

Problemas resueltos de Álgebra, Cálculo y Ecuaciones diferenciales relacionados con ODS

Resultado del proyecto de innovación docente:

Introducción de los ODS en la formación matemática de la EINA y EUPT

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Pablo Díaz Benito, Beatriz Rubio Serrano,
Esmeralda Mainar Maza, Iván Bailera Martín,
Jorge Alberto Jover Galtier, María Ángeles Martínez Carballo,
María Begoña Melendo Pardos, María Inmaculada Gómez Ibáñez,
Natalia Boal Sánchez, Ricardo Celorrio de Pablo y
Sergio Serrano Pastor

3 de junio de 2022

Prefacio

La consecución global de los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS) y la Agenda 2030 es un propósito que solo se alcanzará en la medida en que todos los agentes sociales se involucren. Es evidente que la Universidad debe ser uno de los instrumentos que promueva la concienciación de la ciudadanía en los problemas de sostenibilidad y la formación necesaria para aportar las soluciones que nos lleven hacia ese nuevo horizonte.

Los contenidos evaluables de las asignaturas básicas de formación matemática que se imparten en los grados de la EINA y la EUPT por sí solos no capacitan -en principio- al alumnado para aportar a la consecución de la Agenda 2030; aunque son imprescindibles para fundamentar los conocimientos posteriores del resto de la titulación correspondiente, que sí se relacionan más directamente con los ODS y por lo tanto con la Agenda 2030.

Además, en literatura reciente, aparecen ejemplos contextualizados en los diferentes ODS que pueden trabajarse con herramientas matemáticas básicas incluidas en las asignaturas de los grados. A menudo, con un ligero cambio de enfoque, las actividades propias de las asignaturas pueden contribuir a la concienciación y a la sensibilización del alumnado con los ODS.

El presente documento plantea ahondar en esta línea de actuación mediante la recopilación y/o elaboración de problemas contextualizados en algunos de los objetivos y metas de los ODS que se resuelven con herramientas matemáticas trabajadas en las asignaturas.

En la colección de problemas que presentamos a continuación hemos identificado, para cada problema, la asignatura y el tema al que el problema está referido, la fuente de donde lo hemos obtenido, el contexto del problema y su relación explícita con los objetivos y metas de los ODS, el enunciado del problema y su resolución. La idea es que el docente pueda incluir sin muchas dificultades cualquiera de estos problemas en el devenir de sus clases en sustitución o como anexo de sus materiales habituales para fomentar la concienciación y la sensibilización del alumnado con el desarrollo sostenible.

Índice general

1. Problemas de Cálculo	5
1.1. Vientos de cambio	6
1.2. Contaminación de aguas	9
1.3. Estudio de temperaturas medias	11
1.4. Viga óptima extraída de un tronco de árbol	16
2. Problemas de Álgebra	21
2.1. Reducción de la huella de carbono	22
2.2. Tendiendo puentes	27
2.3. La mejor compañía	32
2.4. Hambre cero	37
3. Problemas de Ecuaciones Diferenciales	39
3.1. Crecimiento de bacterias	40
3.2. Transmisión de enfermedades	42
3.3. Depredador-presa	45
3.4. Modelo SIR aplicado al COVID19	47
3.5. El mejor aislante	50
3.6. Repoblación de un lago	52

Capítulo 1

Problemas de Cálculo

1.1. Vientos de cambio

Asignatura:

Cálculo

Problema del tema:

Cálculo diferencial de funciones de varias variables: Gradiente

Fuente:

Iván Bailera, Jorge A. Jover Galtier

Contexto y relación con los ODS:

En el marco del aprovechamiento energético de fuentes limpias y sostenibles, la energía eólica es una de las piezas clave en la actualidad. En este problema, dada la ubicación de unos molinos de viento en la ladera de una montaña, se busca optimizar la orientación de dichos molinos para aprovechar la corriente de viento producida por la forma del terreno. Se propone utilizar la dirección del gradiente de la superficie en un punto para que el viento alcance una mayor velocidad logrando una eficiencia energética mayor. De este modo se incide en los objetivos 7 y 13 de los ODS. En concreto, el problema se relaciona con las metas:

7.2 Aumentar considerablemente la proporción de energía renovable en el conjunto de fuentes energéticas.

7.3 Duplicar la tasa mundial de mejora de la eficiencia energética.

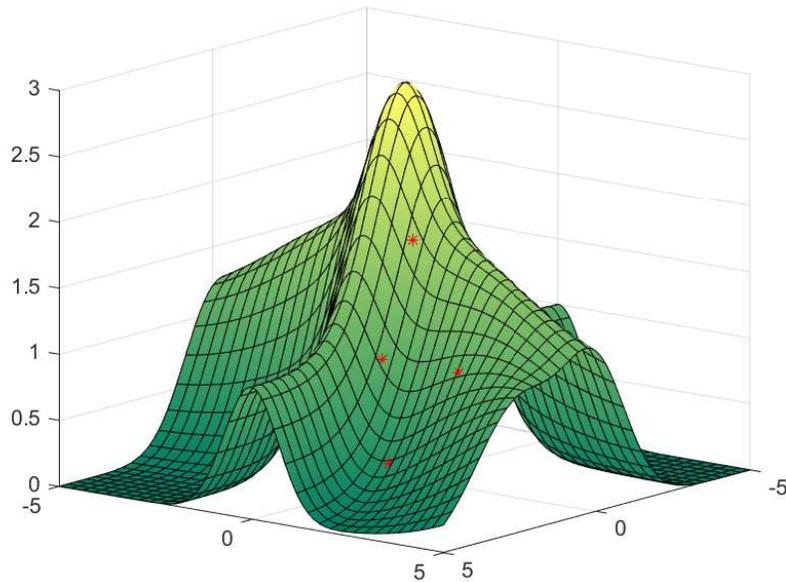
13.3 Mejorar la educación y sensibilización medioambiental.

Enunciado:

La superficie de una pequeña montaña se corresponde con la gráfica de la función de dos variables

$$f(x, y) = e^{-\frac{1}{4}(x-\frac{y}{2})^2} + e^{-y^2} + e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Para abastecer el suministro de energía de refugios aislados que se encuentran sobre la montaña se van a colocar cuatro molinos de viento en los puntos $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$ como ilustra la siguiente figura



La dirección del viento, que cambia adaptándose a la superficie de la montaña, se estima que corresponde siempre con la dirección de máxima pendiente de la montaña en el punto correspondiente. Teniendo esto en cuenta, ¿en qué dirección se deben orientar los molinos para maximizar la cantidad de viento que pasará por ellos? Calcula dicha dirección para cada uno de los molinos.

Si la velocidad del viento es mayor en aquellos puntos con mayor inclinación del terreno, ¿cuál de los molinos podrá producir más energía?

Resolución:

La dirección que ofrecerá el paso máximo de viento por cada molino será la que tiene el vector gradiente a la superficie f en cada punto. Calculando las derivadas parciales de f respecto de x e y se obtiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{1}{2} \left(x - \frac{y}{2} \right) e^{-\frac{1}{4} \left(x - \frac{y}{2} \right)^2} - x e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{4} \left(x - \frac{y}{2} \right) e^{-\frac{1}{4} \left(x - \frac{y}{2} \right)^2} - 2y e^{-y^2}.$$

Por tanto, el gradiente de f en un punto genérico (x, y) es

$$\nabla f(x, y) = \left(-\frac{1}{2} \left(x - \frac{y}{2} \right) e^{-\frac{1}{4} \left(x - \frac{y}{2} \right)^2} - x e^{-\frac{x^2}{2}}, \frac{1}{4} \left(x - \frac{y}{2} \right) e^{-\frac{1}{4} \left(x - \frac{y}{2} \right)^2} - 2y e^{-y^2} \right).$$

Las direcciones (no normalizadas) para cada molino son:

$$\nabla f(1, 1) \approx (-0,8414, -0,6183),$$

$$\nabla f(2, 1) \approx (-0,6980, -0,5221),$$

$$\nabla f(2, 3) \approx (-0,5055, 0,1167),$$

$$\nabla f(3, 2) \approx (-0,4012, 0,1107).$$

Normalizando las cantidades anteriores, se tiene que las direcciones en que hay que orientar cada molino son:

$$(1, 1) : (-0,8058, -0,5922),$$

$$(2, 1) : (-0,8008, -0,5990),$$

$$(2, 3) : (-0,9744, 0,2249),$$

$$(3, 2) : (-0,9640, 0,2659).$$

Para responder qué molino produce más energía, basta con calcular los módulos del gradiente en cada punto y elegir el mayor:

$$|\nabla f(1, 1)| \approx 1,0442,$$

$$|\nabla f(2, 1)| \approx 0,8717,$$

$$|\nabla f(2, 3)| \approx 0,5188,$$

$$|\nabla f(3, 2)| \approx 0,4162.$$

Por tanto, el molino que produce más energía es el situado en el punto $(1, 1)$.

1.2. Contaminación de aguas

Asignatura:

Cálculo diferencial en varias variables

Problema del tema:

Derivación de funciones de varias variables. Vector gradiente

Fuente:

Se ha adaptado un ejercicio de Claudio Pita Ruiz: 'Cálculo Vectorial', Prentice Hall Iberoamericana, S.A. (1995) para incidir sobre los ODS 6, 13 y 14.

Contexto y relación con los ODS:

Según la página oficial de Naciones Unidas (<https://unstats.un.org/sdgs/report/2019/goal-06/>), la mayoría de los ríos de África, Asia y América Latina están más contaminados ahora de lo que estaban en la década de 1990. La mayoría de los países reconoce la importancia de una mejor coordinación en el uso de los recursos hídricos, y han puesto en marcha planes integrados para su gestión. Sin embargo, se necesita mucho más esfuerzo para mejorar el acceso a servicios de agua y saneamiento, aumentar el tratamiento de aguas residuales, mejorar el uso del agua eficiencia, ampliar la cooperación operativa entre cuencas hidrográficas transfronterizas, y proteger y restaurar los ecosistemas de agua dulce.

Se propone un problema de aplicación de las propiedades del vector gradiente que da pie a reflexionar sobre los objetivos 6, 13 y 14 de los ODS. En concreto, el problema se relaciona con las metas:

6.3 Mejorar la calidad de agua. Reducir la contaminación y aguas residuales.

13.3 Mejorar la educación y sensibilización medioambiental.

14.1 Prevención y reducción de la contaminación marina.

Enunciado:

Las aguas de un río han sido contaminadas por un vertido cuya concentración en un instante de tiempo viene dada por

$$C(x, y, z) = 2 + 4 \sin^2(x + 3y + 2z + 8xy)$$

donde x, y y z se miden en metros y C en gr/l . Un pez se encuentra en el punto de coordenadas $(0, 2, 1)$, ¿en qué dirección debe moverse para encontrar la menor concentración de contaminante? ¿Cómo debería moverse para que no variase la concentración del contaminante? Indica la tasa de variación en el caso de seguir la dirección en la que la concentración de vertido disminuye más rápidamente.

