

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

**Baltazar Jonas Ribeiro Morais**

**Quantização de um campo escalar  
em um espaço-tempo não trivial**

Itajubá, Dezembro de 2007

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

# Quantização de um campo escalar em um espaço-tempo não trivial

**Baltazar Jonas Ribeiro Morais**

Dissertação de mestrado submetida ao programa de Pós graduação em Física e Matemática Aplicada - FMA, da Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

**Orientador: Prof. Dr. Vitorio A. De Lorenci**

Itaubá, Dezembro de 2007

Certa vez um famoso neuro cirurgião perguntou a um cosmonauta: você que viaja por esse universo imenso acaso já alguma vez chegou a ver Deus? E o cosmonauta respondeu: De certo que não. Mas você que opera tantos cérebros inteligentes já alguma vez viu um pensamento?

-Anônimo.

Para Mariza, Elaine, Dário,  
Mariana, vovó Luiza, meus tios  
e os avôs (Baltazar e João Galo)

. *In Memoriam*

# Agradecimentos

Agradeço ao bom Deus por ter me dado a vida. À minha mãe, por ter estado presente quando dei meus primeiros passinhos e por florear o meu caminho com a sua agradável presença. Agradeço também a Elaine, companheira que sempre suavizou os momentos difíceis, aos meus irmãos Dário e Mariana, de quem tanto gosto, à minha avó Luiza, que desde da meninice me acompanha me abençoa e aos meus tios, nos quais tantas vezes me espelhei para esculpir ideologias maiores.

O meu muito obrigado ao distinto professor Vitorio Alberto De Lorenci, com o qual tive o prazer de aprender não só sobre física, mas também, nas sutis entrelinhas da convivência, sobre a própria vida.

Agradeço também aos professores: Vladimir Pershin, Fabrício Barone, Edisom Moreira, José A. B. Segundo, Renato Klippert e Newton F. Filho.

Não posso me esquecer de todos os funcionários da Universidade que por vezes mesmo que anonimamente deixavam tudo limpo e em seus devidos lugares para que o fluxo da vida continuasse dia após dia. Para não incorrer no erro de esquecer alguém me isento de citar nomes.

Dos amigos ficam as boas lembranças das noites de estudos e das agradáveis conversas que amenizavam as dificuldades e traziam mesmo que momentaneamente o esquecimento da dureza da vida. Em particular gostaria de agradecer aos amigos Keeyne Borges, pelas madrugadas que ficávamos conjecturando teorias que não resistiam ao rigor da mínima análise, mas era tão bom fazê-lo! Gostaria de agradecer também a Guilherme Goulart, pelo companheirismo, Adhimar Flávio, João Paulo e Gabriel (Barretos). Obrigado por se fazerem presentes, cada um ao seu modo, de maneira tão agradável nesse tempo em que estivemos próximos.

E seria ingrato da minha parte não agradecer também aos inúmeros vizinhos que nunca reclamaram do barulho que fazia o meu violino (tomara que eles não tenham se enjoado de Mozart) quando eu já não aguentava mais olhar para os livros.

# Resumo

As cordas cósmicas tem recebido grande atenção por parte da comunidade científica nos últimos anos. Elas são objetos que surgem como solução das equações de Einstein da teoria da relatividade geral, e cuja altíssima densidade de massa provoca efeitos gravitacionais pouco comuns como auto interação, curvas do tipo-tempo fechadas dentre outros. Algumas dessas cordas possuem a característica de girar, o que matematicamente está representado pela presença do parâmetro de rotação  $S$  no elemento de linha correspondente. Em (3+1) dimensões, isso é o que denotamos por corda cósmica girante. Uma outra característica relevante que aparece no contexto das cordas cósmicas girantes são as curvas do tipo-tempo fechadas CTC's, que em princípio poderiam operacionalizar possíveis viagens no tempo (pelo menos classicamente).

Neste trabalho examinamos a quantização de um campo escalar no espaço-tempo de um círculo girante, que corresponde a versão (1+1) dimensional de uma corda cósmica girante. Observou-se que o parâmetro de rotação  $S$  deve obedecer a certas restrições para que a teoria quântica de campos possa ser aplicada. Calculamos também o propagador de Hadamard e o propagador de Feynman, através dos quais derivamos o valor esperado no vácuo para o tensor momento-energia e o desvio quadrático médio  $\langle \Psi^2 \rangle$ . O que observamos entretanto é que essas duas últimas quantidades divergem para um dado valor crítico do parâmetro  $S$ . Este fato está de acordo com a proteção cronológica, que diz que a natureza conspira contra a volta ao passado, em outras palavras, estamos diante da impossibilidade de quebra da estrutura causal do espaço-tempo.

# Abstract

Cosmic strings have recently received much attention by the scientific community. These objects arise as solutions of Einstein's equations and their high mass density causes unusual gravitational effects such as self interaction, closed timelike curves, among others. Some of these cosmic strings spin, which is mathematically represented by a rotation parameter  $S$  in the correspondent line element. In  $(3 + 1)$  we call them spinning cosmic strings. Another feature that arises in spinning cosmic strings context are closed timelike curves CTC, which make possible time travel (at least classically).

In this work we investigate a scalar field quantization in the spacetime of a spinning circle, which is the  $(1+1)$  dimensional version of a the spinning cosmic string. it's worth noting that the rotation parameter  $S$  must obey some restrictions if we want to apply quantum field theory. We also calculate Hadamard's propagator and Feynman's propagator. Using these propagators, we find the expected value of the energy-momentum tensor and also the quantity  $\langle \Psi^2 \rangle$ . We can note however that vacuum fluctuations diverge for a critic value for the parameter  $S$ . This divergence agrees with chronology protection, wich states that nature conspires against time travel. In other words, maybe we are facing the impossibility of breaking spacetime causal structure.

# Índice

Resumo . . . . .	iv
Abstract . . . . .	v
Índice . . . . .	vi
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Quantização de um campo escalar no espaço-tempo de Minkowski</b>	<b>7</b>
2.1 Modos de frequência positiva e negativa . . . . .	8
2.2 Campo Escalar Livre . . . . .	9
2.3 Vamos perturbar o vácuo? . . . . .	16
2.4 O propagador livre . . . . .	18
2.5 O propagador de Feynman e o propagador de Hadamard . . . . .	22
2.5.1 Produto Ordenado Temporalmente . . . . .	24
<b>3 Quantização de um campo escalar no círculo girante: o propagador de Hadamard</b>	<b>26</b>
3.1 O Espaço-tempo globalmente hiperbólico e as curvas do tipo tempo fechadas (CTC's) . . . . .	26
3.2 Quantização . . . . .	30
3.3 O propagador de Hadamard $G^1(x, x')$ . . . . .	37
3.3.1 Renormalizando o propagador de Hadamard . . . . .	41
3.4 Tópicos de Teoria Quântica de Campos em espaços-tempos curvos . . . . .	43
<b>4 Quantização de um campo escalar no círculo girante: o propagador de Feynman</b>	<b>47</b>
4.1 Quantização . . . . .	47
4.2 O propagador de Feynman . . . . .	52



4.2.1	Renormalizando o propagador de Feynman . . . . .	58
<b>5</b>	<b>As Flutuações quânticas do vácuo</b>	<b>59</b>
5.1	$\langle \Psi^2 \rangle$ . . . . .	60
5.2	Valor esperado do tensor energia-momento . . . . .	61
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>69</b>
<b>A</b>	<b>Dedução da equação para o propagador de Feynman</b>	<b>71</b>
<b>B</b>	<b>Outra proposta de dedução para a equação (3.55)</b>	<b>74</b>
	<b>Referências</b>	<b>78</b>

# Lista de Figuras

1.1	Cone no espaço Euclidiano 3 dimensional . . . . .	3
2.1	Perturbações do vácuo em alguns pontos do espaço-tempo. . . . .	17
2.2	Representação dos polos que aparecem em $k_0 = \omega_k - i\epsilon$ e $k_0 = -\omega_k + i\epsilon$ . . . . .	19
2.3	Contorno correspondente aos polos apresentados na figura anterior. . . . .	20
2.4	Fechando o contorno no semiplano superior, note que nesse caso, $e^{-x_0 Im K_0} \rightarrow 0$ . . . . .	21
2.5	Fechando o contorno no semiplano inferior, note que nesse caso, $e^{x_0 Im K_0} \rightarrow 0$ . . . . .	21
3.1	Curva do tipo-tempo fechada, note que a curva do tipo-tempo começa e termina no ponto P, o que indica que ela se fecha, razão essa do nome CTC. . . . .	27
3.2	Representação da superfície de Cauchy num espaço-tempo (3+1) dimensional cortando as possíveis linhas temporais, lembre-se de que aqui o tempo representa um parâmetro. . . . .	28
3.3	Maneira de contornar os polos que conduz ao propagador de Hadamard. . . . .	38
5.1	gráfico de $\langle \Psi^2 \rangle$ , em função do parâmetro de rotação S. Note que essa quantidade pode assumir também valores negativos . . . . .	62
5.2	gráfico da componente $\langle T_{00} \rangle$ do tensor energia momentum, note que existe uma divergência quando $S \rightarrow \pm 1$ , o que explicita a proteção cronológica. . . . .	64
5.3	Comportamento da componente $\langle T_{11} \rangle$ do tensor energia momentum em função do parâmetro de rotação S, observe que quando $S \rightarrow \pm 1$ , a quantidade $\langle T_{11} \rangle$ diverge. . . . .	66
5.4	gráfico da componente $\langle T_{01} \rangle$ contra o parâmetro de rotação S. . . . .	67
5.5	gráfico das três componentes do tensor $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ contra o parâmetro de rotação S. . . . .	68

# Capítulo 1

## Introdução

Sabe-se que a teoria da Relatividade Geral proposta por Einstein em 1915 apresenta algumas soluções importantes, nas quais observa-se características como a possibilidade de volta ao passado. Dentre essas soluções, está a famosa solução de Gödel [1] que permite a existência de curvas do tipo-tempo fechadas, CTC's (do inglês closed timelike curves). Tais curvas são do tipo tempo, ou seja, estão dentro do cone de luz, mas se fecham num dado ponto do espaço-tempo. As CTC's estão relacionadas com o surgimento de máquinas do tempo [2]. Em Ref.[3] encontramos um trabalho defendendo a posição de que a natureza conjectura contra a volta ao passado.

Uma outra solução em que se manifestam as CTC's é aquela obtida devido à presença de uma corda cósmica. Tal objeto é um filamento extremamente fino e dotado de massa, estima-se que um único centímetro de seu comprimento pode pesar até 10 quatrilhões de toneladas, pouco mais que a massa de Himalaia (uma das luas de Júpiter), especula-se que as cordas cósmicas tenham sua origem num cenário de universo muito quente e denso [4]. Graças às suas extraordinárias densidades de massa, as cordas cósmicas provocam efeitos gravitacionais interessantes. Elas retiram do espaço-tempo de Minkowski uma fatia correspondente a  $8\pi G\mu$ , onde  $G$  é a constante da gravitação universal de Newton e  $\mu$  representa a massa por unidade de comprimento da corda. Dentre as cordas existem aquelas que possuem momento angular (vários mecanismos de indução de momento angular são discutidos em [5], [6]), e essas cordas são chamadas de cordas cósmicas girantes, as quais tem recebido grande atenção por parte da comunidade científica devido ao fato de estarem relacionadas com a violação da causalidade [2, 5, 7, 8, 9]. Os aspectos clássicos das cordas cósmicas também são estudados [2], [10], juntamente com os aspectos quânticos [11] e

também semiclássicos.

Dessa maneira qual seria então a forma do espaço-tempo gerado pela presença da corda cósmica? A resposta é: um cone! Ou seja, o espaço-tempo na ausência da corda e também de quaisquer outros corpos dotados de massa é simplesmente o espaço-tempo de Minkowski, no entanto na presença da corda, obtem-se o que chamamos de espaço-tempo cônico. Quando calculamos o tensor de curvatura  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  no cone obtemos que  $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ , exceto num dado ponto, onde existe uma singularidade. A Figura 1.1 mostra um cone imerso num espaço Euclidiano 3 dimensional, onde a singularidade mencionada se encontra na origem do sistema de coordenadas. O elemento de linha correspondente [12] é escrito como:

$$\begin{aligned} dl^2 &= g_{ij}dx^i dx^j \\ &= \left[ \delta_{ij} + \left( \alpha^{-2} - 1 \right) \frac{x^i x^j}{r^2} \right] dx^i dx^j \end{aligned} \quad (1.1)$$

no qual as coordenadas  $x^i$  ( $i = 1, 2$ ) vão desde  $-\infty$  até  $+\infty$ ,  $r \doteq \delta_{ij}x^i x^j$  e  $\alpha$  é um parâmetro positivo [13]. Note que de Eq. (1.1), quando  $\alpha = 1$ , o espaço Euclidiano é recuperado. Ressaltamos ainda que é possível escrever o elemento de linha representado em Eq. (1.1) usando coordenadas polares: ( $x^1 = r \cos \theta$ ,  $x^2 = r \sin \theta$ ), de maneira que  $dl^2 = \alpha^{-2}dr^2 + r^2d\theta^2$ . Mas nessa forma, a singularidade se encontra escondida, pois o ângulo polar  $\theta$  não está definido em  $r = 0$ .

Essa geometria cônica pode ser responsável por muitos efeitos interessantes, dentre eles as lentes gravitacionais sem distorção de imagem [14] e a produção de partículas devido à mudança no campo gravitacional durante a formação das cordas cósmicas [15], [16]. Em Ref.[17] estuda-se a produção de partículas devido à mudança no campo gravitacional, só que agora na situação de perda gradual no momento angular de uma corda cósmica girante.

Mencionaremos brevemente um outro importante efeito causado pelo espaço-tempo cônico, chamado de auto-força [4]. Imaginemos uma carga elétrica  $q$  imersa nesse espaço-tempo e centrada na origem do sistema de coordenadas. Essa carga gera um potencial, que denotaremos por  $\phi$  e também um campo elétrico, cujo valor calculamos através de  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ . Ao desenharmos as linhas de campo nesse espaço-tempo, observamos que as mesmas voltam à origem, que é o lugar de onde partiram, e portanto conclui-se que a carga  $q$  nesse espaço-tempo exerce uma força sobre si mesma, fato este que é responsável pelo

nome desse efeito. Efeitos de auto-interação gravitacional e eletrostática em um espaço-tempo de uma corda cósmica com deslocamento foram examinados mais recentemente [18]. Particularmente, foi mostrado que a presença de um deslocamento cósmico gera um potencial efetivo de auto interação que permite a existência de órbitas estáveis neste espaço-tempo.

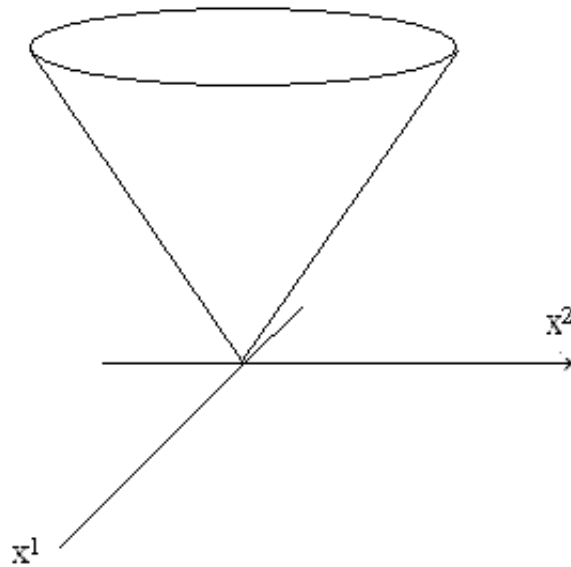


Figura 1.1: Cone no espaço Euclidiano 3 dimensional

Examinemos agora o aparecimento das CTC's no contexto da Teoria Quântica de Campos (T.Q.C.). Para isso definimos um espaço-tempo globalmente hiperbólico como aquele que pode ser foliado por superfícies de Cauchy globais, as quais devem ser atravessadas por curvas do tipo-tempo somente uma vez. Uma CTC é tal que  $ds^2 > 0$  e portanto, é possível que uma partícula material realize tal curva. Uma vez que a curva é fechada, ela retorna a um mesmo ponto do espaço-tempo. O que não quer dizer que apareçam problemas com respeito a violação das leis termodinâmicas para a partícula, uma vez que o tempo próprio da mesma continua sempre sua marcha para o futuro. Deve-se ressaltar que um espaço-tempo globalmente hiperbólico não possui CTC.

Assim como na parte correspondente do texto em que abordamos esse assunto, vamos começar com a solução de Kerr [13] das equações de Einstein em (2+1) dimensões, a qual tem o elemento de linha dado por:

$$ds^2 = (dt + S d\phi)^2 - dr^2 - \alpha^2 \rho^2 d\phi^2 \quad (1.2)$$

onde  $S$  representa o parâmetro de rotação e  $\alpha$  o parâmetro de disclinação. Em  $(3 + 1)$  dimensões, obtém-se o espaço-tempo exterior a uma corda cósmica girante, cujo elemento de linha é dado por

$$ds^2 = (dt + S d\phi)^2 - dr^2 - \alpha^2 \rho^2 d\phi^2 - d\xi^2. \quad (1.3)$$

Para que a invariância do boost de Lorentz ao longo do eixo de simetria fosse recuperada, os autores em Ref.[19], modificaram a geometria dada em Eq. (1.3), postulando um deslocamento cósmico, segundo o qual

$$ds^2 = (dt + S d\phi)^2 - d\rho^2 - \alpha^2 \rho^2 d\phi^2 - (d\xi + \kappa d\phi)^2, \quad (1.4)$$

onde  $\kappa$  representa o parâmetro associado ao deslocamento. Para uma revisão pedagógica sobre defeitos topológicos em meios materiais, ver Ref.[20].

O objetivo deste trabalho é examinar a quantização de um campo escalar no espaço-tempo de um círculo girante [21], [22], que corresponde a uma seção  $(\rho, \xi)$  constantes da métrica dada por Eq. (1.4). A métrica de um círculo girante é dada por

$$ds^2 = (dt + S d\phi)^2 - \alpha^2 \rho^2 d\phi^2. \quad (1.5)$$

Através de Eq. (1.5) podemos definir a coordenada tempo da seguinte maneira  $T = t + S \phi$ , que denotaremos por tempo helicoidal, e reescrevemos essa última equação na forma diagonal (consideraremos também que  $\alpha \rho \rightarrow \rho$ , dada a irrelevância de  $\alpha$  num modelo bi dimensional):

$$ds^2 = dT^2 - \rho^2 d\phi^2. \quad (1.6)$$

A simplicidade trazida por Eq. (1.6) pode nos levar a pensar que podemos usar o tempo helicoidal como um tempo global, e usá-lo para efetuar o processo de quantização [22]. Os autores em Ref.[23] mostraram entretanto que o tempo helicoidal é um tempo local, não podendo portanto ser usado na quantização de campos.

A mecânica quântica num cone girante (que é uma versão tri dimensional de uma corda cósmica girante) viola a unitariedade, ou seja,  $U^\dagger U \neq 1$ , onde  $U$  é o operador evolução

temporal, fato este que levou a uma conjectura na qual a segunda quantização deveria eliminar tais características indesejadas [24]. Todavia, recentemente foi mostrado que as flutuações quânticas do vácuo ao redor de uma corda cósmica girante divergem em todo o espaço-tempo [25]. No sentido de se obter uma compreensão mais detalhada do que vem a ser essas patologias acima mencionadas, consideramos neste trabalho um estudo sobre a quantização de um campo escalar dotado de massa  $M$  no background de uma versão (1+1) dimensional de uma corda cósmica girante, denotada por círculo girante. Este trabalho consiste em um estudo crítico dos resultados apresentados recentemente na literatura onde a quantização de um campo escalar com massa no espaço-tempo de um círculo girante foi realizada [22], [26]. No capítulo 2 encontra-se um resumo do processo de quantização de um campo escalar massivo no espaço-tempo de Minkowski, que chamamos de espaço-tempo trivial. Nesse caso, a definição do estado de vácuo é feita através da relação  $a(k)|0\rangle = 0$ , onde  $a(k)$  é o operador de destruição de partículas. Mas no espaço-tempo curvo a situação é bem diferente, uma vez que não é possível definirmos de maneira única um estado de vácuo [27]. Dentre os candidatos a ocuparem o “status” de estado de vácuo no espaço-tempo curvo está a quantidade  $\langle\Psi^2\rangle$ , onde  $\Psi$  é o campo escalar [28]. No capítulo 3, apresentamos uma explicação mais detalhada de tudo que foi dito acima com respeito ao surgimento das CTC’s e ao espaço-tempo globalmente hiperbólico. Ainda neste capítulo apresentamos o processo de quantização baseado nos modos normais de vibração e calculamos o propagador de Hadamard. Durante o processo de quantização observamos que não é possível trabalhar com a teoria quântica de campos em 2 dimensões para um campo escalar sem massa [21], devido ao aparecimento de divergências infravermelhas. No capítulo 4, repetimos o processo de quantização por um outro método, diferente do método apresentado no capítulo 2 e encontramos o propagador de Feynman. Uma vez que ambos os métodos de quantização são equivalentes, mostramos que existe uma relação de equivalência entre os dois propagadores mencionados acima. No capítulo 5 apresentamos o cálculo que nos leva ao valor esperado do tensor momento-energia e ao desvio quadrático médio  $\langle\Psi^2\rangle$ . Finalmente no capítulo 6 discutimos os resultados e apresentamos algumas perspectivas de trabalho sobre o tema aqui abordado.

A velocidade da luz no vácuo e a constante de Planck dividida por  $2\pi$ , são assumidas de forma a apresentarem os valores  $c = \hbar = 1$ , exceto nos casos onde estes símbolos aparecerem explicitamente indicados. Representamos por  $\eta_{\mu\nu}$ , a métrica do espaço-tempo de fundo, Minkowskiano, escrita em um sistema arbitrário de coordenadas. A representação

em um sistema de coordenadas cartesiano é denotada por  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ .



## Capítulo 2

# Quantização de um campo escalar no espaço-tempo de Minkowski

Este capítulo tem por objetivo principal apresentar uma revisão do processo de quantização de um campo escalar no contexto do espaço-tempo de Minkowski. Procuramos no decorrer do texto esclarecer os conceitos físicos e matemáticos envolvidos bem como realizar os cálculos.

Na seção (2.1) mostramos que a equação de Klein-Gordon vem de um princípio variacional e que as soluções dessa equação representam modos de frequência positiva e modos de frequência negativa. Mas conforme ficará mais claro no decorrer do texto, para que possamos discernir entre esses dois modos é preciso que o espaço-tempo possua um campo de Killing global do tipo tempo.

Na seção (2.2) encontra-se o processo de quantização propriamente dito. Deixamos claro nessa seção que o campo escalar é um operador que atua no espaço de Hilbert, o que torna necessário um esclarecimento do que vem a ser os operadores de criação e destruição de partículas.

