

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD
KATEDRA MECHANIKY

Bakalářská práce

NÁHRADA KOVOVÉ LOPATKY VENTILÁTORU
SENDVIČOVOU LOPATKOU

Plzeň, 2022

Kateřina Patková

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně a že jsem uvedla všechny použité prameny a literaturu, ze kterých jsem čerpala.

V Plzni dne 31. května 2022

.....
podpis

PODĚKOVÁNÍ

Chtěla bych poděkovat svému vedoucímu bakalářské práce prof. Ing. Vladislavu Lašovi, CSc. za odborné vedení práce a cenné rady, které mi pomohly tuto práci zkompletovat. Dále bych chtěla poděkovat konzultantovi Ing. Tomáši Mandysovi, Ph.D. za pomoc při numerickém řešení. A nakonec bych chtěla poděkovat pracovníkům katedry mechaniky na Fakultě aplikovaných věd.

ABSTRAKT

Níže uvedená bakalářská práce se zabývá náhradou kovové lopatky sendvičovou lopatkou a zároveň ověření numerického řešení. První teoretická část se zabývá odvozením rovnic pro průhyb sendvičového nosníku laminátovou teorií a sendvičovou teorií. V kapitole analytické řešení průhybu sendvičového nosníku se řeší konkrétní úloha s materiálovými parametry a okrajovými podmínkami, pomocí laminátové a sendvičové teorie, výsledky se porovnávají s výsledky z kapitoly numerické řešení průhybu sendvičového nosníku, v této kapitole se průhyb řeší v softwaru Abaqus. Po ověření numerického řešení se dostáváme k poslední kapitole, a to je náhrada kovové lopatky sendvičovou lopatkou ventilátoru. Zde se porovnává experimentální měření obou lopatek s numerickými výpočty, zkoumá se průhyb lopatek a modální analýza.

Klíčová slova: lopatka ventilátoru, sendvičový materiál, numerické řešení, průhyb, modální analýza, náhrada

ABSTRACT

This bachelor thesis focuses on the replacement of a metal blade with a sandwich blade and at the same time the verification of the numerical solution. The first theoretical part deals with the derivation of equations for sandwich beam deflection by laminate theory and sandwich theory. In the chapter of analytical solution of sandwich beam deflection, a specific problem with material parameters and boundary conditions is solved, using laminate and sandwich theory, the results are compared with the results from the chapter numerical solution of sandwich beam deflection, in this chapter, deflection is solved in the Abaqus software. After verifying the numerical solution, we come to the last chapter and that is the replacement of the metal blade with a sandwich fan blade. Experimental measurements of both blades are compared with numerical calculations, deflection of the blades and modal analysis are examined.

Keywords: fan blade, sandwich material, numerical solution, deflection, modal analysis, replacement

Obsah

Úvod	6
Seznam použitých symbolů	7
1 Teorie potřebné k řešení úlohy	9
1.1 Klasická laminátová teorie	9
1.1.1 Bez uvažování příčných smykových sil	10
1.1.2 S uvažováním příčných smykových sil	15
1.2 Sendvičová teorie	17
2 Analytické řešení průhybu sendvičového nosníku	22
2.1 Průhyb pomocí laminátové teorie s uvažováním příčných smykových sil	23
2.2 Průhyb pomocí sendvičové teorie	24
3 Numerické řešení průhybu sendvičového nosníku	27
3.1 Metoda konečných prvků	27
3.1.1 Skořepinové prvky	27
3.1.2 Objemové prvky	28
3.1.3 Modely nosníků	28
3.1.4 Analýza průhybu sendvičového nosníku	31
4 Náhrada kovové lopatky sendvičovou lopatkou	33
4.1 Kovová lopatka ventilátoru	33
4.1.1 Numerické řešení	33
4.1.2 Experiment	38
4.1.3 Srovnání experimentu a numerického řešení kovové lopatky	38
4.2 Sendvičová lopatka ventilátoru	39
4.2.1 Numerické řešení	40
4.2.2 Experiment	43
4.2.3 Srovnání experimentu a numerického řešení sendvičové lopatky	44
5 Závěr	45
Použitá literatura	46

Úvod

Sendvičové materiály jsou dnes oblíbené díky vysokému poměru tuhosti vůči hmotnosti. Proto vznikl projekt TWIGGY s číslem FW01010153 realizující program Technologické agentury České republiky na náhradu kovové lopatky ventilátoru lopatkou sendvičovou, tento projekt se zabývá odlehčením lopatky osového ventilátoru. Částí projektu je zjištění a následné porovnání průhybu a modální analýzy kovové lopatky a sendvičové lopatky, což je předmětem této bakalářské práce.

U obou lopatek bylo realizováno experimentální měření, které provedli pracovníci KME na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni. Aby výsledný průhyb a vlastní kmity bylo možné porovnat, bylo provedeno numerické řešení obou lopatek, kde se stanovili stejné okrajové podmínky, které byly zajištěny i u experimentálního měření. Numerické řešení bylo ověřeno pomocí výpočtu průhybu sendvičového nosníku zatíženého uprostřed silou, tento průhyb se vypočte numericky díky softwaru Abaqus a porovná se s analytickým řešením vypočteným v softwaru Matlab, kde jsem vytvořila program pro výpočet průhybu a všech potřebných matic. Analytické řešení se bude řešit pomocí sendvičové a laminátové teorie. U numerického řešení rozdělíme model na objemové prvky, skořepinové prvky nebo jejich kombinaci, tím zjistíme jaké prvky jsou vhodné pro řešení sendvičových materiálů.

Bakalářská práce je rozdělena na čtyři kapitoly. První kapitola se zabývá odvozením rovnice pro průhyb sendvičového nosníku u laminátové i u sendvičové teorie. Ve druhé kapitole se využijí odvozené rovnice a vypočítá se průhyb pomocí laminátové a sendvičové teorie. Třetí kapitola se věnuje numerickému řešení konkrétního sendvičového nosníku, na konci kapitoly najdete srovnání analytického řešení a numerického řešení. A nakonec čtvrtá kapitola, která se věnuje zkoumání náhrady kovové lopatky sendvičovou lopatkou ventilátoru, zde se bude porovnávat experimentálně naměřený průhyb a volné kmity obou lopatek s výsledky numerických modelů.

Seznam použitých symbolů

symbol	jednotka	název
A	Nm^{-1}	matice vazební tuhosti
b	m	šířka nosníku
B	N	matice vazební tuhosti
C	Pa	matice tuhosti
C'	Pa	pootočená matice tuhosti
$\bar{\mathbf{C}}$	N	matice vazební tuhosti sendvičů
D	N	matice ohybové tuhosti
D*	N^{-1}	inverzní matice ohybové tuhosti
$E_{L,T,T'}$	Pa	modul pružnosti v tahu ve směrech L,T,T'
E_x	Pa	efektivní modul pružnosti v tahu
E_c	Pa	modul pružnosti izotropního jádra
F	N	vnější síla
F	Nm^{-1}	matice smykové tuhosti
F*	mN^{-1}	inverzní matice smykové tuhosti
G_{LT}	Pa	modul pružnosti ve smyku v rovině LT
$G_{LT'}$	Pa	modul pružnosti ve smyku v rovině LT'
$G_{TT'}$	Pa	modul pružnosti ve smyku v rovině TT'
h	m	výška nosníku
h_c	m	výška jádra sendvičového materiálu
J_y	m^4	kvadratický moment plochy k ose y
k		vektor křivosti střední vrstvy laminátu
l	m	délka nosníku
M	N	matice momentů vztažená na jednotku délky
N	Nm^{-1}	matice výsledných sil na jednotku délky
Q	Pa	matice mimoosové tuhosti
Q_s	Nm^{-1}	vektor vnějších příčných sil

S	Pa^{-1}	matice poddajnosti
T_ε		transformační matice pro vektor deformace
T_σ		transformační matice pro vektor napětí
w_0	m	průhyb desky ve směru z
γ		zkosy
ε		vektor deformace
ν		Poissonovo číslo
ρ	kg m^{-3}	hustota
σ	Pa	vektor napětí
ψ	deg	sklon střední roviny

Kapitola 1

Teorie potřebné k řešení úlohy

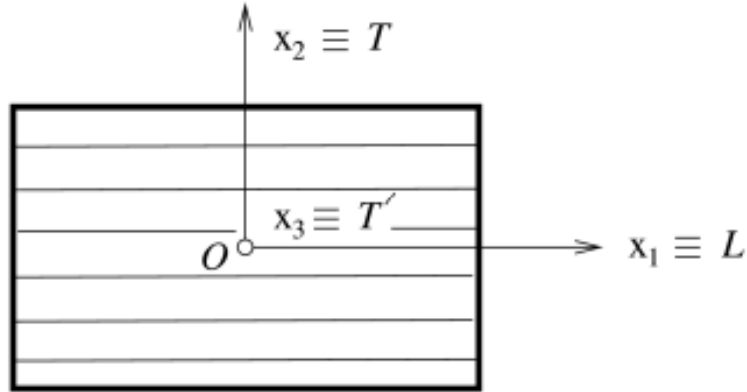
1.1 Klasická laminátová teorie

Laminát je tvořen dvěma nebo více vrstvami kompozitového materiálu. Kompozitová vrstva je vytvořena nebo složena ze dvou či více materiálů, které se odlišují svými chemickými, fyzikálními a mechanickými vlastnostmi, poté i vlastnosti výsledného materiálu, jsou rozdílné od vlastností jednotlivých kompozitových částí.

Kompozitový materiál či pouze kompozitní vrstva vzniká vložením jedné nebo více nespojitých částí do jedné spojité. Spojitá část kompozitu se nazývá matrice, zatímco nespojitou část známe pod názvem výztuž. Matrice slouží jako pojivo výztuže, také plní ochrannou funkci a pomáhá rozložit napětí do výztuží. Hlavním úkolem výztuže je zvýšit pevnost a tuhost kompozitového materiálu. Výztuž lze rozdělit na vláknovou a částicovou. Pokud jsou vlákna orientována jedním směrem, jedná se o jednosměrový kompozit (obr.1.1). U těchto jednosměrových vláknových kompozitů budou vlastnosti v podélném směru vláken L velice odlišné od směru příčném na vlákna T , protože v podélném směru jsou rozhodující vlastnosti vláken, zatímco v příčném směru jsou vlastnosti jednosměrového kompozitu řízeny vlastnostmi matrice.

Při skládání jednosměrových kompozitových vrstev můžeme vlákna orientovat tak, abychom dosáhli požadovaných vlastností pro výsledný laminát. Jednotlivé kompozitní vrstvy v laminátu mohou s osou x svírat libovolný úhel, pokud je ale rovina xy rovinou symetrie, jedná se o symetrický laminát.

Pro stanovení základní rovnice laminátové desky je nutno uvažovat, že každá kompozitová vrstva je ortotropní a kvazihomogenní. Tloušťka každé vrstvy je ve srovnání s její délkou a šířkou velmi malá. Spojení mezi jednotlivými vrstvami je dokonalé, nekonečně tenké a posunutí jsou proto spojitá. Posunutí jednotlivých bodů ve třech základních směrech jsou malá, a také posunutí po tloušťce se mění lineárně. Tloušťka je malá vůči ostatním rozměrům, proto je možno uvažovat nulovou normálovou složku napětí k ose z a smykové složky napětí v rovinách xz a yz , poté hovoříme o rovinné napjatosti. Kolmice ke středové ploše jsou i po deformaci kolmé, a proto je zkosení v rovinách xz a yz nulové. Přetvoření v příčném směru je nulové, protože vzdálenost od středové roviny zůstává konstantní. Závislost mezi napětími a deformacemi jsou lineární.



