INSTITUTO FEDERAL
Paraíba
Campus Campina Grande

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA

CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JAILSON ALMEIDA DA PAIXÃO SANTOS

TEORIA DOS NÚMEROS NO ENSINO BÁSICO: UM ESTUDO NO PRIMEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO

CAMPINA GRANDE – PB

2022

JAILSON ALMEIDA DA PAIXÃO SANTOS

TEORIA DOS NÚMEROS NO ENSINO BÁSICO: UM ESTUDO NO PRIMEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Vinícius Costa de Alencar

S237t Santos, Jailson Almeida da Paixão.

Teoria dos números no ensino básico: um estudo no primeiro ano do Ensino Médio / Jailson Almeida da Paixão Santos. - Campina Grande, 2022.

36 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Curso de Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal da Paraíba, 2022. Orientador: Prof. Me. Vinícius da Costa Alencar.

1. Matemática- Ensino 2. Teoria dos Números 3. Teorema 4. Teorema I. Título.

CDU 511

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CAMPUS CAMPINA GRANDE

JAILSON ALMEIDA DA PAIXÃO SANTOS

TEORIA DOS NÚMEROS NO ENSINO BÁSICO: UM ESTUDO NO PRIMEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso, aprovado como requisito parcial para a obtenção de graduação em Licenciatura em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraiba – Campus Campina Grande.

Habilitação: Licenciatura

Data da aprovação

30 / 08 / 2022.

Banca examinadora:

Vinicius Costa de Alencar

ORIENTADOR: Prof. Me Vinicius Costa de Alencar - IFPB

Orlando Batista de Almeida

AVALIADOR: Prof. Me Orlando Batista de Almeida – IFPB

Rodrigo Moura da Silva

AVALIADOR: Prof. Dr. Rodrigo Moura da Silva – IFPB

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus por estar aqui e terminando o curso de licenciatura em matemática.

À minha mãe, Francineide Almeida, por estar sempre presente nessa jornada e nunca soltar minha mão.

À minha irmã, Jayne Almeida, pelas conversas de apoio.

Aos professores que fizeram parte da minha formação acadêmica.

Ao coordenador do curso de licenciatura em matemática, Orlando Almeida, além de um grande homem tem um coração gigante que só carrega bondade.

Ao meu orientador, Prof. Me. Vinícius Costa de Alencar pela orientação no TCC, por seu estímulo e colaboração neste trabalho.

Não poderia deixar de agradecer a instituição IFPB – CG pelos ótimos professores, secretários, seguranças, faxineiros e etc. são esses que dão o melhor para que um aluno como eu, se sinta seguro, confortável e motivado para ter um futuro melhor.

Aos meus amigos e colegas, quanto a vocês... muitas alegrias e momentos bons que passamos no período do curso, fomos muito importantes uns aos outros: obrigado!!!

“Sábio é o ser humano que tem coragem de ir diante do espelho da sua alma para reconhecer seus erros e fracassos e utilizá-los para plantar as mais belas sementes no terreno de sua inteligência. ”

Augusto Cury

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo apresentar uma maneira de calcular todos os divisores positivos de um número natural usando uma consequência do teorema fundamental da aritmética. Para isso, foi ministrada uma aula em uma turma do primeiro ano do ensino médio do IFPB, Campus Campina Grande, com a participação de 24 alunos, em que foi apresentado o conceito de divisibilidade, números primos e as duas formas do teorema fundamental da aritmética, além de exemplos sobre como calcular todos os divisores positivos de um número natural e a quantidade de tais divisores positivos. Além disso, os alunos responderam um questionário sobre o assunto de divisores positivos de um número natural. Analisou – se se os alunos da turma sabem calcular todos os divisores positivos de um número natural e determinar a quantidade de divisores positivos que um número natural tem. Além disso, verificou – se suas respectivas opiniões acerca do método usado para calcular todos os divisores positivos de um número natural. De acordo com as porcentagens obtida nos resultados foi possível notar que houve um maior nível de satisfação entre os alunos, com a utilização desse método para encontrar os divisores positivos dos números naturais.

Palavras-chave: Divisores, Número, Teorema, Aritmética.

ABSTRACT

This paper aims to present a way to calculate all the positive divisors of a natural number using a consequence of the fundamental theorem of arithmetic. For this, a class was given in a first year high school class of the IFPB, Campus Campina Grande, with the participation of twenty-four students, the concept of divisibility, prime numbers and the two forms of the fundamental theorem of arithmetic were presented, as well as examples on how to calculate all the positive divisors of a natural number and the quantity of such positive divisors. In addition, the students answered a quiz on the subject of positive divisors of a natural number. We analyzed whether the students in the class know how to calculate all positive divisors of a natural number and determine how many positive divisors a natural number has. In addition, we checked their respective opinions about the method used to calculate all the positive divisors of a natural number. According to the percentages obtained in the results it was possible to notice that there was higher level of satisfaction among the students with the of this method to find the positive divisors of the natural numbers.

Keywords: Dividers, Number, Theorem, Arithmetic.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1. INTRODUÇÃO

De acordo com Gauss (1777 – 1855), considerado o maior matemático de todos os tempos: "A Matemática é a rainha das ciências e a Teoria dos Números é a rainha da Matemática".

Segundo Vieira (2015), a Teoria dos Números está relacionada a problemas que demandam solução de equação ou de sistema de equações com valores inteiros para as suas incógnitas. Na teoria dos números é muito comum questionar se um número natural é primo ou não e, além disso, como decidir a respeito. Um número natural p diz-se primo se ele tem exatamente dois divisores positivos distintos, 1 e $|p|$.

> O teorema fundamental da aritmética diz que os números primos são tijolos de construção a partir dos quais os outros inteiros são formados multiplicativamente. Por conseguinte, os números primos foram muito estudados e se fizeram esforços consideráveis no sentido de determinar a natureza de sua distribuição na sequência dos inteiros positivos (JUNQUEIRA, p. 12, 2001)

O Grego *Demócrito* (546 e 460 a.C.) foi quem denominou as partículas pequenas que formam toda e qualquer matéria de átomos (do grego – *a*: não; *tomo: divisão*), pois acreditava que elas eram indivisíveis. Atualmente se sabe que os átomos podem ser divididos em partículas menores, mas a ideia de que a matéria existe em "unidades mínimas" ainda é presente. Na aritmética, a ideia de "unidades mínimas" também existe, porém, o papel dos átomos, neste caso, é exercido pelos chamados números primos. Os pitagóricos, seguidores de Pitágoras, foram os primeiros a se interessarem pelas propriedades desses números. Todavia, diferente da ideia antiga a respeito dos átomos, a dos números primos continuam, e vão continuar funcionando como blocos numéricos fundamentais, responsáveis por gerar todos os números naturais diferentes de 0 e de 1. Esta propriedade é conhecida como Teorema Fundamental da Aritmética – o TFA (OBMEP, 2015).

As dificuldades no TFA vêm do início dos estudos, pois para trabalhar esse assunto, os alunos têm que saber dividir e a divisão é um assunto que tortura alguns deles. Por exemplo, para fatorar um número, temos que trabalhar com divisão, mas se o aluno não sabe dividir, fica difícil fatorar tal número. Com isso, o professor deve criar estratégias para lidar com situações desse tipo. Logo, esse teorema sendo aplicado em sala de aula auxiliará no avanço do conhecimento matemático dos alunos para solucionar tais problemas.

O objetivo principal deste trabalho é utilizar uma consequência do teorema fundamental da aritmética (TFA) para encontrar todos os divisores positivos de um número natural.

Agora, daremos algumas definições e estabeleceremos alguns resultados que servirão de base para o estudo do teorema fundamental da aritmética e sua consequência.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 CONCEITOS BÁSICOS EM TEORIA DOS NÚMEROS

Para execução desta etapa utilizou – se como referência os capítulos 1, 2, e 3 do livro “Um curso básico em teoria dos números” escrito por Vandenberg Lopes Vieira, 2015.

