que  $x_t \in S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  e, como consequência,  $x_t$  pode ser vista como uma curva em  $S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . Neste ponto de vista, (5.13) é apenas a transformada de Fourier de  $x_t$  e, recordando o Lema 3.3.1, segue que  $\mathbf{X}_t \in S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , sendo  $\mathbf{X}_t = \mathcal{F}(x_t)$  e  $\mathbf{X}_t(\omega) = \mathbf{X}(t, \omega)$  com  $t \in \mathbb{R}$  fixado. Assim, segue da transformada inversa de Fourier (3.17) que

$$x_t(\tau) = x(\tau)\psi(\tau - t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{X}(t, \omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (5.16)$$

Além disso, da expressão (5.11) obtém-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\tau - t)|^2 dt = 1, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Logo, multiplicando ambos os membros de (5.16) por  $\overline{\psi(\tau - t)}$  e integrando com respeito à variável  $t$ , obtém-se (5.15).

Deve-se enfatizar aqui que, neste contexto da transformada de Fourier de curto termo, a função  $\psi \in S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  é chamada de **função janela**. Em geral, tal função pode ser escolhida no conjunto das **funções teste** que são funções em  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  e com suporte compacto, isto é, que se anulam fora de um intervalo compacto. Mais precisamente,  $\psi$  pode satisfazer as seguintes condições:

**C1.**  $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C});$

**C2.**  $\psi(u) = 0, \quad |u| > a;$

**C3.**  $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(u)|^2 du = 1.$

O termo “janela” vem do fato de que a função  $\psi$ , satisfazendo **C1**, **C2** e **C3** e tal como em (5.13), tem a propriedade de se deslocar no eixo das abscissas conforme o tamanho da janela (intervalo  $[-a, a]$ ) escolhida. Veja a Figura 5.1.

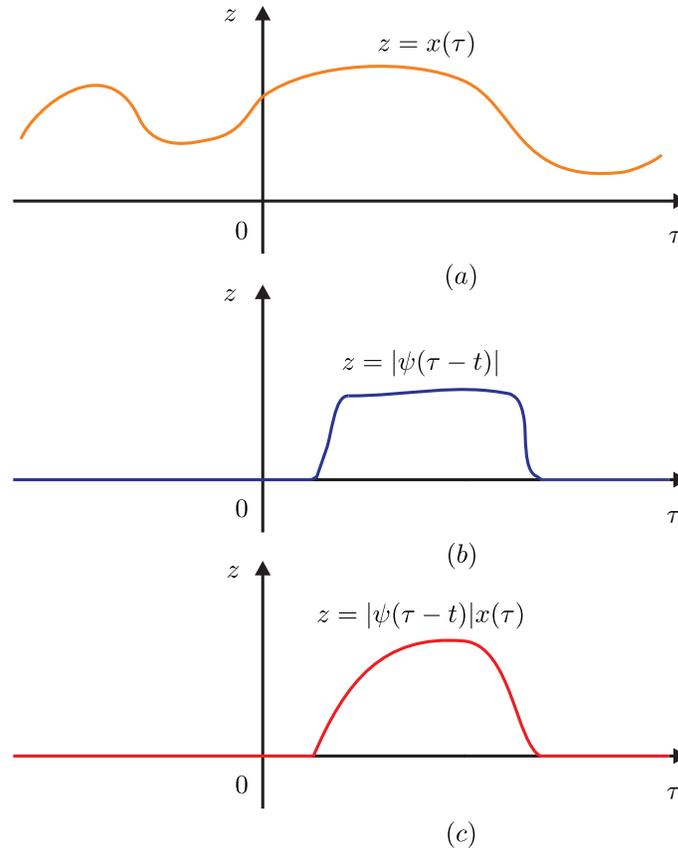


Figura 5.1: (a) Função  $x$ . (b) Módulo da função janela  $\psi$ , com  $t \in \mathbb{R}$  fixado. (c) Produto de  $x$  pelo módulo de  $\psi$ , com  $t \in \mathbb{R}$  fixado.

A transformada de Fourier de curto termo é amplamente estudada na literatura [30], com aplicações em problemas do tipo tempo-frequência, sendo precursora das transformadas *wavelets*. Contudo, até onde se sabe, não há aplicações na Teoria de Fasores Dinâmicos. O teorema a seguir faz a conexão entre a transformada de Fourier de curto termo e a Teoria dos Fasores Dinâmicos, fornecendo a propriedade derivativa usual destes fasores.

**Teorema 5.1.5.** *Se  $x \in S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  e  $\mathbf{X} = \mathcal{G}(x)$ , então*

$$\mathcal{G}(x') = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + j\omega \mathbf{X}.$$

**Demonstração.** Defina  $\mathbf{W} = \mathcal{G}(x')$ , com  $x \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . Visto que,

$$\frac{\partial h}{\partial \tau}(\omega, \tau) = -j\omega e^{-j\omega\tau}, \quad \forall(\omega, \tau) \in \mathbb{R}^2,$$

pelo Teorema 5.1.3,

$$\begin{aligned}\mathbf{W}(t, \omega) &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(t, \omega) - \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \psi(\tau - t) \frac{\partial h}{\partial \tau}(\omega, \tau) d\tau \\ &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(t, \omega) + j\omega \mathbf{X}(t, \omega), \quad (t, \omega) \in \mathbb{R}^2.\end{aligned}$$

■

O próximo teorema generaliza o resultado anterior para derivadas de ordem superior.

**Teorema 5.1.6.** *Se  $x \in S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  e  $\mathbf{X} = \mathcal{G}(x)$ , então*

$$\mathcal{G}(x^{(m)}) = \left( \frac{\partial}{\partial t} + j\omega \right)^m \mathbf{X},$$

sendo  $x^{(m)}$  a derivada de ordem  $m \in \{1, 2, \dots\}$  de  $x$ , com respeito à variável  $t$ , e

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + j\omega \right)^m = \sum_{l=0}^m \frac{m!}{l!(m-l)!} (j\omega)^l \frac{\partial^{m-l}}{\partial t^{m-l}},$$

com  $l \leq m$  um número inteiro e a derivada parcial de ordem 0, com respeito à variável  $t$ , sendo a identidade.

**Demonstração.** A prova é feita por indução em  $m$ . Pelo Teorema 5.1.5, o resultado é verdadeiro para  $m = 1$ . Suponha que o resultado seja verdadeiro para  $m = k$  e seja  $y = x^{(k)}$ . Assim,

$$\mathbf{Y} = \mathcal{G}(x^{(k)}) = \left( \frac{\partial}{\partial t} + j\omega \right)^k \mathbf{X}.$$

Novamente, pelo Teorema 5.1.5, sendo  $\mathbf{W} = \mathcal{G}(y')$ , então

$$\begin{aligned}\mathbf{W}(t, \omega) &= \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t}(t, \omega) + j\omega \mathbf{Y}(t, \omega) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{l=0}^k \frac{k!}{l!(k-l)!} (j\omega)^l \frac{\partial^{k-l} \mathbf{X}}{\partial t^{k-l}}(t, \omega) \right) + \\ &\quad j\omega \left( \sum_{l=0}^k \frac{k!}{l!(k-l)!} (j\omega)^l \frac{\partial^{k-l} \mathbf{X}}{\partial t^{k-l}}(t, \omega) \right) \\ &= \sum_{l=0}^k \frac{k!}{l!(k-l)!} (j\omega)^l \frac{\partial^{k+1-l} \mathbf{X}}{\partial t^{k+1-l}}(t, \omega) + \sum_{l=0}^k \frac{k!}{l!(k-l)!} (j\omega)^{l+1} \frac{\partial^{k-l} \mathbf{X}}{\partial t^{k-l}}(t, \omega) \\ &= \frac{\partial^{k+1} \mathbf{X}}{\partial t^{k+1}}(t, \omega) + \sum_{l=1}^k \frac{k!}{l!(k-l)!} (j\omega)^l \frac{\partial^{k+1-l} \mathbf{X}}{\partial t^{k+1-l}}(t, \omega) + \\ &\quad \sum_{l=0}^{k-1} \frac{k!}{l!(k-l)!} (j\omega)^{l+1} \frac{\partial^{k-l} \mathbf{X}}{\partial t^{k-l}}(t, \omega) + (j\omega)^{k+1} \mathbf{X}(t, \omega).\end{aligned}\tag{5.17}$$

Fazendo a mudança  $\bar{l} = l + 1$ , segue que

$$\sum_{l=0}^{k-1} \frac{k!}{l!(k-l)!} (j\omega)^{l+1} \frac{\partial^{k-l} \mathbf{X}}{\partial t^{k-l}}(t, \omega) = \sum_{\bar{l}=1}^k \frac{k!}{(\bar{l}-1)!(k+1-\bar{l})!} (j\omega)^{\bar{l}} \frac{\partial^{k+1-\bar{l}} \mathbf{X}}{\partial t^{k+1-\bar{l}}}(t, \omega)$$

e, assim, omitindo a barra e substituindo em (5.17), obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(t, \omega) &= \frac{\partial^{k+1} \mathbf{X}}{\partial t^{k+1}}(t, \omega) + \sum_{l=1}^k \frac{k!}{l!(k-l)!} (j\omega)^l \frac{\partial^{k+1-l} \mathbf{X}}{\partial t^{k+1-l}}(t, \omega) + \\ &\quad \sum_{l=0}^{k-1} \frac{k!}{l!(k-l)!} (j\omega)^{l+1} \frac{\partial^{k-l} \mathbf{X}}{\partial t^{k-l}}(t, \omega) + (j\omega)^{k+1} \mathbf{X}(t, \omega) \\ &= \frac{\partial^{k+1} \mathbf{X}}{\partial t^{k+1}}(t, \omega) + \sum_{l=1}^k \left( \frac{k!}{l!(k-l)!} + \frac{k!}{(l-1)!(k+1-l)!} \right) (j\omega)^l \frac{\partial^{k+1-l} \mathbf{X}}{\partial t^{k+1-l}}(t, \omega) + \\ &\quad (j\omega)^{k+1} \mathbf{X}(t, \omega) \\ &= \frac{\partial^{k+1} \mathbf{X}}{\partial t^{k+1}}(t, \omega) + \sum_{l=1}^k \frac{(k+1)!}{l!(k+1-l)!} (j\omega)^l \frac{\partial^{k+1-l} \mathbf{X}}{\partial t^{k+1-l}}(t, \omega) + (j\omega)^{k+1} \mathbf{X}(t, \omega) \\ &= \sum_{l=0}^{k+1} \frac{(k+1)!}{l!(k+1-l)!} (j\omega)^l \frac{\partial^{k+1-l} \mathbf{X}}{\partial t^{k+1-l}}(t, \omega). \end{aligned}$$

Logo, o resultado também é válido para  $m = k + 1$  e o teorema está provado. ■

Uma aplicação do Teorema 5.1.5 é apresentada na próxima subseção.

## 5.1.2 Aplicação Básica do Operador Linear $\mathcal{G}$ na Teoria de Circuitos Elétricos

Como mostrado nas seções anteriores, a transformada de Fourier de curto termo (5.14) preserva a propriedade derivativa dos fasores dinâmicos apresentada em [22] e [29]. Tal propriedade, apresentada no Teorema 5.1.6, transforma os modelos diferenciais dos elementos lineares básicos de um circuito elétrico em equações diferenciais complexas, como mostra o teorema a seguir.

**Teorema 5.1.7** (Equações dos Elementos Lineares Básicos). *Sejam  $v$  e  $i$  sinais de tensão e de corrente, respectivamente, nos elementos lineares básicos de um circuito elétrico. Suponha que as transformadas de Fourier de curto termo (5.14) de  $v$  e  $i$  existam e sejam dadas por  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(t, \omega)$  e  $\mathbf{I} = \mathbf{I}(t, \omega)$ , respectivamente. Então, as equações dos elementos lineares básicos podem ser reescritas como:*

i. *Resistor:*  $\mathbf{V} = R\mathbf{I}$ ;

ii. *Indutor:*  $\mathbf{V} = L\frac{\partial \mathbf{I}}{\partial t} + j\omega L\mathbf{I}$ ;

iii. *Capacitor:*  $\mathbf{I} = C\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + j\omega C\mathbf{V}$ .

Em conexão com a Teoria dos Fasores Dinâmicos, note que os modelos obtidos são análogos aos modelos do Teorema 4.2.2, porém a diferença está na classe de funções considerada. Neste sentido, a transformada de Fourier de curto termo permite trabalhar com outra classe de funções, distinta daquela apresentada na Seção 4.2, e que admite a representação fasorial dinâmica. Consequentemente, tal transformada representa uma nova abordagem para os fasores dinâmicos.

## 5.2 Fasores Dinâmicos Via Transformada Generalizada de Laplace

Seja

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \phi(u),\end{aligned}$$

uma função satisfazendo as seguintes condições:

**E1.**  $\phi \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $k \geq 1$  ou  $k = \infty$ ;

**E2.**  $\phi(u) = 1$ , se  $u \leq 0$ ;

**E3.**  $\phi'(u) < 0$ , se  $u > 0$  e  $\phi(u) \rightarrow 0$  quando  $u \rightarrow \infty$ ;

**E4.**  $\phi^{(m)}(u) \rightarrow 0$  quando  $u \rightarrow \infty$ , para  $m = 1, \dots, k$ .

O conjunto das funções satisfazendo **E1**, **E2**, **E3** e **E4** é não vazio, pois se  $\varphi \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  é a função definida por

$$\varphi(u) = \begin{cases} 1, & u \leq 0, \\ \rho(u), & 0 < u < 1, \\ 0, & u \geq 1, \end{cases} \quad (5.18)$$

com  $\rho'(u) < 0$ , para todo  $u \in (0, 1)$ , então a função  $\phi$  tal que  $\phi(u) = \varphi(u/\lambda)$ ,  $u \in \mathbb{R}$ , satisfaz as exigências anteriores para cada  $\lambda \in (0, 1]$ .

As Figuras 5.2 e 5.3 apresentam os gráficos das funções  $\phi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  e  $\phi'$ , respectivamente, quando a função  $\rho$ , como em (5.18), é  $\rho(u) = 2u^3 - 3u^2 + 1$ ,  $u \in (0, 1)$ . Note que  $\rho'(u) = -6u(1 - u) < 0$ ,  $\forall u \in (0, 1)$ .