Obrázek 1.1: Jednosměrový kompozit. [3]

1.1.1 Bez uvažování příčných smykových sil

Rovnice pro jednosměrové kompozity. Vztahy mezi napětím σ a deformací ε pomocí matic poddajnosti \mathbf{S} a tuhosti \mathbf{C} .

$$\varepsilon = \mathbf{S} \sigma \quad (1.1)$$

$$\sigma = \mathbf{C} \varepsilon \quad (1.2)$$

Ze vztahu (1.1) a (1.2) je možné zavést vztah pro matice poddajnosti a tuhosti jako

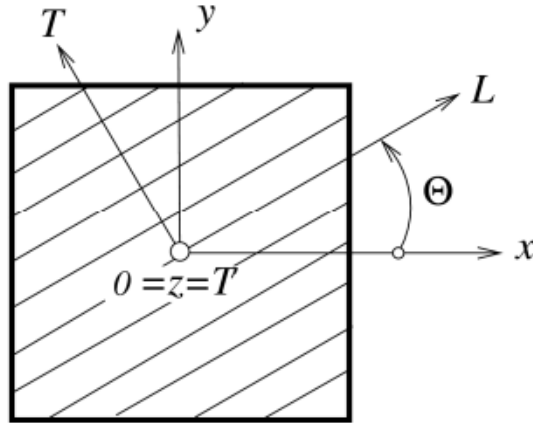
$$\mathbf{C} = \mathbf{S}^{-1} \quad (1.3)$$

Matice poddajnosti má tvar

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{TL}}{E_T} & -\frac{\nu_{T'L}}{E_{T'}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & \frac{1}{E_T} & -\frac{\nu_{T'T}}{E_{T'}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{LT'}}{E_L} & -\frac{\nu_{TT'}}{E_T} & \frac{1}{E_{T'}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{TT'}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT'}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Ze vztahu (1.4) a (1.3) dostaneme matici tuhosti \mathbf{C} . Matice tuhosti \mathbf{C} je výše odvozená pro jednosměrový kompozit, u kterého jsou vlákna orientována do směru L. Při skládání laminátu se může stát, že jednotlivé vrstvy jednosměrového kompozitu budou vůči sobě natočeny o určitý úhel Θ k pevnému souřadnicovému systému. Při natočení vrstev laminátu použijeme transformační matice \mathbf{T}_σ a \mathbf{T}_ε . Transformační matice slouží k transformaci napětí σ v pevném

souřadnicovém systému $O(x,y,z)$ do pootočeného systému $O(L,T,T')$, kde napětí značíme σ' . Transformační matice \mathbf{T}_σ zajišťuje výpočet vektoru napětí v pootočeném systému vůči pevnému systému a matice \mathbf{T}_ε slouží pro výpočet vektoru deformací v pootočeném souřadnicovém systému ku pevnému systému.



Obrázek 1.2: Jednosměrový kompozit se dvěma souřadnicovými systémy. [3]

Maticový zápis vztahu pro výpočet napětí

$$\sigma' = \mathbf{T}_\sigma \sigma. \quad (1.5)$$

Maticový zápis vztahu pro výpočet deformací

$$\varepsilon' = \mathbf{T}_\varepsilon \varepsilon. \quad (1.6)$$

Transformační matice mají tvar

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \cos^2\Theta & \sin^2\Theta & 0 & 0 & 0 & 2\sin\Theta\cos\Theta \\ \sin^2\Theta & \cos^2\Theta & 0 & 0 & 0 & -2\sin\Theta\cos\Theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\Theta & -\sin\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ -\sin\Theta\cos\Theta & \sin\Theta\cos\Theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2\Theta - \sin^2\Theta \end{bmatrix}, \quad (1.7)$$

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \cos^2\Theta & \sin^2\Theta & 0 & 0 & 0 & \sin\Theta\cos\Theta \\ \sin^2\Theta & \cos^2\Theta & 0 & 0 & 0 & -\sin\Theta\cos\Theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\Theta & -\sin\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ -2\sin\Theta\cos\Theta & 2\sin\Theta\cos\Theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2\Theta - \sin^2\Theta \end{bmatrix}. \quad (1.8)$$

Pomocí transformačních matic můžeme vyjádřit pootočenou matici tuhosti \mathbf{C}' , matice tuhosti je pro každou jinak natočenou vrstvu odlišná, je závislá na úhlu natočení Θ .

$$\mathbf{C}' = \mathbf{T}_\sigma^{-1} \mathbf{C} \mathbf{T}_\varepsilon. \quad (1.9)$$

Pro úlohu rovinné napjatosti lze matici mimoosové tuhosti \mathbf{Q} vyjádřit pomocí Hookova zákona pro mimoosové složky napětí a deformace

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon}', \quad (1.10)$$

kde lze prvky matice mimoosové tuhosti \mathbf{Q} získat pomocí

$$Q_{ij} = C'_{ij} - \frac{C'_{i3} C'_{3j}}{C'_{33}}. \quad (1.11)$$

Matice mimoosové tuhosti je plná, čtvercová matice třetího řádu. Z nenulových prvků matice a zároveň z Hookova zákona pro mimoosou napjatost a deformaci jsou tlakové i tahové složky závislé na smykové složce a smykové složky jsou závislé na tahu a tlaku.

Pomocí klasické laminátové teorie lze odvodit vztah, kde N_x , N_y , N_{xy} jsou výslednice sil v příslušných směrech na jednotku délky a M_x , M_y , M_{xy} jsou příslušné momenty na jednotku délky. [1], [2]

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^\circ \\ \mathbf{k} \end{bmatrix}. \quad (1.12)$$

Vztah (1.12) je možné poté rozepsat

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \left[\sum_{k=1}^n \mathbf{Q}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz \right] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} + \left[\sum_{k=1}^n \mathbf{Q}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}, \quad (1.13)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \left[\sum_{k=1}^n \mathbf{Q}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} + \left[\sum_{k=1}^n \mathbf{Q}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz \right] \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}. \quad (1.14)$$

Při násobení prvků matice \mathbf{Q} a integrálu, lze přepsat rovnice do tvaru

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}, \quad (1.15)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}, \quad (1.16)$$

kde ε_{xx}° , ε_{yy}° , γ_{xy}° , jsou deformace střední roviny a k_x , k_y , k_{xy} jsou příslušné křivosti. Pro prvky jednotlivých matic **A**, **B** a **D** tedy platí

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k (h_k - h_{k-1}), \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2), \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Matice **A** je matice tahové tuhosti a váže sílu a deformace ve střední rovině. Ze vztahů (1.15) a (1.16) plyne, že matice **B** je matice vazební tuhosti a váže mezi sebou momenty a deformace ve střední rovině, ale i složky vnitřní síly a křivosti plochy. Matice ohybové tuhosti **D** váže složky momentů a křivosti plochy. Pomocí matice tahové tuhosti **A**, matic vazební tuhosti **B** a matice ohybové tuhosti **D** lze zapsat globální matici tuhosti.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}. \quad (1.18)$$

Rovnice pro matici ohybové tuhosti **D**

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}. \quad (1.19)$$

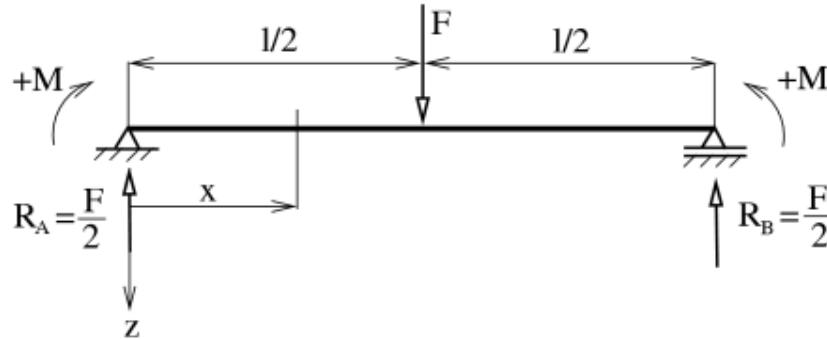
Pomocí inverze lze vyjádřit křivosti k_x , k_y , k_{xy} .

$$\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}^* & D_{12}^* & D_{16}^* \\ D_{21}^* & D_{22}^* & D_{26}^* \\ D_{61}^* & D_{62}^* & D_{66}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix}. \quad (1.20)$$

Nyní se budeme věnovat průhybu nosníku, kdy je možné pro řešení použít klasickou lamiátovou teorii. Za předpokladu, že máme nosník délky l na dvou podporách zatížen uprostřed silou F (obr.1.3)

$$M = R_A \cdot x = \frac{F}{2} x, \quad (1.21)$$

pro $x \in \langle 0; \frac{l}{2} \rangle$.



Obrázek 1.3: Nosník na dvou podporách zatížený uprostřed silou F . [3]

A z teorie nosníků je známa diferenciální rovnice průhybové čáry ve tvaru

$$\frac{d^2 w_0}{dx^2} = -\frac{M}{E_x J_y}. \quad (1.22)$$

Integrací dostaneme

$$w_0 = -\frac{1}{E_x J_y} \left(\frac{F x^2}{12} + C_1 x + C_2 \right), \quad (1.23)$$

z okrajových podmínek je $x = 0$ a $w_0 = 0$ je $C_2 = 0$.

Při uvažování symetrického nosníku je

$$C_1 = -\frac{F l^2}{16}. \quad (1.24)$$

Pro kvadratický moment J_y platí

$$J_y = \frac{1}{12} b h^3, \quad (1.25)$$

pro efektivní modul pružnosti v tahu E_x ve směru osy

$$E_x = \frac{12}{h^3 D_{11}^*}, \quad (1.26)$$

kde \mathbf{D}^* je inverzní matice ohybové tuhosti a platí

$$\mathbf{D}^* = \mathbf{D}^{-1}. \quad (1.27)$$

Potom je rovnice průhybu bez uvažování příčných smykových sil

$$w_0 = \frac{F l^3}{48 b} D_{11}^*. \quad (1.28)$$

1.1.2 S uvažováním příčných smykových sil

Pokud poměr délky desky l k její šířce b je menší nebo roven deseti, poté už se nejedná o velmi tenkou desku, ale mluví se o tlusté desce. Při zavedení smykové matice tuhosti \mathbf{F} , začneme uvažovat příčné smykové deformace, díky nim lze stanovit poměrně přesně hodnoty vektoru napětí a deformací.

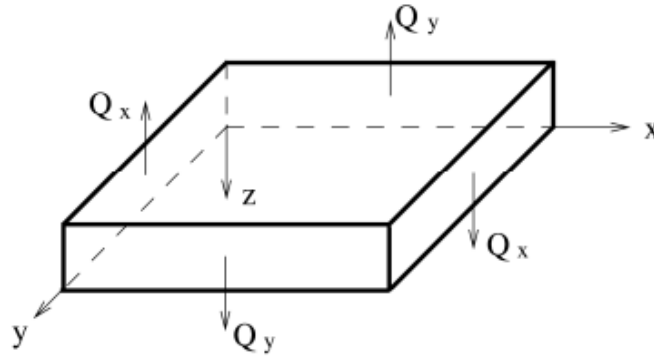
Za předpokladu, že je známo pole deformací, se může řešit pole napětí v k -té vrstvě.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} & 0 & 0 \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{54} & C'_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz}^{\circ} \\ \gamma_{zx}^{\circ} \end{bmatrix}. \quad (1.29)$$

V k -té vrstvě pro příčná smyková napětí σ_{yz} , σ_{zx} platí

$$\begin{bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} C'_{44} & C'_{45} \\ C'_{54} & C'_{55} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^{\circ} \\ \gamma_{zx}^{\circ} \end{bmatrix}. \quad (1.30)$$

Pro získání rovnic, které obsahují vliv příčného smyku se musí zjistit výslednice vnějších sil. Tyto síly působí kolmo na desku a zapříčiňují smykové deformace.



Obrázek 1.4: Výsledné síly působící v řezu laminátu. [3]

Výsledné síly se vyjádří jako součet přes všechny vrstvy laminátové desky

$$\begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix} dz. \quad (1.31)$$

Pomocí (1.30) a (1.31) je možno vyjádřit výsledné vnější síly v závislosti na matici smykové tuhosti \mathbf{F}

$$\begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{44} & F_{45} \\ F_{54} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^{\circ} \\ \gamma_{zx}^{\circ} \end{bmatrix}, \quad (1.32)$$

kde matici smykové tuhosti vyjádříme jako

$$F_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1})(C'_{ij})_k. \quad (1.33)$$

Pro zjištění průhybu je třeba odvodit rovnici pro průhyb laminátového nosníku. Při poměru délky l a šířky b , který musí být menší nebo roven deseti, se bude při ohybu uvažovat nejen ohybové namáhání, ale i namáhání příčnými smykovými silami.

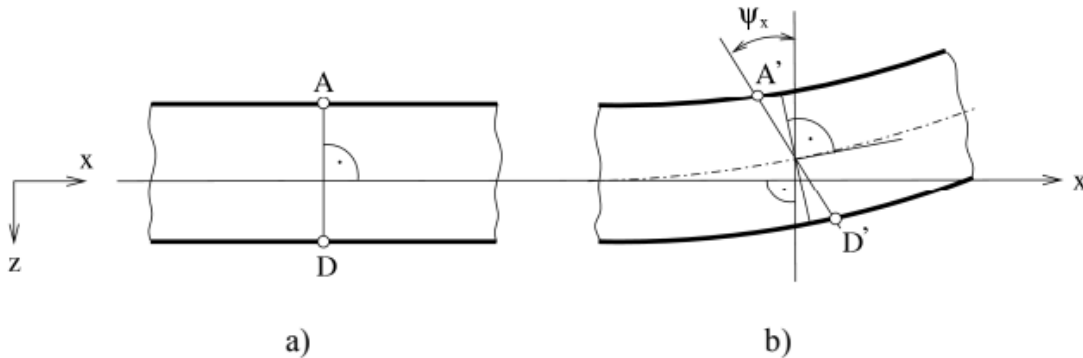
Pomocí inverze (1.32), lze vyjádřit zksoy γ_{yz}, γ_{zx} .

$$\begin{bmatrix} \gamma_{yz}^{\circ} \\ \gamma_{zx}^{\circ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{44}^* & F_{45}^* \\ F_{54}^* & F_{55}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix}. \quad (1.34)$$

Pokud zanedbáme křivosti k_{xy}, k_y pak

$$k_x = -\frac{d\psi_x}{dx}, \quad (1.35)$$

kde ψ_x je natočení kolmice ke střední rovině (obr.1.5).