2.1.1 Princípio da boa ordenação

O princípio da boa ordenação é um dos mais importantes resultados em teoria dos números, pois é usado em várias demonstrações matemáticas envolvendo números inteiros.

Antes de estudar esse princípio, veremos as definições de conjunto limitado inferiormente e elemento mínimo.

Definição: Seja W um subconjunto não vazio de $\mathbb{Z}$. Dizemos que W é limitado inferiormente quando existe um elemento $x_0 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$x_0 \leq x, \quad \forall x \in W.$$

Dizemos também que W é limitado inferiormente por x_0 e que este é um limitante inferior de W. Nestas condições, um elemento $m \in W$ é chamado elemento mínimo de W (ou menor elemento) quando

$$m \leq x, \quad \forall x \in W.$$

Exemplo 1: O conjunto $W_1 = \{2, 3, 4, 5\}$ é limitado inferiormente, pois $x_0 = 2$ é um limitante inferior (também é um elemento mínimo) de W_1. Em geral, todo subconjunto finito não vazio W de $\mathbb{Z}$ é limitado inferiormente.

Exemplo 2: O conjunto $W_2 = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ não é limitado inferiormente e, por isso, não possui elemento mínimo.

Agora, enunciaremos o princípio da boa ordenação para os inteiros.

Axioma 1 (Princípio da Boa Ordenação para os inteiros): Todo subconjunto não vazio e limitado inferiormente X de $\mathbb{Z}$ possui menor elemento.

Exemplo 1: O conjunto $x = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ é não vazio (pois tem 6 elementos), é limitado inferiormente (por -2, por exemplo), é um subconjunto dos inteiros e possui menor elemento que é -2.

Já que todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ é limitado inferiormente, então para o conjunto dos números naturais, podemos enunciar o princípio da boa ordenação da seguinte forma:

Axioma 2 (Princípio da Boa Ordenação para os naturais): Todo subconjunto não vazio W de $\mathbb{N}$ possui um menor elemento.

Exemplo 2: O conjunto $W = \{3,4,5,6,7\}$ é um subconjunto dos naturais, é não vazio (já que tem 5 elementos) e possui menor elemento, que é 3.

Observação: Um limitante inferior de um conjunto W pode ou não pertencer a W. Já um elemento mínimo de W, por definição, pertence a W.

Um conceito importante no estudo de teoria dos números é o de divisibilidade, a qual veremos agora.

2.1.2 Divisibilidade

Sabemos que dados dois números inteiros x e y, com $y \neq 0$, nem sempre a fração $x \,/\, y$ é um número inteiro, ou seja, em geral, não existe um inteiro z de modo que $x = yz$. Isso nos leva ao conceito de divisibilidade.

Nesse caso as letras $x, y, z,$ etc. representaram nesta seção sempre números inteiros, a menos que seja mencionado o contrário. Isso será feito para evitar repetições de certas frases.

Definição: Diremos que y divide x, em símbolos $y \mid x$, se existir um inteiro z tal que

$$x = yz.$$

Neste caso, dizemos também que x é divisível por y, que y é um divisor de x ou ainda que W é um múltiplo de y.

Daí, $\quad y \mid x \Leftrightarrow x = yz$ para algum $z \in \mathbb{Z}$.

Se "y não divide x" denotaremos isso, $y \nmid x$.

Exemplo:

- $5 \mid 20$ pois $20 = 5 \cdot 4$.
- $-3 \mid 9$ pois $9 = -3 \cdot (-3)$.
- $4 \nmid 11$ pois não existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $11 = 4 \cdot z$.

Além disso, $1 \mid x$, pois $x = 1 \cdot x$, $\quad x \mid x$, pelo fato de $x = x \cdot 1$ e $x \mid 0$, já que $0 = x \cdot 0$, para todo $x \in \mathbb{Z}$, pois

Agora, veremos um resultado bastante importante em teoria dos números, que é o algoritmo da divisão.

2.1.3 Algoritmo da divisão

Vimos que nem sempre se pode dividir um inteiro por outro de modo a se obter um número inteiro, ou seja, essa divisão nem sempre é exata.

Exemplo: considerando $x = 19$ e $y = 6$, dividimos 19 por 6, obtemos $19 = 6 \cdot 3 + 1$.

Numa linguagem bem elementar, quando dividimos de forma igualitária dezenove objetos entre seis pessoas, cada uma delas receberá três objetos, e ainda sobrará um.

Com isso, podemos enunciar o algoritmo da divisão.

Teorema 1 (Algoritmo da Divisão): Sejam x e y inteiros, com $y > 0$. Então, existem únicos inteiros q e r tais que

$$x = yq + r, \quad \text{com} \quad 0 \leq r < y.$$

Demonstração: Consideremos o conjunto

$$L = \{x - yq : q \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad x - yq \geq 0\}.$$

Uma primeira coisa a ser verificada é que L é não vazio. De fato, desde que $y \geq 1$, então $|x| \cdot y \geq |x|$. Logo,

$$x - (-|x|) \cdot y = x + |x| \cdot y \geq x + |x| \geq 0.$$

Como $a = x - (-|x|) \cdot y$ é da forma $x - yq$, com $q = -|x|$, então $a \in L$.

Agora, vamos mostrar a existência e unicidade dos inteiros q e r.

Existência – sendo L limitado inferiormente e não vazio, temos que L possui menor elemento, digamos $r =$min L. Como $r \in L$, então $r \geq 0$.

$$r = x - yq, \quad \text{com} \quad q \in \mathbb{Z}.$$

Asseguramos que $r < y$. Se isto não ocorrer, então $r - y \geq 0$ e

$$r - y = x - yq - y$$

$$= x - y(q+1).$$

Portanto, $r - y \in L$ e $r - y < r$, o que contrária a minimalidade de r. Por conseguinte, $x = qy + r$, com $q \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r < y$, o que prova a existência dos inteiros q e r.

Unicidade – para a unicidade, consideremos $q_1, r_1 \in \mathbb{Z}$ tais que

$x = yq_1 + r_1$ com $0 \leq r_1 < y$. Assim,

$yq + r = yq_1 + r_1$, o que implica em

$$r - r_1 = y(q_1 - q),$$

ou seja, $y \mid (r - r_1)$. Como $|r - r_1| < y$, segue que $r - r_1 = 0$, isto é, $r = r_1$.

Por isso, $q = q_1$, uma vez que $y \neq 0$.

Vejamos uma versão mais geral do algoritmo da divisão, que é o caso em que substituímos $y > 0 \; por \; y \neq 0$.

2.1.4 Algoritmo da divisão – versão geral

Se x e y são inteiros, com $y \neq 0$, então, existem únicos inteiros q e r tais que

$$x = yq + r, \text{ com } 0 \leq r < |y|.$$

Demonstração – É suficiente considerar o caso $y < 0$.

Pelo teorema 1, existem únicos inteiros q_1 e r satisfazendo

$$x = |y|q_1 + r, \quad \text{com} \quad 0 \leq r < |y|.$$

Já que, $|y| = -y$, temos que

$$x = |y|q_1 + r = y(-q_1) + r,$$

de modo que, considerando $q = -q_1$, obtemos

$$x = yq + r, \quad \text{com} \;\; 0 \leq r < |y|.$$

Os inteiros q e r dados são chamados de quociente e resto da Divisão e Euclidiana de x por y, respectivamente.

Notemos que na Divisão Euclidiana, com $x = yq + r$,

$$r = 0 \Leftrightarrow y \mid x.$$

Exemplo: Determine o quociente e o resto da divisão de x e y quando:

a) $x = 37$ e $y = 7$.

b) $x = -14$ e $y = 4$

Solução a):

$37 = 7 \cdot 5 + 2$ e $2 < 7$, então $q = 5$ e $r = 2$.