Na seção seguinte, desenvolvemos um breve estudo das perturbações do vácuo. Para tal, é preciso criar partículas num dado ponto do espaço-tempo e em seguida num outro ponto destruí-las. Mas essa arbitrariedade de criar e destruir partículas se dá pela perturbação do sistema por meio de uma força externa que denotaremos por  $J(a)$ . Em seguida escrevemos a amplitude de transição correspondente a esse processo.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Lembremos que a amplitude de transição é o objeto principal da teoria quântica de campos, pois a partir dela podemos encontrar todos os observáveis físicos.

E finalmente, na seção (2.4) encontramos (usando o método de integração de polos e resíduos) a função de Green associada à equação de Klein-Gordon, que corresponde ao propagador livre. Uma das motivações para encontrarmos esse propagador é que através dele podemos escrever a amplitude de transição descrita na seção anterior. Ainda nessa seção, definimos o que vem a ser o propagador de Feynman e o propagador de Hadamard, que serão importantes no desenvolvimento do capítulo seguinte.

## 2.1 Modos de frequência positiva e negativa

A equação de Klein-Gordon apresenta dois tipos de soluções: uma delas corresponde ao modo de frequência positiva e a outra ao de frequência negativa. O objetivo dessa seção é mostrar como discernir entre esses dois modos. Começamos escrevendo uma equação de onda para um campo escalar dotado de massa, a ação desse campo escalar se escreve como

$$S = \int d^4x \frac{1}{2} (\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \Psi \partial_\nu \Psi - m^2 \Psi^2) \quad (2.1)$$

e pelo princípio da mínima ação,  $\delta S = 0$ , temos a equação de Klein-Gordon, que é a equação de onda procurada

$$(\square + m^2)\Psi = 0, \quad (2.2)$$

onde no espaço-tempo de Minkowski

$$\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \quad (2.3)$$

As soluções para a equação (2.2) podem ser apresentadas na forma de ondas planas,

$$\Phi(t, \vec{r}) = e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (2.4)$$

Dizemos que uma métrica é estática [29] quando  $g_{\mu\nu}$  não depende da coordenada  $x^0$  (estamos considerando que  $x^0 = ct$ ) e quando  $g_{0j} = 0$ .

Existe um vetor de Killing do tipo tempo tal que a equação

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, \vec{r}) = -i\omega \Phi(t, \vec{r}) \quad (2.5)$$

é aquela que determina que os modos normais de frequência dados pela equação (2.4), devem ser modos de frequência positiva, de onde vemos que  $\omega$  deve ser uma quantidade positiva [31]. Em outras palavras, para que possamos discernir entre modos de frequência positiva e modos de frequência negativa, ou seja, partículas de anti-partículas, é necessário que o espaço-tempo possua aquilo que denominamos de um campo de Killing global do tipo tempo.

Levando então Eq. (2.4) em Eq. (2.2), temos

$$\omega^2 = m^2 + k^2. \quad (2.6)$$

Para entendermos melhor essa última relação, lembremos as relações quânticas:

$$E = \hbar\omega, \quad \vec{p} = \hbar\vec{k}, \quad (2.7)$$

e a relação relativística entre energia e momento

$$E^2 = m^2c^2 + p^2c^4. \quad (2.8)$$

Substituindo Eq. (2.7) em Eq. (2.8), a equação obtida é exatamente a equação (2.6). Portanto esperamos que depois da quantização o campo  $\Phi(t, \vec{r})$  descreva partículas com massa  $m$ .

## 2.2 Campo Escalar Livre

Nessa seção vamos tratar da quantização de um campo escalar livre de massa  $m$ . A ação em questão é dada por Eq. (2.1) e a densidade de lagrangiana se escreve como

$$L = \int d^3x \frac{1}{2} \{ \dot{\Psi}^2(\vec{r}, t) - [\vec{\nabla}\Psi(\vec{r}, t)]^2 - m^2\Psi^2(\vec{r}, t) \}, \quad (2.9)$$

onde

$$\dot{\Psi}(\vec{r}, t) = \frac{\partial\Psi(\vec{r}, t)}{\partial t}. \quad (2.10)$$

O momento canonicamente conjugado é dado por

$$\pi(\vec{r}, t) = \frac{\delta L}{\delta\dot{\Psi}(\vec{r}, t)} = \dot{\Psi}(\vec{r}, t) \quad (2.11)$$

e a hamiltoniana:

$$H = \int d^3x \pi(\vec{r}, t) \dot{\Psi}(\vec{r}, t) - L = \int d^3x \frac{1}{2} [\pi^2 - (\vec{\nabla}\Psi)^2 + m^2\Psi^2]. \quad (2.12)$$

Os comutadores das variáveis canônicas são

$$[\Psi(\vec{r}, t), \pi(\vec{r}', t)] = [\Psi(\vec{r}, t), \dot{\Psi}(\vec{r}', t)] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (2.13)$$

Note que eles são comutadores a tempo iguais, mas  $\vec{r}$  e  $\vec{r}'$  são diferentes <sup>2</sup>. De fato, pois  $\vec{r}$  e  $\vec{r}'$  desempenham o papel dos índices contínuos das variáveis canônicas  $\hat{q}_i(t)$  e  $\hat{p}_i(t)$  [32].

$$[\hat{q}_i(t), \hat{p}_j(t)] = i\delta_{ij}. \quad (2.14)$$

Como vimos, um campo escalar deve obedecer à equação (2.2). Usando então a transformada de Fourier para escrever a solução geral,

$$\Psi(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \tilde{\Psi}(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}. \quad (2.15)$$

Note que para  $\Psi(\vec{r}, t)$  ser hermitiano, ou seja, para que  $\Psi^\dagger(\vec{r}, t) = \Psi(\vec{r}, t)$ , devemos ter no espaço dos momentos que

$$\tilde{\Psi}^\dagger(\vec{k}, t) = \tilde{\Psi}(-\vec{k}, t). \quad (2.16)$$

Em outras palavras, no espaço dos momentos  $\tilde{\Psi}(\vec{k}, t)$  não é hermitiano.

Levando então Eq. (2.15) em Eq. (2.2), obtemos

$$\ddot{\tilde{\Psi}}(\vec{k}, t) + (k^2 + m^2)\tilde{\Psi}(\vec{k}, t) = 0. \quad (2.17)$$

Essa última equação apresenta dois tipos de solução, uma delas associada à frequência positiva e a outra à negativa

$$e^{i\omega_k t} \quad ; \quad e^{-i\omega_k t} . \quad (2.18)$$

Assim, a solução geral deve ser escrita como uma combinação linear das quantidades em Eq. (2.18):

---

<sup>2</sup>A razão disso está fundamentada no princípio da causalidade, neste trabalho não entraremos no mérito dessa questão.

$$\tilde{\Psi}(\vec{k}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left[ f(\vec{k})e^{i\omega_k t} + g(\vec{k})e^{-i\omega_k t} \right]. \quad (2.19)$$

Antes de prosseguir, vamos elucidar o significado dos termos  $f(\vec{k})$  e  $g(\vec{k})$  que aparecem nessa última equação. Conforme já foi mencionado, no espaço dos momentos a quantidade  $\Psi(\vec{k}, t)$  perde sua hermiticidade, o que permite usarmos a condição expressa por Eq. (2.16) para escrevermos

$$\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left[ f^\dagger(\vec{k})e^{-i\omega_k t} + g^\dagger(\vec{k})e^{i\omega_k t} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left[ f(-\vec{k})e^{i\omega_{-k} t} + g(-\vec{k})e^{-i\omega_{-k} t} \right]. \quad (2.20)$$

Porém da relação  $\omega = \sqrt{k^2 + m^2}$  vemos que  $\omega$  é uma quantidade sempre positiva, o que nos permite reescrever essa última equação sob a forma

$$f^\dagger(\vec{k})e^{-i\omega_k t} + g^\dagger(\vec{k})e^{i\omega_k t} = f(-\vec{k})e^{i\omega_k t} + g(-\vec{k})e^{-i\omega_k t}, \quad (2.21)$$

de onde decorre que

$$f^\dagger(\vec{k}) = g(-\vec{k}) \quad (2.22)$$

e também que

$$g^\dagger(\vec{k}) = f(-\vec{k}). \quad (2.23)$$

De Eq. (2.22) temos que

$$f(\vec{k}) = g^\dagger(-\vec{k}). \quad (2.24)$$

Dessa maneira, vamos denotar  $f(\vec{k})$  como o operador de criação  $a^\dagger(-\vec{k})$  e  $g(\vec{k})$  como o operador de destruição  $a(\vec{k})$ , de tal maneira que escrevemos o campo escalar dado em Eq. (2.19) como

$$\tilde{\Psi}(\vec{k}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left[ a^\dagger(-\vec{k})e^{i\omega_k t} + a(\vec{k})e^{-i\omega_k t} \right], \quad (2.25)$$

onde o coeficiente  $1/\sqrt{2\omega_k}$  é o mesmo utilizado para o caso do oscilador harmônico [32], a fim de que que obtivéssemos a seguinte relação de comutação:

$$[a, a^\dagger] = 1. \quad (2.26)$$

No sentido de obter uma demonstração dessa última expressão, devemos escrever os operadores  $a$  e  $a^\dagger$  do oscilador harmônico [32]:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega q + ip) \quad (2.27)$$

e

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega q - ip), \quad (2.28)$$

onde  $q$  e  $p$  representam posição e momento. Desta forma, ao calcularmos o comutador entre  $a$  e  $a^\dagger$  dados por Eq. (2.27) e Eq. (2.28) respectivamente, teremos a unidade como resultado, e a equação (2.26) fica então demonstrada.

Para retornarmos à representação de coordenadas, devemos levar Eq. (2.25) na Eq. (2.15), resultando em:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left[ a^\dagger(-\vec{k})e^{i\omega_k t} + a(\vec{k})e^{-i\omega_k t} \right] e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}. \quad (2.29)$$

Dessa última expressão, torna-se claro que a quantidade  $\Psi(\vec{r}, t)$  é um operador, pois ela é escrita em termos dos operadores de criação e destruição  $a^\dagger$  e  $a$ , sobre os quais falaremos em seguida. Outro fato importante é que  $\Psi(\vec{r}, t)$  é um operador que atua no espaço de Hilbert [33].

Calculemos então, a partir dessa última expressão, o momento canonicamente conjugado

$$\pi(\vec{r}, t) = \dot{\Psi}(\vec{r}, t) = i \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \left[ a^\dagger(\vec{k})e^{i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{r})} - a(\vec{k})e^{-i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \right], \quad (2.30)$$

de modo que as relações

$$[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (2.31)$$

e

$$[a(\vec{k}), a(\vec{k}')] = 0 \quad (2.32)$$

levem aos comutadores corretos para  $\Psi(\vec{r}, t)$  e  $\pi(\vec{r}, t)$ . Calculemos por exemplo, das relações (2.29) e (2.30) o comutador  $[\Psi(\vec{r}, t), \pi(\vec{r}', t)]$ :

$$[\Psi(\vec{r}, t), \pi(\vec{r}', t)] = i \int \frac{d^3\vec{k} d^3\vec{k}'}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}$$

$$\times \left\{ -[a^\dagger(\vec{k}), a(\vec{k}')] e^{i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{r})} e^{-i(\omega_{k'} t - \vec{k}' \cdot \vec{r}')} + [a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] e^{-i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{r})} e^{i(\omega_{k'} t - \vec{k}' \cdot \vec{r}')} \right\}. \quad (2.33)$$

Ou seja,

$$[\Psi(\vec{r}, t), \pi(\vec{r}', t)] = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{i}{2} \left[ e^{i\vec{k}(\vec{r} - \vec{r}')} + e^{i\vec{k}(\vec{r}' - \vec{r})} \right] = i\delta^3(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (2.34)$$

onde, nessa última igualdade, usamos a equação (2.31). Os cálculos acima nos levam ao seguinte resultado:

$$[\Psi(\vec{r}, t), \pi(\vec{r}', t)] = i\delta^3(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (2.35)$$

De maneira inteiramente análoga mostra-se que

$$[\Psi(\vec{r}, t), \Psi(\vec{r}', t)] = 0 \quad (2.36)$$

e que

$$[\pi(\vec{r}, t), \pi(\vec{r}', t)] = 0. \quad (2.37)$$

Para completarmos o processo de quantização, devemos definir o estado de vácuo, este estado é aquele que possui a mais baixa energia (denotaremos a energia correspondente ao estado de vácuo por  $E_0$ ), correspondendo ao que chamamos de ausência total de partículas. Deve-se ainda ressaltar que existe um operador que conta o número de partículas do sistema, esse operador se escreve como  $\mathbf{N} = a^\dagger a$ . De fato, pois quando  $\mathbf{N}$  atua sobre  $|n\rangle$ , temos que:

$$\mathbf{N}|n\rangle = a^\dagger a|n\rangle = a^\dagger \sqrt{n}|n-1\rangle = \sqrt{n} a^\dagger |n-1\rangle = \sqrt{n} \sqrt{n-1+1}|n\rangle = n|n\rangle, \quad (2.38)$$

onde nessa última passagem usamos que

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad e \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (2.39)$$

Estas partículas, podem ser criadas ou destruídas através dos operadores  $a^\dagger(\vec{k})$  e  $a(\vec{k})$  respectivamente. Estes operadores por sua vez, agem sobre os estados quânticos<sup>3</sup>, simbolizando a criação e a destruição de partículas. Em outras palavras, quando o operador

---

<sup>3</sup>Lembremos que um estado é um membro do espaço de Hilbert

de criação atua num dado estado com energia  $E_n$ , ele levanta a energia deste estado para  $E_{n+1}$ , indicando que houve a criação de uma partícula. Da mesma maneira, quando o operador de destruição atua num dado estado, com energia  $E_n$ , ele abaixa a energia desse estado para  $E_{n-1}$ , indicando agora que uma partícula foi aniquilada, pois a energia do estado quântico diminuiu.

Contudo, uma importante restrição ao que foi dito acima é o fato de que

$$a(\vec{k})|0\rangle = 0. \quad (2.40)$$

Fisicamente isso significa que não pode haver aniquilação sobre o estado de mais baixa energia, ou seja, que o operador  $a(\vec{k})$  não pode gerar níveis de energia menores que  $E_0$ . O que de certa forma pode ser compreendido de maneira intuitiva, uma vez que no vácuo não há partículas para serem destruídas.

Uma vez que  $a^\dagger(\vec{k})$  e  $a(\vec{k})$  são interpretados como operadores de criação e destruição de partículas, o próprio campo quântico  $\Psi(\vec{r}, t)$  dado em Eq. (2.29) também é um operador que pode criar e destruir partículas, pois ele é escrito em termos dos operadores  $a(\vec{k})$  e  $a^\dagger(\vec{k})$ . Por exemplo,

$$|\vec{k}\rangle = a^\dagger(\vec{k})|0\rangle \quad (2.41)$$

é o estado com uma partícula de momenta  $\vec{k}$ . E o estado

$$\Psi(\vec{r}, t)|0\rangle = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}}{\sqrt{2\omega_k}} a^\dagger(\vec{k})|0\rangle \quad (2.42)$$

representa uma partícula localizada em  $\mathbf{r}$ , o que vem deixar claro que o operador  $\Psi(\vec{r}, t)$  cria uma partícula no ponto  $\mathbf{r}$  e no instante  $t$ .

Na mecânica quântica não relativística, existe uma equação da continuidade [33] (obtida por meio da equação de Schrödinger) para a densidade de probabilidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \rho > 0, \quad (2.43)$$

onde  $\rho = \psi^*\psi$  (lembre-se que  $\psi$  é a função de onda de uma partícula), e  $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$  é o vetor fluxo de probabilidade, que é escrito como

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = -\frac{i\hbar}{2M} \left( \psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^* \right). \quad (2.44)$$



Uma vez que a função de onda de uma partícula obedece à equação de Schrödinger, e que a equação de Klein-Gordon é o análogo relativístico dessa equação, é lícito ressaltar que existe uma equação análoga à Eq. (2.43), porém agora obtida por meio da equação de Klein-Gordon [34]. Em tal equação de continuidade, o análogo de  $\psi^*\psi$  é a quantidade  $\Psi^*\Psi$ . No entanto, não devemos mais interpretar  $\Psi^*\Psi$  como uma densidade de probabilidade, e sim como uma densidade de carga. O campo quântico  $\Psi(\vec{r}, t)$  por sua vez, não deve ser interpretado como função de onda de uma partícula, mas como um operador, que atua no espaço de Hilbert e é capaz de criar e destruir partículas.

No processo de quantização apresentado nessa seção, consideramos o espaço-tempo de Minkowski, o qual possui um estado de vácuo bem definido, dado pela equação (2.40). No entanto, no espaço-tempo curvo a situação é bem diferente, pois nesse caso não é possível escolher o estado de vácuo de maneira única, ou seja, não há um estado de vácuo privilegiado, o que implica na perda do conceito de partícula [27]. No sentido de suprimir essa dificuldade, podemos citar como exemplo a quantidade  $\langle\Psi^2\rangle$ , que é usada para representar os estados quânticos num espaço-tempo curvo [28].

### 2.3 Vamos perturbar o vácuo?

A amplitude de transição vácuo-vácuo [34], definida como

$$Z = \langle 0 | e^{-i\hat{H}t} | 0 \rangle = \int D\phi e^{iS[\Psi]}, \quad (2.45)$$

não representa um objeto fisicamente interessante, pois a única quantidade que podemos calcular de  $Z$  é a energia de estado de vácuo  $|0\rangle$ . Essa última integral é uma integral funcional, onde  $S[\Psi]$  representa a ação de um campo escalar com massa. Escrevemos a energia do estado de vácuo como  $\hat{H}|0\rangle = E_{vac}|0\rangle$ :

$$e^{-iE_{vac}t} = \frac{\langle 0 | e^{-i\hat{H}t} | 0 \rangle}{\langle 0 | 0 \rangle}. \quad (2.46)$$

Mas na teoria quântica de campos sem gravitação, medimos todas as energias comparando-as com a energia do vácuo e por convenção fazemos  $E_{vac} = 0$ . No entanto, se incluirmos a gravitação tudo deve mudar, e a energia de vácuo, nesse caso, pode ser interpretada como a constante cosmológica. Dessa maneira, o nosso objetivo então passa a ser o estudo das perturbações do vácuo, o qual exige que criemos partículas em alguns lugares do espaço-tempo e que as aniquilemos em seguida. Em outras palavras, devemos perturbar o sistema. Essa perturbação é feita por meio de uma força externa que vamos denotar por  $J_a$ .

As equações de movimento se escrevem no modelo discreto como [35]

$$m_a \ddot{q}_a = \sum k_{ab} q_b, \quad (2.47)$$

mas na presença de uma força externa  $J_a(t)$ :

$$m_a \ddot{q}_a = \sum k_{ab} q_b + \dots + J_a(t). \quad (2.48)$$

Onde nesse modelo discreto,  $m_a$  representa a massa de uma das partículas do sistema, e  $q_a$  a posição correspondente dessa partícula.

Na ação clássica o termo correspondente é  $\sum_a J_a(t) q_a$ . Tomando o limite contínuo <sup>4</sup> temos que:

$$\sum_a J_a(t) q_a \rightarrow \int d^4x J(x) \Psi(x). \quad (2.49)$$

---

<sup>4</sup>No apêndice A encontra-se um melhor detalhamento sobre o limite contínuo

A função  $J(t, \vec{x})$  é chamada de fonte ou corrente externa, e descreve como perturbamos o sistema. Temos uma certa liberdade para escolher a quantidade  $J(t, \vec{x})$ . Por exemplo, podemos escolhê-la diferente de zero só em algumas regiões localizadas no espaço-tempo. Essa escolha corresponderá aos processos de criação e aniquilação de partículas exatamente nessas regiões, cuja representação ilustrativa se encontra na figura (2.1), onde as regiões marcadas com J (sugestivamente representando  $J_a$  descrito acima) representam os pontos do espaço-tempo nos quais as perturbações descritas acima estão ocorrendo.

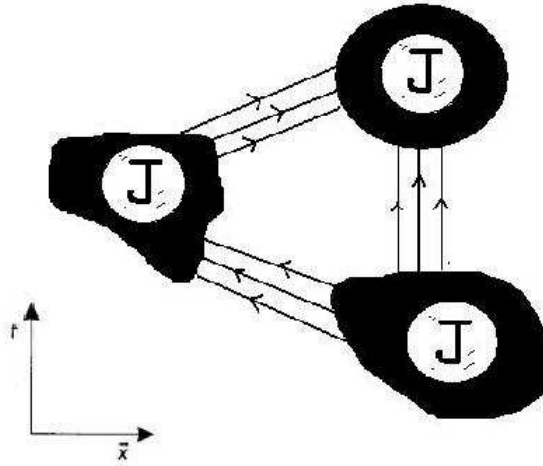


Figura 2.1: Perturbações do vácuo em alguns pontos do espaço-tempo.

Dessa maneira escrevemos a quantidade  $Z[J]$  como

$$Z[J] = \int D\psi \exp \left\{ i \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\partial\psi)^2 - V(\psi) + J(x)\psi(x) \right] \right\}. \quad (2.50)$$

Essa integral é o objeto principal da teoria quântica de campos, uma vez que a partir dela podemos calcular todos os observáveis físicos. No entanto, essa integral só pode ser calculada quando a ação é quadrática, e dessa forma a reescremos como

$$Z[J] = \int D\psi \exp \left\{ i \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\partial\psi)^2 - \frac{m^2}{2} \psi^2 + J(x)\psi(x) \right] \right\} \quad (2.51)$$

onde  $m^2\psi^2$  é o termo quadrático da energia potencial. A integral representada acima é quadrática e a teoria é chamada livre [36].

## 2.4 O propagador livre

A função de Green  $G(x - y)$  obedece à seguinte equação [37]:

$$-(\square + m^2)G(x - y) = \delta^4(x - y). \quad (2.52)$$

Nesse sentido, dizemos que  $G(x - y)$  é a função de Green da equação de Klein-Gordon. Com efeito, a inter-relação dessa função com a seção anterior torna-se trivial, uma vez que podemos escrever a quantidade  $Z[J]$  em termos dessa função de Green<sup>5</sup>:

$$Z[J] = Z[0] \exp \left\{ \frac{-i}{2} \int d^4x \int d^4y J(x) G(x - y) J(y) \right\}. \quad (2.53)$$

A fim de analisarmos a função  $G(x - y)$  usemos a transformada de Fourier:

$$G(x - y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{G}(k) e^{ik_\mu(x^\mu - y^\mu)}. \quad (2.54)$$

Logo, por meio de Eq. (2.52) e Eq. (2.54):

$$-(\square + m^2)G(x - y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (k^2 - m^2) \tilde{G}(k) e^{ik_\mu(x^\mu - y^\mu)} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik_\mu(x^\mu - y^\mu)} \quad (2.55)$$

onde nessa última passagem usamos que

$$\delta^4(x - y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik_\mu(x^\mu - y^\mu)}$$

De Eq. (2.55) temos:

$$\tilde{G}(k) = \frac{1}{k^2 - m^2}. \quad (2.56)$$

Levando então Eq. (2.56) em Eq. (2.54), ficamos com

$$G(x - y) = \int \frac{d^4\vec{k}}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik_\mu(x^\mu - y^\mu)}}{k^2 - m^2}, \quad (2.57)$$

onde  $k^2 = k_0^2 - \vec{k}^2$  e  $k_\mu(x^\mu - y^\mu) = k_0(x^0 - y^0) - \vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})$ . Mas na forma como está,  $G(x - y)$  ainda não está definida de maneira única, pois o denominador contém zeros em  $k_0^2 = \vec{k}^2 + m^2$ , ou melhor, em  $k_0 = \pm \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ . No entanto, a integral  $\int dk_0$  depende da maneira como contornamos os polos correspondentes. Uma maneira de fazer isso é

---

<sup>5</sup>A demonstração que Eq. (2.51) e Eq. (2.53) coincidem se encontra no apêndice A.

através da substituição  $m^2 \rightarrow m^2 + i\epsilon$ , onde  $\epsilon > 0$  é um fator infinitesimal (depois de calcularmos a integral faremos  $\epsilon = 0$ ). Então reescrevemos  $\omega_k$ :

$$\omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \rightarrow \sqrt{\vec{k}^2 + m^2 - i\epsilon} \simeq \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} - i\epsilon.$$

Assim, teremos dois polos, um em  $k_0 = \omega_k - i\epsilon$  e outro em  $k_0 = -\omega_k + i\epsilon$ , conforme mostra a figura 2.2. Na figura 2.3 vemos o contorno de integração correspondente aos polos mostrados na figura anterior.

