IDEAL BIPOLAR ANTI FUZZY PADA *K*-ALJABAR

TESIS

Oleh

RIA ANGGRAENI
166090400011006

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
BIDANG MINAT ANALISIS DAN ALJABAR

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
M A L A N G
2019

IDEAL BIPOLAR ANTI FUZZY PADA *K*-ALJABAR

TESIS

Untuk Memenuhi Persyaratan
Memperoleh Gelar Magister dalam Bidang Matematika

Oleh

RIA ANGGRAENI
166090400011006

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
BIDANG MINAT ANALISIS DAN ALJABAR

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
M A L A N G
2019

TESIS

IDEAL BIPOLAR ANTI FUZZY PADA *K*-ALJABAR

Oleh:

RIA ANGGRAENI
166090400011006

Telah dipertahankan di depan Komisi Penguji
pada tanggal 23 Mei 2019
dan dinyatakan **LULUS**

Menyetujui:
Komisi Pembimbing

Ketua	**Anggota**
Prof. Dr. Agus Widodo, M.Kes.	**Dr. Noor Hidayat, M.Si.**
NIP. 195305231983031002	**NIP. 196112041988021001**

Mengetahui,
Ketua Program Studi Magister Matematika

Dr. Noor Hidayat, M.Si.
NIP. 196112041988021001

IDENTITAS TIM PENGUJI

Judul Tesis : **IDEAL BIPOLAR ANTI FUZZY PADA *K*-ALJABAR**

Nama : RIA ANGGRAENI

NIM : 166090400011006

Program Studi : Magister Matematika

Bidang Minat : ANALISIS DAN ALJABAR

KOMISI PEMBIMBING

Ketua : Prof. Dr. Agus Widodo, M.Kes.

Anggota : Dr. Noor Hidayat, M.Si.

TIM DOSEN PENGUJI

Dosen Penguji 1 : Drs. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc., Ph.D.

Dosen Penguji 2 : Corina Karim, S.Si., M.Si., Ph.D.

Tanggal Ujian : 23 Mei 2019

SK. Penguji :

PERNYATAAN ORISINALITAS

Saya menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa sepanjang pengetahuan saya, didalam naskah tesis ini tidak terdapat karya ilmiah yang pernah diajukan oleh orang lain untuk memperoleh gelar akademik di suatu perguruan tinggi dan tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka.

Apabila ternyata di dalam naskah tesis ini dapat dibuktikan terdapat unsur-unsur jiplakan, saya bersedia diproses sesuai dengan peraturan perundang-undangan yang berlaku dan tesis dibatalkan.

Malang, 23 Mei 2019

MATERAI 6000

Ria Anggraeni
166090400011006

RIWAYAT HIDUP

Penulis, Ria Anggraeni lahir di Kota Batu, Jawa Timur, pada tanggal 22 Agustus 1994. Penulis merupakan anak pertama dari bapak Sunarno dan ibu Tumi Rahayu. Penulis menyelesaikan pendidikan Taman Kanak-kanak (TK) di TK Aisyiyah Bustanul Athfal 01 Kota Batu Jawa Timur pada tahun 2000 dan menyelesaikan pendidikan sekolah dasar di Sekolah Dasar Muhammadiyah 04 di Kota Batu Jawa Timur pada tahun 2006. Tahun 2009 penulis lulus dari Sekolah Menengah Pertama Negeri (SMPN) 01 Batu Jawa Timur. Tahun 2012 lulus dari Sekolah Menegah Atas Negeri (SMAN) 01, Batu Jawa Timur. Penulis menyelesaikan pendidikan tingkat sarjana (S1) di Jurusan Matematika, Fakultas Matamatika dan Ilmu Pengetahuan Alam (MIPA) Universitas Brawijaya pada tahun 2016. Pada tahun 2017 penulis melanjutkan pendidikan tingkat Magister (S2) pada Program Studi Magister Matematika Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Brawijaya.

RINGKASAN

RIA ANGGRAENI, Program Studi Magister Matematika FMIPA Universitas Brawijaya, 4 April 2019. Ideal Bipolar Anti Fuzzy pada *K*-aljabar. Ketua Komisi Pembimbing: Agus Widodo, Aggota Komisi Pembimbing: Noor Hidayat.

Dalam tesis ini dibahas tentang penerapan bipolar anti fuzzy pada *K*-aljabar. Suatu pemetaan yang memiliki nilai interval bilangan real [0,1] pada kodomainnya disebut himpunan *fuzzy.* Teori *fuzzy* merupakan suatu teori yang banyak diterapkan dalam struktur aljabar. Teori *bipolar fuzzy* merupakan pengembangan dari teori fuzzy, yang kodomainnya terletak pada interval bilangan real [-1,1]. Himpunan bipolar fuzzy merupakan pasangan dari dua himpunan fuzzy yaitu nilai keanggotaan dan non-keanggotaan, yang secara berurutan direpresentasikan dengan nilai positif dan negatif. Seperti halnya teori *fuzzy,* teori *bipolar fuzzy* juga dapat diterapkan dalam beberapa struktur aljabar, salah satunya *k*-aljabar.Suatu struktur aljabar yang dibangun dari grup *G* dan memenuhi beberapa aksioma disebut dengan *K*-aljabar. Seperti halnya bipolar fuzzy, teori bipolar anti fuzzy juga dapat diterapkan pada *K*-aljabar. Pada tesis ini dibahas tentang sifat-sifat ideal *bipolar anti fuzzy* pada *K*-aljabar, karakterisasi ideal bipolar anti fuzzy pada *K*-aljabar, anti image dan anti preimage ideal bipolar anti fuzzy pada *K*-aljabar, dan translasi bipolar fuzzy, perluasan bipolar fuzzy, pergandaan *bipolar fuzzy* pada ideal *bipolar anti fuzzy* pada *K*-aljabar.

SUMMARY

RIA ANGGRAENI, Mathematics Magister Study Program, Faculty of Sciences, University of Brawijaya, Bipolar Anti Fuzzy Ideal of *K*-algebras, *Supervisor*: Agus Widodo, *Co-Supervisor*: Noor Hidayat.

This thesis discuss about application of bipolar anti fuzzy theory in K-algebras. A mapping whose real interval [0,1] in the codomain is called bipolar fuzzy set. Fuzzy theory is applied in some algberaic structure. Bipolar fuzzy theory is developed from fuzzy theory, but the codomain is a closed interval between -1 and 1. Bipolar fuzzy set is a pair of two fuzzy set, called membership function and non-membership function, respectively represented by positive value and negative value. As well as fuzzy theory, bipolar fuzzy theory also applied in several algebraic structure, one of which is K-algebra. An algebraic structure which is built by group G and fulfilling several axioms is called K-algebra. As well as bipolar fuzzy theory, bipolar anti fuzzy theory also applied in K-algebra. This thesis introduced the notion of bipolar anti fuzzy ideal of K-algebra and it's properties, characterization bipolar anti fuzzy ideal of K-algebra by means anti positive β*-cut and anti negative* α*-cut, anti image and anti preimage bipolar anti fuzzy ideal of K-algebra, and bipolar fuzzy translation, bipolar fuzzy extention, bipolar fuzzy multiplication of bipolar anti fuzzy ideal in K-algebra.*

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan atas kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan proposal tesis ini yang berjudul "**Ideal *Bipolar Anti Fuzzy* pada *K*-aljabar**" sebagai salah satu syarat untuk melakukan penelitian tesis dalam bidang Matematika.

Keberhasilan dalam menyelesaikan proposal tesis ini tidak lepas dari kerjasama dan dukungan berbagai pihak. Oleh sebab itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Agus Widodo, M.Kes. selaku Ketua Komisi Pembimbing dan Dr. Noor Hidayat, M.Si. selaku Anggota Komisi Pembimbing yang telah meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan, saran, dan motivasi kepada penulis selama pengerjaan dan penyusunan tesis ini.
2. Drs. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc., Ph.D selaku dosen penguji I dan Corina Karim, S.Si., M.Si., Ph.D selaku dosen penguji II yang telah memberikan kritik dan saran selama pengerjaan dan penyusunan tesis ini.
3. Ratno Bagus Edy Wibowo, S,Si., M.Si., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika dan Dr. Noor Hidayat, M.Si., selaku Ketua program Studi Magister Matematika FMIPA Universitas Brawijaya
4. Bapak dan Ibu Dosen Jurusan Matematika FMIPA Universitas Brawijaya yang telah memberikan ilmu kepada penulis, serta seluruh staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
5. Ibunda (Tumi Rahayu) dan Ayahanda (Sunarno) tercinta serta keluarga besar penulis yang tiada henti mendoakan dan memberikan dukungan kepada penulis.

6. Sahabat-sahabat yang selalu menjadi penyemangat penulis.
7. Keluarga besar S2 Matematika 2016 atas kerjasama, dukungan, kebersamaan, dan semangat selama ini.
8. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu.

Malang, 23 Mei 2019

Ria Anggraeni
NIM. 166090400011006

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

Simbol	Keterangan
$\in$	elemen (anggota) dari
$\notin$	bukan elemen (anggota) dari
$\subseteq$	himpunan bagian dari (subset dari)
$\cap$	irisan
$\cup$	gabungan
$\times$	hasil kali Cartesian
$*$	operasi biner $*$
$+$	penjumlahan
$\bullet$	pergandaan
$\odot$	*dot*
$\Rightarrow$	pembuktian implikasi ke arah kanan
$\Leftarrow$	pembuktian implikasi ke arah kiri
$(G,*)$	G terhadap operasi $*$
$(G,*,\odot,e)$	G terhadap operasi $*$, *dot* dan terdapat elemen identitas e
$f: A \to B$	pemetaan dari A ke B
$\mu : X \longrightarrow [0,1]$	pemetaan dari X ke $[0,1]$
λ_A^+	nilai keanggotaan pada himpunan A
λ_A^-	nilai non-keanggotaan pada himpunan A
$U(\mu; t)$	himpunan level t
$B = (\lambda^+, \lambda^-)$	himpunan bipolar fuzzy
${x_t}'$	$({x_t}^+, {x_t}^-)$
${x_t}' \mathrel{\overline{\in}} B$	${x_t}'$ tidak berada pada himpunan bipolar fuzzy B
C_M	fungsi karakteristik bipolar value pada hemiring
C_{M^c}	fungsi karakteristik anti bipolar value pada hemiring
C_{I^c}	fungsi karakteristik anti bipolar value pada K-aljabar
$\tilde{B}_\beta^+$	anti positif β-cut
$\tilde{B}_\alpha^-$	anti negatif α-cut
$\emptyset$	himpunan kosong
$\bigwedge_{y\in\psi^{-1}(x)} \mu^+(y)$	minimum $\mu^+(y)$ untuk setiap $\in \psi^{-1}(x)$
$\bigvee_{y\in\psi^{-1}(x)} \mu^-(y)$	maximum $\mu^-(y)$ untuk setiap $\in \psi^{-1}(x)$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori himpunan *fuzzy* dibahas pertama kali oleh Zadeh pada tahun 1965. Himpunan *fuzzy* banyak digunakan dalam mengatasi masalah-masalah pada matematika terapan, teknik kontrol, ilmu informasi, dan lain sebagainya. Sebelum teori himpunan *fuzzy* muncul, dikenal sebuah teori himpunan klasik yang disebut dengan himpunan *crisp* (tegas) yang memiliki nilai keanggotaan secara jelas yaitu bernilai 1 yang berarti anggota himpunan tersebut dan 0 jika bukan anggota. Berbeda dengan himpunan *crisp* yang memiliki nilai keanggotaan yang jelas, himpunan *fuzzy* memiliki nilai keanggotaan yang kabur, yakni terletak antara interval bilangan riil 0 sampai 1. Teori *fuzzy* banyak diaplikasikan pada beberapa struktur aljabar, diantaranya Rosenfeld pada artikelnya tahun 1971 yang berjudul *Fuzzy Groups*, kemudian Dixit dkk., pada tahun 1992 dengan artikel yang berjudul *On Fuzzy Rings*.

Pada tahun 1994, Zhang memperkenalkan konsep himpunan *bipolar fuzzy*. Himpunan *bipolar fuzzy* adalah perluasan dari himpunan *fuzzy* yang memiliki rentang nilai keanggotaan yang diperbesar dari interval $[0,1]$ ke interval $[-1,1]$. Pada himpunan *bipolar fuzzy*, nilai keanggotaan 0 berarti elemen tidak relevan dengan sifat yang sesuai. Nilai keanggotaan yang berada pada interval $(0,1]$ berarti elemen memenuhi sifat yang sesuai. Sedangkan nilai keanggotaan yang berada pada interval $[-1,0)$ berarti elemen memenuhi sifat yang berlawanan. Himpunan *bipolar fuzzy* adalah pasangan himpunan *fuzzy*, yang disebut fungsi keanggotaan dan fungsi non-keanggotaan yang direpresentasikan dengan nilai positif dan negatif.

Teori himpunan *bipolar fuzzy* sudah banyak diterapkan dikehidupan nyata, misalkan asumsi rasa manis pada bahan makanan bernilai keanggotaan positif, maka rasa pahit pada bahan makanan bernilai keanggotan negatif. Sisa dari rasa pada bahan makanan seperti asam, pedas, dan lain sebagainya adalah diluar rasa bahan makanan manis dan pahit. Jadi bahan makanan tersebut diterima sebagai nilai keanggotaan 0. Teori himpunan *bipolar fuzzy* juga banyak diaplikasikan pada beberapa struktur aljabar, diantaranya Lee pada artikelnya tahun 2009 yang membahas ideal *bipolar fuzzy* pada *BCK/BCI*-aljabar, kemudian pada tahun 2010, Akram membahas penerapan *bipolar fuzzy* pada *K*-aljabar.

Suatu struktur aljabar yang dilengkapi dengan dua operasi biner penjumlahan dan pergandaan $(S, +, \cdot)$ dan memenuhi aksioma tertentu disebut dengan hemiring. Selain grup, teori *fuzzy* dan *bipolar fuzzy* juga diterapkan pada hemiring. Tahun 2006, Dudek membahas aplikasi teori *fuzzy* pada hemiring dalam artikelnya yang berjudul *Fuzzy h-ideals of Hemiring*, kemudian tahun 2014 Zhou dan Li membahas aplikasi teori *bipolar fuzzy* pada hemiring. Seperti halnya teori *bipolar fuzzy*, *bipolar anti fuzzy* juga diterapkan pada beberapa struktur aljabar. Muthuraj membahas aplikasi *bipolar anti fuzzy* pada Subring dan *HX* grup pada tahun 2012 dan 2016. Kemudian pada tahun 2017 Hayat membahas h-ideal *bipolar anti fuzzy* pada hemiring.

Suatu struktur aljabar yang dibangun oleh grup $(G,*,e)$ dengan operasi biner $(\odot)$ dan memenuhi beberapa aksioma disebut *K*-aljabar, yang dinotasikan dengan $\mathcal{K} = (G,*,\odot,e)$. Konsep ini pertama kali dibahas oleh Akram dan Dar pada tahun 2005 dalam artikelnya yang berjudul *On a K-algebra Built on a Group*. Kemudian pada tahun 2007 Akram dan Dar membahas homomorfisma dalam *K*-aljabar pada jurnalnya *On K-Homomorphisms of K-algebra*. Teori *fuzzy* dan *bipolar fuzzy* banyak diaplikasikan pada *K*-aljabar. Pada tahun 2007 Akram dan Dar memperkenalkan penerapan teori *fuzzy* pada *K*-aljabar dalam artikelnya yang berjudul *fuzzy ideals of K-algebra*. Seiring dengan berkembangnya teori himpunan *fuzzy*, pada tahun 2008 Akram membahas ideal *bifuzzy* pada *K*-aljabar dan pada tahun 2010 Akram membahas tentang aplikasi *bipolar fuzzy* pada *K*-aljabar dalam artikelnya yang berjudul *Bipolar Fuzzy K-algebras*.

Berdasarkan pada artikel Hayat pada tahun 2017 yang membahas h-ideal *bipolar anti fuzzy* pada hemiring dan pada beberapa artikel mengenai K-aljabar, pada tesis ini akan dibahas ideal *bipolar anti fuzzy* pada K-aljabar.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian pada latar belakang di atas, permasalahan yang akan dibahas pada tesis ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana struktur ideal *bipolar anti fuzzy* pada K-aljabar?
2. Bagaimana sifat-sifat yang berlaku pada ideal *bipolar anti fuzzy* pada K-aljabar?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian pada tesis ini adalah sebagai berikut.

1. Membangun struktur ideal *bipolar anti fuzzy* pada K-aljabar.
2. Membahas sifat-sifat yang berlaku pada ideal *bipolar anti fuzzy* pada K-aljabar.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari adanya penelitian pada tesis ini adalah sebagai berikut.

1. Pengembangan teori *fuzzy* dan K-aljabar.
2. Referensi untuk penelitian berikutnya tentang teori *fuzzy* dan K-aljabar.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas definisi, teorema, proposisi, dan contoh-contoh yang menjadi dasar dan dapat mempermudah pemahaman pada bab selanjutnya, yaitu ideal *bipolar anti fuzzy* pada K-aljabar.

2.1 Pemetaan dan Operasi Biner

Pemetaan dan operasi biner adalah teori yang paling dasar untuk memahami materi yang akan dibahas pada subbab selanjutnya. Definisi dan contoh yang berkaitan dikutip dari buku *Basic Abstract Algebra* oleh Bhattcharya dkk., 1995 tentang pemetaan dan operasi biner akan dibahas sebagai berikut.

Definisi 2.1.1 (Hasil kali kartesian)

Misalkan A dan B adalah himpunan tak kosong. Hasil kali kartesian dari A dan B yang dilambangkan dengan $A \times B$ adalah himpunan dari semua pasangan terurut (a, b), dengan $a \in A$ dan $b \in B$.

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A . b \in B\}.$$

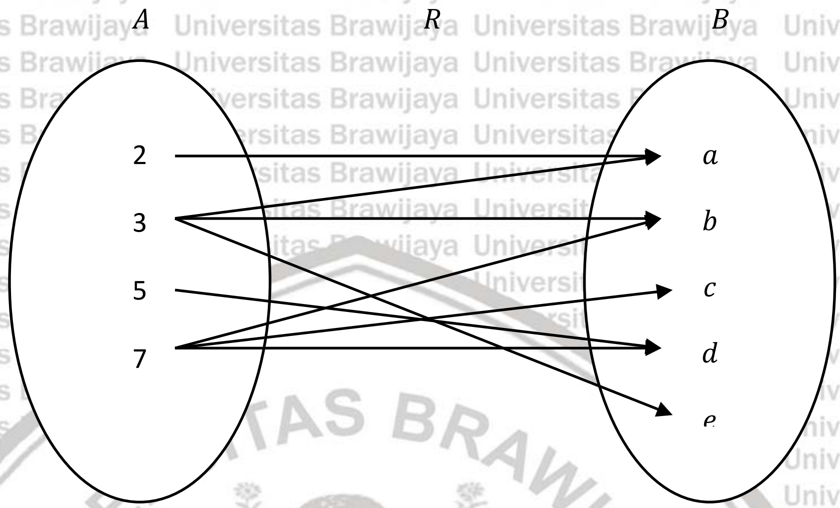
Contoh 2.1.2 Diberikan $A = \{2,3,5,7\}$ dan $B = \{a, b, c, d, e\}$. Hasil kali kartesian dari A dan B adalah

$$A \times B = \{(2, a), (2, b), (2, c), (2, d), (2, e), (3, a), (3, b), (3, c),$$
$$(3, d), (3, e), (5, a), (5, b), (5, c), (5, d), (5, e), (7, a), (7, b), (7, c), (7, d), (7, e), \}.$$

Definisi 2.1.3 (Relasi)

Misalkan A dan B adalah himpunan tak kosong. Relasi R dari A ke B merupakan himpunan bagian dari $A \times B$. Jika $(x, y) \in R$, maka x disebut berelasi R pada y, ditulis xRy.

Contoh 2.1.4 Berdasarkan Contoh 2.1.2 diperoleh relasi dari A ke B adalah $R = \{(2,a),(3,a),(3,b),(3,e),(5,d),(7,b),(7,c),(7,d)\}$ dengan diagram relasi R sebagai berikut.



Gambar 2.1 Diagram Relasi R

Definisi 2.1.5 (Relasi Ekuivalensi)

Misalkan R adalah suatu relasi pada himpunan X. R disebut relasi ekuivalensi jika aksioma berikut dipenuhi.

i. Refleksif, jika xRx untuk setiap $x \in X$.

ii. Simetris, jika $xRy \Rightarrow yRx$ untuk setiap $x, y \in X$.

iii. Transitif, jika jika xRy dan $yRz \Rightarrow xRz$ untuk setiap $x, y, z \in X$.

Definisi 2.1.6 (Pemetaan)

Misalkan A dan B adalah himpunan tak kosong. Pemetaan $f: A \to B$ adalah relasi dari A ke B jika untuk setiap $a \in A$ muncul tepat satu kali sebagai sebagai komponen pertama dari pasangan terurut $(a, f(a))$ dalam relasi tersebut.

Hal ini dapat ditulis, f pemetaan jika berlaku

$$a_1 = a_2 \to f(a_1) = f(a_2).$$

Contoh 2.1.7 Berdasarkan Contoh 2.1.4 diperoleh relasi dari $A = \{2,3,5,7\}$ ke

$B = \{a, b, c, d, e\}$ adalah $R = \{(2, a), (3, a), (3, b), (3, e), (5, d), (7, b), (7, c), (7, d)\}$.

Periksa apakah relasi R merupakan pemetaan.

Bukti: Misalkan diambil $a_1 = a_2 = 3$, berdasarkan relasi pada Contoh 2.1.4 diperoleh $f(a_1) = b$ dan $f(a_2) = e$. Sehingga tidak memenuhi $a_1 = a_2 \to f(a_1) = f(a_2)$. Jadi R bukan pemetaan.

Definisi 2.1.8 (Pemetaan Injektif dan Pemetaan Surjektif)

Misalkan A dan B adalah himpunan tak kosong. Pemetaan $f: A \to B$ adalah

i. Injektif (1-1), jika untuk setiap $x_1, x_2 \in A$ berlaku $x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$ yang ekuivalen dengan $f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2$.

ii. Surjektif (onto), jika untuk setiap $y \in B$ berlaku $y = f(x)$ untuk setiap $x \in A$.

Suatu pemetaan yang injektif dan surjektif disebut dengan bijektif.

Definisi 2.1.9 (Operasi Biner)

Misalkan S adalah suatu himpunan tak kosong. Operasi biner $*$ pada S adalah suatu pemetaan.

$$*: S \times S \to S$$

$$(a, b) \mapsto * (a, b) = a * b$$

Definisi 2.1.10 (Struktur Aljabar)

Himpunan tak kosong S disebut struktur aljabar jika S dilengkapi dengan satu atau lebih operasi biner.

2.2 Grup

Pada subbab ini akan dibahas tentang grup dengan definisi yang berkaitan dikutip dari buku Bhattacharya dkk., 1995 dengan judul *Basic Abstract Algebra* dan Definisi 2.2.9 dikutip dari artikel Subramanian dengan judul *Anti Homomorphism in Fuzzy Subgroups* tahun 2018.

Definisi 2.2.1 (Grup)

Suatu himpunan tak kosong G yang dilengkapi dengan operasi biner $(*)$ disebut grup jika aksioma berikut dipenuhi.

i. Himpunan G bersifat tertutup terhadap operasi $(*)$, untuk setiap $x, y \in G$ berlaku $x * y \in G$.

ii. Operasi $(*)$ memenuhi sifat asosiatif, untuk setiap $x, y, z \in G$ berlaku
$$x * (y * z) = (x * y) * z.$$

iii. Terdapat $e \in G$ sehingga berlaku $e * x = x * e = x$ untuk setiap $x \in G$. Selanjutnya e disebut dengan elemen identitas.

iv. Untuk setiap $x \in G$ memiliki invers $x^{-1} \in G$ sehingga berlaku $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$. Banyaknya elemen pada $(G,*)$ disebut dengan orde grup $(G,*)$.

Contoh 2.2.2 Diberikan himpunan $G = \{e, a, b, x, y, z\}$. Didefinisikan operasi $\circ$ pada himpunan G sebagai berikut.

Tabel 2.1 Operasi $\circ$ pada Himpunan G

$\circ$	e	a	b	x	y	z
e	e	a	b	x	y	z
a	a	b	e	z	x	y
b	b	e	a	y	z	x
x	x	y	z	e	a	b
y	y	z	x	b	e	a
z	z	x	y	a	b	e

Tunjukkan bahwa $(G,\circ)$ adalah grup.

Bukti: Akan dibuktikan bahwa $(G,\circ)$ adalah grup.

i. Berdasarkan Tabel 2.1, terbukti bahwa $(G,\circ)$ bersifat tertutup.

ii. Ambil $x, y, z \in G$.

$$x \circ (y \circ z) = x \circ a = y$$

$$(x \circ y) \circ z = a \circ z = y,$$

dengan cara yang sama untuk setiap $e, a, b, x, y, z \in G$ berlaku sifat asosiatif

$$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z.$$

iii. Terdapat elemen identitas e sehingga berlaku $e \circ x = x \circ e = x$ untuk setiap $x \in G$.

iv. Terdapat invers dari x yaitu x^{-1} sehingga berlaku $x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e$.

Untuk $x = e, x^{-1} = e \rightarrow e \circ e = e \circ e = e.$

Untuk $x = a, x^{-1} = b \rightarrow a \circ b = b \circ a = e.$

Untuk $x = b, x^{-1} = a \rightarrow b \circ a = a \circ b = e.$

Untuk $x = x, x^{-1} = x \rightarrow x \circ x = x \circ x = e.$

Untuk $x = y, x^{-1} = y \rightarrow y \circ y = y \circ y = e.$

Untuk $x = z, x^{-1} = z \rightarrow z \circ z = z \circ z = e.$

Karena aksioma (i), (ii), (iii), dan (iv) dipenuhi, terbukti bahwa $(G,\circ)$ adalah grup.

Contoh 2.2.3

Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan bulat $\mathbb{Z}$ adalah grup terhadap operasi penjumlahan.

Bukti:

i. Jelas bahwa untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$ berlaku $x + y \in \mathbb{Z}$. Sehingga $(\mathbb{Z}, +)$ berlaku sifat tertutup.

ii. Ambil $x = 1, y = 2, z = 3 \in \mathbb{Z}$.

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$1 + (2 + 3) = (1 + 2) + 3$$

$$1 + 5 = 3 + 3$$

$$6 = 6$$

Dengan cara yang sama untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Z}$ berlaku sifat asosiatif.

iii. Untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ berlaku $x + e = e + x = x$ maka terdapat $e = 0 \in \mathbb{Z}$.

iv. Untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ berlaku $x + x^{-1} = x^{-1} + x = e = 0$ maka untuk setiap $x \in \mathbb{Z}, x^{-1} = -x \in \mathbb{Z}$.

Karena memenuhi aksioma (i), (ii), (iii), dan (iv) maka terbukti $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup.

Definisi 2.2.4 (Grup Abelian)

Misalkan $(G,*)$ adalah grup. Jika $(G,*)$ memenuhi sifat komutatif $x * y = y * x$ untuk setiap $x, y \in G$ maka $(G,*)$ disebut grup komutatif atau grup abelian.

Contoh 2.2.5 Berdasarkan Contoh 2.2.2 diketahui $G = \{e, a, b, x, y, z\}$ adalah grup terhadap operasi biner $\circ$. Akan dibuktikan $(G,\circ)$ merupakan grup komutatif.

Ambil $x = a, y = y \in G$.

$$a \circ y = x \neq y \circ a = z$$

Karena tidak berlaku sifat komutatif, maka $(G,\circ)$ bukan merupakan grup komutatif.

Contoh 2.2.6

Berdasarkan Contoh 2.2.3 diketahui $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup. Akan dibuktikan $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup komutatif.

Ambil $x = 1, y = 4 \in \mathbb{Z}$.

$$x + y = y + x$$

$$1 + 4 = 4 + 1$$

$$5 = 5$$

Dengan cara yang sama untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$ berlaku sifat komutatif. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup komutatif.

Definisi 2.2.7 (Subgrup)

Misalkan $(G,*)$ adalah grup dan H merupakan himpunan bagian tak kosong dari G. H disebut subgrup dari $(G,*)$ jika $(H,*)$ membentuk grup.

Definisi 2.2.8 (Semigrup)

Misalkan G_1 adalah himpunan tak kosong. $(G_1,*)$ disebut semigrup jika aksioma berikut dipenuhi.

i. Himpunan G_1 terhadap operasi biner $(*)$ bersifat tertutup, untuk setiap $x, y \in G_1$ berlaku $x * y \in G_1$.

ii. Himpunan G_1 terhadap operasi biner $(*)$ bersifat asosiatif, untuk $x, y, z \in G_1$ berlaku $(x * y) * z = x * (y * z)$.

Definisi 2.2.9 (Homomorfisma dan Anti Homomorfisma)

Misalkan himpunan tak kosong G dan H adalah suatu grup dan $\varphi: G \to H$ adalah suatu pemetaan.

- Pemetaan φ disebut homomorfisma jika untuk setiap $x, y \in G$ berlaku

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y).$$

- Pemetaan φ disebut anti homomorfisma jika untuk setiap $x, y \in G$ berlaku

$$\varphi(xy) = \varphi(y)\varphi(x).$$

- Pemetaan φ disebut epimorfisma jika φ surjektif.

2.3 Ring

Pada subbab ini akan dibahas tentang ring. Definisi 2.3.1, Definisi 2.3.3, dan Definisi 2.3.11 dikutip dari buku *Basic Abstract Algebra* oleh Bhattacharya dkk., tahun 1995. Definisi 2.3.4 sampai Definisi 2.3.9 dikutip dari paper *On Fuzzy h-ideals in Hemiring* oleh Jun dkk., tahun 2004. Definisi 2.3.10 dikutip dari artikel Kalsoom dkk., yang berjudul *Note on* (λ, μ)*-fuzzy Interior Ideals of Hemiring* tahun 2013.

Definisi 2.3.1 (Ring)

Misalkan R adalah himpunan tak kosong dengan dua operasi biner penjumlahan $(+)$ dan pergandaan $(\cdot)$. $(R, + \cdot)$ disebut ring jika aksioma berikut dipenuhi.

i. Himpunan R terhadap operasi penjumlahan adalah grup komutatif.

ii. Himpunan R terhadap operasi pergandaan adalah semigrup.

iii. Himpunan R terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan memenuhi sifat distributif, untuk setiap $x, y, z \in R$ berlaku

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \text{ dan } (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

Contoh 2.3.2 Diberikan himpunan $R = \{0,1, q_1, q_2, q_3\}$ dan didefinisikan operasi biner penjumlahan dan pergandaan pada tabel berikut.

Tabel 2.2 Operasi Penjumlahan pada *R*

$+$	0	1	q_1	q_2	q_3
0	0	1	q_1	q_2	q_3
1	1	1	q_3	q_3	q_3
q_1	q_1	q_3	q_3	q_3	q_3
q_2	q_2	q_3	q_3	q_3	q_3
q_3	q_3	q_3	q_3	q_3	q_3

Tabel 2.3 Operasi Pergandaan pada *R*

$\cdot$	0	1	q_1	q_2	q_3
0	0	0	0	0	0
1	0	q_3	q_3	q_3	q_3
q_1	0	q_3	q_3	q_3	q_3
q_2	0	q_3	q_3	q_3	q_3
q_3	0	q_3	q_3	q_3	q_3

Tunjukkan apakah $(R, + \cdot)$ adalah suatu ring.