Solução b):

Para este caso, vamos efetuar a divisão natural de 14 por 4. Após isso, manipulamos a expressão convenientemente. Como $14 = 3 \cdot 4 + 2$, então

$$\begin{aligned} -14 = -3 \cdot 4 - 2 &= -3 \cdot 4 - 2 - 4 + 4 \\ &= 4 \cdot (-4) + 2. \end{aligned}$$

Logo, $q = -4$ e $r = 2$.

2.1.5 Máximo divisor comum de dois inteiros

Considerando dois números naturais relativamente pequenos, determinaremos seus divisores positivos, indicaremos os divisores comuns e verificaremos o maior entre eles.

Numa linguagem comum, o que se faz é o seguinte: tomemos x e y inteiros ambos não nulos, donde $x \neq y$. Considerando,

$$D_x = \{n \in \mathbb{N} : n \mid x\} \quad \text{e} \quad D_y = \{n \in \mathbb{N} : n \mid y\}.$$

Notamos que, $D_x \cap D_y \neq \emptyset$, pois $1 \mid x$ e $1 \mid y$.

Logo, $D_x \cap D_y$ é um conjunto finito e, por isso, possui maior elemento, chamando de Máximo Divisor Comum (mdc) de x e y, o qual denotaremos por

$$mdc(x, y).$$

Definição – sejam $x, y \in \mathbb{Z}$, com $x \neq 0$ ou $y \neq 0$. Dizemos que $d \in \mathbb{N}$ é o máximo divisor comum de x e y quando as seguintes condições são satisfeitas:

(a) $d \mid x$ e $d \mid y$.

(b) Se $c \mid x$ e $c \mid y$, então $c \mid d$

O máximo divisor comum de x e y é um número natural que os divide e é divisível por todo divisor comum de x e y.

Exemplo: Calcular $d = mdc(1020,284)$.

Solução: De acordo com o Algoritmo de Euclides, com $x = 1020$ e $y = 284$, temos

$$1020 = 284 \cdot 3 + 168 \Rightarrow mdc(1020, 284) = mdc(284, 168),$$

$$284 = 168 \cdot 1 + 116 \Rightarrow mdc(284,168) = mdc(168, 116),$$

$$168 = 116 \cdot 1 + 52 \Rightarrow mdc(168,116) = mdc(116, 52),$$

$$116 = 52 \cdot 2 + 12 \Rightarrow mdc(116, 52) = mdc(52,12),$$

$$52 = 12 \cdot 4 + 4 \Rightarrow mdc(52,12) = mdc(12, 4),$$

$$12 = 4 \cdot 3 + 0 \Rightarrow mdc(12, 4) = mdc(4, 0) = 4.$$

Então, $mdc(1020, 284) = 4$. Determinemos inteiros a_0 e b_0 tais que $4 = 1020 \cdot a_0 + 284 \cdot b_0$. Isso consistirá em isolar os restos não nulos das divisões de baixo para cima das igualdades, substituindo-os sucessivamente. Temos,

$$\begin{aligned} 4 = 52 - 4 \cdot 12 &= 52 - 4 \cdot (116 - 2 \cdot 52) \\ &= 9 \cdot 52 - 4 \cdot 116 \\ &= 9 \cdot (168 - 1 \cdot 116) - 4 \cdot 116 \\ &= 9 \cdot 168 - 13 \cdot 116 \\ &= 9 \cdot 168 - 13 \cdot (284 - 1 \cdot 168) \\ &= 22 \cdot 168 - 13 \cdot 284 \\ &= 22 \cdot (1020 - 3 \cdot 284) - 13 \cdot 284 = \\ &22 \cdot 1020 - 79 \cdot 284. \end{aligned}$$

Assim, $4 = 22 \cdot 1020 - 79 \cdot 284$. Logo, podemos escolher $a_0 = 22$ e $b_0 = -79$.

O próximo resultado, que é o teorema de Bachet-Bézout, relaciona dois números inteiros com o máximo divisor comum entre eles.

2.1.6 Teorema de Bachet - Bézout

Teorema 2 (Teorema de Bachet - Bézout): Se $d = mdc(x, y)$, então existem inteiros a_0 e b_0 tais que

$$d = xa_0 + yb_0.$$

Demonstração 1: Considerando o conjunto

$$W = \{xa + by : a, b \in \mathbb{Z} \quad e \quad xa + yb > 0\}.$$

Observemos que W não é vazio, pois para $a = b = 1$,

$$x \cdot 1 + y \cdot 1 = x + y > 0 \Rightarrow x + y \in W.$$

Assim, podemos dizer que W possui menor elemento, digamos $\lambda = min\ W$. Devemos mostrar que $\lambda = mdc(x, y)$. Já que $\lambda \in W$, existem $a_0, b_0 \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\lambda = xa_0 + yb_0.$$

Usando o algoritmo da Divisão com os elementos x e λ, temos $x = \lambda q + r$, com $0 \leq 0 < \lambda$.

Segue que:

$$r = x - \lambda q = x - (xa_0 + yb_0)q$$

$$= x - xqa_0 - yqb_0.$$

Então,

$$r = x(1 - qa_0) + y(-qb_0).$$

Isso nos mostra que $r = xu + yv$, com $u = 1 - qa_0$ e $v = -qb_0$. Além disso, $r = 0$, pois do contrário, $r > 0$ e, assim, $r \in W$, o que contraria o fato de λ ser o mínimo de W, visto que $r < \lambda$, logo, $x = \lambda q$, isto é, $\lambda \mid x$. Analogamente, prova-se que $\lambda \mid y$.

Sendo $d = mdc(x, y)$, então $x = d\lambda_1$ e $y = d\lambda_2$. Daí,

$$\lambda = (d\lambda_1)a_0 + (d\lambda_2)b_0$$

$$= d(\lambda_1 a_0 + \lambda_2 b_0),$$

ou seja, $d \mid \lambda$, e como $\lambda \mid d$, pois $d = mdc(x, y)$, segue que $d = \lambda$. Logo, $d = xa_0 + yb_0$.

Exemplo 1: $mdc(14,4) = 2 = 1 \cdot 14 + (-3) \cdot 4$

$$= -1 \cdot 14 + 4 \cdot 4.$$

Exemplo 2: $mdc(18,4) = 2 = 1 \cdot 18 + (-4) \cdot 4$

$$= -1 \cdot 18 + 5 \cdot 4.$$

Definição: Dois inteiros a e b são ditos primos entre si ou relativamente primos se $mdc(a, b) = 1$.

Exemplo 3: 6 e 5 são primos entre si, pois $mdc(6,5) = 1$. Já $16\ e\ 2$ não são relativamente primos, pois $mdc(16,2) = 2$.

Corolário 1: os inteiros a e b são relativamente primos se, e somente se, existem $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que $1 = ax + by$.

Demonstração 2: se $mdc(a,\ b) = 1$, então o teorema de Bachet-Bézout assegura a existência de inteiros x e y tais que $1 = ax + by$. Reciprocamente, suponha que $1 = ax + by$, para $x, y \in \mathbb{Z}$, e considere $d = mdc\ (a, b)$. Já que $d|a$ e $d|b$, então $d|ax$ e $d \mid by,$ de modo que $d|\ ax + by = 1.$ Como $d > 0$, temos que $d = 1$, isto é, a e b são relativamente primos.

Corolário 2 : Sejam $a.\ b$ e $c \in \mathbb{Z}$. Se $a|bc$ e $mdc(a, b) = 1$, então $a|c$.