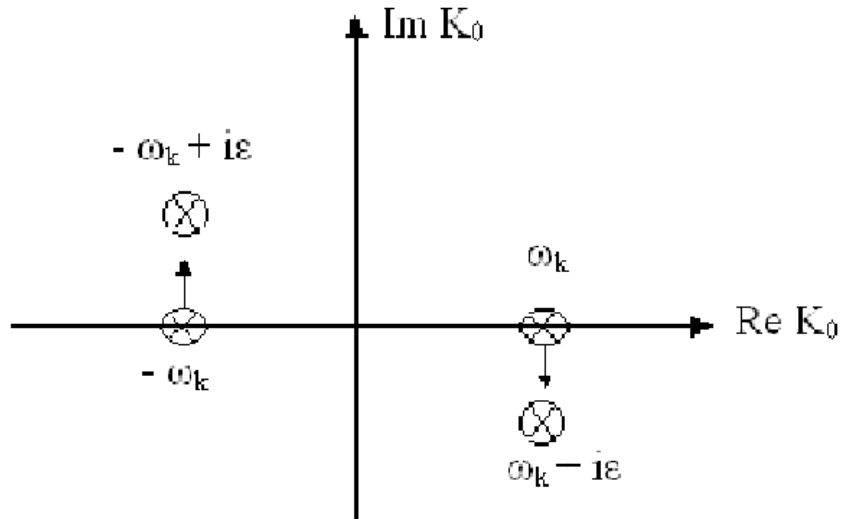


Figura 2.2: Representação dos polos que aparecem em  $k_0 = \omega_k - i\epsilon$  e  $k_0 = -\omega_k + i\epsilon$ .

Com esta definição reescrevemos a função  $G(x - y)$ , de Eq. (2.57), como

$$G(x - y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (2.58)$$

e denotamos  $G(x - y)$  como o propagador do campo escalar (ou **propagador livre**). Fisicamente,  $G(x - y)$  descreve a amplitude de propagação de uma perturbação do campo de  $x^\mu$  a  $y^\mu$ .

Com relação à forma como contornamos os polos, ressaltamos que essa não é a única maneira de o fazermos. Poderíamos, por exemplo, ter contornado ambos por cima [43],

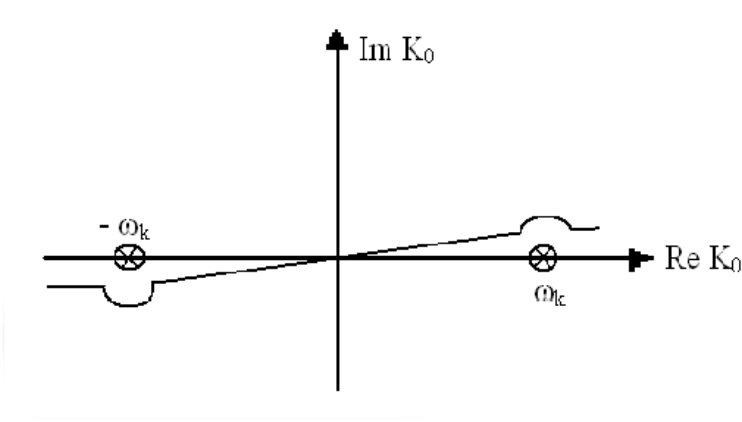


Figura 2.3: Contorno correspondente aos polos apresentados na figura anterior.

mas nesse caso, a função de Green obtida seria diferente daquela que vamos obter por meio da equação (2.58).

Das quatro integrais em Eq. (2.58), a primeira  $\int dk_0$ , pode ser calculada pelo método de resíduos (onde para simplificar o cálculo fazemos  $y = 0$ , sem perda de generalidade):

$$G(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{ik_0x_0}}{k_0^2 - \omega_k^2 + i\epsilon}. \quad (2.59)$$

O cálculo será diferente nos casos em que  $x_0 > 0$  e  $x_0 < 0$ , onde denotamos  $x_0 = t$ .

Se  $t > 0$ , podemos fechar o contorno no semiplano superior, conforme ilustra a figura 2.4, onde  $\text{Im}K_0 > 0$ . O resultado da integração é:

$$\int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{ik_0x_0}}{k_0^2 - \omega_k^2 + i\epsilon} = -\frac{i}{2\omega_k} e^{-ix_0\omega_k}. \quad (2.60)$$

Do mesmo modo, quando  $t < 0$ , devemos fechar o contorno no semiplano inferior, conforme ilustra a figura 2.5, e a integral será igual ao resíduo em  $k_0 = \omega_k - i\epsilon$ , (e com um sinal menos por causa do sentido do sentido horário de integração):

$$\int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{ik_0x_0}}{k_0^2 - \omega_k^2 + i\epsilon} = -\frac{i}{2\omega_k} e^{ix_0\omega_k}. \quad (2.61)$$

O caso em que  $t = 0$  pode ser obtido quando tomamos o limite  $t \rightarrow 0$ , em qualquer um dos dois casos analisados acima, assim por exemplo para  $t > 0$ :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[ -\frac{i}{2\omega_k} e^{-it\omega_k} \right] = -\frac{i}{2\omega_k}. \quad (2.62)$$

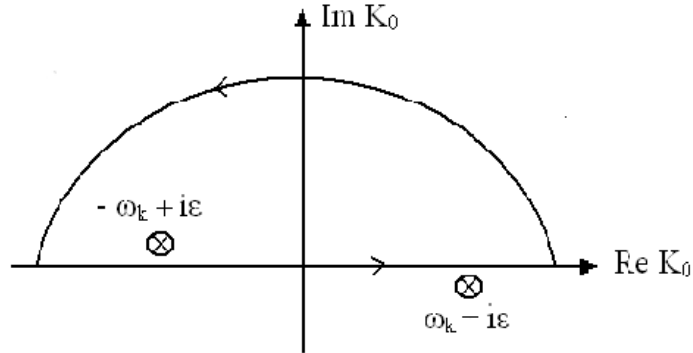


Figura 2.4: Fechando o contorno no semiplano superior, note que nesse caso,  $e^{-x_0 \text{Im} K_0} \rightarrow 0$ .

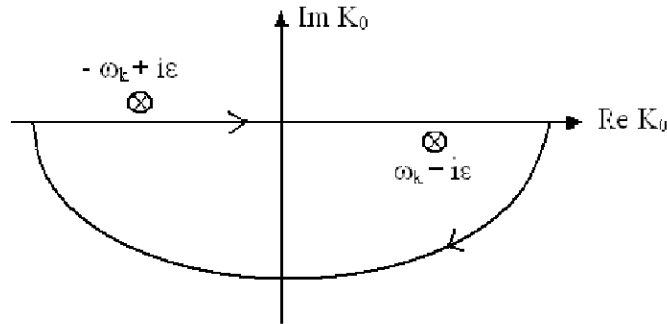


Figura 2.5: Fechando o contorno no semiplano inferior, note que nesse caso,  $e^{x_0 \text{Im} K_0} \rightarrow 0$ .

Para ganhar generalidade podemos juntar todos os casos numa só fórmula:

$$\int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{ik_0 x_0}}{k_0^2 - \omega_k^2 + i\epsilon} = -\frac{i}{2\omega_k} \left[ \theta(x_0) e^{-ix_0 \omega_k} + \theta(-x_0) e^{ix_0 \omega_k} \right], \quad (2.63)$$

onde usamos a função degrau:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1/2, & \text{se } x = 0 \\ 1, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Assim o propagador expresso em Eq. (2.59) fica escrito como:

$$\begin{aligned}
G(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \left( -\frac{i}{2\omega_k} \right) \left[ \theta(x_0) e^{-ix_0\omega_k} + \theta(-x_0) e^{ix_0\omega_k} \right] \\
&= -i \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[ \theta(t) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - t\omega_k)} + \theta(-t) e^{i(t\omega_k - \vec{k}\cdot\vec{r})} \right]
\end{aligned} \tag{2.64}$$

onde no segundo termo fizemos a mudança de variáveis de integração  $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ .

## 2.5 O propagador de Feynman e o propagador de Hadamard

Vamos mostrar que a amplitude  $\langle 0 | \Psi(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}', t') | 0 \rangle$  é proporcional à expressão em Eq. (2.64), ou seja, que essa amplitude pode ser escrita em termos de  $G(x - y)$ . Inicialmente vamos considerar  $t > t'$ , o que corresponde fisicamente à criação de uma partícula em  $(\vec{r}', t')$  e depois a aniquilação dessa partícula em  $(\vec{r}, t)$ . Vamos fazer a seguinte escolha:  $\vec{r}' = 0$  e  $t' = 0$ , o que implica em  $t > 0$ .

Conforme discutido acima, escrevemos o operador  $\Psi(\vec{r}, t)$  como:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left[ a^\dagger(\vec{k}) e^{-i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{r})} + a(\vec{k}) e^{i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \right] \tag{2.65}$$

de modo que

$$\Psi(\vec{0}, 0) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left[ a^\dagger(\vec{k}) + a(\vec{k}) \right]. \tag{2.66}$$

No entanto, quando a partir de Eq. (2.65) e Eq. (2.66) calcularmos  $\langle 0 | \Psi(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}', t') | 0 \rangle$ , resultará um termo do tipo  $\langle 0 | (a^\dagger a^\dagger + a a + a^\dagger a + a a^\dagger) | 0 \rangle$ . Mas, devido às relações  $a | 0 \rangle = 0$  e  $\langle 0 | a^\dagger = 0$ , sobreviverá somente o termo

$$\langle 0 | a(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}') | 0 \rangle = \langle 0 | [a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] | 0 \rangle = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \tag{2.67}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \Psi(\vec{r}, t) \Psi(\vec{0}, 0) | 0 \rangle &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3k'}{\sqrt{2\omega_k} \sqrt{2\omega_{k'}}} \langle 0 | a(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}') | 0 \rangle e^{-i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} e^{-i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{r})},
\end{aligned} \tag{2.68}$$



que vamos denotar por

$$G^+(\vec{r}, \vec{0}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} e^{-i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{r})}. \quad (2.69)$$

Dessa maneira, ainda é possível escrever que

$$G^+(\vec{r}, \vec{0}) = \langle 0 | \Psi(\vec{r}, t) \Psi(\vec{0}, 0) | 0 \rangle, \quad (2.70)$$

ou de forma mais geral

$$G^+(\vec{r}, \vec{r}') = \langle 0 | \Psi(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}', t') | 0 \rangle. \quad (2.71)$$

Devemos proceder de maneira inteiramente análoga para o caso em que  $t < 0$ , e o resultado se escreve como

$$\langle 0 | \Psi(\vec{0}, 0) \Psi(\vec{r}, t) | 0 \rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} e^{i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{r})}. \quad (2.72)$$

Ou ainda como

$$G^-(\vec{r}, \vec{0}) = \langle 0 | \Psi(\vec{0}, 0) \Psi(\vec{r}, t) | 0 \rangle \quad (2.73)$$

De forma mais geral,

$$G^-(\vec{r}, \vec{r}') = \langle 0 | \Psi(\vec{r}', t') \Psi(\vec{r}, t) | 0 \rangle. \quad (2.74)$$

Assim, definimos também

$$iG(\vec{r}, \vec{r}') = \langle 0 | [\Psi(\vec{r}', t'), \Psi(\vec{r}, t)] | 0 \rangle \quad (2.75)$$

e

$$G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') = \langle 0 | \{ \Psi(\vec{r}', t'), \Psi(\vec{r}, t) \} | 0 \rangle, \quad (2.76)$$

onde  $G$  é conhecida como função de Schwinger e  $G^{(1)}$  como função de Hadamard [31]. Essas funções de Green podem também ser escritas em termos das quantidades  $G^+$  e  $G^-$  definidas acima, da seguinte forma:

$$iG(\vec{r}, \vec{r}') = G^+(\vec{r}, \vec{r}') - G^-(\vec{r}, \vec{r}') \quad (2.77)$$

e

$$G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') = G^+(\vec{r}, \vec{r}') + G^-(\vec{r}, \vec{r}'). \quad (2.78)$$

### 2.5.1 Produto Ordenado Temporalmente

O ordenamento temporal é o que faz com que aconteça primeiro a criação de uma partícula, e só depois a sua destruição, não o contrário [37]. Nesse sentido definimos o produto ordenado temporalmente como:

$$T[\Psi(x)\Psi(y)] = \begin{cases} \Psi(x)\Psi(y), & \text{se } x^0 > y^0 \\ \Psi(y)\Psi(x), & \text{se } x^0 < y^0 \end{cases}. \quad (2.79)$$

Ou seja,

$$T[\Psi(x)\Psi(y)] = \theta(x^0)\Psi(x)\Psi(y) + \theta(-x^0)\Psi(y)\Psi(x), \quad (2.80)$$

onde  $\theta$  é a função degrau definida em Eq. (2.59). Note que as relações (2.68), (2.73) e (2.80) nos levam a

$$\langle 0|T[\Psi(x)\Psi(0)]|0\rangle = iG_F(x). \quad (2.81)$$

Ou ainda, de forma mais geral

$$\langle 0|T[\Psi(x)\Psi(y)]|0\rangle = iG_F(x - y). \quad (2.82)$$

O propagador descrito nessa última equação é também conhecido como propagador de Feynman e deve satisfazer à seguinte relação:

$$-(\square + m^2)G_F(x - y) = \delta^4(x - y). \quad (2.83)$$

Escrevemos a função de Green avançada e a função de Green retardada respectivamente como

$$G_R(r, r') = -\theta(t - t')G(r, r') \quad (2.84)$$

e

$$G_A(r, r') = \theta(t' - t)G(r, r'), \quad (2.85)$$

onde a média dessas duas quantidades é dada por

$$\bar{G}(r, r') = \frac{1}{2}[G_R(r, r') + G_A(r, r')]. \quad (2.86)$$

Finalmente escrevemos a equação através da qual o propagador de Feynman  $G_F(r, r')$  se relaciona com o propagador de Hadamard  $G^{(1)}(r, r')$ :

$$G_F(r, r') = -\bar{G}(r, r') - \frac{1}{2}iG^{(1)}(r, r'). \quad (2.87)$$

Para concluir este capítulo, vamos fazer um breve resumo sobre o processo de quantização realizado. Obtivemos a quantização de um campo escalar no espaço-tempo de Minkowski seguindo os seguintes passos:

- O campo escalar é representado por um operador  $\Psi(\vec{r}, t)$  que atua no espaço de Hilbert.
- Imposição da equação de Klein-Gordon na forma postulática.
- O operador  $\Psi(\vec{r}, t)$  é expandido em termos dos operadores de criação e destruição  $a^\dagger$  e  $a$ .
- As relações de comutação a tempos iguais  $[\Psi(\vec{r}, t), \Psi(\vec{r}', t)] = 0$ ,  $[\pi(\vec{r}, t), \pi(\vec{r}', t)] = 0$  e  $[\Psi(\vec{r}, t), \pi(\vec{r}', t)] = i\delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$ . A imposição desses comutadores a tempos iguais assegura que a teoria resultante obedeça ao princípio da causalidade.
- O estado de vácuo é definido de maneira única.

## Capítulo 3

# Quantização de um campo escalar no círculo girante: o propagador de Hadamard

### 3.1 O Espaço-tempo globalmente hiperbólico e as curvas do tipo tempo fechadas (CTC's)

Uma curva do tipo-tempo fechada (CTC) é uma curva do tipo-tempo que volta sempre ao mesmo ponto do espaço-tempo, na figura 3.1 encontramos uma representação esquemática de uma curva do tipo-tempo fechada.

Uma superfície de Cauchy do espaço-tempo é uma superfície tal que uma curva do tipo-tempo deve atravessá-la uma única vez e dessa forma, dizemos que um espaço-tempo que pode ser foliado por superfícies de Cauchy é dito ser um espaço-tempo globalmente hiperbólico.

Um espaço-tempo globalmente hiperbólico pode ser foliado por uma família de superfícies de Cauchy a um parâmetro  $\{\Sigma : -\infty < t < +\infty\}$  onde  $t$  é o parâmetro tempo. Como exemplo citamos o espaço-tempo de Minkowski que é globalmente hiperbólico e consequentemente é foliado por superfícies de Cauchy com  $t$  constante. Na figura 3.2 vemos as linhas temporais cortadas por uma superfície de Cauchy.

Com relação à dimensão da superfície de Cauchy podemos dizer que é a dimensão espa-

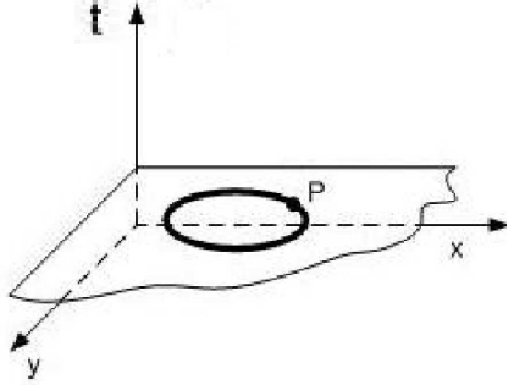


Figura 3.1: Curva do tipo-tempo fechada, note que a curva do tipo-tempo começa e termina no ponto P, o que indica que ela se fecha, razão essa do nome CTC.

cial do espaço-tempo, por exemplo, se o espaço-tempo for (3+1) dimensional, a superfície de Cauchy terá dimensão 3, ou seja, a superfície de Cauchy é sempre (d-1) dimensional. Como no presente trabalho vamos considerar um espaço-tempo (1+1) dimensional, as superfícies de Cauchy corresponderão a linhas.

Dessa forma, visto está que um espaço-tempo contendo CTC's não pode ser globalmente hiperbólico.

Começemos com a solução de Kerr [13] das equações de Einstein em (2+1) dimensões, cujo elemento de linha é dado por:

$$ds^2 = (dt + S d\phi)^2 - d\rho^2 - \alpha^2 \rho^2 d\phi^2 \quad (3.1)$$

onde S representa o parâmetro de rotação e  $\alpha$  o parâmetro de disclinação. Nota-se claramente de Eq. (3.1) que para  $\alpha = 1$  e  $S = 0$ , o espaço-tempo de Minkowski é recuperado. Em (3 + 1) dimensões, o espaço-tempo exterior a uma corda cósmica girante se encontra representado pelo seguinte elemento de linha [23]:

$$ds^2 = (dt + S d\phi)^2 - d\rho^2 - \alpha^2 \rho^2 d\phi^2 - d\xi^2. \quad (3.2)$$

A região correspondente a  $\rho < S/\alpha$  contém curvas do tipo tempo fechadas, resultando que, quando  $S \neq 0$ , o espaço-tempo não é globalmente hiperbólico.

No sentido de recuperar a invariância do boost de Lorentz ao longo do eixo de simetria, os autores em Ref.[19], modificaram a geometria dada em Eq. (3.2), postulando um

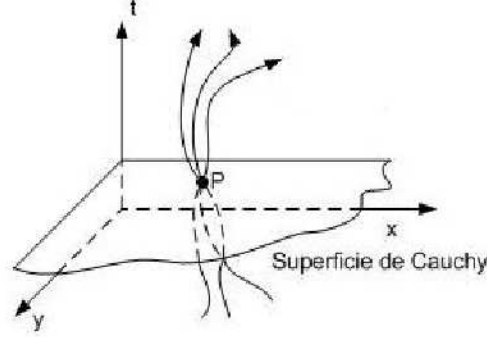


Figura 3.2: Representação da superfície de Cauchy num espaço-tempo (3+1) dimensional cortando as possíveis linhas temporais, lembre-se de que aqui o tempo representa um parâmetro.

deslocamento cósmico, segundo o qual

$$ds^2 = (dt + S d\phi)^2 - d\rho^2 - \alpha^2 \rho^2 d\phi^2 - (d\xi + \kappa d\phi)^2, \quad (3.3)$$

note que quando  $S > \kappa$ , a região que corresponde a  $\rho < \sqrt{S^2 - \kappa^2}/\alpha$  contém CTC's. Ainda não está muito claro se a teoria quântica faz sentido em espaços-tempo que não são globalmente hiperbólicos [30], contudo em Ref.[38], encontra-se um trabalho que tenta implementar a T.Q.C. em espaços não globalmente hiperbólicos. Por outro lado, neste modelo, quando  $S < \kappa$  o espaço-tempo é globalmente hiperbólico.

Neste trabalho usaremos a métrica dada em Eq. (3.3), porém com  $\rho = const$ ,  $\xi = const$  e  $\kappa = 0$ , o que corresponde ao que denotamos por círculo girante [22]. Nesse sentido vamos começar analisando o seguinte elemento de linha

$$ds^2 = (dt + S d\phi)^2 - \alpha^2 \rho^2 d\phi^2, \quad (3.4)$$

onde nessa equação,  $\rho$  representa um parâmetro associado ao raio do anel e  $t$  é o tempo coordenado, o que torna possível fazermos  $t = constante$  e  $0 < \phi < 2\pi$ .

$$ds^2 = S^2 d\phi^2 - \alpha^2 \rho^2 d\phi^2. \quad (3.5)$$

Assim temos uma curva do tipo tempo fechada, ou seja, a cada volta  $2\pi$  a partir de um ponto inicial, voltamos no mesmo ponto do espaço-tempo, temos aqui o que chamamos de máquina do tempo. Qual seria então o tempo que a partícula que está sujeita à volta ao passado, gastaria para fazer a viagem de volta no tempo? A resposta é o seu tempo próprio  $\tau$ , que calculamos a partir de Eq. (3.5),

$$c^2 d\tau^2 = S^2 d\phi^2 - \alpha^2 \rho^2 d\phi^2, \quad (3.6)$$

ou seja,

$$\tau = \int_0^{2\pi} \frac{(S^2 - \alpha^2 \rho^2)^{1/2}}{c} d\phi = 2\pi \frac{(S^2 - \alpha^2 \rho^2)^{1/2}}{c}. \quad (3.7)$$

Devemos observar que uma CTC não surge quando  $S = 0$ , ou seja, é preciso que a corda cósmica (ou o círculo, no contexto deste trabalho) possua rotação para que fenômenos como o surgimento de máquinas do tempo possam ser considerados. Para que essa última afirmação seja exemplificada, note que se fizermos  $S = 0$  em Eq. (3.5) decorre que  $ds^2 < 0$ , o que não está de acordo com o contexto de aparecimento de CTC's.