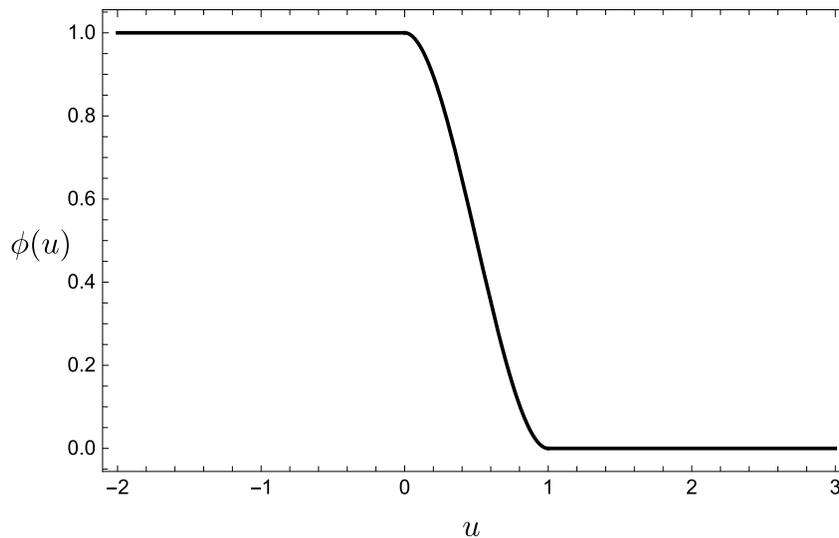


Figura 5.2: Gráfico da função  $\phi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , definida por  $\phi(u) = \varphi(u/\lambda)$ ,  $\forall u \in \mathbb{R}$ , com  $\varphi$  como em (5.18),  $\lambda = 1$  e  $\rho(u) = 2u^3 - 3u^2 + 1$ ,  $u \in (0, 1)$ .

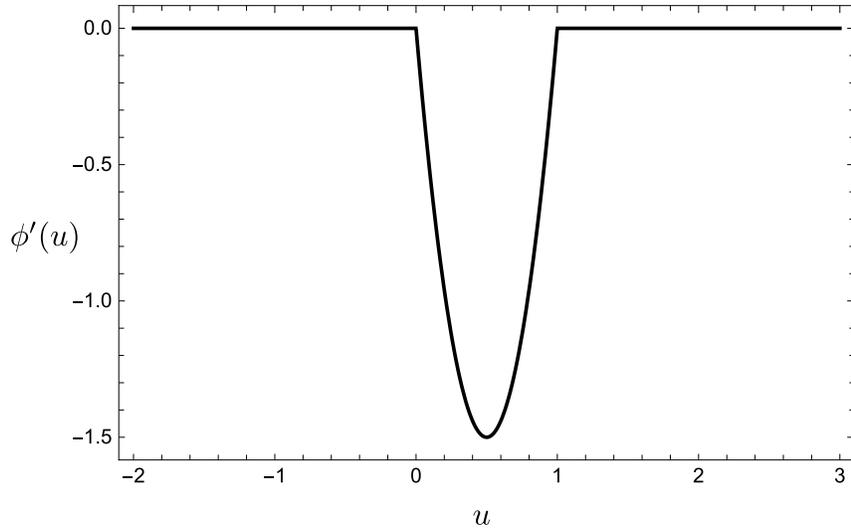


Figura 5.3: Gráfico da derivada primeira da função  $\phi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , definida por  $\phi(u) = \varphi(u/\lambda)$ ,  $\forall u \in \mathbb{R}$ , com  $\varphi$  como em (5.18),  $\lambda = 1$  e  $\rho(u) = 2u^3 - 3u^2 + 1$ ,  $u \in (0, 1)$ .

Outra possibilidade é definir  $\phi$  como  $\phi(u) = \varphi(u/\lambda)$ ,  $u \in \mathbb{R}$ , sendo  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  a função dada por

$$\varphi(u) = \begin{cases} 1, & u \leq 0, \\ 1 - e^{-\frac{1}{u}}, & u > 0. \end{cases} \quad (5.19)$$

Novamente, para cada  $\lambda \in (0, 1]$ , é possível mostrar por indução que  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  satisfaz **E1**, **E2**, **E3** e **E4**. Neste caso, os gráficos das funções  $\phi$  e  $\phi'$ , para  $\lambda = 0.5$ , são apresentados nas Figuras 5.4 e 5.5, respectivamente.

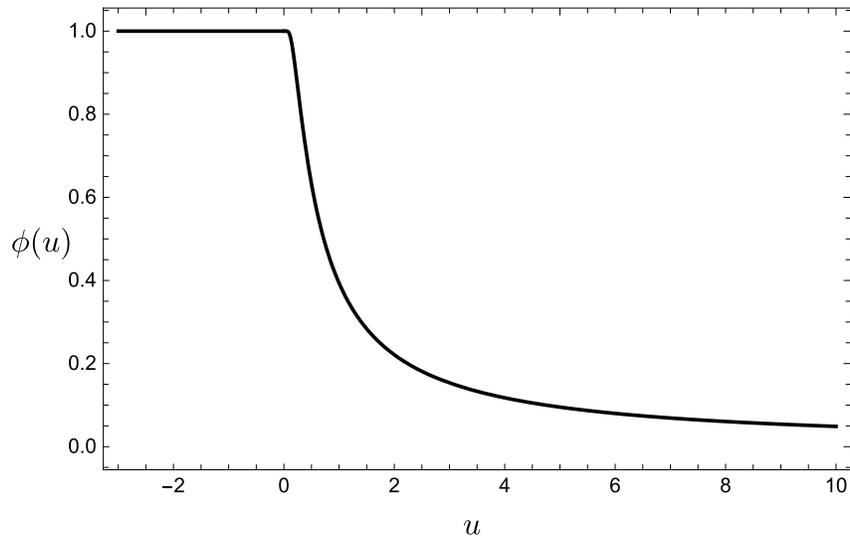


Figura 5.4: Gráfico da função  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , definida por  $\phi(u) = \varphi(u/\lambda)$ ,  $\forall u \in \mathbb{R}$ , com  $\varphi$  como em (5.19) e  $\lambda = 0.5$ .

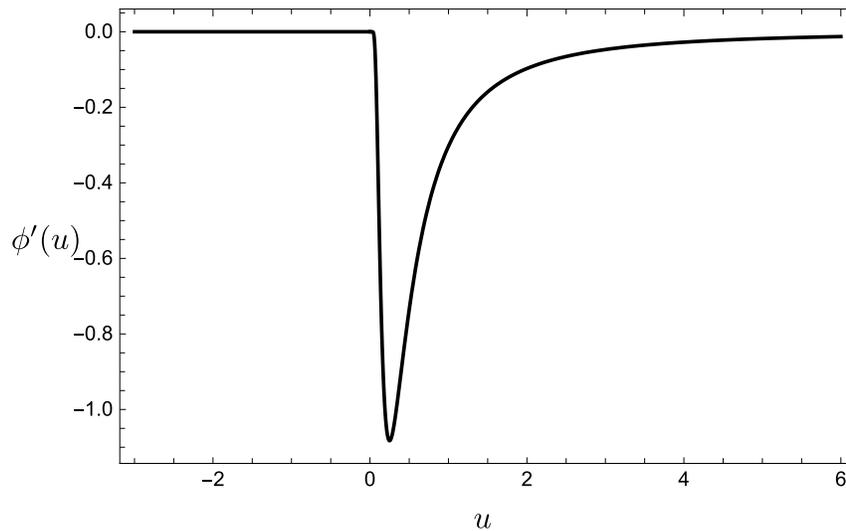


Figura 5.5: Gráfico da derivada primeira da função  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , definida por  $\phi(u) = \varphi(u/\lambda)$ ,  $\forall u \in \mathbb{R}$ , com  $\varphi$  como em (5.19) e  $\lambda = 0.5$ .

No caso geral, decorre de **E1**, **E2**, **E3** e **E4** que, para cada  $m = 1, \dots, k$ ,  $\phi^{(m)}(u) \rightarrow 0$  quando  $|u| \rightarrow \infty$ . Como consequência, a função  $\phi$  possui boas propriedades apresentadas no seguinte lema.

**Lema 5.2.1.** *Suponha que  $\phi$  satisfaz as hipóteses **E1**, **E2**, **E3** e **E4**. Então:*

- a.  $\phi$  é Lipschitziana em  $\mathbb{R}$  e  $0 < \phi(u) \leq 1$ , para todo  $u \in \mathbb{R}$ ;
- b. Para cada  $m = 1, \dots, k-1$ ,  $\phi^{(m)}$  é Lipschitziana e limitada em  $\mathbb{R}$ ;
- c.  $\phi^{(k)}$  é uniformemente contínua e limitada em  $\mathbb{R}$ .

**Demonstração.**

a. Decorre de **E2** e **E3** que  $0 < \phi(u) \leq 1$ , para todo  $u \in \mathbb{R}$ . Visto que  $\phi'(u) \rightarrow 0$  quando  $u \rightarrow \infty$  e  $\phi'(u) = 0$ , para  $u < 0$ , dado  $\varepsilon = 1$ , existe um número real positivo  $c$  tal que  $|\phi'(u)| \leq 1$ , para todo  $u \in \mathbb{R} \setminus [0, c]$ . Além disto, existe  $A = \sup\{|\phi'(u)| : u \in [0, c]\}$ , pois  $\phi'$  é contínua em  $\mathbb{R}$ . Assim, sendo  $M = \max\{1, A\}$ , segue que  $|\phi'(u)| \leq M$ , para todo  $u \in \mathbb{R}$ . Como  $\phi'$  é uma função limitada, a função  $\phi$  é Lipschitziana em  $\mathbb{R}$ ;

b. A partir de **E4** e por argumentos similares aos empregados na prova do item **a**, para cada  $m = 2, \dots, k$ ,  $\phi^{(m)}$  é uma função limitada em  $\mathbb{R}$ . Como consequência, para cada  $m = 1, \dots, k-1$ ,  $\phi^{(m)}$  é uma função Lipschitziana em  $\mathbb{R}$ ;

c. Novamente, dado  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ , existe um número real positivo  $c$  tal que  $|\phi^{(k)}(u)| < \varepsilon/3$ , para todo  $u \in \mathbb{R} \setminus [0, c]$ , já que  $\phi^{(k)}(u) \rightarrow 0$  quando  $u \rightarrow \infty$  e  $\phi^{(k)}(u) = 0$ , para  $u < 0$ . Basta agora considerar os seguintes casos:

c1. A função  $\phi^{(k)}$  restrita a  $[0, c]$  é uniformemente contínua e, portanto, para o mesmo  $\varepsilon$  anterior existe  $\delta \in \mathbb{R}$ ,  $\delta > 0$ , tal que se  $u, v \in [0, c]$  e  $|u - v| < \delta$ , então

$$|\phi^{(k)}(u) - \phi^{(k)}(v)| < \frac{\varepsilon}{3};$$

c2. Se  $u, v \in \mathbb{R} \setminus [0, c]$  e  $|u - v| < \delta$ , então

$$|\phi^{(k)}(u) - \phi^{(k)}(v)| \leq |\phi^{(k)}(u)| + |\phi^{(k)}(v)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon;$$

**c3.** Se  $u \in (-\infty, 0)$ ,  $v \in [0, c]$  e  $|u - v| < \delta$ , então  $|u| < \delta$ ,  $|v| < \delta$  e

$$\begin{aligned} |\phi^{(k)}(u) - \phi^{(k)}(v)| &= |\phi^{(k)}(u) - \phi^{(k)}(0) + \phi^{(k)}(0) - \phi^{(k)}(v)| \\ &\leq |\phi^{(k)}(u) - \phi^{(k)}(0)| + |\phi^{(k)}(v) - \phi^{(k)}(0)| \\ &= |\phi^{(k)}(v) - \phi^{(k)}(0)| = |\phi^{(k)}(v)| < \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon, \end{aligned}$$

pois  $|\phi^{(k)}(u)| = |\phi^{(k)}(0)| = 0$ ;

**c4.** Se  $u \in [0, c]$ ,  $v \in (c, \infty)$  e  $|u - v| < \delta$ , então  $|u - c| < \delta$ ,  $|v - c| < \delta$  e

$$\begin{aligned} |\phi^{(k)}(u) - \phi^{(k)}(v)| &= |\phi^{(k)}(u) - \phi^{(k)}(c) + \phi^{(k)}(c) - \phi^{(k)}(v)| \\ &\leq |\phi^{(k)}(u) - \phi^{(k)}(c)| + |\phi^{(k)}(v) - \phi^{(k)}(c)| \\ &\leq |\phi^{(k)}(u) - \phi^{(k)}(c)| + |\phi^{(k)}(v)| + |\phi^{(k)}(c)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Segue destes quatro casos que  $\phi^{(k)}$  é uniformemente contínua em  $\mathbb{R}$ . ■

Agora, considere o conjunto  $E^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  das funções tais que, se  $x \in E^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , então  $x = x(\tau)$ :

**F1.** É causal e de ordem exponencial em  $[0, \infty)$  conforme as Definições 3.4.1 e 3.4.3, respectivamente;

**F2.** É contínua em  $[0, \infty)$  significando que  $x$  é contínua à direita em  $\tau = 0$ , isto é,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} x(\tau) = x(0);$$

**F3.** Possui derivadas contínuas até ordem  $k$  em  $(0, \infty)$ ,  $k \geq 1$  ou  $k = \infty$ . Além disto, a derivada  $x^{(m)}$ , com  $1 \leq m \leq k$ , é contínua à direita em  $\tau = 0$  e de ordem exponencial em  $[0, \infty)$ .

Resulta que  $E^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  é um espaço vetorial real com as seguintes operações de adição e multiplicação por escalar real:

**O1.** Se  $x, y \in E^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , então a função **adição**  $x + y$  é definida por

$$(x + y)(\tau) = x(\tau) + y(\tau), \quad \forall \tau \in \mathbb{R};$$

**O2.** Se  $x \in E^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , então a função **multiplicação por escalar**  $\alpha x$  é definida por

$$(\alpha x)(\tau) = \alpha x(\tau), \quad \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

Note que, como  $x \in E^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  é de ordem exponencial em  $[0, \infty)$ , existem números reais  $A > 0$  e  $a$  tais que para algum  $\tau_0 \geq 0$ ,

$$|x(\tau)| \leq Ae^{a\tau}, \quad \forall \tau \geq \tau_0.$$

Além disto, pela continuidade da função  $x$  em  $[0, \infty)$ , existe  $C = \sup\{|x(\tau)| : \tau \in [0, \tau_0]\}$ .

Assim, sendo  $M = \max\{A, C\}$ , com

$$B = \begin{cases} Ce^{-a\tau_0}, & a < 0, \\ C, & a \geq 0, \end{cases}$$

então  $|x(\tau)| \leq Me^{a\tau}$ , para todo  $\tau \in [0, \infty)$ . Em outras palavras, devido à continuidade,  $x$  é de ordem exponencial com  $\tau_0 = 0$ .

Daqui em diante,  $s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}$ , com  $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$ . O próximo lema é essencial na construção da transformada de Laplace generalizada.

**Lema 5.2.2.** Se  $x \in E^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  e  $\phi$  satisfaz as hipóteses **E1**, **E2**, **E3** e **E4**, então a integral

$$\int_0^\infty x(\tau)\phi(\tau - t)e^{-s\tau} d\tau \quad (5.20)$$

é convergente para todo  $t \in [0, \infty)$  e para todo  $s \in \mathbb{C}$  com  $\text{Re}(s) = \sigma > a$ , para algum número real  $a$ .