Bukti:

i. Akan dibuktikan bahwa $(R, +)$ merupakan grup komutatif.

a. Berdasarkan Tabel 2.1 terbukti bahwa $(R, +)$ bersifat tertutup.

b. Ambil $x = 0, y = 1, z = q_1$.

$$x + (y + z) = 0 + (1 + q_1)$$
$$= 0 + q_3$$
$$= q_3$$
$$(x + y) + z = (0 + 1) + q_1$$
$$= 1 + q_1$$

$$= q_3$$

Dengan cara yang sama untuk setiap $x, y, z \in R$ berlaku sifat asosiatif

$$x + (y + z) = (x + y) + z.$$

c. Terdapat elemen identitas $e = 0$, sehingga berlaku $e + x = x + e = x$ untuk setiap $x \in R$.

d. Untuk setiap $x \in R$ memeiliki elemen invers $x^{-1} \in R$ sehingga berlaku $x + x^{-1} = x^{-1} + x = 0$.

Untuk $x = 0$, $x^{-1} = 0$ sehingga $0 + 0 = 0 + 0 = 0$.

Untuk $x = 1$, tidak terdapat elemen invers.

$(R, +)$ tidak memenuhi sifat grup komutatif, maka $(R, +, \cdot)$ bukan ring.

Definisi 2.3.3 (Subring)

Misalkan $(R, + \cdot)$ adalah ring dan R_1 adalah himpunan bagian tak kosong pada R. R_1 disebut subring jika $(R_1, + \cdot)$ adalah ring.

Definisi 2.3.4 (Semiring)

Misalkan S adalah himpunan tak kosong dengan dua operasi biner penjumlahan $(+)$ dan pergandaan $(\cdot)$. S disebut semiring jika aksioma berikut dipenuhi.

i. Himpunan S terhadap operasi penjumlahan adalah semigrup.

ii. Himpunan S terhadap operasi pergandaan adalah semigrup.

iii. Himpunan S terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan memenuhi sifat distributif, untuk setiap $x, y, z \in S$ berlaku

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \text{ dan } (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

Contoh 2.3.5 Berdasarkan Contoh 2.3.2 diketahui $R = \{0, 1, q_1, q_2, q_3\}$. Operasi penjumlahan dan pergandaan didefinisikan pada Tabel 2.2 dan Tabel 2.3. Akan dibuktikan bahwa R merupakan semiring.

i. Berdasarkan uraian pada Contoh 2.3.2, $(R, +)$ adalah semigrup, karena R terhadap operasi penjumlahan bersifat tertutup dan asosiatif.

ii. Akan dibuktikan bahwa $(R,\cdot)$ adalah semigrup.

a. Berdasarkan Tabel 2.3 terbukti bahwa untuk setiap $x \in R$ berlaku sifat tertutup terhadap operasi pergandaan.

b. Ambil $x = 1, y = q_3, z = q_1$

$$x \cdot (y \cdot z) = 1 \cdot (q_3 \cdot q_1) = 1 \cdot q_3 = q_3$$

$$(x \cdot y) \cdot z = (1 \cdot q_3) \cdot q_1 = q_3 \cdot q_1 = q_3$$

Dengan cara yang sama untuk setiap $x, y, z \in R$ berlaku sifat asosiatif.

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

Terbukti bahwa $(R,\cdot)$ adalah semigrup.

iii. Ambil $x = 1, y = q_3, z = q_1$,

$$x \cdot (y + z) = 1 \cdot (q_3 + q_1) = q_3$$

$$x \cdot y + x \cdot z = (1 \cdot q_3) + (1 \cdot q_1) = q_3$$

Dengan cara yang sama untuk setiap $x, y, z \in R$ berlaku $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

$$(x + y) \cdot z = (1 + q_3) \cdot q_1 = q_3$$

$$x \cdot z + y \cdot z = (1 \cdot q_1) + (q_3 \cdot q_1) = q_3$$

Dengan cara yang sama untuk setiap $x, y, z \in R$ berlaku $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

Karena aksioma (i), (ii), (iii) dipenuhi maka terbukti bahwa $(R, +,\cdot)$ adalah semiring.

Definisi 2.3.6 (Ideal pada Semiring)

Misalkan S adalah suatu semiring dan A adalah himpunan bagian tak kosong pada S. A disebut ideal pada semiring S jika A memenuhi aksioma berikut.

i. Untuk setiap $x, y \in A$ berlaku $x + y \in A$.

ii. Untuk setiap $x \in A$ dan $s \in S$ berlaku $s \cdot a \in A$.

iii. Untuk setiap $x \in A$ dan $s \in S$ berlaku $a \cdot s \in A$.

Definisi 2.3.7 (Hemiring)

Misalkan $(S,+,\cdot)$ adalah semiring. Semiring S disebut hemiring jika aksioma berikut dipenuhi.

i. S terhadap penjumlahan bersifat komutatif.

ii. Terdapat $0 \in S$ sedemikian sehingga 0 adalah identitas dari operasi penjumlahan dan untuk setiap $a \in S$ berlaku $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$.

Contoh 2.3.8 Berdasarkan Contoh 2.3.5, buktikan bahwa semiring $(R,+,\cdot)$ merupakan hemiring.

Bukti:

i. Ambil $x = 0$ dan $y = q_1$

$$x + y = 0 + q_1 = q_1$$

$$y + x = q_1 + 0 = q_1$$

Dengan cara yang sama untuk setiap $x, y \in R$ berlaku sifat komutatif $x + y = y + x$.

ii. Berdasarkan pembuktian pada Contoh 2.3.2, diperoleh $0 \in R$ dan 0 adalah elemen identitas pada operasi penjumlahan. Berdasarkan Tabel 2.3, dapat dilihat bahwa untuk setiap $x \in R$ berlaku $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$.

Terbukti bahwa $(R,+,\cdot)$ adalah hemiring.

Definisi 2.3.9 (Ideal pada Hemiring)

Misalkan S adalah suatu hemiring dan A adalah himpunan bagian tak kosong pada S. A disebut ideal pada hemiring S jika A memenuhi aksioma berikut.

i. Untuk setiap $x, y \in A$ berlaku $x + y \in A$.

ii. Untuk setiap $x \in A$ dan $s \in S$ berlaku $s \cdot a \in A$.

iii. Untuk setiap $x \in A$ dan $s \in S$ berlaku $a \cdot s \in A$.

A disebut h-ideal pada hemiring S jika A ideal dan memenuhi aksioma berikut.

iv. Untuk setiap $x, z \in S$ dan $a, b \in A$ berlaku $x + a + z = b + z \Rightarrow x \in A$.

A disebut k-ideal pada hemiring S A ideal dan memenuhi aksioma berikut

v. Untuk setiap $y, z \in A$ dan $x \in S$ berlaku $x + y = z \Rightarrow x \in A$.

Definisi 2.3.10 (Interior-Ideal)

Misalkan S adalah suatu hemiring dan I adalah himpunan bagian tak kosong pada S. Jika $(I, +)$ dan $(I, \cdot)$ bersifat tertutup, maka I disebut interior-ideal pada S.

Definisi 2.3.11 (Homomorfisma Ring)

Misalkan himpunan tak kosong R dan S adalah suatu ring. Pemetaan $\varphi: R \rightarrow S$ disebut homomorfisma pada R ke S jika untuk setiap $x, y \in R$ berlaku

i. $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

ii. $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.

2.4 *K*-aljabar

Pada subbab ini akan diberikan definisi terkait dengan K-aljabar dan contohnya yang dikutip dari jurnal Dar dan Akram tahun 2005 dan 2007 yang berjudul *On a K-algebra Built on a Group* dan *On a K-homomorphism of K-algebras*. Definisi 2.4.9 dan 2.4.10 dikutip dari artikel berjudul *Fuzzy Subalgebras of BCK/BCI-algebras Redefined* yang ditulis oleh Jun dan Hong, tahun 2001.

Definisi 2.4.1 (*K*-aljabar)

Misalkan $(G, *)$ adalah suatu grup. Didefinisikan operasi biner $\odot : G \times G \rightarrow G$ sebagai berikut:

$$\odot (x, y) = x \odot y = x * y^{-1}.$$

Suatu struktur aljabar yang dibangun oleh grup $(G, *, e)$ berorde lebih dari 2 dengan e adalah elemen identitas disebut K-aljabar dinotasikan $\mathcal{K} = (G, *, \odot, e)$.

Akibat 2.4.2

Jika $\mathcal{K} = (G, *, \odot, e)$ adalah suatu K-aljabar, maka untuk setiap $x, y, z \in G$ berlaku

i. $(x \odot y) \odot (x \odot z) = \Big(x \odot \big((e \odot z) \odot (e \odot y)\big)\Big) \odot x$,

ii. $x \odot (x \odot y) = \big(x \odot (e \odot y)\big) \odot x$,

iii. $x \odot x = e$,

iv. $x \odot e = x$, dan

v. $e \odot x = x^{-1}$.

Jika $(G,*,e)$ adalah grup abelian, maka aksioma i dan ii diganti dengan

i*. $(x \odot y) \odot (x \odot z) = z \odot y$,

ii*. $x \odot (x \odot y) = y$

untuk setiap $x, y, z \in G$.

Contoh 2.4.3 Berdasarkan Contoh 2.2.2, diketahui $G = \{e, a, b, x, y, z\}$ dan $(G,\circ)$ adalah grup. Jika diberikan operasi $(\odot)$ pada Tabel 2.4 sebagai berikut,

Tabel 2.4 Operasi $\odot$ pada $\mathcal{K}$

$\odot$	e	a	b	x	y	z
e	e	b	a	x	y	z
a	a	e	b	z	x	y
b	b	a	e	y	z	x
x	x	z	y	e	a	b
y	y	x	z	b	e	a
z	z	y	x	a	b	e

maka buktikan bahwa $\mathcal{K} = (G,\circ,\odot,e)$ adalah suatu K-aljabar.

Bukti:

Karena $(G,\circ)$ bukan grup abelian, maka aksioma yang digunakan adalah sebagai berikut.

i. Ambil $x, y, z \in G$,

$$(x \odot y) \odot (x \odot z) = a \odot b = b$$

$$\Big(x \odot \big((e \odot z) \odot (e \odot y)\big)\Big) \odot x = \big(x \odot (z \odot y)\big) \odot x$$

$$= (x \odot b) \odot x$$

$$= y \odot x$$

$$= b$$

Dengan cara yang sama untuk setiap $x, y, z \in G$ berlaku

$$(x \odot y) \odot (x \odot z) = \left(x \odot \left((e \odot z) \odot (e \odot y)\right)\right) \odot x.$$

ii. Ambil $x, y \in G$,

$$x \odot (x \odot y) = x \odot a = z$$

$$\left(x \odot (e \odot y)\right) \odot x = (x \odot y) \odot x = a \odot x = z$$

Dengan cara yang sama untuk setiap $x, y \in G$ berlaku

$$x \odot (x \odot y) = \left(x \odot (e \odot y)\right) \odot x.$$

iii. Berdasarkan Tabel 2.4 dapat dilihat bahwa untuk setiap $x \in G$ berlaku $x \odot x = e$.

iv. Berdasarkan Tabel 2.4 dapat dilihat bahwa untuk setiap $x \in G$ berlaku $x \odot e = x$.

v. Berdasarkan pembuktian pada Contoh 2.2.2, diperoleh

Untuk $x = e, x^{-1} = e$

Untuk $x = a, x^{-1} = b$

Untuk $x = b, x^{-1} = a$

Untuk $x = x, x^{-1} = x$

Untuk $x = y, x^{-1} = y$

Untuk $x = z, x^{-1} = z$

dan berdasarkan Tabel 2.4 dapat disimpulkan bahwa $e \odot x = x^{-1}$ untuk setiap $x \in G$.

Karena memenuhi semua aksioma, maka terbukti bahwa $\mathcal{K} = (G, \circ, \odot, e)$ adalah suatu K-aljabar.

Contoh 2.4.4

Berdasarkan Contoh 2.2.6, diketahui $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup komutatif. Tunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}, +, \odot, 0)$ merupakan suatu K-aljabar.

Bukti:

i. Untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Z}$ berlaku sifat asosiatif dan komutatif, maka

$$(x \odot y) \odot (x \odot z) = x \odot (y \odot (x \odot z))$$
$$= x \odot (y \odot x) \odot z$$

$$= x \odot x \odot (y \odot z)$$

$$= e \odot (y \odot z)$$

$$= y \odot z.$$

ii. Untuk $x, y \in \mathbb{Z}$ berlaku sifat asosiatif, maka

$$x \odot (x \odot y) = x \odot x \odot y = e \odot y = y.$$

iii. Untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ berlaku $x \odot x = x + x^{-1} = x - x = 0 = e$.

iv. Untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ berlaku $x \odot e = x + e^{-1} = x + 0 = x$.

v. Untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ berlaku $e \odot x = e + x^{-1} = x^{-1}$.

Karena memenuhi semua aksioma, terbukti bahwa $(\mathbb{Z}, +, \odot, 0)$ adalah K-aljabar.

Definisi 2.4.5 (*K*-subaljabar)

Misalkan $\mathcal{K} = (G, *, \odot, e)$ adalah suatu K-aljabar. Suatu himpunan tak kosong H pada K-aljabar $\mathcal{K}$ disebut K-subaljabar jika $e \in H$ dan $h_1 \odot h_2 \in H$, untuk setiap $h_1, h_2 \in H$.

Contoh 2.4.6 Berdasarkan Contoh 2.4.3, diketahui $\mathcal{K} = (G, \circ, \odot, e)$ adalah suatu K-aljabar. Jika diberikan himpunan $H = \{e, a, b\}$, maka buktikan bahwa H adalah K-subaljabar.

Bukti:

Tabel 2.5 Operasi $\odot$ pada *H*

$\odot$	e	a	b
e	e	b	a
a	a	e	b
b	b	a	e

Berdasarkan Tabel 2.5, terlihat jelas bahwa $e \in H$ dan untuk setiap $h_1, h_2 \in H$ berlaku $h_1 \odot h_2 \in H$.

Definisi 2.4.7 (Ideal pada *K*-aljabar)

Misalkan I adalah suatu himpunan tak kosong pada K-aljabar $\mathcal{K} = (G,*,\odot,e)$. Himpunan I disebut ideal pada $\mathcal{K}$ jika untuk setiap $x, y \in G$ berlaku,

i. $e \in I$,

ii. $x \odot y \in I, y \odot (y \odot x) \in I \Rightarrow x \in I$.

Definisi 2.4.8 (K-Homomorfisma)

Misalkan $\mathcal{K}_1 = (G_1,*,\odot,e)$ dan $\mathcal{K}_2 = (G_1,*,\odot,e)$ adalah suatu K-aljabar. Pemetaan $\psi: \mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}_2$ disebut K-homomorfisma jika untuk setiap $x_1, y_1 \in \mathcal{K}_1$ berlaku $\psi(x_1 \odot y_1) = \psi(x_1) \odot \psi(y_1)$, dimana $\psi(x_1), \psi(x_2) \in \mathcal{K}_2$.

Definisi 2.4.9 (*BCK/BCI-aljabar*)

Suatu aljabar $(X,*,\theta)$ disebut *BCI*-aljabar jika untuk setiap $x, y, z \in X$ kondisi berikut dipenuhi.

i. $(x * y) * (x * z) * (z * y) = \theta$,

ii. $\big(x * (x * y)\big) * y = \theta$,

iii. $x * x = \theta$, dan

iv. $x * y = \theta, y * x = \theta \Rightarrow x = y$.

BCI-aljabar disebut *BCK*-aljabar jika memenuhi aksioma berikut

$$\theta * x = \theta.$$

Definisi 2.4.10 (*BCK/BCI*-subaljabar)

Himpunan bagian S dari *BCK/BCI*-aljabar X disebut subaljabar dari X jika $x * y \in S$ untuk setiap $x, y \in S$.

2.5 Himpunan *Fuzzy*

Pada subbab ini akan dibahas tentang himpunan *fuzzy* dan beberapa teori yang dikembangkan dari himpunan *fuzzy*. Definisi 2.5.1 sampai Definisi 2.5.6 dikutip dari buku *Smarandache Fuzzy Algebra* oleh Kandasamy tahun 2003.Definisi 2.5.8 dikutip dari artikel Akram yang berjudul *Bifuzzy Ideals of K-algebras* tahun 2008. Definisi 2.5.9 dikutip dari *Applications of Bipolar Fuzzy Theory to Hemirings* yang ditulis oleh Zhang tahun 1998. Definisi 2.5.11 dikutip dari *Bipolar Fuzzy Soft Sets and Its Application in Decision Making Problem* yang ditulis Abdullah dkk., tahun 2013.

Definisi 2.5.1 (Himpunan *Fuzzy*)

Misalkan X adalah himpunan tak kosong. Himpunan A yang didefinisikan sebagai berikut

$$A = \{ (x, \mu_A(x)) | x \in X\}$$

disebut himpunan *fuzzy* A pada X. μ_A adalah suatu pemetaan

$$\mu_A : X \to [0,1]$$

dengan $[0,1]$ adalah interval bilangan riil dari 0 sampai dengan 1. $\mu_A(x)$ disebut fungsi (nilai) keanggotaan untuk himpunan *fuzzy* A.

Contoh 2.5.2 Diberikan himpunan $R = \{0,1, q_1, q_2, q_3\}$. Jika didefinisikan fungsi sebagai berikut

$$\mu_A = \begin{cases} 0.13 & , \quad x = 0 \\ 0.65 & , \quad x = 1, q_1, q_2, q_3 \end{cases}$$

maka himpunan $A = \{(0,0.13), (1,0.65), (q_1, 0.65), (q_2, 0.65), (q_3, 0.65)\}$ disebut himpunan *fuzzy* A pada R.

Definisi 2.5.3 (Himpunan Level)

Misalkan A adalah himpunan *fuzzy* pada himpunan tak kosong X. Himpunan

$$U(\mu_A; t) \coloneqq \{x \in X \,| \mu_A(x) \geq t\}$$

untuk suatu $t \in [0, 1]$ disebut himpunan *level* pada himpunan *fuzzy* A.

Definisi 2.5.4 (Irisan Himpunan *Fuzzy*)

Misalkan A dan B adalah himpunan *fuzzy* pada himpunan tak kosong X. $A \cap B$ adalah himpunan fungsi keanggotaan yang didefinisikan sebagai berikut.

$$(A \cap B)(x) = \{\min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}\}, \text{ untuk setiap } x \in X.$$

Contoh 2.5.5 Berdasarkan Contoh 2.5.2, diketahui

$A = \{(0,0.13), (1,0.65), (q_1, 0.65), (q_2, 0.65), (q_3, 0.65)\}$. Diberikan fungsi sebagai berikut,

$$\mu_B = \begin{cases} 0.42, & x = 0, q_2, q_3 \\ 0.15, & x = 1, q_1 \end{cases}.$$

Sehingga $B = \{(0,0.42), (1,0.15), (q_1, 0.15), (q_2, 0.42), (q_3, 0.42)\}$.

$$(A \cap B)(x) = \{\min\{\mu_A(0), \mu_B(0)\}, \min\{\mu_A(1), \mu_B(1)\}, \min\{\mu_A(q_1), \mu_B(q_1)\}$$

$$\min\{\mu_A(q_2), \mu_B(q_2)\}, \min\{\mu_A(q_3), \mu_B(q_3)\}\}$$

$$= \{(0,0.13), (1,0.15), (q_1, 0.15), (q_2, 0.42), (q_3, 0.42)\}.$$

Definisi 2.5.6 (Gabungan Himpunan *Fuzzy*)

Misalkan A dan B adalah himpunan *fuzzy* pada himpunan tak kosong X. $A \cup B$ adalah himpunan fungsi keanggotaan yang didefinisikan sebagai berikut.

$$(A \cup B)(x) = \{\max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}\}, \text{ untuk setiap } x \in X.$$

Contoh 2.5.7 Berdasarkan Contoh 2.5.5, diperoleh

$A = \{(0,0.13), (1,0.65), (q_1, 0.65), (q_2, 0.65), (q_3, 0.65)\}$ dan

$B = \{(0,0.42), (1,0.15), (q_1, 0.15), (q_2, 0.42), (q_3, 0.42)\}$.

$$(A \cup B)(x) = \{\max\{\mu_A(0), \mu_B(0)\}, \max\{\mu_A(1), \mu_B(1)\}, \max\{\mu_A(q_1), \mu_B(q_1)\}$$

$$\max\{\mu_A(q_2), \mu_B(q_2)\}, \max\{\mu_A(q_3), \mu_B(q_3)\}\}$$

$$= \{(0,0.42), (1,0.65), (q_1, 0.65), (q_2, 0.65), (q_3, 0.65)\}.$$

Definisi 2.5.8 (Himpunan *Bifuzzy*)

Misalkan X adalah suatu himpunan tak kosong. Didefinisikan suatu pemetaan

$$(\mu_A, \lambda_A) : X \to [0,1] \times [0,1]$$

dengan $[0,1]$ adalah interval bilangan riil dari 0 sampai dengan 1. Himpunan dari semua pasangan berurut yang didefinisikan dengan

$$A = \{(x, \mu_A(x), \lambda_A(x)) : \forall x \in X\}$$

disebut himpunan *bifuzzy* A pada X. Pemetaan $\mu_A : X \to [0,1]$ menunjukkan fungsi (nilai) keanggotaan $(\mu_A(x))$ sedangkan $\lambda_A : X \to [0,1]$ menunjukkan fungsi (nilai) non-keanggotaan $(\lambda_A(x))$ dengan syarat $\mu_A(x) + \lambda_A(x) \leq 1$ untuk setiap $x \in X$.

Definisi 2.5.9 (Himpunan *Bipolar Fuzzy*)

Misalkan X adalah himpunan tak kosong. Himpunan B yang didefinisikan sebagai berikut

$$B = \{\, x, (\lambda_B^+(x), \lambda_B^-(x)) | x \in X\}$$

dengan λ_B^+ dan λ_B^- adalah suatu pemetaan

$$\lambda_B^+ : X \to [0,1] \text{ dan } \lambda_B^- : X \to [-1,0]$$

dengan $[0,1]$ adalah interval bilangan riil dari 0 sampai dengan 1 dan $[-1,0]$ adalah interval bilangan riil dari -1 sampai dengan 0 disebut himpunan *bipolar fuzzy* B pada X dimana $\lambda_B^+(x)$ disebut fungsi (nilai) keanggotaan untuk himpunan *fuzzy* A dan $\lambda_B^-(x)$ disebut fungsi (nilai) non-keanggotaan untuk himpunan *fuzzy* A.

Contoh 2.5.10 Berdasarkan Contoh 2.5.2 diberikan himpunan $R = \{0, 1, q_1, q_2, q_3\}$ dan

$$\lambda_B^+(x) = \begin{cases} 0.13, & x = 0 \\ 0.65, & x = 1, q_1, q_2, q_3 \end{cases}.$$

Jika diberikan

$$\lambda_B^-(x) = \begin{cases} -0.44, & x = 0 \\ -0.45, & x = 1, q_1, q_2, q_3 \end{cases}$$

maka himpunan

$$B = \{0, (0.13, -0.44); 1, (0.65, -0.45); q_1, (0.65, -0.45); q_2, (0.65, -0.45);$$
$$q_3, (0.65, -0.45)\}$$

disebut himpunan *bipolar fuzzy* B pada X.

Untuk mempersingkat penulisan, himpunan *bipolar fuzzy* selanjutnya dinotasikan dengan $B = (\lambda^+, \lambda^-)$.

Definisi 2.5.11 (*Bipolar Fuzzy Complement*)

Misalkan himpunan B yang didefinisikan sebagai berikut $B = \{\, x, (\lambda_B^+(x), \lambda_B^-(x)) | x \in X\}$ adalah suatu himpunan *bipolar fuzzy*. *Complement* dari himpunan *bipolar fuzzy* yang dinotasikan dengan $B^c = (\lambda_B^+, \lambda_B^-)^c$ didefinisikan sebagai berikut.

$$(\lambda_B^+, \lambda_B^-)^c = \{\, x, (1 - \lambda_B^+(x), -1 - \lambda_B^-(x)) | x \in X\}$$

Kemudian untuk mempersingkat penulisan selanjutnya ditulis dengan

$$(\lambda_B^+, \lambda_B^-)^c = (1 - \lambda_B^+, -1 - \lambda_B^-).$$

2.6 Himpunan *Fuzzy* pada Hemiring

Pada subbab ini akan dibahas tentang himpunan *fuzzy* pada hemiring. Definisi 2.6.1 dikutip dari artikel Ali dkk., yang berjudul *Fuzzy Hemirings* tahun 2017. Definisi 2.6.2 dan 2.6.3 dikutip dari artikel *Characterizations of Hemirings by their h-ideals* yang ditulis oleh Dudek dkk., tahun 2010. Definisi 2.6.4 sampai 2.6.6 dikutip dari artikel *Characterizations of Hemi-Rings by their Bipolar-Valued Fuzzy h-ideals* yang ditulis oleh Mahmood dan Hayat tahun 2015. Definisi 2.6.7 dikutip dari artikel Zhou dan Li tahun 2017 yang berjudul *Applications of Bipolar Fuzzy Theory to Hemirings*. Definisi 2.6.8 dikutip dari artikel Hayat dkk., tahun 2017 yang berjudul *On Bipolar Anti Fuzzy h-ideals in Hemi-rings.*

Definisi 2.6.1 (*Fuzzy* Hemiring)

Misalkan S adalah suatu hemiring. Suatu himpunan *fuzzy* $A = \{\, (x, \mu_A(x)) | x \in S\}$ disebut *fuzzy* hemiring jika untuk setiap $x, y \in S$ memenuhi aksioma berikut.

i. $\mu_A(x + y) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$,

ii. $\mu_A(xy) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$.

Definisi 2.6.2 (Ideal *Fuzzy* pada Hemiring)

Misalkan S adalah suatu hemiring dan himpunan *fuzzy* $A = \{\, (x, \mu_A(x)) | x \in S\}$ disebut ideal pada S jika untuk setiap $x, y \in S$ memenuhi aksioma berikut.

i. $\mu_A(x+y) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$,

ii. $\mu_A(xy) \geq \mu_A(y)$,

iii. $\mu_A(xy) \geq \mu_A(x)$.

Definisi 2.6.3 (h-ideal *Fuzzy* pada Hemiring)

Misalkan S adalah suatu hemiring dan himpunan *fuzzy* $A = \{\, (x, \mu_A(x)) | x \in S\}$ adalah ideal pada S. A disebut h-ideal jika untuk setiap $x, z, a, b \in S$ memenuhi

$$x + a + z = b + z \Rightarrow \mu_A(x) \geq \min\{\mu_A(a), \mu_A(b)\}.$$

Definisi 2.6.4 (Fungsi Karakteristik *Bipolar-Value*)

Misalkan M adalah himpunan bagian tak kosong pada semiring S. Himpunan *bipolar fuzzy* $C_M = (C_M^+, C_M^-)$ yang didefinisikan sebagai berikut

$$C_M^+(z) = \begin{cases} 1, & z \in M \\ 0, & z \notin M \end{cases}$$

$$C_M^-(z) = \begin{cases} -1, & z \in M \\ 0, & z \notin M \end{cases}$$

disebut fungsi karakteristik *bipolar value fuzzy*.

Definisi 2.6.5

Jika $B = (\lambda^+, \lambda^-)$ adalah himpunan *bipolar fuzzy* pada hemiring S dan $t' = (t^+, t^-) \in (0,1] \times [-1,0)$, maka

i. $B(x) \geq t' \Leftrightarrow (\lambda^+(x), \lambda^-(x)) \geq (t^+, t^-) \Leftrightarrow \lambda^+(x) \geq t^+$ dan $\lambda^-(x) \leq t^-$,

ii. $B(x) \leq t' \Leftrightarrow (\lambda^+(x), \lambda^-(x)) \leq (t^+, t^-) \Leftrightarrow \lambda^+(x) \leq t^+$ dan $\lambda^-(x) \geq t^-$.

Definisi 2.6.6 (*Bipolar Value Fuzzy* Point)

Misalkan $B = (\lambda^+, \lambda^-)$ adalah himpunan *bipolar fuzzy* pada hemiring S yang berbentuk

$$\lambda^+(z) = \begin{cases} t^+, & z = x \\ 0, & z \neq x \end{cases}$$

$$\lambda^-(z) = \begin{cases} t^-, & z = x \\ 0, & z \neq x \end{cases}$$

B disebut *bipolar value fuzzy point* dengan nilai $t' = (t^+, t^-) \in (0,1] \times [-1,0)$ dan *support* x. Hal ini ditulis $x_{t'} = (x_t^+, x_t^-)$. $x_{t'}$ disebut berada pada B, ditulis dengan $x_{t'} \in B$ jika $B(x) \geq t'$ yang berarti $\lambda^+(x) \geq t^+, \lambda^-(x) \leq t^-$. $x_{t'}$ disebut tidak berada pada B, ditulis dengan $x_{t'} \notin B$ jika $B(x) \leq t'$ yang berarti $\lambda^+(x) \leq t^+, \lambda^-(x) \geq t^-$.

Definisi 2.6.7 (h-ideal *Bipolar Fuzzy* pada Hemiring)

Misalkan S adalah suatu hemiring. Himpunan *bipolar fuzzy* $B = (\lambda^+,\ \lambda^-)$ pada S disebut h-ideal *bipolar fuzzy* pada S jika $\forall x, y, z, a, b \in S$ memenuhi aksioma berikut.

i. $\lambda^+(x+y) \geq \min\{\lambda^+(x), \lambda^+(y)\}$ dan $\lambda^-(x+y) \leq \max\{\lambda^-(x), \lambda^-(y)\}$,

ii. $\lambda^+(xy) \geq \lambda^+(y)$ dan $\lambda^-(xy) \leq \lambda^-(y)$,

iii. $\lambda^+(xy) \geq \lambda^+(x)$ dan $\lambda^-(xy) \leq \lambda^-(x)$,

iv. Jika $x + a + z = b + z$ maka

$$\lambda^+(x) \geq \min\{\lambda^+(a), \lambda^+(b)\} \text{ dan } \lambda^-(x) \leq \max\{\lambda^-(a), \lambda^-(b)\}.$$

Definisi 2.6.8 (Maximum dan Minimum *Bipolar Fuzzy*)

Misalkan S adalah suatu hemiring. Jika $B_1 = (\lambda^+, \lambda^-)$, $B_2 = (\mu^+, \mu^-)$ adalah himpunan *bipolar fuzzy* pada S maka

$$\max\{B_1, B_2\} = (\max\{\lambda^+, \mu^+\}, \min\{\lambda^-, \mu^-\}),$$

$$\min\{B_1, B_2\} = (\min\{\lambda^+, \mu^+\}, \max\{\lambda^-, \mu^-\}).$$

Contoh 2.6.9 Berdasarkan Contoh 2.5.10, diketahui

$$B_2 = \{0, (0.13, -0.44); 1, (0.65, -0.45); q_1, (0.65, -0.45); q_2, (0.65, -0.45);$$

$$q_3, (0.65, -0.45)\}$$

$$= \{(0.13, -0.44), (0.65, -0.45)\}$$

adalah himpunan *bipolar fuzzy* pada hemiring $R = \{0, 1, q_1, q_2, q_3\}$. Jika diberikan himpunan *bipolar fuzzy*

$$B_2 = \{0, (0.26, -0.55); 1, (0.42, -0.45); q_1, (0.42, -0.45); q_2, (0.42, -0.45);$$

$q_3, (0.42, -0.45)\}$

$= \{(0.26, -0.55), (0.42, -0.45)\}$

maka

$$\max\{B_1, B_2\} = (\max\{0.13, 0.65, 0.26, 0.42\}, \min\{-0.44, -0.45, -0.55\})$$
$$= (0.65, -0.55)$$
$$\min\{B_1, B_2\} = (\min\{0.13, 0.65, 0.26, 0.42\}, \max\{-0.44, -0.45, -0.55\})$$
$$= (0.13, -0.44)$$

2.7 h-Ideal *Bipolar Anti Fuzzy* pada Hemiring

Pada subbab ini akan diberikan definisi kemudian dibahas contoh, teorema, dan lemma yang berkaitan dengan h-ideal *bipolar anti fuzzy* pada hemiring yang dikutip dari jurnal Hayat dkk., 2017 yang berjudul *On Bipolar Anti Fuzzy h-ideals in Hemi-rings.* Untuk selanjutnya h-ideal *bipolar anti fuzzy* ditulis h-ideal BAF.