Muito embora a Relatividade Geral permita o surgimento das CTC's, ainda não sabemos com certeza se é possível enviar qualquer partícula ao passado. Devemos considerar o fato de que na hipótese de existência de uma máquina do tempo, o princípio da causalidade (suposição básica de que as causas devem anteceder seus efeitos) seria violado, o que de certa forma pode causar um certo desconforto na comunidade científica. Na tentativa de suprimir essa violação do princípio da causalidade, S. W. Hawking por exemplo [3], propôs o que ficou conhecido como a conjectura Hawking dizendo que a natureza conspira contra a volta ao passado, ou mais formalmente, que as leis da física não permitem o aparecimento de curvas do tipo tempo fechadas. Hawking faz notar a forte evidência experimental em favor dessa conjectura, com base no fato de que, em suas próprias palavras: “ainda não fomos invadidos por hordas de turistas vindos do futuro”. Mas uma conjectura não possui o “status” de um teorema, ou seja, é algo que ainda não foi demonstrado. Entretanto, os autores em Ref. [25], ao estudarem a quantização de um campo escalar dotado de massa no espaço-tempo de uma corda cósmica girante, observaram que as flutuações quânticas do vácuo divergem na eminência do surgimento máquinas do tempo.

## 3.2 Quantização

Vamos considerar o espaço localmente plano com topologia não trivial, no caso bidimensional. Teremos o espaço-tempo  $R^1 \times S^1$  com seções espaciais fechadas. A métrica será dada por

$$ds^2 = (dt + Sd\phi)^2 - \alpha^2 \rho^2 d\phi^2. \quad (3.8)$$

Notemos que esta métrica corresponde à seção  $(t, \phi)$  da métrica associada a uma corda cósmica girante. o parâmetro  $\rho$  representa o raio do círculo definido pela coordenada angular  $\phi$ :

$$0 < \phi < 2\pi. \quad (3.9)$$

De forma explícita, Eq. (3.8) pode ser representada na forma

$$ds^2 = dt^2 - (\alpha^2 \rho^2 - S^2)d\phi^2 + 2Sdtd\phi. \quad (3.10)$$

Para seções  $t = \text{constante}$ , Eq. (3.10) se reduz a

$$ds^2 = -(\alpha^2 \rho^2 - S^2)d\phi^2, \quad (3.11)$$

onde, se escolhermos

$$\rho < \frac{S}{\alpha}, \quad (3.12)$$

teremos que  $ds^2 > 0$ . Nessa situação, um universo que seja determinado pela geometria dada em Eq. (3.8) admitirá curvas do tipo tempo fechadas (CTC's). A fim de garantir a validade da teoria quântica de campos, vamos assumir que  $\rho > S/\alpha$ . Desta forma, o espaço-tempo considerado será globalmente hiperbólico e admitirá superfícies globais de Cauchy.

O parâmetro  $\alpha$  mede o defeito na coordenada angular no caso 4-dimensional, mas não possui importância neste caso 2-dimensional, podendo ser absorvido pelo parâmetro  $\rho$ :

$$\alpha\rho \rightarrow \rho. \quad (3.13)$$

Ao redefinirmos a coordenada tempo na seguinte forma



$$T = t + S\phi, \quad (3.14)$$

é possível reescrevermos a métrica em Eq. (3.8) na forma diagonal

$$ds^2 = dT^2 - \rho^2 d\phi^2, \quad (3.15)$$

onde não se observa a presença do parâmetro  $\alpha$  devido a Eq. (3.13). Nessa representação temos as seguintes identificações

$$(T, \phi) \sim (T + 2\pi S, \phi + 2\pi). \quad (3.16)$$

Denotamos o tempo definido em Eq. (3.14) como tempo helicoidal. Atráves dessa redefinição de parâmetros poderíamos ser impelidos a usar o tempo helicoidal como um tempo global e usá-lo para efetuar a quantização de um campo escalar.

A tentativa de usar o tempo helicoidal como parâmetro para quantização de campos foi feita em Ref.[22]. No entanto, os autores em Ref.[23] mostraram que tal tentativa não é plausível, devido ao fato de que o tempo helicoidal não é um tempo global, mas local.

Antes de prosseguir, vamos escrever a métrica em Eq. (3.10) em termos de suas componentes:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & S \\ S & -[\rho^2 - S^2] \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

na forma contravariante teremos:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & S/\rho^2 \\ S/\rho^2 & -1/\rho^2 \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

onde definimos

$$\sigma^2 \doteq \frac{\rho^2 - S^2}{\rho^2} = \frac{\xi}{\rho^2}. \quad (3.19)$$

Temos ainda que

$$g \doteq \det g_{\mu\nu} = -\rho^2. \quad (3.20)$$

32 3. Quantização de um campo escalar no círculo girante: o propagador de Hadamard

Vamos então prosseguir considerando a segunda quantização de um campo escalar  $\Psi(t, \phi)$  neste espaço-tempo de fundo.

A equação de Klein-Gordon é dada por

$$(\square + M^2)\Psi(t, \phi) = 0, \quad (3.21)$$

onde  $M$  representa a massa do campo  $\Psi(t, \phi)$  e  $\square$  é o operador d'Alambertiano<sup>1</sup>:

$$\square = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial^\mu \left( \sqrt{-g} \partial_\mu \right). \quad (3.22)$$

De acordo com a métrica em Eq. (3.15), escrevemos a equação (3.21) como

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial T^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + M^2 \right) \Psi(T, \phi) = 0, \quad (3.23)$$

cujas soluções são dadas por

$$\Phi(\phi, T) = C_n e^{-i\omega T} e^{im\phi}, \quad (3.24)$$

nas quais  $C_n$  é uma constante a ser determinada. Levando então Eq. (3.24) em Eq. (3.23) resulta

$$-\omega^2 + \frac{m^2}{\rho^2} + M^2 = 0. \quad (3.25)$$

Retornando às coordenadas  $(t, \phi)$ , reescrevemos (3.24) como

$$\Phi(t, \phi) = C_n e^{-i\omega(t+S\phi)} e^{im\phi} = C_n e^{-i\omega t} e^{i(m-\omega S)\phi}. \quad (3.26)$$

De onde vemos da identificação  $(t, \phi) \sim (t, \phi + 2\pi n)$ , que

$$m - \omega S = n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (3.27)$$

Assim,

$$\Phi(t, \phi) = C_n e^{-i\omega t} e^{in\phi}. \quad (3.28)$$

Das equações (3.25) e (3.27) vemos que

---

<sup>1</sup>no final deste capítulo se encontra uma seção sobre TQC em espaços-tempos curvos

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{m^2}{\rho^2} + M^2} \quad e \quad m = n + \omega S.$$

Ou seja,

$$\omega = \pm \sqrt{\left(\frac{n + \omega S}{\rho}\right)^2 + M^2}, \quad (3.29)$$

resultando em

$$\Phi(t, \phi) = C_n \exp\left\{-i \sqrt{\frac{n + \omega S}{\rho} + M^2} t\right\} \exp\{in\phi\}. \quad (3.30)$$

Da equação (3.29) temos:

$$\omega^2 - \frac{2Sn}{\xi} \omega - \frac{n^2 + \rho^2 M^2}{\xi} = 0 \quad (3.31)$$

com soluções

$$\omega_{\pm} = \frac{Sn}{\xi} \pm \left| \frac{Sn}{\xi} \right| \sqrt{1 + \frac{\xi}{S^2 n^2} (n^2 + \rho^2 M^2)} \quad (3.32)$$

Supondo que  $S > 0$ , e uma vez que estamos tratando o caso  $\rho > S$  (a fim de garantir o caráter hiperbólico do espaço-tempo), vemos de  $\xi = \rho^2 - S^2$  que a quantidade  $\xi$  deve ser positiva. Dessa forma, se escolhermos o sinal positivo no lado direito de Eq. (3.32), vemos que

$$\omega_+ > 0, \quad (3.33)$$

uma vez que o termo dentro da raiz em Eq. (3.32) é sempre positivo e maior que a unidade. Por outro lado, se escolhermos o sinal negativo em Eq. (3.32), ficamos com

$$\omega_- < 0, \quad (3.34)$$

pois o módulo do segundo termo de Eq. (3.32) é sempre maior que o módulo do primeiro. Como a métrica descrita por Eq. (3.8) é estacionária, ela admite um vetor de Killing  $\partial/\partial t$  [39]. Então, para que os modos em Eq. (3.30) sejam modos de frequência positiva com respeito ao vetor de Killing  $\partial/\partial t$ , escolheremos a solução positiva de Eq. (3.32), ou seja,

$$\omega_n = \frac{Sn}{\rho^2 - S^2} + \frac{S|n|}{\rho^2 - S^2} \sqrt{1 + \frac{\xi}{S^2 n^2} (n^2 + \rho^2 M^2)}. \quad (3.35)$$

Note que nesta última equação escrevemos  $\omega_n$  e não mais  $\omega$ , fato este que é explicado pela equação (3.32), onde observa-se que a quantidade  $\omega$  depende de  $n$ . Outro fato que merece destaque é que  $n$  assume os valores  $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ , ou seja,  $n$  é uma quantidade quantizada e por sua vez  $\omega_n$  também o é.

Como se pode notar em Ref.[31] e em Ref.[39], os modos em Eq. (3.30), com  $\omega$  dados por Eq. (3.35) são modos de frequência positiva com respeito a  $t$ , sendo autofunções do operador  $\partial/\partial t$ :

$$\frac{\partial \Phi_n(t, \phi)}{\partial t} = -i\omega_n \Phi_n(t, \phi), \quad \omega_n > 0. \quad (3.36)$$

Vamos seguir com a representação compacta para os modos

$$\Phi(t, \phi) = C_n e^{-i\omega_n t} e^{in\phi}. \quad (3.37)$$

A fim de determinar  $C_n$  na expressão (3.37), nos valeremos da seguinte relação

$$[\Psi(t, \phi), \pi(t, \phi')] = \Psi(t, \phi)\pi(t, \phi') - \pi(t, \phi')\Psi(t, \phi) = i\delta(\phi - \phi'), \quad (3.38)$$

onde como sabemos [30], [40]

$$\pi = \sqrt{|g|} g^{0\nu} \partial_\nu \Psi. \quad (3.39)$$

Assim vemos que [21]

$$\pi(t, \phi) = \left( \frac{\rho^2 - S^2}{\rho} \partial_t + \frac{S}{\rho} \partial_\phi \right) \Psi(t, \phi). \quad (3.40)$$

Para deduzirmos a expressão para a quantidade  $\pi$  dada em Eq. (3.39), escrevemos a ação para um campo escalar dotado de massa, num espaço-tempo curvo [40]:

$$S = \int d^4x L = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ g^{\mu\nu} \partial_\mu \Psi(t, \phi) \partial_\nu \Psi(t, \phi) - m^2 \Psi^2(t, \phi) \right], \quad (3.41)$$

onde  $L$  é a densidade de Lagrangiana. Então por meio da expressão

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 \Psi)}, \quad (3.42)$$

temos que

$$\begin{aligned}\pi &= \frac{1}{2} \frac{\partial \left[ \sqrt{-g} \left( g^{00} \partial_0 \Psi \partial_0 \Psi + 2g^{01} \partial_0 \Psi \partial_1 \Psi + g^{11} \partial_1 \Psi \partial_1 \Psi - m^2 \Psi^2 \right) \right]}{\partial(\partial_0 \Psi)} \\ &= \sqrt{-g} \left( g^{00} \partial_0 \Psi + g^{01} \partial_1 \Psi \right) = \sqrt{|g|} g^{\nu 0} \partial_\nu \Psi.\end{aligned}\quad (3.43)$$

que é a densidade de momento canonicamente conjugado dada por Eq. (3.39).

Ressaltamos aqui que se conhecermos o par  $[\Psi(t_0, \phi)\pi(t_0, \phi)]$  num dado instante inicial  $t_0$ , poderemos conhecê-lo em qualquer instante de tempo futuro, mas para isso o espaço-tempo deve ser globalmente hiperbólico [41]. Retornando então à determinação da quantidade  $C_n$ , precisaremos da expressão do campo escalar para que possamos calcular  $\pi(t, \phi)$  e finalmente encontrar o comutador dado por Eq. (3.38). O campo escalar  $\Psi$  se escreve como

$$\Psi(t, \phi) = \sum_n [a_n \Phi_n(t, \phi) + a_n^\dagger \Phi_n^*(t, \phi)] \quad (3.44)$$

onde  $\Phi_n$  são os modos de frequência positiva obtidos anteriormente:

$$\Phi_n(t, \phi) = C_n e^{i(n\phi - \omega t)}. \quad (3.45)$$

Observe que a quantidade  $\Psi(t, \phi)$  dada em Eq. (3.44) é um operador que atua no espaço de Hilbert, enquanto que o escalar  $\Phi_n(t, \phi)$  representa ondas planas, mas há aqui uma diferença notável entre Eq. (3.44) e Eq. (3.45), pois ondas planas não pertencem ao espaço de Hilbert. No entanto, uma soma de ondas planas (cujos coeficientes são dados pelos operadores  $a$  e  $a^\dagger$ ) pode pertencer ao espaço de Hilbert. Dando prosseguimento ao processo de quantização, levemos Eq. (3.44) em Eq. (3.40):

$$\pi(t, \phi') = -ib\omega \sum_k [a_k \Phi_k(t, \phi') - a_k^\dagger \Phi_k^*(t, \phi')] + i \frac{S}{\rho} n [a_k \Phi_k(t, \phi') - a_k^\dagger \Phi_k^*(t, \phi')] \quad (3.46)$$

onde

$$b \doteq \frac{\rho^2 - S^2}{\rho}, \quad (3.47)$$

e dessa forma:

$$\Psi(t, \phi)\pi(t, \phi') = -ib\omega \sum_{n,k} [a_n a_k \Phi_n \Phi'_k - a_n a_k^\dagger \Phi_n \Phi_k'^* + a_n^\dagger a_k \Phi_n^* \Phi'_k - a_n^\dagger a_k^\dagger \Phi_n^* \Phi_k'^*]$$

$$+ i\frac{S}{\rho}n \sum_{n,k} [a_n a_k \Phi_n \Phi'_k - a_n a_k^\dagger \Phi_n \Phi_k'^* + a_n^\dagger a_k \Phi_n^* \Phi'_k - a_n^\dagger a_k^\dagger \Phi_n^* \Phi_k'^*], \quad (3.48)$$

onde denotamos

$$\Phi'_n = \Phi_n(t, \phi').$$

Da mesma forma calculamos:

$$\begin{aligned} \pi(t, \phi') \Psi(t, \phi) &= -ib\omega \sum_{n,k} [a_k a_n \Phi'_k \Phi_n + a_k a_n^\dagger \Phi'_k \Phi_n^* - a_k^\dagger a_n \Phi_k'^* \Phi_n - a_k^\dagger a_n^\dagger \Phi_k'^* \Phi_n^*] \\ &+ i\frac{S}{\rho}n \sum_{n,k} [a_k a_n \Phi'_k \Phi_n + a_k a_n^\dagger \Phi'_k \Phi_n^* - a_k^\dagger a_n \Phi_k'^* \Phi_n - a_k^\dagger a_n^\dagger \Phi_k'^* \Phi_n^*]. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Substituindo Eqs. (3.48) e (3.49) em Eq. (3.38), ficamos com

$$i|C_n|^2 \left( b\omega - \frac{S}{\rho}n \right) \sum_{n,k} \left[ [a_n, a_k^\dagger] e^{-in(\phi-\phi')} + [a_n, a_k^\dagger] e^{in(\phi-\phi')} \right] = i\delta(\phi - \phi') \quad (3.50)$$

mas uma vez que

$$\sum_{n,k} \left[ [a_n, a_k^\dagger] e^{-in(\phi-\phi')} + [a_n, a_k^\dagger] e^{in(\phi-\phi')} \right] = 2(2\pi)\delta(\phi - \phi'), \quad (3.51)$$

resulta que

$$|C_n|^2 = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\left( b\omega - S n/\rho \right)}. \quad (3.52)$$

Levando então Eq. (3.35) e Eq. (3.47) nessa última equação concluímos que<sup>2</sup>

$$|C_n|^2 = \frac{1}{4\pi \sqrt{n^2 + M^2(\rho^2 - S^2)}}, \quad (3.53)$$

e a equação (3.45) fica escrita como

$$\Phi_n(t, \phi) = \left[ \frac{1}{4\pi \sqrt{n^2 + M^2(\rho^2 - S^2)}} \right]^{1/2} e^{i(n\phi - \omega t)}. \quad (3.54)$$

Em particular para  $n = 0$ , a equação (3.53) toma a forma

---

<sup>2</sup>Uma outra maneira para se determinar  $C_n$ , usando argumentos físicos diferentes, se encontra no apêndice B.

$$|C_n|^2 = \frac{1}{4\pi M \sqrt{\rho^2 - S^2}}. \quad (3.55)$$

Observamos neste ponto que a equação (3.55) apresenta duas patologias [21], a primeira delas se manifesta quando  $M = 0$  e a segunda quando  $S = \rho$ . A primeira diz respeito à divergência infravermelha, que já é bem conhecida da teoria quântica de campos em duas dimensões para campos sem massa [31]. Já a segunda, corresponde ao que chamamos de divergência cronológica, quando  $S = \rho$ . No caso em que  $S > \rho$  teremos uma perda de realidade devido ao número imaginário que surge no denominador de Eq. (3.55).

### 3.3 O propagador de Hadamard $G^1(x, x')$

No capítulo anterior, ao calcularmos o propagador descrito pela equação (2.57), nos deparamos com uma integral cuja resolução se dá pelo método de resíduos e polos. Naquele caso, escolhemos contornar os polos correspondentes da seguinte maneira: o polo da esquerda foi contornado por baixo e o da direita contornado por cima, conforme ilustra a figura 2.3. Todavia, essa não é a única maneira que isso pode ser feito e naturalmente, ao mudarmos a maneira como contornamos os polos, mudamos também o propagador obtido. Outra forma de contornarmos os polos que aparecem em Eq. (2.60) está representada na figura 3.3, e o propagador resultante é conhecido como função de Hadamard, ou ainda como função de Schwinger [30] que denotamos como  $G^{(1)}(x, x')$ . Como veremos nos capítulos seguintes, a determinação da função de Hadamard é de grande relevância, pois através dela podemos encontrar quantidades como as flutuações quânticas do vácuo [23]. Deve-se ressaltar que essa função é aquela definida no capítulo 2 na equação (2.76), a partir da qual vamos nessa seção encontrar a quantidade  $G^{(1)}(x, x')$  [31]. Para isso, precisaremos da expressão do campo quântico  $\Psi(\phi, t)$  encontrado anteriormente. E de acordo com essa abordagem, escrevemos  $G^{(1)}(x, x')$

$$G^1(x, x') = \langle 0 | \{ \Psi(t, \phi), \Psi(t', \phi') \} | 0 \rangle, \quad (3.56)$$

onde as chaves representam o anti-comutador:  $\{A, B\} = AB + BA$ , sendo  $A$  e  $B$  operadores. Então decorre imediatamente de Eq. (3.56) que

$$G^1(x, x') = \langle 0 | \Psi(t, \phi) \Psi(t', \phi') + \Psi(t', \phi') \Psi(t, \phi) | 0 \rangle \quad (3.57)$$

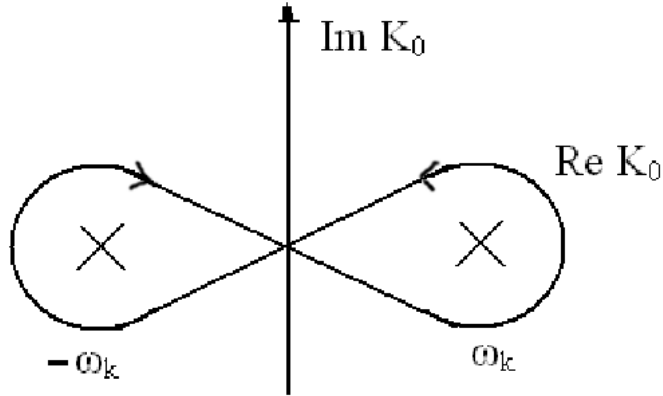


Figura 3.3: Maneira de contornar os polos que conduz ao propagador de Hadamard.

$$= \langle 0 | \Psi(t, \phi) \Psi(t', \phi') | 0 \rangle + \langle 0 | \Psi(t', \phi') \Psi(t, \phi) | 0 \rangle,$$

usando a expressão para o campo escalar dada em Eq. (3.44) ficamos com:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \Psi(t, \phi) \Psi(t', \phi') | 0 \rangle &= \sum_n \sum_k \langle 0 | (a_n \Phi_n + a_n^\dagger \Phi_n^*) (a_k \Phi'_k + a_k^\dagger \Phi'_k) | 0 \rangle \\ &= \sum_{n,k} \Phi_n(t, \phi) \Phi_k^*(t', \phi') \langle 0 | a_n a_k^\dagger | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.58)$$

No entanto,

$$\begin{aligned} \langle 0 | a_n a_k^\dagger | 0 \rangle &= \langle 0 | ([a_n, a_k^\dagger] + a_k^\dagger a_n) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \delta_{nk} | 0 \rangle = \delta_{nk}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Logo

$$\begin{aligned} \langle 0 | \Psi(t, \phi) \Psi(t', \phi') | 0 \rangle &= \sum_n \Phi_n(t, \phi) \Phi_n^*(t', \phi') \\ &= \sum_n |C_n|^2 e^{-i\omega(t-t')} e^{in(\phi-\phi')}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Da mesma forma obtemos

$$\langle 0 | \Psi(t', \phi') \Psi(t, \phi) | 0 \rangle = \sum_n |C_n|^2 e^{i\omega(t-t')} e^{-in(\phi-\phi')}. \quad (3.61)$$



Portanto de Eqs. (3.60) e (3.61) resulta que

$$G^1(x, x') = \sum_n |C_n|^2 \left[ e^{i(n\Delta\phi - \omega\Delta t)} + e^{-i(n\Delta\phi - \omega\Delta t)} \right], \quad (3.62)$$

onde introduzimos a notação

$$\Delta\phi = \phi - \phi' \quad (3.63)$$

e

$$\Delta t = t - t'. \quad (3.64)$$

De outra forma, teremos de Eq. (3.62):

$$G^1(x, x') = 2 \sum_n |C_n|^2 \cos(n\Delta\phi - \omega\Delta t). \quad (3.65)$$

Introduzindo o valor de  $|C_n|^2$  calculado anteriormente em Eq. (3.53), resulta

$$G^1(x, x') = 2 \sum_n \frac{1}{4\pi\sqrt{n^2 + M^2(\rho^2 - S^2)}} \cos(n\Delta\phi - \omega\Delta t). \quad (3.66)$$

Analisemos como fica escrita a equação (3.66) quando  $n = 0$ ,  $n > 0$  e  $n < 0$ . Essa análise é necessária, já que  $n$  assume os valores  $\pm 0, \pm 1, \pm 2 \dots$

De Eq. (3.32) vemos que, para  $n = 0$ , teremos

$$\omega = \frac{\rho M}{\sqrt{\rho^2 - S^2}}. \quad (3.67)$$

Ainda de Eq. (3.32), para o caso aproximado  $\rho M \ll 1$ , teremos

$$\omega = \frac{Sn + \rho|n|}{\rho^2 - S^2}. \quad (3.68)$$

Dessa última equação podemos analisar as situações em que  $n > 0$  e  $n < 0$ .

