Seno, coseno & Co.
Spunti e idee per una didattica della trigonometria

FRANCO OBERSNEL
Dipartimento di Matematica e Geoscienze
Università di Trieste
obersnel@units.it

SUNTO

Alcuni capitoli della matematica godono di una brutta reputazione e sono spesso considerati dagli studenti (e non solo) particolarmente aridi, noiosi, astrusi. Il modulo di 10 ore, inserito nell'offerta didattica disciplinare "Didattica dell'analisi e laboratorio" del Tirocinio Formativo Attivo (TFA), classe A049 (Matematica e Fisica), dell'Università degli Studi di Trieste, proponeva di prendere in considerazione, come esempio tra i tanti, quello relativo alla trigonometria.

PAROLE CHIAVE

LABORATORIO DIDATTICO / EDUCATION WORKSHOP; TRIGONOMETRIA / TRIGONOMETRY; SCUOLA SECONDARIA DI SECONDO GRADO / HIGH SECONDARY SCHOOL; FORMAZIONE DEGLI INSEGNANTI / TEACHER TRAINING.

1. INTRODUZIONE

Quando ho dato la mia disponibilità a tenere un modulo di dieci ore all'interno dell'attività didattica disciplinare "Didattica dell'analisi e laboratorio" per il corso di Tirocinio Formativo Attivo (TFA) della classe di abilitazione A049 (Matematica e Fisica), mi sono subito chiesto come avrei potuto organizzare un corso rivolto a persone adulte, selezionate, certamente con un'ottima preparazione matematica e spesso con esperienza di insegnamento[1]. La scelta è stata quella di evitare

[1] I TFA sono corsi di preparazione all'insegnamento a numero programmato (con prova di accesso), di durata annuale, a conclusione dei quali, previo superamento di un esame finale, si consegue il titolo di abilitazione all'insegnamento nella scuola secondaria di primo e di secondo grado. Alla classe A049 (Matematica e Fisica) possono accedere laureati di II livello (in possesso di laurea magistrale) in Matematica o in Fisica.

accuratamente la presentazione di lezioni frontali e di privilegiare il lavoro di gruppo e un'attività di tipo laboratoriale in cui fosse fondamentale la collaborazione attiva da parte degli studenti. Scopo del presente articolo è quello di raccontare l'esperienza didattica che ne è scaturita e di evidenziare eventuali punti di forza e di debolezza dell'attività svolta. Il modulo si è articolato in cinque lezioni di due ore ciascuna, svolte tra aprile e maggio 2013. Hanno seguito le lezioni ventuno studenti, laureati in matematica o in fisica.

2. L'APPROCCIO AL CORSO-LABORATORIO: SCOPI E OBIETTIVI

All'inizio della prima lezione si è voluto subito chiarire quali fossero le peculiarità del corso. L'intenzione esplicita era quella di illustrare fin da subito la sua modalità di svolgimento laboratoriale; l'intenzione più nascosta, ma non meno importante, era quella di dare un esempio di come si possa proporre ai propri allievi un'attività di questo tipo. Ho cercato, infatti, di seguire nelle mie lezioni esattamente la stessa modalità che poi avrei proposto come possibile metodologia da adottare in classe.

Per questo motivo, il primo passo è stato quello di evidenziare gli obiettivi del corso stesso. La prima domanda che ho posto è stata la seguente:

"*Perché questo corso?*"

I tirocinanti non si aspettavano una simile domanda. È raro che un allievo si chieda perché debba seguire un determinato corso. Questo vale sia per uno studente di scuola, sia per un tirocinante. Spesso ci si accontenta di ritenere che si debbano seguire taluni corsi perché così è previsto per raggiungere un determinato obiettivo, che può essere la promozione al termine dell'anno scolastico o il conseguimento di un diploma. Ritengo invece fondamentale che le motivazioni per cui un corso viene organizzato debbano essere chiare a tutti i livelli e a tutte le età.

Chiaramente lo scopo del corso da me tenuto non poteva essere quello di insegnare la trigonometria (tutti i corsisti conoscevano bene gli argomenti matematici che stavamo per affrontare). Non era nemmeno mia pretesa indicare i dettami su come insegnare nella scuola secondaria, non avendo io stesso una grande esperienza di insegnamento nelle scuole, né le necessarie competenze pedagogico-didattiche.

Le motivazioni del corso consistevano, invece, nello svolgimento delle seguenti attività:

- studiare *insieme* diversi possibili approcci e diverse modalità di presentazione degli argomenti;
- cercare *insieme* di capire cosa è opportuno fare e cosa è opportuno non fare;
- analizzare *insieme* le problematiche che emergono nell'insegnamento della trigonometria;
- cercare *insieme* di trovare possibili strategie finalizzate a risolvere le problematiche di cui sopra.

Sottolineo la presenza in tutti e quattro i punti della parola "insieme"; il mio compito è stato quindi quello di coordinatore di un'attività collettiva, non quello di supervisore.