Resolución:

El vector gradiente $\nabla C(0, 2, 1) = \left(\frac{\partial C}{\partial x}(0, 2, 1), \frac{\partial C}{\partial y}(0, 2, 1), \frac{\partial C}{\partial z}(0, 2, 1)\right)$ indica la dirección en la que el crecimiento de la función en el punto (el incremento de concentración del contaminante en este caso) es máximo, y la dirección opuesta al gradiente es aquella en la que la función decrece más rápido. La dirección a elegir, por tanto, es la opuesta al vector gradiente en $(0, 2, 1)$,

$$u = -\frac{\nabla C(0, 2, 1)}{\|\nabla C(0, 2, 1)\|} = \left(\frac{17}{\sqrt{302}}, \frac{3}{\sqrt{302}}, \frac{2}{\sqrt{302}}\right).$$

Para que no varíe la concentración del contaminante el pez debería moverse sobre la superficie de nivel de $C(x, y, z)$ correspondiente a $C(0, 2, 1)$, es decir, $2 + 4\sin^2(x + 3y + 2z + 8xy) = 4\sin^2 8 + 2$.

Finalmente, la tasa de variación en la dirección en que la concentración de vertido disminuye más rápidamente es la derivada direccional en $(0, 2, 1)$ en la dirección u , opuesta al gradiente, anteriormente calculada:

$$D_u C(0, 2, 1) = \nabla C(0, 2, 1) \cdot u = \|\nabla C(0, 2, 1)\| \|u\| \cos \phi$$

donde ϕ es el ángulo formado por las direcciones del vector gradiente y u , es decir, π radianes. Obtenemos $D_u C(0, 2, 1) = -8\sqrt{302} \cos 8 \sin 8 \approx -20,0129$.

1.3. Estudio de temperaturas medias

Asignatura:

Matemáticas 1 - Cálculo

Problema del tema:

Interpolación polinómica

Fuente:

Iván Bailera, Jorge A. Jover Galtier

Contexto y relación con los ODS:

Se trata de un problema de interpolación numérica, basada en el cálculo de polinomios interpoladores mediante el método general (resolución de un sistema de ecuaciones), de Lagrange y de Newton.

Los datos proporcionados son datos realistas, similares a los valores de temperatura medios medidos en el aeropuerto de Zaragoza en los años 2010-2015. De este modo se incide en los objetivos 4, 13 y 17 de los ODS. En concreto, el problema se relaciona con las metas:

4.7 Fomentar la educación Global para el Desarrollo Sostenible.

13.3 Mejorar la educación y sensibilización medioambiental.

17.18 Creación de capacidad estadística.

Enunciado:

La siguiente tabla recoge los datos de temperatura media medidos en una estación meteorológica a lo largo de varios años:

Temperatura media anual (°C)	16,6	15,9	15,5	17,0	16,6
Año	2012	2014	2016	2018	2020

1. Se quiere calcular el polinomio interpolador que ajusta los datos de la tabla, usando como variable los años transcurridos desde el primer año del que se dispone de mediciones. Determinar dicho polinomio interpolador mediante el método general, mediante el método de Lagrange y mediante el método de Newton. Comparar razonadamente los polinomios obtenidos.

2. Usando el polinomio interpolador obtenido, estimar la temperatura media anual en los años 2010, 2015, 2019 y 2025. ¿Cuáles de estas predicciones son más fiables y por qué?
3. Tras revisar los datos medidos, los responsables de la estación meteorológica han indicado que el dato proporcionado para el año 2014 no era suficientemente preciso, siendo la temperatura media de ese año de $16,2^\circ\text{C}$. Se quiere recalculer el polinomio interpolador con el mínimo tiempo de cálculo posible. Para ello, determinar cuál de los métodos del apartado 1. permite incorporar el cambio de manera más eficiente (es decir, evitando rehacer todos los cálculos) y utilizarlo para calcular el polinomio interpolador correcto. Repetir las estimaciones del apartado 2., compararlas con las realizadas previamente y justificar su validez.
4. Las últimas mediciones realizadas determinan que la temperatura media del año 2022 ha sido de $16,9^\circ\text{C}$. Incorporando este dato a los de la tabla (ignorando el apartado 3.), elegir el método de cálculo del apartado 1. que permita calcular el nuevo polinomio interpolador de la manera más eficiente posible (es decir, evitando rehacer todos los cálculos) y utilizarlo para calcular dicho polinomio. Repetir las estimaciones del apartado 2., compararlas con las realizadas previamente y justificar su validez.

Resolución:

Para realizar los cálculos se utilizan como variables los años x_i transcurridos desde el primer año del que existen mediciones, y la temperatura media anual y_i medida, en $^\circ\text{C}$, con $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

1. El grado del polinomio interpolador $p(x)$ que ajusta los valores dados debe ser de grado 4, por ser 5 los puntos a ajustar. Su forma es

$$p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4,$$

con x los años transcurridos desde 2012, y c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 coeficientes por determinar. El método general de interpolación consiste en resolver el sistema de ecuaciones lineales que se obtiene al sustituir en el polinomio interpolador los valores que se quieren ajustar:

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \Rightarrow \begin{cases} c_0 & = 16,6 \\ c_0 + 2c_1 + 4c_2 + 8c_3 + 16c_4 & = 15,9 \\ c_0 + 4c_1 + 16c_2 + 64c_3 + 256c_4 & = 15,5 \\ c_0 + 6c_1 + 36c_2 + 216c_3 + 1296c_4 & = 17 \\ c_0 + 8c_1 + 64c_2 + 512c_3 + 4096c_4 & = 16,6 \end{cases}$$

La resolución del sistema da como resultado los siguientes coeficientes:

$$c_0 = 16,6, \quad c_1 = 0,517, \quad c_2 = -0,781, \quad c_3 = 0,202, \quad c_4 = -0,014.$$

Por tanto, el polinomio interpolador es

$$p(x) = 16,6 + 0,517x - 0,781x^2 + 0,202x^3 - 0,014x^4.$$

Para el cálculo del polinomio interpolador puede utilizarse también el método de Lagrange. El polinomio interpolador se obtiene haciendo uso de los polinomios de Lagrange $L_i(x)$:

$$p(x) = \sum_{i=1}^5 y_i L_i(x), \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^5 \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Los polinomios $L_i(x)$ se calculan directamente a partir de los valores aportados en la tabla:

$$\begin{aligned} L_1(x) &= 1 - 1,04x + 0,36x^2 - 0,052x^3 + 0,0026x^4 \\ L_2(x) &= 2x - 1,08x^2 + 0,19x^3 - 0,01x^4 \\ L_3(x) &= -1,5x + 1,19x^2 - 0,25x^3 + 0,016x^4 \\ L_4(x) &= 0,67x - 0,58x^2 + 0,15x^3 - 0,01x^4 \\ L_5(x) &= -0,125x + 0,11x^2 - 0,031x^3 + 0,0026x^4 \end{aligned}$$

El polinomio interpolador $p(x)$ se obtiene sumando estos polinomios de Lagrange, cada uno multiplicado por el respectivo valor medido de la temperatura:

$$\begin{aligned} p(x) &= 16,6L_1(x) + 15,9L_2(x) + 15,5L_3(x) + 17L_4(x) + 16,8L_5(x) \\ &= 16,6 + 0,517x - 0,781x^2 + 0,202x^3 - 0,014x^4. \end{aligned}$$

El polinomio interpolador obtenido es idéntico al calculado mediante el método general.

Por último, el método de Newton permite calcular el polinomio interpolador mediante la siguiente expresión:

$$p(x) = f[x_1] + f[x_1, x_2](x - x_1) + \dots + f[x_1, x_2, \dots, x_5](x - x_1) \dots (x - x_4)$$

donde los coeficientes, llamados diferencias divididas, se calculan de manera recursiva:

$$f[x_i] = y_i, \quad f[x_i, \dots, x_j] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_j] - f[x_i, \dots, x_{j-1}]}{x_j - x_i}$$

Es habitual presentar estos valores en forma de tabla, en la que los valores de cada fila se calculan a partir de los de esa misma fila y las anteriores:

x_1	$f[x_1]$		0	$16,6$					
x_2	$f[x_2]$	$f[x_1x_2]$		2	$15,9$	$-0,35$			
x_3	$f[x_3]$	$f[x_2x_3]$	$f[x_1x_2x_3]$	\longrightarrow	4	$15,5$	$-0,20$	$0,0375$	
\dots	\dots			6	$17,0$	$0,75$	$0,2375$	$0,0333$	
				8	$16,6$	$-0,20$	$-0,2375$	$-0,0792$	$-0,0141$

A partir de los datos de la diagonal, se construye el polinomio interpolador mediante el método de Newton:

$$\begin{aligned} p(x) &= 16,6 - 0,35x + 0,0375x(x-2) + 0,0333x(x-2)(x-4) \\ &\quad - 0,0141x(x-2)(x-4)(x-6) \\ &= 16,6 + 0,517x - 0,781x^2 + 0,202x^3 - 0,014x^4. \end{aligned}$$

El polinomio interpolador es el mismo que en los casos anteriores.

Es importante destacar que el polinomio interpolador calculado es independiente del método utilizado. Dado un conjunto de n puntos, el polinomio interpolador de grado $n-1$ que los ajusta es único; las diferencias entre los métodos se encuentran en las técnicas utilizadas, no en el resultado.

- Los años 2010, 2015, 2019 y 2025 corresponden respectivamente a los valores $x = -2$, $x = 3$, $x = 7$, $x = 13$. Evaluando el polinomio interpolador en dichos valores, se obtiene una estimación de la temperatura media anual en cada caso:

$$T(-2) = 10,6, \quad T(3) = 15,4, \quad T(7) = 17,5, \quad T(13) = -66,4$$

Los valores para los años 2015 y 2019 son razonables, debido a que se han interpolado a partir de valores de temperatura en años anteriores y posteriores. En los años 2010 y 2025, sin embargo, los valores de temperatura se extrapolan a partir de mediciones realizadas solo antes o después, lo que reduce la fiabilidad de los resultados. En particular, la estimación de $-66,4^\circ\text{C}$ para el año 2025 no es válida, y muestra las limitaciones de la extrapolación de datos fuera del rango de datos analizados.

- Al corregir la medición realizada en 2014, se debe utilizar ahora el valor $y_2 = 16,2$. De utilizar el método general, el sistema de ecuaciones debería resolverse de nuevo. De manera similar, si se utiliza el método de Newton, es necesario recalcular un gran número de las diferencias divididas.

En cambio, si se utiliza el método de Lagrange, la corrección se realiza de manera sencilla. Los polinomios de Lagrange son idénticos, siendo necesario únicamente rehacer el último cálculo, en el que se suman estos polinomios multiplicados por las mediciones de las temperaturas. Por tanto, el nuevo polinomio interpolador $p_2(x)$ se calcula directamente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} p_2(x) &= 16,6L_1(x) + 16,2L_2(x) + 15,5L_3(x) + 17L_4(x) + 16,8L_5(x) \\ &= 16,6 + 1,12x - 1,11x^2 + 0,26x^3 - 0,017x^4. \end{aligned}$$

Las nuevas estimaciones para los años 2010, 2015, 2019 y 2025 son

$$p_2(-2) = 7,6, \quad p_2(3) = 15,6, \quad p_2(7) = 17,6, \quad p_2(13) = -79,2$$

Como se observa, los valores de interpolación para los años 2015 y 2019 apenas cambian, lo que refuerza su fiabilidad. Por el contrario, los valores extrapolados a los años 2010 y 2025 sufren cambios importantes respecto a las estimaciones anteriores; el hecho de que las estimaciones dependan fuertemente de pequeñas variaciones en los datos indican que no es posible garantizar su fiabilidad.