Definisi 2.7.1 (Fungsi Karakteristik Anti *Bipolar-value*)

Misalkan M adalah himpunan tak kosong dan M adalah himpunan bagaian dari suatu hemiring S. Himpunan *bipolar fuzzy* $C_{M^c} = (C^+_{M^c}, C^-_{M^c})$ yang dinyatakan sebagai berikut

$$C^+_{M^c}(x) = \begin{cases} 0, & x \in M \\ 1, & x \notin M \end{cases}$$

$$C^-_{M^c}(x) = \begin{cases} 0, & x \in M \\ -1, & x \notin M \end{cases}$$

disebut fungsi karakteristik anti *bipolar-value*.

Definisi 2.7.2 (h-Ideal BAF pada Hemiring)

Misalkan S adalah suatu hemiring. Himpunan *bipolar fuzzy* $B = (\lambda^+, \lambda^-)$ pada S disebut h-ideal BAF pada S jika untuk setiap $x, y, z, a, b \in S$ dan $t' = (t^+, t^-)$, $r' = (r^+, r^-) \in (0,1] \times [-1,0)$ memenuhi aksioma berikut

i. $x_{t'} \notin B$ dan $y_{r'} \notin B \Rightarrow (x + y)_{\max\{t', r'\}} \notin B$,

ii. $x_{t'} \notin B \Rightarrow (yx)_{t'} \notin B$,

iii. $x_{t'} \notin B \Rightarrow (xy)_{t'} \notin B$,

iv. $x + a + z = b + z$ dengan $a_{t'} \notin B, b_{r'} \notin B \Rightarrow x_{\max\{t',r'\}} \notin B$.

Contoh 2.7.3 Berdasarkan Contoh 2.3.8 diketahui $R = \{0,1,q_1,q_2,q_3\}$ terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan adalah suatu hemiring. Pada Contoh 2.5.10 didefinisikan himpunan *bipolar fuzzy* sebagai berikut.

Tabel 2.6 Himpunan $B = (\lambda^+, \lambda^-)$ pada R

	0	1	q_1	q_2	q_3
λ^+	0.13	0.65	0.65	0.65	0.65
λ^-	-0.44	-0.45	-0.45	-0.45	-0.45

Jika diberikan $t' = (0.6, -0.45)$ dan $r' = (0.66, -0.46)$. Tunjukkan bahwa himpunan $B = (\lambda^+, \lambda^-)$ adalah h-ideal BAF pada R.

Bukti:

i. $x_{t'} \notin B \Rightarrow \lambda^+(x) \leq t^+, \lambda^-(x) \geq t^-$

$x_{t'} \notin B \Rightarrow \lambda^+(x) \leq 0.6, \lambda^-(x) \geq -0.45$

maka hanya $0_{t'} \notin B$.

$y_{r'} \notin B \Rightarrow \lambda^+(x) \leq r^+, \lambda^-(x) \geq r^-$

$y_{r'} \notin B \Rightarrow \lambda^+(x) \leq 0.66, \lambda^-(x) \geq -0.46$

maka untuk setiap $y \in R$ berlaku $y_{r'} \notin B$.

$$\max\{t', r'\} = (\max\{0.6, 0.66\}, \min\{-0.45, -0.46\}) = (0.66, -0.46)$$

- Untuk $x = 0, y = 0$

$$(x + y)_{\max\{t',r'\}} = (0 + 0)_{(0.66,-0.46)} = 0_{(0.66,-0.46)}$$

$$\lambda^+(0) = 0.13 \leq 0.66$$

$$\lambda^-(0) = -0.44 \geq -0.46$$

$(x + y)_{\max\{t',r'\}} \notin B$.

- Untuk $x = 0, y = 1$

$$(x + y)_{\max\{t',r'\}} = (0 + 1)_{(0.66,-0.46)} = 1_{(0.66,-0.46)}$$

$$\lambda^{+}(1) = 0.65 \leq 0.66$$

$$\lambda^{-}(1) = -0.45 \geq -0.46$$

$(x+y)_{\max\{t',r'\}} \notin B.$

- Untuk $x = 0, y = q_1$

$$(x+y)_{\max\{t',r'\}} = (0+q_1)_{(0.66,-0.46)} = q_{1(0.66,-0.46)}$$

$$\lambda^{+}(q_1) = 0.65 \leq 0.66$$

$$\lambda^{-}(q_1) = -0.45 \geq -0.46$$

$(x+y)_{\max\{t',r'\}} \notin B.$

Dengan cara yang sama untuk setiap $y_{r'} \notin B$ berlaku $(x+y)_{\max\{t',r'\}} \notin B.$

ii. $x_{t'} \notin B \Rightarrow x = 0$. Ambil $y \in R$

- Untuk $y = 0 \Rightarrow (y \cdot x)_{t'} = (0 \cdot 0)_{t'} = 0_{t'} \notin B$
- Untuk $y = 1 \Rightarrow (y \cdot x)_{t'} = (0 \cdot 1)_{t'} = 0_{t'} \notin B$
- Untuk $y = q_1 \Rightarrow (y \cdot x)_{t'} = (0 \cdot q_1)_{t'} = 0_{t'} \notin B$
- Untuk $y = q_2 \Rightarrow (y \cdot x)_{t'} = (0 \cdot q_2)_{t'} = 0_{t'} \notin B$
- Untuk $y = q_3 \Rightarrow (y \cdot x)_{t'} = (0 \cdot q_3)_{t'} = 0_{t'} \notin B$

Terbukti untuk setiap $x_{t'} \notin B \Rightarrow (y \cdot x)_{t'} \notin B.$

iii. $x_{t'} \notin B \Rightarrow x = 0$. Ambil $y \in R$

- Untuk $y = 0 \Rightarrow (x \cdot y)_{t'} = (0 \cdot 0)_{t'} = 0_{t'} \notin B$
- Untuk $y = 1 \Rightarrow (x \cdot y)_{t'} = (1 \cdot 0)_{t'} = 0_{t'} \notin B$
- Untuk $y = q_1 \Rightarrow (x \cdot y)_{t'} = (q_1 \cdot 0)_{t'} = 0_{t'} \notin B$
- Untuk $y = q_2 \Rightarrow (x \cdot y)_{t'} = (q_2 \cdot 0)_{t'} = 0_{t'} \notin B$
- Untuk $y = q_3 \Rightarrow (x \cdot y)_{t'} = (q_3 \cdot 0)_{t'} = 0_{t'} \notin B$

Terbukti untuk setiap $x_{t'} \overline{\in} B \Rightarrow (x \cdot y)_{t'} \notin B.$

iv. $x + a + z = b + z \Rightarrow x + a = b$

$a_{t'} \notin B \Rightarrow a = 0$ dan $b_{r'} \notin B \Rightarrow b = \{0,1,q_1,q_2,q_3\}$

- Untuk $b = 0$

  $x + 0 = 0 \Rightarrow x = 0$ maka $0_{\max\{t',r'\}} = 0_{(0.66,-0.46)} \notin B$

- Untuk $b = 1$

  $x + 0 = 1 \Rightarrow x = 1$ maka $1_{\max\{t',r'\}} = 1_{(0.66,-0.46)} \notin B$

- Untuk $b = q_1$

  $x + 0 = q_1 \Rightarrow x = q_1$ maka $q_{1\max\{t',r'\}} = q_{1(0.66,-0.46)} \notin B$

- Untuk $b = q_2$

  $x + 0 = q_2 \Rightarrow x = q_2$ maka $q_{2\max\{t',r'\}} = q_{2(0.66,-0.46)} \notin B$

- Untuk $b = q_3$

  $x + 0 = q_3 \Rightarrow x = q_3$ maka $q_{3\max\{t',r'\}} = q_{3(0.66,-0.46)} \notin B$

Terbukti bahwa untuk setiap $a_{t'} \notin B, b_{r'} \notin B \Rightarrow x_{\max\{t',r'\}} \notin B$.

Karena aksioma (i), (ii), (iii), (iv) dipenuhi maka terbukti B adalah adalah h-ideal BAF pada R.

Definisi 2.7.4 (Interior h-ideal BAF pada Hemiring)

Misalkan S adalah suatu hemiring. Himpunan *bipolar fuzzy* $B = (\lambda^+, \lambda^-)$ pada S disebut interior h-ideal BAF pada S jika untuk setiap $x, y, z, a, b \in S$ dan $t' = (t^+, t^-)$, $r' = (r^+, r^-) \in (0,1] \times [-1,0)$ memenuhi aksioma (i) dan (iv) pada h-ideal BAF dan memenuhi aksioma berikut,

v. $x_{t'} \notin B$ dan $y_{r'} \notin B \Rightarrow (xy)_{\max\{t',r'\}} \notin B$,

vi. $y_{t'} \notin B \Rightarrow (xyz)_{t'} \notin B$.

Contoh 2.7.5 Berdasarkan Contoh 2.7.3, akan diperiksa apakah himpunan *bipolar fuzzy* $B = (\lambda^+, \lambda^-)$ pada R merupakan interior h-ideal BAF pada R.

Bukti:

v. $x_{t'} \notin B \Rightarrow x = 0$ dan $y_{r'} \notin B \Rightarrow y = R = \{0,1,q_1,q_2,q_3\}$.

- Untuk $y = 0 \Rightarrow (x \cdot y)_{\max\{t',r'\}} = (0 \cdot 0)_{(0.66,-0.46)} = 0_{(0.66,-0.46)} \notin B$
- Untuk $y = 1 \Rightarrow (x \cdot y)_{\max\{t',r'\}} = (0 \cdot 1)_{(0.66,-0.46)} = 1_{(0.66,-0.46)} \notin B$
- Untuk $y = q_1 \Rightarrow (x \cdot y)_{\max\{t',r'\}} = (0 \cdot q_1)_{(0.66,-0.46)} = q_{1(0.66,-0.46)} \notin B$
- Untuk $y = q_2 \Rightarrow (x \cdot y)_{\max\{t',r'\}} = (0 \cdot q_2)_{(0.66,-0.46)} = q_{2(0.66,-0.46)} \notin B$
- Untuk $y = q_3 \Rightarrow (x \cdot y)_{\max\{t',r'\}} = (0 \cdot q_3)_{(0.66,-0.46)} = q_{3(0.66,-0.46)} \notin B$

Terbukti untuk setiap $x_{t'} \notin B$ dan $y_{r'} \notin B \Rightarrow (xy)_{\max\{t',r'\}} \notin B$.

vi. $y_{t'} \notin B \Rightarrow y = 0$ dan ambil sebarang $x, z \in R$. Berdasarkan Tabel 2.3 untuk setiap $x \in R \Rightarrow x \cdot 0 = 0$ dan $z \in R \Rightarrow 0 \cdot z = 0$ maka untuk setiap $y_{t'} \notin B$ dan $x, z \in R$ berlaku

$$(xyz)_{t'} = 0_{t'} \notin B.$$

Karena aksioma (v) dan (vi) dipenuhi maka terbukti bahwa $B = (\lambda^+, \lambda^-)$ pada R merupakan interior h-ideal BAF pada R.

Teorema 2.7.6

Jika $B = (\lambda^+, \lambda^-)$ adalah Himpunan *bipolar fuzzy* pada S, maka aksioma (i) sampai (vi) ekuivalen dengan aksioma-aksioma berikut.

a. $\lambda^+(x + y) \leq \max\{\lambda^+(x), \lambda^+(y)\}$ dan $\lambda^-(x + y) \geq \min\{\lambda^+(x), \lambda^+(y)\}$,

b. $\lambda^+(xy) \leq \lambda^+(y)$ dan $\lambda^-(xy) \geq \lambda^-(y)$,

c. $\lambda^+(xy) \leq \lambda^+(x)$ dan $\lambda^-(xy) \geq \lambda^-(x)$,

d. $x + a + z = b + z \Rightarrow \lambda^+(x) \leq \max\{\lambda^+(a), \lambda^+(b)\}$ dan $\lambda^-(x) \geq \min\{\lambda^+(a), \lambda^+(b)\}$,

e. $\lambda^+(xy) \leq \max\{\lambda^+(x), \lambda^+(y)\}$ dan $\lambda^-(xy) \geq \min\{\lambda^+(x), \lambda^+(y)\}$,

f. $\lambda^+(xyz) \leq \lambda^+(y)$ dan $\lambda^-(xyz) \geq \lambda^-(y)$.

Teorema 2.7.7

Misalkan S adalah suatu hemiring. Himpunan *bipolar fuzzy* $B = (\lambda^+, \lambda^-) \in h$-ideal kiri BAF ($h$-ideal kanan BAF, h-ideal BAF, interior h-ideal BAF) jika dan hanya jika memenuhi kondisi a, b, dan d [(a,c, dan d), (a,b,c, dan d), (a,b,c,d,e, dan f)].

Lemma 2.7.8

Misalkan S adalah suatu hemiring. Jika $B = (\lambda^+, \lambda^-) \in h$-ideal kiri BAF ($h$-ideal kanan BAF, h-ideal BAF, interior h-ideal BAF), maka $\lambda^+(0) \leq \lambda^+(x)$ dan $\lambda^-(0) \geq \lambda^-(x)$ untuk setiap $x \in S$.

Teorema 2.7.9

Misalkan S adalah suatu hemiring dan I adalah himpunan bagian tak kosong pada S. $C_{I^c} \in h$-ideal kiri BAF (h-ideal kanan BAF, h-ideal BAF, interior h-ideal BAF) jika dan hanya jika I adalah h-ideal kiri (h-ideal kanan, h-ideal, interior h-ideal) pada hemiring S.

Teorema 2.7.10

Misalkan S adalah suatu hemiring. Jika $B = (\lambda^+, \lambda^-) \in h$-ideal BAF, maka

$B = (\lambda^+, \lambda^-) \in$ interior h-ideal BAF.

2.8 Karakterisasi h-ideal BAF pada Hemiring

Pada subbab ini diberikan definisi anti positif β-cut dan anti negatif α-cut. Kemudian akan dibahas teorema, dan akibat yang berkaitan dengan karakterisasi h-ideal BAF melalui anti positif β-cut dan anti negatif α-cut yang dikutip dari jurnal Hayat dkk., 2017 yang berjudul *On Bipolar Anti Fuzzy h-ideals in Hemi-rings*.

Definisi 2.8.1 (Anti Positif β-cut dan Anti Negatif α-cut)

Misalkan S adalah suatu hemiring. Jika $B = (\mu^+, \mu^-)$ adalah himpunan *bipolar fuzzy* pada hemiring S dan $(\alpha, \beta) \in [-1,0] \times [0,1]$, maka

i. Himpunan $\tilde{B}_\beta^+ = \{x \in S | \mu^+(x) \leq \beta\}$ disebut anti positif β-cut pada B

ii. Himpunan $\tilde{B}_\alpha^- = \{x \in S | \mu^-(x) \geq \alpha\}$ disebut anti negatif α-cut pada B

iii. Himpunan $\tilde{B}_{(\alpha,\beta)} = \{x \in S | \mu^-(x) \geq \alpha \; dan \; \mu^+(x) \leq \beta\}$ disebut anti (α,β)-cut pada B.

Untuk setiap $\gamma \in (0,1]$ dan $\tilde{B}^+_\gamma \cap \tilde{B}^-_{-\gamma}$ disebut anti γ-cut pada B.

Teorema 2.8.2

Misalkan S adalah suatu hemiring. Himpunan *bipolar fuzzy* $B = (\mu^+, \mu^-) \in h$-ideal kiri (h-ideal kanan, interior h-ideal) BAF pada S jika dan hanya jika kondisi berikut dipenuhi.

i. Untuk setiap $\beta \in [0,1]$, $\tilde{B}^+_\beta$ tak kosong, sehingga $\tilde{B}^+_\beta$ adalah h-ideal kiri (h-ideal kanan, interior h-ideal) pada S.

ii. Untuk setiap $\alpha \in [-1,0]$, $\tilde{B}^-_\alpha$ tak kosong, sehingga $\tilde{B}^-_\alpha$ adalah h-ideal kiri (h-ideal kanan, interior h-ideal) pada S.

Bukti:

($\Rightarrow$) Akan dibuktikan bahwa $\tilde{B}^+_\beta$ merupakan h-ideal.

i. Ambil $x, y \in \tilde{B}^+_\beta$ sehingga $\mu^+(x) \leq \beta$ dan $\mu^+(y) \leq \beta$ dengan , $\beta \in [0,1]$.

$$\mu^+(x+y) \leq \max\{\mu^+(x), \mu^+(y)\} \leq \max\{\beta, \beta\} = \beta$$

$x + y \in \tilde{B}^+_\beta$.

ii. Ambil $x \in \tilde{B}^+_\beta$ dan $r \in S$.

$$\mu^+(rx) \leq \mu^+(x) \leq \beta$$

$rx \in \tilde{B}^+_\beta$.

iii. Ambil $x, y \in \tilde{B}^+_\beta$ dan $r \in S$.

$$\mu^+(rx) \leq \mu^+(y) \leq \beta$$

$rx \in \tilde{B}^+_\beta$.

iv. Ambil $x', z' \in S$ dan $a, b \in \tilde{B}^+_\beta$.

$$x' + a + z' = b + z' \Rightarrow \mu^+(x') \leq \max\{\mu^+(a), \mu^+(b)\} \leq \beta$$

$x' \in \tilde{B}^+_\beta$.

Terbukti $\tilde{B}_\beta^+$ merupakan h-ideal.

Akan dibuktikan $\tilde{B}_\alpha^-$ adalah h-ideal.

i. Ambil $x, y \in \tilde{B}_\alpha^-$ sehingga $\mu^-(x) \geq \alpha$ dan $\mu^-(y) \geq \alpha$ dengan , $\alpha \in [0,1]$.

$$\mu^-(x+y) \geq \min\{\mu^-(x), \mu^-(y)\} \geq \min\{\alpha, \alpha\} = \alpha$$

$x + y \in \tilde{B}_\alpha^-$.

ii. Ambil $x \in \tilde{B}_\alpha^-$ dan $r \in S$.

$$\mu^-(rx) \geq \mu^-(x) \geq \alpha$$

$rx \in \tilde{B}_\alpha^-$.

iii. Ambil $x, y \in \tilde{B}_\alpha^-$ dan $r \in S$.

$$\mu^-(rx) \geq \mu^-(y) \geq \alpha$$

$rx \in \tilde{B}_\alpha^-$.

iv. Ambil $x', z' \in S$ dan $a, b \in \tilde{B}_\alpha^-$.

$$x' + a + z' = b + z' \Rightarrow \mu^-(x') \geq \min\{\mu^-(a), \mu^-(b)\} \geq \alpha$$

$x' \in \tilde{B}_\alpha^-$.

Terbukti $\tilde{B}_\alpha^-$ merupakan h-ideal.

($\Leftarrow$) Asumsikan (i) dan (ii) dipenuhi. Ambil $x \in R$, jika $\mu^+(x) = \beta, \mu^-(x) = \alpha$, $x \in \tilde{B}_\beta^+ \cap \tilde{B}_\alpha^-$, maka $\tilde{B}_\beta^+$ dan $\tilde{B}_\alpha^-$ tak kosong.

Andaikan $B \overline{\in}$ h-ideal kiri BAF (h-ideal kanan BAF) untuk setiap $x, z, a, b \in S$, sehingga $x + a + z = b + z$.

$\mu^+(x) > \beta > \max\{\mu^+(a), \mu^+(b)\}$ dan $\mu^-(x) < \alpha < \min\{\mu^-(a), \mu^-(b)\}$ maka $a, b \in \tilde{B}_\beta^+$ tetapi $x \notin \tilde{B}_\beta^+$ dan $a, b \in \tilde{B}_\alpha^-$ tetapi $x \notin \tilde{B}_\alpha^-$.

Hal ini kontradiksi dengan $B \overline{\in}$ h-ideal kiri BAF (h-ideal kanan BAF). Sehingga pernyataan yang benar $B \in h$-ideal kiri BAF (h-ideal kanan BAF).

Akibat 2.8.3

Misalkan $B = (\mu^+, \mu^-)$ adalah himpunan *bipolar fuzzy* pada suatu hemiring S. Jika $B = (\mu^+, \mu^-) \in h$-ideal kiri BAF (h-ideal kanan BAF), maka untuk setiap $\gamma \in [0,1]$ anti γ-cut pada B adalah h-ideal kiri (h-ideal kanan) pada S.

Akibat 2.8.4

Misalkan S adalah suatu hemiring. Jika $B = (\mu^+, \mu^-) \in h$-ideal kiri BAF (h-ideal kanan BAF), maka $\tilde{B}_{(\alpha,\beta)}$ adalah h-ideal kiri (h-ideal kanan) pada S, untuk setiap $(\alpha, \beta) \in [-1,0] \times [0,1]$. Khususnya, γ-cut pada B adalah h-ideal kiri (h-ideal kanan) pada S, untuk setiap $\gamma \in [0,1]$.

Akibat 2.8.5

Misalkan S adalah suatu hemiring. Jika $B = (\mu^+, \mu^-) \in h$-ideal kiri BAF (h-ideal kanan BAF) dan $\mu^+(z) + \mu^-(z) \leq 0$ untuk setiap $z \in S$, maka $\tilde{B}^+_\gamma \cup \tilde{B}^-_{-\gamma}$ adalah h-ideal kiri (h-ideal kanan) pada S untuk setiap $\gamma \in [0,1]$.

2.9 Anti Image dan Anti Pre-image h-ideal BAF pada Hemiring

Pada subbab ini akan dibahas tentang anti image dan anti pre-image h-ideal BAF pada hemiring. Definisi dan teorema yang berkaitan dikutip dari jurnal Hayat dkk., 2017 yang berjudul *On Bipolar Anti Fuzzy h-ideals in Hemi-rings*.

Definisi 2.9.1 (Anti image dan Anti Pre-image)

Misalkan $\psi: S_1 \to S_2$ adalah pemetaan pada hemiring. Jika $B = (\mu^+, \mu^-)$ dan $V = (v^+, v^-)$ berturut-turut adalah himpunan *bipolar fuzzy* pada S_1 dan S_2. Anti image pada B dibawah ψ adalah himpunan *bipolar fuzzy* $\psi_a(B) = (\psi_a(\mu^+), \psi_a(\mu^-))$ pada S_2, didefinisikan dengan

$$\psi_a(\mu^+)(x) = \begin{cases} \bigwedge_{y \in \psi^{-1}(x)} \mu^+(y), & \psi^{-1}(x) \neq \emptyset \\ 1, & lainnya \end{cases}$$

$$\psi_a(\mu^-)(x) = \begin{cases} \bigvee_{y \in \psi^{-1}(x)} \mu^-(y), & \psi^{-1}(x) \neq \emptyset \\ -1, & lainnya \end{cases}$$

untuk setiap $x \in S_2$, $\psi^{-1}(x) = \{z \in S_1 | \psi(z) = x\}$. Anti pre-image $\psi^{-1}(V)$ pada V dibawah ψ adalah himpunan *bipolar fuzzy* pada S_1 yang didefinisikan sebagai $\psi^{-1}\big((v^+)(y)\big) = v^+\big(\psi(y)\big), \psi^{-1}\big((v^-)(y)\big) = v^-\big(\psi(y)\big)$ untuk setiap $y \in S_1$.

Teorema 2.9.2

Misalkan $\psi: S_1 \to S_2$ adalah homomorfisma pada hemiring. Jika $B = (\mu^+, \mu^-)$ dan $V = (v^+, v^-)$ berturut-turut adalah himpunan *bipolar fuzzy* pada S_1 dan S_2, maka

i. $[\psi^{-1}(V)]^c = \psi^{-1}(V^c)$

ii. $[\psi_a(B)]^c = \psi_a(B^c)$

Teorema 2.9.3

Jika $\psi: S_1 \to S_2$ adalah homomorfisma pada hemiring dan $V = (v^+, v^-) \in h$-ideal kiri BAF (h-ideal kanan BAF) pada hemiring S_2, maka anti pre-image $\psi^{-1}(V) = (\psi^{-1}(v^+), \psi^{-1}(v^-)) \in h$-ideal kiri BAF ($h$-ideal kanan BAF) pada hemiring S_1.

Teorema 2.9.4

Misalkan $\psi: S_1 \to S_2$ adalah anti homomorfisma pada hemiring. Jika $V = (v^+, v^-) \in h$-ideal kanan BAF (h-ideal kiri BAF) pada hemiring S_2, maka anti pre-image $\psi^{-1}(V) = (\psi^{-1}(v^+), \psi^{-1}(v^-)) \in h$-ideal kiri BAF ($h$-ideal kanan BAF) pada hemiring S_1.

Teorema 2.9.5

Misalkan $\psi: S_1 \to S_2$ adalah anti epimorfisma pada hemiring. Jika $A = (\mu^+, \mu^-) \in h$-ideal BAF pada hemiring S_1, maka anti image pada A didefinisikan sebagai $\psi_a(A) = (\psi_a(\mu^+), \psi_a(\mu^-)) \in h$-ideal BAF pada hemiring S_2.

2.10 Translasi, Perluasan, dan Pergandaan *Bipolar Fuzzy* pada h-ideal BAF

Pada subbab ini akan dibahas definisi, teorema, dan contoh yang berkaitan dengan translasi (*translations*), perluasan (*extensions*), dan pergandaan (*multiplication*) *bipolar fuzzy* pada h-ideal BAF yang dikutip dari jurnal Hayat dkk., 2017 yang berjudul *On Bipolar Anti Fuzzy h-ideals in Hemi-rings*.. Untuk setiap himpunan *bipolar fuzzy* $B = (\lambda^+, \lambda^-)$ pada hemiring S, misalkan $u = 1 - \sup\{\lambda^+(x) | x \in S\}$ dan $i = -1 - \inf\{\lambda^-(x) | x \in S\}$.

Definisi 2.10.1 (Translasi *Bipolar Fuzzy*)

Misalkan $B = (\lambda^+, \lambda^-)$ adalah himpunan *bipolar fuzzy* pada hemiring S dan $(\gamma, \delta) \in [0, u] \times [i, 0]$. Himpunan *bipolar fuzzy* $B^T_{(\gamma,\delta)} = \left(\lambda^+_{(\gamma,T)}, \lambda^-_{(\delta,T)}\right)$ disebut (γ, δ)-translasi *bipolar fuzzy* pada B dengan

$$\lambda^+_{(\gamma,T)}: S \to [0,1], x \to \lambda^+(x) + \gamma \text{ dan } \lambda^-_{(\delta,T)}: S \to [-1,0], x \to \lambda^-(x) + \delta.$$

Teorema 2.10.2

Jika $B = (\lambda^+, \lambda^-)$ adalah h-ideal BAF pada hemiring S, maka (γ, δ)-translasi *bipolar fuzzy* pada B adalah h-ideal BAF pada S untuk setiap $(\gamma, \delta) \in [0, u] \times [i, 0]$.

Teorema 2.10.3

Misalkan $B = (\lambda^+, \lambda^-)$ adalah himpunan *bipolar fuzzy* pada S. Jika (γ, δ)-translasi *bipolar fuzzy* $B^T_{(\gamma,\delta)} = \left(\lambda^+_{(\gamma,T)}, \lambda^-_{(\delta,T)}\right)$ pada B adalah h-ideal BAF pada S untuk setiap $(\gamma, \delta) \in [0, u] \times [i, 0]$, maka $B = (\lambda^+, \lambda^-)$ adalah h-ideal BAF pada S.

Definisi 2.10.4 (Perluasan *Bipolar Fuzzy*)

Misalkan $B_1 = (\lambda^+, \lambda^-)$ dan $B_2 = (\mu^+, \mu^-)$ adalah himpunan *bipolar fuzzy* pada hemiring S. Jika $\lambda^+(x) \leq \mu^+(x)$ dan $\lambda^-(x) \geq \mu^-(x)$ untuk setiap $x \in S$, maka B_2 adalah perluasan *bipolar fuzzy* pada B_1.

Definisi 2.10.5 (Perluasan h-ideal *Bipolar Anti Fuzzy*)

Misalkan $B_1 = (\lambda^+, \lambda^-)$ dan $B_2 = (\mu^+, \mu^-)$ adalah himpunan *bipolar fuzzy* pada hemiring S. B_2 disebut perluasan h-ideal BAF pada B_1 jika aksioma berikut dipenuhi.

i. B_2 disebut perluasan *bipolar fuzzy* pada B_1,

ii. Jika B_2 adalah perluasan h-ideal BAF pada S, maka B_1 juga disebut dengan perluasan h-ideal BAF pada S.

Berdasarkan definisi $\lambda^+_{(\gamma,T)} \geq \lambda^+(x)$ dan $\lambda^-_{(\delta,T)} \leq \lambda^-(x)$ untuk setiap $x \in S$, diperoleh beberapa teorema sebagai berikut.

Teorema 2.10.6

Jika $B = (\lambda^+, \lambda^-)$ adalah h-ideal BAF pada hemiring S, maka (γ, δ)-translasi *bipolar fuzzy* $B^T_{(\gamma,\delta)} = \left(\lambda^+_{(\gamma,T)}, \lambda^-_{(\delta,T)}\right)$ pada B adalah perluasan h-ideal BAF pada S untuk setiap $(\gamma, \delta) \in [0, u] \times [i, 0]$.

Definisi 2.10.7

Misalkan $B = (\mu^+, \mu^-)$ adalah himpunan *bipolar fuzzy* pada hemiring S, $(\alpha, \beta) \in [-1,0] \times [0,1], \gamma \in [0, u], \delta \in [i, 0]$. Didefinisikan

$\tilde{B}^{+T}_{(\beta,\gamma)} = \{x \in S | \mu^+(x) \leq \beta - \gamma\}$, $\tilde{B}^{-T}_{(\alpha,\delta)} = \{x \in S | \mu^-(x) \geq \alpha - \delta\}$, dan

$\tilde{B}^T_{((\alpha,\beta),(\gamma,\delta))} = \{x \in S | \mu^-(x) \geq \alpha - \gamma \ dan \ \mu^+(x) \leq \beta - \delta\}$.

Teorema 2.10.8

Jika $B = (\mu^+, \mu^-)$ adalah h-ideal BAF pada hemiring S, maka $\tilde{B}^{+T}_{(\beta,\gamma)}$ dan $\tilde{B}^{-T}_{(\alpha,\delta)}$ adalah h-ideal pada S untuk setiap $\alpha \in Im(\mu^-)$ dan $\beta \in Im(\mu^+)$ dengan $\beta \leq \gamma$ dan $\alpha \geq \delta$.

Akibat 2.10.9

Jika $B = (\mu^+, \mu^-)$ adalah h-ideal BAF pada hemiring S, maka $\tilde{B}^T_{((\alpha,\beta),(\gamma,\delta))}$ adalah h-ideal pada S untuk setiap $(\alpha, \beta) \in [-1,0] \times [0,1]$ dan $(\gamma, \delta) \in [0, u] \times [i, 0]$.

Teorema 2.10.10

Misalkan $B = (\mu^+, \mu^-)$ adalah himpunan *bipolar fuzzy* pada hemiring S. (γ, δ)-translasi *bipolar fuzzy* pada B adalah h-ideal BAF pada S jika dan hanya jika $\tilde{B}^{+T}_{(\beta,\gamma)}$ dan $\tilde{B}^{-T}_{(\alpha,\delta)}$ adalah h-ideal pada S untuk setiap $\alpha \in Im(\mu^-), \beta \in Im(\mu^+)$, dan $(\gamma, \delta) \in [0, u] \times [i, 0]$ dengan $\alpha < \delta$ dan $\beta > \gamma$.

Akibat 2.10.11

Misalkan $B = (\mu^+, \mu^-)$ adalah himpunan *bipolar fuzzy* pada hemiring S. (γ, δ)-translasi *bipolar fuzzy* pada B adalah h-ideal BAF pada S jika dan hanya jika $\tilde{B}^T_{((\alpha,\beta),(\gamma,\delta))}$ adalah h-ideal pada S untuk setiap $\alpha \in Im(\mu^-), \beta \in Im(\mu^+)$, dan $(\gamma, \delta) \in [0, u] \times [i, 0]$ dengan $\alpha < \delta$ dan $\beta > \gamma$.