Obrázek 1.5: Ohyb laminátu v rovině xz . [3]

Za předpokladu, že je znám ohybový moment $M = bM_x$ můžeme psát

$$-\frac{d\psi_x}{dx} = D_{11}^* M_x = \frac{M}{E_x J_y}. \quad (1.36)$$

Při odvozování průhybu je uvažován nosník na dvou podporách (obr.1.3), z obrázku je možno určit ohybový moment, pro který platí rovnice (1.21). Při dosazení (1.21) do (1.35) a následné integraci výrazu, lze úhel natočení $\psi_x(x)$ vyjádřit jako

$$\psi_x = \frac{F x^2}{4E_x J_y} + C_1, \quad (1.37)$$

pro $x \in \langle 0; \frac{l}{2} \rangle$.

Ze symetrického nosníku plyne

$$\psi_x(l/2) = 0, \quad (1.38)$$

poté je konstanta C_1

$$C_1 = \frac{Fl^2}{16E_x J_y}. \quad (1.39)$$

Úhel natočení pro $x \in \langle 0; \frac{l}{2} \rangle$

$$\psi_x = -\frac{Fl^2}{16E_x J_y} \left[1 - 4 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right]. \quad (1.40)$$

Pro rovnici výpočtu průhybu platí

$$\frac{dM}{dx} = bhG_{xy} \left(\frac{dw_0}{dx} - \psi_x \right). \quad (1.41)$$

Po dosazení (1.21) do (1.41) dostaneme

$$\frac{dw_0}{dx} = \psi_x + \frac{F}{2bhG_{xy}}, \quad (1.42)$$

pro $x \in \langle 0; \frac{l}{2} \rangle$.

Dosazením (1.40) do (1.42) a následné integraci dostaneme

$$w_0 = \frac{Fl^2}{4E_x bh^3} x \left[3 - \left(\frac{2x}{l} \right)^2 + 2S \right], \quad (1.43)$$

kde

$$S = 12 \frac{F_{55}^*}{h^2 D_{11}^*} \left(\frac{h}{l} \right)^2. \quad (1.44)$$

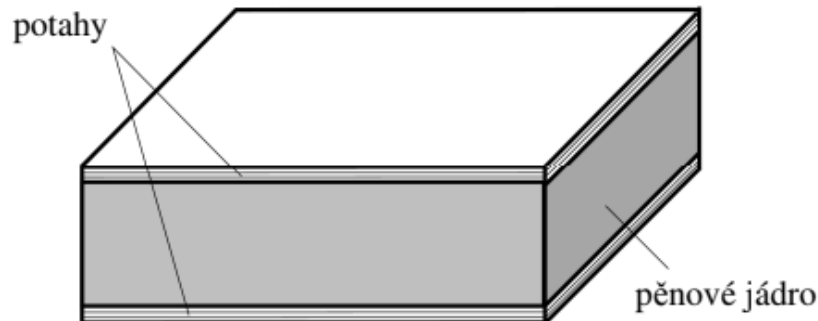
Poté je průhyb nosníku uprostřed pod silou F roven

$$w_0 = \frac{Fl^3}{48b} D_{11}^* \left(1 + 12 \frac{F_{55}^*}{D_{11}^*} \frac{1}{l^2} \right). \quad (1.45)$$

1.2 Sendvičová teorie

Sendvičové materiály můžeme řadit k vrstevným materiálům, které se skládají ze dvou tenkých tahově odolných potahů a tlustého tlakově odolného jádra. Při správném zvolení tloušťky

sendvičového materiálu, je možno dosáhnout zvýšení tuhosti a pevnosti v ohybu. Princip konstrukce spočívá v pokrytí tlustého jádra tenkými potahy.



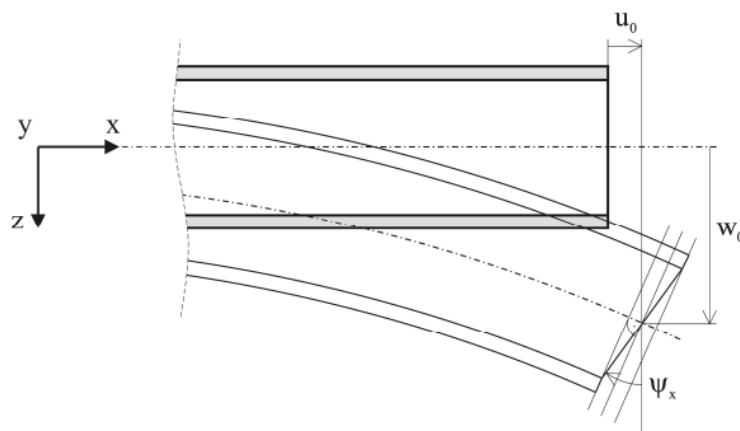
Obrázek 1.6: Sendvičová deska s pěnovým jádrem a laminátovými potahy. [3]

Mezi hlavní výhody sendvičů patří jejich nízká hmotnost. Lehké, tlakově odolné jádro, které přenáší mechanické zatížení z horního potahu na spodní potah pomocí příčného smyku a z potahů dobře odolných vůči tahu. Jádro má vůči potahům odlišné fyzikální i mechanické vlastnosti. Jako materiál na potahy se používá dřevo, ocel, hliník a také lamináty. Na jádro je možno využít také dřevo, voštiny, korek či různé druhy pěn.

Funkcí jádra je přenos smykového zatížení z jednoho potahu na druhý, proto materiál použitý na jádro musí mít správné vlastnosti jako je mechanická pevnost i tuhost, ale zároveň musí mít nízkou hmotnost. Se správně zvoleným materiálem je možné získat lepší vlastnosti, například zvukovou izolaci nebo teplotní vodivost. Zatímco hlavní funkcí potahů je odolnost vůči ohybu, může být potah zvolen tak, aby odolával vodě, povětrnostním podmínkám či byl těsný vůči páře. Pokud se jedná o tepelnou odolnost je potřeba posoudit všechny části sendviče, zda dané teplotě odolají.

Při odvozování základní rovnice sendvičové desky se předpokládá platnost Hookova zákona a také malé deformace. Tloušťka potahů je vůči tloušťce jádra velmi malá. Posuvy jádra se ve směrech x a y mění lineárně, zatímco posuvy potahů jsou ve směrech x a y konstantní. Posunutí v příčném směru nezávisí na souřadnici z , lze tedy usuzovat, že deformace ve směru z bude nulová. V jádru neuvažujeme normálová napětí, protože dokáže přenášet pouze příčná smyková napětí σ_{yz}^c a σ_{zx}^c , zbytek napětí v jádře je nulový. Naopak u potahů je možno neuvažovat příčná smyková napětí σ_{yz} , σ_{zx} a také normálové napětí σ_{zz} , protože tloušťka potahu je velmi malá.

Při uvažování sendvičové teorie je odvozování vztahu pro celkovou matici tuhosti jiné, než při uvažování klasické laminátové teorie. Pokud chceme pomocí klasické laminátové teorie odvodit rovnici pro průhyb sendvičového nosníku, uvažujeme jádro sendviče jako jednu z vrstev. Při laminátové teorii se z materiálových parametrů jádra vypočítá matice mimoosové tuhosti pro danou vrstvu, kterou představuje jádro sendviče. Pro každou vrstvu potahu se podle materiálových vlastností daného potahu, také vypočítá konkrétní matice mimoosové tuhosti, kde k je počet vrstev sendviče.



Obrázek 1.7: Ohyb sendvičové desky. [3]

Pokud se ale bude mluvit o sendvičové teorii, tak je postup při získávání matice mimoosové tuhosti a následně celkové matice tuhosti odlišný. Důvodem je, že při sendvičové teorii je nutné uvažovat pole napětí jádra a potahů odděleně.

Pro oba potahy platí

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{yz} = 0, \quad (1.46)$$

potom pro zbylé složky napětí v k -té vrstvě

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}^k \\ \sigma_{yy}^k \\ \sigma_{xy}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^l \\ \varepsilon_{yy}^l \\ \varepsilon_{xy}^l \end{bmatrix}, \quad (1.47)$$

kde $l = 1, 2$. Dolnímu potahu přísluší $l = 1$ a hornímu potahu $l = 2$.

Pro jádro naopak platí

$$\sigma_{xx}^c = \sigma_{yy}^c = \sigma_{xy}^c = \sigma_{zz}^c = 0, \quad (1.48)$$

potom pro zbylé složky napětí jádra platí

$$\begin{bmatrix} \sigma_{yz}^c \\ \sigma_{zx}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{44} & C'_{45} \\ C'_{54} & C'_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^c \\ \gamma_{zx}^c \end{bmatrix}. \quad (1.49)$$

Pro zavedení výsledných sil a momentů vyjdeme ze vztahů (1.21) a (1.22), poté pro výsledné síly

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-(\frac{h}{2}+h_1)}^{-\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz, \quad (1.50)$$

pro výsledné momenty

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-(\frac{h}{2}+h_1)}^{-\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} z dz + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} z dz. \quad (1.51)$$

Výsledné vnější síly působící na jádro je možno pomocí vztahu (1.31) přepsat

$$\begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix} dz. \quad (1.52)$$

Celkovou matici tuhosti je možno složit z dílčích matic tuhosti [3]

$$A_{ij}^1 = \sum_{k=1}^{n_1} (Q_{ij})_k (h_k - h_{k-1}), \quad (1.53)$$

$$A_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{n_2} (Q_{ij})_k (h_k - h_{k-1}), \quad (1.54)$$

$$\bar{C}_{ij}^1 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_1} (Q_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2), \quad (1.55)$$

$$\bar{C}_{ij}^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_2} (Q_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2). \quad (1.56)$$

Matrice tahové tuhosti \mathbf{A}

$$A_{ij} = A_{ij}^1 + A_{ij}^2, \quad (1.57)$$

kde \mathbf{A}^1 představuje matici tahové tuhosti pro dolní potah a \mathbf{A}^2 představuje matici tahové tuhosti pro horní potah.

Matrice vazební tuhosti \mathbf{B} , která váže výsledné síly a křivosti plochy

$$B_{ij} = \frac{h}{2} (A_{ij}^2 - A_{ij}^1). \quad (1.58)$$

Matrice vazební tuhosti $\bar{\mathbf{C}}$, která váže výsledné momenty a deformace ve střední rovině

$$\bar{C}_{ij} = \bar{C}_{ij}^1 + \bar{C}_{ij}^2, \quad (1.59)$$

kde \bar{C}^1 představuje matici vazbové tuhosti pro dolní potah a \bar{C}^2 představuje matici vazbové tuhosti pro horní potah.

Matice ohybové tuhosti \mathbf{D}

$$D_{ij} = \frac{h}{2}(\bar{C}_{ij}^2 - \bar{C}_{ij}^1). \quad (1.60)$$

Matice smykové tuhosti

$$F_{ij} = hC'_{ij}. \quad (1.61)$$

Potom je možné celkovou matici tuhosti napsat jako

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ \gamma_{yz}^c \\ \gamma_{zx}^c \end{bmatrix}. \quad (1.62)$$

Rovnice pro průhyb při uvažování sendvičové teorie, je stejná jako při odvození u laminátové teorie. Pouze matice smykové tuhosti \mathbf{F} a matice ohybové tuhosti \mathbf{D} se budou lišit

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{F}^{-1}, \quad (1.63)$$

$$\mathbf{D}^* = \mathbf{D}^{-1}. \quad (1.64)$$

Rovnice pro průhyb nosníku na dvou podporách

$$w_0 = \frac{Fl^3}{48b} D_{11}^* \left(1 + 12 \frac{F_{55}^*}{D_{11}^*} \frac{1}{l^2} \right). \quad (1.65)$$

Kapitola 2

Analytické řešení průhybu sendvičového nosníku

Výše odvozené vzahy se použijí k řešení konkrétní úlohy pro řešení průhybu sendvičového nosníku na dvou podporách (obr.1.3). Nosník je vyroben ze symetrického sendviče a jeho rozměry jsou uvedeny v tabulce 2.1. Jeho jádro je tvořeno izotropní pěnou s materiálovými vlastnostmi uvedenými v tabulce 2.2. Potahy jsou tvořeny symetrickým laminátem, ten je složen ze sedmi vrstev jednosměrového kompozitu, jenž je tvořen z uhlíkových vláken a matrice, která je z epoxidové pryskyřice. Materiálové vlastnosti potahu (tab. 2.3), horní i dolní potahy jsou totožné a jednotlivé vrstvy jsou složeny následovně $[0 | \pm 30 | 90 | \mp 30 | 0]$. Nosník je uprostřed zatížen silou $F = 100 \text{ N}$.