Para  $n > 0$  teremos:

$$\omega = \frac{n}{\rho - S} \quad (3.69)$$

e para  $n < 0$ :

$$\omega = \frac{-n}{\rho + S}. \quad (3.70)$$

Vamos agora abrir o somatório que aparece em Eq. (3.66) para os domínios  $n < 0$ ,  $n = 0$  e  $n > 0$ . De Eq. (3.66) e usando os resultados (3.67) a (3.70), teremos<sup>3</sup>:

$$G^1(x, x') = \frac{2}{4\pi M \sqrt{\rho^2 - S^2}} \cos\left(\frac{\rho M}{\sqrt{\rho^2 - S^2}} \Delta t\right) \quad (3.71)$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{n} \cos\left(n\Delta\phi + \frac{n\Delta t}{\rho + S}\right) + \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos\left(n\Delta\phi - \frac{n\Delta t}{\rho - S}\right),$$

onde nessa última equação consideramos que quando a massa do campo  $M$  é pequena,

$$|C_n|^2 = \frac{1}{4\pi n}, \quad n \neq 0. \quad (3.72)$$

Ainda nessa equação, vemos que  $n$  é um índice mudo e dessa forma quando  $n \rightarrow -n$ ,  $\sum_{n=-\infty}^{-1} \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}$ . Portanto,

$$G^1(x, x') = \frac{1}{2\pi M \sqrt{\rho^2 - S^2}} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos\left[\left(\Delta\phi - \frac{\Delta t}{\rho - S}\right)n\right]$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos\left[\left(\Delta\phi + \frac{\Delta t}{\rho + S}\right)n\right]. \quad (3.73)$$

Os somatórios acima podem ser resolvidos facilmente usando o seguinte resultado [42] :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos(nx) = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2(1 - \cos x)} = -\frac{1}{2} \ln \left(4 \sin^2 \frac{x}{2}\right). \quad (3.74)$$

Assim,

$$G^1(x, x') = \frac{1}{2\pi M \sqrt{\rho^2 - S^2}} - \frac{1}{4\pi} \ln \left\{ 4 \sin^2 \left[ \frac{1}{2} \left( \Delta\phi - \frac{\Delta t}{\rho - S} \right) \right] \right\}$$

$$- \frac{1}{4\pi} \ln \left\{ 4 \sin^2 \left[ \frac{1}{2} \left( \Delta\phi + \frac{\Delta t}{\rho + S} \right) \right] \right\}, \quad (3.75)$$

ou ainda, usando as propriedades da função logaritmo, resulta:

$$G^1(x, x') = \frac{1}{2\pi M \sqrt{\rho^2 - S^2}} \quad (3.76)$$

$$- \frac{1}{4\pi} \ln \left\{ 16 \sin^2 \left[ \frac{1}{2} \left( \Delta\phi - \frac{\Delta t}{\rho - S} \right) \right] \sin^2 \left[ \frac{1}{2} \left( \Delta\phi + \frac{\Delta t}{\rho + S} \right) \right] \right\}.$$

---

<sup>3</sup>note que estaremos a partir deste ponto considerando a expansão de  $G^1(x, x')$  para  $\rho M \ll 1$ .

Podemos escrever essa última equação de uma forma mais conveniente. Para isto, lembremos da identidade trigonométrica [42]:

$$\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{B-A}{2}\right) = \frac{1}{2}(\cos A - \cos B). \quad (3.77)$$

Por meio das identificações

$$A+B = \Delta\phi + \frac{\Delta t}{\rho+S} \quad ; \quad -A+B = \Delta\phi - \frac{\Delta t}{\rho-S} \quad (3.78)$$

segue que

$$A = \frac{\rho}{\rho^2 - S^2}\Delta t \quad ; \quad B = \Delta\phi - \frac{S\Delta t}{\rho^2 - S^2}. \quad (3.79)$$

Assim, escrevemos  $G^1(x, x')$  como

$$\begin{aligned} G^1(x, x') &= \frac{1}{2\pi M\sqrt{\rho^2 - S^2}} \\ &- \frac{1}{4\pi} \ln \left\{ 4 \left[ \cos\left(\frac{\rho}{\rho^2 - S^2}\Delta t\right) - \cos\left(\Delta\phi - \frac{S}{\rho^2 - S^2}\Delta t\right) \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.80)$$

E finalmente como

$$\begin{aligned} G^1(x, x') &= \frac{1}{2\pi M\sqrt{\rho^2 - S^2}} \\ &- \frac{1}{2\pi} \ln \left\{ 2 \left[ \cos\left(\frac{\rho}{\rho^2 - S^2}\Delta t\right) - \cos\left(\Delta\phi - \frac{S}{\rho^2 - S^2}\Delta t\right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

### 3.3.1 Renormalizando o propagador de Hadamard

Os pioneiros da teoria quântica de campos se confrontaram com um grande problema quando no desenvolvimento de seus cálculos encontraram integrais que divergiam. Eles passaram boa parte dos anos 1930 e 1940 trabalhando nesse problema tentando remover as quantidades infinitas que estavam aparecendo. Na época, a maioria dos físicos chegou até mesmo a abandonar a teoria quântica de campos. Até que então apareceu o chamado processo de renormalização, no qual as quantidades infinitas citadas acima “desaparecem”. Mas por muitos anos, mais precisamente nas décadas de 1960 e 1970, muitas pessoas olhavam para a renormalização com um certo receio e sua aceitação na comunidade científica fracassou. Contudo, no início da década de 1970 uma compreensão mais

refinada da teoria quântica de campos foi contemplada através dos esforços de Ken Wilson, Richard Feynman e muitos outros e o processo de renormalização passou a ser uma ferramenta fundamental na remoção de quantidades divergentes.

Nesta seção vamos renormalizar o propagador de Hadamard calculado acima, vamos então reescrever a função de Hadamard :

$$G^1(x, x') = \frac{1}{2\pi M \sqrt{\rho^2 - S^2}} - \frac{1}{4\pi} \ln \left\{ 4 \left[ \cos \left( \frac{\rho \Delta t}{\rho^2 - S^2} \right) - \cos \left( \Delta \phi - \frac{S \Delta t}{\rho^2 - S^2} \right) \right]^2 \right\}. \quad (3.82)$$

Para manter a simplicidade das equações nos capítulos seguintes, voltaremos a trabalhar nas coordenadas planas  $(T, \phi)$ . Essa última equação, por meio de Eq. (3.14), fica então escrita como

$$G^1(x, x') = \frac{1}{2\pi M \sqrt{\rho^2 - S^2}} - \frac{1}{4\pi} \ln \left\{ 4 \left[ \cos \left( \frac{\rho \Delta T - \rho S \Delta \phi}{\rho^2 - S^2} \right) - \cos \left( \frac{\rho^2 \Delta \phi - S \Delta T}{\rho^2 - S^2} \right) \right]^2 \right\}. \quad (3.83)$$

Desconsiderando-se a contribuição do termo que contém massa nesta última expressão, é possível verificar que a mesma corresponde à equação (4.23) em Ref. [31]. Note que as coordenadas  $(T, \phi)$  estão associadas ao espaço plano adaptadas a simetria cilíndrica. Mas de acordo com o que foi dito acima, para se renormalizar é necessário primeiro que apareça uma divergência, mas é exatamente isso o que aparece quando consideramos que  $\Delta T \ll 1$  e  $\Delta \phi \ll 1$  em Eq. (3.83):

$$G^1(x, x') = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{M \sqrt{\rho^2 - S^2}} + \ln \left( \frac{\Delta x}{\rho^2 - S^2} \right) \right], \quad (3.84)$$

onde  $\Delta x = \Delta T^2 - \rho^2 \Delta \phi^2$ . Essa última equação explicita a divergência que surge quando tomamos o limite  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Fazendo então  $S = 0$  na equação (3.83), teremos o propagador associado ao espaço de fundo:

$$G_0^1(x, x') = \frac{1}{2\pi M \rho} - \frac{1}{4\pi} \ln \left\{ 4 \left[ \cos \frac{\Delta t}{\rho} - \cos \Delta \phi \right]^2 \right\}. \quad (3.85)$$

Pode-se checar que este resultado coincide com a equação (13) de Ref. [23]. A divergência ultra-violeta que aparece em  $G^1(x, x')$  quando tomamos o limite  $\Delta x \rightarrow 0$ , pode ser eliminada se subtrairmos de (3.83) a contribuição do espaço de fundo representada por Eq. (3.85). Neste caso dizemos que o propagador é renormalizado ao subtrairmos Eq. (3.85) de Eq. (3.83):

$$\begin{aligned}
 G_R^1(x, x') &= \frac{1}{2\pi M} \left( \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - S^2}} - \frac{1}{\rho} \right) \\
 &- \frac{1}{4\pi} \ln \left\{ 4 \left[ \cos \left( \frac{\rho \Delta T - \rho S \Delta \phi}{\rho^2 - S^2} \right) - \cos \left( \frac{\rho^2 \Delta \phi - S \Delta T}{\rho^2 - S^2} \right) \right]^2 \right\} \\
 &+ \frac{1}{4\pi} \ln \left\{ 4 \left[ \cos \frac{\Delta t}{\rho} - \cos \Delta \phi \right]^2 \right\}. \tag{3.86}
 \end{aligned}$$

Assim, estaremos retirando do propagador a contribuição do espaço de fundo que possui a topologia de um cilindro. Neste caso, o que restará no propagador renormalizado, dado por Eq.(3.86), será a contribuição devida somente a presença do parâmetro de rotação  $S$ . Para ficar claro que a divergência de natureza ultra-violeta não mais se faz presente em Eq. (3.86), basta considerar nesta mesma equação que  $\Delta T \ll 1$  e  $\Delta \phi \ll 1$ , assim temos que:

$$G_R^1(x, x') = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{M} \left( \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - S^2}} - \frac{1}{\rho} \right) + \ln \left( \frac{\rho^2 - S^2}{\rho^2} \right) \right]. \tag{3.87}$$

De fato, o processo de renormalização removeu a divergência de natureza ultra-violeta que havia em  $G^1(x, x')$ . No entanto, é interessante notar que ainda resta uma divergência em Eq. (3.87), porém não mais se trata de uma de uma divergência ultra-violeta, mas sim de uma divergência cronológica, pois quando  $S \rightarrow \rho$ ,  $G^1(x, x') \rightarrow -\infty$ .

### 3.4 Tópicos de Teoria Quântica de Campos em espaços-tempos curvos

Existem quatro interações fundamentais da natureza, a eletromagnética, a nuclear fraca, a nuclear forte e a gravitacional. As três primeiras tem seu embasamento na teoria quântica de campos no espaço-tempo de Minkowski e são experimentalmente comprovadas. Já a gravitação é essencialmente uma teoria clássica de campos, a qual descreve a interação

gravitacional por meio da curvatura do espaço-tempo, esta teoria possui também uma considerável precisão experimental. No intuito associar a relatividade geral à uma teoria quântica de campos, alguns físicos empenham-se na busca de uma gravitação quântica, enquanto outros dedicam-se a elaborar uma teoria que combine os ingredientes fundamentais da teoria quântica de campos e da relatividade geral, que ficou conhecida como teoria quântica de campos em espaços curvos (TQCEC) [31].

Neste trabalho examinamos a quantização de um campo escalar com massa num espaço-tempo curvo. Portanto, é natural que ao longo do texto encontrem-se quantidades relativas à TQCEC, como por exemplo o d'Alambertiano que aparece na equação (3.22). Apresentamos então nessa seção alguns tópicos de TQCEC.

Começamos com a seguinte quantidade, que é um invariante no espaço-tempo de Minkowski:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (3.88)$$

Na teoria da gravitação de Einstein, a métrica  $\eta_{\mu\nu}$  é substituída por  $g_{\mu\nu}$ , que é uma função das coordenadas espaço-temporais. O princípio geral da covariância diz a física deve ser invariante sob transformações arbitrárias de coordenadas  $x \rightarrow x'(x)$ . Mas como sabemos, a quantidade  $ds^2$  é sempre um invariante sob transformações de coordenadas, assim:

$$ds^2 = g'_{\lambda\sigma} dx'^{\lambda} dx'^{\sigma} = g'_{\lambda\sigma} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} dx^{\mu} dx^{\nu} = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, \quad (3.89)$$

onde a métrica se transforma como:

$$g_{\mu\nu}(x) = g'_{\lambda\sigma}(x') \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}}. \quad (3.90)$$

O inverso da métrica  $g_{\mu\nu}$  é dado por

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta^{\mu}_{\lambda}. \quad (3.91)$$

No espaço-tempo de Minkowski, a ação para um campo escalar com massa é dada pela equação (2.1), já no espaço-tempo curvo, essa ação se escreve como:

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \Psi \partial_{\nu} \Psi - m^2 \Psi^2). \quad (3.92)$$

Basicamente as expressões dadas por Eq. (2.1) e Eq. (3.92) diferem pelo termo  $\sqrt{-g}$  e pela métrica. Uma vez que conhecemos a ação para um campo escalar do espaço plano,

o princípio da covariância nos garante que para escrevermos essa ação no espaço curvo, basta trocarmos  $\eta_{\mu\nu}$  por  $g_{\mu\nu}$ . Mas ainda resta entendermos o papel do termo  $\sqrt{-g}$  que aparece em Eq. (3.92). Para isso, vamos analisar: o que acontece com a quantidade  $d^4x$  quando realizamos uma transformação de coordenadas  $x \rightarrow x'(x)$ ? A resposta é naturalmente encontrada na expressão

$$d^4x' = d^4x \det(\partial x' / \partial x). \quad (3.93)$$

Porém tomando o determinante de Eq. (3.90), resulta que

$$\det g_{\mu\nu} \doteq g = \det\left(g'_{\lambda\sigma} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}}\right), \quad (3.94)$$

ou ainda que

$$g = g' \left[ \det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) \right]^2. \quad (3.95)$$

Multiplicando então ambos os lados dessa última expressão por  $(-1)$  e tomando a raiz resulta que:

$$\sqrt{-g} = \sqrt{-g'} \det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right). \quad (3.96)$$

Levando então Eq. (3.96) em Eq. (3.93), vemos que a quantidade

$$d^4x' = d^4x \sqrt{-g} \quad (3.97)$$

é um invariante sob transformações de coordenadas, o que vem esclarecer a função do termo  $\sqrt{-g}$  que aparece em Eq. (3.92). É lícito dizer que ao escrevermos a ação para um campo escalar no espaço curvo, devemos usar derivadas covariantes  $D_{\mu}$  da relatividade geral, ao invés das derivadas  $\partial_{\mu}$ , sendo que:

$$D_{\mu}V_{\nu} = \frac{\partial V_{\nu}}{\partial x^{\mu}} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}V_{\lambda}, \quad (3.98)$$

onde  $V_{\mu}$  é um tensor covariante e

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda} \left( \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right). \quad (3.99)$$

No entanto, como se trata de um campo escalar, essas derivadas coincidem. Então resulta que

$$D_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi. \quad (3.100)$$

Uma vez que temos a ação de campo escalar de massa  $m$ , num espaço curvo, podemos então encontrar a equação de movimento. Para isso, basta realizarmos uma integração por partes em Eq. (3.92), de onde vemos que

$$S = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \Psi \left( \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu + m^2 \right) \Psi. \quad (3.101)$$

Logo pelo princípio da mínima ação,  $\delta S = 0$ , chegamos na seguinte equação de movimento:

$$\left( \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu + m^2 \right) \Psi = 0. \quad (3.102)$$

O termo entre parênteses nessa última equação representa o d'Alambertiano dado por Eq. (3.22). Note que, se quisermos recuperar a expressão para o d'Alambertiano dado por Eq. (2.3), basta trocarmos  $\det g_{\mu\nu}$  por  $\det \eta_{\mu\nu}$  em Eq. (3.102), pois  $\det \eta_{\mu\nu} = -1$ .



## Capítulo 4

# Quantização de um campo escalar no círculo girante: o propagador de Feynman

No capítulo anterior, quantizamos um campo escalar massivo no espaço-tempo de um círculo girante e encontramos o propagador de Hadamard. O método que usamos para quantizar consistia basicamente em encontrar a solução para a equação de Klein-Gordon, ou seja, encontrarmos os modos normais de vibração. Nesse capítulo também vamos quantizar um campo escalar massivo no mesmo espaço-tempo que usamos no capítulo anterior, porém o método de quantização que usaremos aqui é diferente, o que torna o texto mais rico em conteúdo. Da mesma forma que encontramos no capítulo anterior o propagador de Hadamard, aqui encontraremos o propagador de Feynman e mostramos que existe uma relação de proporcionalidade entre eles.

### 4.1 Quantização

Vamos considerar a métrica do espaço-tempo (1+1) que denominamos no capítulo anterior por círculo girante:

$$ds^2 = (dt + Sd\phi)^2 - \rho^2 d\phi^2 \quad (4.1)$$

que é a mesma métrica apresentada no capítulo 3 em Eq. (3.8) a menos de um fator  $\alpha$ , pois o mesmo, como já mencionamos, não é relevante neste caso 2-dimensional, podendo

ser absorvido pelo parâmetro  $\rho$ :  $\alpha\rho \rightarrow \rho$ . Note que  $\rho$  representa um parâmetro associado ao **raio do anel** definido pela coordenada angular  $\phi$ :  $0 < \phi < 2\pi$ . Na equação (3.10) podemos escolher  $\rho$  de tal maneira que quando

$$\rho < S \tag{4.2}$$

decorre imediatamente que  $ds^2 > 0$ , resultando quando  $S \neq 0$ , em uma curva do tipo fechada (CTC). Assim o parâmetro  $\rho$  deve ser tomado com limite

$$\rho > S, \tag{4.3}$$

para que o espaço-tempo considerado seja globalmente hiperbólico, onde garantimos a validade da teoria quântica de campos. O valor  $\rho = S \doteq \rho_c$  será denotado como horizonte cronológico. A partir deste valor:  $0 \leq \rho \leq \rho_c$ , o espaço-tempo não possui uma superfície de Cauchy global.

Vamos considerar agora a derivação da função de Green  $G_F$  (propagador de Feynman). Para um campo escalar massivo,  $G_F$  deve satisfazer a equação [31]

$$(\square + M^2)G_F(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\delta^2(\vec{x} - \vec{x}'), \tag{4.4}$$

onde  $\square$  é dado por Eq (3.22). A equação (4.4) é essencialmente a mesma que aquela dada por Eq. (2.83), elas diferem basicamente no termo  $\sqrt{-g}$  (onde  $g = \det g_{\mu\nu}$ ) que aparece no denominador de Eq. (4.4). Mas no espaço-tempo de Minkowski,  $\sqrt{-g} = 1$ .

A métrica tem componentes

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & S \\ S & -(\rho^2 - S^2) \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

onde  $\det g_{\mu\nu} = -\rho^2$ , e com inversa

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{\rho^2} \begin{pmatrix} \beta & S \\ S & -1 \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

onde

$$\beta \doteq \rho^2 - S^2.$$

Assim, o operado d'Alambertiano será escrito na forma

$$\begin{aligned}\square &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho g^{11} \frac{\partial}{\partial t} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho g^{12} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \rho g^{21} \frac{\partial}{\partial t} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \rho g^{22} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ &= g^{11} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + g^{22} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + 2g^{12} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \phi}\end{aligned}\quad (4.7)$$

ou

$$\square = \left( 1 - \frac{S^2}{\rho^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + 2 \frac{S}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \phi} . \quad (4.8)$$

Então a função de Green deve satisfazer a seguinte equação diferencial parcial

$$\left[ \left( 1 - \frac{S^2}{\rho^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + 2 \frac{S}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial t \partial \phi} + M^2 \right] G_F(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{\rho} \delta^2(\vec{x} - \vec{x}') . \quad (4.9)$$

A fim de resolver este problema vamos procurar pelas autofunções do operador  $\square + M^2$ . Neste caso, precisaremos resolver a equação de autovalores

$$(\square + M^2)\psi(\vec{x}) = \lambda\psi(\vec{x}) . \quad (4.10)$$

Vamos procurar por soluções do tipo

$$\psi(x) = \chi(\phi) e^{-i\omega t} . \quad (4.11)$$

Tomando as derivadas de  $\psi(x)$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(x) = -\omega^2 \chi e^{-i\omega t} , \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \psi(x) = \frac{\partial^2 \chi}{\partial \phi^2} e^{-i\omega t} , \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial \phi} \psi(x) = -i\omega \frac{\partial \chi}{\partial \phi} e^{-i\omega t} . \quad (4.14)$$

Então de Eq. (4.8) e de Eq. (4.10), juntamente com os resultados de Eqs. (4.12) a Eq. (4.14), resulta

$$-\omega^2 \left( 1 - \frac{S^2}{\rho^2} \right) \chi - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \phi^2} - 2i\omega \frac{S}{\rho^2} \frac{\partial \chi}{\partial \phi} + M^2 \chi = \lambda \chi \quad (4.15)$$

ou

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial \phi^2} + 2i\omega S \frac{\partial \chi}{\partial \phi} + \left[ \omega^2(\rho^2 - S^2) - M^2 \rho^2 + \lambda \rho^2 \right] \chi = 0. \quad (4.16)$$

Claramente esta equação admite soluções do tipo

$$\chi(\phi) = C_0 e^{i\xi\phi} \quad (4.17)$$

Vejamos, substituindo Eq. (4.17) em Eq. (4.16) obtemos

$$\xi^2 + 2\omega S \xi - \omega^2(\rho^2 - S^2) + M^2 \rho^2 - \lambda \rho^2 = 0, \quad (4.18)$$

de onde vemos que

$$\xi = -\omega S \pm \sqrt{\omega^2 \rho^2 - M^2 \rho^2 + \lambda \rho^2}. \quad (4.19)$$

Dessa forma  $\chi(\phi)$  admite soluções na forma:

$$\chi(\phi) = C_0 e^{i[-\omega S \pm \sqrt{\omega^2 \rho^2 - M^2 \rho^2 + \lambda \rho^2}] \phi}. \quad (4.20)$$

Finalmente a solução da equação (4.10) será dada por

$$\psi(x) = C_0 e^{i[-\omega S \pm \sqrt{\omega^2 \rho^2 - M^2 \rho^2 + \lambda \rho^2} \phi - \omega t]}. \quad (4.21)$$