**Demonstração.** Visto que  $x \in E^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  é contínua de ordem exponencial em  $[0, \infty)$ , existem números reais  $M > 0$  e  $a$  tais que

$$|x(\tau)| \leq Me^{a\tau}, \quad \forall \tau \geq 0.$$

Resulta que, para cada  $t \in [0, \infty)$  e  $s \in \mathbb{C}$ , o integrando em (5.20) é integrável em cada intervalo fechado  $[0, r]$  e

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty x(\tau) \phi(\tau - t) e^{-s\tau} d\tau \right| &\leq \int_0^\infty |x(\tau) \phi(\tau - t) e^{-s\tau}| d\tau \\ &\leq \int_0^\infty |x(\tau) e^{-\sigma\tau}| d\tau \\ &\leq M \int_0^\infty e^{-(\sigma-a)\tau} d\tau \\ &= M \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r e^{-(\sigma-a)\tau} d\tau \\ &= M \lim_{r \rightarrow \infty} \left[ -\frac{e^{-(\sigma-a)\tau}}{\sigma-a} \right]_0^r = \frac{M}{\sigma-a}, \end{aligned}$$

para todo  $t \geq 0$  e qualquer que seja  $s \in \mathbb{C}$ , com  $\operatorname{Re}(s) = \sigma > a$ . ■

Tal como no caso da transformada de Laplace, existem funções que não pertencem a  $E^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  para as quais a integral (5.20) é convergente. Um exemplo é a função

$$x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\tau \longmapsto x(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < 0, \\ 2\tau e^{\tau^2} \operatorname{sen}(e^{\tau^2}), & \tau \geq 0. \end{cases}$$

que é infinitamente diferenciável em  $(0, \infty)$ , mas não é de ordem exponencial. Entretanto, mediante integração por partes, obtém-se

$$\begin{aligned} \int_0^\infty 2\tau e^{\tau^2} \operatorname{sen}(e^{\tau^2}) \phi(\tau - t) e^{-s\tau} d\tau &= -\cos(1) + \int_0^\infty \cos(e^{\tau^2}) \phi'(\tau - t) e^{-s\tau} d\tau - \\ &= s \int_0^\infty \cos(e^{\tau^2}) \phi(\tau - t) e^{-s\tau} d\tau, \end{aligned}$$

para  $\operatorname{Re}(s) = \sigma > 0$  e, como a partir do Lema 5.2.1  $\phi$  e  $\phi'$  são funções limitadas, decorre que

$$\left| \int_0^\infty \cos(e^{\tau^2}) e^{-s\tau} d\tau \right| \leq \int_0^\infty |e^{-s\tau}| d\tau = \frac{1}{\sigma}$$

e a convergência está garantida.

Sendo  $c$  um número real e

$$\Omega_c = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) = \sigma > c\}, \quad (5.21)$$

então, para cada  $x \in E^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , o lema anterior permite definir a função  $\mathbf{X}$  por

$$\mathbf{X}(t, s) = \int_0^\infty x(\tau)\phi(\tau - t)e^{-s\tau} d\tau, \quad (t, s) \in [0, \infty) \times \Omega_a. \quad (5.22)$$

Além disto, a partir da prova do Lema 5.2.2, é possível concluir que

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \mathbf{X}(t, \sigma + j\omega) = 0,$$

para cada  $t \in [0, \infty)$ .

Na transformada de Laplace há o conceito de abscissa de convergência que é o valor  $\sigma_c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  tal que a transformada diverge quando  $\text{Re}(s) < \sigma_c$  e converge quando  $\text{Re}(s) > \sigma_c$ , sendo o caso  $\text{Re}(s) = \sigma_c$  inconclusivo, em geral. Tal análise não será feita aqui.

O Teorema 5.2.1 apresenta algumas propriedades da função  $\mathbf{X}$  dada em (5.22).

**Teorema 5.2.1.** *Sejam  $x \in E^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  e  $\phi$  uma função satisfazendo as hipóteses **E1**, **E2**, **E3** e **E4**. Então, existe a tal que para algum número real  $b > a$ , a função  $\mathbf{X}$  dada em (5.22):*

a. *É contínua em  $[0, \infty) \times \Omega_b$ ;*

b. *Possui derivada parcial, com respeito à variável  $t$ , contínua em  $[0, \infty) \times \Omega_b$  e*

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(t, s) = - \int_0^\infty x(\tau)\phi'(\tau - t)e^{-s\tau} d\tau, \quad (t, s) \in [0, \infty) \times \Omega_b;$$

c. *É analítica, com respeito à variável  $s$ , em  $[0, \infty) \times \Omega_b$  e*

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s}(t, s) = - \int_0^\infty \tau x(\tau)\phi(\tau - t)e^{-s\tau} d\tau, \quad (t, s) \in [0, \infty) \times \Omega_b.$$

**Demonstração.**

a. Fixe  $x \in E^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  e  $\phi$  satisfazendo as hipóteses **E1**, **E2**, **E3** e **E4**. Neste caso, existe  $a \in \mathbb{R}$  tal que a função  $\mathbf{X}$  converge para todo  $(t, s) \in [0, \infty) \times \Omega_a$ , sendo  $\Omega_a$  o conjunto definido em (5.21). A continuidade da função  $\mathbf{X}$  em  $[0, \infty) \times \Omega_b$ , com  $b > a$ ,

será demonstrada através do conceito de convergência uniforme. Para isto, considere a sequência de funções  $\{\mathbf{X}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  cujo termo geral é

$$\mathbf{X}_n(t, s) = \int_0^{\tau_n} x(\tau) \phi(\tau - t) e^{-s\tau} d\tau, \quad (t, s) \in [0, \infty) \times \Omega_a, \quad (5.23)$$

com  $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência real qualquer tal que  $\tau_n \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

Fixados um ponto  $(t, s) \in [0, \infty) \times \Omega_a$  e  $n \in \mathbb{N}$ , é possível definir a função  $J_{\mathbf{X}_n}$  por

$$J_{\mathbf{X}_n}(\eta, \xi) = |\mathbf{X}_n(t + \eta, s + \xi) - \mathbf{X}_n(t, s)|, \quad (\eta, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C},$$

sendo  $\xi = \alpha + i\beta$ , com  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Observe que  $t, t + \eta \in [0, \infty)$ . Além disto, como  $s, s + \xi \in \Omega_a$ , segue que  $\operatorname{Re}(s) = \sigma > a$  e  $\operatorname{Re}(s + \xi) = \sigma + \alpha > a$ .

Seja  $A_n > 1$  um número real tal que

$$\int_0^{\tau_n} |x(\tau) e^{-a\tau}| d\tau < A_n.$$

A partir de (5.23),

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{X}_n}(\eta, \xi) &= \left| \int_0^{\tau_n} x(\tau) (\phi(\tau - t - \eta) e^{-(s+\xi)\tau} - \phi(\tau - t) e^{-s\tau}) d\tau \right| \\ &\leq \int_0^{\tau_n} |x(\tau) (\phi(\tau - t - \eta) - \phi(\tau - t)) e^{-(s+\xi)\tau}| d\tau + \\ &\quad \int_0^{\tau_n} |x(\tau) \phi(\tau - t) (e^{-(s+\xi)\tau} - e^{-s\tau})| d\tau \\ &= \int_0^{\tau_n} |x(\tau) e^{-(\sigma+\alpha)\tau}| |\phi(\tau - t - \eta) - \phi(\tau - t)| d\tau + \\ &\quad \int_0^{\tau_n} |x(\tau) e^{-\sigma\tau}| |\phi(\tau - t)| |e^{-\xi\tau} - 1| d\tau \\ &\leq \int_0^{\tau_n} |x(\tau) e^{-(\sigma+\alpha)\tau}| |\phi(\tau - t - \eta) - \phi(\tau - t)| d\tau + \\ &\quad \int_0^{\tau_n} |x(\tau) e^{-\sigma\tau}| |e^{-\xi\tau} - 1| d\tau \\ &< \int_0^{\tau_n} |x(\tau) e^{-a\tau}| |\phi(\tau - t - \eta) - \phi(\tau - t)| d\tau + \\ &\quad \int_0^{\tau_n} |x(\tau) e^{-a\tau}| |e^{-\xi\tau} - 1| d\tau. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Pelo Lema 5.2.1, a função  $\phi$  é Lipschitziana e, portanto, uniformemente contínua em  $\mathbb{R}$ . Assim, dado  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta_t \in \mathbb{R}$ ,  $\delta_t > 0$ , tal que se  $|\eta| < \delta_t$ , então

$$|\phi(u - \eta) - \phi(u)| < \frac{\varepsilon}{2A_n}, \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad (5.25)$$

sendo  $u = \tau - t$ . Para o mesmo  $\varepsilon$  anterior, existe  $\delta_z \in \mathbb{R}$ ,  $\delta_z > 0$ , tal que se  $z \in \mathbb{C}$  e  $|z| < \delta_z$ , então

$$|e^{-z} - 1| < \frac{\varepsilon}{2A_n},$$

devido à continuidade da função  $z \in \mathbb{C} \mapsto e^{-z}$ . Como consequência, sendo  $\delta_s = \delta_z/\tau_n$ , segue que

$$|\xi\tau| \leq |\xi| \tau_n < \delta_s \tau_n = \delta_z,$$

se  $|\xi| < \delta_s$  e, conseqüentemente,

$$|e^{-\xi\tau} - 1| < \frac{\varepsilon}{2A_n}. \quad (5.26)$$

Substituindo (5.25) e (5.26) em (5.24), obtém-se

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{X}_n}(\eta, \xi) &< \int_0^{\tau_n} |x(\tau)e^{-a\tau}| |\phi(\tau - t - \eta) - \phi(\tau - t)| d\tau + \\ &\int_0^{\tau_n} |x(\tau)e^{-a\tau}| |e^{-\xi\tau} - 1| d\tau \\ &< \frac{\varepsilon}{2A_n} \int_0^{\tau_n} |x(\tau)e^{-a\tau}| d\tau + \frac{\varepsilon}{2A_n} \int_0^{\tau_n} |x(\tau)e^{-a\tau}| d\tau < \varepsilon, \end{aligned}$$

se  $\|(\eta, \xi)\| < \delta = \min\{\delta_t, \delta_s\}$ . Como  $(t, s) \in [0, \infty) \times \Omega_a$  e  $n \in \mathbb{N}$  são arbitrários, isto mostra que  $\{\mathbf{X}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é uma seqüência de funções contínuas em  $[0, \infty) \times \Omega_a$ .

Resulta que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{X}_n = \mathbf{X},$$

e a convergência é uniforme, significando que dado  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ , existe um inteiro positivo  $N$  (dependendo apenas de  $\varepsilon$ ) tal que para todo  $n > N$  tem-se  $|\mathbf{X}_n(t, s) - \mathbf{X}(t, s)| < \varepsilon$

para todo  $(t, s) \in [0, \infty) \times \Omega_b$ , com  $b > a$ . De fato, pelo Lema 5.2.1,

$$\begin{aligned}
|\mathbf{X}_n(t, s) - \mathbf{X}(t, s)| &= \left| \int_0^{\tau_n} x(\tau)\phi(\tau - t)e^{-s\tau} d\tau - \int_0^\infty x(\tau)\phi(\tau - t)e^{-s\tau} d\tau \right| \\
&= \left| \int_{\tau_n}^\infty x(\tau)\phi(\tau - t)e^{-s\tau} d\tau \right| \\
&\leq \int_{\tau_n}^\infty |x(\tau)\phi(\tau - t)e^{-s\tau}| d\tau \\
&\leq \int_{\tau_n}^\infty |x(\tau)e^{-\sigma\tau}| d\tau \\
&\leq M \int_{\tau_n}^\infty e^{-(\sigma-a)\tau} d\tau = \frac{Me^{-(\sigma-a)\tau_n}}{\sigma - a},
\end{aligned}$$

desde que  $(t, s) \in [0, \infty) \times \Omega_a$ . Como  $\tau_n \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ , se  $b > a$  é um número real fixado tal que  $\sigma > b > a$ , então, dado  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ , existe um inteiro positivo  $N$ , dependendo apenas de  $\varepsilon$  tal que

$$|\mathbf{X}_n(t, s) - \mathbf{X}(t, s)| \leq \frac{Me^{-(\sigma-a)\tau_n}}{\sigma - a} < \frac{Me^{-(b-a)\tau_n}}{b - a} < \varepsilon$$

sempre que  $n > N$  e qualquer que seja  $(t, s) \in [0, \infty) \times \Omega_b$ , o que prova a convergência uniforme.

Por completeza, como  $\{\mathbf{X}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de funções contínuas em  $[0, \infty) \times \Omega_b$ , como consequência da convergência uniforme, a função  $\mathbf{X}$  é também contínua em  $[0, \infty) \times \Omega_b$ . Para ver isto, tome  $(t_0, s_0) \in [0, \infty) \times \Omega_b$ , arbitrário, porém fixado. Dado  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ , existe um inteiro positivo  $m$  tal que  $|\mathbf{X}_m(t, s) - \mathbf{X}(t, s)| < \varepsilon/3$ ,  $\forall (t, s) \in [0, \infty) \times \Omega_b$  e, já que  $\mathbf{X}_m$  é contínua em  $[0, \infty) \times \Omega_b$ , para este mesmo  $\varepsilon$ , existe uma vizinhança  $V \subset [0, \infty) \times \Omega_b$  de  $(t_0, s_0)$  tal que se  $(t, s) \in V$ , então  $|\mathbf{X}_m(t, s) - \mathbf{X}_m(t_0, s_0)| < \varepsilon/3$ . Portanto, se  $(t, s) \in V$ ,

$$\begin{aligned}
|\mathbf{X}(t, s) - \mathbf{X}(t_0, s_0)| &\leq |\mathbf{X}_m(t, s) - \mathbf{X}(t, s)| + |\mathbf{X}_m(t, s) - \mathbf{X}_m(t_0, s_0)| + \\
&\quad |\mathbf{X}_m(t_0, s_0) - \mathbf{X}(t_0, s_0)| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Como  $(t_0, s_0)$  é arbitrário, segue que  $\mathbf{X}$  é contínua em  $[0, \infty) \times \Omega_b$ .