Tabulka 2.1: Rozměry sendviče.

l	b	h
[mm]	[mm]	[mm]
400	40	36

Tabulka 2.2: Materiálové parametry jádra.

E_c	ν_c	h_c
[MPa]	[-]	[mm]
75	0,34	30

Tabulka 2.3: Materiálové parametry potahů.

E_L	E_T	G_{LT}	$G_{TT'}$	ν_{LT}	h_1	h_2
[GPa]	[GPa]	[GPa]	[GPa]	[-]	[mm]	[mm]
129,9	13,9	4,5	3,0	0,28	3	3

2.1 Průhyb pomocí laminátové teorie s uvažováním příčných smykových sil

Nejdříve stanovíme průhyb sendvičového nosníku pomocí laminátové teorie s uvažováním příčných smykových sil. Zde budeme uvažovat jádro jako izotropní vrstvu s tloušťkou h_c . Pro analytický výpočet byl vytvořen skript v softwaru Matlab. Pomocí vztahu (1.4) můžeme vypočítat dvě matice poddajnosti \mathbf{S} a z nich následně získat dvě matice tuhosti \mathbf{C} jednu pro potahy a druhou pro jádro.

Matice tuhosti \mathbf{C}

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 128,58 & -2,36 & -2,36 & 0 & 0 & 0 \\ -2,36 & -2,30 & -6,12 & 0 & 0 & 0 \\ -2,36 & -6,12 & -2,30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3,00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4,50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4,50 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \text{ Pa.} \quad (2.1)$$

Pomocí transformačních matic (1.7) a (1.8) bude mít každá vrstva vlastní pootočenou matici tuhosti \mathbf{C}' . Celkem budeme mít tedy patnáct pootočených matic tuhosti, protože každý potah má sedm vrstev a jádro sendviče je v laminátové teorii bráno jako další vrstva.

Po dosažení pootočených matic tuhosti \mathbf{C}'_k , kde $k = 1, 2, \dots, 15$, do vztahu (1.11) získáme patnáct matic mimoosové tuhosti \mathbf{Q} .

Následně můžeme díky vztahům (1.17) vyjádřit celkovou matici tuhosti, která se skládá z matice tahové tuhosti, matice ohybové tuhosti a dvou matic vazební tuhosti.

Pro naše zadání je matice tahové tuhosti \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 44,38 & 2,18 & 0 \\ 2,18 & 6,28 & 0 \\ 0 & 0 & 2,38 \end{bmatrix} \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-1}, \quad (2.2)$$

matice vazební tuhosti \mathbf{B}

$$\mathbf{B} = \mathbf{0} \text{ N}, \quad (2.3)$$

matice ohybové tuhosti \mathbf{D}

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 43,36 & 3,61 & 0 \\ 3,61 & 8,82 & 0 \\ 0 & 0 & 3,83 \end{bmatrix} \cdot 10^4 \text{ Nm}, \quad (2.4)$$

a matice smykové tuhosti \mathbf{F}

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1,11 & 0 \\ 0 & 1,59 \end{bmatrix} \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-1}. \quad (2.5)$$

Pro výpočet průhybu uprostřed nosníku pod silou $F = 100 \text{ N}$ je třeba získat inverzní matici ohybové tuhosti \mathbf{D}^* a také inverzní matici smykové tuhosti \mathbf{F}^* tedy platí pro

$$\mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} 0,24 & -0,10 & 0 \\ -0,10 & 1,17 & 0 \\ 0 & 0 & 2,61 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5} \text{ N}^{-1}\text{m}^{-1}, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{F}^* = \begin{bmatrix} 0,90 & 0 \\ 0 & 0,63 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8} \text{ mN}^{-1}. \quad (2.7)$$

Po dosazení veličin do rovnice pro průhyb nosníku (1.45) dostaneme

$$w_0 = \frac{100 \cdot 0,4^3}{48 \cdot 0,04} 2,39 \cdot 10^{-6} \left(1 + 12 \frac{6,27 \cdot 10^{-9}}{2,39 \cdot 10^{-6}} \frac{1}{0,4^2} \right) = 9,528 \cdot 10^{-3} \text{ mm}. \quad (2.8)$$

Zadaný nosník na dvou podporách, který je zatížen silou $F = 100 \text{ N}$, se uprostřed prohne o $9,528 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$.

2.2 Průhyb pomocí sendvičové teorie

Při řešení průhybu symetrického sendvičového nosníku na dvou podporách zatíženého uprostřed silou $F = 100 \text{ N}$, vypočítáme průhyb pomocí sendvičové teorie. Při stejném zadání budeme postupovat obdobně jako při řešení průhybu u laminátové teorie. Avšak s tím rozdílem, že jádro sendviče už neuvažujeme jako jednu z vrstev laminy, ale uvažujeme ho jako jádro, které přenáší pouze smykové zatížení z horního potahu na spodní potah nebo naopak. Proto matice smykové tuhosti \mathbf{F} závisí pouze na parametrech jádra a potahy na matici \mathbf{F} nemají vliv. Naopak na parametrech potahů jsou závislé matice tahové tuhosti \mathbf{A} , matice ohybové tuhosti \mathbf{D} a dvou matic vazební tuhosti \mathbf{B} a $\overline{\mathbf{C}}$.

Pokud se jedná o symetrický sendvič, je možné vztahy (1.57) až (1.61) přepsat do tvarů

$$A_{ij}^1 = A_{ij}^2, \quad \overline{C}_{ij}^1 = -\overline{C}_{ij}^2. \quad (2.9)$$

Poté je možné psát

$$A_{ij} = 2A_{ij}^2, \quad D_{ij} = h \overline{C}_{ij}^2,$$

$$B_{ij} = 0, \quad \overline{C}_{ij} = 0, \quad (2.10)$$

$$F_{ij} = h G_{ij}^C.$$

Pokud se jedná i o izotropní jádro, je možné psát

$$F_{44} = F_{55} = h G_c \text{ a } F_{45} = 0. \quad (2.11)$$

Po zjednodušení rovnic je možné si vypočítat dvě matice tuhosti \mathbf{C}_p pro potahy a \mathbf{C}_c pro jádro. Z matice \mathbf{C}_p za pomoci transformačních matic dostaneme pootočené matice tuhosti, v tomto případě stačí počítat matice pouze pro jeden potah, to vyplývá z nově odvozených vztahů pro symetrický sendvičový materiál. Z pootočených matic tuhosti \mathbf{C}' získáme pomocí (1.11) matice mimoosové tuhosti. Poté je možné již dopočítat matice \mathbf{A} , \mathbf{B} , $\overline{\mathbf{C}}$ a \mathbf{D} .

Pro naše zadání je matice tahové tuhosti \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 44,04 & 2,07 & 0,16 \\ 2,07 & 6,19 & 0,05 \\ 0,16 & 0,05 & 2,27 \end{bmatrix} \cdot 10^8 \text{ Nm}^{-1}, \quad (2.12)$$

matice vazebních tuhostí \mathbf{B} a $\overline{\mathbf{C}}$ jsou pro symetrické potahy sendviče nulové

$$\mathbf{B} = \mathbf{0} \text{ a } \overline{\mathbf{C}} = \mathbf{0}, \quad (2.13)$$

matice ohybové tuhosti \mathbf{D}

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 101,06 & 22,45 & -9,21 \\ 22,45 & 53,37 & -3,00 \\ -9,21 & -3,00 & 23,20 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \text{ Nm}. \quad (2.14)$$

Matice smykové tuhosti \mathbf{F} , jak bylo uvedeno výše, závisí pouze na parametrech jádra. A z nově odvozených vztahů pro izotropní jádro (2.11)

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 8,40 & 0 \\ 0 & 8,40 \end{bmatrix} \cdot 10^5 \text{ Nm}^{-1}. \quad (2.15)$$

Z matice ohybové tuhosti \mathbf{D} a z matice smykové tuhosti \mathbf{F} je nutné nyní vypočítat matice k nim inverzní \mathbf{D}^* a \mathbf{F}^* .

Pro \mathbf{D}^* platí:

$$\mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} 1,13 & -0,45 & 3,89 \\ -0,45 & 2,07 & 0,09 \\ 3,89 & 0,09 & 4,48 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}, \quad (2.16)$$

a pro \mathbf{F}^* platí:

$$\mathbf{F}^* = \begin{bmatrix} 1,19 & 0 \\ 0 & 1,19 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \text{ mN}^{-1}. \quad (2.17)$$

Po dosazení veličin do rovnice pro průhyb nosníku (1.65) dostaneme

$$w_0 = \frac{100 \cdot 0,4^3}{48 \cdot 0,04} 1,13 \cdot 10^{-5} \left(1 + 12 \frac{1,19 \cdot 10^{-6}}{1,13 \cdot 10^{-5}} \frac{1}{0,4^2} \right) = 0,335 \text{ mm}. \quad (2.18)$$

Zadaný nosník na dvou podporách, který je zatížený silou $F = 100 \text{ N}$, se uprostřed prohne o $0,335 \text{ mm}$.

Průhyb nosníku počítaný laminátovou teorií je výrazně menší než průhyb vypočítaný sendvičovou teorií. Fiktivní nosník je podle laminátové teorie tužší než nosník se stejnými parametry vypočítaný pomocí sendvičové teorie. Zásadní rozdíl je v matici smykové tuhosti \mathbf{F} , do této matice se při uvažování laminátové teorie vkládají parametry všech vrstev, zatímco při sendvičové teorii do matice smykové tuhosti vstupují pouze parametry jádra. V sendvičové teorii matici ohybové tuhosti \mathbf{D} chybí parametry jádra, protože je počítána pouze z laminátových potahů. V matici ohybové tuhosti jsou při uvažování laminátové teorie obsaženy všechny vrstvy sendviče.

Kapitola 3

Numerické řešení průhybu sendvičového nosníku

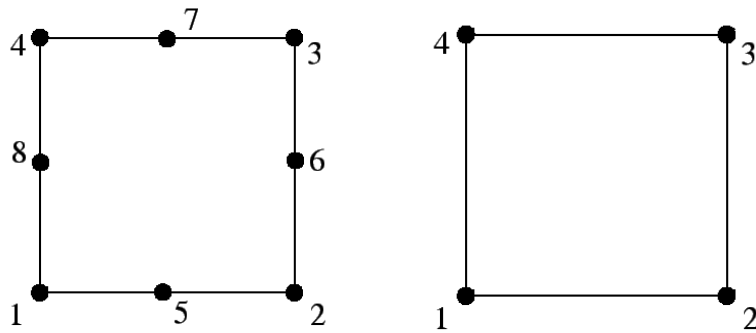
3.1 Metoda konečných prvků

V předchozí kapitole byl porovnán průhyb sendvičového nosníku na dvou podporách zatížený uprostřed silou. Zde byl hledán největší průhyb, který se nacházel pod zatěžující silou, která působila uprostřed nosníku. Nyní budeme řešit průhyb sendvičového nosníku numericky pomocí metody konečných prvků (MKP). Princip metody spočívá v rozdělení tělesa či modelu na konečný počet prvků. Každý prvek má přidělený počet uzlů a jejich pozici na prvku, každý uzel obsahuje informaci o jeho natočení a posuvu.

K výpočtu průhybu byl použit software Abaqus. Nejdříve byly vytvořeny tři modely sendvičového nosníku na dvou podporách, jeden byl modelován pomocí skořepinových prvků, druhý byl modelován pomocí objemových prvků a poslední byl kombinací skořepinových prvků, které byly použity na potahy sendviče a objemové prvky byly použity na jádro sendvičového nosníku. Bylo provedeno srovnání průhybů v závislosti na velikosti prvků a jejich počtu.

3.1.1 Skořepinové prvky

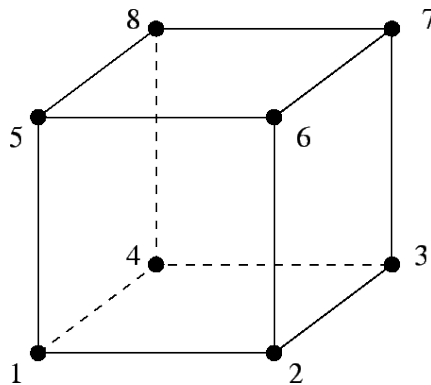
Prvky skořepinového typu se používají při modelování struktur, ve kterých je jeden rozměr výrazně menší než ostatní rozměry. Převážně se jedná vždy o tloušťku, proto se skořepinové prvky používají na modelování tenkostěnných modelů. Skořepinový prvek je definován tloušťkou a materiálovými parametry. Pro níže uvedené výpočty průhybů pomocí numerické metody konečných prvků, byl model nebo část modelu modelována skořepinovými prvky S8 (obr.3.1), čtvercový prvek s osmi uzly nebo S4 (obr.3.1) čtvercový prvek se čtyřmi uzly.