4. Se añade una nueva pareja de datos, $(x_6, y_6) = (10, 16,9)$. El método general requiere resolver de nuevo el sistema de ecuaciones, mientras que en el método de Lagrange es necesario recalcular todos los polinomios de Lagrange. En cambio, el método de Newton permite incorporar los nuevos valores de manera sencilla. Basta con añadir una fila a la tabla de valores, calculándola de manera idéntica a como se ha descrito:

0	16,6						
2	15,9	-0,35					
4	15,5	-0,20	0,0375				
6	17,0	0,75	0,2375	0,0333			
8	16,6	-0,20	-0,2375	-0,0792	-0,0141		
10	16,9	0,15	0,0875	0,0542	0,0167	0,0031	

El nuevo polinomio interpolador $p_3(x)$ se calcula a partir de los elementos de la diagonal. En la práctica, basta con sumar al polinomio interpolador original el término correspondiente al último elemento de la diagonal:

$$\begin{aligned} p_3(x) &= p(x) + 0,0031x(x-2)(x-4)(x-6)(x-8) \\ &= 16,6 + 1,7x - 2,01x^2 + 0,63x^3 - 0,076x^4 + 0,0031x^5. \end{aligned}$$

Con este polinomio, las estimaciones de temperatura para los años 2010, 2015, 2019 y 2025 son

$$p_3(-2) = -1,2, \quad p_3(3) = 15,3, \quad p_3(7) = 17,2, \quad p_3(13) = 72,0$$

De manera similar al apartado anterior, los valores interpolados a los años 2015 y 2019 apenas cambian. Por el contrario, los valores de extrapolación a los años 2010 y 2025 sufren enormes cambios, y queda claro que no son estimaciones fiables.

1.4. Viga óptima extraída de un tronco de árbol

Asignatura:

Cálculo

Problema del tema:

Cálculo diferencial de funciones una variables: optimización

Fuente:

Ricardo Celorrio

Contexto y relación con los ODS:

La sostenibilidad requiere hacer un uso duradero y no obsolecente de los recursos naturales. En este problema se plantea la obtención de la viga rectangular más duradera y resistente de un tronco de árbol (simplificado a simetría cilíndrica). La resolución del problema sólo requiere conocimientos de cálculo de una variable, si bien la justificación teórica que sustenta la aplicación real del problema también requiere conocimientos de cálculo integral de varias variables; esta justificación va más orientada al profesorado que al alumnado. De este modo se incide el objetivo 12 de los ODS. En concreto, el problema se relaciona con las metas:

12.2 De aquí a 2030, lograr la gestión sostenible y el uso eficiente de los recursos naturales.

12.5 De aquí a 2030, reducir considerablemente la generación de desechos mediante actividades de prevención, reducción, reciclado y reutilización.

Enunciado:

La resistencia (rigidez a flexión) de una viga de sección rectangular es directamente proporcional al producto de su ancho por el cubo de su altura. Encuentra las dimensiones de la viga más resistente que puede extraerse de un tronco cilíndrico de radio R .

Justificación teórica:

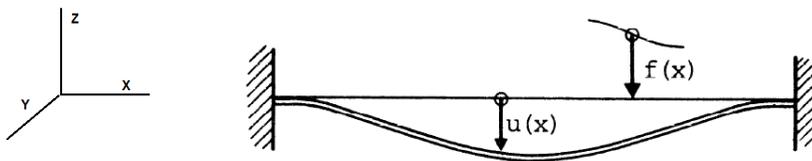


Figura 1.1: Desplazamientos verticales de una viga bi-empotrada sometida a esfuerzos de flexión.

Momento de inercia de sección transversal (I). El segundo momento de área, también denominado segundo momento de inercia o momento de inercia de área, es una característica geométrica de una viga que determina, junto con las propiedades intrínsecas del material, la resistencia máxima de dicha viga. No debe ser confundido con el *momento de inercia* que expresa la inercia de un cuerpo al rotar.

En el problema que nos ocupa, atendiendo a las coordenadas de los ejes de la figura 1.1, el eje Z es el de la gravedad. La fórmula del momento de inercia es:

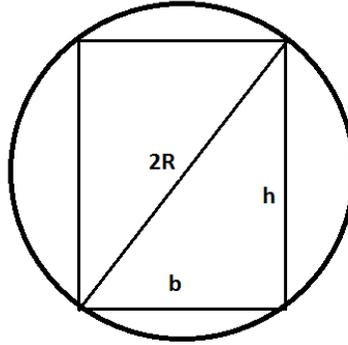
$$I = \int \int_A z^2 dydz, \quad (1.1)$$

donde A la sección transversal al eje X (se asume que todas las secciones transversales son iguales y que el eje X pasa por sus centroides). En el caso de vigas rectangulares de sección A , con altura h (dirección del eje Z) y base b (dirección del eje Y), la fórmula (1.1) se calcula mediante dos integrales definidas reiteradas:

$$I = \int \int_A z^2 dydz = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\int_{-b/2}^{b/2} z^2 dy \right) dz = \frac{bh^3}{12}. \quad (1.2)$$

Resolución:

Realizamos un dibujo ilustrativo de una sección transversal del tronco, en el que se definen las variables involucradas en el diseño de la viga



donde h y b denotan la altura y la base de la viga respectivamente.

Se observa que la base y la altura de la viga están restringidas a la relación: $b^2 + h^2 = (2R)^2$, por el teorema de Pitágoras. Además ambas variables se deban mantener dentro del intervalo $(0, 2R)$.

Atendiendo al enunciado del problema, la resistencia de la viga viene dada por la función objetivo

$$f(b, h) = kbh^3,$$

siendo $k > 0$ una constante que dependerá de la especie de árbol en concreto.

Para reformular el problema en términos de una única variable, despejamos la altura en función de la base y del radio, $h = \sqrt{4R^2 - b^2}$, y sustituimos en la función resistencia:

$$f(b) = kb(4R^2 - b^2)^{3/2}.$$

Obsérvese que $f(0) = f(2R) = 0$ y que $f(b)$ es positiva y derivable para $b \in (0, 2R)$ y continua en $[0, 2R]$, por el Teorema de Weierstrass debe tener al menos un máximo absoluto para $b \in (0, 2R)$. Y como la función objetivo es diferenciable, podemos localizar dicho máximo a través del cálculo de sus puntos críticos:

$$f'(b) = 0 \Leftrightarrow k(4R^2 - b^2)^{3/2} + kb \frac{3}{2}(4R^2 - b^2)^{1/2}(-2b) = 0,$$

mediante simplificaciones elementales se obtiene que en $b \in (0, 2R)$ hay un único punto crítico que satisface la ecuación

$$4R^2 - b^2 = 3b^2 \Leftrightarrow b = R.$$

De la restricción de Pitágoras, $b^2 + h^2 = (2R)^2$, se sigue $h = \sqrt{3}R$.

Como sólo hay un punto crítico, debe ser el máximo relativo predicho por el teorema de Weierstrass.

Capítulo 2

Problemas de Álgebra

2.1. Reducción de la huella de carbono

Asignatura:

Álgebra

Problema del tema:

Sistema de ecuaciones lineales asociado al problema discreto de la distribución de temperatura (estado estacionario)

Fuente:

Natalia Boal

Contexto y relación con los ODS:

El problema físico que se plantea es conocer la distribución de temperatura de una habitación cuadrada fijada la temperatura de las paredes del contorno. Para simplificar se considera un modelo estacionario bidimensional de transferencia de calor, esto es, se supone que la temperatura en cada punto de la habitación no cambia en función del tiempo y tampoco depende de la altura sobre el suelo. Este problema se modela matemáticamente por una EDP elíptica conocida como Ecuación de Laplace con condiciones de tipo Dirichlet que, en coordenadas cartesianas sobre el cuadrado, $\Omega = [0, \ell] \times [0, \ell]$, se plantea como:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, & (x, y) \in \Omega, \\ T(x, 0) = f(x), \quad T(x, \ell) = g(x), & 0 \leq x \leq \ell, \\ T(0, y) = m(y), \quad T(\ell, y) = h(y), & 0 \leq y \leq \ell. \end{cases}$$

La resolución de este problema se puede abordar desde distintos enfoques:

- Aplicando el método de separación de variables (Ecuaciones en Derivadas Parciales - EDP).
- Discretizando el problema continuo utilizando un esquema de diferencias finitas centrales (Métodos Numéricos para EDP). En este caso, aparece un sistema de ecuaciones lineales con tantas ecuaciones e incógnitas como nodos interiores tiene la malla.
 - El sistema de ecuaciones lineales asociado al problema discreto se puede utilizar en la asignatura de Matemáticas II (Álgebra). Como puede ocurrir que no se haya visto la teoría de EDP ni los esquemas de discretización, se hará una simplificación y se guiará al estudiante para plantear el sistema lineal asociado al problema discreto.

Una forma de conectar este problema con los ODS es relacionándolo con la descarbonización y reducción de la huella de carbono para las construcciones más antiguas. En esta línea destacar que se están llevando a cabo numerosas reformas de edificios que implican la renovación de fachadas teniendo en cuenta medidas arquitectónicas pasivas con el fin de mejorar la eficiencia energética del edificio. Entre las propuestas que actualmente se están poniendo en práctica están: el cambio de acristalamiento, la reducción de puentes térmicos, la instalación de las fachadas ventiladas, el aprovechamiento de la inercia térmica de los materiales de construcción, . . . todo ello con el objetivo final de conseguir un mejor aislamiento térmico y una temperatura interior de confort con menor coste energético y reduciendo la huella del carbono.

En este contexto se puede reflexionar sobre los ODS: 7, 11, 12 y 13. En concreto este problema se puede relacionar con las metas:

- 7.3 Duplicar la tasa mundial de mejora de la eficiencia energética.
- 11.6 Reducir el impacto ambiental negativo per capita de las ciudades, incluso prestando especial atención a la calidad del aire, . . .
- 11.b Aumentar considerablemente el número de ciudades y asentamientos humanos que adoptan e implementan políticas y planes integrados para promover la inclusión, el uso eficiente de los recursos, la mitigación del cambio climático y la adaptación a él y la resiliencia ante los desastres, . . .
- 11.c Proporcionar apoyo a los países menos adelantados, incluso mediante asistencia financiera y técnica, para que puedan construir edificios sostenibles y resilientes utilizando materiales locales.
- 12.8 Asegurar que las personas de todo el mundo tengan la información y los conocimientos pertinentes para el desarrollo sostenible y los estilos de vida en armonía con la naturaleza
- 12.a Ayudar a los países en desarrollo a fortalecer su capacidad científica y tecnológica para avanzar hacia modalidades de consumo y producción más sostenibles
- 13.2 Incorporar medidas relativas al cambio climático en las políticas, estrategias y planes nacionales
- 13.3 Mejorar la educación, la sensibilización y la capacidad humana e institucional respecto de la mitigación del cambio climático, la adaptación a él, la reducción de sus efectos y la alerta temprana.