**b.** A continuidade da função  $\partial \mathbf{X}/\partial t$  em  $[0, \infty) \times \Omega_b$  é provada de maneira análoga ao item **a**. Basta definir a sequência de funções  $\{\mathbf{Y}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  com termo geral

$$\mathbf{Y}_n(t, s) = - \int_0^{\tau_n} x(\tau) \phi'(\tau - t) e^{-s\tau} d\tau, \quad (t, s) \in [0, \infty) \times \Omega_b,$$

com  $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência real como anteriormente. Assim, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{Y}_n$  é uma função contínua em  $[0, \infty) \times \Omega_b$ . De fato, na demonstração da continuidade de  $\mathbf{X}_n$ , é essencial que  $\phi$  seja limitada e uniformemente contínua em  $\mathbb{R}$  e, pelo Lema 5.2.1,  $\phi'$  tem as mesmas propriedades. Novamente, pela continuidade uniforme da função  $\phi'$  em  $\mathbb{R}$  e como no item **a**,  $\mathbf{Y}_n \rightarrow \mathbf{Y}$  uniformemente e, portanto,  $\mathbf{Y}$  é uma função contínua em  $[0, \infty) \times \Omega_b$ , com

$$\mathbf{Y}(t, s) = - \int_0^{\infty} x(\tau) \phi'(\tau - t) e^{-s\tau} d\tau, \quad (t, s) \in [0, \infty) \times \Omega_b.$$

Resta mostrar que  $\mathbf{Y} = \partial \mathbf{X}/\partial t$  em  $[0, \infty) \times \Omega_b$ . Para isto, fixe  $(t, s) \in [0, \infty) \times \Omega_b$  e seja  $dJ_{\mathbf{Y}}$  a função definida por

$$dJ_{\mathbf{Y}}(\eta) = \left| \frac{\mathbf{X}(t + \eta, s) - \mathbf{X}(t, s)}{\eta} - \mathbf{Y}(t, s) \right|, \quad \eta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Assim,  $t, t + \eta \in [0, \infty)$  e

$$\begin{aligned} dJ_{\mathbf{Y}}(\eta) &= \left| \int_0^{\infty} x(\tau) \left( \frac{\phi(\tau - t - \eta) - \phi(\tau - t)}{\eta} + \phi'(\tau - t) \right) e^{-s\tau} d\tau \right| \\ &\leq \int_0^{\infty} |x(\tau) e^{-s\tau}| \left| \frac{\phi(\tau - t - \eta) - \phi(\tau - t)}{\eta} + \phi'(\tau - t) \right| d\tau \\ &\leq M \int_0^{\infty} e^{-(\sigma-a)\tau} \left| \frac{\phi(\tau - t - \eta) - \phi(\tau - t)}{\eta} + \phi'(\tau - t) \right| d\tau. \end{aligned}$$

Procedendo de modo similar ao que foi feito em (5.5), segue que

$$\frac{\phi(\tau - t - \eta) - \phi(\tau - t)}{\eta} + \phi'(\tau - t) = \int_0^1 (\phi'(\tau - t) - \phi'(\tau - t - \eta u)) du$$

e, pelo Teorema do Valor Médio, para cada  $\tau - t \in \mathbb{R}$ , existe  $u_{\tau-t} \in (0, 1)$  tal que

$$\left| \frac{\phi(\tau - t - \eta) - \phi(\tau - t)}{\eta} + \phi'(\tau - t) \right| \leq |\phi'(\tau - t - \eta u_{\tau-t}) - \phi'(\tau - t)|.$$

Pelo Lema 5.2.1,  $\phi'$  é uniformemente contínua  $\mathbb{R}$  e, assim, dado  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta \in \mathbb{R}$ ,  $\delta > 0$ , tal que

$$\left| \frac{\phi(\tau - t - \eta) - \phi(\tau - t)}{\eta} + \phi'(\tau - t) \right| < \frac{(b-a)\varepsilon}{M}, \quad \forall \tau - t \in \mathbb{R},$$

se  $0 < |u_{\tau-t}\eta| < |\eta| < \delta$ .

Logo,

$$\begin{aligned} dJ_{\mathbf{Y}}(\eta) &\leq M \int_0^\infty e^{-(\sigma-a)\tau} \left| \frac{\phi(\tau - t - \eta) - \phi(\tau - t)}{\eta} + \phi'(\tau - t) \right| d\tau \\ &< \frac{(b-a)\varepsilon}{M} M \int_0^\infty e^{-(\sigma-a)\tau} d\tau = \frac{(b-a)\varepsilon}{\sigma-a} < \frac{(b-a)\varepsilon}{b-a} = \varepsilon, \end{aligned}$$

desde que  $0 < |\eta| < \delta$ , pois  $\operatorname{Re}(s) = \sigma > b > a$ . Isto mostra que

$$\mathbf{Y}(t, s) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\mathbf{X}(t + \eta, s) - \mathbf{X}(t, s)}{\eta} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(t, s).$$

Como  $(t, s) \in [0, \infty) \times \Omega_b$  é arbitrário, o resultado está provado.

**c.** Sejam  $m \in \{1, 2, \dots\}$  e  $C = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m$  uma curva fechada e suave por partes em  $\mathbb{C}$ , isto é, para cada  $k = 1, \dots, m$ , existe uma função  $\gamma_k : [a_k, b_k] \rightarrow \mathbb{C}$  contínua e com derivada primeira contínua no intervalo fechado  $[a_k, b_k]$  tal que:

**c1.**  $C_k = \gamma_k([a_k, b_k])$ ;

**c2.**  $\gamma_m(b_m) = \gamma_1(a_1)$  e  $\gamma_{k+1}(a_{k+1}) = \gamma_k(b_k)$ , para  $k = 1, \dots, m-1$ .

Para cada  $n = 1, 2, \dots$  e  $k = 1, \dots, m$ , considere a integral de contorno de  $\mathbf{X}_n$ , como em (5.23), ao longo de  $C_k$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \int_{C_k} \mathbf{X}_n(t, s) ds &= \int_{a_k}^{b_k} \mathbf{X}_n(t, \gamma_k(u)) \gamma'_k(u) du \\ &= \int_{a_k}^{b_k} \left( \int_0^{\tau_n} x(\tau) \phi(\tau - t) e^{-\gamma_k(u)\tau} d\tau \right) \gamma'_k(u) du \\ &= \int_{a_k}^{b_k} \int_0^{\tau_n} x(\tau) \phi(\tau - t) e^{-\gamma_k(u)\tau} \gamma'_k(u) d\tau du. \end{aligned}$$

Como o integrando da integral iterada anterior é contínuo, vale o Teorema de Fubini e

$$\begin{aligned}
\int_{C_k} \mathbf{X}_n(t, s) ds &= \int_{a_k}^{b_k} \int_0^{\tau_n} x(\tau) \phi(\tau - t) e^{-\gamma_k(u)\tau} \gamma'_k(u) d\tau du \\
&= \int_0^{\tau_n} \int_{a_k}^{b_k} x(\tau) \phi(\tau - t) e^{-\gamma_k(u)\tau} \gamma'_k(u) du d\tau \\
&= \int_0^{\tau_n} x(\tau) \phi(\tau - t) \left( \int_{a_k}^{b_k} e^{-\gamma_k(u)\tau} \gamma'_k(u) du \right) d\tau \\
&= \int_0^{\tau_n} x(\tau) \phi(\tau - t) \left( \int_{C_k} e^{-s\tau} ds \right) d\tau.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{X}_n(t, s) ds &= \sum_{k=1}^m \int_{C_k} \mathbf{X}_n(t, s) ds \\
&= \sum_{k=1}^m \int_0^{\tau_n} x(\tau) \phi(\tau - t) \left( \int_{C_k} e^{-s\tau} ds \right) d\tau \\
&= \int_0^{\tau_n} x(\tau) \phi(\tau - t) \left( \sum_{k=1}^m \int_{C_k} e^{-s\tau} ds \right) d\tau \\
&= \int_0^{\tau_n} x(\tau) \phi(\tau - t) \left( \int_C e^{-s\tau} ds \right) d\tau.
\end{aligned}$$

Escrevendo,

$$e^{-s\tau} = f(\sigma, \omega) + jg(\sigma, \omega) = e^{-\sigma\tau} \cos(\omega\tau) - je^{-\sigma\tau} \sin(\omega\tau), \quad s = \sigma + j\omega \in \Omega_b,$$

decorre que, para cada  $\tau \in [0, \infty)$ ,  $f$  e  $g$  satisfazem as equações de Cauchy-Riemann, pois

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma}(\sigma, \omega) = -\tau e^{-\sigma\tau} \cos(\omega\tau) = \frac{\partial g}{\partial \omega}(\sigma, \omega)$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial \omega}(\sigma, \omega) = -\tau e^{-\sigma\tau} \sin(\omega\tau) = -\frac{\partial g}{\partial \sigma}(\sigma, \omega).$$

Visto que, para cada  $\tau \in [0, \infty)$ , a função  $s \in \Omega_b \mapsto e^{-s\tau}$  é analítica na região aberta e simplesmente conexa  $\Omega_b$ , resulta do Teorema de Cauchy-Goursat [1] que

$$\int_C e^{-s\tau} ds = 0$$

e, portanto,

$$\int_C \mathbf{X}_n(t, s) ds = 0.$$

Devido à convergência uniforme, dado  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ , existe um inteiro positivo  $N$  tal que se  $n > N$ , então

$$|\mathbf{X}_n(t, s) - \mathbf{X}(t, s)| < \frac{\varepsilon}{L}, \quad \forall (t, s) \in [0, \infty) \times \Omega_b,$$

com  $L$  o comprimento da curva  $C$ .

Assim, sendo

$$I = \left| \sum_{k=1}^m \int_{a_k}^{b_k} \mathbf{X}_n(t, \gamma_k(u)) \gamma'_k(u) du - \sum_{k=1}^m \int_{a_k}^{b_k} \mathbf{X}(t, \gamma_k(u)) \gamma'_k(u) du \right|,$$

então

$$\begin{aligned} I &= \left| \sum_{k=1}^m \int_{a_k}^{b_k} (\mathbf{X}_n(t, \gamma_k(u)) - \mathbf{X}(t, \gamma_k(u))) \gamma'_k(u) du \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^m \int_{a_k}^{b_k} |\mathbf{X}_n(t, \gamma_k(u)) - \mathbf{X}(t, \gamma_k(u))| |\gamma'_k(u)| du \\ &< \frac{\varepsilon}{L} \sum_{k=1}^m \int_{a_k}^{b_k} |\gamma'_k(u)| du = \varepsilon, \end{aligned}$$

sempre que  $n > N$ . Isto mostra que

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C \mathbf{X}_n(t, s) ds = \int_C \mathbf{X}(t, s) ds.$$

Do item **a**,  $\mathbf{X}$  é contínua em  $\Omega_b$  e, como  $C$  é qualquer curva fechada e suave por partes em  $\mathbb{C}$ , pelo Teorema de Morera [1], resulta que  $\mathbf{X}$  é analítica em  $\Omega_b$ , com respeito à variável  $s$ . ■

Na realidade, as derivadas parciais de ordem  $1 \leq p \leq k$  da função  $\mathbf{X}$ , com respeito à variável  $t$ , existem e também são contínuas.

**Teorema 5.2.2.** *Sejam  $x \in E^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  e  $\phi$  uma função satisfazendo as hipóteses **E1**, **E2**, **E3** e **E4**. Então, existe a tal que para algum número real  $b > a$ , a função  $\mathbf{X}$ , dada em (5.22), possui derivadas parciais de ordem  $p \in \{1, \dots, k\}$  contínuas em  $[0, \infty) \times \Omega_b$  e*

$$\frac{\partial^p \mathbf{X}}{\partial t^p}(t, s) = (-1)^p \int_0^\infty x(\tau) \phi^{(p)}(\tau - t) e^{-s\tau} d\tau, \quad (t, s) \in [0, \infty) \times \Omega_b.$$

**Demonstração.** Pelo Teorema 5.2.1, o resultado é obviamente verdadeiro para  $p = 1$ . Para  $1 < p \leq k$ , basta seguir os mesmos passos da demonstração do item **b** do Teorema 5.2.1, pois, como dito anteriormente, o essencial é que a função  $\phi^{(p)}$  seja uniformemente contínua e limitada em  $\mathbb{R}$  o que é garantido pelo Lema 5.2.1. ■

Considere o conjunto  $U([0, \infty) \times \Omega, \mathbb{C})$  de todas as funções  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t, s)$  com domínio  $[0, \infty) \times \Omega_{b_{\mathbf{X}}}$ , sendo  $b_{\mathbf{X}}$  um número real e  $\Omega_{b_{\mathbf{X}}} = \{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) > b_{\mathbf{X}}\}$ . Neste conjunto, pode-se definir as seguintes operações de adição e multiplicação por escalar:

**O1.** Se  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in U([0, \infty) \times \Omega, \mathbb{C})$ , então a função adição  $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$  é definida por

$$(\mathbf{X} + \mathbf{Y})(t, s) = \mathbf{X}(t, s) + \mathbf{Y}(t, s), \quad \forall t \in [0, \infty) \text{ e } \forall s \in \Omega_{b_{\mathbf{X}}} \cap \Omega_{b_{\mathbf{Y}}};$$

**O2.** Se  $\mathbf{X} \in U([0, \infty) \times \Omega, \mathbb{C})$  e  $\alpha \in \mathbb{C}$ , então a função multiplicação por escalar  $\alpha\mathbf{X}$  é definida por

$$(\alpha\mathbf{X})(t, s) = \alpha\mathbf{X}(t, s), \quad \forall t \in [0, \infty) \text{ e } \forall s \in \Omega_{b_{\mathbf{X}}}.$$

Com estas operações, obtém-se um espaço vetorial complexo denotado também por  $U([0, \infty) \times \Omega, \mathbb{C})$ .

A fim de se evitar os mesmos problemas discutidos sobre a linearidade da transformada de Laplace, é necessário introduzir a seguinte relação de equivalência em  $U([0, \infty) \times \Omega, \mathbb{C})$ :

$$\mathbf{X} \sim \mathbf{Y} \Leftrightarrow \mathbf{X}(t, s) = \mathbf{Y}(t, s),$$

para todo  $(t, s)$  em algum conjunto  $\Omega_{b_{\mathbf{X}\mathbf{Y}}}$ .

Com esta relação, é possível definir um operador de  $E^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  no espaço quociente  $U([0, \infty) \times \Omega, \mathbb{C}) / \sim$ , a saber

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : E^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}) &\longrightarrow U([0, \infty) \times \Omega, \mathbb{C}) / \sim \\ x &\longmapsto \mathcal{T}(x) = \mathbf{X}, \end{aligned} \tag{5.27}$$

com  $\mathbf{X}$  tal como em (5.22). Este operador é chamado aqui de transformada generalizada de Laplace e, claramente, é linear. A injetividade deste operador é estudada nos dois próximos resultados de uma maneira próxima a uma versão do Teorema 3.4.1 envolvendo continuidade.

**Lema 5.2.3.** Se  $w : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua em  $[0, 1]$  e

$$\int_0^1 u^{q-1} w(u) \, du = 0, \quad q = 1, 2, \dots, \quad (5.28)$$

então  $w(u) = 0$ , para todo  $u \in [0, 1]$ .