Como vemos, temos dois tipos de soluções. No entanto, as autofunções devem ter uma periodicidade de  $2\pi$ :

$$\psi(\phi) = \psi(\phi + 2\pi). \quad (4.22)$$

Então, impondo que  $\chi(0) = \chi(2\pi) \quad \forall t$ , encontramos que

$$1 = e^{i[-\omega S \pm \sqrt{\omega^2 \rho^2 - M^2 \rho^2 + \lambda \rho^2}] 2\pi} = e^{im(2\pi)}. \quad (4.23)$$

Assim,

$$m = -\omega S \pm \sqrt{\omega^2 \rho^2 - M^2 \rho^2 + \lambda \rho^2}, \quad (4.24)$$

ou ainda

$$\lambda = \frac{1}{\rho^2} (m + \omega S)^2 + M^2 - \omega^2. \quad (4.25)$$

Retornando então à Eq. (4.21), segue, por meio da equação (4.24), que:

$$\psi(x) = C_0 e^{im\phi - i\omega t} \quad (4.26)$$

são as auto-funções do operador  $\square + M^2$ , com auto valores

$$\lambda = \frac{1}{\rho^2}(m + \omega S)^2 + M^2 - \omega^2,$$

onde

$$-\infty < \omega < +\infty$$

e

$$m = 0, \pm 1 \pm 2, \dots$$

Requeremos que as autofunções sejam ortonormais, ou seja que obedecem à relação

$$\sum_m \int d\omega \psi(\vec{x}) \psi^*(\vec{x}') = \frac{1}{\sqrt{-g}} \delta^2(\vec{x} - \vec{x}') \quad (4.27)$$

fato este que nos possibilitará determinar a constante  $C_0$  em Eq. (4.26). Dessa forma

$$\psi(\vec{x}) \psi^*(\vec{x}') = |C_0|^2 e^{im(\phi - \phi')} e^{-i\omega(t - t')} \quad (4.28)$$

e

$$\sum_m \int d\omega \psi(\vec{x}) \psi^*(\vec{x}') = |C_0|^2 \sum_m e^{im(\phi - \phi')} \int d\omega e^{-i\omega(t - t')}. \quad (4.29)$$

Usando as representações

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega(t - t')} \quad (4.30)$$

e

$$\delta(\phi - \phi') = \frac{1}{2\pi} \sum_m e^{im(\phi - \phi')}, \quad (4.31)$$

resulta que

$$\sum_m \int d\omega \psi(x) \psi^*(x') = |C_0|^2 \delta(t - t') \delta(\phi - \phi') (4\pi^2). \quad (4.32)$$

Então comparando esta última expressão com Eq. (4.27) determinamos que

$$|C_0|^2 = \frac{1}{(2\pi)^2 \rho}. \quad (4.33)$$

Desta forma concluímos que

$$\psi_m(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\rho}} e^{im\phi} e^{-i\omega t}. \quad (4.34)$$

## 4.2 O propagador de Feynman

Nessa seção vamos encontrar o propagador de Feynman, para isso nos valem seguinte relação [12]

$$G_F(x, x') = -i \int_0^\infty d\eta \sum_m \int d\omega e^{-i\lambda\eta} \psi_m(x) \psi_m^*(x'), \quad (4.35)$$

de onde obtemos que

$$\begin{aligned} G_F(x, x') &= \frac{-i}{(2\pi)^2 \rho} \int_0^\infty d\eta \sum_m \int d\omega \exp\left\{-i \left[ \frac{1}{\rho^2} (m + \omega S)^2 + M^2 - \omega^2 \right] \eta\right\} \\ &\times \exp\{im(\phi - \phi')\} \times \exp\{-i\omega(t - t')\}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Vamos Definir

$$\Delta\phi = \phi - \phi' \quad (4.37)$$

e

$$\Delta t = t - t'. \quad (4.38)$$

Assim,

$$\begin{aligned} G_F(x, x') &= \frac{-i}{(2\pi)^2 \rho} \int_0^\infty d\eta \sum_m \int d\omega \exp\left\{-i\eta \left( \frac{S^2}{\rho^2} - 1 \right) \omega^2 - i \left( 2m \frac{S}{\rho} \eta + \Delta t \right) \omega\right\} \\ &\times \exp\left\{-i \left( \frac{m^2}{\rho^2} \eta + M^2 \eta - m \Delta\phi \right)\right\}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Antes de prosseguir vamos verificar se Eq. (4.35) é realmente solução da equação (4.4). Tomando o operador  $\square$  em Eq. (4.35), teremos

$$\square G_F = -i \int_0^\infty d\eta \sum_m \int d\omega e^{-i\lambda\eta} \square \psi_m(x) \psi_m^*(x'). \quad (4.40)$$

Mas de Eq. (4.10),

$$\square\psi(x) = (\lambda - M^2)\psi(x). \quad (4.41)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \square G_F &= -i \int_0^\infty d\eta \sum_m \int d\omega e^{-i\lambda\eta} (\lambda - M^2) \psi_m(x) \psi_m^*(x') \\ &= -i \int_0^\infty d\eta \sum_m \int d\omega e^{-i\lambda\eta} \lambda \psi_m(x) \psi_m^*(x') \\ &\quad + iM^2 \int_0^\infty d\eta \sum_m \int d\omega e^{-i\lambda\eta} \psi_m(x) \psi_m^*(x'). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Logo

$$\square G_F = -i \int_0^\infty d\eta \sum_m \int d\omega e^{-i\lambda\eta} \lambda \psi_m(x) \psi_m^*(x') - M^2 G_F, \quad (4.43)$$

ou seja,

$$(\square + M^2)G_F = -i \int_0^\infty d\eta \sum_m \int d\omega e^{-i\lambda\eta} \lambda \psi_m(x) \psi_m^*(x'). \quad (4.44)$$

Realizando a integração em  $\eta$  [42] (assumindo que  $\lambda$  tenha uma parcela infinitesimal imaginária, a fim de garantir a convergência da integração), teremos

$$(\square + M^2)G_F = -i \sum_m \int d\omega \frac{-i}{\lambda} \lambda \psi_m(x) \psi_m^*(x') = \sum_m \int d\omega \psi_m(x) \psi_m^*(x') = \frac{-1}{\sqrt{-g}} \delta^2(\vec{x} - \vec{x}') \quad (4.45)$$

onde na última passagem usamos a equação (4.27). Fica então demonstrado que  $G_F(x, x')$  apresentado em Eq. (4.35) satisfaz à equação (4.4). Vamos então retornar a expressão dada por Eq. (4.39). Primeiramente efetuaremos a integração na variável  $\omega$ , para isso vamos nos valer do seguinte resultado [42]:

$$\int d\omega e^{ia\omega^2 - ib\omega} = \sqrt{\frac{i\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4ia}}. \quad (4.46)$$

Logo

$$\int d\omega \exp\left\{i\eta\left(1 - \frac{S^2}{\rho^2}\right)\omega^2 - i\left(2m\frac{S}{\rho^2}\eta + \Delta t\right)\omega\right\}$$

$$= \left[ \frac{i\pi}{\eta \left(1 - \frac{S^2}{\rho^2}\right)} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{\left(2m \frac{S}{\rho^2} \eta + \Delta t\right)^2}{4i\eta \left(1 - S^2/\rho^2\right)} \right\}. \quad (4.47)$$

Assim,

$$G_F(x, x') = \frac{-i}{(2\pi)^2 \rho} \int_0^\infty d\eta \sum_m \left[ \frac{i\pi}{\eta \left(1 - S^2/\rho^2\right)} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{(2\eta m S/\rho^2 + \Delta t)^2}{4i\eta \left(1 - S^2/\rho^2\right)} \right\} \\ \times \exp \left\{ -i \left( \frac{m^2}{\rho^2} \eta + M^2 \eta - m \Delta \phi \right) \right\}. \quad (4.48)$$

Vamos reescrever as exponenciais na expressão acima na forma

$$G_F(x, x') = \frac{-i}{(2\pi)\rho} \int_0^\infty d\eta \sum_m \left[ \frac{i\pi}{\eta \left(1 - S^2/\rho^2\right)} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -i \left[ \frac{mS}{\rho^2} \frac{\Delta t}{1 - S^2/\rho^2} - m \Delta \phi \right] \right\} \\ \times \exp \left\{ -i \left[ \left( \frac{m^2}{\rho^2} + \frac{m^2 S^2}{\rho^4} \frac{1}{1 - S^2/\rho^2} \right) \eta + M^2 \eta + \frac{\Delta t^2}{4(1 - S^2/\rho^2)} \frac{1}{\eta} \right] \right\}. \quad (4.49)$$

Mas uma vez que

$$\frac{m^2}{\rho^2} + \frac{m^2 S^2}{\rho^4} \frac{1}{1 - S^2/\rho^2} = \frac{1}{1 - S^2/\rho^2} \left[ \frac{m^2}{\rho^2} \left(1 - \frac{S^2}{\rho^2}\right) + \frac{m^2 S^2}{\rho^4} \right] = \\ = \frac{1}{1 - S^2/\rho^2} \left( \frac{m^2}{\rho^2} \right) = \frac{m^2/\rho^2}{1 - S^2/\rho^2}, \quad (4.50)$$

segue que

$$G_F(x, x') = \frac{-i}{(2\pi)^2 \rho} \sum_m \exp \left\{ -i \left[ \frac{mS}{\rho^2} \frac{\Delta t}{1 - S^2/\rho^2} - m \Delta \phi \right] \right\} \int_0^\infty d\eta \left[ \frac{i\pi}{(1 - S^2/\rho^2)\eta} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \times \exp \left\{ -i \left[ \left( \frac{m^2/\rho^2}{1 - S^2/\rho^2} + M^2 \right) \eta + \frac{\Delta t^2}{4(1 - S^2/\rho^2)} \frac{1}{\eta} \right] \right\}. \quad (4.51)$$

Vamos assumir que  $\rho > S$ , (lembramos que isso garante a hiperbolicidade global do espaço-tempo).

$$G_F(x, x') = \frac{-i^{3/2}}{4(\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{(\rho^2 - S^2)}} \sum_m \exp \left\{ -im \left( \frac{\Delta t S}{\rho^2 - S^2} - \Delta \phi \right) \right\} \\ \times \int_0^\infty d\eta \frac{1}{\sqrt{\eta}} \exp \left\{ -i \left( \frac{m^2}{\rho^2 - S^2} + M^2 \right) \eta - i \frac{\rho^2 \Delta t^2 / 4}{\rho^2 - S^2} \frac{1}{\eta} \right\}. \quad (4.52)$$



Vamos procurar resolver a integração acima separadamente. Temos,

$$F(m) \doteq \int_0^\infty d\eta \frac{1}{\sqrt{\eta}} \exp\left\{i\frac{\mu}{2}\eta + i\frac{\mu}{2}\beta^2\frac{1}{\eta}\right\} \quad (4.53)$$

onde definimos

$$\frac{\mu}{2} = -\left(\frac{m^2}{\rho^2 - S^2} + M^2\right) \quad (4.54)$$

e

$$\beta^2 = -\frac{\rho^2\Delta t^2}{2\mu(\rho^2 - S^2)} = -\frac{\rho^2\Delta t^2/4}{m^2 + M^2(\rho^2 - S^2)}. \quad (4.55)$$

Entretanto, a solução da integral em Eq. (4.53) pode ser apresentada na forma [42]

$$F(m) = i\pi\beta^{1/2}e^{-i\pi/4}H_{-1/2}^{(1)}(\beta\mu), \quad (4.56)$$

com  $Im\mu > 0$  ;  $Im\beta^2\mu > 0$ . Podemos utilizar esta solução se admitirmos que  $\mu$  possui uma parcela imaginária infinitesimal (por exemplo, assumindo que a massa tenha uma parte imaginária). Desta forma, podemos na solução representada em Eq. (4.56), expandir a função de Bessel do terceiro tipo  $H_\nu^{(1)}(z)$  em torno de  $\xi = 0$  em  $\mu' = \mu + i\xi$ , para analisarmos o comportamento da solução em Eq. (4.52) no limite  $\xi \rightarrow 0$ .

Vejamos, fazendo

$$\mu \rightarrow \mu' = \mu + i\xi \quad (4.57)$$

em Eq. (4.56):

$$F(m) = i\pi\beta^{1/2}e^{-i\pi/4}H_{-1/2}^{(1)}(\beta\mu + i\beta\xi). \quad (4.58)$$

Utilizando a propriedade de  $H_\nu^{(1)}$  [44]

$$H_{-\nu}^{(1)}(z) = e^{i\pi\nu}H_\nu^{(1)}(z) \quad (4.59)$$

segue

$$F(m) = i\pi\beta^{1/2}e^{i\pi/4}H_{1/2}^{(1)}(\beta\mu + i\beta\xi). \quad (4.60)$$

Se expandirmos Eq. (4.60) para  $\xi \rightarrow 0$  teremos uma série com o primeiro termo  $H_{1/2}^{(1)}(\beta\mu)$  e os outros de ordem maior ou igual a  $\xi$ . Sendo  $\xi$  arbitrariamente pequeno, podemos negligenciar estes termos. Desta forma

$$F(m) = i\pi\beta^{1/2}e^{i\pi/4}H_{1/2}^{(1)}(\beta\mu) \quad (4.61)$$

onde

$$\beta = \frac{\rho\Delta t}{2} \left[ m^2 + M^2\rho^2 \left( 1 - \frac{S^2}{\rho^2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (4.62)$$

e  $\mu$  é dado por Eq. (4.54). O produto  $\beta\mu$  será então

$$\beta\mu = \frac{-\rho\Delta t[m^2 + M^2\rho^2(1 - S^2/\rho^2)]^{-1/2}}{\rho^2(1 - S^2/\rho^2)}. \quad (4.63)$$

Assim, retornando a Eq. (4.52), resulta

$$\begin{aligned} G_F(x, x') &= \frac{i}{4\pi^{1/2}} \left[ \frac{\Delta t}{2\rho\Omega} \right]^{\frac{1}{2}} \sum_m \exp \left\{ -im \left( \frac{S\Delta t}{\rho^2\Omega} - \Delta\phi \right) \right\} (m^2 + M^2\rho^2\Omega)^{-1/4} \\ &\times H_{1/2}^{(1)} \left[ \frac{-\Delta t}{\rho\Omega} (m^2 + M^2\rho^2\Omega)^{1/2} \right]. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Na expressão acima introduzimos a notação

$$\Omega \doteq 1 - \frac{S^2}{\rho^2}. \quad (4.65)$$

Vamos agora separar o somatório para os domínios  $m = 0$ ,  $m > 0$  e  $m < 0$ :

$$\begin{aligned} G_F(x, x') &= \frac{i}{4\pi^{1/2}} \left( \frac{\Delta t}{2\rho\Omega} \right)^{\frac{1}{2}} (M^2\rho^2\Omega)^{-1/4} H_{1/2}^{(1)} \left[ \frac{-M\Delta t}{\Omega^{1/2}} \right] + \frac{i}{4\pi^{1/2}} \left[ \frac{\Delta t}{2\rho\Omega} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\times \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \exp \left[ im \left( \frac{S\Delta t}{\rho^2\Omega} - \Delta\phi \right) \right] + \exp \left[ -im \left( \frac{S\Delta t}{\rho^2\Omega} - \Delta\phi \right) \right] \right\} \\ &\times (m^2 + M^2\rho^2\Omega)^{-1/4} H_{1/2}^{(1)} \left[ \frac{-\Delta t}{\rho\Omega} (m^2 + M^2\rho^2\Omega)^{1/2} \right], \end{aligned} \quad (4.66)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} G_F(x, x') &= \frac{i}{4\pi^{1/2}} \left( \frac{\Delta t}{2\rho^2 M} \right)^{1/2} \frac{1}{\Omega^{3/4}} H_{1/2}^{(1)} \left[ \frac{-M\Delta t}{\Omega^{1/2}} \right] \\ &+ \frac{i}{2\pi^{1/2}} \left( \frac{\Delta t}{2\rho\Omega} \right)^{1/2} \sum_{m=1}^{\infty} \cos \left[ m \left( \frac{S\Delta t}{\rho^2\Omega} - \Delta\phi \right) \right] (m^2 + M^2\rho^2\Omega)^{-1/4} \\ &\times H_{1/2}^{(1)} \left[ \frac{-\Delta t}{\rho\Omega} (m^2 + M^2\rho^2\Omega)^{1/2} \right]. \end{aligned} \quad (4.67)$$

No entanto, a função de Hankel acima possui a seguinte representação [44]

$$H_{1/2}^{(1)}(-z) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-iz}}{\sqrt{-z}}. \quad (4.68)$$

Introduzindo então Eq. (4.68) em Eq. (4.67) encontramos:

$$\begin{aligned} G_F(x, x') &= \frac{-i}{4\pi M\rho\Omega^{1/2}} \exp\left(\frac{-iM\Delta t}{\Omega^{1/2}}\right) - \frac{i}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \cos\left[m\left(\frac{S\Delta t}{\rho^2\Omega} - \Delta\phi\right)\right] \right. \\ &\times \left. \frac{1}{(m^2 + M^2\rho^2\Omega)^{1/2}} \exp\left[\frac{-i\Delta t}{\rho\Omega}(m^2 + M^2\rho^2\Omega)^{1/2}\right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Vamos considerar apenas os termos dominantes na expansão  $M\rho \ll 1$ :

$$G_F(x, x') = \frac{-i}{4\pi M\rho\Omega^{1/2}} - \frac{\Delta t}{4\pi\rho\Omega} - \frac{i}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cos\left[m\left(\frac{S\Delta t}{\rho^2\Omega} - \Delta\phi\right)\right] e^{-\frac{im\Delta t}{\rho\Omega}}. \quad (4.70)$$

O somatório que aparece nessa expressão é conhecido na literatura [45]:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^m}{m} \cos(mx) e^{-ma} = \frac{a}{2} - \frac{1}{2} \ln [2(\cosh a \mp \cos x)] \quad (4.71)$$

Assim, reescrevemos (4.70) sob a forma

$$G_F(x, x') = \frac{-i}{4\pi M\rho\Omega^{1/2}} + \frac{i}{4\pi} \ln \left\{ 2 \left[ \cos\left(\frac{\Delta t}{\rho\Omega}\right) - \cos\left(\frac{S\Delta t}{\rho^2\Omega} - \Delta\phi\right) \right] \right\}. \quad (4.72)$$

No sentido de encontrarmos a relação do propagador de Hadamard com  $G_F(x, x')$ , vamos escrever essa última expressão sob a forma

$$G_F(x, x') = \frac{-i}{4\pi M\sqrt{\rho^2 - S^2}} + \frac{i}{4\pi} \ln \left\{ 2 \left[ \cos\left(\frac{\rho}{\rho^2 - S^2}\Delta t\right) - \cos\left(\Delta\phi - \frac{S}{\rho^2 - S^2}\Delta t\right) \right] \right\}. \quad (4.73)$$

Note que  $G_F(x, x')$  encontrado em (4.73) coincide com  $G^{(1)}(x, x')$  obtido na equação (3.81) do capítulo anterior, a menos de um fator  $-\frac{i}{2}$ , de onde concluímos que

$$G_F(x, x') = -\frac{i}{2}G^{(1)}(x, x'). \quad (4.74)$$

O que vem deixar claro que essa última equação está de acordo com Eq. (2.87), a qual relaciona o propagador de Feynman com o propagador de Hadamard. No entanto, em Eq. (2.87) aparece o termo  $\bar{G}(r, r')$  que não está presente em Eq. (4.74), pois neste caso, este termo é identicamente nulo.

### 4.2.1 Renormalizando o propagador de Feynman

Nessa seção vamos renormalizar o propagador de Feynman. O processo de renormalização é exatamente aquele apresentado quando renormalizamos o propagador de Hadamard, ou seja, vamos retirar do propagador de Feynman a contribuição do espaço de fundo que possui a topologia de um cilindro. Para isso, devemos obter inicialmente o propagador associado ao espaço de fundo, e para isso basta fazermos  $S = 0$  na expressão do propagador de Feynman. Vamos escrever a quantidade  $G_F(x, x')$  em termos das coordenadas  $(T, \phi)$ , a razão disso reside no fato de que queremos trabalhar, no capítulo seguinte, com equações mais simples quando calcularmos o desvio quadrático médio  $\langle \Psi^2 \rangle$  e o valor esperado do tensor momento-energia,  $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ . Desse modo resulta que

$$G_F(x, x') = \frac{-i}{4\pi M \sqrt{\rho^2 - S^2}} + \frac{i}{4\pi} \ln \left\{ 2 \left[ \cos \left( \frac{\rho \Delta T - \rho S \Delta \phi}{\rho^2 - S^2} \right) - \cos \left( \frac{\rho^2 \Delta \phi - S \Delta T}{\rho^2 - S^2} \right) \right] \right\}. \quad (4.75)$$

e que

$$G_0(x, x') = \frac{-i}{4\pi M \rho} + \frac{i}{4\pi} \ln \left\{ 2 \left[ \cos \left( \frac{\Delta T}{\rho} \right) - \cos \Delta \phi \right] \right\}. \quad (4.76)$$

O propagador renormalizado é obtido subtraindo Eq. (4.76) de Eq. (4.75):  $G_F^R(x, x') = G_F(x, x') - G_0^F(x, x')$ . Ressaltamos novamente que ao fazermos isso, estamos retirando de  $G_F(x, x')$  as divergências ultra-violetas oriundas do espaço Minkowskiano. Finalmente escrevemos o propagador renormalizado:

$$\begin{aligned} G_F^R(x, x') &= -\frac{i}{4\pi M} \left( \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - S^2}} - \frac{1}{\rho} \right) \\ &+ \frac{i}{4\pi} \ln \left\{ 2 \left[ \cos \left( \frac{\rho \Delta T - \rho S \Delta \phi}{\rho^2 - S^2} \right) - \cos \left( \frac{\rho^2 \Delta \phi - S \Delta T}{\rho^2 - S^2} \right) \right] \right\} \\ &- \frac{i}{4\pi} \ln \left\{ 2 \left[ \cos \left( \frac{\Delta T}{\rho} \right) - \cos \Delta \phi \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Deve-se ressaltar que do mesmo modo que em Eq. (4.74) vemos a relação existente entre os propagadores  $G_F(x, x')$  e  $G^{(1)}(x, x')$ , observa-se também que existe uma relação equivalente entre os propagadores renormalizados  $G_F^R(x, x')$  e  $G_R^{(1)}(x, x')$ . Para obtermos essa relação basta compararmos  $G_F^R(x, x')$  obtido em Eq. (4.77) com  $G_R^{(1)}(x, x')$  dado por Eq. (3.80) no capítulo anterior. Dessa forma concluímos que, conforme já era esperado,  $G_F^R(x, x')$  é proporcional à  $G_R^{(1)}(x, x')$  a menos de um fator  $-\frac{i}{2}$ .