La seconda domanda alla quale ho voluto dare una risposta è stata la seguente:

"*Perché la trigonometria?*"

La trigonometria è stata scelta perché è un argomento perfetto da trattare con le finalità prima esposte, per diverse ragioni: ha una brutta fama, è spesso considerata arida, difficile, inutile, mnemonica, noiosa.

Ho trovato molti riferimenti alla trigonometria come a qualcosa di pauroso; ad esempio, in un romanzo il protagonista racconta:

> *Accadde che* [...] *al quarto anno di Liceo (Classico), nel corso di Matematica e Geometria, incontrassimo la trigonometria, che già dal nome risulta essere qualcosa al limite della comprensibilità umana. L'incontro, almeno per me, fu tutt'altro che piacevole; e fin dalle prime battute la mia capacità intellettiva si rifiutò di entrare nei meccanismi di comprensione della materia e cominciai a subire delle battute di arresto.*[2]

[2] CIMARELLI 2013, p. 14.

Alla domanda:

"*Che cosa butterebbe nel cestino dei programmi ministeriali?*"

il fisico e divulgatore scientifico Giovanni Filocamo ha risposto senza indugio:

"*Le formule di trigonometria.*"[3]

In vari blog in rete si leggono appelli disperati del tipo:

> *So bene tutte le formule di addizione, duplicazione, Werner e prostaferesi, oltre al comportamento di sen(x), cos(x) e tan(x) negli angoli notevoli e associati. Ma davanti a un esercizio base come questo vado in tilt!*

Eppure la trigonometria è tutt'altro che noiosa, non particolarmente difficile, ricchissima di applicazioni e, se ci guardiamo bene intorno, possiamo trovarla un po' dappertutto. Ha una lunga storia, dal papiro di Rhind (1650 a.C.) a Ipparco di Nicea (II a.C.), considerato il fondatore della trigonometria, per arrivare, con Eulero, ai legami della trigonometria con le funzioni complesse e, con Fourier, alla rappresentazione di funzioni in serie, per mezzo di funzioni seno e coseno[4]. L'argomento "trigonometria" è abbastanza "autocontenuto", tuttavia si collega a tanti altri argomenti e ad altre discipline, e si presta a innumerevoli applicazioni in geometria, fisica, chimica, architettura, topografia, geodesia, navigazione, orientamento, astronomia, gnomonica, balistica, programmazione di videogiochi, ecc. Con gli studenti abbiamo anche giocato a elencare alcune professioni in cui possa essere utilizzata la trigonometria; ne abbiamo individuate più di cinquanta, dall'ingegnere nucleare all'impresario funebre, dalla ballerina all'optometrista.

Infine abbiamo individuato gli obiettivi del laboratorio nei seguenti:

- determinare gli obiettivi nell'insegnamento della trigonometria;
- studiare diverse modalità di presentazione, anche in considerazione delle diverse tipologie di scuola;
- analizzare criticamente gli argomenti trattati e la gestione del tempo;

[3] GAETA 2010, p. 74.

[4] Leonhard Euler (1707-1783), Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830). Sulla storia della trigonometria si veda ZUCCHERI 2004, nonché il contributo di GIUSTI pubblicato sul sito "Il Giardino di Archimede".

- prevedere le reazioni e le difficoltà degli studenti;
- cercare possibili strategie per raggiungere gli obiettivi e superare le difficoltà.

Abbiamo anche elencato gli strumenti a disposizione per raggiungere i nostri obiettivi: guide e indicazioni ministeriali, esperienze di docenti, libri di testo[5], esami di stato, esami di ammissione a corsi universitari, strumenti informatici (GeoGebra e Internet), strumenti di rilevamento di angoli (goniometri, sestanti, grafometri, teodoliti, ecc.).

2. La prima sfida: i primi dieci minuti

Dopo la parte introduttiva sopra descritta, il laboratorio è entrato "nel vivo": le attività di gruppo sono state proposte come "sfide" in cui diverse squadre "gareggiavano" tra di loro; i corsisti sono stati divisi in cinque squadre e a ognuna di queste è stata affidata una "missione" da compiere. Le squadre si sono date ciascuna un nome di fantasia: *Alpha*, *Beta*, *Pi Mezzi Meno Alpha*, *Maglia Rosa*, *Penguins' Tea Orchestra*; per comodità, in quanto segue le indicherò con le lettere A, B, C, D, E.
La prima sfida è stata affrontata durante la lezione. Le sfide successive (cinque in tutto) sono state proposte come lavoro da svolgere al di fuori dell'orario di lezione.
Le cinque attività proposte nella prima sfida sono state le seguenti:

- Prima sfida. Squadra A. Entrate in una classe in cui dovete sostituire l'insegnante titolare del corso di matematica che sarà assente per un lungo periodo. Dovete cominciare la parte del programma che riguarda la trigonometria. I vostri primi dieci minuti di fronte agli studenti.
- Prima sfida. Squadra B. Entrate in una classe di un liceo non scientifico. Sostituite l'insegnante titolare del corso di matematica che sarà assente per un lungo periodo. Dovete cominciare la parte del programma che riguarda la trigonometria, consapevoli che non potete dedicare molte ore all'argomento. I vostri primi dieci minuti di fronte agli studenti.