**Demonstração.** Como a função  $w$  é contínua em  $[0, 1]$ , existe um número real positivo  $K$  tal que  $|w(u)| \leq K$ , para todo  $u \in [0, 1]$ . Pelo Teorema de Stone-Weierstrass [20], dado  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ , existe um polinômio  $p$ , com coeficientes reais, tal que

$$\|w - p\| = \sup_{u \in [0, 1]} |w(u) - p(u)| < \frac{\varepsilon}{K}.$$

Logo,  $|w(u) - p(u)| < \varepsilon/K$ , para todo  $u \in [0, 1]$  e

$$|w(u)^2 - p(u)w(u)| = |w(u)(w(u) - p(u))| \leq |w(u)| |w(u) - p(u)| < \varepsilon, \quad \forall u \in [0, 1],$$

ou seja,

$$p(u)w(u) - \varepsilon < w(u)^2 < p(u)w(u) + \varepsilon, \quad \forall u \in [0, 1].$$

Integrando as desigualdades anteriores, na variável  $u$ , em  $[0, 1]$  e empregando (5.28), obtém-se

$$-\varepsilon = \int_0^1 p(u)w(u) \, du - \varepsilon < \int_0^1 w(u)^2 \, du < \int_0^1 p(u)w(u) \, du + \varepsilon = \varepsilon,$$

isto é,

$$\left| \int_0^1 w(u)^2 \, du \right| < \varepsilon.$$

Visto que  $w(u)^2 \geq 0$ , para todo  $u \in [0, 1]$ , e  $\varepsilon > 0$  é arbitrário, o resultado está provado. ■

**Teorema 5.2.3.** Se  $x \in E^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  e  $\phi$  é uma função satisfazendo as hipóteses **E1**, **E2**, **E3** e **E4**, então o operador linear (5.27) é injetor.

**Demonstração.** Sejam  $x, y \in E^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  tais que  $\mathbf{X}(t, s) = \mathbf{Y}(t, s)$ , para todo  $(t, s) \in [0, \infty) \times \Omega_b$ , com  $\mathbf{X} = \mathcal{T}(x)$  e  $\mathbf{Y} = \mathcal{T}(y)$ . Sendo  $z = x - y$ , então

$$\int_0^\infty z(\tau)\phi(\tau - t)e^{-s\tau} d\tau = 0, \quad \forall (t, s) \in [0, \infty) \times \Omega_b.$$

Em particular, para  $t = 0$  e  $s = \alpha + q$ , com  $\alpha \in \mathbb{R}$  fixado,  $\alpha > b$ , e  $q = 1, 2, \dots$ , segue que

$$\int_0^\infty z(\tau)\phi(\tau)e^{-(\alpha+q)\tau} d\tau = \int_0^\infty z(\tau)\phi(\tau)e^{-\alpha\tau}e^{-q\tau} d\tau. \quad (5.29)$$

A função  $\zeta : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$\zeta(\tau) = \int_0^\tau z(v)\phi(v)e^{-\alpha v} dv, \quad (5.30)$$

possui as seguintes propriedades:

- i.** Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,  $\zeta$  possui derivada primeira contínua em  $[0, \infty)$  (considerando a derivada lateral direita em  $\tau = 0$ ), pois o integrando é uma função contínua em  $[0, \infty)$ ;
- ii.**  $\zeta(0) = 0$  e  $\zeta(\tau) \rightarrow \mathbf{Z}(0, \alpha) \in \mathbb{R}$  quando  $\tau \rightarrow \infty$ , com  $\mathbf{Z} = \mathcal{T}(z)$ ;
- iii.** Para  $q = 1, 2, \dots$ ,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-q\tau}\zeta(\tau) = 0,$$

já que, por **i** e **ii**,  $\zeta$  é limitada em  $[0, \infty)$ . Tal prova é semelhante àquela dada no item **a** do Lema 5.2.1.

Integrando (5.29) por partes, obtém-se

$$\begin{aligned} \int_0^\infty z(\tau)\phi(\tau)e^{-\alpha\tau}e^{-q\tau} d\tau &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left( [e^{-q\tau}\zeta(\tau)]_0^r + q \int_0^r e^{-q\tau}\zeta(\tau) d\tau \right) \\ &= q \int_0^\infty e^{-q\tau}\zeta(\tau) d\tau = 0. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis  $u = e^{-\tau}$ ,  $\tau \in [0, \infty)$ , o resultado anterior é reescrito como

$$0 = \int_0^\infty e^{-q\tau}\zeta(\tau) d\tau = \int_0^1 u^{q-1}\zeta(-\ln(u)) du,$$

para  $q = 1, 2, \dots$ . Note que, por **ii**, quando  $u \rightarrow 0^+$ ,  $\zeta(-\ln(u)) \rightarrow \mathbf{Z}(0, \alpha) \in \mathbb{R}$  e quando  $u = 1$ ,  $\zeta(0) = 0$ . Logo, pelo Lema 5.2.3,  $\zeta(\tau) = 0$ , para todo  $\tau \in [0, \infty)$ . Derivando (5.30), segue que  $z(\tau) = 0$ , para todo  $\tau \in [0, \infty)$ , pois  $\phi$  e  $e^{-\alpha\tau}$  nunca se anulam em  $[0, \infty)$ . ■

Conforme o próximo teorema, a transformada de Laplace de uma função  $x \in E^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  pode ser obtida como o limite da transformada generalizada de Laplace da mesma função.

**Teorema 5.2.4.** *Se  $x \in E^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $\mathbf{X} = \mathcal{T}(x)$  e  $\mathbf{X}^* = \mathcal{L}(x)$ , então*

$$\mathbf{X}^*(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{X}(t, s), \quad (5.31)$$

para cada  $s \in \Omega_b$ .

**Demonstração.** A partir de **E1**, **E2**, **E3** e **E4**, a função  $\phi^* : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\phi^*(\tau, t) = 1 - \phi(\tau - t),$$

satisfaz:

**G1.**  $\phi^* \in C^k(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ,  $k \geq 1$  ou  $k = \infty$ ;

**G2.**  $0 \leq \phi^*(\tau, t) \leq 1$ , para todo  $(\tau, t) \in \mathbb{R}^2$ ;

**G3.**  $\phi^*(\tau, t) = 0$ , se  $\tau \leq t$ .

Se  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é qualquer sequência real tal que  $t_n \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ , então dado  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ , existe um inteiro positivo  $N$  tal que

$$\frac{Me^{-(b-a)t_n}}{b-a} < \varepsilon,$$

sempre que  $n > N$ .

Fixando um inteiro  $m > N$ , se  $x \in E^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,

$$\mathbf{X}(t, s) = \int_0^\infty x(\tau)\phi(\tau - t)e^{-s\tau} d\tau, \quad (t, s) \in [0, \infty) \times \Omega_b$$

e

$$\mathbf{X}^*(s) = \int_0^\infty x(\tau)e^{-s\tau} d\tau, \quad s \in \Omega_b,$$

então

$$\begin{aligned} |\mathbf{X}^*(s) - \mathbf{X}(t_m, s)| &= \left| \int_0^\infty x(\tau)\phi^*(\tau, t_m)e^{-s\tau} d\tau \right| \\ &\leq \int_0^\infty |x(\tau)e^{-\sigma\tau}| \phi^*(\tau, t_m) d\tau \\ &\leq M \int_0^\infty e^{-(\sigma-a)\tau} \phi^*(\tau, t_m) d\tau \\ &\leq M \int_0^{t_m} e^{-(\sigma-a)\tau} \phi^*(\tau, t_m) d\tau + M \int_{t_m}^\infty e^{-(\sigma-a)\tau} \phi^*(\tau, t_m) d\tau \\ &\leq M \int_{t_m}^\infty e^{-(\sigma-a)\tau} d\tau = \frac{Me^{-(\sigma-a)t_m}}{\sigma-a} < \frac{Me^{-(b-a)t_m}}{b-a} < \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Observe que a injetividade do operador linear  $\mathcal{T}$  decorre facilmente do Teorema 5.2.4. De fato, se  $x, y \in E^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  e  $\mathbf{X}(t, s) = \mathbf{Y}(t, s)$ , para todo  $(t, s) \in [0, \infty) \times \Omega_b$ , então

$$0 = \lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{X}(t, s) - \mathbf{Y}(t, s)) = \mathbf{X}^*(s) - \mathbf{Y}^*(s), \quad \forall s \in \Omega_b$$

e a versão contínua do Teorema de Lerch (Teorema 3.4.1) garante que  $x(\tau) = y(\tau)$ , para todo  $\tau \in \mathbb{R}$ .

Os Teoremas 5.2.3 e 5.2.4 permitem definir a transformada inversa generalizada de Laplace por

$$\mathcal{T}^{-1} : R([0, \infty) \times \Omega) \longrightarrow E^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$\mathbf{X} \quad \longmapsto \mathcal{T}^{-1}(\mathbf{X}) = \mathcal{L}^{-1}(\mathbf{X}^*) = x,$$

com a função  $\mathbf{X}^*$  dada em (5.31) e  $R([0, \infty) \times \Omega)$  a imagem de  $E^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  pelo operador linear  $\mathcal{T}$ . Recorde que, aplicando o Teorema dos Resíduos, obtém-se  $x = \mathcal{T}^{-1}(\mathbf{X}) = \mathcal{L}^{-1}(\mathbf{X}^*)$ , com

$$x(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < 0, \\ \sum_{p \in P} \text{Res}(e^{s\tau} \mathbf{X}^*(s)), & \tau \geq 0, \end{cases}$$

com  $\text{Res}$  denotando os resíduos e  $P$  o conjunto de pólos da função  $\mathbf{X}^*$ . Se  $p \in P$  é um pólo de ordem  $m \in \{1, 2, \dots\}$ , isto é, repete  $m$  vezes, então

$$\text{Res} (e^{s\tau} \mathbf{X}^*(s))|_{s=p} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{s \rightarrow p} \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} ((s-p)^m e^{s\tau} \mathbf{X}^*(s)),$$

com a derivada de ordem 0 sendo a identidade.

A propriedade derivativa da transformada generalizada de Laplace é apresentada a seguir.

**Teorema 5.2.5.** *Se  $x \in E^k(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  e  $\mathbf{X} = \mathcal{T}(x)$ , então*

$$\mathcal{T}(x') = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + s\mathbf{X} - x(0).$$

**Demonstração.** Se  $x \in E^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , segue de **F3** que a derivada primeira  $x'$  é contínua e de ordem exponencial em  $[0, \infty)$  e, portanto, existe  $\mathbf{W} = \mathcal{T}(x')$ . Pelo item **b** do Teorema 5.2.1 e integrando por partes, segue que

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(t, s) &= \int_0^\infty x'(\tau) \phi(\tau - t) e^{-s\tau} d\tau \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left( [x(\tau) \phi(\tau - t) e^{-s\tau}]_0^r - \int_0^r x(\tau) (\phi(\tau - t) e^{-s\tau})' d\tau \right) \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left( [x(\tau) \phi(\tau - t) e^{-s\tau}]_0^r - \int_0^r x(\tau) (\phi'(\tau - t) e^{-s\tau} - s\phi(\tau - t) e^{-s\tau}) d\tau \right) \\ &= -\phi(-t)x(0) - \int_0^\infty x(\tau) \phi'(\tau - t) e^{-s\tau} d\tau + s \int_0^\infty x(\tau) \phi(\tau - t) e^{-s\tau} d\tau \\ &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(t, s) + s\mathbf{X}(t, s) - x(0), \quad (t, s) \in [0, \infty) \times \Omega_b, \end{aligned}$$

pois, por **E2**,  $\phi(-t) = 1$ , para todo  $t \geq 0$ . ■

O Teorema 5.2.6 generaliza o resultado anterior.

**Teorema 5.2.6.** *Se  $x \in E^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  e  $\mathbf{X} = \mathcal{T}(x)$ , então*

$$\mathcal{T}(x^{(m)}) = \left( \frac{\partial}{\partial t} + s \right)^m \mathbf{X} - \sum_{l=0}^{m-1} s^{m-l-1} x^{(l)},$$

sendo  $x^{(m)}$  a derivada de ordem  $m \in \{1, \dots, k\}$  de  $x$ , com respeito à variável  $t$ , e

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + s\right)^m = \sum_{l=0}^m \frac{m!}{l!(m-l)!} s^l \frac{\partial^{m-l}}{\partial t^{m-l}},$$

com  $l \leq m$  um número inteiro e as derivadas, parciais ou ordinárias, de ordem 0, com respeito à variável  $t$ , sendo identidades.

**Demonstração.** A prova é feita por indução em  $m$  de modo análogo ao que foi feito na prova do Teorema 5.1.6. ■

O item **c** do Teorema 5.2.1 permite concluir que se  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é tal que  $y(\tau) = \tau^q x(\tau)$ , com  $x \in E^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  e  $q = 0, 1, 2, \dots$ , então  $\mathcal{T}(y) = \mathbf{Y}$ , sendo

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(t, s) &= \int_0^\infty y(\tau) \phi(\tau - t) e^{-s\tau} d\tau \\ &= \int_0^\infty \tau^q x(\tau) \phi(\tau - t) e^{-s\tau} d\tau \\ &= (-1)^q \frac{\partial^q \mathbf{X}}{\partial s^q}(t, s), \quad \forall (t, s) \in [0, \infty) \times \Omega_b. \end{aligned}$$

Para finalizar esta seção, considere a função  $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , sendo

$$z(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < 0, \\ e^{-\tau}, & \tau \geq 0. \end{cases}$$

É claro que  $z \in E^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  e, escolhendo  $\phi(u) = \varphi(u/\lambda)$ ,  $u \in \mathbb{R}$ , com  $\lambda = 1$ ,  $\varphi$  como em (5.18) e  $\rho(u) = 2u^3 - 3u^2 + 1$ ,  $u \in (0, 1)$ , segue que

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(t, s) &= \int_0^\infty z(\tau) \phi(\tau - t) e^{-s\tau} d\tau \\ &= e^{-st} \int_{-t}^\infty z(u+t) \phi(u) e^{-su} du \\ &= e^{-st} e^{-t} \int_{-t}^\infty e^{-u} \phi(u) e^{-su} du \\ &= e^{-st} e^{-t} \left( \int_{-t}^0 e^{-u} \phi(u) e^{-su} du + \int_0^1 e^{-u} \phi(u) e^{-su} du + \int_1^\infty e^{-u} \phi(u) e^{-su} du \right) \\ &= e^{-st} e^{-t} \left( \int_{-t}^0 e^{-u} e^{-su} du + \int_0^1 e^{-u} \rho(u) e^{-su} du \right) \\ &= \frac{e^{(-s-1)(t+1)} \left( (s+1)^3 e^{(s+1)(t+1)} - 6e^{s+1}(s-1) - 6(s+3) \right)}{(s+1)^4}, \quad (t, s) \in [0, \infty) \times \Omega_{-1}. \end{aligned}$$

Observe que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{Z}(t, s) = \mathbf{Z}^*(s) = \frac{1}{s+1}, \quad s \in \Omega_{-1}.$$

### 5.2.1 Aplicação Básica do Operador Linear $\mathcal{T}$ na Teoria de Circuitos Elétricos

De acordo com a seção anterior, a transformada generalizada de Laplace também possui uma propriedade derivativa semelhante à dos fasores dinâmicos dados em [22] e [29]. Tal propriedade, apresentada no Teorema 5.2.5, é utilizada para obter o resultado a seguir.