Enunciado:

Una de las formas de preservar el medio ambiente es mediante la descarbonización y reducción de la huella de carbono para las construcciones más antiguas. En esta línea cabe destacar que se están llevando a cabo numerosas reformas

de edificios que implican la renovación de fachadas teniendo en cuenta medidas arquitectónicas pasivas con el fin de mejorar la eficiencia energética del edificio. Todo ello con el objetivo final de conseguir un mejor aislamiento térmico y una temperatura interior de confort con menor coste energético a la vez que se reduce la huella del carbono.

El problema físico que se plantea es conocer la distribución de temperatura interior de una habitación cuadrada fijada la temperatura de las paredes del contorno y comprobar cómo influyen las medidas de aislamientos en la temperatura interior. Para simplificar se considera un modelo estacionario bidimensional de transferencia de calor, esto es, se supone que la temperatura en cada punto de la habitación no cambia en función del tiempo y tampoco depende de la altura sobre el suelo.

Este problema se modela matemáticamente por una EDP conocida como Ecuación de Laplace con condiciones de tipo Dirichlet.

Se desea conocer la temperatura en los nodos interiores x_1 , x_2 , x_3 y x_4 (véase la Figura 2.1).

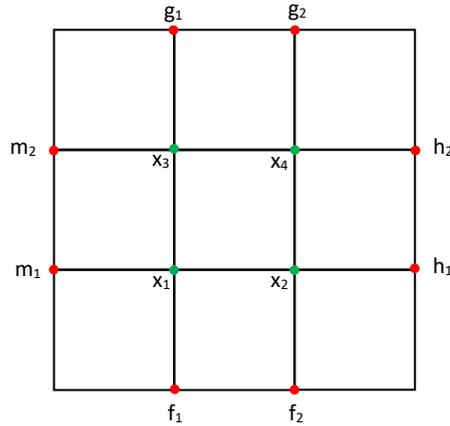


Figura 2.1: Discretización con 4 nodos

Para ello se discretiza el problema aplicando un esquema de diferencias finitas centrales que, en este caso, equivale a obtener una aproximación a la temperatura en estos nodos interiores realizando el promedio de las temperaturas de sus nodos adyacentes. Por ejemplo, para el nodo 1 se tiene la relación lineal:

$$x_1 = \frac{1}{4}(m_1 + f_1 + x_2 + x_3) \Leftrightarrow 4x_1 - x_2 - x_3 = m_1 + f_1.$$

Procediendo de forma análoga y aplicando esta aproximación para cada nodo

de la placa representada en la Figura 2.1 se obtiene el sistema lineal

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 - x_3 &= m_1 + f_1, \\ -x_1 + 4x_2 - x_4 &= f_2 + h_1, \\ -x_1 + 4x_3 - x_4 &= m_2 + g_1, \\ -x_2 - x_3 + 4x_4 &= g_2 + h_2, \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde la incógnita es el vector de temperaturas $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top$.

Consideramos ahora un caso particular con temperaturas concretas en el contorno: los nodos de la frontera superior a 40°C , los nodos de las fronteras laterales a 20°C y los de la frontera inferior a 10°C . Esta situación podría representar las temperaturas de las paredes de una habitación en la que hay una fuente de calor en la frontera superior y hay una ventana en la frontera inferior. Se pide:

- Plantear el sistema lineal asociado $A_4\mathbf{x} = \mathbf{b}_4$:

$$A_4 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_4 = \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 60 \\ 60 \end{pmatrix}$$

- Estudiar las propiedades de la matriz de coeficientes.

Solución: A_4 es regular, simétrica, definida positiva, diagonal dominante.

- Discutir la existencia y unicidad de solución del sistema de ecuaciones lineales asociado al problema físico discreto.

Solución: $A_4\mathbf{x} = \mathbf{b}_4$ SCD, solución única: $\mathbf{x} = \left(\frac{75}{4} \quad \frac{75}{4} \quad \frac{105}{4} \quad \frac{105}{4}\right)^t$.

- Extender este razonamiento y plantear el sistema lineal asociado para una malla regular con nueve nodos interiores, con temperaturas constantes en cada lado del contorno: en la frontera superior 40°C , fronteras laterales 20°C y en la frontera inferior 10°C .

Solución: $A_9\mathbf{x} = \mathbf{b}_9$

$$A_9 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_9 = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 30 \\ 20 \\ 0 \\ 20 \\ 60 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{120}{7} \\ \frac{935}{56} \\ \frac{120}{7} \\ \frac{175}{8} \\ \frac{45}{2} \\ \frac{175}{8} \\ \frac{195}{7} \\ \frac{1655}{56} \\ \frac{195}{7} \end{pmatrix}.$$

Se hace la observación de que este mismo procedimiento se puede aplicar a una malla más fina con $n = k^2$ nodos interiores (véase la Figura 2.2), obteniendo en tal caso un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas en el que la matriz de coeficientes es una matriz dispersa (con gran cantidad de elementos nulos) y con una estructura banda. Si el tamaño del sistema, n , es grande, los

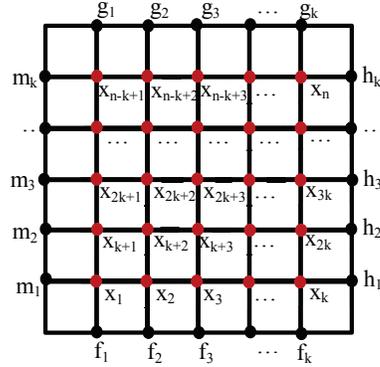


Figura 2.2: Discretización con $n = k^2$ nodos

métodos directos estudiados pueden no ser eficientes (alto coste computacional, requerimientos de memoria de almacenamiento y aparición de errores de redondeo) por lo que se hace necesario recurrir a técnicas numéricas que permitan conocer una solución aproximada del problema.

- Utilizar este ejemplo para destacar las limitaciones que tendrían los métodos directos estudiados para la resolución de sistemas lineales cuando el número de nodos de la malla del problema discreto es grande y de esta forma introducir los Métodos Iterativos para sistemas de ecuaciones lineales.
- Resolver el problema utilizando los métodos iterativos de Jacobi y de Gauss-Seidel (con la ayuda de un manipulador algebraico) y analizar la convergencia de estos métodos para este sistema.
- Se pueden plantear situaciones en las que se observe la influencia de esta mejora del aislamiento del edificio en la temperatura interior. Para ello, se pueden modificar la temperatura del contorno y ver cómo ésta influye en la temperatura interior.

2.2. Tendiendo puentes

Asignatura:

Álgebra

Problema del tema:

Sistemas de ecuaciones

Fuente:

- Idea inicial a partir de una práctica de Matemáticas I del Grado en Estudios de Arquitectura diseñada por María José Cantero y Begoña Melendo.
- La estructura articulada y algunas definiciones utilizadas se han extraído de Juan Miquel Canet: Resistencia de materiales y estructuras. Ediciones CIMNE (2012).
- La contextualización del problema está basada en un proyecto real: <https://www.horadeayudar.org/proyectos/puente-peatonal-huacapongo-susanga/>
- Elaboración final por Sergio Serrano.

Contexto y relación con los ODS:

Es un problema de resolución de un sistema de ecuaciones lineales. Se plantea el análisis de una estructura articulada para la construcción de un puente que permita a una población el acceso a su lugar de formación o trabajo, sanidad y vida social a lo largo de todo el año. De este modo se hace reflexionar al alumnado sobre los objetivos 1, 3, 8, 10 y 11. En concreto, el problema se relaciona con las metas:

- 1.4 Garantía de acceso a servicios básicos y recursos financieros.
- 3.8 Lograr la cobertura universal y acceso a medicamentos.
- 8.8 Protección de los derechos laborales y trabajo seguro.
- 10.3 Garantizar la igualdad de oportunidades.
- 11.5 Reducción del número de muertes por desastres y reducción de vulnerabilidad.
- 11.A Apoyo a vínculos zonas urbanas, periurbanas y rurales.

Enunciado:

El caserío de Susanga (Perú), con una población cercana a 350 habitantes (unas 70 familias), tiene una pista no asfaltada apta para automóviles como única vía de comunicación con la población de referencia. Dicha pista se vuelve intransitable en épocas de avenida de agua (por espacio de 6 meses, entre diciembre y mayo) ya que la pista cruza el río Huacapongo y las fuertes e intensas corrientes de agua no permiten el traslado de personas y productos de primera necesidad.

En esta época el caserío de Susanga se aísla, perjudicando el flujo comercial tanto de entrada como de salida. Asimismo, se ve afectada la dinámica de la mano de obra local. El traslado de personas y de algunos elementos básicos de alimentación se hace a través de un andarivel (sistema de cables y una canastilla) que se encuentra en malas condiciones y cuya manipulación requiere de dos o más personas.

Este impedimento en el tramo de la pista no permite el adecuado desplazamiento tanto del personal de salud hacia las familias (para la actividades de promoción de la salud) como de familias hacia el puesto de salud para la atención de salud y casos de emergencia; ya que Sangasu no dispone de un servicio de salud básico.

Asimismo, afecta el traslado de aproximadamente 40 niños, niñas y adolescentes que cursan estudios primarios y secundarios a su centro educativo; debiendo estos invertir mayor tiempo para desplazarse con el andarivel, además del riesgo permanente de caer y ser arrastrados por el río, situación que ya ha sucedido en varias ocasiones.

En cuanto al aspecto organizacional este tramo limita el oportuno traslado de autoridades y representantes de organizaciones para realizar sus gestiones correspondientes. De igual manera las familias se ven afectadas cuando tienen que trasladarse para realizar diversas gestiones oficiales (registro civil, servicios, juzgado de paz, entre otros).

Es por ello que varias ONGs con proyectos locales en el entorno están recaudando fondos para construir un puente que permita el paso a lo largo de todo el año¹. En paralelo, se está planificando la estructura de dicho puente y una de las opciones contempladas haría uso de una estructura articulada hiperestática [1] como la que se observa en la figura 2.3.

Las estructuras articuladas están formadas por barras, en general rectas, unidas entre sí mediante articulaciones confluyentes en los denominados vértices o nudos, asemejando una línea poligonal. Sobre dichas estructuras actúan determinadas fuerzas externas que generalmente se aplican a los nudos, lo que permite un aprovechamiento óptimo del material. Esto hace que dichas estructuras articuladas sean ampliamente utilizadas en la construcción.