[5] Cfr. Nisini 1955, Pigato 2001, Bergamini, Trifone, Barozzi 2011.

- Prima sfida. Squadra C. Entrate in una classe di un liceo scientifico. Sostituite l'insegnante titolare che sarà assente per un lungo periodo. Dovete cominciare la parte del programma che riguarda la trigonometria. Dopo esservi presentati e aver fatto conoscenza con la classe, dovete
    - elencare gli obiettivi del corso;
    - sottolineare i legami con gli argomenti svolti in precedenza e le novità dei nuovi argomenti;
    - anticipare le possibili difficoltà che gli studenti potranno incontrare;
    - motivare gli studenti.
- Prima sfida. Squadra D. Entrate in una classe di un istituto professionale per il turismo. In questa scuola la matematica è alquanto trascurata e vista con sospetto, considerata inutile, astratta e difficile. Decidete comunque che non sia possibile escludere completamente la trigonometria dal vostro corso e programmate di sviluppare alcuni rudimenti in 3-4 ore. La priorità è conquistare l'attenzione e l'interesse degli studenti.
- Prima sfida. Squadra E. Entrate in una classe di un istituto tecnico per geometri. Gli studenti stanno frequentando in parallelo il corso di topografia, in cui, tra le altre cose, vengono introdotte le funzioni trigonometriche utilizzando il cerchio goniometrico con orientazione destrorsa (oraria) e angolo individuato a partire dall'asse delle ordinate. Dovete cominciare la parte del programma di matematica che riguarda la trigonometria.

I corsisti avevano a disposizione quindici minuti di tempo per portare a termine la "missione" proposta. Ogni squadra ha poi presentato davanti a tutti il proprio lavoro, e da qui è nata una discussione in cui sono stati affrontati i più svariati argomenti. In particolare, come prevedevo, le squadre A e B hanno subito cominciato la loro lezione senza tener conto degli elementi che invece sono stati richiesti esplicitamente alla squadra C.

Alcuni temi trattati sono stati i seguenti:

- Diverse tipologie di scuola. Con la collaborazione di alcuni insegnanti di diverse scuole superiori della regione ho preparato una tabella indicante le ore effettivamente dedicate alla trigonometria nei differenti istituti. Si va da un minimo di zero ore in alcuni istituti professionali a un massimo di 65 ore in un istituto tecnico per geometri. In particolare, si è osservato che le ore a disposizione sono poche nei licei non scientifici e in altri tipi di scuola. Nei licei scientifici e in alcuni istituti tecnici le ore dedicate all'argomento sono più che sufficienti, in certi casi forse anche troppe. In generale, è possibile sviluppare gli argomenti di base in un numero limitato di ore; serve invece molto tempo per affrontare il discorso relativo a equazioni e problemi.
- A proposito di obiettivi. Si devono tenere presenti diversi tipi di obiettivi: quelli intrinseci e culturali, ma anche quelli più concreti, come l'utilizzo della trigonometria in altre discipline, applicazioni più svariate, il superamento di esami e test di ammissione all'università.
- Esempi di programmazione. È stato proposto un piano di lavoro di una insegnante di liceo scientifico per una classe quarta e un programma di moduli di trigonometria applicata per un istituto per geometri.
- Continuità e novità. Sono stati sottolineati diversi elementi di continuità relativamente a conoscenze già acquisite (geometria sintetica e analitica, il moto armonico e il calcolo vettoriale) e si è evidenziato l'elemento nuovo fondamentale dell'approccio trigonometrico: l'uso dell'angolo come incognita.

A tale proposito è stata proposta alle squadre una seconda "missione", che esse hanno portato a termine come "compito per casa". Di seguito sono riportate le cinque sfide proposte.

- Seconda sfida. Squadra A. Leggete le indicazioni nazionali e presentate una sintesi, proponendo un'interpretazione su ciò che ci si aspetta venga fatto, con riguardo particolare agli argomenti di trigonometria.
- Seconda sfida. Squadra B. Cercate nei compiti di matematica degli esami di stato degli ultimi anni esercizi e quesiti riguardanti la trigonometria. Proponete una "classifica" degli argomenti più importanti da conoscere per poter affrontare serenamente la prova.
- Seconda sfida. Squadra C. Cercate nei test di ingresso delle università (ad esempio, per i corsi di laurea in medicina, ingegneria, architettura) degli ultimi anni esercizi e quesiti riguardanti la trigonometria. Proponete una "classifica" degli argomenti più importanti da conoscere per poter affrontare serenamente la prova.
- Seconda sfida. Squadra D. Si raccolgano gli argomenti principali sulla trigonometria. Si disegni una mappa del percorso per il docente relativa a una o più tipologie di scuola.
- Seconda sfida. Squadra E. Preparate un esercizio (ad esempio, di geometria) che preveda una risoluzione abbastanza complicata utilizzando i metodi presupposti noti dagli studenti (ad esempio, geometria analitica e/o sintetica) e che possa essere risolto velocemente con gli strumenti della trigonometria.