Demonstração 3: Como $a \mid bc$, então $bc = at$, com $t \in \mathbb{Z}$. Além disso, pelo corolário 1, existem $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que $1 = ax + by$. Logo, multiplicando ambos os lados desta igualdade por c, obtemos

$c = cax + cby = cax + aty = a(cx + ty)$, provando que $a \mid c$.

2.1.7 Números primos

Um número $k \in \mathbb{Z} - \{0, \pm 1\}$ é chamado primo se seus únicos divisores positivos são 1 e $|k|$. Caso contrário, dizemos que k é composto.

Nesse caso, podemos afirmar que 2 e -2 são os únicos primos pares. Além disso, $a \in \mathbb{Z}$ é composto se, e somente se, $a = bc$, com $b, c \in \mathbb{Z}$ e $1 < |b|, |c| < |a|$.

Pode - se dizer que b e c também são chamados divisores próprios de a.

Exemplo: Os números $5, 7$ e 11 são primos, enquanto $6 = 2 \cdot 3$ e $10 = 2 \cdot 5$ são compostos.

Proposição 1: sejam $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ e k um número primo. Se $k \mid a_1.\ a_2$, então $k \mid a_1$ ou $k \mid a_2$.

Demonstração 1: Já que k é primo, $mdc\ (a_1, k) = 1$ ou $mdc\ (a_1, k) = k$. Se $k \nmid a_1$, então $mdc\ (a_1, k) = 1$. Portanto, de acordo com o corolário 2, temos que $k \mid a_2$.

Podemos estender o resultado da proposição 1 para um produto de n inteiros.

Corolário 3: se k é primo e $k \mid a_1, a_2, \ldots, a_n$, então $k \mid a_i$ para algum $i = 1, 2, \cdots, n$.

Demonstração 2 : Mostraremos usando indução sobre n. Para $n = 1$, o resultado é óbvio. Suponhamos, por hipótese de indução, que o resultado seja válido para $n \geq 1$. Daí, para $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1} \in \mathbb{Z}$, temos

$$k \mid a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1} \rightarrow k \mid (a_1 a_2 \ldots a_n) a_{n+1}$$

$$k \mid (a_1 a_2 \ldots a_n) \text{ ou } k \mid a_{n+1}.$$

Se $k \mid a_{n+1}$, o resultado segue. Se $k \mid (a_1 a_2 \ldots a_n)$, então por hipótese de indução, $k \mid a_i$ para algum $i = 1, 2, \ . \ . \ . \ , n$.

Corolário 4: Se $k, r_1, r_2, \ldots, r_p$ são números primos e $k \mid r_1 . r_2 . \ldots . r_p$,então $k = r_i$, para algum $i = 1,2, \ldots, p$.

Demonstração 3: Se $k \mid r_1 r_2 \ . \ . \ . \ r_p$, então do corolário 3, temos que $k \mid r_i$, para algum $i = 1,2, \ldots, p$. Já que r_i é primo, seus únicos divisores positivos são 1 e r_i. Logo, $k = r_i$, pois $k > 1$.

2.1.8 Teorema Fundamental da Aritmética

Teorema 3 (Teorema Fundamental da Aritmética): Todo número natural $a > 1$ pode ser escrito de forma única, a menos da ordem dos fatores, como um produto de primos.

$$a = k_1 . k_2 . \ldots . k_n,$$

onde $k_1, k_2, \ldots, k_n$ são primos.

Demonstração 1: Devemos fazer duas demonstrações: a primeira é a existência dos primos, e a segunda é a unicidade da fatoração.

Existência - Considere o conjunto $M = \{a \in N : a \neq k_1 . k_2 . \ldots . k_n\}$, onde $k_1, k_2, \ldots,$ k_n são primos. Devemos mostrar que $M = \emptyset$.

Suponha por absurdo que $M \neq \emptyset$. Daí, M é um subconjunto não vazio dos naturais, e por isso, possui um menor elemento m. Veja que m não pode ser primo e, então, é composto. Assim, podemos escrevê-lo na forma $m = b.c, com\ 1 < b, c < m$. Já que $b < m\ e\ c < m$, então $b \notin M\ e\ c \notin M$ pois $m = \min M$. Então, sendo $b >$

$1 \; e \; c > 1$, temos que esses números são primos ou são produtos de primos. Logo, $m = b.c$ é um produto de primos, o que é um absurdo, pois $m \in M$ e um elemento de M não pode ser escrito como um produto de primos. Portanto, $M = \emptyset$.

Unicidade - Suponhamos que $a = k_1.k_2.\dots.k_n = r_1.r_2.\dots.r_m$, onde $k_1, k_2, \dots, k_n, r_1, r_2, \dots, r_m$ são todos primos. Daí, $k_1 \mid r_1.r_2.\dots.r_m$. Pelo corolário 4, temos que $k_1 = r_S$, para algum $s = 1,2, \dots, m$, digamos que $k_1 = r_1$. Pela lei do cancelamento, obtemos $k_2.\dots.k_n = r_2.\dots.r_m$. Semelhantemente, temos $k_2 = r_S$, para algum $s = 2, \dots, m$. Considerando que $k_2 = r_2$, temos que $k_3.\dots.k_n = r_3.\dots.r_m$.

Continuando este processo, e assumindo que $n > m$, temos:

$$1 = k_{m+1}.\dots.k_n, \text{ o que é um absurdo.}$$

Similarmente, se $n < m$, então $1 = r_{n+1}.\dots.r_m$, que é impossível.

Portanto, $m = n \; e \; r_i = k_i$, para cada $i = 1,2, \dots, n$.

Notamos que se a é um número primo, então o produto, assegurado pelo TFA é, naturalmente, o próprio a (um produto com um único fator).

Os primos que surgem na fatoração de um número inteiro $a > 1$ não são, necessariamente, distintos. Por exemplo, $200 = 2.2.2.5.5 = 2^3.5^2$. Por isso, agrupando os primos que, porventura, se repente na fatoração de a, podemos enunciar o teorema fundamental da aritmética da seguinte forma:

Corolário 5 (Teorema Fundamental da Aritmética geral): Todo número natural $a > 1$ pode ser escrito de modo único, a menos da ordem dos fatores, na forma $a = {k_1}^{t_1}.{k_2}^{t_2}.\dots.{k_l}^{t_l}$, onde $k_1, k_2, \dots, k_l$ são primos distintos e $t_1, t_2, \dots, t_l$ são números naturais.

A representação de um inteiro $a > 1$ dada em $a = {k_1}^{t_1}.{k_2}^{t_2}.\dots.{k_l}^{t_l}$ é sua fatoração ou decomposição canônica em fatores primos.

Agora, enunciaremos um teorema importantíssimo, pois ele é uma ferramenta que serve para calcular todos os divisores positivos de um número natural.

Teorema 3.1 : Se $a = k_1^{t_1}.k_2^{t_2}. \dots .k_l^{t_l}$ é a fatoração canônica de $a > 1$, então um inteiro b é um divisor positivo de a se, e somente se, $b = k_1^{z_1}.k_2^{z_2}. \dots .k_l^{z_l}$, onde $0 \leq z_i \leq t_i$, para cada $i = 1,2, \dots, l$.

Demonstração 2: Se $b = k_1^{z_1}.k_2^{z_2}. \dots .k_l^{z_l}$, com $0 \leq z_i \leq t_i$, então $t_i = z_i + s_i$, para cada $i = 1,2, \dots, l$. Assim,$a = k_1^{t_1}.k_2^{t_2}. \dots .k_l^{t_l} = k_1^{z_1+s_1}.k_2^{z_2+s_2}. \dots .k_l^{z_l+s_l} = (k_1^{z_1}.k_2^{z_2}. \dots .k_l^{z_l}).(k_1^{s_1}.k_2^{s_2}. \dots .k_l^{s_l}) = b.k_1^{s_1}.k_2^{s_2}. \dots .k_l^{s_l}$, ou seja,

$a = b.k_1^{s_1}.k_2^{s_2}. \dots .k_l^{s_l}$, isto é, $b \mid a$.