Uno de los principales métodos para el cálculo de estructuras hiperestáticas es el método de rigidez. Este método toma como incógnitas los desplazamientos,

¹Basado en una historia real: <https://www.horadeayudar.org/proyectos/puente-peatonal-huacapongo-susanga/>

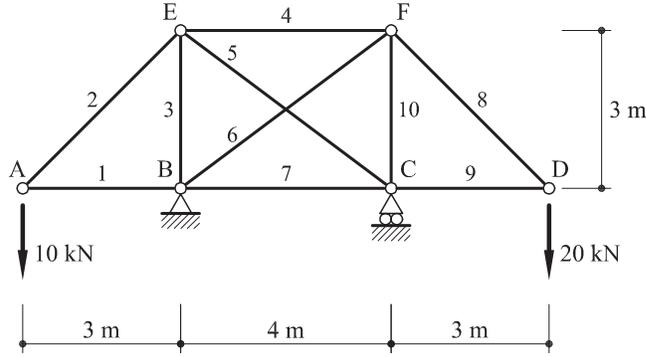


Figura 2.3: Estructura articulada para la construcción del puente. Figura extraída de [1]

u_i , de los nudos de la estructura. Utilizando el método de rigidez [1] para la estructura de la figura 2.3 se llega al sistema $K u = F$ con

$$K = \begin{pmatrix} \frac{2^{\frac{3}{2}}+1}{3(2^{\frac{3}{2}})} & \frac{1}{3(2^{\frac{3}{2}})} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3(2^{\frac{3}{2}})} & -\frac{1}{3(2^{\frac{3}{2}})} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3(2^{\frac{3}{2}})} & \frac{1}{3(2^{\frac{3}{2}})} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3(2^{\frac{3}{2}})} & -\frac{1}{3(2^{\frac{3}{2}})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1067}{1500} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{16}{125} & \frac{12}{125} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2^{\frac{3}{2}}+1}{3(2^{\frac{3}{2}})} & -\frac{1}{3(2^{\frac{3}{2}})} & 0 & 0 & -\frac{1}{3(2^{\frac{3}{2}})} & \frac{1}{3(2^{\frac{3}{2}})} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3(2^{\frac{3}{2}})} & \frac{1}{3(2^{\frac{3}{2}})} & 0 & 0 & \frac{1}{3(2^{\frac{3}{2}})} & -\frac{1}{3(2^{\frac{3}{2}})} \\ -\frac{1}{3(2^{\frac{3}{2}})} & -\frac{1}{3(2^{\frac{3}{2}})} & -\frac{16}{125} & 0 & 0 & \frac{125(\sqrt{2}+3)+192}{1500} & \frac{125\sqrt{2}-144}{1500} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{3(2^{\frac{3}{2}})} & -\frac{1}{3(2^{\frac{3}{2}})} & \frac{12}{125} & 0 & 0 & \frac{125\sqrt{2}-144}{1500} & \frac{125(\sqrt{2}+4)+108}{1500} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3(2^{\frac{3}{2}})} & \frac{1}{3(2^{\frac{3}{2}})} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{125(\sqrt{2}+3)+192}{1500} & \frac{144-125\sqrt{2}}{1500} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3(2^{\frac{3}{2}})} & -\frac{1}{3(2^{\frac{3}{2}})} & 0 & 0 & \frac{144-125\sqrt{2}}{1500} & \frac{125(\sqrt{2}+4)+108}{1500} \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } u = \begin{pmatrix} u_A^H \\ u_A^V \\ u_C^H \\ u_D^H \\ u_D^V \\ u_E^H \\ u_E^V \\ u_F^H \\ u_F^V \end{pmatrix} \text{ el vector formado por las componentes horizonta-}$$

tal y vertical (en mm) de los desplazamientos desconocidos (no fijados por los apoyos) de los nudos de la estructura.

1. Comprueba que el sistema tiene solución única.
2. Calcula los desplazamientos de cada nudo de la estructura.
3. Si se quisiera aplicar un método iterativo para obtener una solución aproximada del sistema $Ku = F$, ¿qué método elegirías?, ¿por qué?

Referencia [1]: Juan Miquel Canet: Resistencia de materiales y estructuras. Ediciones CIMNE (2012).

Resolución:

1. Se puede comprobar que la matriz es regular, por lo que el sistema tiene solución única.

2. El vector u solución del sistema:
$$\begin{pmatrix} 30,0 \\ -129,2278137423857 \\ -49,99999999999996 \\ -109,99999999999999 \\ -414,0806274847714 \\ -1,25 \\ -13,125 \\ 68,75 \\ -65,62500000000001 \end{pmatrix}$$
. Hay que tener

en cuenta que $u_B^H = u_B^V = u_C^V = 0$.

3. Se observa que la matriz K es simétrica. Además, se puede comprobar que es definida positiva. Por lo que la teoría nos asegura la convergencia del método de Gauss-Seidel. Además, podría comprobarse que el radio espectral de la matriz de iteración de dicho método es aproximadamente 0.765. Por otro lado, del método de Jacobi obligatoriamente tendríamos que calcular su matriz de iteración para estudiar su convergencia. De ese

modo, podríamos comprobar que su radio espectral es aproximadamente 1.249, por lo que no converge. Por tanto, el método a elegir será el de Gauss-Seidel.

Otra opción: Utilizando el método de compatibilidad se plantea una estructura isostática base eliminando la barra 6 y se obtiene el siguiente sistema que proporciona los esfuerzos axiales de dicha estructura isostática base:

2.3. La mejor compañía

Asignatura:

Álgebra

Problema del tema:

Evolución de un sistema dinámico discreto usando diagonalización de matrices

Fuente:

Sergio Serrano

Contexto y relación con los ODS:

Es un problema en el que se estudia la evolución de los beneficios anuales de tres empresas de fabricación de móviles. Para ello se utiliza la diagonalización de la matriz que relaciona los beneficios de un año con los del anterior. Los datos y el estudio son solamente económicos, pero después se da información sobre los problemas medioambientales y de conflictos sociales que generan la mayoría de compañías de fabricación de móviles. De este modo se hace reflexionar al alumnado sobre los objetivos 7, 8, 9, 13, 16 y, especialmente, el 12: PRODUCCIÓN Y CONSUMO RESPONSABLES. En concreto, el problema se relaciona con las metas:

- 7.3 Duplicar la tasa de eficiencia energética.
- 8.4 Mejora de la producción y consumo eficiente y respetuoso.
- 9.4 Modernización de la infraestructura, tecnología limpia.
- 12.1 Aplicación marco de consumo y producción sostenibles.
- 12.2 Lograr el uso eficiente de recursos naturales.
- 12.4 Gestión de desechos y productos químicos.
- 12.5 Prevención, reducción, reciclado y reutilización de desechos.
- 12.8 Asegurar la educación para el Desarrollo Sostenible.
- 13.3 Mejorar la educación y sensibilización medioambiental.
- 16.1 Reducción de todas las formas de violencia.

Enunciado:

Supongamos que los beneficios anuales, en millones de euros, obtenidos por tres compañías de fabricación de móviles dependen de lo que invierten dichas empresas en publicidad ese año:

$$\begin{aligned} B_n^S &= 100P_n^S - 20P_n^A - 30P_n^F, \\ B_n^A &= -20P_n^S + 40P_n^A - 10P_n^F, \\ B_n^F &= -10P_n^S - 20P_n^A + 50P_n^F. \end{aligned}$$

Donde B_n^K son los beneficios de la empresa K en el año n y P_n^K la inversión en publicidad de la empresa K en el año n .

Además, sabemos que, tras varios años de competencia entre ellas, actualmente cada una de las tres compañías invierte en publicidad en función de los beneficios obtenidos el año anterior de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} P_n^S &= \frac{83}{6700}B_{n-1}^S + \frac{4}{335}B_{n-1}^A + \frac{77}{6700}B_{n-1}^F, \\ P_n^A &= \frac{57}{3350}B_{n-1}^S + \frac{403}{13400}B_{n-1}^A + \frac{22}{1675}B_{n-1}^F, \\ P_n^F &= \frac{89}{6700}B_{n-1}^S + \frac{11}{670}B_{n-1}^A + \frac{131}{6700}B_{n-1}^F. \end{aligned}$$

- Expresa los beneficios obtenidos por cada empresa el año n en función de los beneficios obtenidos el año anterior.
- Expresa los beneficios obtenidos por cada empresa el año n en función de los beneficios iniciales.
- Analiza lo que ocurre con los beneficios de dichas empresas a largo plazo.
- ¿En qué empresa invertirías?, ¿por qué?
- ¿Tienes toda la información necesaria para tomar la decisión anterior? Revisa los siguientes enlaces y piensa si cambiarías tu respuesta en función de dicha información:
 - Efectos
 - Evolución
 - Alternativas
 - ¿Una de ellas?

Resolución:

- a) Expresa los beneficios obtenidos por cada empresa el año n en función de los beneficios obtenidos el año anterior.

$$\begin{aligned} B_n^S &= 100P_n^S - 20P_n^A - 30P_n^F, \\ B_n^A &= -20P_n^S + 40P_n^A - 10P_n^F, \\ B_n^F &= -10P_n^S - 20P_n^A + 50P_n^F, \\ \\ P_n^S &= \frac{83}{6700}B_{n-1}^S + \frac{4}{335}B_{n-1}^A + \frac{77}{6700}B_{n-1}^F, \\ P_n^A &= \frac{57}{3350}B_{n-1}^S + \frac{403}{13400}B_{n-1}^A + \frac{22}{1675}B_{n-1}^F, \\ P_n^F &= \frac{89}{6700}B_{n-1}^S + \frac{11}{670}B_{n-1}^A + \frac{131}{6700}B_{n-1}^F. \end{aligned}$$

Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} B_n^S \\ B_n^A \\ B_n^F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & -20 & -30 \\ -20 & 40 & -10 \\ -10 & -20 & 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_n^S \\ P_n^A \\ P_n^F \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} P_n^S \\ P_n^A \\ P_n^F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{83}{6700} & \frac{4}{335} & \frac{77}{6700} \\ \frac{57}{3350} & \frac{403}{13400} & \frac{22}{1675} \\ \frac{89}{6700} & \frac{11}{670} & \frac{131}{6700} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{n-1}^S \\ B_{n-1}^A \\ B_{n-1}^F \end{pmatrix}.$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} B_n^S \\ B_n^A \\ B_n^F \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 100 & -20 & -30 \\ -20 & 40 & -10 \\ -10 & -20 & 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{83}{6700} & \frac{4}{335} & \frac{77}{6700} \\ \frac{57}{3350} & \frac{403}{13400} & \frac{22}{1675} \\ \frac{89}{6700} & \frac{11}{670} & \frac{131}{6700} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{n-1}^S \\ B_{n-1}^A \\ B_{n-1}^F \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{4}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{n-1}^S \\ B_{n-1}^A \\ B_{n-1}^F \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- b) Expresa los beneficios obtenidos por cada empresa el año n en función de los beneficios iniciales.

$$B_1 = A B_0, \text{ con } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{4}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

$$B_2 = A B_1 = A(A B_0) = A^2 B_0,$$

$$B_3 = A B_2 = A(A^2 B_0) = A^3 B_0.$$

Supongamos que $B_n = A^n B_0$, entonces

$$B_{n+1} = A B_n = A(A^n B_0) = A^{n+1} B_0, \text{ c.q.d.}$$

c) Analiza lo que ocurre con los beneficios de dichas empresas a largo plazo.