La discussione nata in seguito alle presentazioni dei corsisti non solo ha permesso di individuare gli argomenti principali da affrontare nelle lezioni, ma ha anche suggerito come la scelta di tali argomenti possa essere determinata da motivazioni molto diverse.

3. MOTIVARE E ACCATTIVARE

Nel corso-laboratorio si è sottolineata l'importanza di riuscire a coinvolgere gli studenti, motivandoli e cercando di rendere accattivante l'argomento. Questo è stato, d'altra parte, anche l'approccio che ho seguito nell'organizzazione del corso stesso.

Una delle attività più interessanti in tale ottica è stata la presentazione agli studenti, da parte di alcuni colleghi esperti, del teodolite e del sestante. Toccare con mano un oggetto, muovere le rotelline di uno strumento, guardare nel mirino sono attività che resteranno nel ricordo dei corsisti come dovrebbe accadere per gli studenti delle scuole in cui vengono proposte simili attività. La fisicità nell'apprendimento è fondamentale a tutti i livelli e si può trovare anche nella matematica, considerata spesso una disciplina astratta e "mentale".

Di seguito riporto alcuni spunti che abbiamo raccolto a proposito delle motivazioni che possono coinvolgere gli studenti.

- Tutte le motivazioni già viste in precedenza parlando degli obiettivi, in particolare il possibile utilizzo della trigonometria in svariate situazioni, la presenza di elementi di continuità relativamente a conoscenze già acquisite e di elementi di novità, l'utilità della trigonometria in diverse discipline.
- La possibilità di scovare la trigonometria nell'ambiente intorno a noi.
- L'utilizzo di riferimenti di tipo storico.
- Il riferimento alla fisicità.
- L'utilizzo di strumenti informatici.
- L'organizzazione di lavori di gruppo.
- L'attivazione di coppie di studenti.
- L'uso di metafore e la personalizzazione dei concetti astratti (ad esempio, abbinare un nome buffo a una formula, a una tecnica, ecc.).
- Lo studio dei "codici" degli studenti e la comprensione degli ostacoli.
- La pratica di cambiare toni e colori nelle spiegazioni e di diversificare i piani di comunicazione.
- La pianificazione di obiettivi diversificati per ciascun allievo.
- L'idea di lanciare sfide per il superamento delle difficoltà.

L'uso dei mezzi informatici (in particolare, software di geometria dinamica – ad esempio GeoGebra - e fogli di calcolo) merita un discorso a parte: è stata proposta (come "terza sfida") un'attività di gruppo che prevedeva l'utilizzo di GeoGebra per presentare un argomento relativo alla trigonometria.

Possibili suggerimenti in questo senso sono stati i seguenti:

- risoluzione grafica di un problema usando GeoGebra;
- introduzione delle funzioni circolari;
- approccio grafico per la risoluzione di equazioni e disequazioni goniometriche;
- composizione di funzioni e grafici;
- angoli associati;
- trasformazione di coordinate;
- equazioni parametriche.

4. LE CRITICITÀ

Un'obiezione che potrebbe essere mossa è che spesso è facile utilizzare mille espedienti per introdurre alcune nozioni, per giocare con alcuni concetti e per rendere accattivanti certe attività. Vi sono, tuttavia, argomenti che, per loro natura, risultano particolarmente ostici, noiosi, difficili. Queste situazioni sono state considerate con grande attenzione.

Ho intervistato una quindicina di insegnanti di diverse scuole (licei scientifici, classici, delle scienze umane, artistici, istituti tecnici e professionali di diverse tipologie) della regione e ho chiesto quali siano, secondo la loro esperienza, i problemi più critici che si presentano nell'insegnamento della trigonometria. È stato interessante confrontare insieme ai corsisti le diverse risposte. In generale, le maggiori criticità si possono elencare tra le seguenti:

- le formule trigonometriche;
- le equazioni e le disequazioni goniometriche;
- la confusione tra archi, angoli e valore delle funzioni;

- la difficoltà a impostare e risolvere i problemi che richiedono una strategia (specie in geometria);
- l'apparente facilità iniziale.

Le prime quattro osservazioni sono abbastanza prevedibili. Siamo invece rimasti tutti sorpresi dalla risposta sull'apparente facilità iniziale degli argomenti. Ecco il commento di un insegnante di liceo scientifico:

> "*Un problema può essere la facilità iniziale dell'argomento fino alle formule goniometriche. In terza i ragazzi si sono cimentati con esercizi di geometria analitica, spesso lunghi e complessi, che richiedono un attento studio preliminare (disegno fatto bene, analisi delle strategie risolutive, non scegliere la prima strada che viene in mente); non par loro vero di avere una definizione o una formula, applicarla e ottenere il risultato corretto. Spesso sottovalutano l'importanza dello studio proprio di questi argomenti che poi si riveleranno utili.*"

Di seguito sono riportate le cinque sfide proposte sugli altrettanti punti di criticità che abbiamo individuato.