Obrázek 3.1: Element typu S8 s osmi uzly a element typu S4 se čtyřmi uzly.

3.1.2 Objemové prvky

Prvky objemového typu lze využít při modelování složených modelů z jednoho homogenního materiálu nebo mohou zahrnovat i několik vrstev, kdy každá vrstva může mít jiný materiál. Pomocí objemových prvků se tedy modelují tělesa u kterých není jeden rozměr zanedbatelný. Při modelování jádra sendvičového nosníku a i při modelování celého nosníku pomocí objemových prvků, byly zvoleny prvky typu C3D8 (obr. 3.2), tento prvek je šestistěnný a má osm uzlů.



Obrázek 3.2: Element typu C3D8.

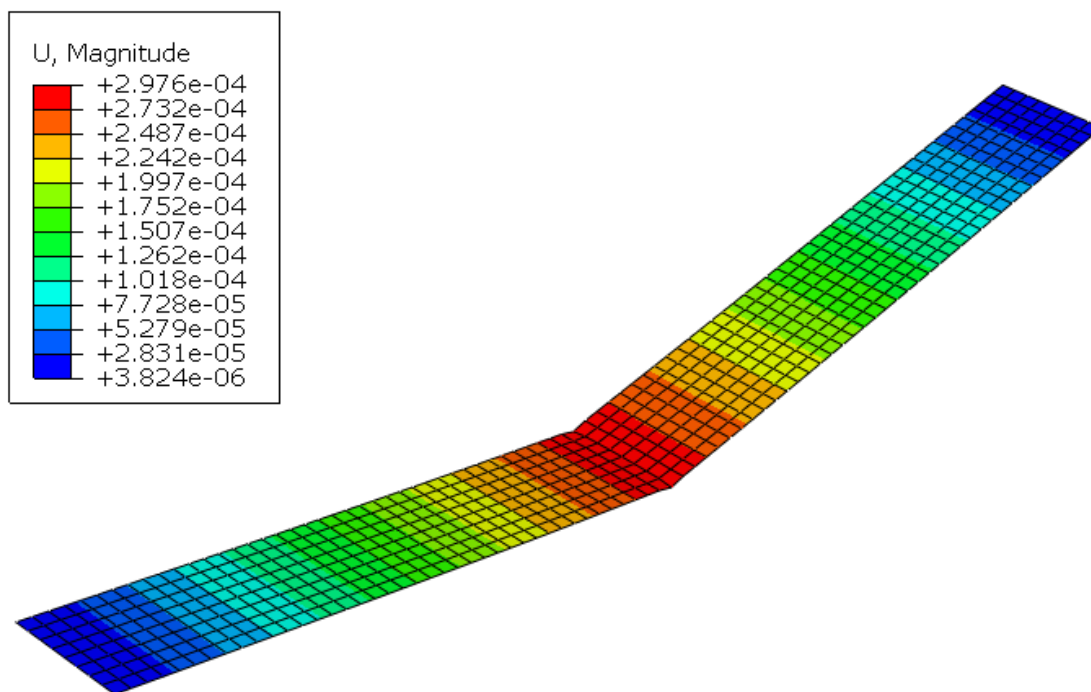
3.1.3 Modely nosníků

Jako první byl namodelován nosník složený ze skořepinových prvků S4, nosník se skládá z jednoho kusu tenké desky, která je rozdělena na konečný počet skořepinových prvků, každý prvek má celkem patnáct vrstev, z toho jedna vrstva je jádro sendvičového nosníku. Prvních sedm vrstev s tloušťkou $0,428\text{ mm}$ připadá na horní potah, každá vrstva má stejné vlastnosti (tab. 2.3) jednosměrového kompozitního materiálu, liší se pouze natočením. Prostřední vrstva je jádro, které má tloušťku 30 mm a vlastnosti izotropního materiálu, jeho materiálové vlastnosti jsou uvedeny v tabulce 2.2. Posledních sedm vrstev připadá na dolní potah. Po zadání materiálových vlastností a okrajových podmínek dostaneme výsledný průhyb. Následně byla provedena

analýza průhybů v závislosti na velikosti prvků a jejich počtu. Výsledné velikosti prvků, jejich počet a jim odpovídající průhyb je možné vidět v tabulce 3.1.

Tabulka 3.1: Průhyb skořepinového nosníku v závislosti na počtu a velikosti elementů.

Velikost elementu [mm]	Počet elementů [-]	Počet uzlů [-]	Průhyb [mm]
10	160	205	0,277
5	300	357	0,290
2,5	640	729	0,298

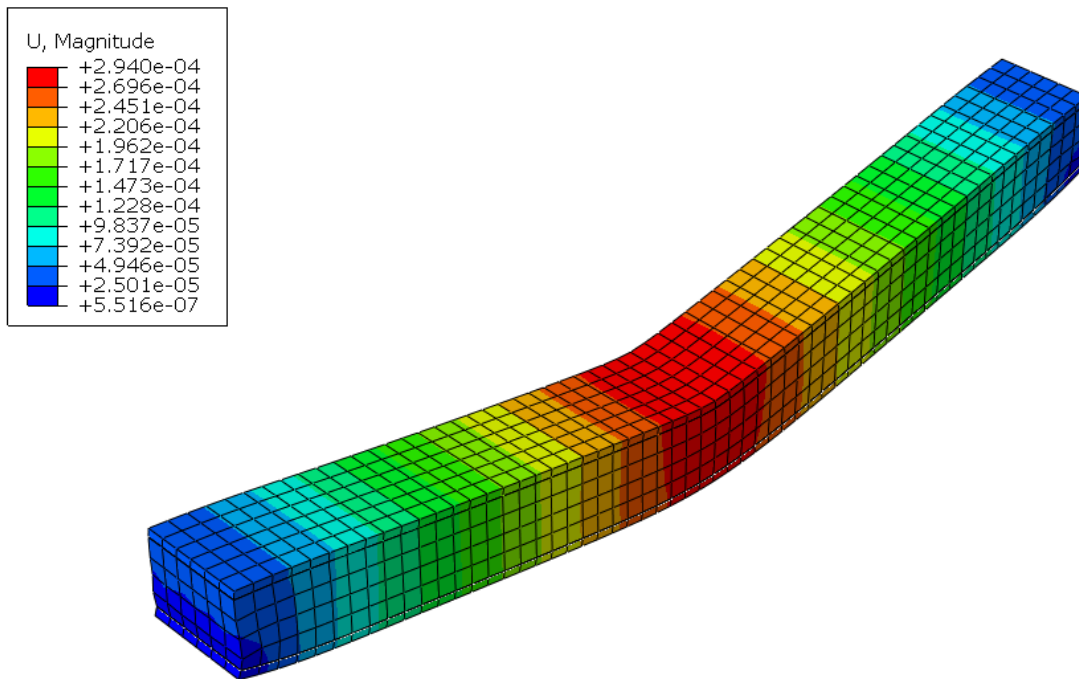


Obrázek 3.3: Numerický výpočet průhybu sendvičového nosníku pomocí skořepinových prvků.

Další model bude modelován pouze objemovými prvky C3D8. Nejdříve musíme vytvořit prostorový model sendvičové desky skládající se ze dvou objemových potahů a jednoho jádra, tloušťka musí odpovídat reálné tloušťce jednotlivých vrstev, a proto bude tloušťka sendvičového nosníku 36 mm . Horní a dolní potah je modelován jako laminát se sedmi vrstvami jednosměrového kompozitu, zatímco jádro je modelované jako izotropní vrstva se svými materiálovými vlastnostmi. Zmenšením prvků se změní počet prvků, ale také průhyb uprostřed nosníku, jehož změnu je možno sledovat v tabulce 3.2.

Tabulka 3.2: Průhyb objemové desky v závislosti na počtu a velikosti elementů.

Velikost elementu [mm]	Počet elementů [-]	Počet uzlů [-]	Průhyb [mm]
10	1056	2025	0,275
5	2088	3717	0,294
2,5	4480	7290	0,306

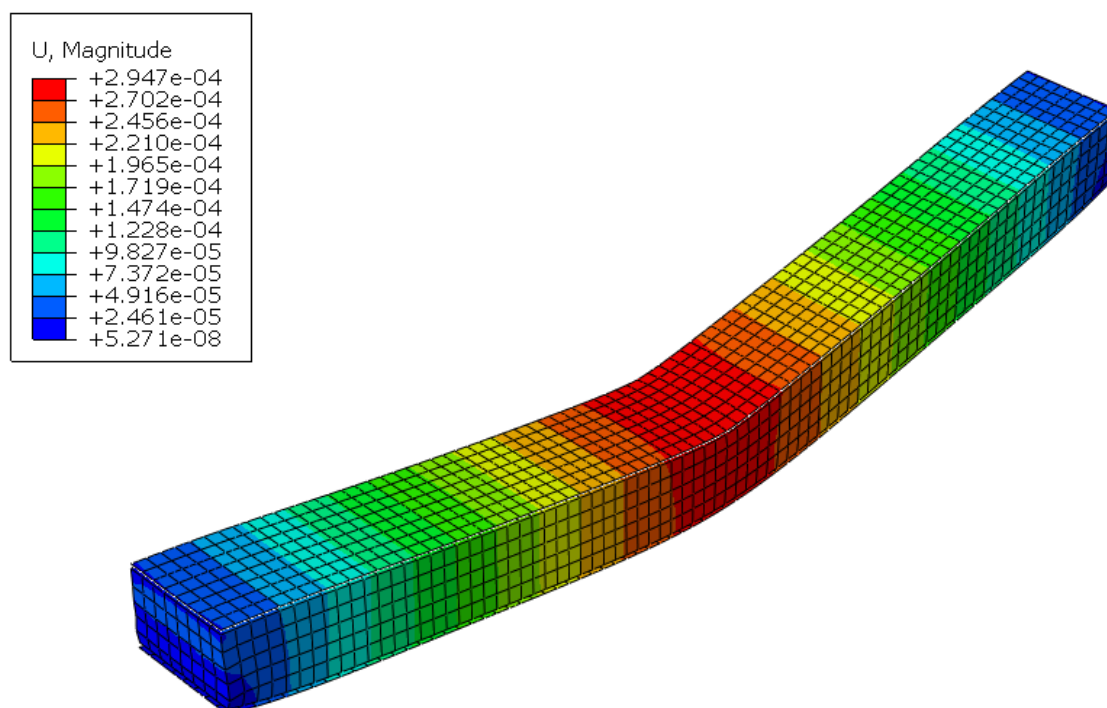


Obrázek 3.4: Numerický výpočet průhybu sendvičového nosníku pomocí objemových prvků.

Poslední model byl vytvořen jako kombinace výše uvedených typů prvků. Jádru bylo namodelované jako prostorová deska o tloušťce $h_c = 30\text{mm}$, která se poté rozdělila na konečný počet objemových prvků C3D8R. Naopak potahy byly namodelovány skořepinovými prvky S8, kde se zadává pouze fiktivní tloušťka prvků, každý potah má tloušťku $h_1 = h_2 = 3\text{mm}$. Po uchycení potahů k jádru a zadání okrajových podmínek je možné vypočítat průhyb nosníku. Poté je možné opět měnit velikost prvků a v závislosti na velikosti se bude měnit i počet prvků a poté i celkový průhyb (tab. 3.3).

Tabulka 3.3: Průhyb skořepinové a objemové desky v závislosti na počtu a velikosti elementů.

Velikost elementu [mm]	Počet elementů [-]	Počet uzlů [-]	Průhyb [mm]
10	880	2150	0,276
5	1740	3998	0,287
2,5	4480	8568	0,295



Obrázek 3.5: Numerický výpočet průhybu sendvičového nosníku pomocí objemových i skořepinových prvků.

3.1.4 Analýza průhybu sendvičového nosníku

Při porovnání výsledků získaných analytickými výpočty průhybu je zřejmé, že sendvičové nosníky s tlustým jádrem není možné počítat pomocí laminátové teorie. Tato teorie uvažuje jádro jako jednu z vrstev, která přenáší osová napětí způsobené převážně ohybem. Proto je průhyb vypočtený pomocí laminátové teorie velmi malý. Sendvičová teorie uvažuje jádro, které přenáší zatížení pomocí příčného smyku z jednoho potahu nadruhý. Průhyb vypočítaný při uvažování sendvičové teorie byl následně porovnán s numerickými výpočty.