¿Existe $C = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ base de \mathbb{R}^3 tal que $A\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$ con $\lambda_i \in \mathbb{R}$?

En esa base

$$[\mathbf{B}_n]_C = D [\mathbf{B}_{n-1}]_C, \text{ con } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Y sabemos

$$D = P^{-1}AP, \text{ con } P = (\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3).$$

Es decir, $A = PDP^{-1}$, y por tanto, $A^n = PD^nP^{-1}$.

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow A\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow (A - \lambda I_3)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Buscamos soluciones no triviales de un sistema lineal homogéneo.

$$|A - \lambda I_3| = 0$$

$$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{4}{5} - \lambda & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{3}{5} - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)\left(\frac{3}{5} - \lambda\right)\left(\frac{3}{10} - \lambda\right).$$

$$\text{Luego } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{3}{5} \text{ y } \lambda_3 = \frac{3}{10}, \text{ por tanto } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 3/10 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo los sistemas $(A - \lambda_i I_3)\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, con $i = 1, 2, 3$, obtenemos los

$$\text{vectores buscados: } \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Luego } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{12} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{3}{5})^n & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{3}{10})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{12} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Como } D^n \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ cuando } n \rightarrow \infty,$$

$$A^n = PD^nP^{-1} \rightarrow P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

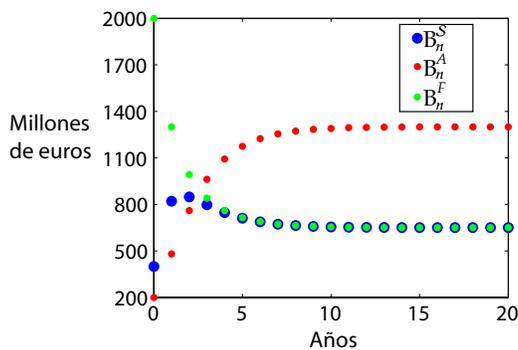
De modo que

$$\begin{pmatrix} B_n^S \\ B_n^A \\ B_n^F \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} B_0^S \\ B_0^A \\ B_0^F \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0^S \\ B_0^A \\ B_0^F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(B_0^S + B_0^A + B_0^F) \\ \frac{1}{2}(B_0^S + B_0^A + B_0^F) \\ \frac{1}{4}(B_0^S + B_0^A + B_0^F) \end{pmatrix}.$$

Es decir, a largo plazo, la primera y la tercera empresas se quedan aproximadamente cada una con la cuarta parte del total de los beneficios iniciales, mientras que la segunda se queda con la mitad de dichos beneficios.

Por ejemplo, con

$$\begin{pmatrix} B_0^S \\ B_0^A \\ B_0^F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ 200 \\ 2000 \end{pmatrix},$$



2.4. Hambre cero

Asignatura:

Álgebra

Problema del tema:

Sistemas de ecuaciones

Fuente:

Enunciado ligeramente modificado a partir del Proyecto 2.2 de *Álgebra lineal en la educación para el desarrollo sostenible*. María Isabel García Planas, Judit Taberna Torres, Natalia Rina García. ISBN: 978-84-9880-700-4

Contexto y relación con los ODS:

Es un problema de resolución de un sistema de ecuaciones lineales. Se plantea un problema de nutrientes necesarios por persona y reparto de alimentos en una región del cuerno de África. De este modo se incide en el objetivo 2 de los ODS: Hambre cero.

Enunciado:

En 2017, los países del cuerno de África han padecido una fuerte hambruna que, según la ACNUR (<https://eacnur.org/es>), posiblemente sea peor que la de 2011. Según la misma fuente, miles de niños y madres lactantes se encontraban en estado de desnutrición aguda. A través de las ayudas internacionales, se ha conseguido reunir cinco toneladas de arroz y lentejas, y cuatro de carne seca.

Téngase en cuenta que cada uno de estos alimentos contiene grasa, proteína y carbohidratos, en las proporciones siguientes:

- Cada 100 gramos de arroz contienen 0,8 gramos de grasa, 7 gramos de proteína y 80 gramos de carbohidratos.
- Cada 100 gramos de carne contienen 25 gramos de grasa, 17 gramos de proteína y 0,1 gramos de carbohidratos.
- Cada 100 gramos de lentejas contienen 2 gramos de grasa, 22 gramos de proteína y 62,5 gramos de carbohidratos.

Y que los requisitos mínimos diarios de grasa, proteína y carbohidratos que se deben obtener con estos alimentos para una ración de comida media por

persona son de 20 gramos de grasa, 25 gramos de proteína y 50 gramos de carbohidratos.

1. ¿Qué cantidad de alimento se debe consumir para satisfacer estos requisitos?
2. Si en la zona se encuentran 250.000 personas, ¿durante cuántos días podrán ser alimentadas?
3. ¿Qué cantidad de cada alimento será necesaria para que se pueda alimentar dicha población durante un mes?

Resolución:

1. Se plantea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 20 \\ 25 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G \\ P \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{1000} & \frac{25}{100} & \frac{2}{100} \\ \frac{7}{100} & \frac{17}{100} & \frac{22}{100} \\ \frac{80}{100} & \frac{1}{1000} & \frac{625}{1000} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ C \\ L \end{pmatrix}.$$

Cuya solución es $\begin{pmatrix} A \\ C \\ L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25,48238113832523 \\ 75,40361129438378 \\ 47,26190636487269 \end{pmatrix}$ en gramos.

2. Para 250.000 personas: $\begin{pmatrix} A \\ C \\ L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,370595284581308 \\ 18,850902823595945 \\ 11,815476591218172 \end{pmatrix}$ en toneladas. Por lo que los alimentos recogidos no son suficientes para alimentar adecuadamente a dicha población durante un día.

3. Para 30 días: $\begin{pmatrix} A \\ C \\ L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 191,11785853743926 \\ 565,52708470787835 \\ 354,46429773654515 \end{pmatrix}$ toneladas.

Capítulo 3

Problemas de Ecuaciones Diferenciales

3.1. Crecimiento de bacterias

Asignatura:

Ecuaciones diferenciales

Problema del tema:

Modelado con ecuaciones diferenciales de primer orden

Fuente:

Dennis G. Zill: Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado (pag. 83). ISBN-10: 9706864873

Contexto y relación con los ODS:

Es un problema de crecimiento de bacterias que se resuelve conociendo la ecuación de crecimiento y decaimiento, válida para diferentes fenómenos. Se propone para estudiar un cultivo de bacterias. De este modo se incide en el objetivo 3 de los ODS. En concreto, el problema se relaciona con la meta:

3.3 Poner fin a las enfermedades transmisibles.

Enunciado:

Inicialmente un cultivo tiene un número P_0 de bacterias. En $t = 1h$ se determina que el número de bacterias es $3/2P_0$. Si la razón de crecimiento es proporcional al número de bacterias $P(t)$ presentes en el tiempo t , determine el tiempo necesario para que se triplique el número de bacterias.

Resolución:

Primero se resuelve la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP, P(t_0) = P_0$$

Con $t_0 = 0$ la condición inicial es $P(0) = P_0$. Entonces se usa la observación empírica de que $P(1) = \frac{3}{2}P_0$ para determinar la constante de proporcionalidad k .

Observe que la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} - kP = 0$ es separable y lineal:

$$\int \frac{dP}{P} = \int k dt \rightarrow \ln P = kt + c; \quad P(t) = C e^{kt}.$$

Por tanto $P(t) = C e^{kt}$. En $t = 0$ se tiene que $P_0 = C e^0 = C$, $P(t) = P_0 e^{kt}$. En $t = 1$ se tiene que $\frac{3}{2}P_0 = P_0 e^k$ o $e^k = \frac{3}{2} \rightarrow k = \ln \frac{3}{2} \approx 0,4055$, por tanto $P(t) \approx P_0 e^{0,4055t}$. Para determinar el tiempo en que se ha triplicado el número de bacterias, resolvemos $3P_0 = P_0 e^{0,4055t}$ para t . Entonces $0,4055t \approx \ln 3$, o $t \approx \frac{\ln 3}{0,4055} \approx 2,71h$

Observe que en ese ejemplo el número real P_0 de bacterias presentes en el tiempo t_0 no tiene que ver en el cálculo del tiempo que se requirió para que el número de bacterias en el cultivo se triplique. El tiempo necesario para que se triplique una población inicial de, digamos, 100 o 1 000 000 de bacterias es de aproximadamente 2.71 horas. La función exponencial e^{kt} aumenta conforme crece t para $k > 0$ y disminuye conforme crece t para $k < 0$. Así los problemas que describen el crecimiento (ya sea de poblaciones, bacterias o de capital) se caracterizan por un valor positivo de k , en tanto que los problemas relacionados con decaimiento (como en la desintegración radiactiva) tienen un valor k negativo. De acuerdo con esto, decimos que k es una constante de crecimiento ($k > 0$) o una constante de decaimiento ($k < 0$).

3.2. Transmisión de enfermedades

Asignatura:

Ecuaciones diferenciales

Problema del tema:

Modelado con ecuaciones diferenciales de primer orden

Fuente:

Enunciado: Dennis G. Zill: Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado (Pg 22). ISBN-10: 9706864873. Resolución numérica: Felipe Petriz.

Contexto y relación con los ODS:

Es un problema de transmisión de enfermedades que se resuelve conociendo la relación de propagación. Se puede usar para estudiar la expansión de una enfermedad contagiosa. De este modo se incide en el objetivo 3 de los ODS. En concreto, el problema se relaciona con la meta:

3.3 Poner fin a las enfermedades transmisibles.

Enunciado:

Una enfermedad contagiosa, por ejemplo, un virus de gripe, se propaga a través de una comunidad por personas que han estado en contacto con otras personas enfermas. Sea que $x(t)$ denote el número de personas que han contraído la enfermedad y sea que $y(t)$ denote el número de personas que aún no han sido expuestas al contagio. Es lógico suponer que la razón $\frac{dx}{dt}$ con la que se propaga la enfermedad es proporcional al número de encuentros, o interacciones, entre estos dos grupos de personas. Si suponemos que el número de interacciones es conjuntamente proporcional a $x(t)$ y $y(t)$, esto es, proporcional al producto xy , entonces,

$$\frac{dx}{dt} = kx(t)y(t) \quad (1)$$

donde k es la constante usual de proporcionalidad. Suponga que una pequeña comunidad tiene una población fija de n personas. Si se introduce una persona infectada dentro de esta comunidad, entonces se podría argumentar que $x(t)$ y

$y(t)$ están relacionadas por $x(t) + y(t) = n + 1$. Utilizando esta última ecuación para eliminar y en la ecuación (1) se obtiene el modelo

$$\frac{dx}{dt} = kx(t)(n + 1 - x(t))$$

con $x(0) = 1$.