- Quarta sfida. Squadra A. Dovete introdurre alcune formule trigonometriche, ad esempio le formule di bisezione, cercando di mantenere vivo l'interesse della classe. Per la presentazione avete a disposizione dieci minuti.
- Quarta sfida. Squadra B. Dovete affrontare una lezione (non necessariamente quella introduttiva) su: equazioni e/o disequazioni goniometriche. Avete a disposizione dieci minuti per presentare un argomento, mettendo bene in evidenza le difficoltà che possono emergere.
- Quarta sfida. Squadra C. Dovete affrontare una lezione su: funzioni inverse delle funzioni circolari. Avete a disposizione dieci minuti per presentare l'argomento, mettendo bene in evidenza le difficoltà che possono emergere.
- Quarta sfida. Squadra D. Dovete affrontare una lezione (non necessariamente quella introduttiva) su: applicazioni della trigonometria ai problemi di geometria. Avete a disposizione dieci minuti per presentare un argomento, tenendo ben presenti le difficoltà che possono emergere.

- Quarta sfida. Squadra E. Prendete in considerazione un teorema sulle funzioni circolari (ad esempio, la formula di addizione del coseno) o di trigonometria di cui volete fornire la dimostrazione. Avete a disposizione dieci minuti per presentare l'argomento, cercando di convincere gli studenti della necessità della dimostrazione e di mantenere vivo il loro interesse.

4.1 LE FORMULE

Il problema riguardante le formule (*Devono essere studiate a memoria? Quali e quante formule sono necessarie? Devono essere dimostrate?*) è stato a lungo dibattuto grazie anche all'uso di tre forum, attivati durante il corso sulla piattaforma moodle: *Formule sì o formule no? Come introdurre seno e coseno? Istituto per geometri: topografia e matematica.* A proposito del problema "formule" abbiamo individuato i seguenti punti di riflessione:

- È bene, quando possibile, inserire le formule in un contesto storico e rispondere alla domanda: *perché sono state inventate?*
- Saper rispondere alla domanda: *a cosa servono?* In particolare, vedere subito le possibili applicazioni.
- Capire il senso della formula.
- Quando è necessario imparare a memoria una formula, trovare trucchetti mnemonici (anche giocando un po').

Ho scelto, come esempio particolare da mostrare in classe, il seguente approccio allo studio delle formule di prostaferesi e di Werner, cercando di evidenziare tutti gli elementi indicati in precedenza.

Nel XVI secolo, anche per esigenze della navigazione, vi era una grande necessità di calcoli astronomici. Mentre eseguire le moltiplicazioni richiedeva un gran dispendio di tempo, eseguire le addizioni era molto meno gravoso. Ci si chiese pertanto se in qualche modo fosse possibile rappresentare una moltiplicazione utilizzando addizioni. Ricordiamo le figure storiche dell'astronomo danese Tycho Brahe (1546-1601) e del cartografo, astronomo e meteorologo tedesco Johannes

Werner (1468-1522) con particolare riferimento alla ricerca della longitudine utilizzando le distanze lunari[6].

Le formule di Werner possono essere interpretate come un modo per passare dai prodotti alle somme. Per il prodotto dei coseni, ad esempio, si inizia considerando le uguaglianze:

$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \operatorname{sen}(\beta)$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \operatorname{sen}(\beta)$

Sommando le due equazioni si ottiene

$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)$

e quindi

$$\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\right)$$

L'utilizzo di tabelle precise per il calcolo delle funzioni goniometriche rendeva molto veloce il calcolo.

Ad esempio, proponiamoci di calcolare $105 \cdot 720$ (= 75600).

Si ha che

$105 \cdot 720 = 0{,}105 \cdot 0{,}720 \cdot 10^6$

$0{,}105 \cdot 0{,}720 \approx \cos(84) \cdot \cos(44)$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos(84 + 44) + \cos(84 - 44)\right) \approx 0{,}5 \cdot (-0{,}616 + 0{,}766) = 0{,}075$$

Quindi: $105 \cdot 720 \approx 75000$.

A proposito della possibilità di rappresentare una moltiplicazione utilizzando addizioni, non si può non parlare dei logaritmi.

Il calcolo precedente, con questo metodo, diventa

$\log(105 \cdot 720) = \log(105) + \log(720) \approx 2{,}021 + 2{,}857 = 4{,}878$

Quindi: $105 \cdot 720 \approx 10^{4{,}878} \approx 75509$.

[6] Sulla ricerca della longitudine si veda ANDREWES 1993.