Reciprocamente, suponhamos que $b \mid a$. , ou seja, $a = bc$, para algum c.
De acordo com o TFA, consideremos $c = k_1^{s_1}.k_2^{s_2}. \dots .k_l^{s_l}$ e $b = k_1^{z_1}.k_2^{z_2}. \dots .k_l^{z_l}$, onde $0 \leq z_i$ e $0 \leq k_i$, para $i = 1,2, \dots, l$. Portanto,$k_1^{t_1}.k_2^{t_2}. \dots .k_l^{t_l} = (k_1^{z_1}.k_2^{z_2}. \dots .k_l^{z_l}).(k_1^{s_1}.k_2^{s_2}. \dots .k_l^{s_l}) =$

$$k_1^{z_1+s_1}.k_2^{z_2+s_2}. \dots .k_l^{z_l+s_l}.$$

Pelo TFA, devemos ter $t_i = z_i + s_i$, $i = 1,2, \dots, l$. Já que $0 \leq s_i$, concluímos que $z_i \leq t_i$, para cada $i = 1,2, \dots, l$.

Exemplo: De acordo com o teorema 3.1, temos que os divisores positivos de $a = 80 = 2^4.5$ são:

$d_1 = 2^0.5^0 = 1.1 = 1$	$d_6 = 2^0.5^1 = 1.5 = 5$
$d_2 = 2^1.5^0 = 2.1 = 2$	$d_7 = 2^1.5^1 = 2.5 = 10$
$d_3 = 2^2.5^0 = 4.1 = 4$	$d_8 = 2^2.5^1 = 4.5 = 20$
$d_4 = 2^3.5^0 = 8.1 = 8$	$d_9 = 2^3.5^1 = 8.5 = 40$
$d_5 = 2^4.5^0 = 16 \cdot 1 = 16$	$d_{10} = 2^4.5 = 16.5 = 80.$

3. METODOLOGIA

O estudo foi realizado no Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia da Paraíba, campus Campina Grande – PB, em uma turma do 1º ano “A” do curso técnico integrado ao ensino médio de química. A turma é composta por 48 discentes, porém no dia 04 de agosto de 2022 (dia da aula expositiva dialogada) apenas 27 educandos matriculados estavam presentes, desses, apenas 24 entregaram o questionário juntamente com a assinatura dos seus respectivos responsáveis.

Com a finalidade de atingir os objetivos propostos no início deste trabalho, foi explorado o conhecimento matemático apresentando uma maneira de calcular todos os divisores positivos de um número natural. Para isso, precisou – se ministrar uma aula referente ao assunto abordado e para avaliar o conhecimento dos alunos foi aplicado um questionário (Apêndice A).

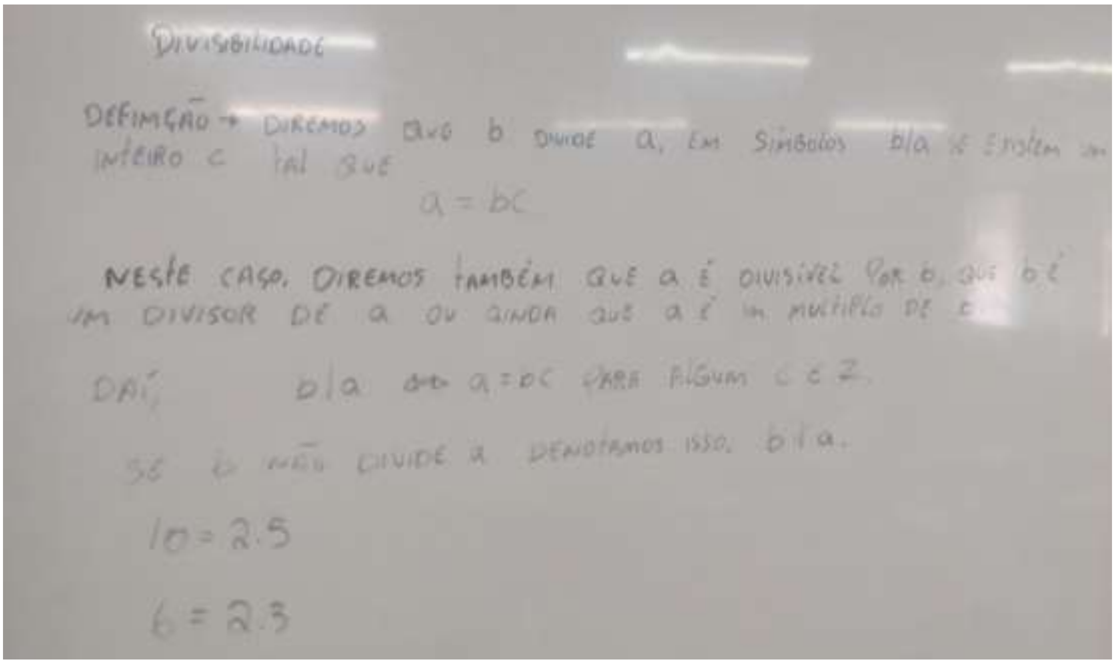
4. DESENVOLVIMENTO

A aula foi dividida nas seguintes etapas:

Primeiro, foi feita uma breve apresentação do seu objetivo, após isso foi entregue o questionário com cinco questões sobre o assunto que foi abordado. Os alunos responderam as questões usando seus conhecimentos antes da aula ser ministrada, no entanto a última questão só foi respondida após a exposição do conteúdo.

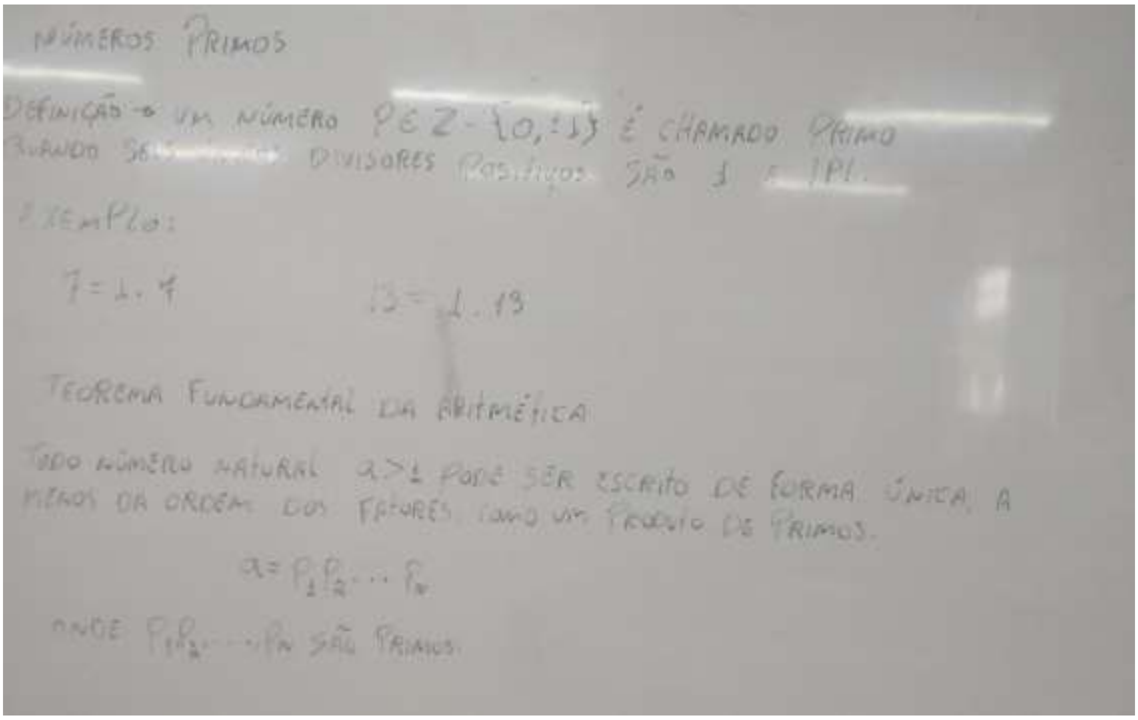
Após isso, foi iniciada a aula com a definição de divisibilidade e dei exemplos (figura 1). Depois, definiu-se números primos, em seguida foi enunciado e aplicado o teorema fundamental da aritmética (figura 2 e 3). Para finalizar, foram resolvidos exemplos e foram tiradas as dúvidas acerca de como calcular todos os divisores positivos de um número natural e como saber a quantidade de divisores positivos que um número natural tem (figura
4).