Teorema 2.10.12

Misalkan $B = (\mu^+, \mu^-)$ adalah h-ideal BAF pada hemiring S, $(\gamma, \delta) \in [0, u] \times [i, 0]$ dan $(\gamma', \delta') \in [0, u] \times [i, 0]$. Jika $(\gamma, \delta) \geq (\gamma', \delta')$, maka (γ, δ)-translasi *bipolar fuzzy* $B^T_{(\gamma,\delta)}$ pada B adalah perluasan h-ideal BAF pada (γ', δ')- translasi $B^T_{(\gamma',\delta')}$ pada B.

Teorema 2.10.13

Misalkan $B = (\mu^+, \mu^-)$ adalah h-ideal BAF pada hemiring S dan $(\gamma, \delta) \in [0, u] \times [i, 0]$. Untuk setiap perluasan h-ideal BAF $B' = (v^+, v^-)$ pada (γ, δ)-translasi *bipolar fuzzy* $B^T_{(\gamma,\delta)}$, terdapat $(\gamma', \delta') \in [0, u] \times [i, 0]$ sedemikian sehingga $(\gamma, \delta) \leq (\gamma', \delta')$ dan B' adalah perluasan h-ideal BAF pada (γ', δ')-translasi *bipolar fuzzy* $B^T_{(\gamma',\delta')}$.

Definisi 2.10.14 (Pergandaan *Bipolar Fuzzy*)

Misalkan $B = (\lambda^+, \lambda^-)$ adalah himpunan *bipolar fuzzy* pada S dan $\rho, \sigma \in [0,1]$. Himpunan *bipolar fuzzy* $B^m_{(\rho,\sigma)} = (\lambda^{+m}_\rho, \lambda^{-m}_\sigma)$ disebut (ρ, σ)- pergandaan *bipolar fuzzy* pada B dengan

$$\lambda^{+m}_\rho : S \to [0,1], x \to \lambda^+(x)\rho$$

$$\lambda_{\sigma}^{-m}: S \to [-1,0], x \to \lambda^{-}(x)\sigma.$$

Untuk setiap h-ideal BAF B, $(0,0)$- pergandaan *bipolar fuzzy* $B_{(0,0)}^{m}$ adalah h-ideal BAF pada S.

Teorema 2.10.15

Jika $B = (\lambda^{+}, \lambda^{-})$ adalah h-ideal BAF pada S, maka (ρ, σ)- pergandaan *bipolar fuzzy* $B_{(\rho,\sigma)}^{m}$ pada B adalah h-ideal BAF pada S.

Teorema 2.10.16

Misalkan $B = (\lambda^{+}, \lambda^{-})$ adalah himpunan *bipolar fuzzy* pada hemiring S. (ρ, σ)-pergandaan *bipolar fuzzy* $B_{(\rho,\sigma)}^{m}$ pada B adalah h-ideal BAF pada S jika dan hanya jika B adalah h-ideal BAF pada S untuk setiap $\rho, \sigma \in [0,1]$.

Teorema 2.10.17

Jika $B = (\lambda^{+}, \lambda^{-})$ adalah himpunan *bipolar fuzzy* pada hemiring S, $(\gamma, \delta) \in [0, u] \times [i, 0]$ dan $\rho, \sigma \in [0,1]$, maka setiap (γ, δ)-translasi *bipolar fuzzy* $B_{(\gamma,\delta)}^{T}$ pada B adalah perluasan h-ideal BAF pada (ρ, σ)- pergandaan $B_{(\rho,\sigma)}^{m}$ pada B.

2.11 Himpunan *Fuzzy* pada *K*-aljabar

Pada subbab ini akan diberikan definisi dan contoh yang berkaitan dengan himpunan *fuzzy* pada K-aljabar. Definisi 2.11.1 dan 2.11.2 dikutip dari artikel Dar dan Akram tahun 2007 yang berjudul *Fuzzy Ideals of K-algebras.* Definisi 2.11.3 dikutip dari artikel Akram tahun 2008 yang berjudul *Bifuzzy Ideals of K-algebras.* Definisi 2.11.4 dikutip dari artikel Akram dkk., tahun 2010 yang berjudul *Bipolar Fuzzy K-algebras.*

Definisi 2.11.1 (*Fuzzy* Subaljabar)

Misalkan $\mathcal{K} = (G, *, \odot, e)$ adalah suatu K-aljabar. Himpunan *fuzzy* $A = \{ (x, \mu_A(x)) | x \in G\}$ pada K-aljabar $\mathcal{K}$ disebut *fuzzy* subaljabar pada K-aljabar $\mathcal{K}$ jika untuk setiap $x, y \in G$ berlaku

$$\mu(x \odot y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$$

dan setiap *fuzzy* subaljabar berlaku $\mu(e) \geq \mu(x)$ untuk setiap $x \in G$.

Definisi 2.11.2 (Ideal *Fuzzy* pada *K*-aljabar)

Misalkan $\mathcal{K} = (G,*,\odot,e)$ adalah K-aljabar. Suatu himpunan *fuzzy* A pada $\mathcal{K}$ disebut ideal *fuzzy* pada $\mathcal{K}$ jika memenuhi:

i. $\mu_A(e) \geq \mu_A(x)$, untuk setiap $x \in G$ dan

ii. $\mu_A(x) \geq \min\{\mu_A(x \odot y), \mu_A(y \odot (y \odot x))\}$, untuk setiap $x, y \in G$.

Definisi 2.11.3 (Ideal *Bifuzzy* pada *K*-aljabar)

Misalkan $\mathcal{K} = (G,*,\odot,e)$ adalah suatu K-aljabar. Himpunan *bifuzzy* $A = \{(\mu_A(x), \lambda_A(x)) | x \in G\}$ disebut ideal *bifuzzy* pada $\mathcal{K}$ jika memenuhi aksioma berikut.

i. $(\forall x \in G)\ (\mu_A(e) \geq \mu_A(x),\ \lambda_A(e) \leq\ \lambda_A(x))$,

ii. $(\forall x, y \in G)\ (\mu_A(x) \geq \min\{\mu_A(x \odot y),\ \mu_A(y \odot (y \odot x))\})$,

iii. $(\forall x, y \in G)\ (\ \lambda_A(x) \leq \max\{\ \lambda_A(x \odot y),\ \ \lambda_A(y \odot (y \odot x))\})$.

Definisi 2.11.4 (*Bipolar Fuzzy* Subaljabar)

Misalkan $\mathcal{K} = (G,*,\odot,e)$ adalah K-aljabar. Himpunan *bipolar fuzzy* $B = (\mu^+, \mu^-)$ pada $\mathcal{K}$ disebut *bipolar fuzzy* subaljabar jika untuk setiap $x, y \in G$ memenuhi aksioma berikut

i. $\mu^+(x \odot y) \geq \min\{\mu^+(x), \mu^+(y)\}$,

ii. $\mu^-(x \odot y) \leq \max\{\mu^+(x), \mu^+(y)\}$.

Contoh 2.11.5 Berdasarkan Contoh 2.4.3, diketahui $G = \{e, a, b, x, y, z\}$ dan $\mathcal{K} = (G,\circ,\odot,e)$ adalah suatu K-aljabar. Jika $B = (\mu^+, \mu^-)$ adalah himpunan *bipolar fuzzy* pada $\mathcal{K}$ yang didefinisikan dengan $\mu^+(e) = 0.8, \mu^+(t) = 0.06$ untuk setiap $t \neq e$ dan $\mu^-(e) = -0.7, \mu^-(t) = -0.14$ untuk setiap $t \neq e$, maka buktikan bahwa B adalah *bipolar fuzzy* subaljabar.

Bukti:

i. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in G$ berlaku

$\mu^+(x \odot y) \geq \min\{\mu^+(x), \mu^+(y)\}$.

Tabel 2.7 ***Bipolar Fuzzy*** **pada** K**-aljabar** $\mathcal{K}$

x	y	$x \odot y$	$\mu^+(x \odot y)$	$\mu^+(x)$	$\mu^+(y)$	$\min\{\mu^+(x), \mu^+(y)\}$
e	e	e	0.8	0.8	0.8	0.8
	a	a	0.06	0.8	0.06	0.06
	b	b	0.06	0.8	0.06	0.06
	x	x	0.06	0.8	0.06	0.06
	y	y	0.06	0.8	0.06	0.06
	z	z	0.06	0.8	0.06	0.06
a	e	a	0.06	0.06	0.8	0.06
	a	e	0.8	0.06	0.06	0.06
	b	b	0.06	0.06	0.06	0.06
	x	z	0.06	0.06	0.06	0.06
	y	x	0.06	0.06	0.06	0.06
	z	y	0.06	0.06	0.06	0.06
b	e	b	0.06	0.06	0.8	0.06
	a	a	0.06	0.06	0.06	0.06
	b	e	0.8	0.06	0.06	0.06
	x	y	0.06	0.06	0.06	0.06
	y	z	0.06	0.06	0.06	0.06
	z	x	0.06	0.06	0.06	0.06
x	e	x	0.06	0.06	0.8	0.06
	a	z	0.06	0.06	0.06	0.06
	b	y	0.06	0.06	0.06	0.06
	x	e	0.8	0.06	0.06	0.06
	y	a	0.06	0.06	0.06	0.06
	z	b	0.06	0.06	0.06	0.06
y	e	y	0.06	0.06	0.8	0.06
	a	x	0.06	0.06	0.06	0.06
	b	z	0.06	0.06	0.06	0.06
	x	b	0.06	0.06	0.06	0.06
	y	e	0.8	0.06	0.06	0.06
	z	a	0.06	0.06	0.06	0.06
z	e	z	0.06	0.06	0.8	0.06
	a	y	0.06	0.06	0.06	0.06
	b	x	0.06	0.06	0.06	0.06
	x	a	0.06	0.06	0.06	0.06
	y	b	0.06	0.06	0.06	0.06
	z	e	0.8	0.06	0.06	0.06

Berdasarkan Tabel 2.7, terlihat jelas bahwa untuk setiap $x, y \in G$ berlaku

$\mu^+(x \odot y) \geq \min\{\mu^+(x), \mu^+(y)\}$.

ii. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in G$ berlaku

$\mu^{-}(x \odot y) \leq \max\{\mu^{+}(x), \mu^{+}(y)\}$.

Tabel 2.8 *Bipolar Fuzzy* pada K-aljabar $\mathcal{K}$

x	y	$x \odot y$	$\mu^{-}(x \odot y)$	$\mu^{-}(x)$	$\mu^{-}(y)$	$\max\{\mu^{-}(x), \mu^{-}(y)\}$
e	e	e	-0.7	-0.7	-0.7	-0.7
	a	a	-0.14	-0.7	-0.14	-0.14
	b	b	-0.14	-0.7	-0.14	-0.14
	x	x	-0.14	-0.7	-0.14	-0.14
	y	y	-0.14	-0.7	-0.14	-0.14
	z	z	-0.14	-0.7	-0.14	-0.14
a	e	a	-0.14	-0.14	-0.7	-0.14
	a	e	-0.7	-0.14	-0.14	-0.14
	b	b	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
	x	z	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
	y	x	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
	z	y	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
b	e	b	-0.14	-0.14	-0.7	-0.14
	a	a	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
	b	e	-0.7	-0.14	-0.14	-0.14
	x	y	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
	y	z	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
	z	x	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
x	e	x	-0.14	-0.14	-0.7	-0.14
	a	z	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
	b	y	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
	x	e	-0.7	-0.14	-0.14	-0.14
	y	a	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
	z	b	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
y	e	y	-0.14	-0.14	-0.7	-0.14
	a	x	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
	b	z	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
	x	b	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
	y	e	-0.7	-0.14	-0.14	-0.14
	z	a	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
z	e	z	-0.14	-0.14	-0.7	-0.14
	a	y	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
	b	x	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
	x	a	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
	y	b	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
	z	e	-0.7	-0.14	-0.14	-0.14

Berdasarkan Tabel 2.7, terlihat jelas bahwa untuk setiap $x, y \in G$ berlaku

$\mu^{-}(x \odot y) \leq \max\{\mu^{-}(x), \mu^{-}(y)\}$.

Karena memenuhi aksioma (i) dan (ii) maka terbukti bahwa B adalah *bipolar fuzzy* subaljabar.

2.12 Translasi *Bipolar Fuzzy* pada BCK/BCI-aljabar

Pada subbab ini akan diberikan definisi yang berkaitan dengan translasi *bipolar fuzzy* pada *BCK/BCI*-aljabar. Definisi dikutip dari artikel berjudul *Bipolar Fuzzy Translations in BCK/BCI-algebras* yang ditulis oleh Jun dkk., tahun 2009.

Untuk setiap himpunan *bipolar fuzzy* $B = (\mu^+, \mu^-)$ pada *BCK/BCI*-aljabar X,

$$u = 1 - \sup\{\mu^+(x) | x \in X\} \text{ dan } i = -1 - \inf\{\mu^-(x) | x \in X\}.$$

Definisi 2.12.1 (*Bipolar Fuzzy* Subaljabar)

Misalkan X adalah *BCK/BCI*-aljabar. Himpunan *bipolar fuzzy* $B = (\mu^+, \mu^-)$ pada X disebut *bipolar fuzzy* subaljabar jika untuk setiap $x, y \in X$ memenuhi aksioma berikut

$$\mu^+(x * y) \geq \min\{\mu^+(x), \mu^+(y)\},$$

$$\mu^-(x * y) \leq \max\{\mu^+(x), \mu^+(y)\}.$$

Definisi 2.12.2 (Translasi *Bipolar Fuzzy*)

Misalkan $B = (\mu^+, \mu^-)$ adalah suatu himpunan *bipolar fuzzy* pada *BCK/BCI*-aljabar X dan $(\alpha, \beta) \in [0, u] \times [i, 0]$. $(\alpha, \beta) - t$ranslasi *bipolar fuzzy* pada B yang dinotasikan dengan $B^T_{(\alpha,\beta)} = (\mu^+_{(\alpha,T)}, \mu^-_{(\beta,T)})$ didefinisikan dengan

$$\mu^+_{(\alpha,T)}: X \to [0,1], x \mapsto \mu^+(x) + \alpha,$$

$$\mu^-_{(\beta,T)}: X \to [-1,0], x \mapsto \mu^-(x) + \beta.$$

Definisi 2.12.3 (Perluasan *Bipolar Fuzzy*)

Misalkan $B = (\mu^+, \mu^-)$ dan $V = (v^+, v^-)$ adalah himpunan *bipolar fuzzy* pada *BCK/BCI*-aljabar X. Jika $\mu^+(x) \leq v^+(x)$ dan $\mu^-(x) \geq v^-(x)$ untuk setiap $x \in X$, maka V disebut dengan perluasan *bipolar fuzzy* pada B.

Definisi 2.12.4 (Sub-perluasan *Bipolar Fuzzy*)

Misalkan $B = (\mu^+, \mu^-)$ dan $V = (v^+, v^-)$ adalah himpunan *bipolar fuzzy* pada *BCK/BCI*-aljabar X. V disebut Sub-perluasan *bipolar fuzzy* pada B jika memenuhi aksioma berikut

i. V perluasan *bipolar fuzzy* pada B,

ii. Jika $V = (\nu^{+}, \nu^{-})$ *bipolar fuzzy* subaljabar pada X, maka $B = (\mu^{+}, \mu^{-})$ merupakan *bipolar fuzzy* subaljabar pada X.

BAB III

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibangun struktur baru Ideal *Bipolar Anti Fuzzy* (BAF) pada K-aljabar berdasarkan teori-teori yang telah dibahas pada bab sebelumnya. Kemudian akan dibahas sifat-sifat dari Ideal *Bipolar Anti Fuzzy* pada K-aljabar, karakterisasi ideal *Bipolar Anti Fuzzy* pada K-aljabar, anti image dan anti pre-image pada ideal *Bipolar Anti Fuzzy* pada K-aljabar. Kemudian akan dibahas juga translasi, perluasan, dan pergandaan *Bipolar Fuzzy* pada ideal *Bipolar Anti Fuzzy* pada K-aljabar.

3.1 Ideal *Bipolar Anti Fuzzy* pada K-aljabar

Sebelum membahas tentang struktur baru pada ideal *bipolar anti fuzzy* pada K-aljabar, terlebih dahulu akan dibahas mengenai ideal *bipolar fuzzy* pada K-aljabar. Kemudian akan dibahas teorema beserta bukti dan contoh yang berkaitan dengan ideal *bipolar anti fuzzy* pada K-aljabar.

Definisi 3.1.1

Jika $B = (\lambda^+, \lambda^-)$ adalah himpunan *bipolar fuzzy* pada K-aljabar $\mathcal{K}$ dan $t' = (t^+, t^-) \in (0,1] \times [-1,0)$, maka

i. $B(x) \geq t' \Leftrightarrow (\lambda^+(x), \lambda^-(x)) \geq (t^+, t^-) \Leftrightarrow \lambda^+(x) \geq t^+$ dan $\lambda^-(x) \leq t^-$,

ii. $B(x) \leq t' \Leftrightarrow (\lambda^+(x), \lambda^-(x)) \leq (t^+, t^-) \Leftrightarrow \lambda^+(x) \leq t^+$ dan $\lambda^-(x) \geq t^-$.

Definisi 3.1.2

Misalkan $B = (\lambda^+, \lambda^-)$ adalah himpunan *bipolar fuzzy* pada K-aljabar $\mathcal{K}$ yang berbentuk

$$\lambda^+(z) = \begin{cases} t^+, & z = x \\ 0, & z \neq x \end{cases},$$

$$\lambda^-(z) = \begin{cases} t^-, & z = x \\ 0, & z \neq x \end{cases}.$$

B disebut *bipolar value fuzzy point* dengan nilai $t' = (t^+, t^-) \in (0,1] \times [-1,0)$ dan *support* x. Hal ini ditulis $x_{t'} = (x_t^+, x_t^-)$. $x_{t'}$ disebut berada pada B, ditulis dengan $x_{t'} \in B$ jika $B(x) \geq t'$ yang berarti $\lambda^+(x) \geq t^+, \lambda^-(x) \leq t^-$. $x_{t'}$ disebut tidak berada pada B, ditulis dengan $x_{t'} \notin B$ jika $B(x) \leq t'$ yang berarti $\lambda^+(x) \leq t^+, \lambda^-(x) \geq t^-$.

Definisi 3.1.3

Misalkan $\mathcal{K}$ adalah suatu K-aljabar. Jika $B_1 = (\lambda^+, \lambda^-)$, $B_2 = (\mu^+, \mu^-)$ adalah himpunan *bipolar fuzzy* pada $\mathcal{K}$, maka

$$\max\{B_1, B_2\} = (\max\{\lambda^+, \mu^+\}, \min\{\lambda^-, \mu^-\}),$$

$$\min\{B_1, B_2\} = (\min\{\lambda^+, \mu^+\}, \max\{\lambda^-, \mu^-\}).$$

Contoh 3.1.4

Jika $B_1 = (0.3, -0.12)$, $B_2 = (0.4, -0.01)$ adalah himpunan *bipolar fuzzy* pada $\mathcal{K} = (G, \circ, \odot, e)$, maka

$$\max\{B_1, B_2\} = (\max\{0.3, 0.4\}, \min\{-0.12, -0.01\}) = (0.4, -0.12),$$

$$\min\{B_1, B_2\} = (\min\{0.3, 0.4\}, \max\{-0.12, -0.01\}) = (0.3, -0.01).$$

Definisi 3.1.5 (Ideal *Bipolar Fuzzy* pada *K*-aljabar)

Misalkan $\mathcal{K} = (G, *, \odot, e)$ adalah suatu K-aljabar. Himpunan $B = (\lambda^+, \lambda^-)$ disebut ideal *bipolar fuzzy* pada $\mathcal{K}$ jika aksioma berikut dipenuhi,

i. $\lambda^+(e) \geq \lambda^+(x)$ dan $\lambda^-(e) \leq \lambda^-(x)$,

ii. $\lambda^+(x) \geq \min\{\lambda^+(x \odot y), \lambda^+(y \odot (y \odot x))\}$ dan
$\lambda^-(x) \leq \max\{\lambda^-(x \odot y), \lambda^-\big(y \odot (y \odot x)\big)\}$.

Contoh 3.1.6 Berdasarkan Contoh 2.11.5 diketahui $\mathcal{K} = (G,\circ,\odot,e)$ dengan $G = \{e,a,b,x,y,z\}$ adalah suatu K-aljabar dan $B = (\mu^+,\mu^-)$ adalah himpunan *bipolar fuzzy* pada $\mathcal{K}$ yang didefinisikan dengan $\mu^+(e) = 0.8, \mu^+(t) = 0.06$ untuk setiap $t \neq e$ dan $\mu^-(e) = -0.7, \mu^-(t) = -0.14$ untuk setiap $t \neq e$. Buktikan bahwa B adalah ideal *bipolar fuzzy* pada K-aljabar $\mathcal{K}$.

Bukti:

i. Jelas bahwa untuk setiap $t \in G$ berlaku $\mu^+(e) \geq \mu^+(x)$ dan $\mu^-(e) \leq \mu^-(x)$.

ii. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in G$ berlaku

$$\mu^+(x) \geq \min\{\mu^+(x \odot y), \mu^+(y \odot (y \odot x))\}.$$

Tabel 3.1 Ideal *Bipolar Fuzzy* pada $\mathcal{K}$

x	y	$x \odot y$	$y \odot (y \odot x)$	$\mu^+(x)$	$\mu^+(x \odot y)$	$\mu^+(y \odot (y \odot x))$	$\min\{\mu^+(x \odot y), \mu^+(y \odot (y \odot x))\}$
e	e	e	e	0.8	0.8	0.8	0.8
	a	a	e	0.8	0.06	0.8	0.06
	b	b	e	0.8	0.06	0.8	0.06
	x	x	e	0.8	0.06	0.8	0.06
	y	y	e	0.8	0.06	0.8	0.06
	z	z	e	0.8	0.06	0.8	0.06
a	e	a	a	0.06	0.06	0.06	0.06
	a	e	a	0.06	0.8	0.06	0.06
	b	b	a	0.06	0.06	0.06	0.06
	x	z	b	0.06	0.06	0.06	0.06
	y	x	b	0.06	0.06	0.06	0.06
	z	y	b	0.06	0.06	0.06	0.06
b	e	b	b	0.06	0.06	0.06	0.06
	a	a	b	0.06	0.06	0.06	0.06
	b	e	b	0.06	0.8	0.06	0.06
	x	y	a	0.06	0.06	0.06	0.06
	y	z	a	0.06	0.06	0.06	0.06
	z	x	a	0.06	0.06	0.06	0.06
x	e	x	x	0.06	0.06	0.06	0.06
	a	z	y	0.06	0.06	0.06	0.06
	b	y	z	0.06	0.06	0.06	0.06
	x	e	x	0.06	0.8	0.06	0.06
	y	a	z	0.06	0.06	0.06	0.06
	z	b	y	0.06	0.06	0.06	0.06
y	e	y	y	0.06	0.06	0.06	0.06
	a	x	z	0.06	0.06	0.06	0.06
	b	z	x	0.06	0.06	0.06	0.06
	x	b	z	0.06	0.06	0.06	0.06
	y	e	y	0.06	0.8	0.06	0.06
	z	a	x	0.06	0.06	0.06	0.06
z	e	z	z	0.06	0.06	0.06	0.06
	a	y	x	0.06	0.06	0.06	0.06
	b	x	y	0.06	0.06	0.06	0.06
	x	a	y	0.06	0.06	0.06	0.06
	y	b	x	0.06	0.06	0.06	0.06
	z	e	z	0.06	0.8	0.06	0.06

Berdasarkan Tabel 3.1, terlihat jelas bahwa untuk setiap $x, y \in G$ berlaku

$$\mu^+(x) \geq \min\{\mu^+(x \odot y), \mu^+(y \odot (y \odot x))\}.$$

Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in G$ berlaku

$$\mu^-(x) \leq \max\{\mu^-(x \odot y), \mu^-(y \odot (y \odot x))\}.$$

Tabel 3.2 Ideal *Bipolar Fuzzy* pada $\mathcal{K}$

x	y	$x \odot y$	$y \odot (y \odot x)$	$\mu^{-}(x)$	$\mu^{-}(x \odot y)$	$\mu^{-}(y \odot (y \odot x))$	$\max\{\mu^{-}(x \odot y), \mu^{-}(y \odot (y \odot x))\}$
e	e	e	e	-0.7	-0.7	-0.7	-0.7
	a	a	e	-0.7	-0.14	-0.7	-0.14
	b	b	e	-0.7	-0.14	-0.7	-0.14
	x	x	e	-0.7	-0.14	-0.7	-0.14
	y	y	e	-0.7	-0.14	-0.7	-0.14
	z	z	e	-0.7	-0.14	-0.7	-0.14
a	e	a	a	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
	a	e	a	-0.14	-0.7	-0.14	-0.14
	b	b	a	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
	x	z	b	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
	y	x	b	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
	z	y	b	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
b	e	b	b	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
	a	a	b	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
	b	e	b	-0.14	-0.7	-0.14	-0.14
	x	y	a	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
	y	z	a	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
	z	x	a	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
x	e	x	x	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
	a	z	y	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
	b	y	z	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
	x	e	x	-0.14	-0.7	-0.14	-0.14
	y	a	z	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
	z	b	y	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
y	e	y	y	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
	a	x	z	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
	b	z	x	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
	x	b	z	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
	y	e	y	-0.14	-0.7	-0.14	-0.14
	z	a	x	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
z	e	z	z	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
	a	y	x	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
	b	x	y	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
	x	a	y	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
	y	b	x	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14
	z	e	z	-0.14	-0.7	-0.14	-0.14

Berdasarkan Tabel 3.2, terlihat jelas bahwa untuk setiap $x, y \in G$ berlaku

$$\mu^{-}(x) \leq \max\{\mu^{-}(x \odot y), \mu^{-}(y \odot (y \odot x))\}.$$

Karena memenuhi aksioma (i) dan (ii) maka terbukti bahwa B adalah ideal *bipolar fuzzy* pada K-aljabar $\mathcal{K}$.

Definisi 3.1.7 (Fungsi Karakteristik *Anti Bipolar-value*)

Misalkan I adalah himpunan bagian tak kosong pada K-aljabar $\mathcal{K}$. Himpunan *bipolar fuzzy* $C_{I^c} = (C_{I^c}^+, C_{I^c}^-)$ yang dinyatakan sebagai berikut

$$C_{I^c}^+(x) = \begin{cases} 0, & x \in I \\ 1, & x \notin I \end{cases}$$

$$C_{I^c}^-(x) = \begin{cases} 0, & x \in I \\ -1, & x \notin I \end{cases}$$

disebut fungsi karakteristik *anti bipolar-value.*

Definisi 3.1.8 (Ideal *Bipolar Anti Fuzzy K*-aljabar)

Misalkan $\mathcal{K} = (G,*,\odot,e)$ adalah suatu K-aljabar. Himpunan $B = (\lambda^+, \lambda^-)$ disebut ideal *bipolar anti fuzzy* pada $\mathcal{K}$ jika aksioma berikut dipenuhi

i. $x_{t'} \notin B \Rightarrow e_{t'} \notin B$,

ii. $(x \odot y)_{t'} \notin B, \big(y \odot (y \odot x)\big)_{r'} \notin B \Rightarrow x_{\max\{t',r'\}} \notin B$.

Teorema 3.1.9

Misalkan $\mathcal{K} = (G,*,\odot,e)$ adalah suatu K-aljabar. Jika B adalah himpunan *bipolar fuzzy* pada $\mathcal{K}$, maka aksioma pada Definisi 3.1.8 masing-masing ekuivalen dengan aksioma berikut

a. $\lambda^+(e) \leq \lambda^+(x)$ dan $\lambda^-(e) \geq \lambda^-(x)$,

b. $\lambda^+(x) \leq \max\{\lambda^+(x \odot y), \lambda^+(y \odot (y \odot x))\}$ dan
$\lambda^-(x) \geq \min\{\lambda^-(x \odot y), \lambda^-(y \odot (y \odot x))\}$.

Bukti:

a. $(\Rightarrow)$ Akan dibuktikan bahwa pernyataan $x_{t'} \notin B \Rightarrow e_{t'} \notin B$ ekuivalen dengan $\lambda^+(e) \leq \lambda^+(x)$ dan $\lambda^-(e) \geq \lambda^-(x)$.

$x_{t'} \notin B \rightarrow B(x) \leq t$ sehingga $\lambda^+(x) \leq t^+$ dan $\lambda^-(x) \geq t^-$.

$e_{t'} \notin B \rightarrow B(e) \leq t$ sehingga $\lambda^+(e) \leq t^+$ dan $\lambda^-(e) \geq t^-$.

Andaikan $\lambda^+(e) > \lambda^+(x)$. Jika $\lambda^+(x) = t^+$ maka $\lambda^+(e) > t^+$. Hal ini bertentangan dengan pernyataan $\lambda^+(e) \leq t^+$. Jadi haruslah $\lambda^+(e) \leq \lambda^+(x)$.

Andaikan $\lambda^-(e) < \lambda^-(x)$. Jika $\lambda^-(e) = t^-$ maka $\lambda^-(e) < t^-$. Hal ini bertentangan dengan pernyataan $\lambda^-(e) \geq t^-$. Jadi haruslah $\lambda^-(e) \geq \lambda^-(x)$.

(⇐) Akan dibuktikan bahwa pernyataan $\lambda^+(e) \leq \lambda^+(x)$ dan $\lambda^-(e) \geq \lambda^-(x)$ ekuivalen dengan $x_{t'} \notin B \Rightarrow e_{t'} \notin B$.

Ambil sebarang $t' = (t^+, t^-) \in [-1,0] \times [0,1]$ sedemikian sehingga $\lambda^+(e) \leq \lambda^+(x) \leq t^+$ dan $\lambda^-(e) \geq \lambda^-(x) \geq t^-$. Pernyataan tersebut dapat ditulis sebagai berikut

- $\lambda^+(x) \leq t^+$ dan $\lambda^-(x) \geq t^-$ sehingga $B(x) \leq t \rightarrow x_{t'} \notin B$,
- $\lambda^+(e) \leq t^+$ dan $\lambda^-(e) \geq t^-$ sehingga $B(e) \leq t \rightarrow e_{t'} \notin B$.

Karena $\lambda^+(e) \leq \lambda^+(x)$ dan $\lambda^-(e) \geq \lambda^-(x)$ maka diperoleh pernyataan $x_{t'} \notin B \Rightarrow e_{t'} \notin B$.

b. (⇒) Akan dibuktikan bahwa pernyataan $(x \odot y)_{t'} \notin B, (y \odot (y \odot x))_{r'} \notin B \Rightarrow x_{\max\{t',r'\}} \notin B$ ekuivalen dengan $\lambda^+(x) \leq \max\{\lambda^+(x \odot y), \lambda^+(y \odot (y \odot x))\}$ dan $\lambda^-(x) \geq \min\{\lambda^-(x \odot y), \lambda^-(y \odot (y \odot x))\}$.

- Berdasarkan Definisi 3.1.3, $\max\{t', r'\} = (\max\{t^+, r^+\}, \min\{t^-, r^-\})$ sehingga $x_{\max\{t',r'\}} \notin B \rightarrow \lambda^+(x) \leq \max\{t^+, r^+\}$ dan $\lambda^-(x) \geq \min\{t^-, r^-\}$.
- $(x \odot y)_{t'} \notin B \rightarrow \lambda^+(x \odot y) \leq t^+$ dan $\lambda^-(x \odot y) \geq t^-$
- $(y \odot (y \odot x))_{r'} \notin B \rightarrow \lambda^+(y \odot (y \odot x)) \leq r^+$ dan $\lambda^-(y \odot (y \odot x)) \geq r^-$.