È interessante osservare come lo stesso matematico inglese John Napier (1550-1617) abbia utilizzato a lungo il metodo trigonometrico prima di introdurre i logaritmi. Merita ricordare le sue parole:

> "*Eseguire calcoli è operazione difficile e lenta e spesso la noia che ne deriva è la causa principale della disaffezione che la maggioranza della gente prova nei confronti della matematica...*" (*Rabdologiae*, 1617)

Un'altra figura storica fondamentale del periodo è il matematico inglese Henry Briggs (1561-1630), legato all'invenzione dei logaritmi decimali (ma anche navigatore alla ricerca del passaggio a nord-ovest).
La divulgazione delle tavole logaritmico-goniometriche ha reso possibile passare da addizioni a moltiplicazioni, con un processo inverso rispetto a quello delle formule di Werner.
Osservando che

$$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\alpha \quad \text{e} \qquad \frac{1}{2}(\alpha+\beta)-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\beta$$

dalle formule di Werner si ottengono immediatamente le formule di prostaferesi

$$\text{sen}(\alpha)+\text{sen}(\beta)=2\,\text{sen}\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right)$$

$$\text{sen}(\alpha)-\text{sen}(\beta)=2\cos\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right)\cdot\text{sen}\left(\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right)$$

$$\cos(\alpha)+\cos(\beta)=2\cos\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right)$$

$$\cos(\alpha)-\cos(\beta)=-2\,\text{sen}\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right)\cdot\text{sen}\left(\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right)$$

La domanda che ci poniamo a questo punto è la seguente:

"È necessario imparare le formule a memoria oppure no?"

Nel caso si decidesse di impararle a memoria si possono escogitare diversi trucchetti mnemonici, anche divertenti. Oltre al notissimo espediente di "*Cento rose*

molto (meno) belle", per ricordare la successione di seno e coseno nella tabella delle formule, si può giocare con altre frasi più o meno facili da tenere a mente.
Ad esempio, per ricordare la formula

$$\text{sen}(\alpha) + \text{sen}(\beta) = 2\,\text{sen}\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right)$$

ci siamo inventati la frase "*Sei più sei = due secondi*" (*seno più seno = due seno coseno*), o, per ricordare la formula

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\,\text{sen}\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right)\cdot\text{sen}\left(\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right)$$

ci si può inventare una "follia" del tipo "*cosmetico medusense*" (*coseno meno coseno (=) meno due seno seno*).
Tutto ciò è molto bello, ma nulla risveglia l'attenzione dello studente più di un'applicazione pratica di quello che si sta facendo. Un semplice esempio di applicazione concreta delle formule è il loro utilizzo nelle equazioni goniometriche.
Ricordiamo che, per risolvere nel campo reale un'equazione del tipo $f(x)\cdot g(x) = 0$, è sufficiente risolvere separatamente $f(x) = 0$ e $g(x) = 0$.
Perciò esprimere una somma mediante un prodotto è, in genere, utile nella risoluzione di un'equazione.
Ad esempio, per risolvere l'equazione

$$\text{sen}(7x) + \text{sen}(5x) + \text{sen}(12x) = 0$$

possiamo osservare che

$$5 + 7 = 12,\ \frac{1}{2}(7+5) = 6,\ \frac{1}{2}(7-5) = 1$$

Usando la formula di prostaferesi

$$\text{sen}(7x) + \text{sen}(5x) = 2\,\text{sen}(6x)\cdot\cos(x)$$

e la formula di duplicazione

$$\text{sen}(2\cdot 6x) = 2\,\text{sen}(6x)\cdot\cos(6x)$$

si ottiene

$0 = \text{sen}\,(7x) + \text{sen}\,(5x) + \text{sen}\,(12x) = 2\,\text{sen}\,(6x) \cdot \cos\,(x) + 2\,\text{sen}\,(6x) \cdot \cos\,(6x)$

da cui

$2\,\text{sen}\,(6x) \cdot (\cos\,(x) + \cos\,(6x)) = 0$

Usando di nuovo la formula di prostaferesi, questa volta per la somma dei coseni, si ha

$2\,\text{sen}\,(6x) \cdot (2\cos\,(\frac{7}{2}x) \cdot \cos\,(\frac{5}{2}x)) = 0$

e si può così concludere studiando separatamente le equazioni

$\text{sen}\,(6x) = 0,\ \cos\,(\frac{7}{2}x) = 0,\ \cos\,(\frac{5}{2}x) = 0$

Sebbene possa essere considerata una motivazione poco "nobile", molti studenti troveranno certamente interessante osservare come la conoscenza delle formule possa essere utile anche per superare i test di ammissione all'università. Ad esempio, si riporta il seguente quesito tratto dal test di ammissione alla Facoltà di Medicina nel 2004:

L'espressione goniometrica $\text{sen}\,(9a) - \text{sen}\,(3a)$ *equivale a:*

A) $2\cos\,(6a) \cdot \text{sen}\,(3a)$

B) $6\,\text{sen}\,(a)$

C) $3\,(\text{sen}\,(3a) - \text{sen}\,(a))$

D) $\frac{1}{2}\,(\cos\,(6a) - \cos\,(12a))$

E) $\text{sen}\,(9a) \cdot \cos\,(3a) - \text{sen}\,(3a) \cdot \cos\,(9a)$

4.2 Equazioni, disequazioni e problemi

Per quanto riguarda l'argomento "equazioni e disequazioni" abbiamo raccolto le riflessioni didattiche che si riportano di seguito:

- utilizzare molto il cerchio goniometrico e privilegiare la risoluzione grafica;
- fare largo uso di software di geometria dinamica;

- far capire che le equazioni e disequazioni sono uno strumento atto a raggiungere uno scopo, e non sono fini a se stesse;
- evitare di presentare un “bestiario” di possibili tecniche e privilegiare la discussione rispetto al tecnicismo.