**Teorema 5.2.7** (Equações dos Elementos Lineares Básicos). *Sejam  $v$  e  $i$  sinais de tensão e de corrente, respectivamente, nos elementos lineares básicos de um circuito elétrico. Suponha que as transformadas generalizadas de Laplace de  $v$  e  $i$  existam e sejam dadas por  $\mathbf{V} = V(t, s)$  e  $\mathbf{I} = I(t, s)$ , respectivamente. Então, as equações dos elementos lineares básicos podem ser reescritas, em termos das transformadas generalizadas de Laplace, como:*

i. *Resistor:  $\mathbf{V} = R\mathbf{I}$ ;*

ii. *Indutor:  $\mathbf{V} = L \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial t} + sL\mathbf{I} - Li(0)$ ;*

iii. *Capacitor:  $\mathbf{I} = C \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + sC\mathbf{V} - Cv(0)$ .*

Tal como na Seção 5.1.2, os modelos aqui obtidos são análogos aos modelos do Teorema 4.2.2. No entanto, há o acréscimo das condições iniciais e a classe de funções estudada é diferente. Portanto, assim como a transformada de Fourier de curto termo, a transformada generalizada de Laplace permite uma nova construção dos fasores dinâmicos e fornece uma abordagem para análise transitória de sistemas elétricos de potência, uma vez que trata-se de uma função variável no tempo.

## 5.3 Fasores Dinâmicos com Frequência Variável no Tempo

Do ponto de vista moderno, um fasor estático pode ser entendido através de um isomorfismo entre espaços vetoriais, conforme Seção 3.2. Seguindo esta linha, o principal objetivo aqui é apresentar um fasor dinâmico com a frequência variável no tempo que é dado por um operador linear entre espaços de Banach e possui propriedades semelhantes às dos fasores dinâmicos usualmente encontrados na literatura. Existe uma teoria semelhante no apêndice de [22], na qual os autores estudam os fasores dinâmicos com frequência variável no tempo novamente através da série de Fourier generalizada, mas o estudo detalhado aqui segue um caminho diferente. Além disso, são apresentadas as propriedades de uma aplicação  $\mathbb{R}$ -bilinear que modela a potência complexa em circuitos de corrente alternada no caso dos fasores estáticos.

Seja  $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{F})$  o espaço vetorial de todas as classes de equivalência de funções Lebesgue mensuráveis  $z$  satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}} |z(t)|^p dt < \infty,$$

com  $1 < p < \infty$  e  $\mathbb{F}$  sendo  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  (veja [21]). O espaço  $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{F})$  é de fato um espaço de Banach com a norma  $\|\cdot\|_p : L^p(\mathbb{R}, \mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\|z\|_p = \left( \int_{\mathbb{R}} |z(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Dado qualquer  $x \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , considere a função

$$\begin{aligned} \mathbf{X} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto \mathbf{X}(t) = (x(t) + j\mathcal{H}(x(t)))e^{-j\Omega(t)}, \end{aligned} \tag{5.32}$$

sendo  $\Omega \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  uma função fixada, chamada função frequência variável no tempo, e  $\mathcal{H} : L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  a transformada de Hilbert definida através do valor principal de Cauchy [27] como

$$\mathcal{H}(x(t)) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{|t - \tau| \geq \varepsilon} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau.$$

Note que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |\mathbf{X}(t)|^p dt &= \int_{\mathbb{R}} |(x(t) + j\mathcal{H}(x(t)))e^{-j\Omega t}|^p dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} |x(t) + j\mathcal{H}(x(t))|^p dt \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} 2^{p-1}(|x(t)|^p + |\mathcal{H}(x(t))|^p) dt \\
&= 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^p dt + 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{H}(x(t))|^p dt < \infty
\end{aligned} \tag{5.33}$$

e, portanto,  $\mathbf{X} \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . Assim, o seguinte operador está bem definido

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} : L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}) &\longrightarrow L^p(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \\
x &\longmapsto \mathcal{P}(x) = \mathbf{X},
\end{aligned} \tag{5.34}$$

sendo  $\mathbf{X}$ , dado em (5.32), chamado de fador dinâmico com frequência variável no tempo.

O teorema a seguir mostra que (5.34) é um operador linear e injetor. Além disso, das propriedades da transformada de Hilbert, segue que (5.34) também é um operador contínuo.

**Teorema 5.3.1.** *O operador  $\mathcal{P}$  dado em (5.34) é linear e injetor. Além disso,  $\mathcal{P}$  é limitado e, portanto, é um operador contínuo.*

**Demonstração.** Se  $\alpha$  é um número real qualquer e  $x_1, x_2 \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , então  $\mathcal{P}(x_1) = \mathbf{X}_1$ ,  $\mathcal{P}(x_2) = \mathbf{X}_2$  e  $\mathcal{P}(x_1 + \alpha x_2) = \mathbf{X}$ , sendo

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}(t) &= ((x_1 + \alpha x_2)(t) + j\mathcal{H}((x_1 + \alpha x_2)(t)))e^{-j\Omega t} \\
&= \mathbf{X}_1(t) + \alpha \mathbf{X}_2(t), \quad t \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

devido à linearidade da transformada de Hilbert. Logo,  $\mathcal{P}(x_1 + \alpha x_2) = \mathcal{P}(x_1) + \alpha \mathcal{P}(x_2)$ .

Agora suponha que  $\mathcal{P}(x_1) = \mathcal{P}(x_2)$ . Então,  $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2$ , o que implica que  $x_1 = x_2$ , pois  $\mathcal{H}^2 = -\mathcal{I}$ , sendo  $\mathcal{I} : L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  o operador identidade [27]. Assim,  $\mathcal{P}$  é injetor.

A transformada de Hilbert é um operador limitado [27] e, portanto, existe um número real positivo  $M_p$  tal que

$$\|\mathcal{H}(x)\|_p \leq M_p \|x\|_p, \quad \forall x \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

com  $M_p$  dependendo apenas de  $1 < p < \infty$ .

Para qualquer  $x \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , tem-se  $\|\mathcal{P}(x)\|_p = \|\mathbf{X}\|_p$  e, de (5.33), resulta que

$$\|\mathbf{X}\|_p^p \leq 2^p(\|x\|_p^p + \|\mathcal{H}(x)\|_p^p) \leq 2^p(1 + M_p^p)\|x\|_p^p.$$

Portanto,  $\|\mathcal{P}(x)\|_p \leq C_p\|x\|_p$ , sendo  $C_p = 2(1 + M_p^p)^{1/p}$ . ■

Como consequência do teorema anterior, segue que o operador  $\mathcal{P}$ , quando restrito à sua imagem

$$R(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \{\mathcal{P}(x) \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : x \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})\},$$

que também é um espaço vetorial, é invertível e

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{-1} : R(\mathbb{R}, \mathbb{C}) &\longrightarrow L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ \mathbf{X} &\longmapsto \mathcal{P}^{-1}(\mathbf{X}) = x, \end{aligned} \tag{5.35}$$

sendo

$$\begin{aligned} x : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto x(t) = \operatorname{Re}(\mathbf{X}(t)e^{j\Omega(t)}). \end{aligned}$$

Além disso, como  $\mathbf{X}$  é uma função complexa, é possível escrevê-la em sua forma polar  $\mathbf{X}(t) = X(t)e^{j\phi(t)}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Logo, qualquer  $x \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  pode ser representado como

$$x(t) = X(t) \cos(\Omega(t) + \phi(t)), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{5.36}$$

Note que não é necessário assumir, a priori, (5.36) como em [29], pois esta expressão é uma consequência natural da teoria. Em outras palavras, obtém-se aqui um teorema de representação, ou seja, qualquer função  $x \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  pode ser escrita como (5.36).

O operador  $\mathcal{P}^{-1}$  dado em (5.35) também é contínuo. De fato, se  $\mathbf{X} \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , então  $\|\mathcal{P}^{-1}(\mathbf{X})\|_p = \|x\|_p$  e

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^p dt &= \int_{\mathbb{R}} |\operatorname{Re}(\mathbf{X}(t)e^{j\Omega(t)})|^p dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} |\operatorname{Re}(\mathbf{X}(t)\cos(\Omega(t)) + j\mathbf{X}(t)\sin(\Omega(t)))|^p dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} |\operatorname{Re}(\mathbf{X}(t)\cos(\Omega(t)) - \operatorname{Im}(\mathbf{X}(t))\sin(\Omega(t)))|^p dt \\
&\leq 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}} |\operatorname{Re}(\mathbf{X}(t))|^p dt + 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}} |\operatorname{Im}(\mathbf{X}(t))|^p dt \\
&\leq 2^p \int_{\mathbb{R}} |\mathbf{X}(t)|^p dt,
\end{aligned}$$

isto é,  $\|\mathcal{P}^{-1}(\mathbf{X})\|_p = \|x\|_p \leq 2\|\mathbf{X}\|_p$ , para todo  $\mathbf{X} \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . Como consequência, a imagem  $R(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  é um espaço de Banach.

O próximo teorema apresenta a propriedade da derivada de (5.34).

**Teorema 5.3.2.** *Se  $x \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $x$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$ , com respeito à variável  $t$ , e  $x' \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , então*

$$\mathcal{P}(x') = \frac{d}{dt}\mathcal{P}(x) + j\Omega'\mathcal{P}(x),$$

com  $\Omega \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

**Demonstração.** Derivando  $\mathbf{X} = \mathcal{P}(x)$  com respeito à variável  $t$ , obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathbf{X}(t) &= \frac{d}{dt}((x(t) + j\mathcal{H}(x(t)))e^{-j\Omega(t)}) \\
&= (x'(t) + j\mathcal{H}(x'(t)))e^{-j\Omega(t)} - j\Omega'(t)(x(t) + j\mathcal{H}(x(t)))e^{-j\Omega(t)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

e, assim, segue o resultado desejado, tendo em conta que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}(x(t)) = \mathcal{H}(x'(t)).$$

■

Utilizando o teorema anterior, equações diferenciais lineares com coeficientes constantes são transformadas em equações diferenciais lineares complexas admitindo soluções no sentido de Carathéodory (ver apêndice C de [24]) desde que as funções estejam em  $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

O fasor dinâmico usual é obtido quando  $\Omega(t) = \omega t$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ , sendo  $\omega$  um número real positivo. Além disso, a teoria apresentada nesta seção é mais geral do que a apresentada em [29], pois considera menos hipóteses, embora não permita trabalhar com funções constantes e periódicas.

Na Seção 3.2, o sinal de potência complexa foi definido através da aplicação (3.14). Nesta seção, há uma contrapartida para esta definição. Pode-se associar a seguinte aplicação  $\mathbb{R}$ -bilinear Hermitiana simétrica ao operador (5.34)

$$\begin{aligned} \mathcal{B} : L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}) &\longrightarrow L^{p/2}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \\ (x, y) &\longmapsto \mathcal{B}(x, y) = \mathcal{P}(x)\overline{\mathcal{P}(y)}, \end{aligned} \quad (5.37)$$

sendo  $2 \leq p < \infty$ . Usando a notação  $\mathbf{B} = \mathcal{B}(x, y)$ , segue que

$$\begin{aligned} \mathbf{B} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto \mathbf{B}(t) = \mathbf{X}(t)\overline{\mathbf{Y}(t)}. \end{aligned}$$

Como  $2ab \leq a^2 + b^2$ , para quaisquer números reais  $a$  e  $b$ , tomando  $a = |\mathbf{X}(t)|^{p/2}$  e  $b = |\overline{\mathbf{Y}(t)}|^{p/2}$ , então

$$2 \int_{\mathbb{R}} |\mathbf{X}(t)\overline{\mathbf{Y}(t)}|^{p/2} dt \leq \int_{\mathbb{R}} |\mathbf{X}(t)|^p dt + \int_{\mathbb{R}} |\overline{\mathbf{Y}(t)}|^p dt < \infty. \quad (5.38)$$

Assim, a aplicação (5.37) está bem definida.

**Teorema 5.3.3.** *A aplicação  $\mathbb{R}$ -bilinear (5.37) é contínua em  $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , para  $2 \leq p < \infty$ .*

**Demonstração.** Sejam  $u = x/\|x\|_p$  e  $v = y/\|y\|_p$  vetores unitários, com  $(x, y) \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  e  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Segue de (5.38) e do Teorema 5.3.1 que

$$\|\mathcal{B}(u, v)\|_{p/2}^{p/2} \leq \frac{1}{2} (\|\mathbf{U}\|_p^p + \|\overline{\mathbf{V}}\|_p^p) \leq \frac{C_p^p}{2} (\|u\|_p^p + \|v\|_p^p) = C_p^p,$$

sendo  $C_p$  é a mesma constante real usada na demonstração do Teorema 5.3.1. Definindo  $D_p = C_p^2$ , resulta da bilinearidade de  $\mathcal{B}$  que

$$\|\mathcal{B}(x, y)\|_{p/2} \leq D_p \|x\|_p \|y\|_p, \quad \forall (x, y) \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad (5.39)$$

já que a desigualdade anterior é trivialmente satisfeita quando  $x = 0$  ou  $y = 0$ .

Agora, considere a seguinte norma  $\|(\cdot, \cdot)\|_p : L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\|(x, y)\|_p = \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Se  $\{(x_n, y_n)\}$  é uma sequência no espaço de Banach  $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  que converge para  $(r, s)$ , então existe um número real positivo  $A_p$  tal que  $\|(x_n, y_n)\|_p < A_p$ , para  $n = 1, 2, \dots$ . Além disso, dado  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ , existe um número inteiro positivo  $N_p$  tal que para todo  $n > N_p$ ,

$$\|(x_n, y_n) - (r, s)\|_p = \|x_n - r\|_p + \|y_n - s\|_p < \frac{\varepsilon}{A_p D_p}.$$

Então, de (5.39), obtém-se

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}(x_n, y_n) - \mathcal{B}(r, s)\|_{p/2} &\leq \|\mathcal{B}(x_n, y_n) - \mathcal{B}(r, y_n)\|_{p/2} + \|\mathcal{B}(r, y_n) - \mathcal{B}(r, s)\|_{p/2} \\ &= \|\mathcal{B}(x_n - r, y_n)\|_{p/2} + \|\mathcal{B}(r, y_n - s)\|_{p/2} \\ &\leq D_p (\|x_n - r\|_p \|y_n\|_p + \|r\|_p \|y_n - s\|_p) \\ &< D_p A_p (\|x_n - r\|_p + \|y_n - s\|_p) < \varepsilon, \end{aligned}$$

para todo  $n > N_p$ , o que mostra a continuidade de  $\mathcal{B}$  em  $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . ■

### 5.3.1 Aplicação em Teoria de Circuitos Elétricos

Nesta seção, são estudadas as implicações da frequência variável no tempo em uma função que na Teoria Fasorial Clássica coincide com o modelo de potência complexa. Para concluir, mostra-se um exemplo do resultado obtido em (5.36).