Dari ketiga pernyataan diatas, didapatkan

- $\lambda^+(x) \leq \max\{t^+, r^+\}$ dan $\lambda^-(x) \geq \min\{t^-, r^-\}$,

- $\max\{\lambda^+(x \odot y), \lambda^+(y \odot (y \odot x))\} \leq \max\{t^+, r^+\}$ dan $\min\{\lambda^-(x \odot y), \lambda^-(y \odot (y \odot x))\} \geq \min\{t^-, r^-\}$.

Andaikan $\lambda^+(x) > \max\{\lambda^+(x \odot y), \lambda^+(y \odot (y \odot x))\}$. Jika $\max\{\lambda^+(x \odot y), \lambda^+(y \odot (y \odot x))\} = \max\{t^+, r^+\}$, maka $\lambda^+(x) > \max\{t^+, r^+\}$. Hal ini bertentangan dengan $\lambda^+(x) \leq \max\{t^+, r^+\}$. Jadi haruslah $\lambda^+(x) \leq \max\{\lambda^+(x \odot y), \lambda^+(y \odot (y \odot x))\}$.

Andaikan $\lambda^-(x) < \min\{\lambda^-(x \odot y), \lambda^-(y \odot (y \odot x))\}$. Jika $\min\{\lambda^-(x \odot y), \lambda^-(y \odot (y \odot x))\} = \min\{t^-, r^-\}$, maka $\lambda^-(x) < \min\{t^-, r^-\}$. Hal ini bertentangan dengan $\lambda^-(x) \geq \min\{t^-, r^-\}$. Jadi haruslah $\lambda^-(x) \geq \min\{\lambda^-(x \odot y), \lambda^-(y \odot (y \odot x))\}$.

($\Leftarrow$)Akan dibuktikan bahwa pernyataan

$\lambda^+(x) \leq \max\{\lambda^+(x \odot y), \lambda^+(y \odot (y \odot x))\}$ dan

$\lambda^-(x) \geq \min\{\lambda^-(x \odot y), \lambda^-(y \odot (y \odot x))\}$ ekuivalen dengan

$(x \odot y)_{t'} \notin B, (y \odot (y \odot x))_{r'} \notin B \Rightarrow x_{\max\{t',r'\}} \notin B.$

Ambil sebarang $t' = (t^+, t^-)$ dan $r' = (r^+, r^-) \in [-1,0] \times [0,1]$ sedemikian sehingga $\lambda^+(x) \leq \max\{\lambda^+(x \odot y), \lambda^+(y \odot (y \odot x))\} \leq \max\{t^+, r^+\}$ dan $\lambda^-(x) \geq \min\{\lambda^-(x \odot y), \lambda^-(y \odot (y \odot x))\} \geq \min\{t^-, r^-\}$. Pernyataan tersebut dapat ditulis sebagai berikut

- $\lambda^+(x) \leq \max\{t^+, r^+\}$ dan $\lambda^-(x) \geq \min\{t^-, r^-\}$ sehingga
$$B(x) \leq \max\{t', r'\} \rightarrow x_{\max\{t',r'\}} \notin B,$$
- $\lambda^+(x \odot y) \leq t^+$ dan $\lambda^-(x \odot y) \geq t^-$ sehingga
$$B(x \odot y) \leq t \rightarrow x \odot y_{t'} \notin B,$$
- $\lambda^+(y \odot (y \odot x)) \leq r^+$ dan $\lambda^-(y \odot (y \odot x)) \geq r^-$ sehingga
$$B(y \odot (y \odot x)) \leq r \rightarrow (y \odot (y \odot x))_{t'} \notin B.$$

Karena $\lambda^{+}(x) \leq \max\{\lambda^{+}(x \odot y), \lambda^{+}(y \odot (y \odot x))\}$ dan $\lambda^{-}(x) \geq \min\{\lambda^{-}(x \odot y), \lambda^{-}(y \odot (y \odot x))\}$ maka diperoleh pernyataan $x \odot y_{t'} \notin B, (y \odot (y \odot x))_{t'} \notin B \Rightarrow x_{\max\{t', r'\}} \notin B$.

Terbukti bahwa pernyataan ekuivalen.

Contoh 3.1.10 Berdasarkan Contoh 2.4.3 diketahui bahwa $\mathcal{K} = (G, \circ, \odot, e)$ adalah suatu K-aljabar dengan $G = \{e, a, b, x, y, z\}$. Jika didefinisikan himpunan *bipolar fuzzy* $B = (\lambda^{+}, \lambda^{-})$ pada $\mathcal{K}$ sebagai berikut

$$\lambda^{+}(x) = \begin{cases} 0.03 & , \quad x = e \\ 0.4 & , \quad x \neq e \end{cases} \quad \text{dan} \quad \lambda^{-}(x) = \begin{cases} -0.2 & , \quad x = e \\ -0.35 & , \quad x \neq e \end{cases}$$

maka buktikan bahwa $B = (\lambda^{+}, \lambda^{-})$ ideal BAF pada $\mathcal{K}$.

Bukti:

i. Jelas bahwa untuk setiap $x \in G$ berlaku $\lambda^{+}(e) \leq \lambda^{+}(x)$ dan $\lambda^{-}(e) \geq \lambda^{-}(x)$

ii. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in G$ berlaku

$$\lambda^{+}(x) \leq \max\{\lambda^{+}(x \odot y), \lambda^{+}(y \odot (y \odot x))\}.$$

Tabel 3.3 Ideal BAF pada $\mathcal{K}$

x	y	$x \odot y$	$y \odot (y \odot x)$	$\lambda^+(x)$	$\lambda^+(x \odot y)$	$\lambda^+(y \odot (y \odot x))$	$\max\{\lambda^+(x \odot y), \lambda^+(y \odot (y \odot x))\}$
e	e	e	e	0.03	0.03	0.03	0.03
	a	a	e	0.03	0.4	0.03	0.4
	b	b	e	0.03	0.4	0.03	0.4
	x	x	e	0.03	0.4	0.03	0.4
	y	y	e	0.03	0.4	0.03	0.4
	z	z	e	0.03	0.4	0.03	0.4
a	e	a	a	0.4	0.4	0.4	0.4
	a	e	a	0.4	0.03	0.4	0.4
	b	b	a	0.4	0.4	0.4	0.4
	x	z	b	0.4	0.4	0.4	0.4
	y	x	b	0.4	0.4	0.4	0.4
	z	y	b	0.4	0.4	0.4	0.4
b	e	b	b	0.4	0.4	0.4	0.4
	a	a	b	0.4	0.4	0.4	0.4
	b	e	b	0.4	0.03	0.4	0.4
	x	y	a	0.4	0.4	0.4	0.4
	y	z	a	0.4	0.4	0.4	0.4
	z	x	a	0.4	0.4	0.4	0.4
x	e	x	x	0.4	0.4	0.4	0.4
	a	z	y	0.4	0.4	0.4	0.4
	b	y	z	0.4	0.4	0.4	0.4
	x	e	x	0.4	0.03	0.4	0.4
	y	a	z	0.4	0.4	0.4	0.4
	z	b	y	0.4	0.4	0.4	0.4
y	e	y	y	0.4	0.4	0.4	0.4
	a	x	z	0.4	0.4	0.4	0.4
	b	z	x	0.4	0.4	0.4	0.4
	x	b	z	0.4	0.4	0.4	0.4
	y	e	y	0.4	0.03	0.4	0.4
	z	a	x	0.4	0.4	0.4	0.4
z	e	z	z	0.4	0.4	0.4	0.4
	a	y	x	0.4	0.4	0.4	0.4
	b	x	y	0.4	0.4	0.4	0.4
	x	a	y	0.4	0.4	0.4	0.4
	y	b	x	0.4	0.4	0.4	0.4
	z	e	z	0.4	0.03	0.4	0.4

Berdasarkan Tabel 3.3, terlihat jelas bahwa untuk setiap $x, y \in G$ berlaku

$$\lambda^+(x) \leq \max\{\lambda^+(x \odot y), \lambda^+(y \odot (y \odot x))\}.$$

Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in G$ berlaku

$$\lambda^-(x) \geq \min\{\lambda^-(x \odot y), \lambda^-(y \odot (y \odot x))\}.$$

Tabel 3.4 Ideal BAF pada $\mathcal{K}$

x	y	$x \odot y$	$y \odot (y \odot x)$	$\lambda^-(x)$	$\lambda^-(x \odot y)$	$\lambda^-(y \odot (y \odot x))$	$\min\{\lambda^-(x \odot y), \lambda^-(y \odot (y \odot x))\}$
e	e	e	e	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2
	a	a	e	-0.2	-0.35	-0.2	-0.35
	b	b	e	-0.2	-0.35	-0.2	-0.35
	x	x	e	-0.2	-0.35	-0.2	-0.35
	y	y	e	-0.2	-0.35	-0.2	-0.35
	z	z	e	-0.2	-0.35	-0.2	-0.35
a	e	a	a	-0.35	-0.35	-0.35	-0.35
	a	e	a	-0.35	-0.2	-0.35	-0.35
	b	b	a	-0.35	-0.35	-0.35	-0.35
	x	z	b	-0.35	-0.35	-0.35	-0.35
	y	x	b	-0.35	-0.35	-0.35	-0.35
	z	y	b	-0.35	-0.35	-0.35	-0.35
b	e	b	b	-0.35	-0.35	-0.35	-0.35
	a	a	b	-0.35	-0.35	-0.35	-0.35
	b	e	b	-0.35	-0.2	-0.35	-0.35
	x	y	a	-0.35	-0.35	-0.35	-0.35
	y	z	a	-0.35	-0.35	-0.35	-0.35
	z	x	a	-0.35	-0.35	-0.35	-0.35
x	e	x	x	-0.35	-0.35	-0.35	-0.35
	a	z	y	-0.35	-0.35	-0.35	-0.35
	b	y	z	-0.35	-0.35	-0.35	-0.35
	x	e	x	-0.35	-0.2	-0.35	-0.35
	y	a	z	-0.35	-0.35	-0.35	-0.35
	z	b	y	-0.35	-0.35	-0.35	-0.35
y	e	y	y	-0.35	-0.35	-0.35	-0.35
	a	x	z	-0.35	-0.35	-0.35	-0.35
	b	z	x	-0.35	-0.35	-0.35	-0.35
	x	b	z	-0.35	-0.35	-0.35	-0.35
	y	e	y	-0.35	-0.2	-0.35	-0.35
	z	a	x	-0.35	-0.35	-0.35	-0.35
z	e	z	z	-0.35	-0.35	-0.35	-0.35
	a	y	x	-0.35	-0.35	-0.35	-0.35
	b	x	y	-0.35	-0.35	-0.35	-0.35
	x	a	y	-0.35	-0.35	-0.35	-0.35
	y	b	x	-0.35	-0.35	-0.35	-0.35
	z	e	z	-0.35	-0.2	-0.35	-0.35

Berdasarkan Tabel 3.4, terlihat jelas bahwa untuk setiap $x, y \in G$ berlaku

$$\lambda^-(x) \geq \min\{\lambda^-(x \odot y), \lambda^-(y \odot (y \odot x))\}.$$

Karena memenuhi aksioma (i) dan (ii) maka terbukti bahwa $B = (\lambda^+, \lambda^-)$ ideal BAF pada $\mathcal{K}$.

Contoh 3.1.11

Diketahui suatu K-aljabar yang dibangun dari grup $A = \{0,30,45,60,90\}$ dengan operasi biner $*$ dan $e = 0$.

Tabel 3.5 Operasi $*$ pada A

$*$	0	30	45	60	90
0	0	30	45	60	90
30	30	45	60	90	0
45	45	60	90	0	30
60	60	90	0	30	45
90	90	0	30	45	60

Tabel 3.6 Operasi $\odot$ pada A

$\odot$	0	30	45	60	90
0	0	90	60	45	30
30	30	0	90	60	45
45	45	30	0	90	60
60	60	45	30	0	90
90	90	60	45	30	0

Jika didefinisikan $B = (\lambda^+, \lambda^-)$ dengan $\lambda^+(x) = \sin x$ dan $\lambda^-(x) = -\sin x$ untuk setiap $x \in A$, maka buktikan bahwa $B = (\lambda^+, \lambda^-)$ ideal BAF pada K-aljabar.

Bukti:

i. $\lambda^+(e) \leq \lambda^+(x)$ dan $\lambda^-(e) \geq \lambda^-(x)$

ii. Akan dibuktikan $\lambda^+(x) \leq \max\{\lambda^+(x \odot y), \lambda^+(y \odot (y \odot x))\}$.

Tabel 3.7 Nilai $\lambda^{+}(x)$ pada A

x	y	$x \odot y$	$y \odot (y \odot x)$	$\lambda^{+}(x)$	$\lambda^{+}(x \odot y)$	$\lambda^{+}(y \odot (y \odot x))$	$\max\{\lambda^{+}(x \odot y), \lambda^{+}(y \odot (y \odot x))\}$
0	0	0	0	0	0	0	0
	30	90	0	0	1	0	1
	45	60	0	0	$\sqrt{3}/2$	0	$\sqrt{3}/2$
	60	45	0	0	$\sqrt{2}/2$	0	$\sqrt{2}/2$
	90	30	0	0	$1/2$	0	$1/2$
30	0	30	30	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$
	30	0	30	$1/2$	0	$1/2$	$1/2$
	45	90	30	$1/2$	1	$1/2$	1
	60	60	30	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
	90	45	30	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	$\sqrt{2}/2$
45	0	45	45	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
	30	30	45	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
	45	0	45	$\sqrt{2}/2$	0	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
	60	90	45	$\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{2}/2$	1
	90	60	45	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
60	0	60	60	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$
	30	45	60	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$
	45	30	60	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$
	60	0	60	$\sqrt{3}/2$	0	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$
	90	90	60	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	1
90	0	90	90	1	1	1	1
	30	60	90	1	$\sqrt{3}/2$	1	1
	45	45	90	1	$\sqrt{2}/2$	1	1
	60	30	90	1	$1/2$	1	1
	90	0	90	1	0	1	1

Terbukti bahwa $\lambda^{+}(x) \leq \max\{\lambda^{+}(x \odot y), \lambda^{+}(y \odot (y \odot x))\}$.

Akan dibuktikan bahwa $\lambda^-(x) \geq \min\{\lambda^-(x \odot y), \lambda^-(y \odot (y \odot x))\}$.

Tabel 3.8 Nilai $\lambda^-(x)$ pada A

x	y	$x \odot y$	$y \odot (y \odot x)$	$\lambda^-(x)$	$\lambda^-(x \odot y)$	$\lambda^-(y \odot (y \odot x))$	$\min\{\lambda^-(x \odot y), \lambda^-(y \odot (y \odot x))\}$
0	0	0	0	0	0	0	0
	30	90	0	0	-1	0	-1
	45	60	0	0	-$\sqrt{3}/2$	0	-$\sqrt{3}/2$
	60	45	0	0	-$\sqrt{2}/2$	0	-$\sqrt{2}/2$
	90	30	0	0	-$1/2$	0	-$1/2$
30	0	30	30	-$1/2$	-$1/2$	-$1/2$	-$1/2$
	30	0	30	-$1/2$	0	-$1/2$	-$1/2$
	45	90	30	-$1/2$	-1	-$1/2$	-1
	60	60	30	-$1/2$	-$\sqrt{3}/2$	-$1/2$	-$\sqrt{3}/2$
	90	45	30	-$1/2$	-$\sqrt{2}/2$	-$1/2$	-$\sqrt{2}/2$
45	0	45	45	-$\sqrt{2}/2$	-$\sqrt{2}/2$	-$\sqrt{2}/2$	-$\sqrt{2}/2$
	30	30	45	-$\sqrt{2}/2$	-$1/2$	-$\sqrt{2}/2$	-$\sqrt{2}/2$
	45	0	45	-$\sqrt{2}/2$	0	-$\sqrt{2}/2$	-$\sqrt{2}/2$
	60	90	45	-$\sqrt{2}/2$	-1	-$\sqrt{2}/2$	-1
	90	60	45	-$\sqrt{2}/2$	-$\sqrt{3}/2$	-$\sqrt{2}/2$	-$\sqrt{3}/2$
60	0	60	60	-$\sqrt{3}/2$	-$\sqrt{3}/2$	-$\sqrt{3}/2$	-$\sqrt{3}/2$
	30	45	60	-$\sqrt{3}/2$	-$\sqrt{2}/2$	-$\sqrt{3}/2$	-$\sqrt{3}/2$
	45	30	60	-$\sqrt{3}/2$	-$1/2$	-$\sqrt{3}/2$	-$\sqrt{3}/2$
	60	0	60	-$\sqrt{3}/2$	0	-$\sqrt{3}/2$	-$\sqrt{3}/2$
	90	90	60	-$\sqrt{3}/2$	-1	-$\sqrt{3}/2$	-1
90	0	90	90	-1	-1	-1	-1
	30	60	90	-1	-$\sqrt{3}/2$	-1	-1
	45	45	90	-1	-$\sqrt{2}/2$	-1	-1
	60	30	90	-1	-$1/2$	-1	-1
	90	0	90	-1	0	-1	-1

Terbukti bahwa $\lambda^-(x) \geq \min\{\lambda^-(x \odot y), \lambda^-(y \odot (y \odot x))\}$.

Jadi terbukti bahwa $B = (\lambda^+, \lambda^-)$ ideal BAF pada K-aljabar.

Teorema 3.1.12

Himpunan *bipolar fuzzy* $B = (\lambda^+, \lambda^-)$ anggota ideal BAF pada K-aljabar $\mathcal{K}$ jika dan hanya jika

a. $\lambda^+(e) \leq \lambda^+(x)$ dan $\lambda^-(e) \geq \lambda^-(x)$,

b. $\lambda^+(x) \leq \max\{\lambda^+(x \odot y), \lambda^+(y \odot (y \odot x))\}$ dan
$\lambda^-(x) \geq \min\{\lambda^-(x \odot y), \lambda^-(y \odot (y \odot x))\}$.

Bukti:

(⇒) Diketahui $B = (\lambda^+, \lambda^-)$ anggota ideal BAF pada $\mathcal{K}$. Akan dibuktikan aksioma

a. $\lambda^+(e) \leq \lambda^+(x)$ dan $\lambda^-(e) \geq \lambda^-(x)$,

b. $\lambda^+(x) \leq \max\{\lambda^+(x \odot y), \lambda^+(y \odot (y \odot x))\}$ dan

$\lambda^-(x) \geq \min\{\lambda^-(x \odot y), \lambda^-(y \odot (y \odot x))\}$.

Karena $B = (\lambda^+, \lambda^-)$ anggota ideal BAF pada $\mathcal{K}$,

i. $x_{t'} \notin B \Rightarrow e_{t'} \notin B$ yang ekuivalen dengan $\lambda^+(e) \leq \lambda^+(x)$ dan $\lambda^-(e) \geq \lambda^-(x)$,

ii. $(x \odot y)_{t'} \notin B, (y \odot (y \odot x))_{r'} \notin B \Rightarrow x_{\max\{t',r'\}} \notin B$ yang ekuivalen dengan

$\lambda^+(x) \leq \max\{\lambda^+(x \odot y), \lambda^+(y \odot (y \odot x))\}$ dan

$\lambda^-(x) \geq \min\{\lambda^-(x \odot y), \lambda^-(y \odot (y \odot x))\}$.

(⇐) Akan dibuktikan bahwa B anggota ideal BAF pada K-aljabar $\mathcal{K}$.

i. $\lambda^+(e) \leq \lambda^+(x)$ dan $\lambda^-(e) \geq \lambda^-(x)$ ekuivalen dengan $x_{t'} \notin B \Rightarrow e_{t'} \notin B$,

ii. $\lambda^+(x) \leq \max\{\lambda^+(x \odot y), \lambda^+(y \odot (y \odot x))\}$ dan

$\lambda^-(x) \geq \min\{\lambda^-(x \odot y), \lambda^-(y \odot (y \odot x))\}$ ekuivalen dengan

$(x \odot y)_{t'} \notin B, (y \odot (y \odot x))_{r'} \notin B \Rightarrow x_{\max\{t',r'\}} \notin B$.

Terbukti bahwa B anggota ideal BAF pada K-aljabar $\mathcal{K}$.

Jadi Teorema 3.1.12 terbukti.

Teorema 3.1.13

Misalkan $\mathcal{K} = (G, *, \odot, e)$ adalah suatu K-aljabar dan $I \subseteq \mathcal{K}$ dengan $I \neq \emptyset$. C_{I^c} anggota ideal BAF pada $\mathcal{K}$ jika dan hanya jika I ideal pada $\mathcal{K}$.

Bukti:

(⇒) Diketahui C_{I^c} anggota ideal BAF pada $\mathcal{K}$. Akan dibuktikan bahwa I ideal pada $\mathcal{K}$.

i. Ambil $x \in I$, sehingga $C^+_{I^c}(x) = 0$ dan $C^-_{I^c}(x) = 0$. Diketahui $C^+_{I^c}(e) \leq C^+_{I^c}(x)$ sehingga $C^+_{I^c}(e) \leq 0$ dan $C^-_{I^c}(e) \geq C^-_{I^c}(x)$ sehingga $C^-_{I^c}(e) \geq 0$.

Karena $C_{I^c}^{+} \in [0,1]$ dan $C_{I^c}^{+}(e) \leq 0$ maka $C_{I^c}^{+}(e) = 0$. Karena $C_{I^c}^{-} \in [-1,0]$ dan $C_{I^c}^{-}(e) \geq 0$ maka $C_{I^c}^{-}(e) = 0$. Jadi $e \in I$.

ii. Ambil $(x \odot y) \in I, (y \odot (y \odot x)) \in I$ sehingga $C_{I^c}^{+}(x \odot y) = 0$, $C_{I^c}^{+}(x \odot y) = 0, C_{I^c}^{+}(y \odot (y \odot x)) = 0$, dan $C_{I^c}^{-}(y \odot (y \odot x)) = 0$. Diketahui

- $C_{I^c}^{+}(x) \leq \max\{C_{I^c}^{+}(x \odot y), C_{I^c}^{+}(y \odot (y \odot x))\} \rightarrow C_{I^c}^{+}(x) \leq \max\{0,0\} \rightarrow C_{I^c}^{+}(x) \leq 0$.
- $C_{I^c}^{-}(x) \geq \min\{C_{I^c}^{-}(x \odot y), C_{I^c}^{-}(y \odot (y \odot x))\} \rightarrow C_{I^c}^{-}(x) \leq \max\{0,0\} \rightarrow C_{I^c}^{-}(x) \leq 0$.

$C_{I^c}^{+} \in [0,1]$ dan $C_{I^c}^{+}(x) \leq 0$, maka $C_{I^c}^{+}(x) = 0$ dan $C_{I^c}^{-} \in [-1,0]$ dan $C_{I^c}^{-}(x) \leq 0$, maka $C_{I^c}^{-}(x) = 0$. Jadi $x \in I$.

Terbukti I ideal pada $\mathcal{K}$.

($\Leftarrow$) Diketahui I ideal pada $\mathcal{K}$. Akan dibuktikan C_{I^c} anggota ideal BAF pada $\mathcal{K}$.

i. Diketahui $C_{I^c}^{+}(e) = 0$ dan $C_{I^c}^{-}(e) = 0$. $C_{I^c} = (C_{I^c}^{+}, C_{I^c}^{-})$ didefinisikan sebagai berikut

$$C_{I^c}^{+}(x) = \begin{cases} 0, & x \in I \\ 1, & x \,\bar{\in}\, I \end{cases}$$

$$C_{I^c}^{-}(x) = \begin{cases} 0, & x \in I \\ -1, & x \,\bar{\in}\, I \end{cases}$$

sehingga $0 \leq C_{I^c}^{+}(x) \rightarrow C_{I^c}^{+}(e) \leq C_{I^c}^{+}(x)$ dan $0 \geq C_{I^c}^{-}(x) \rightarrow C_{I^c}^{-}(e) \geq C_{I^c}^{-}(x)$.

ii. Diketahui I ideal pada $\mathcal{K}$, maka aksioma berikut berlaku $(x \odot y) \in I$ dan $\big(y \odot (y \odot x)\big) \in I \rightarrow x \in I$, yang mengakibatkan

$$\left.\begin{aligned} C_{I^c}^{+}(x \odot y) = 0 \\ C_{I^c}^{+}\big(y \odot (y \odot x)\big) = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow C_{I^c}^{+}(x) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} C_{I^c}^{-}(x \odot y) = 0 \\ C_{I^c}^{-}\big(y \odot (y \odot x)\big) = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow C_{I^c}^{-}(x) = 0,$$

atau dapat dinyatakan dengan $x \notin I \rightarrow (x \odot y) \notin I$ dan $\big(y \odot (y \odot x)\big) \notin I$, yang mengakibatkan

$$C_{I^c}^{+}(x) = 1 \rightarrow \begin{cases} C_{I^c}^{+}(x \odot y) = 1 \\ C_{I^c}^{+}\big(y \odot (y \odot x)\big) = 1 \end{cases}$$

$$C_{I^c}^{-}(x) = -1 \rightarrow \begin{cases} C_{I^c}^{-}(x \odot y) = -1 \\ C_{I^c}^{-}\big(y \odot (y \odot x)\big) = -1 \end{cases}.$$

Hubungan x dengan $x \odot y$,

- $x \in I$ dan $(x \odot y) \in I$ maka

  $C_{I^c}^{+}(x) = C_{I^c}^{+}(x \odot y)$ dan $C_{I^c}^{-}(x) = C_{I^c}^{-}(x \odot y)$,
- $x \in I$ dan $(x \odot y) \notin I$ maka

  $C_{I^c}^{+}(x) \leq C_{I^c}^{+}(x \odot y)$ dan $C_{I^c}^{-}(x) \geq C_{I^c}^{-}(x \odot y)$,
- $x \notin I \rightarrow (x \odot y) \notin I$ maka

  $C_{I^c}^{+}(x) = C_{I^c}^{+}(x \odot y)$ dan $C_{I^c}^{-}(x) = C_{I^c}^{-}(x \odot y)$.

Sehingga secara umum berlaku $C_{I^c}^{+}(x) \leq C_{I^c}^{+}(x \odot y)$ dan $C_{I^c}^{-}(x) \geq C_{I^c}^{-}(x \odot y)$.

Hubungan x dengan $y \odot (y \odot x)$,

- $x \in I$ dan $\big(y \odot (y \odot x)\big) \in I$ maka

  $C_{I^c}^{+}(x) = C_{I^c}^{+}\big(y \odot (y \odot x)\big)$ dan $C_{I^c}^{-}(x) = C_{I^c}^{-}\big(y \odot (y \odot x)\big)$,
- $x \in I$ dan $\big(y \odot (y \odot x)\big) \notin I$ maka

  $C_{I^c}^{+}(x) \leq C_{I^c}^{+}\big(y \odot (y \odot x)\big)$ dan $C_{I^c}^{-}(x) \geq C_{I^c}^{-}\big(y \odot (y \odot x)\big)$,
- $x \notin I \rightarrow \big(y \odot (y \odot x)\big) \notin I$ maka

  $C_{I^c}^{+}(x) = C_{I^c}^{+}\big(y \odot (y \odot x)\big)$ dan $C_{I^c}^{-}(x) = C_{I^c}^{-}\big(y \odot (y \odot x)\big)$.

Sehingga secara umum berlaku $C_{I^c}^{+}(x) \leq C_{I^c}^{+}\big(y \odot (y \odot x)\big)$ dan $C_{I^c}^{-}(x) \geq C_{I^c}^{-}\big(y \odot (y \odot x)\big)$.

Berdasarkan pernyataan diatas diperoleh

- $C_{I^c}^{+}(x) \leq C_{I^c}^{+}(x \odot y)$ dan $C_{I^c}^{+}(x) \leq C_{I^c}^{+}(y \odot (y \odot x))$ sehingga $C_{I^c}^{+}(x) \leq \max\{C_{I^c}^{+}(x \odot y), C_{I^c}^{+}(y \odot (y \odot x))\}$.
- $C_{I^c}^{-}(x) \geq C_{I^c}^{-}(x \odot y)$ dan $C_{I^c}^{-}(x) \geq C_{I^c}^{-}(y \odot (y \odot x))$ sehingga $C_{I^c}^{-}(x) \geq \min\{C_{I^c}^{-}(x \odot y), C_{I^c}^{-}(y \odot (y \odot x))\}$.

Terbukti C_{I^c} anggota ideal BAF pada $\mathcal{K}$.

3.2 Karakterisasi Ideal BAF pada K-aljabar

Pada subbab ini akan dibangun struktur anti positif β-cut dan anti negatif α-cut, kemudian dibahas teorema, akibat beserta pembuktian yang berkaitan dengan karakterisasi ideal BAF pada K-aljabar melalui anti positif β-cut dan anti negatif α-cut.

Definisi 3.2.1 (Anti Positif β-cut dan Anti Negatif α-cut)

Misalkan $\mathcal{K} = (G, *, \odot, e)$ adalah suatu K-aljabar. Jika $B = (\mu^+, \mu^-)$ adalah himpunan *bipolar fuzzy* pada $\mathcal{K}$ dan $(\alpha, \beta) \in [-1,0] \times [0,1]$, maka

i. $\tilde{B}_{\beta}^{+} = \{x \in \mathcal{K} | \mu^+(x) \leq \beta\}$ disebut anti positif β-cut pada B,

ii. $\tilde{B}_{\alpha}^{-} = \{x \in \mathcal{K} | \mu^-(x) \geq \alpha\}$ disebut anti negatif α-cut pada B,

iii. $\tilde{B}_{(\alpha,\beta)} = \{x \in \mathcal{K} | \mu^-(x) \geq \alpha \; dan \; \mu^+(x) \leq \beta\}$ disebut anti (α, β)-cut pada B.

Untuk setiap $\gamma \in (0,1]$ dan $\tilde{B}_{\gamma}^{+} \cap \tilde{B}_{\gamma}^{-}$ disebut anti γ-cut pada B.

Teorema 3.2.2

Himpunan *bipolar fuzzy* $B = (\mu^+, \mu^-)$ anggota ideal BAF pada K-aljabar $\mathcal{K}$ jika dan hanya jika kondisi berikut dipenuhi.

i. Untuk setiap $\beta \in [0,1]$, $\tilde{B}_{\beta}^{+}$ tak kosong, maka $\tilde{B}_{\beta}^{+}$ ideal pada $\mathcal{K}$,

ii. Untuk setiap $\alpha \in [-1,0]$, $\tilde{B}_{\alpha}^{-}$ tak kosong, maka $\tilde{B}_{\alpha}^{-}$ ideal pada $\mathcal{K}$.

Bukti:

($\Rightarrow$) Diketahui $B = (\mu^+, \mu^-)$ anggota ideal BAF pada K-aljabar $\mathcal{K}$. Akan dibuktikan bahwa $\tilde{B}_{\beta}^{+}$ dan $\tilde{B}_{\alpha}^{-}$ ideal pada $\mathcal{K}$.

i. Ambil $x \in \tilde{B}_{\beta}^{+} \to \mu^{+}(x) \leq \beta$. Diketahui $\mu^{+}(e) \leq \mu^{+}(x)$ maka $\mu^{+}(e) \leq \beta$. Jadi $e \in \tilde{B}_{\beta}^{+}$. Ambil $x \in \tilde{B}_{\alpha}^{-} \to \mu^{-}(x) \geq \alpha$. Diketahui $\mu^{-}(e) \geq \mu^{-}(x)$ maka $\mu^{-}(e) \geq \alpha$. Jadi $e \in \tilde{B}_{\alpha}^{-}$.

ii. Andaikan $(x \odot y), (y \odot (y \odot x)) \in \tilde{B}_{\beta}^{+}$ dan $x \notin \tilde{B}_{\beta}^{+}$, maka $\mu^{+}(x) > \beta$ sehingga $\beta < \mu^{+}(x) \leq \max\{\mu^{+}(x \odot y), \mu^{+}(y \odot (y \odot x))\}$. Mengakibatkan $\mu^{+}(x \odot y) > \beta$ dan $\mu^{+}(y \odot (y \odot x)) > \beta$ sehingga $(x \odot y), (y \odot (y \odot x)) \in \tilde{B}_{\beta}^{+}$. Hal ini kontradiksi dengan pengandaian diatas, maka haruslah $x \in \tilde{B}_{\beta}^{+}$.