A proposito dell’ultimo punto indicato, può far riflettere un esercizio assegnato in una prova scritta di meccanica razionale, nel secondo anno di un corso di laurea in Ingegneria. Nel corso della risoluzione, si otteneva l’equazione:

(1) $k \cos \varphi - \text{sen}\, \varphi = 0$

dove k era un parametro positivo e φ l’incognita.

Gran parte degli studenti ha applicato un metodo di risoluzione (probabilmente appreso a scuola) che consisteva nel trasformare l’equazione (1) nella seguente:

(2) $\cos \varphi \cdot (k - \tan \varphi) = 0$

La conclusione degli studenti è stata pertanto

$\cos \varphi = 0$ oppure $\tan \varphi = k$

Tale risultato non è ovviamente corretto, in quanto la soluzione $\cos \varphi = 0$ non è accettabile, poiché l’equazione (2) è stata ottenuta dividendo per cos φ. L’esempio mostra come sia fondamentale la discussione sull’equazione, e lo sia molto più dell’apprendimento di una tecnica automatica.

Per quanto riguarda la discussione sui problemi, abbiamo ritenuto importante considerare i seguenti aspetti:

- la gradualità;
- la distinzione delle tipologie di difficoltà: di comprensione del testo, algebriche, di rappresentazione e quelle dovute a lacune su argomenti pregressi;
- l’accento posto sulle limitazioni dell’incognita e sul fatto che non tutte le soluzioni sono accettabili;

- la ripresa di argomenti di geometria;
- la differenziazione eventuale dei problemi in base alle capacità degli studenti;
- l'utilizzo di fogli di calcolo e di grafici;
- la trattazione degli argomenti insieme alla presentazione di problemi, fin dall'inizio;
- la definizione di una strategia di soluzione, come pratica a cui abituare gli studenti fin dall'inizio.

Gli ultimi due punti vanno sottolineati tenendo anche in considerazione le osservazioni sull'apparente facilità iniziale degli argomenti. Per questo motivo sembra importante introdurre fin dall'inizio i problemi ed evitare, per quanto possibile, di impostare i problemi come mera applicazione meccanica di formule.

5. Lo "show" finale

All'ultima lezione del corso hanno partecipato, come ospiti, trentadue studenti provenienti da cinque diverse scuole superiori di Trieste (due licei scientifici, due licei delle scienze umane, un liceo artistico). Nessuno di loro aveva alcuna conoscenza di trigonometria (la maggior parte frequentava la classe seconda). Come quinta sfida le cinque squadre dei corsisti hanno dovuto preparare una piccola lezione di quindici minuti, in cui presentare ai ragazzi del pubblico alcuni argomenti di trigonometria.
Queste sono state le consegne alle squadre:

Quinta sfida

Dovete presentare in quindici minuti il seguente argomento ad allievi che non hanno ancora studiato la trigonometria. Verrà valutata la chiarezza dell'esposizione e quanto sarete riusciti a interessare i ragazzi.

- Squadra A. Angoli e loro misura. (Possibili suggerimenti: diverse unità di misura, orologio, arco radiante, conversioni angolari, calcolatrice, azimut, avvolgimento della retta sul cerchio.)
- Squadra B. Introduzione delle funzioni seno e coseno.

- Squadra C. Introduzione della funzione tangente. (Possibili suggerimenti: dominio, limitatezza, coefficiente angolare, definizione di "tangenza", fasci di rette.)
- Squadra D. Risolvere un triangolo.
- Squadra E. Funzioni periodiche. (Possibili suggerimenti: oscillazioni, frequenze, modelli periodici, serie di Fourier, armoniche.)

Ciascun ragazzo disponeva di un cartello con cui poteva dare una votazione da 5 a 10. Al termine di ogni presentazione si svolgeva la votazione. Alla fine delle presentazioni si è stilata la classifica. La prima squadra ha ottenuto l'eccezionale valutazione di 318 su un massimo di 320, e, in generale, tutte le squadre si sono comportate benissimo (ottenendo un punteggio di 285, 276, 253, 229). Da notare che su 160 voti assegnati c'è stato un unico 5.

L'iniziativa ha avuto un grande successo, oltre ogni mia aspettativa. Gli studenti erano divertiti, entusiasti e hanno mostrato un vivace interesse per le presentazioni. La possibilità di dare, una volta tanto, una valutazione ai "professori", in uno scambio di ruolo, è stata un'attrattiva per i ragazzi. Desidero sottolineare la maturità che essi hanno dimostrato nei loro giudizi.