# Capítulo 5

## As Flutuações quânticas do vácuo

Neste capítulo falaremos sobre o desvio quadrático médio  $\langle \Psi^2 \rangle$  e sobre o valor esperado do tensor momento-energia  $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ . Para introduzirmos o assunto, vamos falar de um fenômeno bastante interessante chamado de Efeito Casimir [46]. Imaginemos duas placas metálicas dispostas paralelamente, a uma distância muito pequena uma da outra. Consideremos também que essas placas tenham massas desprezíveis e que estejam eletricamente descarregadas (não queremos levar em conta forças de natureza eletromagnética e gravitacional). Logo, classicamente poder-se-ia dizer que não existe nenhum tipo de atração entre as placas, uma vez que as forças nucleares não se fazem valer nessa situação completamente clássica. Contudo, se analisarmos o problema quanticamente, a situação é inusitadamente outra, nesse caso, o que acontece é que as placas metálicas perturbam ou polarizam o vácuo, cuja energia por elemento de área (na presença das placas) é dada por:

$$U = \frac{\pi^2 \hbar c}{710 d^3}, \quad (5.1)$$

onde  $d$  é a distância entre as placas. Tomando o gradiente de Eq. (5.1) calcula-se a chamada força de Casimir:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = \frac{3\pi^2 \hbar c}{710 d^4} \hat{d}. \quad (5.2)$$

Para uma revisão pedagógica desse efeito ver Ref. [47]. A comprovação experimental desse fenômeno foi realizada em 1958 nos laboratório Philips por Sparnaay.

Naturalmente, um pouco de reflexão nos levaria à seguinte pergunta: É possível que a curvatura do espaço-tempo ou talvez a sua topologia perturbem o vácuo quântico assim

como o fizeram as placas metálicas? E em caso afirmativo, como calculamos a densidade de energia do vácuo? A resposta a essa pergunta é que sim, é possível. E é isso que de fato ocorre [31]. E a densidade de energia do vácuo é dada pelo valor esperado no vácuo do tensor momento-energia:  $\langle T_{\mu\nu} \rangle = \langle 0|T_{\mu\nu}|0 \rangle$ , que em analogia com o Efeito Casimir, desempenha o mesmo papel que a quantidade U dada por Eq. (5.1).

## 5.1 $\langle \Psi^2 \rangle$

Vamos considerar o propagador de Hadamard renormalizado com respeito ao espaço-tempo Minkowskiano, dado por Eq. (3.80) reescrito na forma

$$G_R^1(x, x') = \frac{1}{2\pi M \sqrt{\rho^2 - S^2}} - \frac{1}{4\pi} \ln \left\{ 4 \left[ \cos \left( \frac{\rho \Delta T - \rho S \Delta \phi}{\rho^2 - S^2} \right) - \cos \left( \frac{\rho^2 \Delta \phi - S \Delta T}{\rho^2 - S^2} \right) \right]^2 \right\} + \frac{\gamma}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{M^2}{4} |\sigma| \right), \quad (5.3)$$

onde  $\gamma$  denota a constante de Euler e

$$\sigma \doteq \Delta T^2 - \rho^2 \Delta \phi^2 = \Delta T^2 - \Delta x^2. \quad (5.4)$$

Tomando o limite  $\Delta x \ll 1$  (aproximação para pequenas distâncias), ou seja, fazendo

$$\cos \Delta x \approx 1 - \frac{\Delta x^2}{2} \quad (5.5)$$

ficamos com

$$G_R^1(x, x') \cong \frac{1}{2\pi M \sqrt{\rho^2 - S^2}} - \frac{1}{4\pi} \ln \left\{ 4 \left[ \frac{\Delta T^2 - \rho^2 \Delta \phi^2}{2(\rho^2 - S^2)} \right]^2 \right\} + \frac{\gamma}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{M^2}{4} |\sigma| \right). \quad (5.6)$$

Agora por meio da seguinte denotação  $\rho \Delta \phi = \Delta x$ , e de Eq. (5.4), escrevemos Eq. (5.6) como

$$G_R^1(x, x') = \frac{1}{2\pi M \sqrt{\rho^2 - S^2}} - \frac{1}{4\pi} \ln \left[ \frac{\sigma^2}{(\rho^2 - S^2)^2} \right] + \frac{\gamma}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{M^2 |\sigma|}{4} \right)$$

$$\begin{aligned}
&\cong \frac{1}{2\pi M\sqrt{\rho^2 - S^2}} - \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{|\sigma|}{\rho^2 - S^2}\right) + \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{M^2|\sigma|}{4}\right) + \frac{\gamma}{\pi} \\
&\cong \frac{1}{2\pi M\sqrt{\rho^2 - S^2}} + \frac{1}{2\pi} \ln\left[\frac{M^2(\rho^2 - S^2)}{4}\right] + \frac{\gamma}{\pi}.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

O desvio quadrático médio dado pela seguinte quantidade [23]

$$\langle \Psi^2(x) \rangle = \frac{1}{2} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} G_R^{(1)}(x, x'). \tag{5.8}$$

Desta forma,

$$\langle \Psi^2(x) \rangle = \frac{1}{2\pi M\sqrt{\rho^2 - S^2}} + \frac{1}{4\pi} \left\{ \ln\left[\frac{M^2(\rho^2 - S^2)}{4}\right] + 2\gamma \right\}. \tag{5.9}$$

Definindo a quantidade

$$L \doteq 2\pi\sqrt{\rho^2 - S^2}, \tag{5.10}$$

podemos escrever Eq.(5.9) na forma:

$$\langle \Psi^2(x) \rangle = \frac{1}{2ML} + \frac{1}{2\pi} \left[ \ln\left(\frac{ML}{4\pi}\right) + \gamma \right]. \tag{5.11}$$

Deve-se ressaltar que o invariante  $\langle \Psi^2 \rangle$  também pode ser calculado por meio do propagador  $G_F^R$ , encontrado no capítulo anterior, através da seguinte relação:

$$\langle \Psi^2 \rangle = i \lim_{x \rightarrow x'} G_F^R(x, x') \tag{5.12}$$

Podemos observar graficamente na figura 5.1 o comportamento da quantidade  $\langle \Psi^2 \rangle$ . Nesse gráfico fizemos  $\rho = 1$ . Note que existe uma divergência quando  $S \rightarrow \rho$ , esse comportamento se deve à proteção cronológica já comentada nesse texto.

## 5.2 Valor esperado do tensor energia-momento

Para o caso geral, o tensor momentum-energia  $\langle T_{\mu\nu} \rangle$  é dado por [12]

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = i \lim_{x \rightarrow x'} D_{\mu\nu}(x, x') G_F^R(x, x'), \tag{5.13}$$

onde definimos o operador diferencial [12]

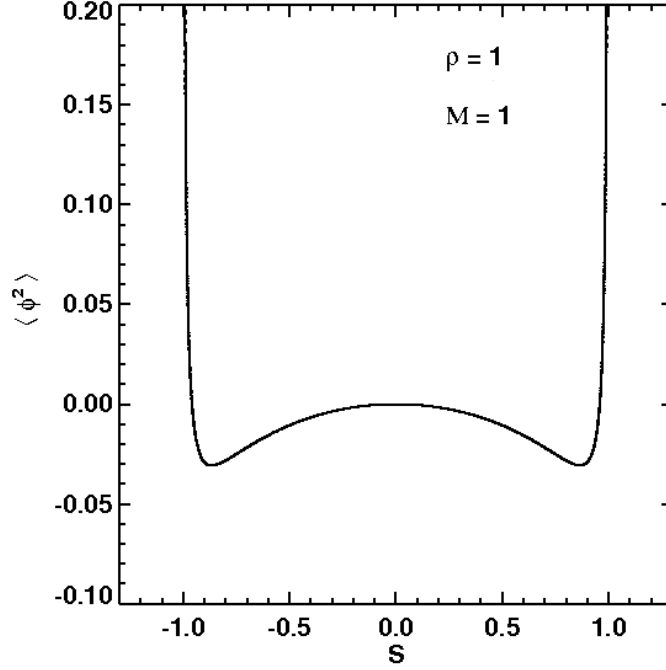


Figura 5.1: gráfico de  $\langle \Psi^2 \rangle$ , em função do parâmetro de rotação  $S$ . Note que essa quantidade pode assumir também valores negativos

$$D_{\mu\nu}(x, x') = (1 - 2\xi)\nabla_\mu \nabla'_\nu + (2\xi - 1/2)g_{\mu\nu} \nabla_\sigma \nabla'^\sigma - 2\xi \nabla_\mu \nabla_\nu + 2M^2 g_{\mu\nu} (1/4 - \xi), \quad (5.14)$$

no qual  $\nabla_\alpha$  representa a derivada covariante com respeito à métrica  $g_{\mu\nu}$  e  $\xi$  é um parâmetro adimensional que determina o acoplamento com a curvatura do espaço-tempo. (como  $R = 0$  para o nosso problema,  $\xi$  não aparece na solução do propagador  $G_F^R(x, x')$ ). No caso em que estamos trabalhando temos

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -\rho^2). \quad (5.15)$$

Uma vez que  $\rho$  é constante, segue que  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = 0$ . Assim, de Eq. (5.13) e Eq. (5.14):

$$\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle = i \lim_{x \rightarrow x'} \left[ (1 - 2\xi) \partial_\mu \partial'_\nu + (2\xi - 1/2) g_{\mu\nu} g^{\tau\sigma} \partial_\tau \partial'_\sigma - 2\xi \partial_\mu \partial_\nu + 2M^2 g_{\mu\nu} (1/4 - \xi) \right] G_F^R(x, x'). \quad (5.16)$$

Como  $G_F^R(x, x') = G_F^R(x - x')$ , podemos simplificar (5.16):



$$\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle = i \lim_{x \rightarrow x'} \left[ -\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} - \left( 2\xi - 1/2 \right) g_{\mu\nu} g^{\tau\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\tau} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} + 2M^2 g_{\mu\nu} \left( \frac{1}{4} - \xi \right) \right] G_F^R(x, x'). \quad (5.17)$$

As componentes do tensor de momentum-energia (5.17) podem ser encontradas facilmente a partir das derivadas de  $G_F^R$ , e resultam

$$\langle T_{00}(x) \rangle = i \lim_{x \rightarrow x'} \left\{ \left[ -\frac{\partial^2}{\partial T^2} - \left( 2\xi - \frac{1}{2} \right) \left( g^{00} \frac{\partial^2}{\partial T^2} + g^{11} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + 2g^{01} \frac{\partial}{\partial T} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + 2M^2 \left( \frac{1}{4} - \xi \right) \right] G_F^R(x, x') \right\}. \quad (5.18)$$

Relembrando que a métrica é dada por Eq. (3.10), vamos reescrevê-la sob a forma

$$ds^2 = dt^2 - \rho^2 \Omega d\phi^2 + 2S dt d\phi, \quad (5.19)$$

com componentes

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & S \\ S & -\rho^2 \Omega \end{pmatrix}. \quad (5.20)$$

Mas como estamos trabalhando nas coordenadas chatas, temos

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\rho^2 \end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

Dessa forma a componente  $\langle T_{00}(x) \rangle$  fica escrita como

$$\begin{aligned} \langle T_{00}(x) \rangle &= i \lim_{x \rightarrow x'} \left\{ \left[ -\frac{\partial^2}{\partial T^2} - \left( 2\xi - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial T^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2M^2 \left( \frac{1}{4} - \xi \right) \right] G_F^R(x, x') \right\}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Para o caso em que  $\xi = 0$ , correspondente ao acoplamento mínimo, segue que

$$\langle T_{00}(x) \rangle = -\frac{i}{2} \lim_{x \rightarrow x'} \left\{ \left( \frac{\partial^2}{\partial T^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - M^2 \right) G_F^R(x, x') \right\}. \quad (5.23)$$

Efetuada as derivadas e usando o valor de  $G_F^R(x, x')$ , calculado no capítulo anterior, ficamos com

$$\begin{aligned}
\langle T_{00}(x) \rangle &= \frac{1}{24\pi\rho^2} - \frac{M}{4\pi\rho} + \frac{M}{8\pi\rho} \left( \frac{1}{\Omega^{3/2}} + \frac{1}{\Omega^{1/2}} + \frac{S^2}{\rho^2\Omega^{3/2}} \right) \\
&\quad - \frac{1}{8\pi} \left( \frac{1}{6(\rho-S)^2} + \frac{1}{6(\rho+S)^2} \right) + O(M^2) \\
&= \frac{1}{24\pi\rho^2} - \frac{M}{4\pi\rho} + \frac{2M}{8\pi\rho\Omega^{3/2}} - \frac{1}{3} \frac{\rho^2 + S^2}{(\rho^2 - S^2)^2} \frac{1}{8\pi}.
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Logo,

$$\langle T_{00}(x) \rangle = \frac{1}{24\pi\rho^2} \left[ 1 - \frac{1 + S^2/\rho^2}{(1 - S^2/\rho^2)^2} \right] - \frac{M}{4\pi\rho} \left( 1 - \frac{1}{\Omega^{3/2}} \right). \tag{5.25}$$

Para analisarmos esse resultado graficamente, encontra-se na figura 5.2 um gráfico de  $\langle T_{00}(x) \rangle$  contra o parâmetro de rotação  $S$ , no qual encontramos expressa a divergência cronológica observada no gráfico anterior, quando  $S \rightarrow \pm 1$ .

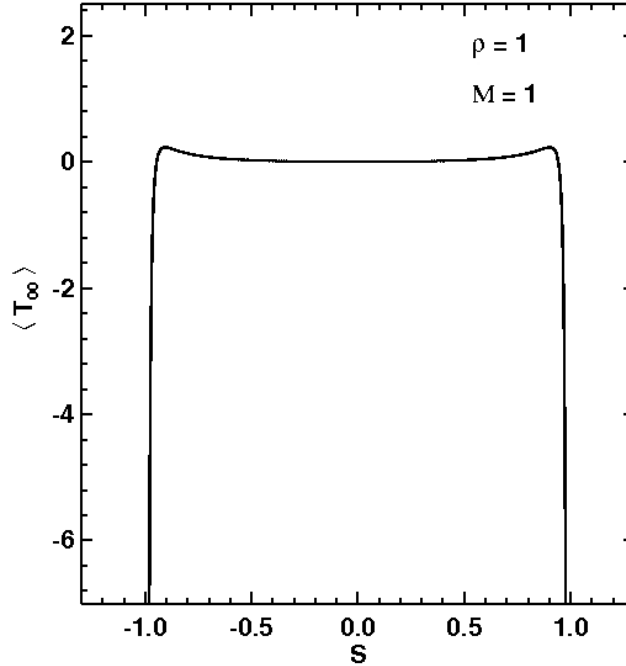


Figura 5.2: gráfico da componente  $\langle T_{00} \rangle$  do tensor energia momentum, note que existe uma divergência quando  $S \rightarrow \pm 1$ , o que explicita a proteção cronológica.

Em seguida, procedendo de maneira inteiramente análoga, calculamos as quantidades  $\langle T_{11}(x) \rangle$  e  $\langle T_{01}(x) \rangle$  por meio de Eq. (5.13). Dessa forma,

$$\langle T_{11}(x) \rangle = i \lim_{x \rightarrow x'} \left\{ \left[ -\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \left( 2\xi - \frac{1}{2} \right) \rho^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial T^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) - 2M^2 \rho^2 \left( \frac{1}{4} - \xi \right) \right] G_F^R(x, x') \right\}, \quad (5.26)$$

quando  $\xi = 0$  temos que:

$$\langle T_{11}(x) \rangle = -\frac{i}{2} \lim_{x \rightarrow x'} \left\{ \left( \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial T^2} + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + M^2 \rho^2 \right) G_F^R(x, x') \right\}. \quad (5.27)$$

Novamente efetuando as derivadas em  $G_F^R(x, x')$  encontramos,

$$\langle T_{11}(x) \rangle = \frac{1}{24\pi} + \frac{M\rho}{8\pi\Omega^{3/2}} - \frac{M\rho}{8\pi\Omega^{1/2}} + \frac{MS^2\rho^2}{8\pi\rho^3\Omega^{3/2}} - \frac{\rho^2}{48\pi(\rho - S)^2} - \frac{\rho^2}{48\pi(\rho + S)^2} + O(M^2). \quad (5.28)$$

Logo,

$$\langle T_{11}(x) \rangle = \frac{1}{24\pi} \left[ 1 - \frac{1 + S^2/\rho^2}{(1 - S^2/\rho^2)^2} \right] + \frac{MS^2}{4\pi\rho\Omega^{3/2}}. \quad (5.29)$$

Podemos ver graficamente na figura 5.3 como a quantidade  $\langle T_{11}(x) \rangle$  se comporta com relação ao parâmetro de rotação  $S$ . O comportamento desse gráfico é bem semelhante ao comportamento do gráfico anterior. Na verdade a diferença é bem suave e ficará mais clara quando plotarmos ambos os comportamentos observados nos dois gráficos correspondentes às figuras 5.2 e 5.3, num só gráfico.

Resta apenas encontrarmos a quantidade  $\langle T_{01}(x) \rangle$ , da equação (5.13):

$$\langle T_{01}(x) \rangle = -i \lim_{x \rightarrow x'} \left\{ \frac{\partial}{\partial T} \frac{\partial}{\partial \phi} \right\} G_F^R(x, x'). \quad (5.30)$$

Procedendo da mesma forma, encontramos que

$$\langle T_{01}(x) \rangle = \frac{S}{12\pi\rho^2\Omega^2} - \frac{MS}{4\pi\rho\Omega^{3/2}}. \quad (5.31)$$

Assim como foi feito nos casos anteriores, a figura 5.4 vem ilustrar o comportamento da quantidade  $\langle T_{01}(x) \rangle$ .

Na figura 5.5 plotamos o comportamento simultâneo das componentes  $\langle T_{00} \rangle$ ,  $\langle T_{01} \rangle$  e  $\langle T_{11} \rangle$  em função de  $S$ .

A teoria clássica da gravitação é descrita de forma bem elegante pelas equações de Einstein:

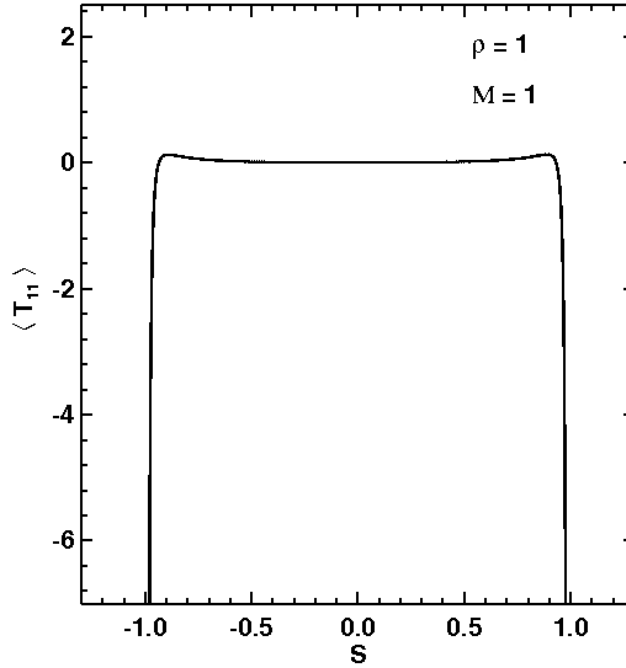


Figura 5.3: Comportamento da componente  $\langle T_{11} \rangle$  do tensor energia momentum em função do parâmetro de rotação  $S$ , observe que quando  $S \rightarrow \pm 1$ , a quantidade  $\langle T_{11} \rangle$  diverge.

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (5.32)$$

na qual

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}, \quad (5.33)$$

sendo  $G$  a constante de gravitação universal de Newton e  $c$  é a velocidade da luz no vácuo. Essa teoria é chamada de clássica devido ao fato de não incorporar ingredientes quânticos em seu formalismo. Já a teoria semiclássica da gravitação (também denominada de teoria quântica de campos no espaço curvo), tem antecipado efeitos de origem puramente quântica em gravitação, como é o caso, por exemplo, da radiação Hawking [48], [49]. Na teoria semiclássica da gravitação (para uma abordagem mais pedagógica ver Ref.[50]), o análogo da equação (5.32) é escrito como

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \langle T_{\mu\nu} \rangle. \quad (5.34)$$

De acordo com a gravitação semiclássica a quantidade  $\langle T_{\mu\nu} \rangle$  calculada acima realimenta

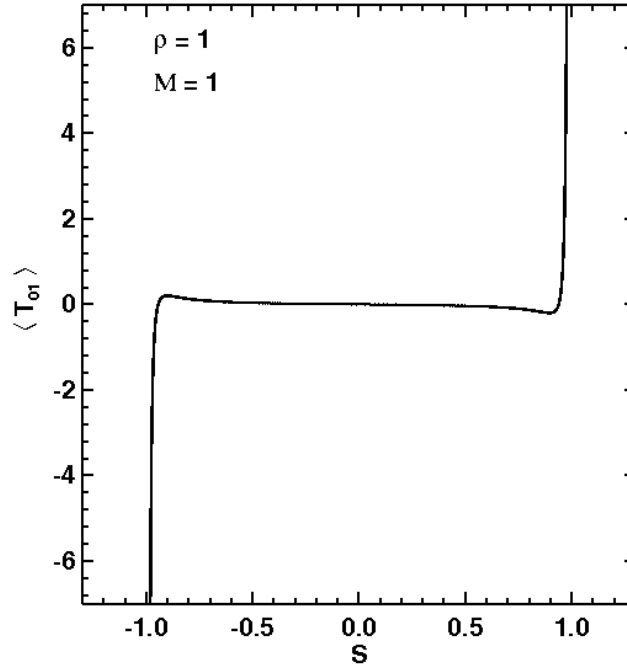


Figura 5.4: gráfico da componente  $\langle T_{01} \rangle$  contra o parâmetro de rotação  $S$ .

as equações de Einstein (5.32). Mas como estamos lidando com um problema (1+1) dimensional, será que a quantidade  $\langle T_{\mu\nu} \rangle$  dada em (5.17) teria algum efeito sobre a geometria do espaço-tempo no contexto da relatividade geral? Para respondermos a essa questão, lembremos que no espaço-tempo 2-dimensional, o tensor de curvatura  $R_{\mu\nu\lambda\rho}$  tem somente uma componente independente, desde que todas as componentes não nulas possam ser obtidas pelas simetrias de  $R_{0101}$ . O tensor de curvatura por sua vez pode ser escrito em termos do escalar de curvatura como [51]:

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} = \frac{1}{2}R(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}), \quad (5.35)$$

de tal maneira que a geometria local é caracterizada por  $R$ . A relação entre o tensor de Ricci e o escalar de curvatura é tal que as equações de Einstein são identicamente nulas:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0 \quad (5.36)$$

Logo, no contexto da relatividade geral, não faz sentido falar em gravitação em 2 dimensões [52].