Andaikan $(x \odot y), (y \odot (y \odot x)) \in \tilde{B}_{\alpha}^{-}$ dan $x \notin \tilde{B}_{\alpha}^{-}$, maka $\mu^{-}(x) < \alpha$ sehingga $\alpha > \mu^{-}(x) \geq \min\{\mu^{-}(x \odot y), \mu^{-}(y \odot (y \odot x))\}$. Mengakibatkan $\mu^{-}(x \odot y) < \alpha$ dan $\mu^{+}(y \odot (y \odot x)) < \alpha$ sehingga $(x \odot y), (y \odot (y \odot x)) \notin \tilde{B}_{\alpha}^{-}$. Hal ini kontradiksi dengan pengandaian diatas, maka haruslah $x \in \tilde{B}_{\alpha}^{-}$.

Terbukti $\tilde{B}_{\beta}^{+}$ dan $\tilde{B}_{\alpha}^{-}$ ideal pada $\mathcal{K}$.

($\Leftarrow$) Diketahui $\tilde{B}_{\beta}^{+}$ dan $\tilde{B}_{\alpha}^{-}$ ideal pada $\mathcal{K}$. Akan dibuktikan bahwa $B = (\mu^{+}, \mu^{-})$ anggota ideal BAF pada K-aljabar $\mathcal{K}$.

i. Ambil $x \in \tilde{B}_{\beta}^{+}$ dan $x \in \tilde{B}_{\alpha}^{-}$, maka $\mu^{+}(x) \leq \beta$ dan $\mu^{-}(x) \geq \alpha$. Diketahui untuk setiap $x \in G \to e \in \tilde{B}_{\beta}^{+}$ dan $e \in \tilde{B}_{\alpha}^{-}$ sehingga berlaku $\mu^{+}(e) \leq \beta$ dan $\mu^{-}(e) \geq \alpha$.

Andaikan $\mu^{+}(e) > \mu^{+}(x)$ dan $\mu^{+}(x) = \beta$ maka $\mu^{+}(e) > \beta$. Hal ini bertentangan dengan pernyataan $\mu^{+}(e) \leq \beta$. Jadi haruslah $\mu^{+}(e) \leq \mu^{+}(x)$.

Andaikan $\mu^{-}(e) < \mu^{-}(x)$ dan $\mu^{-}(x) = \alpha$ maka $\mu^{-}(e) < \alpha$. Hal ini bertentangan dengan pernyataan $\mu^{-}(e) \geq \alpha$. Jadi haruslah $\mu^{-}(e) \geq \mu^{-}(x)$.

ii. Diketahui jika $(x \odot y), (y \odot (y \odot x)) \in \tilde{B}_{\beta}^{+}$ maka $x \in \tilde{B}_{\beta}^{+}$. Diperoleh $\mu^{+}(x) \leq \beta, \mu^{+}(x \odot y) \leq \beta$, dan $\mu^{+}(y \odot (y \odot x)) \leq \beta$.

Andaikan $\mu^{+}(x) > \mu^{+}(x \odot y)$ dan $\mu^{+}(x \odot y) = \beta$ maka $\mu^{+}(x) > \beta$. Hal ini bertentangan dengan pernyataan $\mu^{+}(x) \leq \beta$ haruslah $\mu^{+}(x) \leq \mu^{+}(x \odot y)$.

Andaikan $\mu^{+}(x) > \mu^{+}(y \odot (y \odot x))$ dan $\mu^{+}(y \odot (y \odot x)) = \beta$ maka $\mu^{+}(x) > \beta$. Hal ini bertentangan dengan pernyataan $\mu^{+}(x) \leq \beta$ haruslah $\mu^{+}(x) \leq \mu^{+}(y \odot (y \odot x))$.

Berdasarkan pernyataan diatas, maka $\mu^{+}(x) \leq \mu^{+}(x \odot y) \leq \beta$ dan $\mu^{+}(x) \leq \mu^{+}(y \odot (y \odot x)) \leq \beta$. Jadi dapat disimpulkan bahwa

$$\mu^{+}(x) \leq \max\{\mu^{+}(x \odot y), \mu^{+}(y \odot (y \odot x))\}.$$

Diketahui jika $(x \odot y), (y \odot (y \odot x)) \in \tilde{B}_{\alpha}^{-}$ maka $x \in \tilde{B}_{\alpha}^{-}$. Diperoleh $\mu^{-}(x) \geq \alpha, \mu^{-}(x \odot y) \geq \alpha$, dan $\mu^{-}(y \odot (y \odot x)) \geq \alpha$.

Andaikan $\mu^{-}(x) < \mu^{-}(x \odot y)$ dan $\mu^{-}(x \odot y) = \alpha$ maka $\mu^{-}(x) < \alpha$. Hal ini bertentangan dengan pernyataan $\mu^{-}(x) \geq \alpha$ haruslah $\mu^{-}(x) \geq \mu^{-}(x \odot y)$.

Andaikan $\mu^{-}(x) < \mu^{-}(y \odot (y \odot x))$ dan $\mu^{-}(y \odot (y \odot x)) = \alpha$ maka $\mu^{-}(x) < \alpha$. Hal ini bertentangan dengan pernyataan $\mu^{-}(x) \geq \alpha$ haruslah $\mu^{-}(x) \geq \mu^{-}(y \odot (y \odot x))$.

Berdasarkan pernyataan diatas, maka $\mu^{-}(x) \geq \mu^{-}(x \odot y) \geq \alpha$ dan $\mu^{-}(x) \geq \mu^{-}(y \odot (y \odot x)) \geq \alpha$. Jadi dapat disimpulkan bahwa

$$\mu^{-}(x) \geq \min\{\mu^{-}(x \odot y), \mu^{-}(y \odot (y \odot x))\}.$$

Terbukti $B = (\mu^{+}, \mu^{-})$ anggota ideal BAF pada K-aljabar $\mathcal{K}$.

Contoh 3.2.3 Berdasarkan Contoh 2.4.3 dan Contoh 3.1.6 diketahui $\mathcal{K} = (G, \circ, \odot, e)$ adalah suatu K-aljabar dengan $G = \{e, a, b, x, y, z\}$ dan $B = (\lambda^{+}, \lambda^{-})$ adalah ideal BAF pada $\mathcal{K}$ dengan

$$\lambda^+(x) = \begin{cases} 0.03, & x = e \\ 0.4, & x \neq e \end{cases} \text{ dan } \lambda^-(x) = \begin{cases} -0.2, & x = e \\ -0.35, & x \neq e \end{cases}.$$

Jika diketahui $(\alpha, \beta) = (-0.45, 0.5)$ maka buktikan bahwa $\tilde{B}_\beta^+$ dan $\tilde{B}_\alpha^-$ ideal pada $\mathcal{K}$.

Bukti:

Diketahui B ideal BAF pada K-aljabar $\mathcal{K}$. Akan dibuktikan $\tilde{B}_\beta^+ = \{x \in \mathcal{K} | \lambda^+(x) \leq \beta\} = \{e, a, b, x, y, z\}$ dan $\tilde{B}_\alpha^- = \{x \in \mathcal{K} | \lambda^-(x) \geq \alpha\} = \{e, a, b, x, y, z\}$ ideal pada $\mathcal{K}$.

i. $e \in \tilde{B}_\beta^+$ dan $e \in \tilde{B}_\alpha^-$,
ii. Berdasarkan Tabel 3.3 diketahui untuk setiap $x, y \in G$ berlaku

$$(x \odot y) \in \tilde{B}_\beta^+, (y \odot (y \odot x)) \in \tilde{B}_\beta^+ \rightarrow x \in \tilde{B}_\beta^+$$

dan berdasarkan Tabel 3.4 diketahui untuk setiap $x, y \in G$ berlaku

$$(x \odot y) \in \tilde{B}_\alpha^-, \big(y \odot (y \odot x)\big) \in \tilde{B}_\alpha^- \rightarrow x \in \tilde{B}_\alpha^-.$$

Karena memenuhi aksioma (i) dan (ii) ideal pada K-aljabar maka terbukti bahwa $\tilde{B}_\beta^+$ dan $\tilde{B}_\alpha^-$ ideal pada $\mathcal{K}$.

Akibat 3.2.4

Misalkan $\mathcal{K} = (G, *, \odot, e)$ adalah suatu K-aljabar dan $B = (\mu^+, \mu^-)$ adalah himpunan *bipolar fuzzy* pada $\mathcal{K}$. Jika $B = (\mu^+, \mu^-)$ anggota ideal BAF pada $\mathcal{K}$, maka untuk setiap $\gamma \in [0,1]$, anti γ-cut pada B adalah ideal pada $\mathcal{K}$.

Bukti:

Diketahui $B = (\mu^+, \mu^-)$ anggota ideal BAF pada $\mathcal{K}$. Akan dibuktikan untuk setiap $\gamma \in [0,1]$, anti γ-cut pada B adalah ideal pada $\mathcal{K}$.

i. Ambil $x \in$ anti γ-cut, maka $\mu^+(x) \leq \gamma$ dan $\mu^-(x) \geq -\gamma$. Karena $\mu^+(e) \leq \mu^+(x)$ dan $\mu^-(e) \geq \mu^-(x)$ maka $\mu^+(e) \leq \mu^+(x) \leq \gamma$ dan $\mu^-(e) \geq \mu^-(x) \geq -\gamma$. Jadi $\mu^+(e) \leq \gamma$ dan $\mu^-(e) \geq -\gamma \rightarrow e \in$ anti γ-cut pada B.
ii. Andaikan $(x \odot y) \in$ anti γ-cut, $(y \odot (y \odot x)) \in$ anti γ-cut dan $x \notin$ anti γ-cut. Sehingga $\mu^+(x \odot y) \leq \gamma$ dan $\mu^-(x \odot y) \geq -\gamma$.

$\mu^+(y \odot (y \odot x)) \le \gamma$ dan $\mu^-(y \odot (y \odot x)) \ge -\gamma$.

$\mu^+(x) > \gamma$ dan $\mu^-(x) < -\gamma$.

Hal ini kontradiksi dengan aksioma

$\mu^+(x) \le \max\{\mu^+(x \odot y), \mu^+(y \odot (y \odot x))\}$ dan

$\mu^-(x) \ge \min\{\mu^-(x \odot y), \mu^-(y \odot (y \odot x))\}$.

Jadi haruslah $x \in$ anti γ-cut, sehingga $(x \odot y) \in$ anti γ-cut, $(y \odot (y \odot x)) \in$ anti γ-cut $\rightarrow x \in$ anti γ-cut.

Terbukti anti γ-cut ideal pada $\mathcal{K}$.

Contoh 3.2.5 Berdasarkan Contoh 3.2.3 diketahui $\mathcal{K} = (G, \circ, \odot, e)$ adalah suatu K-aljabar dengan $G = \{e, a, b, x, y, z\}$ dan $B = (\lambda^+, \lambda^-)$ adalah ideal BAF pada $\mathcal{K}$ dengan

$$\lambda^+(x) = \begin{cases} 0.03, & x = e \\ 0.4, & x \neq e \end{cases} \quad \text{dan} \quad \lambda^-(x) = \begin{cases} -0.2, & x = e \\ -0.35, & x \neq e \end{cases}.$$

Jika diketahui $\gamma = 0.4$ maka buktikan bahwa anti γ-cut pada B adalah ideal pada $\mathcal{K}$.

Bukti:

Diketahui B adalah ideal BAF pada $\mathcal{K}$. Akan dibuktikan anti γ-cut pada B adalah ideal pada $\mathcal{K}$. $\tilde{B}_\gamma^+ = \{e, a, b, x, y, z\}$ dan $\tilde{B}_\gamma^- = \{e, a, b, x, y, z\}$ maka anti γ-cut pada B adalah $\tilde{B}_\gamma^+ \cap \tilde{B}_\gamma^- = \{e, a, b, x, y, z\}$.

i. $e \in$ anti γ-cut,

ii. Berdasarkan Tabel 3.3 dan Tabel 3.4 diketahui untuk setiap $x, y \in G$ berlaku $(x \odot y) \in$ anti γ-cut, $(y \odot (y \odot x)) \in$ anti γ-cut $\rightarrow x \in$ anti γ-cut.

Terbukti bahwa anti γ-cut ideal pada $\mathcal{K}$.

Akibat 3.2.6

Jika himpunan *bipolar fuzzy* $B = (\mu^+, \mu^-)$ anggota ideal BAF pada K-aljabar $\mathcal{K}$, maka $\tilde{B}_{(\alpha,\beta)}$ ideal pada $\mathcal{K}$ untuk setiap $(\alpha, \beta) \in [-1,0] \times [0,1]$.

Bukti:

Diketahui $B = (\mu^+, \mu^-)$ anggota ideal BAF pada K-aljabar $\mathcal{K}$. Akan dibuktikan $\tilde{B}_{(\alpha,\beta)}$ ideal pada $\mathcal{K}$.

i. Ambil $x \in \tilde{B}_{(\alpha,\beta)} \to \mu^+(x) \leq \beta$ dan $\mu^-(x) \geq \alpha$. Karena $\mu^+(e) \leq \mu^+(x)$ dan $\mu^-(e) \geq \mu^-(x)$ maka $\mu^+(e) \leq \mu^+(x) \leq \beta$ dan $\mu^-(e) \geq \mu^-(x) \geq \alpha$. Jadi $\mu^+(e) \leq \beta$ dan $\mu^-(e) \geq \alpha \to e \in \tilde{B}_{(\alpha,\beta)}$.

ii. Andaikan $(x \odot y) \in \tilde{B}_{(\alpha,\beta)}$, $(y \odot (y \odot x)) \in \tilde{B}_{(\alpha,\beta)}$ dan $x \notin \tilde{B}_{(\alpha,\beta)}$. Sehingga

$\mu^+(x \odot y) \leq \beta$ dan $\mu^-(x \odot y) \geq \alpha$,

$\mu^+(y \odot (y \odot x)) \leq \beta$ dan $\mu^-\big(y \odot (y \odot x)\big) \geq \alpha$,

$\mu^+(x) > \beta$ dan $\mu^-(x) < \alpha$.

Hal ini kontradiksi dengan aksioma

$\mu^+(x) \leq \max\{\mu^+(x \odot y), \mu^+(y \odot (y \odot x))\}$ dan

$\mu^-(x) \geq \min\{\mu^-(x \odot y), \mu^-\big(y \odot (y \odot x)\big)\}$.

Jadi haruslah $x \in \tilde{B}_{(\alpha,\beta)}$, sehingga $(x \odot y) \in \tilde{B}_{(\alpha,\beta)}$, $\big(y \odot (y \odot x)\big) \in \tilde{B}_{(\alpha,\beta)}$ $\to x \in \tilde{B}_{(\alpha,\beta)}$.

Terbukti $\tilde{B}_{(\alpha,\beta)}$ ideal pada $\mathcal{K}$.

3.3 Anti Image dan Anti Pre-image Ideal BAF pada K-aljabar

Pada subbab ini akan dibangun struktur anti image dan anti pre-image ideal BAF pada K-aljabar, kemudian dibahas teorema beserta pembuktian tentang anti image dan anti pre-image ideal BAF pada K-aljabar.

Definisi 3.3.1 (Anti image dan Anti Pre-image)

Misalkan $\psi: \mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}_2$ adalah pemetaan pada K-aljabar. Jika $B = (\mu^+, \mu^-)$ dan $V = (v^+, v^-)$ berturut-turut adalah himpunan *bipolar fuzzy* pada $\mathcal{K}_1$ dan $\mathcal{K}_2$. Anti image pada B dibawah ψ adalah himpunan *bipolar fuzzy* $\psi_a(B) = (\psi_a(\mu^+), \psi_a(\mu^-))$ pada $\mathcal{K}_2$, didefinisikan dengan

$$\psi_a(\mu^+)(x) = \begin{cases} \bigwedge_{y \in \psi^{-1}(x)} \mu^+(y), & \psi^{-1}(x) \neq \emptyset \\ 1, & lainnya \end{cases}$$

$$\psi_a(\mu^-)(x) = \begin{cases} \bigvee_{y \in \psi^{-1}(x)} \mu^-(y), & \psi^{-1}(x) \neq \emptyset \\ -1, & lainnya \end{cases}$$

Untuk setiap $x \in \mathcal{K}_2$, $\psi^{-1}(x) = \{z \in \mathcal{K}_1 | \psi(z) = x\}$. Anti pre-image $\psi^{-1}(V)$ pada V dibawah ψ adalah himpunan *bipolar fuzzy* pada $\mathcal{K}_1$ yang didefinisikan sebagai $\psi^{-1}\big((v^+)(y)\big) = v^+\big(\psi(y)\big), \psi^{-1}\big((v^-)(y)\big) = v^-\big(\psi(y)\big)$ untuk setiap $y \in \mathcal{K}_1$.

Teorema 3.3.2

Misalkan $\psi: \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{K}_2$ adalah homomorfisma pada K-aljabar. Jika $B = (\mu^+, \mu^-)$ dan $V = (v^+, v^-)$ berturut-turut adalah himpunan *bipolar fuzzy* pada $\mathcal{K}_1$ dan $\mathcal{K}_2$, maka

i. $[\psi^{-1}(V)]^c = \psi^{-1}(V^c)$

ii. $[\psi_a(B)]^c = \psi_a(B^c)$

Bukti:

i. $[\psi^{-1}(V)]^c = [\psi^{-1}(v^+), \psi^{-1}(v^-)]^c$

$= [v^+(\psi), v^-(\psi)]^c$

$= [1 - v^+(\psi), -1 - v^-(\psi)]$

$= [(v^+)^c(\psi), (v^-)^c(\psi)]$

$= [\psi^{-1}(v^+)^c, \psi^{-1}(v^-)^c]$

$= \psi^{-1}[(v^+)^c, (v^-)^c]$

$= \psi^{-1}(V^c)$

ii. $[\psi_a(B)]^c = [\psi_a(\mu^+), \psi_a(\mu^-)]^c$

$= [\mu^+\big(\psi_a{}^{-1}\big), \mu^-\big(\psi_a{}^{-1}\big)]^c$

$= [1 - \mu^+\big(\psi_a{}^{-1}\big), -1 - \mu^-\big(\psi_a{}^{-1}\big)]$

$= [(\mu^+)^c\big(\psi_a{}^{-1}\big), (\mu^-)^c\big(\psi_a{}^{-1}\big)]$

$$= [\psi_a(\mu^+)^c, \psi_a(\mu^-)^c]$$

$$= \psi_a(\mu^{+c}, \mu^{-c})$$

$$= \psi_a(B^c)$$

Terbukti.

Teorema 3.3.3

Jika $\psi: \mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}_2$ adalah K-homomorfisma dan $V = (v^+, v^-)$ anggota ideal BAF pada $\mathcal{K}_2$, maka anti pre-image $\psi^{-1}(V) = (\psi^{-1}(v^+), \psi^{-1}(v^-))$ anggota ideal BAF pada $\mathcal{K}_1$ dengan $\psi(e) = e$.

Bukti:

i. Diketahui V anggota ideal BAF pada $\mathcal{K}_2$, sehingga untuk setiap $x \in \mathcal{K}_2$ berlaku $v^+(e) \le v^+(x)$ dan $v^-(e) \ge v^-(x)$. Karena $\psi(y) = x$ untuk setiap $y \in \mathcal{K}_1$ dan $\psi(e) = e$, maka

$$v^+(\psi(e)) \le v^+(\psi(y)) \to \psi^{-1}((v^+)(e)) \le \psi^{-1}((v^+)(y)),$$

$$v^-(\psi(e)) \ge v^-(\psi(y)) \to \psi^{-1}((v^-)(e)) \ge \psi^{-1}((v^-)(y)).$$

Terbukti.

ii. Diketahui V anggota ideal BAF pada $\mathcal{K}_2$, sehingga untuk setiap $x_1, (x_1 \odot x_2), (x_2 \odot (x_2 \odot x_1)) \in \mathcal{K}_2$ berlaku

$$v^+(x_1) \le \max\{v^+(x_1 \odot x_2), v^+(x_2 \odot (x_2 \odot x_1))\},$$

$$v^-(x_1) \ge \min\{v^-(x_1 \odot x_2), v^-(x_2 \odot (x_2 \odot x_1))\}.$$

Karena $\psi: \mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}_2$, maka $\psi(y_1) = x_1$ dan $\psi(y_2) = x_2$

$$v^+(\psi(y_1)) \le \max\{v^+(\psi(y_1) \odot \psi(y_2)), v^+(\psi(y_2) \odot (\psi(y_2) \odot \psi(y_1)))\}$$

$$v^+(\psi(y_1)) \le \max\{v^+(\psi(y_1 \odot y_2)), v^+(\psi(y_2 \odot (y_2 \odot y_1))\}$$

$$\psi^{-1}((v^+)(y_1)) \le \max\{\psi^{-1}((v^+)(y_1 \odot y_2)), \psi^{-1}((v^+)(y_2 \odot (y_2 \odot y_1)))\}$$

dan

$$v^-(\psi(y_1)) \ge \min\{v^-(\psi(y_1) \odot \psi(y_2)), v^-(\psi(y_2) \odot (\psi(y_2) \odot \psi(y_1)))\}$$

$$v^-(\psi(y_1)) \geq \min\{v^-(\psi(y_1 \odot y_2)), v^-(\psi(y_2 \odot (y_2 \odot y_1))\}$$

$$\psi^{-1}((v^-)(y_1)) \geq \min\{\psi^{-1}((v^-)(y_1 \odot y_2)), \psi^{-1}((v^-)(y_2 \odot (y_2 \odot y_1)))\}$$

Terbukti.

Karena memenuhi aksioma (i) dan(ii) maka terbukti $\psi^{-1}(V) = (\psi^{-1}(v^+), \psi^{-1}(v^-))$ anggota ideal BAF pada $\mathcal{K}_1$.

Teorema 3.3.4

Misalkan $\psi: \mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}_2$ adalah anti homomorfisma pada K-aljabar yang dibangun oleh grup komutatif. Jika $V = (v^+, v^-)$ anggota ideal BAF pada $\mathcal{K}_2$, maka anti pre-image $\psi^{-1}(V) = (\psi^{-1}(v^+), \psi^{-1}(v^-))$ anggota ideal BAF pada $\mathcal{K}_1$ dengan $\psi(e) = e$.

Bukti:

i. Diketahui V anggota ideal BAF pada $\mathcal{K}_2$, sehingga untuk setiap $x \in \mathcal{K}_2$ berlaku $v^+(e) \leq v^+(x)$ dan $v^-(e) \geq v^-(x)$. Karena $\psi(y) = x$ untuk setiap $y \in \mathcal{K}_1$ dan $\psi(e) = e$, maka

$$v^+\big(\psi(e)\big) \leq v^+\big(\psi(y)\big) \to \psi^{-1}\big((v^+)(e)\big) \leq \psi^{-1}\big((v^+)(y)\big),$$

$$v^-\big(\psi(e)\big) \geq v^-\big(\psi(y)\big) \to \psi^{-1}\big((v^-)(e)\big) \geq \psi^{-1}\big((v^-)(y)\big).$$

ii. Diketahui V anggota ideal BAF pada $\mathcal{K}_2$, sehingga untuk setiap $x_1, (x_1 \odot x_2), (x_2 \odot (x_2 \odot x_1)) \in \mathcal{K}_2$ berlaku

$$v^+(x_1) \leq \max\big\{v^+(x_1 \odot x_2), v^+\big(x_2 \odot (x_2 \odot x_1)\big)\big\},$$

$$v^-(x_1) \geq \min\big\{v^-(x_1 \odot x_2), v^-\big(x_2 \odot (x_2 \odot x_1)\big)\big\}.$$

Karena $\psi: \mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}_2$, maka $\psi(y_1) = x_1$ dan $\psi(y_2) = x_2$

$$v^+(\psi(y_1)) \leq \max\big\{v^+\big(\psi(y_1) \odot \psi(y_2)\big), v^+\big(\psi(y_2) \odot \big(\psi(y_2) \odot \psi(y_1)\big)\big)\big\}$$

$$v^+(\psi(y_1)) \leq \max\{v^+(\psi(y_2 \odot y_1)), v^+(\psi((y_1 \odot y_2) \odot y_2)\}$$

$$v^+(\psi(y_1)) \leq \max\{v^+(\psi(y_1 \odot y_2)), v^+(\psi((y_2 \odot y_1) \odot y_2)\}$$

$$v^+(\psi(y_1)) \leq \max\{v^+(\psi(y_1 \odot y_2)), v^+(\psi(y_2 \odot (y_2 \odot y_1))\}$$

$$\psi^{-1}((v^+)(y_1)) \leq \max\{\psi^{-1}((v^+)(y_1 \odot y_2)), \psi^{-1}((v^+)(y_2 \odot (y_2 \odot y_1)))\}$$

dan

$$\upsilon^-(\psi(y_1)) \geq \min\{\upsilon^-(\psi(y_1)\odot\psi(y_2)), \upsilon^-(\psi(y_2)\odot(\psi(y_2)\odot\psi(y_1)))\}$$

$$\upsilon^-(\psi(y_1)) \geq \min\{\upsilon^-(\psi(y_2\odot y_1)), \upsilon^-(\psi((y_1\odot y_2)\odot y_2))\}$$

$$\upsilon^-(\psi(y_1)) \geq \min\{\upsilon^-(\psi(y_1\odot y_2)), \upsilon^-(\psi((y_2\odot y_1)\odot y_2))\}$$

$$\upsilon^-(\psi(y_1)) \geq \min\{\upsilon^-(\psi(y_1\odot y_2)), \upsilon^-(\psi(y_2\odot(y_2\odot y_1)))\}$$

$$\psi^{-1}((\upsilon^-)(y_1)) \geq \min\left\{\psi^{-1}((\upsilon^-)(y_1\odot y_2)), \psi^{-1}\left((\upsilon^-)(y_2\odot(y_2\odot y_1))\right)\right\}.$$

Karena memenuhi aksioma (i) dan(ii) maka terbukti $\psi^{-1}(V) = (\psi^{-1}(\upsilon^+), \psi^{-1}(\upsilon^-))$ anggota ideal BAF pada $\mathcal{K}_1$.

3.4 Translasi, Perluasan, dan Pergandaan *Bipolar Fuzzy* pada Ideal BAF pada *K*-aljabar

Pada subbab ini akan dibahas struktur dan sifat yang berkaitan dengan **t**ranslasi (*translations*), perluasan (*extensions*), dan pergandaan (*multiplication*) *bipolar fuzzy* pada ideal BAF pada K-aljabar. Untuk setiap himpunan *bipolar fuzzy* $B = (\lambda^+, \lambda^-)$ pada K-aljabar $\mathcal{K}$, misalkan $u = 1 - \sup\{\lambda^+(x) | x \in \mathcal{K}\}$ dan $i = -1 - \inf\{\lambda^-(x) | x \in \mathcal{K}\}$.

Definisi 3.4.1 (Translasi *Bipolar Fuzzy*)

Misalkan $B = (\lambda^+, \lambda^-)$ adalah himpunan *bipolar fuzzy* pada K-aljabar $\mathcal{K}$ dan $(\gamma, \delta) \in [0, u] \times [i, 0]$. Himpunan *bipolar fuzzy* $B^T_{(\gamma,\delta)} = \left(\lambda^+_{(\gamma,T)}, \lambda^-_{(\delta,T)}\right)$ disebut (γ, δ)-translasi *bipolar fuzzy* pada B, dimana

$$\lambda^+_{(\gamma,T)}: \mathcal{K} \to [0,1], x \to \lambda^+(x) + \gamma,$$

$$\lambda^-_{(\delta,T)}: \mathcal{K} \to [-1,0], x \to \lambda^-(x) + \delta.$$

Teorema 3.4.2

Jika $B = (\lambda^+, \lambda^-)$ adalah ideal BAF pada K-aljabar $\mathcal{K}$, maka (γ, δ)-translasi *bipolar fuzzy* pada B adalah ideal BAF pada $\mathcal{K}$ untuk setiap $(\gamma, \delta) \in [0, u] \times [i, 0]$.

Bukti:

i. Diketahui B adalah ideal BAF $\mathcal{K}$, sehingga untuk setiap $x \in \mathcal{K}$ berlaku $\lambda^+(e) \leq \lambda^+(x)$ dan $\lambda^-(e) \geq \lambda^-(x)$.

   Karena $\gamma \in [0, u]$ dan $u = 1 - \sup\{\lambda^+(x) | x \in \mathcal{K}\}$ maka

$$\lambda^+(e) + \gamma \leq \lambda^+(x) + \gamma.$$

   Karena $\delta \in [i, 0]$ dan $i = -1 - \inf\{\lambda^-(x) | x \in \mathcal{K}\}$ maka

$$\lambda^-(e) + \delta \geq \lambda^-(x) + \delta.$$

ii. Diketahui B adalah ideal BAF $\mathcal{K}$, sehingga berlaku

$$\lambda^+(x) \leq \max\{\lambda^+(x \odot y), \lambda^+(y \odot (y \odot x))\}$$

$$\lambda^+(x) + \gamma \leq \max\{\lambda^+(x \odot y), \lambda^+(y \odot (y \odot x))\} + \gamma$$

$$\lambda^+(x) + \gamma \leq \max\{\lambda^+(x \odot y) + \gamma, \lambda^+(y \odot (y \odot x)) + \gamma\},$$

   dan

$$\lambda^-(x) \geq \min\{\lambda^-(x \odot y), \lambda^-(y \odot (y \odot x))\}$$

$$\lambda^-(x) + \delta \geq \min\{\lambda^-(x \odot y), \lambda^-(y \odot (y \odot x))\} + \delta$$

$$\lambda^-(x) + \delta \geq \min\{\lambda^-(x \odot y) + \delta, \lambda^-(y \odot (y \odot x)) + \delta\}.$$

Terbukti bahwa (γ, δ)-translasi *bipolar fuzzy* pada B adalah ideal BAF pada $\mathcal{K}$.

Contoh 3.4.3

Berdasarkan Contoh 3.1.9 diketahui $B = (\lambda^+, \lambda^-)$ yang didefinisikan dengan

$$\lambda^+(x) = \begin{cases} 0.03 & , \quad x = e \\ 0.4 & , \quad x \neq e \end{cases} \text{ dan } \lambda^-(x) = \begin{cases} -0.2 & , \quad x = e \\ -0.35 & , \quad x \neq e \end{cases}$$

adalah ideal BAF pada K-aljabar $\mathcal{K} = (G, \circ, \odot, e)$ dengan $G = \{e, a, b, x, y, z\}$.

$$u = 1 - \sup\{\lambda^+(x) | x \in \mathcal{K}\} \qquad i = -1 - \inf\{\lambda^-(x) | x \in \mathcal{K}\}$$

$$= 1 - \sup\{0.03, 0.4\} \qquad = -1 - \inf\{-0.2, -0.35\}$$

$$= 1 - 0.4 = 0.6 \qquad = -1 - (-0.35) = -0.65$$

Jika diketahui $\gamma = 0.5$ dan $\delta = -0.3$, maka buktikan bahwa $B^T_{(\gamma,\delta)}$ ideal BAF pada $\mathcal{K}$.