Sejam  $v = v(t)$  o modelo para a queda de tensão nos terminais de um elemento linear básico e  $i = i(t)$  o modelo para a corrente através desse elemento. Sabe-se do Capítulo 2 que

$$v = Ri, \quad v = L \frac{di}{dt}, \quad i = C \frac{dv}{dt}$$

são os respectivos modelos lineares para um resistor de resistência  $R$ , um indutor de indutância  $L$  e um capacitor de capacitância  $C$ . Se  $v, i, v', i' \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , segue da expressão (5.34) e do Teorema 5.3.2 que

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I}, \quad \mathbf{V} = L\frac{d\mathbf{I}}{dt} + jL\Omega'\mathbf{I}, \quad \mathbf{I} = C\frac{d\mathbf{V}}{dt} + jC\Omega'\mathbf{V},$$

sendo  $\mathbf{V} = \mathcal{P}(v)$ ,  $\mathbf{I} = \mathcal{P}(i)$  e  $\Omega \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  uma função escolhida. Por exemplo, pode-se escolher  $\Omega(t) = \omega(t)t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , com  $\omega \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  podendo ser também uma função constante como no fasor dinâmico usual [29]. Outra possibilidade é

$$\Omega(t) = \omega t + \eta(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5.40)$$

com  $\eta \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  uma função perturbação e  $\omega$  um número real positivo.

A aplicação  $\mathbb{R}$ -bilinear (5.37) pode ser escrita como  $\mathbf{B} = \mathcal{B}(v, i)$ , com o par  $(v, i)$  nesta ordem, isto é,  $\mathbf{B}(t) = \mathbf{V}(t)\bar{\mathbf{I}}(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Então,  $\mathbf{B} = R\mathbf{I}\bar{\mathbf{I}} = RI^2$  para o resistor. Para o indutor,

$$\mathbf{B} = L\frac{d\mathbf{I}}{dt}\bar{\mathbf{I}} + jL\Omega'\mathbf{I}\bar{\mathbf{I}} \quad (5.41)$$

e para o capacitor

$$\mathbf{B} = C\frac{d\bar{\mathbf{V}}}{dt}\mathbf{V} - jC\Omega'\bar{\mathbf{V}}\mathbf{V}. \quad (5.42)$$

Como  $\mathbf{I}(t) = I(t)e^{j\phi(t)}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , segue da equação (5.41) que

$$\mathbf{B}(t) = LI(t)I'(t) + jLI(t)^2(\phi'(t) + \Omega'(t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Observe que  $\Omega$  não tem influência na parte imaginária de  $\mathbf{B}$  na equação anterior, pois

$$\phi(t) = \arg(\mathbf{I}(t)), \quad t \in \mathbb{R}$$

e

$$\phi'(t) + \Omega'(t) = \frac{i(t)\mathcal{H}(i'(t)) - i'(t)\mathcal{H}(i(t))}{I(t)^2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

sendo  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mapsto \arg(z)$  a função argumento. O mesmo vale para (5.42). Assim, considerando (5.37), é mais fácil trabalhar com a expressão (5.40), quando  $\eta$  é a função identicamente nula.

Para concluir esta seção, mostra-se uma aplicação do teorema de representação obtido em (5.36). Considere  $i$  dada por

$$i(t) = \frac{1}{1+t^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Efetuada-se alguns cálculos, segue que

$$\int_{\mathbb{R}} |i(t)|^p dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+t^2)^p} dt = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(p - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(p)},$$

sendo  $\Gamma$  a função gama e  $1 < p < \infty$ . Portanto,  $i \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

Pela transformada de Hilbert

$$\mathcal{H}(i(t)) = \frac{t}{1+t^2}, \quad t \in \mathbb{R}$$

e se  $\Omega \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  é a função dada por

$$\Omega(t) = 2\pi 60t + \eta(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

então  $\mathcal{P}(i) = \mathbf{I}$ , com

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(t) &= \left( \frac{1}{1+t^2} + j \frac{t}{1+t^2} \right) e^{-j(2\pi 60t + \eta(t))}, \\ &= \operatorname{Re}(\mathbf{I}(t)) + j \operatorname{Im}(\mathbf{I}(t)), \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\mathbf{I}(t)) &= \frac{\cos(2\pi 60t + \eta(t)) + t \operatorname{sen}(2\pi 60t + \eta(t))}{1+t^2}, \\ \operatorname{Im}(\mathbf{I}(t)) &= \frac{t \cos(2\pi 60t + \eta(t)) - \operatorname{sen}(2\pi 60t + \eta(t))}{1+t^2}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

O valor absoluto  $I$  e o ângulo  $\phi$  são dados por

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ \phi(t) &= \arg(\mathbf{I}(t)), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Então,

$$i(t) = \frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cos(2\pi 60t + \eta(t) + \phi(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

## 5.4 Comparação entre as Teorias sobre Fasores Dinâmicos e Potenciais Aplicações

Nesta seção, destacam-se algumas comparações entre as teorias sobre fasores dinâmicos apresentadas nos Capítulos 4 e 5, bem como potenciais aplicações do Capítulo 5.

O Capítulo 4 foi dedicado ao estudo de dois artigos sobre fasores dinâmicos conhecidos na literatura, a saber, [22] e [29]. Em [22], apresentado brevemente na Seção 4.1, os fasores dinâmicos são representados por coeficientes de uma série de Fourier generalizada. Em [29], cuja revisão foi apresentada na Seção 4.2, o fasor dinâmico é dado por um operador linear entre determinados espaços vetoriais que possuem propriedades envolvendo a transformada de Fourier.

Além da construção do fasor, os dois artigos citados apresentam outra diferença importante. Em [22], para cada função  $x$ , associa-se os coeficientes de uma série de Fourier generalizada e cada um desses coeficientes é chamado de fasor dinâmico. Por outro lado, em [29], para cada função  $x$  satisfazendo certas hipóteses associa-se uma única função complexa chamada de fasor dinâmico. As principais contribuições da tese, apresentadas nas seções anteriores deste capítulo, seguiram a linha de operadores lineares, isto é, do artigo [29].

Nas Seções 5.1 e 5.2, os fasores dinâmicos foram construídos a partir da transformada de Fourier de curto termo e da transformada generalizada de Laplace, respectivamente. Mostrou-se que os modelos dos elementos básicos de circuitos elétricos, escritos em termos destas transformadas, são análogos aos modelos obtidos com a notação fasorial dada em [29]. No entanto, as classes de funções estudadas em ambas as seções são mais amplas e não dependem de certas propriedades da transformada de Fourier, ao contrário de [29]. Além disso, a transformada generalizada de Laplace oferece a vantagem de trabalhar com as condições iniciais dos modelos.

Há também uma diferença entre os valores da frequência adotados em [29] e na Seção 5.1. No primeiro, a teoria é construída utilizando  $\omega_c$ , chamada de frequência de corte, o

que exclui altas frequências na análise de fenômenos dinâmicos. Já na segunda, a teoria é válida para qualquer valor de frequência.

Na Seção 5.3, apresentou-se uma versão modificada do fasor dinâmico com a frequência variável no tempo. Embora haja uma teoria semelhante no artigo [22], por comparação, fica claro que a teoria construída nesta seção é muito diferente. Novamente, o fasor é dado por um operador linear entre espaços vetoriais apropriados, mas que não dependem de propriedades envolvendo a transformada de Fourier. Neste caso, os modelos dos elementos básicos de circuitos elétricos também são preservados, mas a variação de frequência é um fator relevante em certas aplicações teóricas que deve ser levado em conta.

Deve-se enfatizar que a Seção 5.3 é mais teórica, sendo de pouca aplicação prática, pois funções dos espaços  $L^p$  não são comuns em modelos usualmente estudados em **Teoria de Circuitos Elétricos** e em sistemas elétricos de potência e, portanto, dificilmente podem ser utilizadas em algoritmos implementados na PMU, por exemplo. Outro estudo que não permite muitas aplicações é o artigo [29], pois, para aplicá-lo os modelos devem ser ideais, ou seja, dos tipos passa-baixa e passa-banda, conforme as definições da Seção 4.2, o que não ocorre na prática.

Nas Seções 5.1, 5.2 e 5.3 há a garantia de unicidade dos fasores dinâmicos, como em [29]. Assim, os modelos podem ser escritos na notação fasorial. Além disso, cada teoria pode ser utilizada em um determinado problema da **Teoria de Circuitos Elétricos** ou dos sistemas elétricos de potência. A análise de transitórios e a modelagem utilizando fasores dinâmicos são potenciais aplicações. Neste sentido, a vantagem é que qualquer modelo construído a partir dos fasores dinâmicos conhecidos na literatura pode ser obtido também com as teorias das Seções 5.1, 5.2 e 5.3, desde que as hipóteses sejam satisfeitas.

Como mencionado no início deste trabalho, o dispositivo PMU é amplamente utilizado para estimar e monitorar as variáveis de um sistema elétrico de potência. Neste sentido, outra aplicação importante é a obtenção de novos dispositivos PMUs baseados nas teorias das Seções 5.1 e 5.2. Isso torna o processo de análise dinâmica e controle de sistemas mais preciso e seguro, uma vez que os fasores possuem boas propriedades e contemplam várias classes de funções.

Por fim, as contribuições, apresentadas nas Seções 5.1, 5.2 e 5.3, ampliam o conjunto de teorias existentes sobre os fasores dinâmicos e podem abranger várias aplicações.

# Conclusões

No início deste trabalho, alguns conceitos da **Teoria de Circuitos Elétricos** foram recordados, dentre eles, os conceitos de potência ativa, reativa e complexa. As funções que modelam tais potências, também chamadas de sinais de potência, foram construídas a partir de sinais senoidais e mostrou-se que, sob certas hipóteses, os sinais de potência ativa e complexa são aplicações diretas de alguns resultados da Álgebra Linear.

No estudo dos fasores estáticos, apresentou-se uma versão moderna da **Teoria Fasorial Clássica**. Além de sua importância histórica, esta abordagem mostrou que os fasores, obtidos através de funções senoidais, também podem ser estudados através da **Teoria dos Operadores Lineares**, da mesma forma que a extensão fasorial para funções não senoidais construída a partir das transformadas de Fourier e de Laplace.

Dando sequência ao trabalho, as demais e principais contribuições seguiram a linha de operadores lineares e transformadas. Mostrou-se que os fasores dinâmicos podem ser construídos a partir de duas transformadas integrais, a transformada de Fourier de curto termo e a transformada generalizada de Laplace. Tais transformadas, vistas como operadores lineares entre espaços vetoriais adequados, preservam as principais propriedades dos fasores dinâmicos conhecidos na literatura. Em especial, há uma propriedade derivativa útil que generaliza a mesma propriedade dos fasores estáticos e transforma modelos de elementos lineares básicos de circuitos elétricos, como resistores, capacitores e indutores em equações diferenciais lineares complexas. Além disso, a transformada generalizada de Laplace oferece a vantagem de trabalhar com as condições iniciais.

Por último, apresentou-se uma teoria na qual o fasor dinâmico é dado por um operador linear entre espaços de Banach e possui a frequência variável no tempo. Mostrou-se

que a variação de frequência não influencia as partes real e imaginária do modelo de potência complexa e, neste caso, é melhor trabalhar com o fasor dinâmico usual com frequência constante positiva. Esta teoria segue uma construção mais próxima de [29], mas sem as hipóteses envolvendo a transformada de Fourier e, embora tenha ampliado a classe de funções que admitem um fasor dinâmico, não aborda uma ampla classe de funções comumente usada em aplicações, tais como as funções periódicas, uma vez que lida essencialmente com espaços de Banach em  $\mathbb{R}$ .

É importante enfatizar que a distribuição de rede moderna com alta penetração de fontes renováveis intermitentes impõe um desafio adicional ao sistema de energia em operações em tempo real e, neste caso, a variação de frequência é uma questão relevante. Assim, a teoria sobre fasores dinâmicos com frequência variável, apresentada na Seção 5.3, pode ser útil no estudo de tal situação.

# Trabalhos Futuros

## O Problema da Potência Complexa

Há algumas questões, em especial sobre a potência complexa, que não foram discutidas neste trabalho, mas podem ser estudadas futuramente.

Na Seção 3.2, o fasor estático foi apresentado, sob um ponto de vista moderno, através do operador linear e bijetor denotado por  $\mathcal{P}$ . Em seguida, os conceitos de potência complexa, potência ativa e potência reativa foram redefinidos a partir da aplicação bilinear (3.14). A partir disso, surgem os seguintes questionamentos:

- Q1.** É possível inferir qual a relação entre  $\mathbf{S}$  e  $p$  através do operador linear  $\mathcal{P}$ , sendo  $p$  o sinal de potência instantânea tal como em (2.6)?
- Q2.** Existe alguma teoria de fasores estáticos na qual há um sinal  $s = s(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , tal que  $\mathbf{S} = \mathcal{K}(s)$ ? E se sim, qual seria a operação  $\mathcal{K}$  que leva tal sinal  $s$  em sua representação complexa  $\mathbf{S}$ ? Qual seria a relação entre o sinal  $s$  e o sinal de potência instantânea  $p$ ?
- Q3.** É possível obter uma generalização para a aplicação bilinear (3.14) no contexto dos fasores dinâmicos? Qual é a justificativa, física ou matemática, para a expressão  $\mathbf{S}$  na Definição 4.2.1?

No contexto da transformada de Fourier no espaço de Schwartz, há dois conceitos importantes, a convolução e a correlação, bem como seus respectivos teoremas, apresentados a seguir.

**Definição 1.** A convolução entre duas funções integráveis  $x, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , denotada por  $x * y$ , é definida como

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (\text{e1})$$

desde que a integral imprópria seja convergente.

A convolução possui a propriedade comutativa. De fato, fazendo  $u = t - \tau$  em (e1), segue que

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - u)y(u) du = (y * x)(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Teorema 1** (Teorema da Convolução). *Sejam  $x, y \in S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , cujas transformadas de Fourier são  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\omega)$  e  $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(\omega)$ , respectivamente. Então,  $x * y \in S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  e*

$$\mathcal{F}((x * y)(t)) = \mathbf{X}(\omega)\mathbf{Y}(\omega).$$

**Definição 2.** A correlação entre duas funções integráveis  $x, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , denotada por  $x \star y$ , é definida como

$$(x \star y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau)\overline{y(\tau)} d\tau, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (\text{e2})$$

desde que a integral imprópria seja convergente.

Considerando as mudanças de variável  $\tau = -u$  na integral (e2), e sendo  $\overline{y(-u)} = z(u)$ , para todo  $u \in \mathbb{R}$ , segue que

$$\begin{aligned} (x \star y)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - u)\overline{y(-u)} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - u)z(u) du \\ &= (x * z)(t). \end{aligned} \quad (\text{e3})$$

Assim, a correlação pode ser escrita como uma convolução. Este resultado será muito útil na demonstração do próximo teorema.