Resolución analítica:

Nos encontramos ante una ecuación diferencial separable y lineal. Por lo tanto tenemos que resolver:

$$\int \frac{dx}{kx(n + 1 - x)} = \int dt \quad (2)$$

para resolver la primera integral tenemos primero que descomponer el integrando en fracciones simples:

$$\frac{1}{kx(n + 1 - x)} = \frac{A}{kx} + \frac{B}{(n + 1 - x)} = \frac{A(n + 1 - x) + Bkx}{kx(n + 1 - x)} = \frac{A(n + 1) + (Bk - A)x}{kx(n + 1 - x)}$$

Por lo tanto $A(n + 1) = 1$ y $Bk - A = 0$, esto se cumple para $A = \frac{1}{n + 1}$ y

$$B = \frac{1}{k(n + 1)}$$

$$\int \frac{dx}{kx(n + 1 - x)} = \frac{1}{(n + 1)} \int \frac{dx}{kx} + \frac{1}{k(n + 1)} \int \frac{dx}{n + 1 - x} = \frac{1}{k(n + 1)} \ln \frac{kx}{(n + 1 - x)} + Cte$$

Como $\int dt = t + Cte$ la expresión (2) queda como

$$\frac{kx}{(n + 1 - x)} = C e^{k(n+1)t} \rightarrow x(t) = \frac{(n + 1)C e^{k(n+1)t}}{k + C e^{k(n+1)t}} \quad (3).$$

Para sacar el valor de la constante C utilizamos el hecho de que al principio empezamos por una persona infectada $x(0) = 1$ (se podría hacer para otros casos en el que el número inicial de personas infectadas sea mayor que uno).

$$x(0) = \frac{(n + 1)C}{k + C} = 1 \rightarrow C = \frac{k}{n}$$

Sustituyendo el valor de C en la expresión (3) obtenemos

$$x(t) = \frac{(n + 1) e^{k(n+1)t}}{n + e^{k(n+1)t}}$$

Resolución numérica:

Se presenta el programa en Maxima para resolver el PVI.

```
N:1000.0; k:0.013;
t[0]:0; x[0]:1.0; h:1/200;
define(f(t,x),k*x*(N+1-x));
t[n]:=t[0]+n*h;
x[n]:=x[n-1]+h*f(t[n-1],x[n-1]);
```

Calculamos la solución aproximada con el método de Euler y lo dibujamos

```
solnum:makelist(float([t[n],x[n]]),n,0,200);
wxplot2d([[discrete,solnum]],style,[points,1.1],[legend,"x[n]"]);
```

Introducimos la solución exacta que hemos calculado previamente y la comparamos con la aproximación.

```
solex(t):=(1001/1000)*%e^(1001*0,013*t)/(1+(1/1000)*%e^(1001*0,013*t));
wxplot2d([[discrete,solnum],solex(t)],[t,0,1],style,[points,1.1],[legend,"x[n]","x(t)"]);
```

3.3. Depredador-presa

Asignatura:

Ecuaciones diferenciales

Problema del tema:

Modelado con ecuaciones diferenciales de primer orden

Fuente:

Guión de prácticas del grado de Ingeniería Industrial.

Contexto y relación con los ODS:

Es un problema de tipo presa-depredador. Se trata de predecir la población de dos especies. De este modo se incide en el objetivo 15 de los ODS. En concreto, el problema se relaciona con las metas:

- 15.1 Velar por la conservación, el restablecimiento y el uso sostenible de los ecosistemas terrestres y de agua dulce.
- 15.5: Proteger las especies amenazadas y evitar su extinción.
- 15.8: Prevenir la introducción de especies exóticas invasoras y reducir de forma significativa sus efectos en los ecosistemas terrestres y acuáticos.

Enunciado:

Se considera el problema de predecir la población de dos especies, una de ellas es depredadora $y(t)$ y se alimenta de la otra especie $x(t)$ llamada presa. Suponiendo que la población de presas tiene siempre alimento y que su natalidad es proporcional al número de individuos que hay en cada instante, la mortalidad de las presas dependerá del número de depredadores que se alimentan de ellas. A su vez, la natalidad y la mortalidad de los depredadores dependerá del número de estos y del número de presas que tengan para alimentarse. Con estas consideraciones se puede formular un modelo de población determinado por el siguiente PVI:

$$\begin{cases} x'(t) = k_1 x - k_2 xy, \\ y'(t) = k_3 xy - k_4 y, \\ x(0) = 1000, y(0) = 200 \end{cases}$$

Tomando como valores de las constantes: $k_1 = 3$, $k_2 = 0,002$, $k_3 = 0,0006$, $k_4 = 0,5$,

i) Utiliza el método RK4 con paso de integración $h=1/10$ para resolver aproximadamente el PVI en el intervalo $[0,17]$. Realiza una representación gráfica de las aproximaciones obtenidas para las poblaciones $x(t)$ e $y(t)$ en función del tiempo.

ii) ¿ Qué conclusión se obtiene sobre el comportamiento de la solución del PVI?

Resolución:

Se generó un fichero de Maxima para resolver el problema :

```
kill(all)

t[0]:0; x[0]:1000; y[0]:200; h:0.1;
define(f(t,x,y),3*x-0.002*x*y);
define(g(t,x,y),0.0006*x*y-0.5*y);

t[n]:=t[0]+n*h;
X1[n]:=x[n];
Y1[n]:=y[n];
X2[n]:=x[n]+h*f(t[n],X1[n],Y1[n])/2;
Y2[n]:=y[n]+h*g(t[n],X1[n],Y1[n])/2;
X3[n]:=x[n]+h*f(t[n]+h/2,X2[n],Y2[n])/2;
Y3[n]:=y[n]+h*g(t[n]+h/2,X2[n],Y2[n])/2;
X4[n]:=x[n]+h*f(t[n]+h/2,X3[n],Y3[n]);
Y4[n]:=y[n]+h*g(t[n]+h/2,X3[n],Y3[n]);

x[n]:=x[n-1]+ h*(f(t[n-1],X1[n-1],Y1[n-1])/6+f(t[n-1]+h/2,X2[n-1],Y2[n-1])/3 +
f(t[n-1]+h/2,X3[n-1],Y3[n-1])/3 + f(t[n-1]+h,X4[n-1],Y4[n-1])/6);
y[n]:=y[n-1]+ h*(g(t[n-1],X1[n-1],Y1[n-1])/6+g(t[n-1]+h/2,X2[n-1],Y2[n-1])/3 +
g(t[n-1]+h/2,X3[n-1],Y3[n-1])/3 + g(t[n-1]+h,X4[n-1],Y4[n-1])/6);

solnumx:makelist(float([t[n],x[n]]),n,0,170)
solnumy:makelist(float([t[n],y[n]]),n,0,170)
solnumxy:makelist(float([x[n],y[n]]),n,0,170)

wxplot2d([[discrete,solnumx],[discrete,solnumy]], [style,[points,1.1,1],[points,1.1,2]],
[legend,"x[n]","y[n]"]);
wxplot2d([discrete,solnumxy],[style,[points,2,3]])
```

3.4. Modelo SIR aplicado al COVID19

Asignatura:

Ecuaciones diferenciales

Problema del tema:

Modelado con ecuaciones diferenciales de primer orden

Fuente:

Felipe Petriz, modelo diferencial (Modelo SIR aplicado al COVID-19) Trabajo de Kermarck, W.O. y McKendrick(1972).

Contexto y relación con los ODS:

Es un problema de transmisión de enfermedades que se resuelve conociendo la relación de propagación. Se puede usar para estudiar la expansión de una enfermedad contagiosa. De este modo se incide en el objetivo 3 de los ODS. En concreto, el problema se relaciona con la meta:

3.3 Poner fin a las enfermedades transmisibles.

Enunciado:

El problema consiste en estudiar la evolución de una epidemia que se propaga mediante contagio entre individuos de una población de tamaño N que permanece constante. En el instante t los individuos pueden encontrarse en tres posibles estados:

Susceptibles: individuos sanos que pueden ser contagiados por los infectados.

Infectados: individuos portadores de la enfermedad.

Recuperados: individuos del resto (que se han recuperado de la enfermedad o que han fallecido).

Se pretende hacer una previsión de la evolución del número de individuos de cada uno de estos tres estados a partir de un número de infectados en un determinado momento.

En definitiva se pretende determinar las funciones $S(t), I(t), R(t)$ que representan la evolución de Susceptibles, Infectados y Recuperados, respectivamente. Esa evolución viene dada por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S(t) \frac{I(t)}{N} \\ I'(t) = \beta S(t) \frac{I(t)}{N} - \gamma I(t) \\ R'(t) = \gamma I(t) \end{cases}$$

Con las condiciones iniciales:
$$\begin{cases} S(0) = S_0 = N - I_0 \\ I(0) = I_0 \\ R(0) = 0 \end{cases}$$

El modelo contempla dos parámetros:

- **Tasa de transmisión de la enfermedad** β que indica el número de contactos suficientes para la transmisión de una persona por unidad de tiempo, o dicho de otra manera, el producto del número de contactos medios por individuo y unidad de tiempo y la probabilidad de contagio en un solo contacto entre un individuo infectado y un individuo susceptible.
- **Tasa de recuperación** γ que indica la tasa por unidad de tiempo a la cual los individuos se recuperan. Es decir, es la ratio entre el número de recuperados y el número de infectados por unidad de tiempo.

Por otro lado :

1. La tasa básica de reproducción se define como $\frac{\beta}{\gamma}$ y describe la intensidad de la enfermedad infecciosa. Cuando es mayor que 1, la enfermedad se propaga ampliamente entre la población y cuando es menor que 1, la enfermedad desaparece tras un cierto periodo de tiempo.
2. El modelo permite proporcionar distintos valores para los parámetros: N, I_0, β, γ .
3. El modelo permite ajustar los parámetros con datos reales procedentes de otro periodo de tiempo u otra zona geográfica.

Busca la solución considerando que $N = 1000$, la tasa de transmisión es 0.667, la tasa de recuperación 0.167 y que en el instante inicial hay un único infectado.