Tabulka 3.4: Průhyb sendvičového nosníku.

	Analytické řešení Sendvičová teorie	Numerické řešení		
		Skořep. prvky	Objem. prvky	Skořep. a objem. prvky
Průhyb [mm]	0,335	0,277	0,275	0,276
		0,290	0,294	0,287
		0,298	0,306	0,295

Z tabulky 3.4 je možné vidět, že výsledky numerického řešení jsou téměř stejné a nejvíce se analytickému výpočtu průhybu sendvičového nosníku přiblížil model celý modelovaný z objemových prvků.

Kapitola 4

Náhrada kovové lopatky sendvičovou lopatkou

Nyní se budeme zabývat ohybem a modální analýzou původní lopatky vyrobené z hliníkové slitiny, tyto výsledky musíme porovnat s ohybem a modální analýzou sendvičové lopatky vyrobené ve firmě Woodcomp, s.r.o., nejdříve se tedy budeme zabývat řešením kovové lopatky. Obě lopatky budeme řešit numericky i experimentálně. Experimentální měření provedli pracovníci katedry mechaniky na Fakultě aplikovaných věd.

4.1 Kovová lopatka ventilátoru

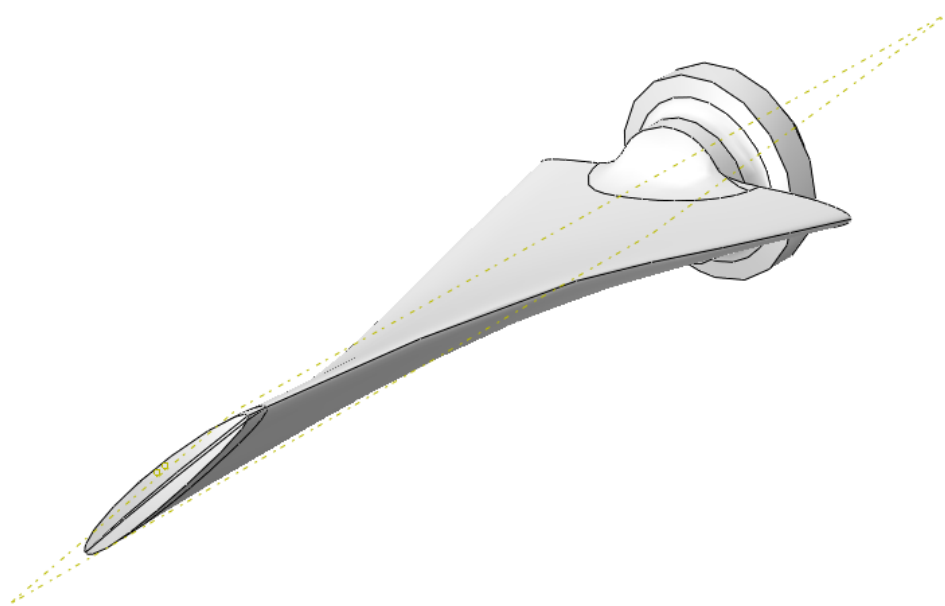
Geometrie lopatky byla převzata z ZVVZ MACHINERY, a.s. Milevsko. Uvažované parametry se blíží reálnému modelu kovové lopatky ventilátoru. Materiálové vlastnosti kovové lopatky ventilátoru jsou uvedené v tabulce 4.1.

Tabulka 4.1: Materiálové vlastnosti kovové lopatky.

E	ν	ρ
[GPa]	[-]	[kg/m ³]
68,125	0,28	2845

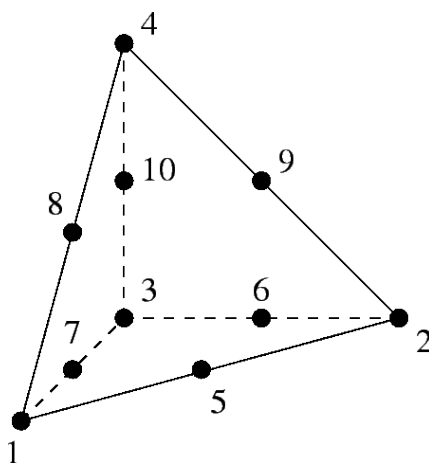
4.1.1 Numerické řešení

Při numerickém řešení lopatky ventilátoru se budeme zabývat ohybem a modální analýzou modelu kovové lopatky a také modelu sendvičové lopatky. Veškeré výpočty se budou provádět v softwaru Abaqus, kde byl počítán i průhyb sendvičového nosníku ve třetí kapitole.

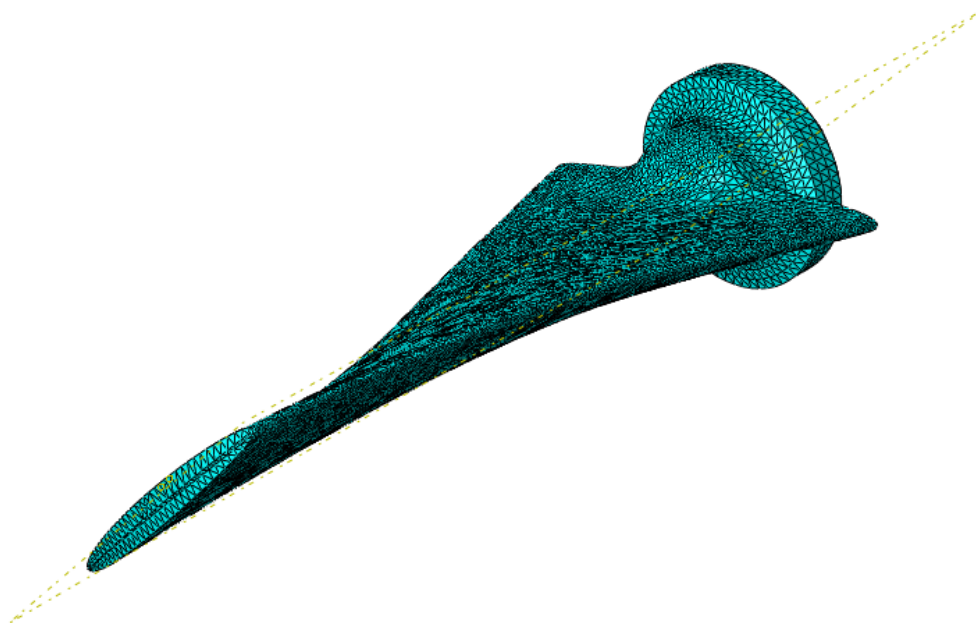


Obrázek 4.1: Model kovové lopatky.

Cílem výpočtu bude zjistit průhyb, volné kmity a vlastní tvary kmitu modelu lopatky. Po vložení geometrie a stanovení materiálu je zapotřebí vytvořit síť, která rozdělí model na konečný počet prvků. Při dělení modelu na prostorové prvky byly zvoleny prvky typu C3D10, tyto prvky jsou čtyřstěnné a každý má deset uzlů (obr. 4.2). Celkem bylo použito 187 220 elementů, na které připadlo 278 207 uzlů. (obr. 4.3).

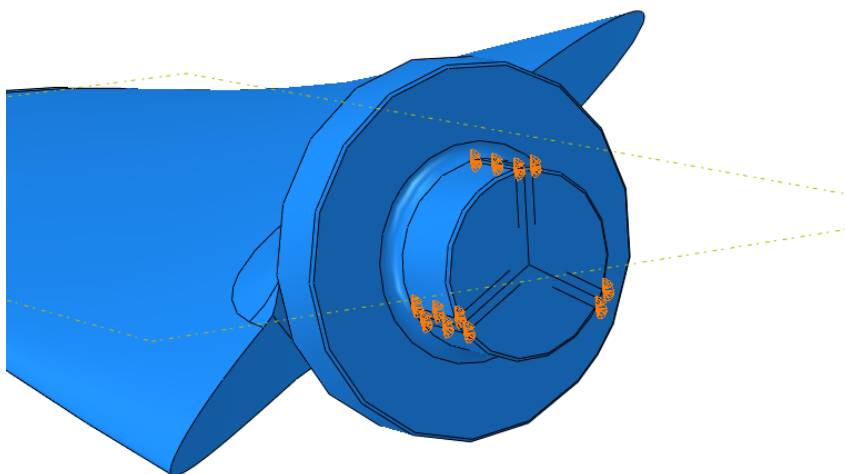


Obrázek 4.2: Element typu C3D10.

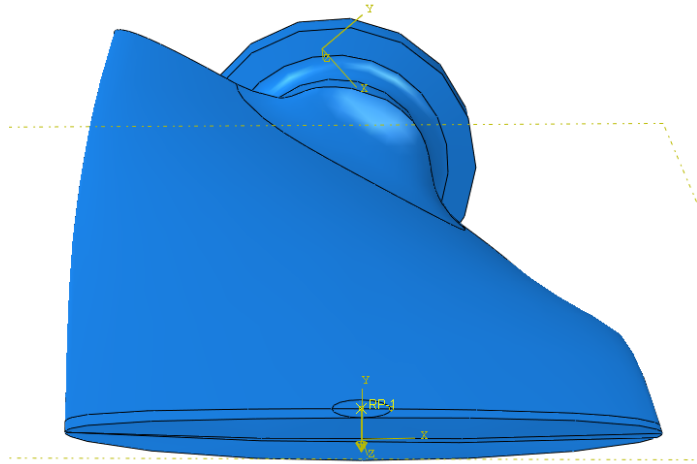


Obrázek 4.3: Model kovové lopatky s výpočetní sítí.

Při stanovování okrajových podmínek se musí brát v úvahu i následné provedení experimentu, okrajové podmínky jsou proto volené jako vetknutí s nulovými posuvy a natočením. Lopatka je vetknutá ve třech hranách tříčelist'ového sklíčidla (obr. 4.4). Lopatka byla zatížena na kruhové ploše o průměru $d = 20 \text{ mm}$, na plochu působila síla $F = 200 \text{ N}$. Směr zatěžování byl kolmý na nakloněnou osu lopatky. (obr. 4.5)

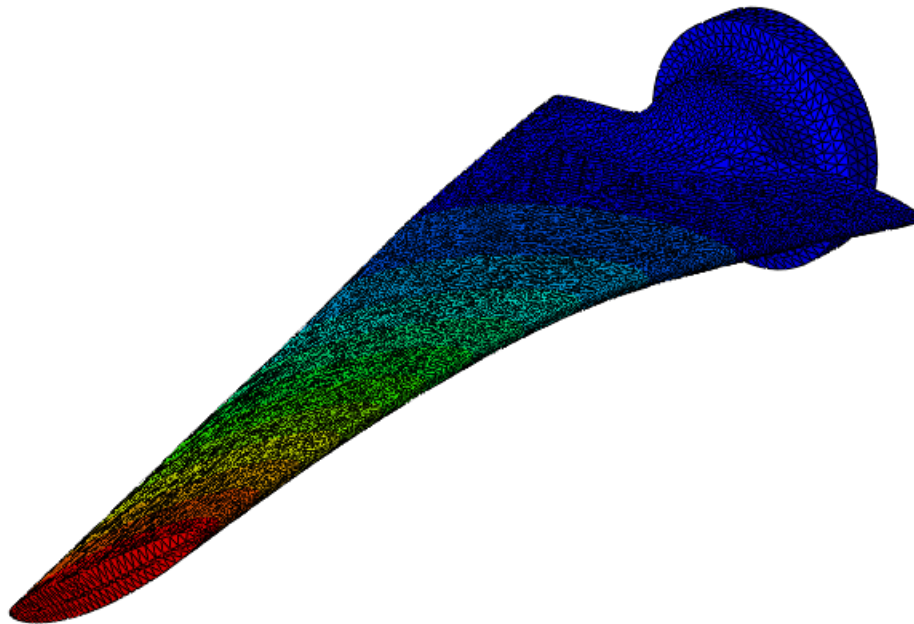


Obrázek 4.4: Vetknutí modelu hliníkové lopatky.