I corsisti si sono impegnati molto nella preparazione della lezione e mi sono sembrati molto soddisfatti della loro prestazione. Purtroppo è mancata l'occasione di un incontro successivo in cui commentare i risultati ottenuti. Senz'altro avremmo potuto discutere su quando sia opportuno accentuare il lato "spettacolare" della lezione e quando invece sia necessario mantenere un tono di maggiore sobrietà. Durante l'esame finale di abilitazione ho sentito un mio collega commissario commentare a proposito della presentazione di un candidato: "*Bello, ma un po' troppo in stile 'Art Attack'…*". Anche alcuni corsisti, come vedremo fra poco, hanno ritenuto eccessivo l'aspetto giocoso dell'ultima lezione.

Al termine delle attività del TFA gli studenti hanno compilato un questionario di valutazione degli insegnamenti. Il modulo sulla trigonometria è stato valutato insieme agli altri due moduli del corso denominato “Didattica dell’analisi e laboratorio”, e sono disponibili solo i risultati aggregati. Posso comunque riportare i commenti che erano esplicitamente riferiti al mio modulo:

- È stato molto utile farci lavorare a gruppi affrontando le varie problematiche inerenti la trigonometria.

- Molto interessante e coinvolgente la modalità proposta. C’era però il rischio che alcuni contributi personali venissero messi da parte per mancanza di tempo. A mio parere troppo marcato l’aspetto ludico dell’ultima lezione.

- Credo che tutti i corsi dovrebbero essere strutturati come quello di trigonometria: lavori di gruppo e riflessioni sulla didattica, non lezioni frontali disciplinari.

- Mi sono molto piaciute le non-lezioni sulla trigonometria; giusta ed efficace l’idea di farci lavorare a gruppi. Lo show dell’ultimo incontro forse andava progettato meglio.

- (...) tramite i vari lavori di gruppo (in particolare quello finale) sono stati dati moltissimi spunti didattici e le riflessioni metodologiche sono state profonde e decisamente interessanti. È stato un corso, per sintetizzare con un aggettivo, entusiasmante.

- Lavorare a gruppi è molto utile per confrontarsi ed è il modo migliore di lavorare in questo TFA. Bisognerebbe fare tutti gli esami in questo modo, cioè lavorare durante il corso e non alla fine.

Dopo il conseguimento dell’abilitazione, i corsisti hanno scritto una lettera in cui esprimevano alcune opinioni, anche critiche, sull’esperienza vissuta. Nella lettera si è fatta esplicita menzione al corso sulla trigonometria, di cui è stato evidentemente apprezzato l’approccio.
In particolare, gli studenti hanno scritto in merito alle loro proposte:

“*Privilegiare i lavori di gruppo rispetto ad attività di tipo frontale, lasciando ampio spazio alla discussione e al confronto tra i tirocinanti, che permetterebbero l’eventuale condivisione di esperienze pregresse. Questo potrebbe essere svolto in modo programmato, continuo e sistematico nel tirocinio indiretto, avendo cura di costruire in precedenza un percorso ben definito con contenuti ed obiettivi esplicitati a priori, ma è realizzabile anche nelle didattiche disciplinari, come si è visto durante un corso in particolare del TFA appena terminato, quello sulla trigonometria. Riteniamo questo primo punto un aspetto imprescindibile ed altamente qualificante per un corso di formazione degli insegnanti: il confronto e la discussione tra pari sono tasselli fondamentali per il miglioramento*”.

In conclusione, ritengo che l’esperimento possa dirsi riuscito. In particolare, la scelta di privilegiare la discussione e il lavoro di gruppo è stata molto apprezzata. Ho ottenuto il risultato principale che mi ero prefissato, ossia quello di aprire una discussione sulle innumerevoli e diverse modalità di presentazione di un tema e di mostrare come sia possibile insegnare un argomento anche ostico o noioso in una forma che risulti di interesse per studenti di diversa formazione. Penso che l'esperienza delle non-lezioni sia stata molto formativa per i corsisti; senz'altro lo è stata per me.

BIBLIOGRAFIA

ANDREWES W. J. H. (A CURA DI)
1993, *The Quest for Longitude: The Proceedings of the Longitude Symposium Harvard University Cambridge, Massachusetts November 4-6, 1993*, Cambridge, MA, Harvard University Collection of Historical Scientific Instruments.

BERGAMINI M., TRIFONE A., BAROZZI G.
2011, *Matematica.blu 2.0*, Bologna, Zanichelli.

CIMARELLI C.
2013, *Accadde che ……*, Ilmiolibro It-Feltrinelli.

GAETA A.
2010, *Eliminare la trigonometria*, «Class», 4, pp. 74-77.

NISINI P.
1955, *Trigonometria per i licei scientifici*, Bergamo, Minerva Italica.

PIGATO C.
2001, *Azimut. Modulo Trigonometria Applicata*, Bologna, Poseidonia.

ZUCCHERI L.
2004, *Breve storia della trigonometria,* in SCARPA F. (a cura di), «Un arcobaleno di domande, 99 risposte per conoscere la scienza», Bari, Dedalo, pp. 195-200.

SITI WEB CONSULTATI

GIUSTI E.
Breve storia della trigonometria, Il Giardino di Archimede, <http://web.math.unifi.it/archimede/trigonometria/trigonometria/prima.html>, sito consultato nel 2013.