Resolución:

Resolvemos numéricamente en Maxima usando el método de RK4.

```
kill(all);
```

```
N:1000; I0:1.0;
```

B:0.667; C:0.167;

```
t[0]:0; S[0]:N-I0; I[0]:I0; R[0]:0.0; h:1/20;
define(f(t,S,I,R), -B*S*I/N);
define(g(t,S,I,R), B*S*I/N - C*I);
define(h(t,S,I,R), C*I);
```

```
t[n]:=t[0]+n*h;
S1[n]:=S[n];
I1[n]:=I[n];
R1[n]:=R[n];
S2[n]:=S[n]+h*f(t[n], S1[n],I1[n],R1[n])/2;
I2[n]:=I[n]+h*g(t[n], S1[n],I1[n],R1[n])/2;
R2[n]:=R[n]+h*h(t[n], S1[n],I1[n],R1[n])/2;
S3[n]:=S[n]+h*f(t[n]+h/2, S2[n],I2[n],R2[n])/2;
I3[n]:=I[n]+h*g(t[n]+h/2, S2[n],I2[n],R2[n])/2;
R3[n]:=R[n]+h*h(t[n]+h/2, S2[n],I2[n],R2[n])/2;
S4[n]:=S[n]+h*f(t[n]+h/2, S3[n],I3[n],R3[n]);
I4[n]:=I[n]+h*g(t[n]+h/2, S3[n],I3[n],R3[n]);
R4[n]:=R[n]+h*h(t[n]+h/2, S3[n],I3[n],R3[n]);
S[n]:=S[n-1]+h*(f(t[n-1], S1[n-1],I1[n-1],R1[n-1])/6 + f(t[n-1]+h/2, S2[n-1],I2[n-1],R2[n-1])/3 + f(t[n-1]+h/2, S3[n-1],I3[n-1],R3[n-1])/3 + f(t[n-1]+h, S4[n-1],I4[n-1],R4[n-1])/6);
I[n]:=I[n-1]+h*(g(t[n-1], S1[n-1],I1[n-1],R1[n-1])/6 + g(t[n-1]+h/2, S2[n-1],I2[n-1],R2[n-1])/3 + g(t[n-1]+h/2, S3[n-1],I3[n-1],R3[n-1])/3 + g(t[n-1]+h, S4[n-1],I4[n-1],R4[n-1])/6);
R[n]:=R[n-1]+h*(h(t[n-1], S1[n-1],I1[n-1],R1[n-1])/6 + h(t[n-1]+h/2, S2[n-1],I2[n-1],R2[n-1])/3 + h(t[n-1]+h/2, S3[n-1],I3[n-1],R3[n-1])/3 + h(t[n-1]+h, S4[n-1],I4[n-1],R4[n-1])/6);

float([S[120],I[120],R[120]]);

solnum:makelist(float([S[n],I[n],R[n]]),n,0,600);

solnum1:makelist(float([t[n],S[n]]),n,0,600)$
wxplot2d([[discrete,solnum1]],style,[points,1.1]], [x,0,30],[y,0,1000]);

solnum2:makelist(float([t[n],I[n]]),n,0,600)$
wxplot2d([[discrete,solnum2]],style,[points,1.1]], [x,0,30],[y,0,1000]);

solnum3:makelist(float([t[n],R[n]]),n,0,600)$
wxplot2d([[discrete,solnum3]],style,[points,1.1]], [x,0,30],[y,0,1000]);

Snum:makelist(float([t[n],S[n]]),n,0,600)$
Inum:makelist(float([t[n],I[n]]),n,0,600)$
Rnum:makelist(float([t[n],R[n]]),n,0,600)$

wxplot2d([[discrete,Snum],[discrete,Inum],[discrete,Rnum]], style,[points,1.1],[legend,"S[n]","I[n]","R[n]"]);
```

3.5. El mejor aislante

Asignatura:

Ecuaciones diferenciales

Problema del tema:

Modelado con ecuaciones diferenciales de primer orden

Fuente:

Pablo Díaz

Contexto y relación con los ODS:

Es un problema de modelado que se resuelve conociendo la ley de enfriamiento/calentamiento de Newton, válida para transmisiones de calor cuando la diferencia de temperaturas entre las superficies en contacto no es muy grande. Se propone en un contexto en el que se trata de reformar una vivienda para mejorar su eficiencia energética. De este modo se incide en los objetivos 7, 11 y 13 de los ODS. En concreto, el problema se relaciona con las metas:

7.3 Duplicar la tasa de eficiencia energética.

11.C Apoyo a la construcción de edificios sostenibles y resilientes en países menos adelantados.

13.3 Mejorar la educación y sensibilización medioambiental.

Enunciado:

Para mejorar la eficiencia energética de su casa, Antonio quiere poner un material aislante en las paredes. Dispone de muestras (del mismo grosor) de lana de vidrio y de poliestireno expandido. Ante la duda de cuál de los materiales es mejor aislante decide hacer un experimento. Coloca un termómetro fuera de la casa y otro dentro de una habitación. El termómetro exterior marca 0°C y el interior 22°C . Antonio recubre una pared de la habitación con poliestireno y apaga la calefacción. Al cabo de una hora el termómetro interior marca $20,5^{\circ}\text{C}$ y el exterior sigue a 0°C . Entonces retira el poliestireno y recubre la misma pared con lana de vidrio. Vuelve a tomar medidas. Al cabo de una hora el termómetro interior ha cambiado de $20,4^{\circ}\text{C}$ a $18,8^{\circ}\text{C}$ y el exterior no ha variado. Aplicando la ley de enfriamiento/calentamiento de Newton, ¿Qué material resulta ser mejor aislante?

Resolución:

Para la resolución de este dilema utilizaremos la ley de Newton de enfriamiento/calentamiento, válida para diferencias pequeñas de temperatura, que establece que la variación infinitesimal de temperatura con respecto al tiempo de dos sistemas en contacto es proporcional a la diferencia de temperaturas entre ambos. Escribiremos

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a), \quad k \geq 0, \quad (3.1)$$

donde T es la temperatura de la habitación, que dependerá de t , y T_a es la temperatura exterior que se mantiene constante durante el proceso. k es una constante positiva que varía según la conductividad térmica de la superficie de contacto. Por ejemplo, $k = 0$ implica que los sistemas están perfectamente aislados. En general, cuanto menor es k menor es la conductividad térmica y mayor, por tanto, el aislamiento. Para la misma superficie y el mismo grosor de material, habrá una constante k_p asociada al poliestireno y otra constante k_l referida a la lana de vidrio. Se trata de calcular esas constantes con los datos del problema.

La ecuación diferencial (3.1) se puede resolver mediante el método de separación de variables. Tenemos

$$\int_{T_0}^T \frac{dT}{T - T_a} = -k \int_0^t dt, \quad (3.2)$$

donde T_0 es la temperatura inicial del sistema que estamos estudiando. En este caso la habitación.

Integrando (3.2) y despejando k , obtenemos

$$k = \frac{1}{t} \ln \left(\frac{T_0 - T_a}{T - T_a} \right). \quad (3.3)$$

Aplicando (3.3) a los datos del problema podemos estimar que

$$\begin{aligned} k_p &= \frac{1}{60} \ln \left(\frac{22}{20,5} \right) \text{min}^{-1} = 1,17 \times 10^{-3} \text{min}^{-1} \\ k_l &= \frac{1}{60} \ln \left(\frac{20,4}{18,8} \right) \text{min}^{-1} = 1,36 \times 10^{-3} \text{min}^{-1}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

con los que deducimos que el poliestireno es mejor aislante.

3.6. Repoblación de un lago

Asignatura:

Ecuaciones diferenciales

Problema del tema:

Modelado con ecuaciones diferenciales de primer orden

Fuente:

Algunos ejemplos prácticos de la contribución de una asignatura de matemáticas de Grado a los ODS, Anna Vidal-Meló. INNODOCT 2021. International Conference on Innovation, Documentation and Education.

Contexto y relación con los ODS:

Es un problema de modelado que se resuelve conociendo los modelos de población exponencial y logístico válidos para crecimientos poblacionales sin limitación y con limitación de recursos, respectivamente. Se propone en un contexto en el que se desea repoblar un lago con una especie de peces autóctonos. De este modo se incide en los objetivos 14 (vida submarina) y 15 (vida de ecosistemas terrestres) de los ODS. En concreto, el problema se relaciona con las metas:

- 14.4 Reglamentar la explotación pesquera y poner fin a la pesca excesiva [...] a fin de restablecer las poblaciones de peces en el plazo más breve posible.
- 15.1 Velar por la conservación, el restablecimiento y el uso sostenible de los ecosistemas terrestres y de agua dulce.
- 15.5 Proteger las especies amenazadas y evitar su extinción.
- 15.8 Prevenir la introducción de especies exóticas invasoras y reducir de forma significativa sus efectos en los ecosistemas terrestres y acuáticos.

Enunciado:

En un pequeño parque natural se desea introducir una especie de pez autóctono en uno de sus lagos, a través de un programa de protección y repoblación. La citada población en el tiempo t , medido en meses, viene definida por la función $y(t)$ medida en unidades de individuos. Estudia la dinámica de la población

de peces, durante el primer año y medio, a través del modelo exponencial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{15}{32}y,$$

y a través del modelo logístico

$$\frac{dy}{dt} = \frac{15}{32}y \left(1 - \frac{y}{1500} \right),$$

para una repoblación inicial de 100 peces. ¿Qué pasaría con el modelo logístico si la repoblación inicial es de 2000? ¿Qué repoblación es preferible?

Si se plantea poder realizar una pesca constante de C peces al mes, el modelo es

$$\frac{dy}{dt} = \frac{15}{32}y \left(1 - \frac{y}{1500} \right) - C,$$

Sabiendo que la ecuación es autónoma, estudiar cualitativamente la dinámica para una población inicial y_0 de peces y analizar en función de C cuál es la tasa máxima de pesca que puede permitirse para que no desaparezcan los peces.

Resolución:

Comparamos las predicciones del modelo exponencial y del modelo logístico para el problema dado. Ambos pueden resolverse de manera exacta por separación de variables. Para el modelo exponencial la solución general es

$$y_e(t) = y_0 e^{\frac{15}{32}t}, \quad y_0 = y(0).$$

Para una población inicial de 100 peces según este modelo esperamos que la población en un año y medio sea

$$y_e(18) = 100 e^{\frac{15}{32}18} \text{ peces} = 4616 \text{ peces.}$$

Si utilizamos el modelo logístico la ecuación diferencial se resuelve y se obtiene

$$y_l(t) = \frac{ay_0}{by_0 + (a - by_0)e^{-at}}, \quad a = \frac{15}{32}, \quad b = \frac{1}{3200}.$$

Para el caso $y_0 = 100$ y $t = 18$ obtenemos

$$y_l(18) = 1495 \text{ peces.}$$

La diferencia entre los resultados esperados de ambos modelos es notable. En principio, si el modelo está bien calibrado, deberíamos confiar en las predicciones de un modelo logístico, dado que los lagos tendrán unas dimensiones determinadas y los recursos para los peces serán por tanto limitados. El modelo exponencial proporcionaría predicciones fiables solo para tiempos pequeños.

Si el número de peces inicial es 2000 en lugar de 100, el modelo logístico predice

$$y_l(18) = 1500 \text{ peces,} \quad y_0 = 2000.$$

Vemos que la diferencia con la predicción para $y_0 = 100$ es pequeña, tan solo de 5 peces. Este resultado es consistente con el hecho de que la solución de la ecuación logística presenta un atractor. Es por tanto irrelevante a largo plazo que se realice una repoblación con 100 o con 2000 individuos.

Para encontrar una tasa sostenible de pesca procedemos a analizar cualitativamente la ecuación logística modificada

$$\frac{dy}{dt} = \frac{15}{32}y \left(1 - \frac{y}{1500}\right) - C.$$

Aunque esta ecuación se puede resolver también de manera exacta por separación de variables, es muy fácil obtener información sobre el espacio de soluciones mediante inspección y cálculo de los puntos críticos. Los puntos críticos en nuestro problema son las soluciones de

$$-\frac{1}{1500}y^2 + y - \frac{32}{15}C = 0.$$

Esta ecuación tiene solución real solo en el caso de que $C \leq 176$. Lo que indica que, a largo plazo, para tasas de pesca mayores de 176 peces al mes el sistema sería insostenible y habría extinción. Para una tasa de pesca $C = 100$ peces al mes la población se aproximará asintóticamente a una población constante de 1242 peces, que es el punto crítico positivo de la ecuación diferencial en este caso.