Figura 1 - Conceito de divisibilidade.



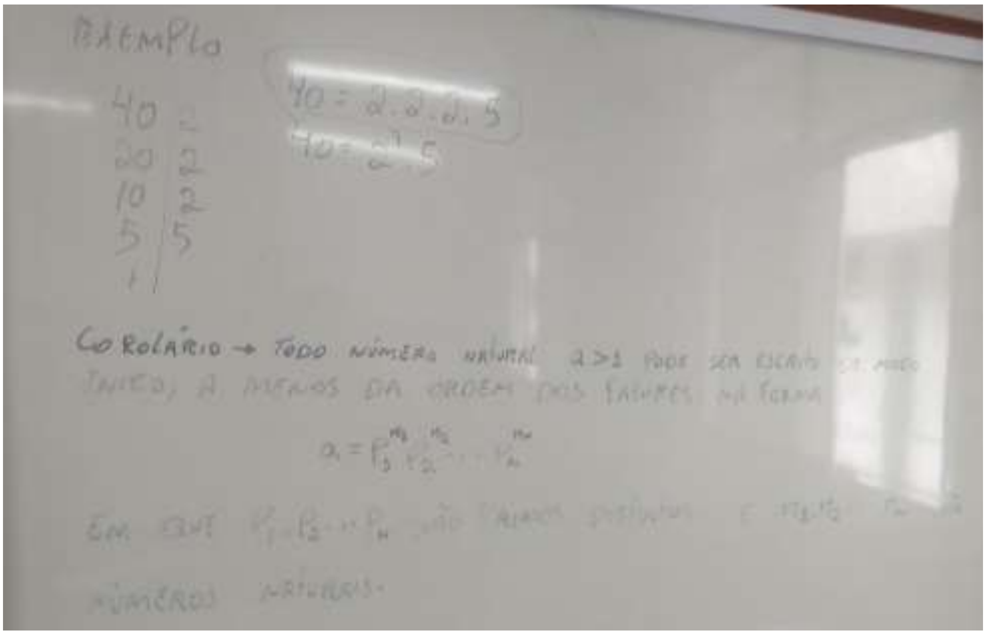
Fonte – Próprio autor (2022).

Figura 2 – Números primos e o Teorema Fundamental da Aritmética.



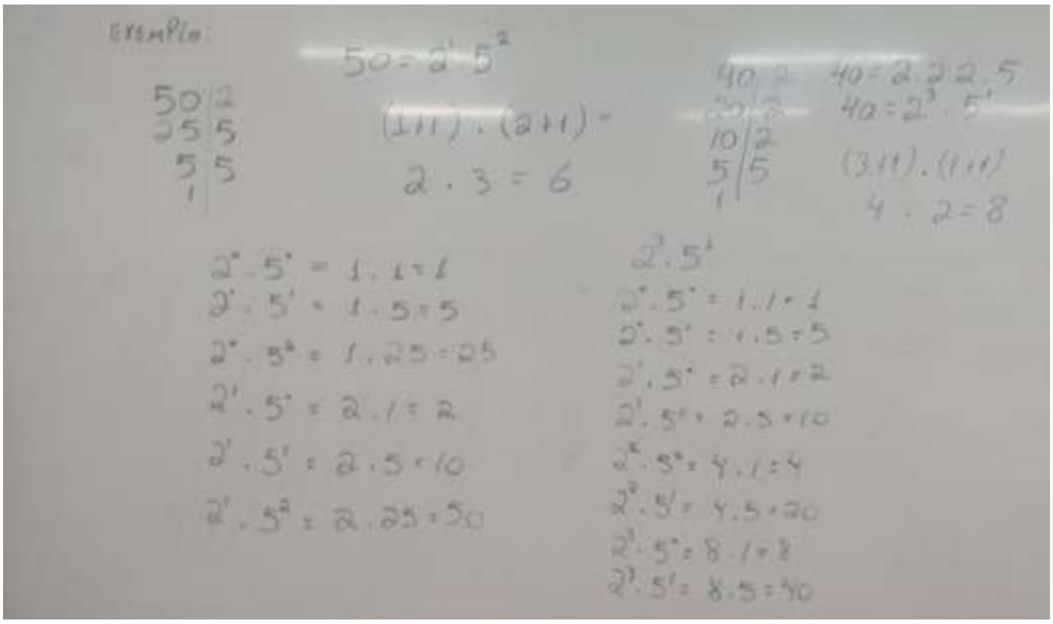
Fonte – Próprio autor (2022).

Figura 3 – Exemplo 1 do uso do Teorema Fundamental da Aritmética



Fonte – Próprio autor (2022).

Figura 4 – Exemplo 2 do uso do Teorema Fundamental da Aritmética



Fonte – Próprio autor (2022).

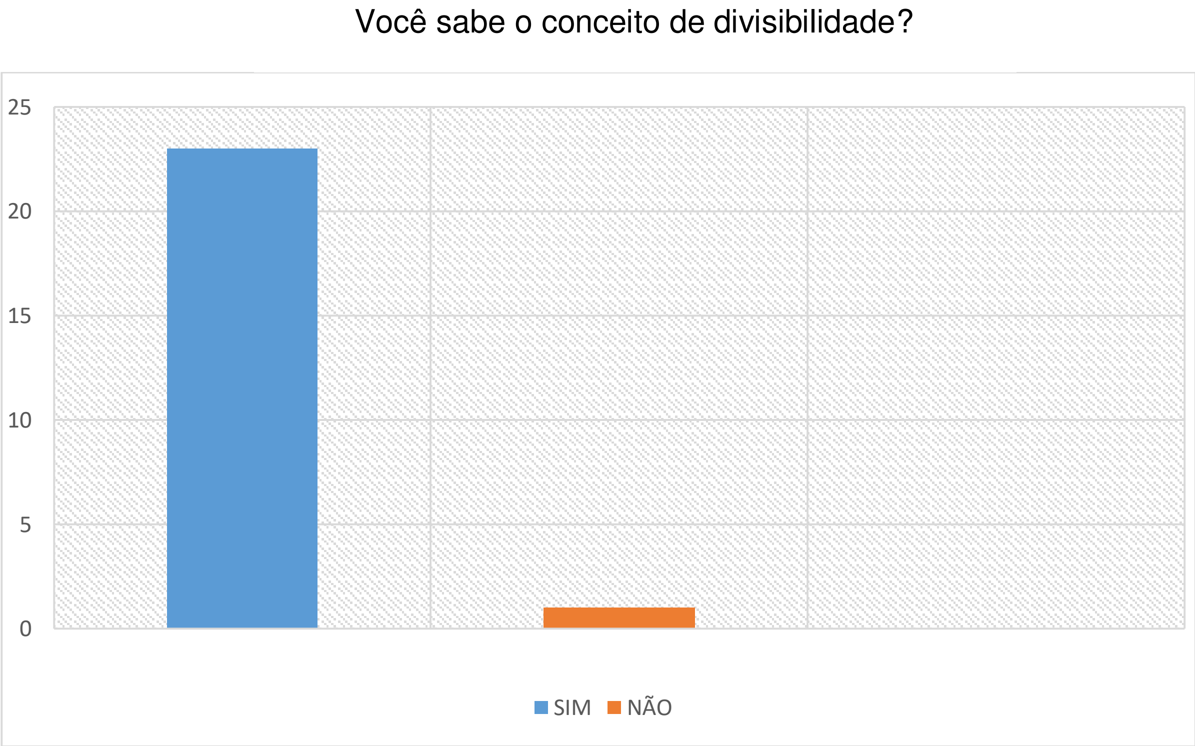
Por fim, a última questão foi respondida por todos os alunos e os questionários foram recolhidos.

5. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Como já explicado anteriormente, antes da aula ser ministrada foi entregue um questionário (anexo A) para que os alunos respondessem, com o propósito de verificar seus conhecimentos acerca do tema. Neste momento, foram propostas 5 questões objetivas e pessoais. Os dados foram coletados e expostos os gráficos DE 1 a 5, respectivamente.

Na questão 1, apresentada no gráfico 1, foram 23 respostas para “sim” e 1 resposta para “não”.

Gráfico 1 – Você sabe o conceito de divisibilidade?

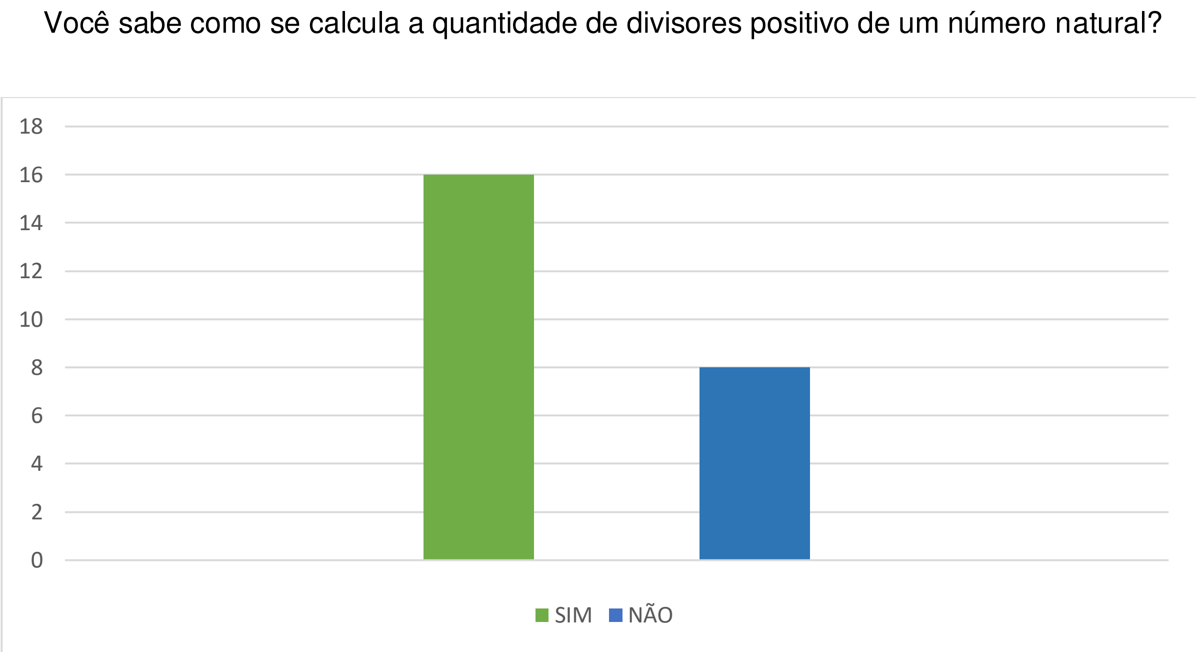


Fonte – Próprio autor (2022).

Contudo, na aula expositiva dialogada foi apresentado o conceito de divisibilidade e verificou-se que os alunos sabiam dividir, porém a real definição de divisibilidade era desconhecida por eles. Tendo, então, uma outra visão a respeito da questão número
1.

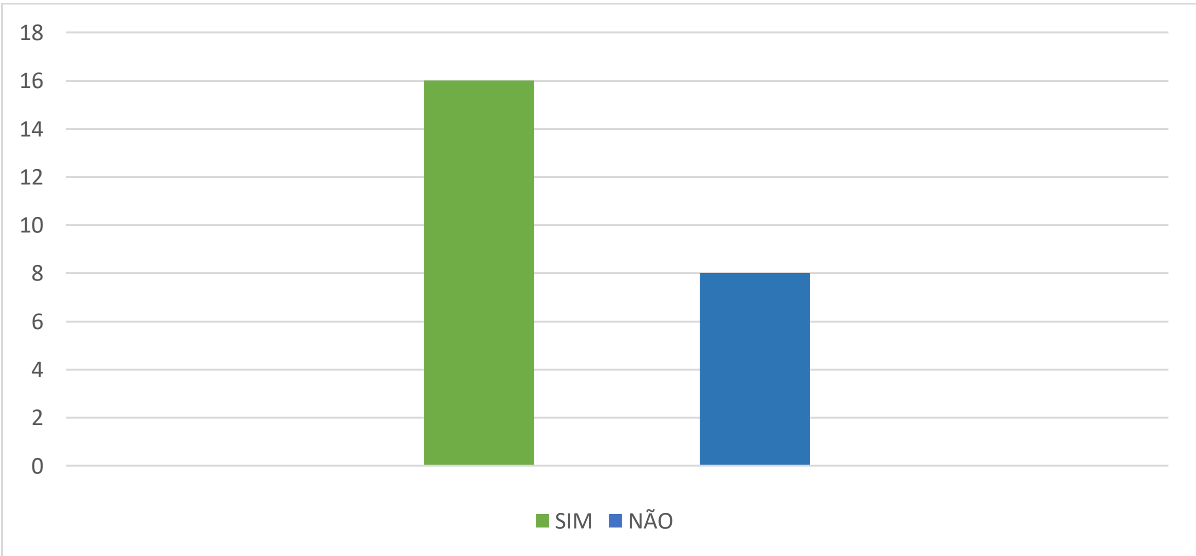
Em seguida, na questão 2 (Gráfico 2) e na questão 3 (Gráfico 3) obtiveram 16 respostas para "sim" e 8 respostas para "não".

Gráfico 2 - Você sabe como se calcula a quantidade de divisores positivo de um número natural?



Fonte – Próprio autor (2022).

Gráfico 3 – Você sabe calcular todos os divisores positivo de um número natural?