**Teorema 2** (Teorema da Correlação). *Sejam  $x, y \in S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , cujas transformadas de Fourier são  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\omega)$  e  $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(\omega)$ , respectivamente. Então,  $x \star y \in S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  e*

$$\mathcal{F}((x \star y)(t)) = \mathbf{X}(\omega)\overline{\mathbf{Y}(\omega)}.$$

**Demonstração.** Considerando a relação (e3) e o Teorema da Convolução (Teorema 1), segue diretamente que  $x \star y \in S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . Além disso, denotando a transformada de Fourier da função  $z$  por  $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}(\omega)$ , obtém-se

$$\begin{aligned} (x \star y)(t) &= (x \star z)(t) \\ &= \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{X}(\omega)\mathbf{Z}(\omega)) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{X}(\omega)\mathbf{Z}(\omega)e^{j\omega t} d\omega \\ &= \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{X}(\omega)\overline{\mathbf{Y}(\omega)}), \end{aligned}$$

lembrando que

$$\mathbf{Z}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{y(-u)}e^{-j\omega u} du = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} y(-u)e^{j\omega u} du} = \overline{\mathbf{Y}(\omega)}.$$

Portanto,

$$\mathcal{F}(x \star y) = \mathbf{X}(\omega)\overline{\mathbf{Y}(\omega)}.$$

■

Com base no último resultado, acredita-se que o Teorema da Correlação pode responder parcialmente a questão **Q2** (ou ser apenas uma curiosidade matemática, não tendo relação com o problema físico). De fato, utilizando tal teorema e preservando a notação, é possível generalizar a aplicação bilinear (3.14) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : S(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \times S(\mathbb{R}, \mathbb{C}) &\longrightarrow S(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \\ (x, y) &\longmapsto \mathcal{S}(x, y) = \mathcal{F}(x \star y), \end{aligned}$$

com os sinais de potência complexa, ativa e reativa definidos tais como na Teoria Fasorial Clássica. Portanto, a transformada de Fourier da correlação parece fornecer uma nova expressão para o cálculo das potências.

Há também alguns comentários relevantes sobre a questão **Q3**. O leitor pode observar que os sinais de potência complexa apresentados em [29] e em (5.37) são essencialmente o mesmo objeto, com exceção dos espaços vetoriais envolvidos. Além disso, estes sinais

foram definidos em teorias sobre fasores dinâmicos, sendo uma delas conhecida na literatura e outra uma contribuição desta tese. Em ambas as teorias, mostrou-se que os fasores dinâmicos generalizam as propriedades dos fasores estáticos. Este fato motivou a questão **Q3** e também as demais questões: “A potência complexa deve ter uma formulação diferente no contexto dos fasores dinâmicos?” “Existe alguma teoria física ou matemática que fundamenta essa discussão?”

## Injetividade do Operador Linear $\mathcal{N}$

Na Seção 5.1, uma dificuldade é provar que o operador linear (5.10) é injetor. Para isto, é necessário supor que  $g$  e  $h$  possuem, além de **A1** e **A2**, uma propriedade adicional:

**A3.**  $g$  e  $h$  são funções não identicamente nulas.

Assim, para a teoria ficar completa, restaria demonstrar o seguinte teorema.

**Teorema 3.** *Se  $g$  e  $h$  em (5.1) satisfazem **A1**, **A2** e **A3**, então o operador linear (5.10) é injetor.*

Uma vez provada a injetividade, segue que o operador inverso é

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^{-1} : R^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) &\longrightarrow S(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \\ F &\longmapsto \mathcal{N}^{-1}(F) = f, \end{aligned}$$

com  $f$  tal que  $\mathcal{N}(f) = F$  e

$$R^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) = \{F \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) : F = \mathcal{N}(f), f \in S(\mathbb{R}, \mathbb{C})\}$$

a imagem do operador linear  $\mathcal{N}$ , o qual é também um subespaço de  $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ .

# Fasores Dinâmicos Via Transformada de Fourier de Curto Termo Modificada

Considere agora a função  $h$  definida por

$$h(\omega, \tau) = e^{-j\Psi(\omega)\tau}, \quad (\omega, \tau) \in \mathbb{R}^2,$$

com  $\Psi \in B^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , sendo  $B^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  o conjunto das funções de classe  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  que são limitadas e possuem derivadas de quaisquer ordens limitadas em  $\mathbb{R}$ .

Assim:

**D1.**  $h \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$  e  $|h(\omega, \tau)| = |e^{-j\Psi(\omega)\tau}| = 1$ , para todo  $(\omega, \tau) \in \mathbb{R}^2$ ;

**D2.** Como

$$\frac{\partial h}{\partial \omega}(\omega, \tau) = -j\tau\Psi'(\omega)h(\omega, \tau), \quad \forall(\omega, \tau) \in \mathbb{R}^2 \quad (\text{e4})$$

e  $\Psi \in B^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , existe um polinômio  $r_1$  de grau 1 com coeficientes reais não negativos tal que

$$\left| \frac{\partial h}{\partial \omega}(\omega, \tau) \right| \leq r_1(|\tau|), \quad \forall(\omega, \tau) \in \mathbb{R}^2. \quad (\text{e5})$$

A partir de (e4) e pela Regra Geral de Leibniz para a derivada do produto de funções [17], obtém-se

$$\frac{\partial^k h}{\partial \omega^k}(\omega, \tau) = -j\tau \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(k-1)!}{l!(k-l-1)!} \Psi^{(l+1)}(\omega) \frac{\partial^{k-l-1} h}{\partial \omega^{k-l-1}}(\omega, \tau), \quad \forall(\omega, \tau) \in \mathbb{R}^2. \quad (\text{e6})$$

Assim, recursivamente, a partir de (e5) e (e6), existe um polinômio  $r_k$  de grau  $k$ , e com coeficientes reais não negativos, tal que

$$\left| \frac{\partial^k h}{\partial \omega^k}(\omega, \tau) \right| \leq r_k(|\tau|), \quad \forall(\omega, \tau) \in \mathbb{R}^2$$

e para  $k = 1, 2, \dots$

Fixada uma função não identicamente nula  $\psi \in S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , decorre das hipóteses **D1** e **D2** e do Teorema 5.1.1, que se  $x \in S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , então a função  $\mathbf{X}$ , dada por

$$\mathbf{X}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \psi(\tau - t) e^{-j\Psi(\omega)\tau} d\tau, \quad (t, \omega) \in \mathbb{R}^2, \quad (\text{e7})$$

é contínua em  $\mathbb{R}^2$ .

Empregando o Teorema 5.1.2, e a partir de (5.10), o operador linear

$$\begin{aligned} \mathcal{J} : S(\mathbb{R}, \mathbb{C}) &\longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) \\ x &\longmapsto \mathcal{J}(x) = \mathbf{X}, \end{aligned} \quad (\text{e8})$$

com  $\mathbf{X}$  como em (e7) é chamado aqui de transformada de Fourier de curto termo modificada.

A dificuldade maior aqui é mostrar a injetividade do operador  $\mathcal{J}$  dado em (e8). Conforme discutido anteriormente, uma possibilidade, seria mostrar que o operador linear (5.10) é injetor. Contudo, caso isto seja verdade, denotando por  $R^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$  a imagem de  $S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  pelo operador linear (e8), resulta que o operador inverso é

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^{-1} : R^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) &\longrightarrow S(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \\ \mathbf{X} &\longmapsto \mathcal{J}^{-1}(\mathbf{X}) = x, \end{aligned}$$

o qual também é linear.

Com o operador linear (e8) demonstra-se uma versão análoga do Teorema 5.1.6.

**Teorema 4.** *Se  $x \in S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  e  $\mathbf{X} = \mathcal{J}(x)$ , então*

$$\mathcal{J}(x^{(m)}) = \left( \frac{\partial}{\partial t} + j\Psi(\omega) \right)^m \mathbf{X},$$

sendo  $x^{(m)}$  a derivada de ordem  $m \in \{1, 2, \dots\}$  de  $x$ , com respeito à variável  $t$ , e

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + j\Psi(\omega) \right)^m = \sum_{l=0}^m \frac{m!}{l!(m-l)!} (j\Psi(\omega))^l \frac{\partial^{m-l}}{\partial t^{m-l}},$$

com  $l \leq m$  um número inteiro e a derivada parcial de ordem 0, com respeito à variável  $t$ , sendo a identidade.

**Demonstração.** A prova segue os mesmos passos das demonstrações dos Teoremas 5.1.5 e 5.1.6 e, portanto, será omitida. ■

Segue do teorema anterior que, quando  $m = 1$ ,

$$\mathcal{J}(x') = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + j\Psi(\omega)\mathbf{X},$$

com  $\mathbf{X} = \mathcal{J}(x)$  e  $x \in S(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . Logo, vale um resultado semelhante ao Teorema 5.1.7 apenas trocando  $\omega$  por  $\Psi(\omega)$ .

Pensando em aplicações, a versão modificada, que leva em conta as variações de frequência, pode ser muito útil, uma vez que a configuração atual dos sistemas elétricos é complexa e as variações de frequência não podem ser desprezadas.

## Fasores Dinâmicos Via Transformadas Wavelets

Além das questões levantadas anteriormente, há uma discussão sobre a transformada de Fourier de curto termo que também merece atenção. Na Seção 5.1.1, tal transformada foi utilizada na construção do fasor dinâmico. No entanto, uma busca simples na literatura, mostra que, em muitas aplicações, as análises com a transformada de Fourier de curto termo podem ser substituídas por análises com transformadas *wavelets*. Isso porque, esta última contorna a principal limitação da transformada de Fourier de curto termo, o fato da função janela apresentar um tamanho fixo. Assim, em processamento de imagem ou análise de sinais, por exemplo, as transformadas *wavelets* são mais indicadas. Neste sentido, a seguinte questão pode ser explorada futuramente:

- Q4.** É possível construir o fasor dinâmico com todas as suas propriedades, tal como feito na Seção 5.1.1, utilizando as transformadas *wavelets*? Tal construção, responde algumas questões relacionadas com o problema das potências?

# Referências Bibliográficas

- [1] L. V. AHLFORS, *Complex Analysis: An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*, 3<sup>rd</sup> Edition, McGraw-Hill, (1979).
- [2] A. E. A. ARAÚJO, D. A. V. TONIDANDEL, *Steinmetz and the Concept of Phasor: A Forgotten Story*, Journal of Control, Automation and Electrical Systems, **24** (2013), 388-395.
- [3] J. BLANCHARD, *The history of electrical resonance*, Bell System Technical Journal, **20** (1941), 415-433.
- [4] R. L. BOYLESTAD, *Introdução à Análise de Circuitos*, 12<sup>a</sup> Edição, Pearson Education, São Paulo, (2012).
- [5] R. N. BRACEWELL, *The Fourier Transform and Its Applications*, Stanford University, (2000).
- [6] L. O. CHUA, *Memristor - The Missing Circuit Element*, IEEE Transactions on Circuit Theory, **18** (1971), 507-519.
- [7] L. O. CHUA, C. A. DESOER, E. S. KUH, *Linear and Nonlinear Circuits*, University of California, Berkeley, (1987).
- [8] M. DARYABAK, S. FILIZADEH, J. JATSKEVICH, A. DAVOUDI, M. SAEEDIFARD, V. K. SOOD, J. A. MARTINEZ, D. ALIPRANTIS, J. CANO, A. MEHRIZI-SANI, *Modeling of LCC-HVDC Systems Using Dynamic Phasors*, IEEE Transactions on Power Delivery, **29** (2014), 1989–1998.

- [9] P. DE RUA, Ö. C. SAKINCI, J. BEERTEN, *Comparative Study of Dynamic Phasor and Harmonic State-Space Modeling for Small-Signal Stability Analysis*, Electric Power Systems Research, **189** (2020), 106626.
- [10] A. DERVIŠKADIĆ , G. FRIGO, M. PAOLONE, *Beyond Phasors: Modeling of Power System Signals Using the Hilbert Transform*, IEEE Transactions on Power Systems, **35** (2020), 2971–2980.
- [11] D. G. FIGUEIREDO, *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, IMPA, **5** (2018).
- [12] S. GOMES JR., L. P. ALMEIDA, F. L. LIRIO, T. MASSERAN, L. O. DANIEL, T. AMARAL, T. B. J. ROCHA, R. G. AZEVEDO, *O Novo Programa Computacional ANAHVDC para Simulação dos Múltiplos Elos HVDC do SIN Considerando Transitórios Eletromecânicos e Eletromagnéticos*, XXV SNPTEE - Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, Belo Horizonte (2019).
- [13] O. HEAVISIDE, *On operators in physical mathematics. Part I*, Proceedings of the Royal Society of London, **52** (1893), 504-529.
- [14] M. W. HIRSCH, S. SMALE, R. L. DEVANEY, *Differential Equations, Dynamical Systems, and An Introduction to Chaos*, 3<sup>rd</sup> Edition, Academic Press, (2012).
- [15] V. IÓRIO, *EDP, Um Curso de Graduação*, Coleção Matemática Universitária, **2** (2007).
- [16] D. JELTSEMA, G. KAISER, *Active and Reactive Energy Balance Equations in Active and Reactive Time*, 10th International Conference on Compatibility, Power Electronics and Power Engineering, (2016), 21-26.
- [17] D. L. KREIDER, R. G. KULLER, D. R. OSTBERG, F. W. PERKINS, *An Introduction to Linear Analysis*, Addison-Wesley, (1966).
- [18] Software MATHEMATICA 12.0: <https://www.wolfram.com/mathematica/>.

- [19] J. C. MAXWELL, *On Mr. Grove's "Experiment in magneto-electric induction"*, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, Series 4, **35** (1868), 389-392.
- [20] W. RUDIN, *Principles of Mathematical Analysis*, 3<sup>rd</sup> Edition, McGraw-Hill, (1976).
- [21] W. RUDIN, *Real and Complex Analysis*, 3<sup>rd</sup> Edition, McGraw-Hill, (1987).
- [22] S. R. SANDERS, J. M. NOWOROLSKI, X. Z. LIU, G. C. VERGHESE, *Generalized averaging method for power conversion circuits*, IEEE Transactions on Power Electronics, **6** (1991), 251-259.
- [23] J. L. SCHIFF, *The Laplace Transform: Theory and Applications*, Springer, USA, (1999).
- [24] E. D. SONTAG, *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems*, 2<sup>nd</sup> Edition, Springer, (1998).
- [25] D. B. STRUKOV, G. S. SNIDER, D. R. STEWART, R. S. WILLIAMS, *The missing memristor found*, Nature, **453** (2008), 80-83.
- [26] G. S. TEODORO, D. S. OLIVEIRA, E. CAPELAS DE OLIVEIRA, *Sobre Derivadas Fracionárias*, Revista Brasileira de Ensino de Física, **40** (2018), e2037 1–26.
- [27] E. C. TITCHMARSH, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, Oxford Press, (1948).
- [28] S. VEJDAN, M. SANAYE-PASAND, O. P. MALIK, *Accurate Dynamic Phasor Estimation Based on the Signal Model Under Off-Nominal Frequency and Oscillations*, IEEE Transactions on Smart Grid, **8** (2017), 708–719.
- [29] V. VENKATASUBRAMANIAN, *Tools for dynamic analysis of the general large power system using time-varying phasors*, International Journal of Electrical Power & Energy Systems, **16** (1994), 365-376.

- [30] W. WASYLKIWSKYJ, *Signals and Transforms in Linear Systems Analysis*, Springer, The George Washington University, USA, (2013).