Bukti:

i. B ideal BAF pada $\mathcal{K}$, maka memenuhi $\lambda^+(e) \leq \lambda^+(x)$ dan $\lambda^-(e) \geq \lambda^-(x)$. Diketahui $\gamma = 0.5$ dan $\delta = -0.3$, maka untuk setiap $x \in \mathcal{K}$ berlaku

$$\lambda^+(e) + 0.5 \leq \lambda^+(x) + 0.5$$
$$\lambda^+(e) + \gamma \leq \lambda^+(x) + \gamma,$$

$$\lambda^-(e) + (-0.3) \geq \lambda^-(x) + (-0.3)$$
$$\lambda^-(e) + \delta \geq \lambda^-(x) + \delta.$$

ii. B ideal BAF pada $\mathcal{K}$, maka memenuhi

$$\lambda^+(x) \leq \max\{\lambda^+(x \odot y), \lambda^+(y \odot (y \odot x))\}.$$

Diketahui $\gamma = 0.5$, maka

$$\lambda^+(x) + 0.5 \leq \max\{\lambda^+(x \odot y), \lambda^+(y \odot (y \odot x))\} + 0.5$$
$$\lambda^+(x) + 0.5 \leq \max\{\lambda^+(x \odot y) + 0.5, \lambda^+(y \odot (y \odot x)) + 0.5\}$$
$$\lambda^+(x) + \gamma \leq \max\{\lambda^+(x \odot y) + \gamma, \lambda^+(y \odot (y \odot x)) + \gamma\}.$$

B ideal BAF pada $\mathcal{K}$, maka memenuhi

$$\lambda^-(x) \geq \min\{\lambda^-(x \odot y), \lambda^-(y \odot (y \odot x))\}.$$

Diketahui $\delta = -0.3$, maka

$$\lambda^-(x) + (-0.3) \geq \min\{\lambda^-(x \odot y), \lambda^-(y \odot (y \odot x))\} + (-0.3)$$
$$\lambda^-(x) + (-0.3) \geq \min\{\lambda^-(x \odot y) + (-0.3), \lambda^-(y \odot (y \odot x)) + (-0.3)\}$$
$$\lambda^-(x) + \delta \geq \min\{\lambda^-(x \odot y) + \delta, \lambda^-(y \odot (y \odot x)) + \delta\}.$$

Terbukti $B^T_{(\gamma,\delta)}$ ideal BAF pada $\mathcal{K}$.

Teorema 3.4.4

Misalkan $B = (\lambda^+, \lambda^-)$ adalah himpunan *bipolar fuzzy* pada $\mathcal{K}$. Jika (γ, δ)-translasi *bipolar fuzzy* $B^T_{(\gamma,\delta)} = \left(\lambda^+_{(\gamma,T)}, \lambda^-_{(\delta,T)}\right)$ pada B adalah ideal BAF pada $\mathcal{K}$ untuk setiap $(\gamma, \delta) \in [0, u] \times [i, 0]$, maka $B = (\lambda^+, \lambda^-)$ adalah ideal BAF pada $\mathcal{K}$.

Bukti:

i. Diketahui (γ,δ)-translasi *bipolar fuzzy* $B^T_{(\gamma,\delta)}$ pada B adalah ideal BAF pada $\mathcal{K}$, sehingga berlaku $\lambda^+(e)+\gamma \le \lambda^+(x)+\gamma$ dan $\lambda^-(e)+\ \delta \ge \lambda^-(x)+\ \delta$.

Akan dibuktikan $\lambda^+(e) \le \lambda^+(x)$. Karena $\gamma \in [0,u]$ dan $u = 1 - \sup\{\lambda^+(x)|x \in \mathcal{K}\}$, maka

$$\lambda^+(e) \le \lambda^+(x).$$

Akan dibuktikan $\lambda^-(e) \ge \lambda^-(x)$. Karena $\delta \in [i,0]$ dan $i = -1 - \inf\{\lambda^-(x)|x \in \mathcal{K}\}$, maka

$$\lambda^-(e) \ge \lambda^-(x).$$

ii. Diketahui (γ,δ)-translasi *bipolar fuzzy* $B^T_{(\gamma,\delta)}$ pada B adalah ideal BAF pada $\mathcal{K}$, sehingga berlaku

$$\lambda^+(x)+\gamma \le \max\{\lambda^+(x\odot y)+\gamma, \lambda^+(y\odot(y\odot x))+\gamma\}$$

$$\lambda^+(x)+\gamma \le \max\{\lambda^+(x\odot y), \lambda^+(y\odot(y\odot x))\}+\gamma$$

$$\lambda^+(x) \le \max\{\lambda^+(x\odot y), \lambda^+(y\odot(y\odot x))\},$$

dan

$$\lambda^-(x)+\delta \ge \min\{\lambda^-(x\odot y)+\delta, \lambda^-(y\odot(y\odot x))+\delta\}$$

$$\lambda^-(x)+\delta \ge \min\{\lambda^-(x\odot y), \lambda^-(y\odot(y\odot x))\}+\delta$$

$$\lambda^-(x) \ge \min\{\lambda^-(x\odot y), \lambda^-(y\odot(y\odot x))\}.$$

Terbukti $B = (\lambda^+,\lambda^-)$ adalah ideal BAF pada $\mathcal{K}$.

Definisi 3.4.5 (Perluasan *Bipolar Fuzzy*)

Misalkan $B_1 = (\lambda^+,\lambda^-)$ dan $B_2 = (\mu^+,\mu^-)$ adalah himpunan *bipolar fuzzy* pada K-aljabar $\mathcal{K}$. Jika $\lambda^+(x) \le \mu^+(x)$ dan $\lambda^-(x) \ge \mu^-(x)$ untuk setiap $x \in \mathcal{K}$, maka B_2 disebut perluasan *bipolar fuzzy* pada B_1.

Definisi 3.4.6 (Perluasan ideal *Bipolar Anti Fuzzy*)

Misalkan $B_1 = (\lambda^+, \lambda^-)$ dan $B_2 = (\mu^+, \mu^-)$ adalah himpunan *bipolar fuzzy* pada K-aljabar $\mathcal{K}$. B_2 disebut perluasan ideal BAF pada B_1 jika aksioma berikut dipenuhi.

i. B_2 merupakan perluasan *bipolar fuzzy* pada B_1.

ii. Jika B_2 adalah ideal BAF pada $\mathcal{K}$, maka B_1 juga ideal BAF pada $\mathcal{K}$.

Berdasarkan definisi $\lambda^+_{(\gamma,T)} \geq \lambda^+(x)$ dan $\lambda^-_{(\delta,T)} \leq \lambda^-(x)$ untuk setiap $x \in \mathcal{K}$, diperoleh beberapa teorema sebagai berikut.

Teorema 3.4.7

Jika $B = (\lambda^+, \lambda^-)$ adalah ideal BAF pada K-aljabar $\mathcal{K}$, maka (γ, δ)-translasi *bipolar fuzzy* $B^T_{(\gamma,\delta)} = \left(\lambda^+_{(\gamma,T)}, \lambda^-_{(\delta,T)}\right)$ pada B adalah perluasan ideal BAF pada B untuk setiap $(\gamma, \delta) \in [0, u] \times [i, 0]$.

Bukti:

i. Akan dibuktikan bahwa $B^T_{(\gamma,\delta)}$ perluasan *bipolar fuzzy* pada B.

Karena $\gamma \in [0, u]$ maka $\lambda^+(x) \leq \lambda^+(x) + \gamma$ dan $\delta \in [i, 0]$ maka $\lambda^-(x) \geq \lambda^-(x) + \delta$. Terbukti bahwa $B^T_{(\gamma,\delta)}$ perluasan *bipolar fuzzy* pada B.

ii. Andaikan $B^T_{(\gamma,\delta)}$ ideal BAF pada $\mathcal{K}$, maka B bukan ideal BAF pada $\mathcal{K}$.

- $\lambda^+(e) + \gamma \leq \lambda^+(x) + \gamma$ dan $\lambda^-(e) + \delta \geq \lambda^-(x) + \delta$

  $\lambda^+(e) \leq \lambda^+(x)$ $\qquad$ $\lambda^-(e) \geq \lambda^-(x)$

- $\lambda^+(x) + \gamma \leq \max\{\lambda^+(x \odot y) + \gamma, \lambda^+\left(y \odot (y \odot x)\right) + \gamma\}$

  $\lambda^+(x) + \gamma \leq \max\{\lambda^+(x \odot y), \lambda^+\left(y \odot (y \odot x)\right)\} + \gamma$

  $\lambda^+(x) \leq \max\{\lambda^+(x \odot y), \lambda^+\left(y \odot (y \odot x)\right)\}$,

  dan

  $\lambda^-(x) + \delta \geq \min\{\lambda^-(x \odot y) + \delta, \lambda^-\left(y \odot (y \odot x)\right) + \delta\}$

  $\lambda^-(x) + \delta \geq \min\{\lambda^-(x \odot y), \lambda^-\left(y \odot (y \odot x)\right)\} + \delta$

  $\lambda^-(x) \geq \min\{\lambda^-(x \odot y), \lambda^-\left(y \odot (y \odot x)\right)\}$.

Hal ini bertentangan dengan pengandaian, haruslah B ideal BAF pada $\mathcal{K}$.

Terbukti bahwa $B^T_{(\gamma,\delta)}$ pada B adalah perluasan ideal BAF pada B.

Contoh 3.4.8

Berdasarkan Contoh 3.4.3 diketahui $B^T_{(\gamma,\delta)}$ ideal BAF pada $\mathcal{K}$ dengan $\gamma = 0.5$ dan $\delta = -0.3$, maka buktikan bahwa $B^T_{(\gamma,\delta)}$ perluasan ideal BAF pada B.

Bukti:

i. Akan dibuktikan $B^T_{(\gamma,\delta)}$ perluasan *bipolar fuzzy* pada B.

$$\lambda^+(x) \leq \lambda^+(x) + 0.5$$

$$\lambda^-(x) \geq \lambda^+(x) + (-0.3)$$

Terbukti $B^T_{(\gamma,\delta)}$ perluasan *bipolar fuzzy* pada B.

ii. Andaikan $B^T_{(\gamma,\delta)}$ ideal BAF pada $\mathcal{K}$, maka B bukan ideal BAF pada $\mathcal{K}$.

- $\lambda^+(e) + \gamma \leq \lambda^+(x) + \gamma$ dan $\lambda^-(e) + \delta \geq \lambda^-(x) + \delta$

  $\lambda^+(e) \leq \lambda^+(x)$ $\lambda^-(e) \geq \lambda^-(x)$

- $\lambda^+(x) + \gamma \leq \max\{\lambda^+(x \odot y) + \gamma, \lambda^+(y \odot (y \odot x)) + \gamma\}$

  $$\lambda^+(x) + \gamma \leq \max\{\lambda^+(x \odot y), \lambda^+(y \odot (y \odot x))\} + \gamma$$

  $$\lambda^+(x) \leq \max\{\lambda^+(x \odot y), \lambda^+(y \odot (y \odot x))\},$$

  dan

  $$\lambda^-(x) + \delta \geq \min\{\lambda^-(x \odot y) + \delta, \lambda^-(y \odot (y \odot x)) + \delta\}$$

  $$\lambda^-(x) + \delta \geq \min\{\lambda^-(x \odot y), \lambda^-(y \odot (y \odot x))\} + \delta$$

  $$\lambda^-(x) \geq \min\{\lambda^-(x \odot y), \lambda^-(y \odot (y \odot x))\}.$$

Hal ini bertentangan dengan pengandaian, haruslah B ideal BAF pada $\mathcal{K}$.

Terbukti bahwa $B^T_{(\gamma,\delta)}$ perluasan ideal BAF pada B.

Definisi 3.4.9

Misalkan $B = (\mu^+, \mu^-)$ adalah himpunan *bipolar fuzzy* pada K-aljabar $\mathcal{K}$,

$(\alpha,\beta) \in [-1,0] \times [0,1], \gamma \in [0,u], \delta \in [i,0]$. Didefinisikan

$\tilde{B}^{+T}_{(\beta,\gamma)} = \{x \in \mathcal{K} | \mu^+(x) \leq \beta - \gamma\}$, $\tilde{B}^{-T}_{(\alpha,\delta)} = \{x \in \mathcal{K} | \mu^-(x) \geq \alpha - \delta\}$, dan

$\tilde{B}^T_{((\alpha,\beta),(\gamma,\delta))} = \{x \in \mathcal{K} | \mu^-(x) \geq \alpha - \gamma \; dan \; \mu^+(x) \leq \beta - \delta\}$.

Teorema 3.4.10

Jika $B = (\mu^+, \mu^-)$ adalah ideal BAF pada K-aljabar $\mathcal{K}$, maka $\tilde{B}^{+T}_{(\beta,\gamma)}$ dan $\tilde{B}^{-T}_{(\alpha,\delta)}$ adalah ideal pada $\mathcal{K}$ untuk setiap $\alpha \in Im(\mu^-)$ dan $\beta \in Im(\mu^+)$ dengan $\beta \geq \gamma$ dan $\alpha \leq \delta$.

Bukti:

i. B adalah ideal BAF pada K-aljabar $\mathcal{K}$ sehingga memenuhi $\mu^+(e) \leq \mu^+(x)$ dan $\mu^-(e) \geq \mu^-(x)$.

Ambil $x \in \tilde{B}^{+T}_{(\beta,\gamma)} \rightarrow \mu^+(x) \leq \beta - \gamma$. Karena $\mu^+(e) \leq \mu^+(x)$ dan $\mu^+(x) \leq \beta - \gamma$ maka $\mu^+(e) \leq \beta - \gamma$. Terbukti $e \in \tilde{B}^{+T}_{(\beta,\gamma)}$.

Ambil $x \in \tilde{B}^{-T}_{(\alpha,\delta)} \rightarrow \mu^-(x) \geq \alpha - \delta$. Karena $\mu^-(e) \geq \mu^-(x)$ dan $\mu^-(x) \geq \alpha - \delta$ maka $\mu^-(e) \geq \alpha - \delta$. Terbukti $e \in \tilde{B}^{-T}_{(\alpha,\delta)}$.

ii. B adalah ideal BAF pada K-aljabar $\mathcal{K}$ sehingga memenuhi

$\mu^+(x) \leq \max\{\mu^+(x \odot y), \mu^+(y \odot (y \odot x))\}$ dan

$\mu^-(x) \geq \min\{\mu^-(x \odot y), \mu^-(y \odot (y \odot x))\}$.

Ambil $(x \odot y)$ dan $(y \odot (y \odot x)) \in \tilde{B}^{+T}_{(\beta,\gamma)}$ sehingga diperoleh

$\mu^+(x \odot y) \leq \beta - \gamma$ dan $\mu^+(y \odot (y \odot x)) \leq \beta - \gamma$.

$$\max\{\mu^+(x \odot y), \mu^+(y \odot (y \odot x))\} \leq \max\{\beta - \gamma, \beta - \gamma\},$$

$$\max\{\mu^+(x \odot y), \mu^+(y \odot (y \odot x))\} \leq \beta - \gamma.$$

Karena $\mu^+(x) \leq \max\{\mu^+(x \odot y), \mu^+(y \odot (y \odot x))\}$ maka $\mu^+(x) \leq \beta - \gamma$. Terbukti $x \in \tilde{B}^{+T}_{(\beta,\gamma)}$.

Ambil $(x \odot y)$ dan $(y \odot (y \odot x)) \in \tilde{B}^{-T}_{(\alpha,\delta)}$ sehingga diperoleh

$\mu^-(x \odot y) \geq \alpha - \delta$ dan $\mu^-(y \odot (y \odot x)) \geq \alpha - \delta$.

$\min\{\mu^-(x \odot y), \mu^-(y \odot (y \odot x))\} \geq \min\{\alpha - \delta, \alpha - \delta\}$

$\min\{\mu^-(x \odot y), \mu^-(y \odot (y \odot x))\} \geq \alpha - \delta$

Karena $\mu^-(x) \geq \min\{\mu^-(x \odot y), \mu^-(y \odot (y \odot x))\}$ maka $\mu^-(x) \geq \alpha - \delta$.

Terbukti $x \in \tilde{B}^{-T}_{(\alpha,\delta)}$.

Jadi terbukti bahwa $\tilde{B}^{+T}_{(\beta,\gamma)}$ dan $\tilde{B}^{-T}_{(\alpha,\delta)}$ adalah ideal pada $\mathcal{K}$

Akibat 3.4.11

Jika $B = (\mu^+, \mu^-)$ adalah ideal BAF pada K-aljabar $\mathcal{K}$, maka $\tilde{B}^T_{((\alpha,\beta),(\gamma,\delta))}$ adalah ideal pada $\mathcal{K}$ untuk setiap $(\alpha, \beta) \in [-1,0] \times [0,1]$ dan $(\gamma, \delta) \in [0, u] \times [i, 0]$.

Bukti:

i. B ideal BAF pada K-aljabar $\mathcal{K}$, sehingga memenuhi $\mu^+(e) \leq \mu^+(x)$ dan $\mu^-(e) \geq \mu^-(x)$.

Ambil $x \in \tilde{B}^T_{((\alpha,\beta),(\gamma,\delta))}$ sehingga $\mu^+(x) \leq \beta - \delta$ dan $\mu^-(x) \geq \alpha - \gamma$. Karena $\mu^+(e) \leq \mu^+(x)$ dan $\mu^-(e) \geq \mu^-(x)$ maka

$$\mu^+(e) \leq \mu^+(x) \leq \beta - \delta \rightarrow \mu^+(e) \leq \beta - \delta,$$

$$\mu^-(e) \geq \mu^-(x) \geq \alpha - \gamma \rightarrow \mu^-(e) \geq \alpha - \gamma.$$

Terbukti $e \in \tilde{B}^T_{((\alpha,\beta),(\gamma,\delta))}$.

ii. B ideal BAF pada K-aljabar $\mathcal{K}$, sehingga memenuhi

$\mu^+(x) \leq \max\{\mu^+(x \odot y), \mu^+(y \odot (y \odot x))\}$ dan

$\mu^-(x) \geq \min\{\mu^-(x \odot y), \mu^-(y \odot (y \odot x))\}$.

Ambil $(x \odot y)$ dan $(y \odot (y \odot x)) \in \tilde{B}^T_{((\alpha,\beta),(\gamma,\delta))}$ sehingga diperoleh

$\mu^+(x \odot y) \leq \beta - \delta$ dan $\mu^+\big(y \odot (y \odot x)\big) \leq \beta - \delta$,

$$\max\{\mu^+(x \odot y), \mu^+(y \odot (y \odot x))\} \leq \beta - \delta.$$

$\mu^-(x \odot y) \geq \alpha - \gamma$ dan $\mu^-\big(y \odot (y \odot x)\big) \geq \alpha - \gamma$,

$$\min\{\mu^-(x \odot y), \mu^-(y \odot (y \odot x))\} \geq \alpha - \gamma.$$

Karena B ideal BAF pada K-aljabar $\mathcal{K}$, maka

$$\mu^+(x) \leq \beta - \delta \text{ dan } \mu^-(x) \geq \alpha - \gamma.$$

Terbukti $x \in \tilde{B}^T_{((\alpha,\beta),(\gamma,\delta))}$.

Jadi terbukti bahwa $\tilde{B}^T_{((\alpha,\beta),(\gamma,\delta))}$ adalah ideal pada $\mathcal{K}$.

Teorema 3.4.12

Misalkan $B = (\mu^+, \mu^-)$ adalah himpunan *bipolar fuzzy* pada K-aljabar $\mathcal{K}$. (γ, δ)-translasi *bipolar fuzzy* pada B adalah ideal BAF pada $\mathcal{K}$ jika dan hanya jika $\tilde{B}^{+T}_{(\beta,\gamma)}$ dan $\tilde{B}^{-T}_{(\alpha,\delta)}$ adalah ideal pada $\mathcal{K}$ untuk setiap $\alpha \in Im(\mu^-), \beta \in Im(\mu^+)$, dan $(\gamma, \delta) \in [0, u] \times [i, 0]$ dengan $\alpha < \delta$ dan $\beta > \gamma$.

Bukti:

($\Rightarrow$) Diketahui $B^T_{(\gamma,\delta)}$ ideal BAF pada $\mathcal{K}$, akan dibuktikan $\tilde{B}^{+T}_{(\beta,\gamma)}$ dan $\tilde{B}^{-T}_{(\alpha,\delta)}$ adalah ideal pada $\mathcal{K}$.

i. a. Ambil $x \in \tilde{B}^{+T}_{(\beta,\gamma)} \rightarrow \mu^+(x) \leq \beta - \gamma$. Karena $B^T_{(\gamma,\delta)}$ ideal BAF pada $\mathcal{K}$, maka $\mu^+(e) + \gamma \leq \mu^+(x) + \gamma$. Karena $\gamma \in [0, u]$ maka diperoleh $\mu^+(e) \leq \mu^+(x)$. Jadi $\mu^+(e) \leq \mu^+(x) \leq \beta - \gamma$. Terbukti $e \in \tilde{B}^{+T}_{(\beta,\gamma)}$.

b. Ambil $x \in \tilde{B}^{-T}_{(\alpha,\delta)} \rightarrow \mu^-(x) \geq \alpha - \delta$. Karena $B^T_{(\gamma,\delta)}$ ideal BAF pada $\mathcal{K}$, maka $\mu^-(e) + \delta \geq \mu^-(x) + \delta$. Karena $\delta \in [i, 0]$ maka diperoleh $\mu^-(e) \geq \mu^-(x)$. Jadi $\mu^-(e) \geq \mu^-(x) \geq \alpha - \delta$. Terbukti $e \in \tilde{B}^{-T}_{(\alpha,\delta)}$.

ii. a. Ambil $(x \odot y), (y \odot (y \odot x)) \in \tilde{B}^{+T}_{(\beta,\gamma)} \rightarrow \mu^+(x \odot y) \leq \beta - \gamma$ dan $\mu^+(y \odot (y \odot x)) \leq \beta - \gamma$. Karena $B^T_{(\gamma,\delta)}$ ideal BAF pada $\mathcal{K}$, maka memenuhi

$$\mu^+(x) \leq \max\{\mu^+(x \odot y), \mu^+(y \odot (y \odot x))\} \leq \beta - \gamma$$

Terbukti $x \in \tilde{B}^{+T}_{(\beta,\gamma)}$.

b. Ambil $(x \odot y), (y \odot (y \odot x)) \in \tilde{B}^{-T}_{(\alpha,\delta)} \rightarrow \mu^{-}(x \odot y) \geq \alpha - \delta$ dan $\mu^{-}(y \odot (y \odot x)) \geq \alpha - \delta$. Karena $B^{T}_{(\gamma,\delta)}$ ideal BAF pada $\mathcal{K}$, maka memenuhi

$$\mu^{-}(x) \geq \min\{\mu^{-}(x \odot y), \mu^{-}(y \odot (y \odot x))\} \geq \alpha - \delta.$$

Terbukti $x \in \tilde{B}^{-T}_{(\alpha,\delta)}$.

Terbukti $\tilde{B}^{+T}_{(\beta,\gamma)}$ dan $\tilde{B}^{-T}_{(\alpha,\delta)}$ adalah ideal pada $\mathcal{K}$.

($\Leftarrow$) Diketahui $\tilde{B}^{+T}_{(\beta,\gamma)}$ dan $\tilde{B}^{-T}_{(\alpha,\delta)}$ adalah ideal pada $\mathcal{K}$, akan dibuktikan $B^{T}_{(\gamma,\delta)}$ ideal BAF pada $\mathcal{K}$.

i. Ambil $x \in B^{T}_{(\gamma,\delta)} \rightarrow \mu^{+}(x) + \gamma$ dan $\mu^{-}(x) + \delta$. Karena $\tilde{B}^{+T}_{(\beta,\gamma)}$ ideal pada $\mathcal{K}$, maka untuk setiap $x \in \tilde{B}^{+T}_{(\beta,\gamma)}$ terdapat e sedemikian hingga $\mu^{+}(e) \leq \beta - \gamma$ dan $\mu^{+}(x) \leq \beta - \gamma$, dapat ditulis dengan $\mu^{+}(e) + \gamma \leq \beta$ dan $\mu^{+}(x) + \gamma \leq \beta$. Andaikan $\mu^{+}(e) + \gamma > \mu^{+}(x) + \gamma$ dan $\mu^{+}(x) + \gamma = \beta$, maka diperoleh $\mu^{+}(e) + \gamma > \beta$. Hal ini bertentangan dengan pernyataan $\mu^{+}(e) + \gamma \leq \beta$. Haruslah $\mu^{+}(e) + \gamma \leq \mu^{+}(x) + \gamma$.

Karena $\tilde{B}^{-T}_{(\alpha,\delta)}$ ideal pada $\mathcal{K}$, maka untuk setiap $x \in \tilde{B}^{-T}_{(\alpha,\delta)}$ terdapat e sedemikian hingga $\mu^{-}(e) \geq \alpha - \delta$ dan $\mu^{-}(x) \geq \alpha - \delta$, dapat ditulis dengan $\mu^{-}(e) + \delta \geq \alpha$ dan $\mu^{-}(x) + \delta \geq \alpha$. Andaikan $\mu^{-}(e) + \delta < \mu^{-}(x) + \delta$ dan $\mu^{-}(x) + \delta = \alpha$, maka diperoleh $\mu^{-}(e) + \delta < \alpha$. Hal ini bertentangan dengan pernyataan $\mu^{-}(e) + \delta \geq \alpha$. Haruslah $\mu^{-}(e) + \delta \geq \mu^{-}(x) + \delta$.

ii. Ambil $(x \odot y), (y \odot (y \odot x)) \in B^{T}_{(\gamma,\delta)}$ sehingga

$$\mu^{+}(x \odot y) + \gamma \qquad \mu^{-}(x \odot y) + \delta$$

$$\mu^{+}(y \odot (y \odot x)) + \gamma \qquad \mu^{-}(y \odot (y \odot x)) + \delta.$$

Karena $\tilde{B}^{+T}_{(\beta,\gamma)}$ ideal pada $\mathcal{K}$, maka

$$\left.\begin{array}{r}\mu^{+}(x \odot y) \leq \beta-\gamma \\ \mu^{+}(y \odot(y \odot x)) \leq \beta-\gamma\end{array}\right\} \rightarrow \mu^{+}(x) \leq \beta-\gamma,$$

atau dapat ditulis menjadi

$$\left.\begin{array}{r}\mu^{+}(x \odot y)+\gamma \leq \beta \\ \mu^{+}(y \odot(y \odot x))+\gamma \leq \beta\end{array}\right\} \rightarrow \mu^{+}(x)+\gamma \leq \beta.$$

Sehingga $\max\{\mu^{+}(x \odot y)+\gamma, \mu^{+}(y \odot(y \odot x))+\gamma\} \leq \beta$.

Andaikan $\mu^{+}(x)+\gamma>\max\{\mu^{+}(x \odot y)+\gamma, \mu^{+}(y \odot(y \odot x))+\gamma\}$ dan $\max\{\mu^{+}(x \odot y)+\gamma, \mu^{+}(y \odot(y \odot x))+\gamma\}=\beta$, maka diperoleh $\mu^{+}(x)+\gamma>\beta$. Hal ini bertentangan dengan pernyataan $\mu^{+}(x)+\gamma \leq \beta$. Haruslah $\mu^{+}(x)+\gamma \leq \max\{\mu^{+}(x \odot y)+\gamma, \mu^{+}(y \odot(y \odot x))+\gamma\}$.

Karena $\tilde{B}^{-T}_{(\alpha,\delta)}$ ideal pada $\mathcal{K}$, maka

$$\left.\begin{array}{r}\mu^{-}(x \odot y) \geq \alpha-\delta \\ \mu^{-}(y \odot(y \odot x)) \geq \alpha-\delta\end{array}\right\} \rightarrow \mu^{-}(x) \geq \alpha-\delta,$$

atau dapat ditulis menjadi

$$\left.\begin{array}{r}\mu^{-}(x \odot y)+\delta \geq \alpha \\ \mu^{-}(y \odot(y \odot x))+\delta \geq \alpha\end{array}\right\} \rightarrow \mu^{-}(x)+\delta \geq \alpha.$$

Sehingga $\min\{\mu^{-}(x \odot y)+\delta, \mu^{-}(y \odot(y \odot x))+\delta\} \geq \alpha$.

Andaikan $\mu^{-}(x)+\delta<\min\{\mu^{-}(x \odot y)+\delta, \mu^{-}(y \odot(y \odot x))+\delta\}$ dan $\min\{\mu^{-}(x \odot y)+\delta, \mu^{-}(y \odot(y \odot x))+\delta\}=\alpha$, maka diperoleh $\mu^{-}(x)+\delta<\alpha$. Hal ini bertentangan dengan pernyataan $\mu^{-}(x)+\delta \geq \alpha$. Haruslah $\mu^{-}(x)+\delta \geq \min\{\mu^{-}(x \odot y)+\delta, \mu^{-}(y \odot(y \odot x))+\delta\}$.

Terbukti $B^{T}_{(\gamma,\delta)}$ ideal BAF pada $\mathcal{K}$.

Akibat 3.4.13

Misalkan $B=(\mu^{+}, \mu^{-})$ adalah himpunan *bipolar fuzzy* pada K-aljabar $\mathcal{K}$. (γ, δ)-translasi *bipolar fuzzy* pada B adalah ideal BAF pada $\mathcal{K}$ jika dan hanya jika $\tilde{B}^{T}_{((\alpha,\beta),(\gamma,\delta))}$ adalah ideal pada $\mathcal{K}$ untuk setiap $\alpha \in Im(\mu^-), \beta \in Im(\mu^+)$, dan $(\gamma, \delta) \in [0, u] \times [i, 0]$ dengan $\alpha < \delta$ dan $\beta > \gamma$.

Bukti:

($\Rightarrow$) Diketahui $B^T_{(\gamma,\delta)}$ ideal BAF pada $\mathcal{K}$, akan dibuktikan $\tilde{B}^T_{((\alpha,\beta),(\gamma,\delta))}$ ideal pada $\mathcal{K}$.

i. Ambil $x \in \tilde{B}^T_{((\alpha,\beta),(\gamma,\delta))} \rightarrow \mu^+(x) \leq \beta - \delta$ dan $\mu^-(x) \geq \alpha - \gamma$. Karena $B^T_{(\gamma,\delta)}$ ideal BAF pada $\mathcal{K}$, maka

$$\mu^+(e) \leq \mu^+(x) \leq \beta - \delta \text{ dan } \mu^-(e) \geq \mu^-(x) \geq \alpha - \gamma.$$

Terbukti $e \in \tilde{B}^T_{((\alpha,\beta),(\gamma,\delta))}$.

ii. Ambil $(x \odot y), \big(y \odot (y \odot x)\big) \in \tilde{B}^T_{((\alpha,\beta),(\gamma,\delta))}$, sehingga

$$\mu^+(x \odot y) \leq \beta - \delta \qquad \mu^-(x \odot y) \geq \alpha - \gamma$$

$$\mu^+\big(y \odot (y \odot x)\big) \leq \beta - \delta \qquad \mu^-\big(y \odot (y \odot x)\big) \geq \alpha - \gamma.$$

Karena $B^T_{(\gamma,\delta)}$ ideal BAF pada $\mathcal{K}$, maka

$$\mu^+(x) \leq \max\{\mu^+(x \odot y), \mu^+\big(y \odot (y \odot x)\big)\} \leq \beta - \delta,$$

$$\mu^-(x) \geq \min\{\mu^-(x \odot y), \mu^-\big(y \odot (y \odot x)\big)\} \geq \alpha - \gamma.$$

Terbukti $x \in \tilde{B}^T_{((\alpha,\beta),(\gamma,\delta))}$.

Terbukti $\tilde{B}^T_{((\alpha,\beta),(\gamma,\delta))}$ ideal pada $\mathcal{K}$.

($\Leftarrow$) Diketahui $\tilde{B}^T_{((\alpha,\beta),(\gamma,\delta))}$ ideal pada $\mathcal{K}$, akan dibuktikan $B^T_{(\gamma,\delta)}$ ideal BAF pada $\mathcal{K}$.

i. $\tilde{B}^T_{((\alpha,\beta),(\gamma,\delta))}$ ideal pada $\mathcal{K}$, maka

$$\begin{matrix} \mu^+(e) \leq \beta - \delta \\ \mu^-(e) \geq \alpha - \gamma \end{matrix} \text{ dan } \begin{matrix} \mu^+(x) \leq \beta - \delta \\ \mu^-(x) \geq \alpha - \gamma \end{matrix}.$$

Andaikan $\mu^+(e) > \mu^+(x)$ dan $\mu^+(x) = \beta - \delta$ maka $\mu^+(e) > \beta - \delta$. Hal ini kontradiksi dengan $\mu^+(e) \leq \beta - \delta$. Haruslah $\mu^+(e) \leq \mu^+(x) \leq \beta - \delta$. Sehingga $\mu^+(e) + \gamma \leq \mu^+(x) + \gamma \leq \beta - \delta + \gamma$. Jadi $\mu^+(e) + \gamma \leq \mu^+(x) + \gamma$.