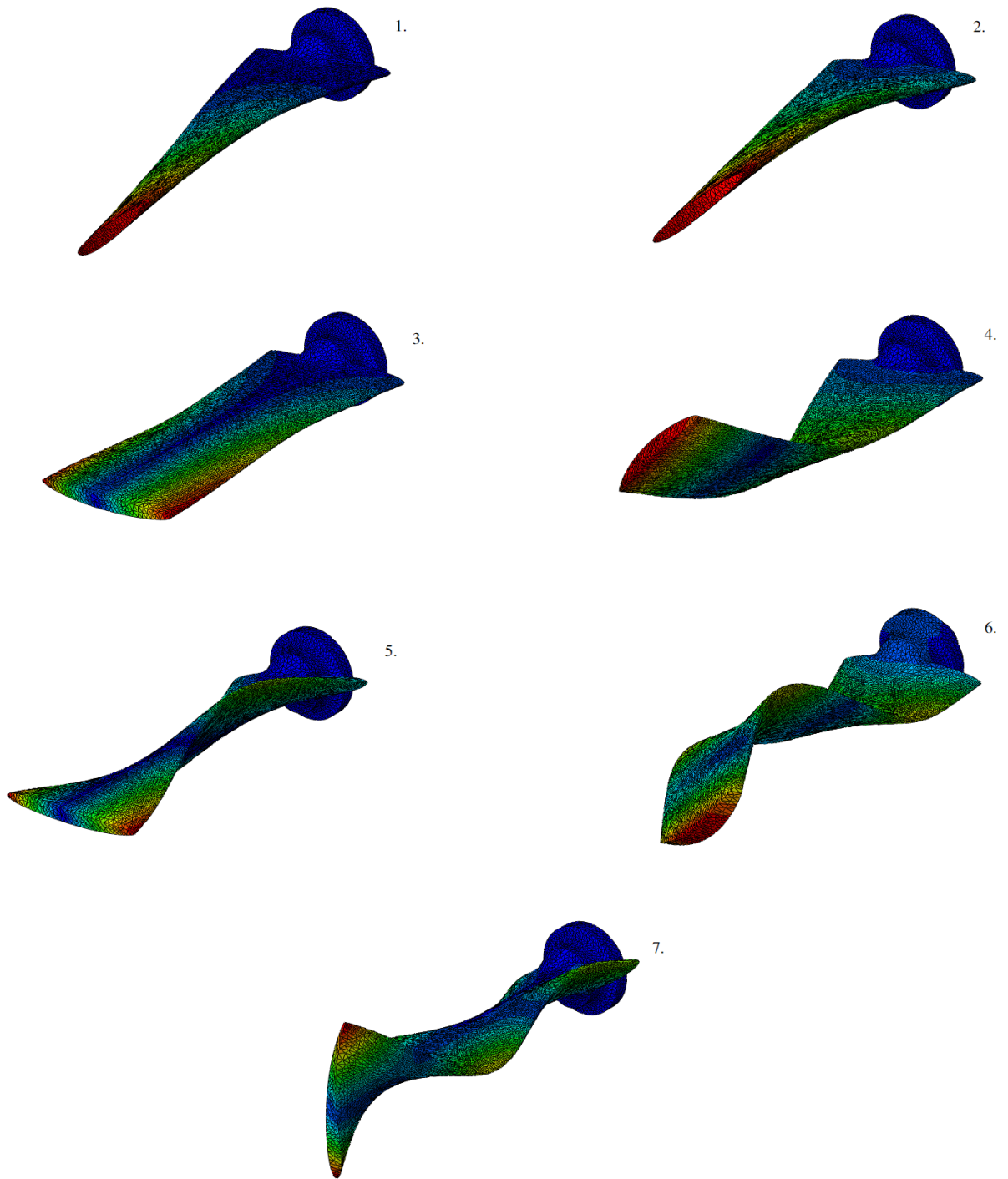


Obrázek 4.5: Zatížení modelu hliníkové lopatky.

Po spuštění výpočtu dostaneme průhyb lopatky, který je $u = 0,304 \text{ mm}$ (obr. 4.6). Při zjišťování volných kmitů modelu lopatky se neuvažuje zatížení F ani vetknutí lopatky ve sklíčidlech. (tab. 4.2). Nakonec vlastní tvary kmitu pro volné kmity jsou znázorněny na (obr. 4.7).



Obrázek 4.6: Ohyb modelu kovové lopatky.



Obrázek 4.7: Tvary volných kmitů.

4.1.2 Experiment

Lopatka byla uchycena tříčelist'ovým sklícidlem, plochy čelistí měly šířku 6 mm. Zatížení narůstalo až do hodnoty $F = 200 \text{ N}$. Konečný průhyb pod největší silou je $u = 0,656 \text{ mm}$ (obr. 4.8).



Obrázek 4.8: Experimentálně měřený průhyb hliníkové lopatky.

Při měření volných kmitů, byla lopatka volně položena na pěnové podložce, na které se provádělo měření (tab. 4.2).

Tabulka 4.2: Experimentálně a numericky získané volné kmity kovové lopatky.

		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
Experiment	[Hz]	477	880	1223	1742	2312	2726	2744
Numerické řešení	[Hz]	495	912	1251	1787	2339	2761	2788

4.1.3 Srovnání experimentu a numerického řešení kovové lopatky

Nejdříve budeme porovnávat výsledky z kovové lopatky. Při předpokládaných materiálových vlastnostech vychází průměrně rozdíl, volných frekvencí naměřených při numerickém řešení a experimentálně získaných volných frekvencí, je $35,71 \text{ Hz}$, kde výsledky získané pomocí numerického řešení jsou větší. Tato odchylka je zejména způsobena nepřesnými materiálovými vlastnostmi hliníkové slitiny. Mezi průhyby je rozdíl značný, u numerického řešení se lopatka na konci prohne o $0,304 \text{ mm}$, zatímco při experimentu je průhyb lopatky více než dvojnásobný $0,656 \text{ mm}$. Toto mohla způsobit vůle, která nastala při vetknutí lopatky do tříčelist'ových sklícidel, kde se lopatka mohla posunout o rozdíl uvedených průhybů, který činí $0,35 \text{ mm}$.

4.2 Sendvičová lopatka ventilátoru

Je dána geometrie sendvičové lopatky ventilátoru a zároveň její materiálové parametry. Lopatka je složena ze tří materiálů, jádro tvoří vermikulit (tab. 4.3), plášť sendviče je z kompozitního materiálu, kde je geopolymerní matrice a jako výztuž je tkanina z uhlíkových vláken T300 (tab. 4.4). Jako třetí materiál zde vystupuje hliník, ze kterého je vytvořen prstenec pro zpevnění kořenu lopatky (tab. 4.5).

Tabulka 4.3: Materiálové vlastnosti jádra.

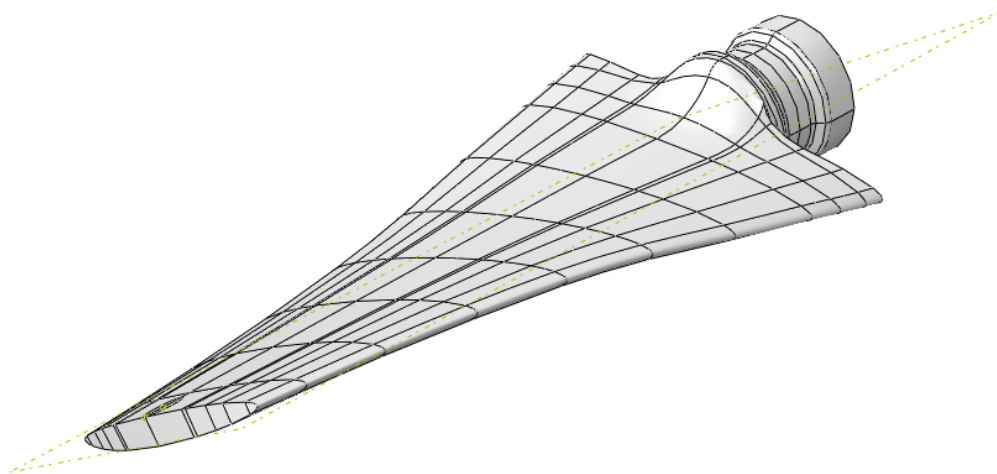
E_c	ν_c	ρ_c
[MPa]	[-]	[kg/m ³]
500	0,2	610

Tabulka 4.4: Materiálové vlastnosti potahů.

E_1	E_2	G_{12}	G_{13}	G_{23}	ν_{12}	ρ
[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[-]	[kg/m ³]
18900	18900	4400	4400	2750	0,3	1800

Tabulka 4.5: Materiálové vlastnosti hliníkového prstence.

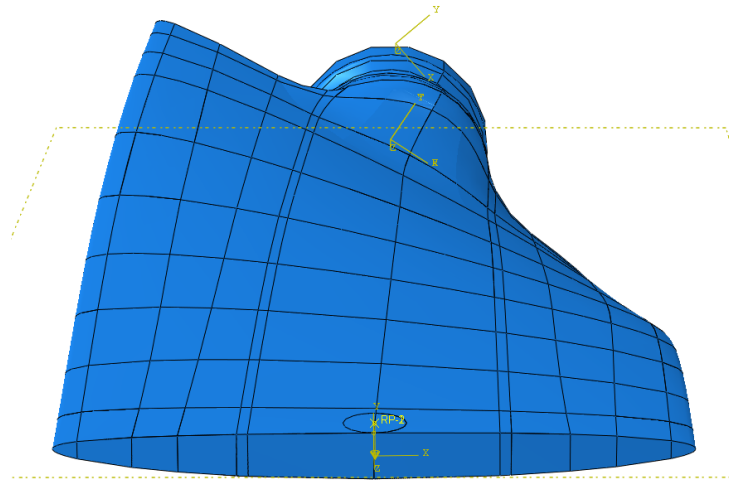
E_p	ν_p	ρ_p
[GPa]	[-]	[kg/m ³]
70	0,34	2700



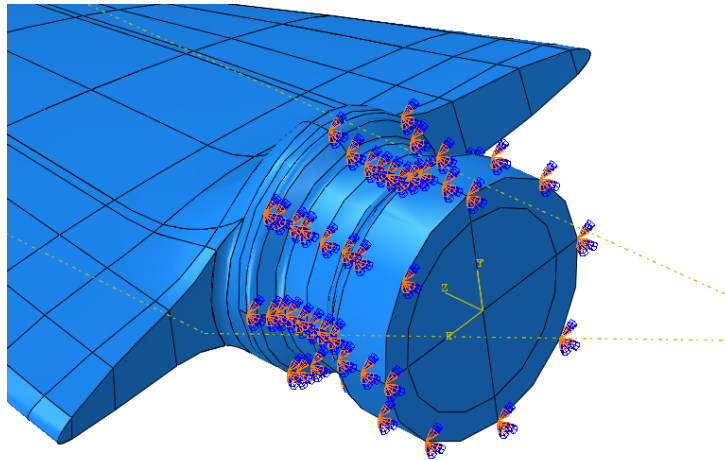
Obrázek 4.9: Model sendvičové lopatky.

4.2.1 Numerické řešení

Při sestavování modelu bylo postupováno stejně jako při vytváření výpočtového modelu u kovové lopatky (obr. 4.9). Lopatky měly zadané stejné zatížení silou $F = 200\text{ N}$ na kruhovém průřezu o průměru $d = 20\text{ mm}$ (obr. 4.10). Vetknutí sendvičové lopatky bylo díky jinému kořenu lopatky a přípravku možné uchytit po celých plochách kořene (obr. 4.11).



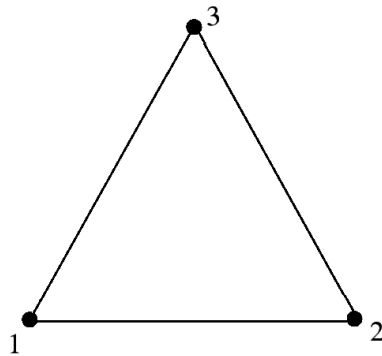
Obrázek 4.10: Zatížení modelu sendvičové lopatky.



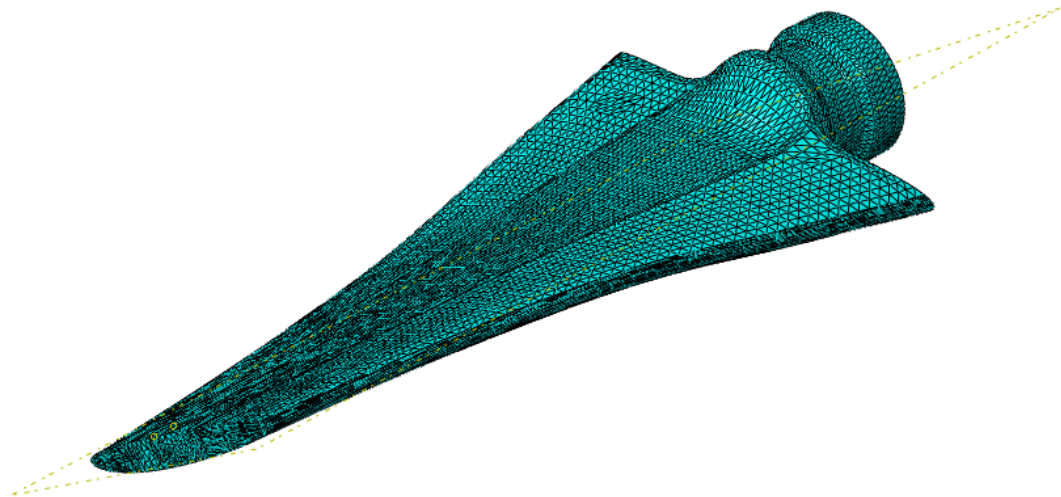
Obrázek 4.11: Vetknutí modelu sendvičové lopatky.