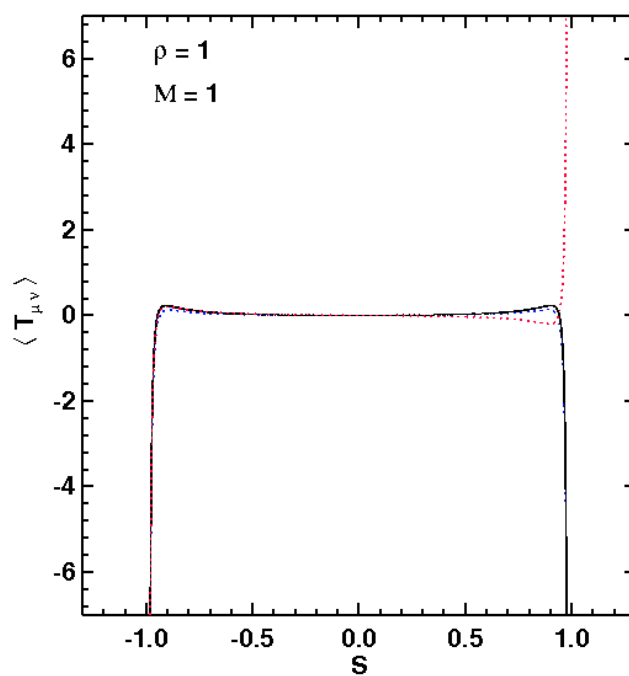


Figura 5.5: gráfico das três componentes do tensor  $\langle T_{\mu\nu} \rangle$  contra o parâmetro de rotação  $S$ .

# Capítulo 6

## Conclusão

Neste trabalho examinamos a quantização de um campo escalar com massa no espaço-tempo de um anel “girante”. Este espaço-tempo corresponde à seção  $(\xi, \rho)$  constante da métrica correspondente a uma corda cósmica girante, que por sua vez é uma solução das equações de Einstein. É notório neste espaço-tempo a existência de curvas do tipo-tempo fechadas, as quais poderiam, em princípio levar a problemas com o princípio da causalidade. Assim, apesar desta solução encontrar suporte na teoria da relatividade geral, foi estabelecida uma conjectura segundo a qual a mecânica quântica conspira contra a formação de caminhos desta natureza no universo, ou seja, de caminhos que tornassem possível o retorno ao passado. Esta conjectura ficou conhecida como “conjectura de proteção cronológica” e foi estabelecida por S. W. Hawking nos anos 90 [3]. Desta forma a solução examinada neste trabalho consiste em um modelo simples onde a conjectura proposta poderia ser avaliada.

Com relação ao processo de quantização, usamos basicamente dois métodos, o primeiro deles, apresentado no capítulo 3, consiste em encontrar uma solução para a equação de Klein-Gordon, que são os modos normais de frequência positiva lembrando que o espaço-tempo de um anel girante possui um campo de Killing global do tipo tempo. Para encontrarmos o propagador de Hadamard, escrevemos o campo escalar em termos dos modos normais e dos operadores de criação e destruição de partículas. A relação que levou a tal propagador foi escrita como o valor esperado no vácuo da quantidade  $\{\Psi(t, \Phi), \Psi(t', \Phi')\}$ , onde  $\Psi$  representa o campo quântico e  $\Psi$  os modos normais.

O segundo método, conhecido por método de Feynman, consiste em encontrarmos a

soluções para a seguinte equação:

$$(\square + M^2)G_F(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\delta^2(\vec{x} - \vec{x}').$$

Ao compararmos as expressões matemáticas dos dois propagadores descritos acima, percebemos que os mesmos são iguais a menos de um fator  $-\frac{i}{2}$ , como esperado.

O passo seguinte foi derivar o valor esperado no vácuo do tensor momento-energia  $\langle T_{\mu\nu} \rangle$  e o desvio quadrático médio  $\langle \Psi^2 \rangle$ . Depois disso, analisamos o comportamento dessas duas quantidades em função do parâmetro de rotação  $S$ . Verificamos que o valor esperado de todas as componentes do tensor momento-energia, divergem no limite  $S \rightarrow \rho$ . O mesmo se passa com a quantidade  $\langle \Psi^2 \rangle$ , ou seja, ela também diverge no limite  $S \rightarrow \rho$ . Esses resultados nos levam a imaginar que, no caso (3+1) dimensional a realimentação das equações de Einstein com o valor esperado no vácuo do tensor momento-energia levaria a problemas de consistência de aproximação semiclássica na eminência do aparecimento de uma CTC. Resultado este que estaria de acordo com a conjectura da proteção cronológica. O caso de um anel girante não é o único que apresenta tais resultados, a quantização de um campo escalar sem massa no espaço-tempo de uma corda cósmica girante com rotação e deslocamento, para o caso  $\kappa > S$ , foi estudado [53] e foram obtidos resultados mostrando uma tendência das flutuações quânticas do vácuo de prevenir o aparecimento das curvas do tipo-tempo fechadas no universo (respeitando assim a conjectura da proteção cronológica). Esses resultados estão longe de esgotar o tema abordado e as perspectivas de pesquisa são muitas. Por exemplo, um caso ainda a ser estudado é o da quantização de um campo escalar no espaço-tempo de uma corda cósmica girante na qual o parâmetro de rotação  $S$  é igual ao parâmetro de deslocamento  $\kappa$ .



# Apêndice A

## Dedução da equação para o propagador de Feynman

Conforme vimos no capítulo 2, o propagador de Feynman  $G_F$  obedece à equação (2.83), e é essa mesma equação que usamos no capítulo 4 para encontrarmos  $G_F$ . Em função da relevância dessa equação no contexto deste trabalho, vamos nesta seção deduzi-la. Vamos também mostrar como se chega em Eq. (2.53) a partir da integral funcional expressa por Eq. (2.51).

Como foi mencionado ao longo do texto, a teoria quântica é definida pela integral funcional dada por Eq. (2.51), realizando então uma integração por partes no argumento da exponencial dessa equação ficamos com

$$Z[J] = \int D\phi e^{i \int d^4x [-\frac{1}{2}\phi(\partial^2+m^2)\phi + J\phi]}. \quad (\text{A.1})$$

Essa integral representa o limite contínuo da integral múltipla de Gauss:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dq_N e^{\frac{i}{2}q \cdot A \cdot q + iJ \cdot q} = \frac{(2\pi i)^{N/2}}{(\det A)^{1/2}} e^{-\frac{i}{2}J \cdot A^{-1} \cdot J}. \quad (\text{A.2})$$

No caso contínuo, em vez de somas temos integrais:

$$J \cdot q = \sum_i J_i q_i \rightarrow \int d^4x J(x)\phi(x) \quad (\text{A.3})$$

e

$$q \cdot A \cdot q = \sum_{ij} q_i A_{ij} q_j \rightarrow \int d^4x \int d^4y \phi(x) A(x, y) \phi(y), \quad (\text{A.4})$$

onde

$$A(x, y) = -(\partial^2 + m^2)\delta(x, y) \quad (\text{A.5})$$

ou

$$\hat{A} = -(\partial^2 + m^2).$$

A definição acima vem do fato de que

$$-\int d^4x \phi(x)(\partial^2 + m^2)\phi(x) = -\int d^4x \int d^4y \phi(x)(\partial_x^2 + m^2)\delta(x, y)\phi(y). \quad (\text{A.6})$$

O resultado da integração contém o inverso  $A^{-1}$ , que é definido no caso contínuo como

$$\sum_j A_{i,j} \dots A_{j,k}^{-1} = \delta_{ij} \rightarrow \int d^4z A(x, z)A^{-1}(z, y) = \delta^{(4)}(x - y), \quad (\text{A.7})$$

onde

$$\delta^{(4)}(x - y) = \delta(x^0 - y^0)\delta(x^1 - y^1)\delta(x^2 - y^2)\delta(x^3 - y^3).$$

Vamos denotar

$$D(x - y) = A^{-1}(x, y), \quad (\text{A.8})$$

De maneira que

$$-\int d^4z (\partial_x^2 + m^2)\delta^4(x - z)D(z - y) = \delta^4(x - y). \quad (\text{A.9})$$

De onde vemos que

$$-(\partial^2 + m^2)D(x - y) = \delta^4(x - y). \quad (\text{A.10})$$

Portanto,  $D(x - y)$  é a função de Green da equação de Klein-Gordon.

Agora é possível identificar as equações (2.51) e (2.53). Para isso, basta considerar que em Eq. (A.2) temos a seguinte relação:

$$J \cdot A^{-1} \cdot J = \sum_{ij} J_i A^{-1} J_j \rightarrow \int d^4x \int d^4y J(x)A^{-1}(x, y)J(y). \quad (\text{A.11})$$

Então por meio de Eq. (A.8) resulta que

$$Z[J] = C e^{-\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y J(x) D(x-y) J(y)}, \quad (\text{A.12})$$

onde  $C$  é o fator de normalização.

# Apêndice B

## Outra proposta de dedução para a equação (3.55)

Nesta seção vamos apresentar outra maneira de se deduzir a constante  $C_n$  que aparece nos modos normais no capítulo 3. Começamos definimos o produto escalar como

$$(\Psi_1, \Psi_2) = -i \int_{\Sigma} \Psi_1(x) \partial_{\mu} \Psi_2(x) \sqrt{-g_{\Sigma}} d\Sigma^{\mu}, \quad (\text{B.1})$$

onde  $d\Sigma^{\mu} = \eta^{\mu} d\Sigma$ , com  $\eta^{\mu}$  sendo um vetor unitário direcionado para o futuro e ortogonal à hipersuperfície tipo espaço  $\Sigma$  ( $d\Sigma$  representa um elemento de volume em  $\Sigma$ ). Devemos escolher  $\Sigma$  como uma superfície de Cauchy no espaço-tempo (lembramos que se o espaço-tempo admite superfícies de Cauchy, ele será globalmente hiperbólico). E finalmente,  $g_{\Sigma} = \det g_{\Sigma ij}$ .

Os modos

$$\Phi(t, \phi) = C_n e^{-i\omega t} e^{in\phi} \quad (\text{B.2})$$

devem ser ortonormais sob o produto escalar (B.1):

$$(\Phi_n, \Phi_{n'}) = \delta_{n,n'}, \quad (\text{B.3})$$

$$(\Phi_n^*, \Phi_{n'}^*) = -\delta_{n,n'} \quad (\text{B.4})$$

e

$$(\Phi_n, \Phi_{n'}^*) = 0. \quad (\text{B.5})$$

Vamos supor  $v^\mu$  como sendo um vetor pertencente à hipersuperfície  $\Sigma$ . Dessa maneira, as seguintes condições devem ser satisfeitas:

$$\eta^\mu v_\mu = 0 \quad (\text{B.6})$$

e

$$\eta^\mu \eta_\mu = 1. \quad (\text{B.7})$$

Vamos escolher  $v_\mu$  e  $\eta_\mu$  como

$$v_\mu = (0, 1), \quad (\text{B.8})$$

$$\eta^\mu = (x, y). \quad (\text{B.9})$$

Escrevendo as equações (B.6) e (B.7) como  $\eta^\mu v^\nu g_{\mu\nu} = 0$  e  $\eta^\mu \eta^\nu g_{\mu\nu} = 1$  respectivamente, teremos que

$$Sx - (\alpha^2 \rho^2 - S^2)y = 0 \quad (\text{B.10})$$

e

$$x^2 + 2Sxy - (\alpha^2 \rho^2 - S^2)y^2 = 1. \quad (\text{B.11})$$

De onde obtemos que

$$x = \frac{\sqrt{\xi}}{\alpha\rho} \quad (\text{B.12})$$

e

$$y = \frac{S}{\alpha\rho\sqrt{\xi}}. \quad (\text{B.13})$$

Onde definimos

$$\xi \doteq \alpha^2 \rho^2 - S^2 = \alpha^2 \rho^2 \Omega^2. \quad (\text{B.14})$$

Logo

$$\eta^\nu = \left( \frac{\sqrt{\xi}}{\alpha\rho}, \frac{S}{\alpha\rho\sqrt{\xi}} \right) \quad (\text{B.15})$$

Devemos agora encontrar a métrica induzida sobre a superfície  $\Sigma$ . Primeiramente, o projetor sobre a hipersuperfície  $\Sigma$  é dado por

$$g_{\Sigma}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \eta^{mu}\eta^{\nu}. \quad (\text{B.16})$$

Assim, a parte espacial desta métrica será:

$$g_{\Sigma}^{ij} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\xi \end{pmatrix}, \quad (\text{B.17})$$

com inversa

$$g_{ij}^{\Sigma} = -\xi. \quad (\text{B.18})$$

Finalmente,

$$g_{\sigma} = +\det g_{ij}^{\Sigma} = -\xi. \quad (\text{B.19})$$

Vamos retornar então à expressão (B.3). De (B.1), (B.2) e (B.19) teremos

$$\begin{aligned} (\Phi_n, \Phi_{n'}) &= -i \int_0^{2\pi} (\Phi_n \partial_{\mu} \Phi_{n'}^* - \partial_{\mu} \Phi_n \Phi_{n'}^*) \sqrt{\xi} \eta^{\mu} d\phi = \\ &= -i \sqrt{\xi} \left[ \int_0^{2\pi} d\phi (\Phi_n \partial_t \Phi_{n'}^* - \partial_t \Phi_n \Phi_{n'}^*) \frac{\sqrt{\xi}}{\alpha\rho} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{2\pi} d\phi (\Phi_n \partial_{\phi} \Phi_{n'}^* - \partial_{\phi} \Phi_n \Phi_{n'}^*) \frac{\sqrt{S}}{\alpha\rho\xi} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

ou seja,

$$\begin{aligned} (\Phi_n, \Phi_{n'}) &= -i \left[ \int_0^{2\pi} d\phi (i\omega' + i\omega) \Phi_n \Phi_{n'}^* \frac{\xi}{\alpha\rho} + \int_0^{2\pi} d\phi (-in' - in) \Phi_n \Phi_{n'}^* \frac{S}{\alpha\rho} \right] \\ &= \frac{1}{\alpha\rho} [\xi(\omega' + \omega) - S(n + n')] \int_0^{2\pi} d\phi \Phi_n \Phi_{n'}^* \\ &= \frac{1}{\alpha\rho} [\xi(\omega' + \omega) - S(n + n')] |C_n|^2 e^{-i(\omega - \omega')t} \int_0^{2\pi} d\phi e^{i(n - n')\phi}. \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Mas

$$\int_0^{2\pi} d\phi e^{i(n - n')\phi} = 2\pi \delta_{nn'} \quad (\text{B.22})$$

resulta que

$$(\Phi_n, \Phi_{n'}) = \frac{2\pi}{\alpha\rho} [\xi(\omega' + \omega) - S(n + n')] |C_n|^2 e^{-i(\omega - \omega')t} \delta_{nn'}. \quad (\text{B.23})$$

Uma vez que essa última equação se anula para  $n \neq n'$  teremos

$$(\Phi_n, \Phi_{n'}) = \frac{4\pi}{\alpha\rho}(\omega\xi - nS)|C_n|^2\delta_{nn'}. \quad (\text{B.24})$$

A fim de satisfazer à relação (B.3), escolhemos  $C_n$  da seguinte maneira:

$$|C_n|^2 = \frac{\alpha\rho}{4\pi(\omega\xi - nS)}. \quad (\text{B.25})$$

Com este resultado, os modos expressos em (B.2) serão escritos na forma

$$\Phi(t, \phi) = \frac{\alpha\rho}{4\pi(\omega\xi - nS)} e^{-i\omega t} e^{in\phi}. \quad (\text{B.26})$$

Substituindo o valor de  $\omega$  dado por Eq. (3.35) em Eq. (B.26), chegamos a

$$|C_n|^2 = \frac{1}{4\pi\sqrt{n^2 + M^2(\rho^2 - S^2)}}. \quad (\text{B.27})$$

# Referências

- [1] Novello M., *Máquina do Tempo: um olhar científico*. Jorge Zahar Editor, Rio de Janeiro (2001).
- [2] Deser, S. and Jackiw, R., *Time Travel?* Comments. Nucl. Part. vol 20, n. 6, 337 (1992).
- [3] Hawking, S. W., *Chronology Protection Conjecture*, Phys. Rev. **D**, **46** 603 (1992).
- [4] Smith, A. G., *Gravitational effects of an infinite straight cosmic string on classical and quantum fields: self-forces and vacuum fluctuations, in the formation and evolution of cosmic string* edited by G. W. Gibbons, S. W. Hawking, T. Vachaspati, Cambridge University Press (1990).
- [5] Cho, Y, M. and Park, D, H., *Causally Spinning Anyonic Cosmic String*, Phys. Rev. **D** **46** R1219 (1992).
- [6] Mazur, P., *Induced Angular Momentum on Superconducting Cosmic Strings*, Phys. Rev. **D** **34** 1925 (1986)
- [7] Soleng, H., *Negative Energy Densities in Extended Sources Generating Closed Timelike Curves in General Relativity With and Without Torsion*, Phys. Rev **D** **49** 1124 (1994).
- [8] Deser S., Jackiw R. and 't Hooft G., *Physical Cosmic Strings do not Generate Closed Timelike Curves* Phys. Rev. Lett. **68** 267 (1992).
- [9] Jensen, B. and Soleng, H., *General-Relativistic Model of a Spinning Cosmic String*, Phys. Rev. **D** **45** 3528 (1992).



- [10] de Sousa, P. and Jackiw R., *Classical and Quantum Scattering on a Spinning Cone*, Commun. Math. Phys. **124** 229 (1989).
- [11] Mazur, P., *Spinning Cosmic Strings and Quantization of Energy*, Phys. Rev. Lett. **57** 929 (1986).
- [12] E. S. Moreira, Jr., *Aspects of quantum theory in conical backgrounds* (PhD thesis, Queen Mary College, London, 1997).
- [13] Deser S., Jackiw R. e G. 't Hooft, *Three-Dimensional Einstein Gravity: Dynamics of Flat Space*, Ann. Phys. **152**, 220, (1984).
- [14] Vilekin A., *Phys. Rep.* **121**, 263 (1985).
- [15] Parker L., *Gravitational Particle Production in the Formation of Cosmic Strings* Phys. Rev. Lett. **59**, 1369 (1987).
- [16] Mendell G. and Hiscock W. A., *Gravitational Particle Production During Cosmic-String Formation in the Sudden Approximation* Phys. Rev. **D 40**, 282 (1989).
- [17] V. A. De Lorenci, R. De Paola and N. F. Svaiter., *Gravitational Particle Production in Spinning Cosmic String Spacetimes* Novo Cimento B, Vol. 113B, No11, 1337 (1998).
- [18] V. A. De Lorenci, E. S. Moreira Jr, *Classical Self-Forces in a Space With a Topological Defect*, Phys. Rev. **D 65** 085013 (2002).
- [19] Gal'tsov, D. V. and Letelier P. S., *Spinning Strings and Cosmic Dislocations* Phys. Rev. **D 47**, 4273 (1993).
- [20] Harris, W. F., *Disclinations*, Scientif. Am. **237**:(6) 130 (1977).
- [21] V. A. De Lorenci and E. S. Moreira, Jr., *Lessons from the Casimir Effect on a Spinning Circle*, Intern. Journ. Mod. Phys. A, Vol. 18, No. 12 (2003). 2073-2076. Published by World Scientific Publishing Company (2003).
- [22] Jensen, B. and Kucera, J., *On a Gravitational Aharonov-Bohm Effect*, **34**, 4975 (1993).
- [23] V. A. De Lorenci and E. S. Moreira, Jr., *Vacuum Polarization on the Spinning Circle*, Phys. Rev. **D 65**, 107503 (2002).

- [24] Gerbert, P. S. and Jackiw R., *Commun. Math. Phys.* **124**, 229 (1989).
- [25] V. A. De Lorenci e E. S. Moreira, Jr., *Remarks on Vacuum Fluctuations Around a Spinning Cosmic String*, *Phys. Rev. D* **63**, 027501 (2001).
- [26] Matsas G. E. A., *Semiclassical Gravitational Effects in the Spacetime of a Rotating Cosmic String*, *Phys. Rev. D* **42**, 2927 (1990).
- [27] Ford L. H., *Quantum field Theory in curved spacetime* Lectures given at the IX Jorge André Swieca Summer School, Campos do Jordão 1997, and Soochw University, Taipei, Taiwan Jne 1997. To be published in the proceedings of the Swieca Scholl.
- [28] Wald, R. M., *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*, University of Chicago Press, Chicago, (1994).
- [29] Wald, R. M., *General Relativity*, The University of Chicago Press, Chicago and London, (1984).
- [30] Fulling, S. A., *Aspects of quantum field theory in curved space-time*, Cambridge University Press, Cambridge, (1989)
- [31] Birrel, N. D and Davies, P. C. W., *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge University Press, Cambridge, (1982).
- [32] Cohen-Tannoudji, Diu, B., Laloe, F. *Quantum Mechanics*, New York. John Willey, (1977).
- [33] Ballentine, L. E., *Quantum Mechanics: A modern Development*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, London, (1998).
- [34] Ryder, L. H., *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, (1999).
- [35] Landau, L. D., Lifshitz, E., *Mecânica*, Editora Mir, (1978).
- [36] Zee, A., *Quantum Field Theory in a Nutshell*, Princeton University Press, Princeton, (2003).
- [37] Itzykson, C. and Zuber, Jean-Bernard., *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill Inc. (1980).

- [38] Kay, B. S., *The Principle of Locality and Quantum Field Theory on (non-Globally Hyperbolic) Curved Spacetimes*. Rev. Math. Phys., Special Issue: 167-195, (1992).
- [39] Zarro, C. A. D., *Teoria Quântica de Campos na Presença de Horizonte de Eventos*, tese de mestrado, CBPF, (2006).
- [40] Higuchi, A., in *XVIII Brazilian National Meeting on Particles and Fields*, Proceedings of the Meeting, Caxambu, Brazil, 1997, edited by O. Éboli *et al* (FAPESP, São Paulo, Brazil, (1998).
- [41] Choquet-Bruhat, Y., *Hiperbolic partial differential equations on a manifold*. In Battelle Rencontres 1967: Lectures in Mathematics and Physics, editado por de Witt-Morette e J. A. Wheeler. Benjamin, (1968).
- [42] Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. W., *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, New York, (1980).
- [43] Bogoliubov, N. N and Shirkov, D. V. *Introduction To The Theory of Quantized Fields*, John Wiley and Sons, New York, (1980).
- [44] Lebedev, N. N., *Special Functions and Their Applications*, Dover Publications, (1972).
- [45] Prudnikov, A. P., Brychkov, Yu. A. and Marichev, O. I., *Integrals and series vol. 2*, Gordon and Breach Science publishers, Amsterdam, (1986).
- [46] Casimir, H. B. G., *Poc. Kon. Ned. Akad. Wetenschap.* 51 (1948) 793.
- [47] M.V. Cougo-Pinto, C. FaSpinningrina e A. Tort, *O Efeito Casimir*, Rev Braz. Ens. Fis. 22, 122 (2000)
- [48] Hawking, S. W., *Particle Creation by Black Holes*, Commun. Math. Phys. 43: 199-220, (1975).
- [49] Hawking, S. W., *Black Hole Explosions?*, Nature, 248: 30-31, (1974).
- [50] Matsas, G. E. A., *Gravitação Semiclássica*, Rev. Braz. Ens. Fis. **27**, 137 (2005).
- [51] Eisenhart L. P., *Riemannian Geometry*, Princeton University Press (1949).

- [52] Brown, J. D., *Lower Dimensional Gravity*, World Scientific Pub. Co. Inc. (September 1988).
- [53] V. A. De Lorenci and E. S. Moreira Jr., Spinning strings, cosmic dislocations and chronology protection, *Phys. Rev D* **70** 047502 (2004).