Andaikan $\mu^-(e) < \mu^-(x)$ dan $\mu^-(x) = \alpha - \gamma$ maka $\mu^-(e) < \alpha - \gamma$. Hal ini kontradiksi dengan $\mu^-(e) \geq \alpha - \gamma$. Haruslah $\mu^-(e) \geq \mu^-(x) \geq \alpha - \gamma$. Sehingga $\mu^-(e) + \delta \geq \mu^-(x) + \delta \geq \alpha - \gamma + \delta$. Jadi $\mu^-(e) + \delta \geq \mu^-(x) + \delta$.

ii. $\tilde{B}^T_{((\alpha,\beta),(\gamma,\delta))}$ ideal pada $\mathcal{K}$, maka

- $\left.\begin{matrix} \mu^+(x \odot y) \leq \beta - \delta \\ \mu^+(y \odot (y \odot x)) \leq \beta - \delta \end{matrix}\right\} \rightarrow \mu^+(x) \leq \beta - \delta$

Andaikan $\mu^+(x) > \max\{\mu^+(x \odot y), \mu^+(y \odot (y \odot x))\}$ dan $\max\{\mu^+(x \odot y), \mu^+(y \odot (y \odot x))\} = \beta - \delta$, maka diperoleh $\mu^+(x) > \beta - \delta$. Hal ini kontradiksi dengan $\mu^+(x) \leq \beta - \delta$. Haruslah

$$\mu^+(x) \leq \max\{\mu^+(x \odot y), \mu^+\big(y \odot (y \odot x)\big)\}.$$

Sehingga

$$\mu^+(x) + \gamma \leq \max\{\mu^+(x \odot y), \mu^+\big(y \odot (y \odot x)\big)\} + \gamma$$

$$\mu^+(x) + \gamma \leq \max\{\mu^+(x \odot y) + \gamma, \mu^+\big(y \odot (y \odot x)\big) + \gamma\}.$$

- $\left.\begin{matrix} \mu^-(x \odot y) \geq \alpha - \gamma \\ \mu^-(y \odot (y \odot x)) \geq \alpha - \gamma \end{matrix}\right\} \rightarrow \mu^-(x) \geq \alpha - \gamma$

Andaikan $\mu^-(x) < \min\{\mu^-(x \odot y), \mu^-(y \odot (y \odot x))\}$ dan $\min\{\mu^-(x \odot y), \mu^-(y \odot (y \odot x))\} = \alpha - \gamma$, maka diperoleh $\mu^-(x) < \alpha - \gamma$. Hal ini kontradiksi dengan $\mu^-(x) \geq \alpha - \gamma$. Haruslah

$$\mu^-(x) \geq \min\{\mu^-(x \odot y), \mu^-\big(y \odot (y \odot x)\big)\}.$$

Sehingga

$$\mu^-(x) + \delta \geq \min\{\mu^-(x \odot y), \mu^-\big(y \odot (y \odot x)\big)\} + \delta$$

$$\mu^-(x) + \delta \geq \min\{\mu^-(x \odot y) + \delta, \mu^-\big(y \odot (y \odot x)\big) + \delta\}.$$

Terbukti $B^T_{(\gamma,\delta)}$ ideal BAF pada $\mathcal{K}$.

Teorema 3.4.14

Misalkan $B = (\mu^+, \mu^-)$ adalah ideal BAF pada K-aljabar $\mathcal{K}$, $(\gamma, \delta) \in [0, u] \times [i, 0]$ dan $(\gamma', \delta') \in [0, u] \times [i, 0]$. Jika $(\gamma, \delta) \geq (\gamma', \delta')$, maka (γ, δ)-translasi *bipolar fuzzy* $B^T_{(\gamma,\delta)}$ pada B adalah perluasan ideal BAF pada (γ', δ')- translasi $B^T_{(\gamma',\delta')}$ pada B.

Bukti:

i. Akan dibuktikan bahwa $B^T_{(\gamma,\delta)}$ pada B adalah perluasan *bipolar fuzzy* pada $B^T_{(\gamma',\delta')}$ pada B. Karena $(\gamma, \delta) \geq (\gamma', \delta')$ maka

$$\mu^+(x) + \gamma' \leq \mu^+(x) + \gamma,$$

$$\mu^-(x) + \delta' \geq \mu^-(x) + \delta.$$

Terbukti $B^T_{(\gamma,\delta)}$ adalah perluasan *bipolar fuzzy* pada $B^T_{(\gamma',\delta')}$.

ii. Andaikan $B^T_{(\gamma,\delta)}$ ideal BAF pada $\mathcal{K}$, maka $B^T_{(\gamma',\delta')}$ bukan ideal BAF pada $\mathcal{K}$.

- Karena $(\gamma, \delta) \geq (\gamma', \delta')$ maka

$$\left.\begin{matrix} \mu^+(e) + \gamma' \leq \mu^+(e) + \gamma \\ \mu^+(x) + \gamma' \leq \mu^+(x) + \gamma \end{matrix}\right\} \rightarrow \mu^+(e) + \gamma' \leq \mu^+(x) + \gamma',$$

dan

$$\left.\begin{matrix} \mu^-(e) + \delta' \geq \mu^-(e) + \delta \\ \mu^-(x) + \delta' \geq \mu^-(x) + \delta \end{matrix}\right\} \rightarrow \mu^-(e) + \delta' \geq \mu^-(x) + \delta'.$$

- $\mu^+(x) + \gamma \leq \max\{\mu^+(x \odot y) + \gamma, \mu^+\big(y \odot (y \odot x)\big) + \gamma\}$

$\mu^+(x) + \gamma \leq \max\{\mu^+(x \odot y), \mu^+\big(y \odot (y \odot x)\big)\} + \gamma$

$\mu^+(x) \leq \max\{\mu^+(x \odot y), \mu^+\big(y \odot (y \odot x)\big)\}$

$\mu^+(x) + \gamma' \leq \max\{\mu^+(x \odot y), \mu^+\big(y \odot (y \odot x)\big)\} + \gamma'$

$\mu^+(x) + \gamma' \leq \max\{\mu^+(x \odot y) + \gamma', \mu^+\big(y \odot (y \odot x)\big) + \gamma'\},$

dan

$\mu^-(x) + \delta \geq \min\{\mu^-(x \odot y) + \delta, \mu^-\big(y \odot (y \odot x)\big) + \delta\}$

$\mu^-(x) + \delta \geq \min\{\mu^-(x \odot y), \mu^-\big(y \odot (y \odot x)\big)\} + \delta$

$\mu^-(x) \geq \min\{\mu^-(x \odot y), \mu^-(y \odot (y \odot x))\}$

$$\mu^-(x) + \delta' \geq \min\{\mu^-(x \odot y), \mu^-(y \odot (y \odot x))\} + \delta'$$

$$\mu^-(x) + \delta' \geq \min\{\mu^-(x \odot y) + \delta', \mu^-(y \odot (y \odot x)) + \delta'\}.$$

Hal ini bertentangan dengan pengandaian, haruslah $B^T_{(\gamma',\delta')}$ ideal BAF pada $\mathcal{K}$.

Terbukti bahwa $B^T_{(\gamma,\delta)}$ adalah perluasan ideal BAF pada $B^T_{(\gamma',\delta')}$.

Teorema 3.4.15

Misalkan $B = (\mu^+, \mu^-)$ adalah ideal BAF pada K-aljabar $\mathcal{K}$ dan $(\gamma, \delta) \in [0, u] \times [i, 0]$. Untuk setiap perluasan ideal BAF $B' = (v^+, v^-)$ pada (γ, δ)-translasi *bipolar fuzzy* $B^T_{(\gamma,\delta)}$, terdapat $(\gamma', \delta') \in [0, u] \times [i, 0]$ sedemikian sehingga $(\gamma, \delta) \leq (\gamma', \delta')$ dan B' adalah perluasan ideal BAF pada (γ', δ')-translasi *bipolar fuzzy* $B^T_{(\gamma',\delta')}$.

Bukti:

Diketahui $B' = (v^+, v^-)$ perluasan ideal BAF pada $B^T_{(\gamma,\delta)}$. Akan dibuktikan $B' = (v^+, v^-)$ perluasan ideal BAF pada $B^T_{(\gamma',\delta')}$.

i. Ambil sebarang $(\gamma', \delta') \in [0, u] \times [i, 0]$ sedemikian sehingga $(\gamma, \delta) \leq (\gamma', \delta')$. Akan dibuktikan B' adalah perluasan *bipolar fuzzy* pada $B^T_{(\gamma',\delta')}$.

$$\mu^+(x) + \gamma \leq \mu^+(x) + \gamma' \qquad\qquad \mu^+(x) + \gamma \leq v^+(x)$$

$$\mu^-(x) + \delta \geq \mu^-(x) + \delta' \qquad\qquad \mu^-(x) + \delta \geq v^-(x).$$

Andaikan $v^+(x) < \mu^+(x) + \gamma'$ dan $\mu^+(x) + \gamma' = \mu^+(x) + \gamma$ maka

$$v^+(x) < \mu^+(x) + \gamma.$$

Hal ini kontradiksi dengan pernyataan $\mu^+(x) + \gamma \leq v^+(x)$. Haruslah $v^+(x) \geq \mu^+(x) + \gamma'$ atau dapat ditulis dengan $\mu^+(x) + \gamma' \leq v^+(x)$.

Andaikan $v^-(x) > \mu^-(x) + \delta'$ dan $\mu^-(x) + \delta' = \mu^-(x) + \delta$ maka

$$v^-(x) > \mu^-(x) + \delta.$$

Hal ini kontradiksi dengan pernyataan $\mu^-(x) + \delta \geq v^-(x)$. Haruslah $v^-(x) \leq \mu^-(x) + \delta'$ atau dapat ditulis dengan $\mu^-(x) + \delta' \geq v^-(x)$.

Terbukti B' adalah perluasan *bipolar fuzzy* pada $B^T_{(\gamma',\delta')}$.

ii. B' ideal BAF pada $\mathcal{K}$, maka $B^T_{(\gamma,\delta)}$ ideal BAF pada $\mathcal{K}$. Karena $B^T_{(\gamma,\delta)}$ ideal BAF pada $\mathcal{K}$, maka terdapat (γ',δ') sedemikian sehingga $(\gamma,\delta) \leq (\gamma',\delta')$.

- $\mu^+(e) + \gamma \leq \mu^+(x) + \gamma$ dan $\mu^-(e) + \delta \geq \mu^-(x) + \delta$

  $\mu^+(e) \leq \mu^+(x)$ $\mu^-(e) \geq \mu^-(x)$

  $\mu^+(e) + \gamma' \leq \mu^+(x) + \gamma'$ $\mu^-(e) + \delta' \geq \mu^-(x) + \delta'$

- $\mu^+(x) + \gamma \leq \max\{\mu^+(x \odot y) + \gamma, \mu^+(y \odot (y \odot x)) + \gamma\}$

  $\mu^+(x) + \gamma \leq \max\{\mu^+(x \odot y), \mu^+(y \odot (y \odot x))\} + \gamma$

  $\mu^+(x) \leq \max\{\mu^+(x \odot y), \mu^+(y \odot (y \odot x))\}$

  $\mu^+(x) + \gamma' \leq \max\{\mu^+(x \odot y), \mu^+(y \odot (y \odot x))\} + \gamma'$

  $\mu^+(x) + \gamma' \leq \max\{\mu^+(x \odot y) + \gamma', \mu^+(y \odot (y \odot x)) + \gamma'\}$,

  dan

  $\mu^-(x) + \delta \geq \min\{\mu^-(x \odot y) + \delta, \mu^-(y \odot (y \odot x)) + \delta\}$

  $\mu^-(x) + \delta \geq \min\{\mu^-(x \odot y), \mu^-(y \odot (y \odot x))\} + \delta$

  $\mu^-(x) \geq \min\{\mu^-(x \odot y), \mu^-(y \odot (y \odot x))\}$

  $\mu^-(x) + \delta' \geq \min\{\mu^-(x \odot y), \mu^-(y \odot (y \odot x))\} + \delta'$

  $\mu^-(x) + \delta' \geq \min\{\mu^-(x \odot y) + \delta', \mu^-(y \odot (y \odot x)) + \delta'\}$.

Terbukti bahwa B' adalah perluasan ideal BAF pada $B^T_{(\gamma',\delta')}$.

Definisi 3.4.16 (Pergandaan *Bipolar Fuzzy*)

Misalkan $B = (\lambda^+, \lambda^-)$ adalah himpunan *bipolar fuzzy* pada $\mathcal{K}$ dan $\rho, \sigma \in [0,1]$. Himpunan *bipolar fuzzy* $B^m_{(\rho,\sigma)} = (\lambda^{+m}_\rho, \lambda^{-m}_\sigma)$ disebut (ρ,σ)- pergandaan *bipolar fuzzy* pada B dengan

$$\lambda^{+m}_\rho : \mathcal{K} \to [0,1], x \to \lambda^+(x)\rho$$

$$\lambda^{-m}_\sigma : \mathcal{K} \to [-1,0], x \to \lambda^-(x)\sigma$$

Untuk setiap ideal BAF B, (0,0)- pergandaan *bipolar fuzzy* $B^m_{(0,0)}$ adalah ideal BAF pada $\mathcal{K}$.

Teorema 3.4.17

Jika $B = (\lambda^+, \lambda^-)$ adalah ideal BAF pada K-aljabar $\mathcal{K}$, maka (ρ, σ)- pergandaan *bipolar fuzzy* $B^m_{(\rho,\sigma)}$ pada B adalah ideal BAF pada $\mathcal{K}$.

Bukti:

i. B ideal BAF pada $\mathcal{K}$, sehingga berlaku $\lambda^+(e) \le \lambda^+(x)$ dan $\lambda^-(e) \ge \lambda^-(x)$. Karena $\rho, \sigma \in [0,1]$ maka terbukti $\lambda^+(e)\rho \le \lambda^+(x)\rho$ dan $\lambda^-(e)\sigma \ge \lambda^-(x)\sigma$.

ii. B ideal BAF pada $\mathcal{K}$, sehingga berlaku

$$\lambda^+(x) \le \max\{\lambda^+(x \odot y), \lambda^+(y \odot (y \odot x))\}$$

$$\lambda^+(x)\rho \le \max\{\lambda^+(x \odot y), \lambda^+(y \odot (y \odot x))\}\rho$$

$$\lambda^+(x)\rho \le \max\{\lambda^+(x \odot y)\rho, \lambda^+\big(y \odot (y \odot x)\big)\rho\},$$

dan

$$\lambda^-(x) \ge \min\{\lambda^-(x \odot y), \lambda^-(y \odot (y \odot x))\}$$

$$\lambda^-(x)\sigma \ge \min\{\lambda^-(x \odot y), \lambda^-(y \odot (y \odot x))\}\sigma$$

$$\lambda^-(x)\sigma \ge \min\{\lambda^-(x \odot y)\sigma, \lambda^-\big(y \odot (y \odot x)\big)\sigma\}.$$

Terbukti $B^m_{(\rho,\sigma)}$ pada B adalah ideal BAF pada $\mathcal{K}$.

Teorema 3.4.18

Misalkan $B = (\lambda^+, \lambda^-)$ adalah himpunan *bipolar fuzzy* pada K-aljabar $\mathcal{K}$. (ρ, σ)-pergandaan *bipolar fuzzy* $B^m_{(\rho,\sigma)}$ pada B adalah ideal BAF pada $\mathcal{K}$ jika dan hanya jika B adalah ideal BAF pada $\mathcal{K}$ untuk setiap $\rho, \sigma \in [0,1]$.

Bukti:

($\Rightarrow$) Diketahui $B^m_{(\rho,\sigma)}$ pada B adalah ideal BAF pada $\mathcal{K}$. Akan dibuktikan B adalah ideal BAF pada $\mathcal{K}$.

i. $B^{m}_{(\rho,\sigma)}$ pada B adalah ideal BAF pada $\mathcal{K}$, sehingga berlaku $\lambda^{+}(e)\rho \leq \lambda^{+}(x)\rho$ dan $\lambda^{-}(e)\sigma \geq \lambda^{-}(x)\sigma$. Karena $\rho, \sigma \in [0,1]$ maka diperoleh $\lambda^{+}(e) \leq \lambda^{+}(x)$ dan $\lambda^{-}(e) \geq \lambda^{-}(x)$.

ii. $B^{m}_{(\rho,\sigma)}$ pada B adalah ideal BAF pada $\mathcal{K}$, sehingga berlaku

$$\lambda^{+}(x)\rho \leq \max\{\lambda^{+}(x \odot y)\rho, \lambda^{+}(y \odot (y \odot x))\rho\}$$

$$\lambda^{+}(x)\rho \leq \max\{\lambda^{+}(x \odot y), \lambda^{+}(y \odot (y \odot x))\}\,\rho$$

$$\lambda^{+}(x) \leq \max\{\lambda^{+}(x \odot y), \lambda^{+}\big(y \odot (y \odot x)\big)\},$$

dan

$$\lambda^{-}(x)\sigma \geq \min\{\lambda^{-}(x \odot y)\sigma, \lambda^{-}(y \odot (y \odot x))\sigma\}$$

$$\lambda^{-}(x)\sigma \geq \min\{\lambda^{-}(x \odot y), \lambda^{-}(y \odot (y \odot x))\}\,\sigma$$

$$\lambda^{-}(x) \geq \min\{\lambda^{-}(x \odot y), \lambda^{-}\big(y \odot (y \odot x)\big)\}.$$

Terbukti B adalah ideal BAF pada $\mathcal{K}$.

($\Leftarrow$) Berdasarkan Teorema 3.4.15 sudah jelas terbukti bahwa $B^{m}_{(\rho,\sigma)}$ pada B adalah ideal BAF pada $\mathcal{K}$.

Contoh 3.4.19

Berdasarkan Contoh 3.1.9 diketahui $B = (\lambda^{+}, \lambda^{-})$ yang didefinisikan dengan

$$\lambda^{+}(x) = \begin{cases} 0.03 & , \quad x = e \\ 0.4 & , \quad x \neq e \end{cases} \text{ dan } \lambda^{-}(x) = \begin{cases} -0.2 & , \quad x = e \\ -0.35 & , \quad x \neq e \end{cases}$$

adalah ideal BAF pada K-aljabar $\mathcal{K} = (G, \circ, \odot, e)$ dengan $G = \{e, a, b, x, y, z\}$.

Jika diketahui $\rho = \sigma = 0.5$, maka buktikan bahwa $B^{m}_{(\rho,\sigma)}$ ideal BAF pada $\mathcal{K}$.

Bukti:

i. B ideal BAF pada $\mathcal{K}$, maka memenuhi $\lambda^{+}(e) \leq \lambda^{+}(x)$ dan $\lambda^{-}(e) \geq \lambda^{-}(x)$. Diketahui $\rho = \sigma = 0.5$, maka untuk setiap $x \in \mathcal{K}$ berlaku

$\lambda^{+}(e)(0.5) \leq \lambda^{+}(x)(0.5)$	$\lambda^{-}(e)(0.5) \geq \lambda^{-}(x)(0.5)$
$\lambda^{+}(e)\rho \leq \lambda^{+}(x)\rho$	$\lambda^{-}(e)\sigma \geq \lambda^{-}(x)\sigma$

ii. B ideal BAF pada $\mathcal{K}$, maka memenuhi

$$\lambda^{+}(x) \leq \max\{\lambda^{+}(x \odot y), \lambda^{+}(y \odot (y \odot x))\}.$$

Diketahui $\rho = 0.5$, maka

$$\lambda^{+}(x)(0.5) \leq \max\{\lambda^{+}(x \odot y), \lambda^{+}(y \odot (y \odot x))\}(0.5)$$

$$\lambda^{+}(x)(0.5) \leq \max\{\lambda^{+}(x \odot y)(0.5), \lambda^{+}(y \odot (y \odot x))(0.5)\}$$

$$\lambda^{+}(x)\rho \leq \max\{\lambda^{+}(x \odot y)\rho, \lambda^{+}(y \odot (y \odot x))\rho\}.$$

B ideal BAF pada $\mathcal{K}$, maka memenuhi

$$\lambda^{-}(x) \geq \min\{\lambda^{-}(x \odot y), \lambda^{-}(y \odot (y \odot x))\}.$$

Diketahui $\sigma = 0.5$, maka

$$\lambda^{-}(x)(0.5) \geq \min\{\lambda^{-}(x \odot y), \lambda^{-}(y \odot (y \odot x))\}(0.5)$$

$$\lambda^{-}(x)(0.5) \geq \min\{\lambda^{-}(x \odot y)(0.5), \lambda^{-}(y \odot (y \odot x))(0.5)\}$$

$$\lambda^{-}(x)\sigma \geq \min\{\lambda^{-}(x \odot y)\sigma, \lambda^{-}(y \odot (y \odot x))\sigma\}.$$

Terbukti $B^{m}_{(\rho,\sigma)}$ ideal BAF pada $\mathcal{K}$.

Teorema 3.4.20

Jika $B = (\lambda^{+}, \lambda^{-})$ adalah himpunan *bipolar fuzzy* pada K-aljabar $\mathcal{K}$, $(\gamma, \delta) \in [0, u] \times [i, 0]$ dan $\rho, \sigma \in [0,1]$, maka setiap (γ, δ)-translasi *bipolar fuzzy* $B^{T}_{(\gamma,\delta)}$ pada B adalah perluasan ideal BAF pada (ρ, σ)- pergandaan $B^{m}_{(\rho,\sigma)}$ pada B.

Bukti:

i. Akan dibuktikan bahwa $B^{T}_{(\gamma,\delta)}$ adalah perluasan *bipolar fuzzy* pada $B^{m}_{(\rho,\sigma)}$.

Karena $\rho, \sigma \in [0,1]$, maka jelas bahwa

$$\lambda^{+}(x)\rho \leq \lambda^{+}(x) + \gamma,$$

$$\lambda^{-}(x)\rho \geq \lambda^{-}(x) + \gamma.$$

Terbukti bahwa $B^{T}_{(\gamma,\delta)}$ adalah perluasan *bipolar fuzzy* pada $B^{m}_{(\rho,\sigma)}$.

ii. Andaikan $B^{T}_{(\gamma,\delta)}$ ideal BAF pada $\mathcal{K}$, maka $B^{m}_{(\rho,\sigma)}$ bukan ideal BAF pada $\mathcal{K}$.

- $\lambda^{+}(e) + \gamma \leq \lambda^{+}(x) + \gamma$ dan $\lambda^{-}(e) + \delta \geq \lambda^{-}(x) + \delta$

$\lambda^+(e) \leq \lambda^+(x)$ $\quad\quad$ $\lambda^-(e) \geq \lambda^-(x)$

$\lambda^+(e)\rho \leq \lambda^+(x)\rho$ $\quad\quad$ $\lambda^-(e)\sigma \geq \lambda^-(x)\sigma$

- $\lambda^+(x) + \gamma \leq \max\{\lambda^+(x \odot y) + \gamma, \lambda^+(y \odot (y \odot x)) + \gamma\}$

  $\lambda^+(x) + \gamma \leq \max\{\lambda^+(x \odot y), \lambda^+(y \odot (y \odot x))\} + \gamma$

  $\lambda^+(x) \leq \max\{\lambda^+(x \odot y), \lambda^+(y \odot (y \odot x))\}$

  $\lambda^+(x)\rho \leq \max\{\lambda^+(x \odot y), \lambda^+(y \odot (y \odot x))\}\rho$

  $\lambda^+(x)\rho \leq \max\{\lambda^+(x \odot y)\rho, \lambda^+(y \odot (y \odot x))\rho\}$,

  dan

  $\lambda^-(x) + \delta \geq \min\{\lambda^-(x \odot y) + \delta, \lambda^-(y \odot (y \odot x)) + \delta\}$

  $\lambda^-(x) + \delta \geq \min\{\lambda^-(x \odot y), \lambda^-(y \odot (y \odot x))\} + \delta$

  $\lambda^-(x) \geq \min\{\lambda^-(x \odot y), \lambda^-(y \odot (y \odot x))\}$

  $\lambda^-(x)\sigma \geq \min\{\lambda^-(x \odot y), \lambda^-(y \odot (y \odot x))\}\sigma$

  $\lambda^-(x)\sigma \geq \min\{\lambda^-(x \odot y)\sigma, \lambda^-(y \odot (y \odot x))\sigma\}$.

Hal ini bertentangan dengan pengandaian, haruslah $B^m_{(\rho,\sigma)}$ ideal BAF pada $\mathcal{K}$.

Terbukti $B^T_{(\gamma,\delta)}$ adalah perluasan ideal BAF pada $B^m_{(\rho,\sigma)}$.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat ditarik dari penelitian ini berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya yaitu,

1. Suatu struktur aljabar yang dibangun oleh grup G dengan operasi biner $\odot$ disebut K-aljabar. Ideal *Bipolar Anti Fuzzy* pada K-aljabar dibangun oleh suatu ideal pada K-aljabar dan himpunan *bipolar fuzzy*.
2. Beberapa sifat yang berlaku pada Ideal *Bipolar Anti Fuzzy* pada K-aljabar dapat diringkas sebagai berikut:
   a. B ideal BAF pada $\mathcal{K}$ jika dan hanya jika $\tilde{B}_{\beta}^{+}$ dan $\tilde{B}_{\alpha}^{-}$ ideal pada $\mathcal{K}$
   b. $B_{(\gamma,\delta)}^{T}$ ideal BAF pada $\mathcal{K}$ jika dan hanya jika B ideal BAF pada $\mathcal{K}$ atau $\tilde{B}_{((\alpha,\beta),(\gamma,\delta))}^{T}$ ideal pada $\mathcal{K}$.
   c. $B_{(\gamma,\delta)}^{T}$ perluasan ideal BAF pada B dan $B_{(\gamma\prime,\delta\prime)}^{T}$ perluasan ideal BAF pada $B_{(\gamma,\delta)}^{T}$ untuk setiap $(\gamma,\delta) \leq (\gamma',\delta')$.
   d. $B_{(\rho,\sigma)}^{m}$ ideal BAF pada $\mathcal{K}$ jika dan hanya jika B ideal BAF pada $\mathcal{K}$. $B_{(\rho,\sigma)}^{m}$ perluasan ideal BAF pada $B_{(\gamma,\delta)}^{T}$.

2.2 Saran

Untuk penelitian berikutnya, penulis menyarankan untuk membahas relasi ekuivalensi pada ideal BAF pada K-aljabar.

DAFTAR PUSTAKA

Akram, M., 2008, Bifuzzy Ideals of *K*-algebras, *WSEAS Transaction on Mathematics*, Volume 7, 313-322.

Akram, M., Dar, K. H., 2007, Fuzzy Ideals of *K*-algebras, *Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser*., Volume 34, 11-20.

Akram, M., Saeid, A. B., Shum, K. P., Meng, B. L., 2010, Bipolar Fuzzy *K*-algebras, *International Journal of Fuzzy Systems*, Volume 12, 252-258.

Ali, MD. Y., Chowdhury, K. R., Sultana, A., Mitra, N. K., 2017, Fuzzy Hemirings, *Asian Journal of Mathematics and Computer Research*, Volume 20(2), 96-103.

Bhattacharya, P. B., Jain, S. K., Nagpaul, S. R., 1995, *Basic Abstract Algebra*, 2nd Edition, Cambridge University Press.

Dar, K. H., Akram, M., 2005, On a *K*-algebra Built on a Group, *South. Asian Bull. Math*., Volume 29, 41-49.

Dar, K. H., Akram, M., 2007, On a *K*-homomorphism of *K*-algebras, *International Mathematical Forum*, Volume 2:46, 2283-2293.

Dixit, V. N., Kumar, R., Ajmal, N., 1992, On Fuzzy Rings, *Fuzzy Sets and Systems*, Volume 49, 205-213.

Dudek, W. A., Shabir, M., Anjum, R., 2010, Characterizations of Hemirings by their *h*-ideals, *Computers and Mathematics with Applications*, Volume 59, 3167-3179.

Hayat, K., Mahmood, T., Cao, B. Y., 2017, On Bipolar Anti Fuzzy *h*-ideals in Hemi-rings, *Fuzzy Informations and Engineering*, Volume 9, 1-19.

Jun, Y. B., Hong, S. M., 2001, Fuzzy Subalgebras of BCK/BCI-algebras Redefined, *Scientiae Mathematicae Japonicae Online*, Volume 4, 769-775.

Jun, Y. B., Ozturk, M. A., Seok, Z. S., 2004, On Fuzzy h-ideals in Hemiring, *Information Science*, Volume 162, 211-226.

Jun, Y. B., Kim, H. S., Lee, K. J., 2009, Bipolar Fuzzy Translations in BCK/BCI-algebras, *Journal of the Chungcheong Mathematical Society*, Volume 22:3.

Kalsoom, S., Manzoor, R., Khan, A., 2013, Note on (λ, μ)-fuzzy Interior Ideals of Hemiring, *International Journal of Algebra and Statistics*, Volume 2:2, 1-9.

Kandasamy, W. B. V., 2003, *Smarandache Fuzzy Algebra*, American Research Press.

K. J. Lee., 2009, Bipolar Fuzzy Subalgebras and Bipolar Fuzzy Ideals of *BCK/BCI*-algebras, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 32, 361-373.

L. A. Zadeh, 1965, Fuzzy Sets, *Information and Control*, 8, 338-353.

Muthuraj, R, Sridharan, M., 2012, Bipolar Anti Fuzzy HX Group and its Lower Level Sub HX Groups, *Journal of Physical Sciences*, Volume 16, 157-169.

Muthuraj, R, Sridharan, M., 2013, Homomorphism and Anti Homomorphism on Bipolar Anti Fuzzy Subgroup, *Journal of Engineering Research and Applications*, Volume 3, 1155-1159.

Muthuraj, R, Sridharan, M., 2014, Bipolar Anti Fuzzy Normal HX Subgroups, *International Journal of Mathematical Archive*, Volume 7, 118-128.

Muthuraj, R, Sridharan, M., 2014, Pseudo Bipolar Fuzzy Cosets of Bipolar Fuzzy and Anti Fuzzy HX Subgroups, *Applied Mathematics and Sciences: An International Journal*, Volume 1.

Muthuraj, R, Murhuraman, M. S, Rajinikannan, M., 2016, Bipolar Anti Fuzzy Subrings, *International Journal on Research Innovations in Engineering Science and Technology*, Volume 1.

Muthuraj, R, Meena, G. S., 2017, Bipolar Anti L-Fuzzy Sub ℓ-HX Group and its Lower Level Sub ℓ-HX Groups, *Annals of Pure and Applied Mathematics*, Volume 15, 253-269.

Mahmood, T., Hayat, K., 2015, Characterizations of Hemi-Rings by their Bipolar-Valued Fuzzy *h*-ideals, *Information Sciences Letters*, Volume 4(2), 51-59.

Rosenfeld, Azriel. 1971. Fuzzy Groups. *Journal of Mathematical Analysis And Applications*. 35: 512-517.

Subramanian, S., Josephine, X. L., 2018, Anti Homomorphism in Fuzzy Subgroups, *International Journal of Future Revolution in Computer Science and Communication Engineering*, Volume 4(8), 41-47.

Zhang, W. R., 1998, Bipolar Fuzzy Sets, *Computer Science Dept. College of Engineering, Lamar University*, 835-840.

Zhou, M., Li, S., 2014, Applications of Bipolar Fuzzy Theory to Hemirings, *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, Volume 10(2), 767-781.