Výpočtová síť sendvičové lopatky byla modelována objemovými i skořepinovými prvky. Na jádro byly použity objemové prvky typu C3D10 (obr. 4.2), tento prvek je čtyřstěnný a má

deset uzlů. Plášť a hliníkový prstenc je modelován pomocí skořepinových prvků S3 (obr. 4.12) je trojúhelníkový prvek se třemi uzly. Bylo použito 24 076 skořepinových prvků a 150 690 objemových prvků, celkem bylo na výpočtový model sendvičové lopatky použito 174 766 elementů a 232 597 uzlů (obr. 4.13).

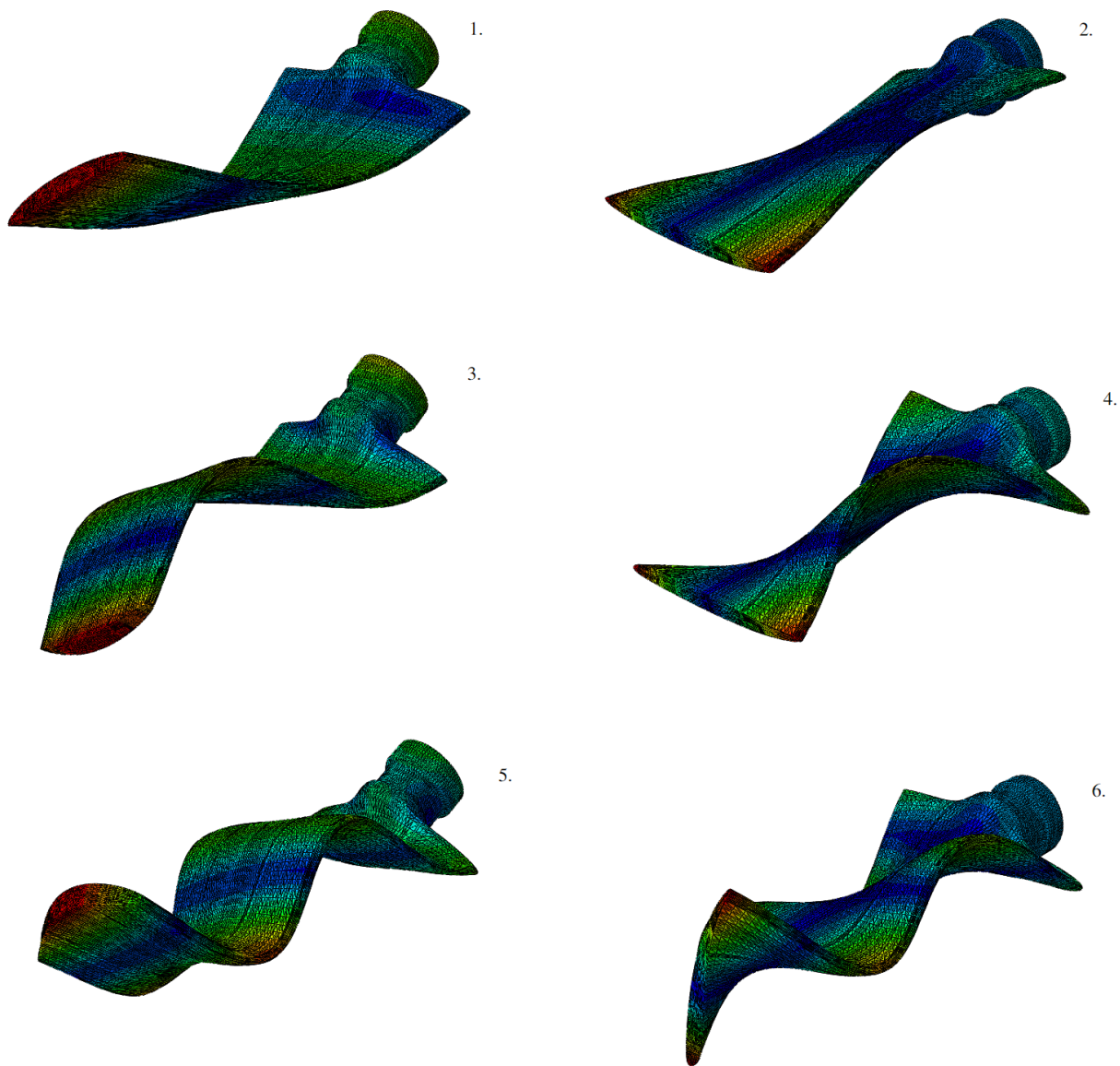


Obrázek 4.12: Element typu S3.

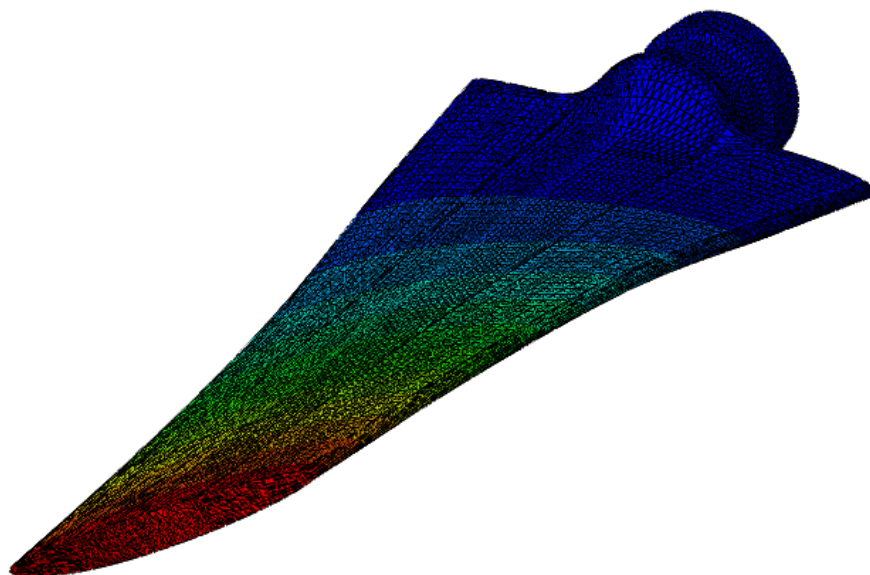


Obrázek 4.13: Výpočetní síť sendvičové lopatky.

Následně po dokončení výpočtu je ohyb lopatky na konci $u = 2,54 \text{ mm}$ (obr. 4.15). Vlastní frekvence vidíme v tabulce (tab. 4.6) a tvary vlastního kmitu na (obr. 4.14).



Obrázek 4.14: Vlastní tvary kmitu sendvičové lopatky.



Obrázek 4.15: Průhyb sendvičové lopatky.

4.2.2 Experiment

Sendvičová lopatka byla experimentálně zatěžována stejným způsobem jako hliníková lopatka. Lopatky byly uchyceny jinak, kvůli odlišné patici lopatek. Sendvičová lopatka byla také uchycena ve tříčelist'ových sklíčidlech, které byly na konci upravené tak, aby co nejlépe kopírovaly tvar patice sendvičové lopatky. Průhyb pod největší silou $F = 200 \text{ N}$ je $u = 2,80 \text{ mm}$ (obr. 4.16). Při zjišťování volných kmitů a jejich tvarů se postupovalo stejně jako při experimentálním řešení hliníkové lopatky (tab. 4.6).



Obrázek 4.16: Experimentálně měřený průhyb sendvičové lopatky.

Tabulka 4.6: Experimentálně a numericky získané volné kmity sendvičové lopatky.

		1.	2.	3.	4.	5.	6.
Experiment	[Hz]	388	523	826	998	1427	1560
Numerické řešení	[Hz]	281	410	624	785	1059	1206

4.2.3 Srovnání experimentu a numerického řešení sendvičové lopatky

Při porovnávání průhybů sendvičové lopatky se průhyb liší o $0,26 \text{ mm}$, numerický model lopatky má menší průhyb a je proto tužší než reálná lopatka. Sendvičová lopatka má oproti kovové lopatce jiný kořen, na který jsou speciálně vyrobené uchycení ke sklíčidlu, proto můžeme vůli jako příčinu většího ohybu zanedbat. Při vlastních kmitech se hodnoty získané z numerického řešení neblíží hodnotám získaným pomocí experimentu.

Při bližším zkoumání, proč sendvičová lopatka neodpovídá numerickému řešení se vzorek lopatky rozřezal a změřili se opětovně jeho materiálové vlastnosti. Bohužel například tloušťka potahů neodpovídala zadání a tedy ani numerickému modelu. Při experimentech tedy byla měřená reálná lopatka, která neodpovídala modelu a návrhu z firmy Woodcomp s.r.o.

Kapitola 5

Závěr

Předkládaná bakalářská práce je věnována tématu náhrady kovové lopatky ventilátoru sendvičovou lopatkou. Práce obsahuje čtyři kapitoly.

V první teoretické části jsou rozebrány dvě hlavní teorie, které popisují výpočty týkající se sendvičových materiálů. Hlavním rozdílem je rozdílné uvažování jádra, kdy laminátová teorie uvažuje jádro jako izotropní vrstvu s jinými materiálovými vlastnostmi než mají potahy sendvičového materiálu. Jádro i potahy přenášejí v laminátové teorii osová i smyková napětí. V sendvičové teorii jádro přenáší zatížení pomocí příčného smykového napětí, touto metodou je tedy účinnější počítat analytické výpočty pro sendvičové materiály.

V kapitole analytické řešení průhybu sendvičového nosníku byl vypočítán průhyb sendvičového nosníku na dvou podporách, který byl uprostřed zatížen silou F . Pro výpočet průhybu byly použity vzahy odvozené v první kapitole. Pro stejné zadání nosníku i s okrajovými podmínkami byl vytvořen model v softwaru Abaqus. Numerickým výpočtem průhybu nosníku se zabývá třetí kapitola, modely byly vytvořeny celkem tři. První model byl celý tvořen skořepinovými prvky, druhý model byl celý z objemových prvků a u třetího byla část modelu, která představovala jádro, jenž bylo namodelováno objemovými prvky a potahy byly modelovány skořepinovými prvky. Porovnání všech řešení je možné vidět v tabulce 3.4. Z tabulky jde vidět, že analytickému řešení tedy nejvíce odpovídá model modelovaný objemovými prvky, zde se výsledky liší o 9,5 %. Nyní bylo ověřeno numerické řešení a můžeme přejít na poslední kapitolu bakalářské práce.

Čtvrtá kapitola se věnovala náhradě kovové lopatky ventilátoru sendvičovou lopatkou. Pro izotropní kovovou lopatku ventilátoru se experimentálně naměřená data shodují s numericky získanými. Průhyb při experimentu je větší, to bylo pravděpodobně způsobeno vůlí ve vetknutí. Volné kmity, vypočtené numericky jsou průměrně o 35, 71 Hz vyšší než experimentálně naměřené kmity. To je způsobeno uvažovaným modulem pružnosti v tahu, který definoval materiál v numerickém řešení, přesné hodnoty nebyly poskytnuty. Při porovnávání hodnot sendvičové lopatky ventilátoru se neblížily hodnoty získané experimentálně hodnotám z numerického řešení. Při bližším zkoumání experimentálně měřené lopatky, zejména po její destrukci, bylo zjištěno, že lopatka neodpovídá zadanému modelu a nesplňuje materiálové vlastnosti, kterým numerický model odpovídá. Měřená lopatka byla vyrobena jako jedna z prvních a nebyla dodržena technologie výroby.

Použitá literatura

[1] Decolon C.: Analysis of Composite Structures, Taylor Francis Books, New York, Inc. 2002, ISBN: 1-56032-982-3.

[2] Berthelot J.M.: Composite Materials: Mechanical Behavior and Structural Analysis, Inc., Springer - Verlag, New York, 1999, ISBN-13: 978-0387984261.

[3] Laš V.: Mechanika kompozitních materiálů, ZČU - FAV, Plzeň, 2008, ISBN: 978-80-7043-689-9.

[4] Manuál k SW ABAQUS

[5] Altenbach H., Altenbach J., Kissing W.: Mechanics of Composite Structural Elements, Taylor Francis Books, Inc., New York, 2004, ISBN: 3-540-40865-7.

[6] Manuál k SW MATLAB

[7] Baker A., Dutton S., Kelly D.: Composite Materials for Aircraft Structures, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., 2004, ISBN: 1-56347-540-5.