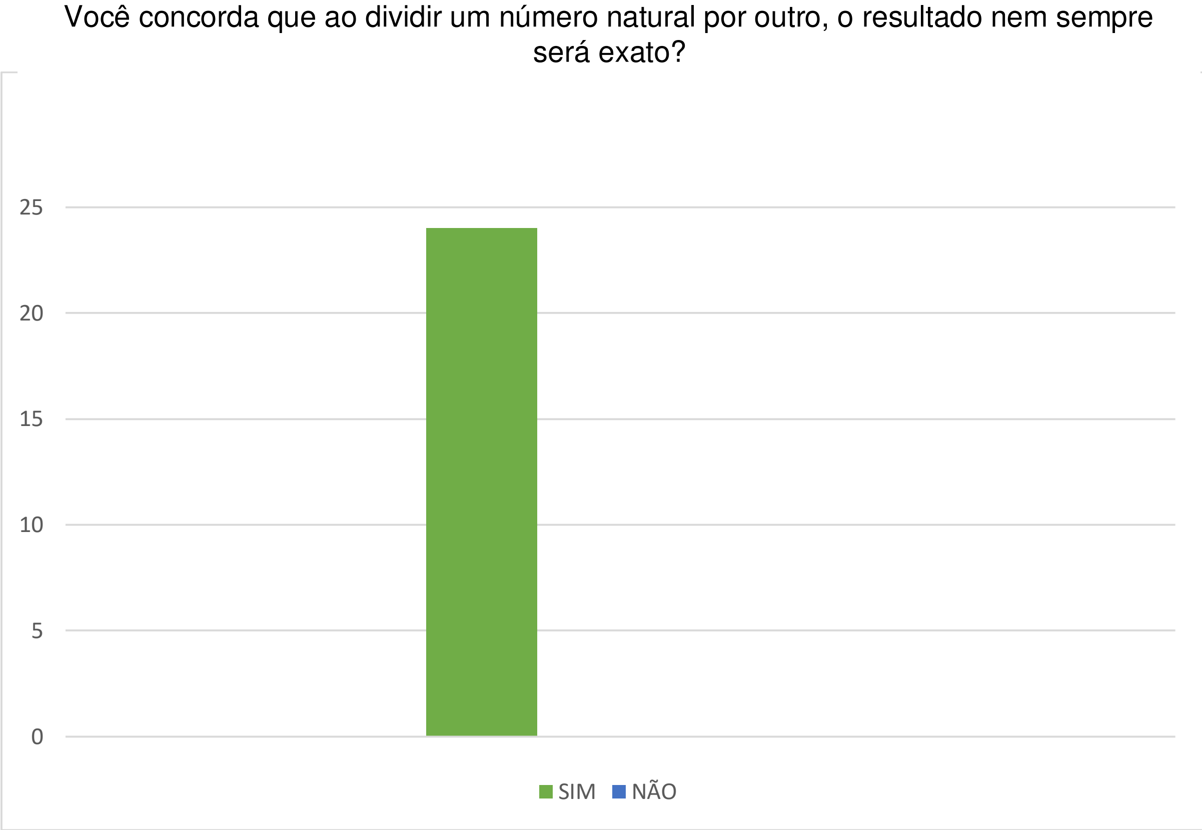


Fonte – Próprio autor (2022).

Analisando as respostas, os 16 alunos que sabiam verificar a quantidade de divisores positivos de um número natural e como calcula – los, era através da utilização do mínimo múltiplo comum, os demais 8 não sabiam fazer esse cálculo.

Já na questão 4, apresentada no gráfico 4, todas as respostas foram que "sim".

Gráfico 4 – Você concorda que ao dividir um número natural por outro, o resultado nem sempre será exato?



Fonte – Próprio autor (2022).

Como já era o esperado, não houveram dúvidas sobre a pergunta anterior, visto que com uma simples divisão já é possível obter essa resposta.

Por fim, foi apresentada outra alternativa para se calcular os divisores positivos de um número natural e quais são esses divisores, que é uma consequência do teorema fundamental da aritmética. O TFA foi aplicado em sala, através do seguinte exemplo:

Exemplo 1: Calcule quais e quantos são os divisores positivos do número 50 usando a consequência do teorema fundamental da aritmética.

Primeiro passo é efetuar a fatoração do número 50.

$$\begin{array}{r|l} 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$50 = 2^1 \cdot 5^2$$

Feito isso, é possível calcular a quantidade de divisores, somando 1 aos expoentes do resultado anterior e multiplicando o resultado dessas somas, assim;

$$(\ 1 + 1) \cdot (2 + 1) = 2 \cdot 3 = 6$$

Logo, 6 é a quantidade de divisores do número 50.

Agora, iremos encontrar quais são esses divisores através da fatoração canônica.

$$20 \cdot 5^0 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$2^0 \cdot 5^1 = 1 \cdot 5 = 5$$

$$20 \cdot 5^2 = 1 \cdot 25 = 25$$

$$21 \cdot 5^0 = 2 \cdot 1 = 2$$

$$21 \cdot 5^1 = 2 \cdot 5 = 10$$

$$2^1 \cdot 5^2 = 2 \cdot 25 = 50$$

Em ordem crescente seus divisores são: $1, 2, 5, 10, 25$ e 50.

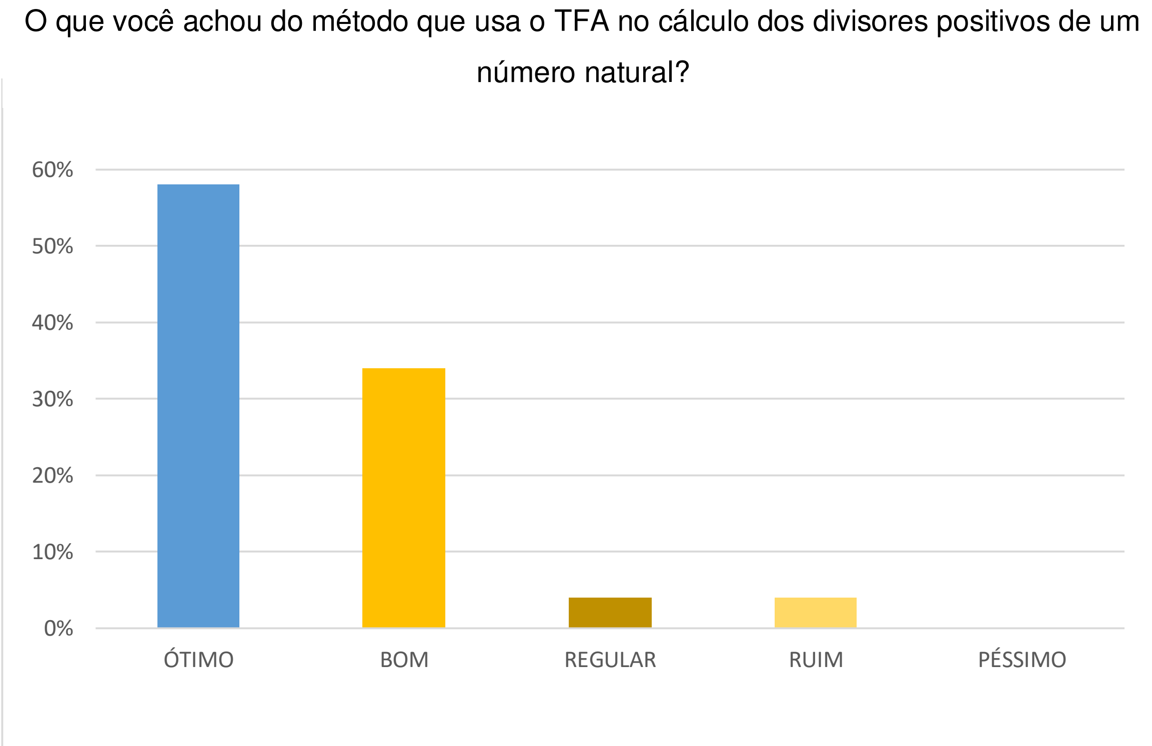
Essa é a consequência do TFA utilizada para se calcular todos os divisores positivos de um número natural.

Figura 5 – Alunos respondendo o exemplo proposto na aula.

Fonte – Próprio autor (2022).

A última questão (Gráfico 5) foi para coletar a opinião dos alunos sobre essa consequência. 14 respostas para “ótimo”, 8 para “bom”, 1 para regular, 1 para ruim e nenhuma para péssimo.

Gráfico 5 – O que você achou do método que usa o TFA no cálculo dos divisores positivos de um número natural?



Fonte – Próprio autor (2022).

De acordo com as porcentagens é possível notar que houve um maior nível de satisfação entre os alunos, com a utilização desse método, pois 92% dos alunos acharam o método ótimo ou bom, enquanto apenas 8% dos alunos acharam o método regular ou ruim.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Através desse trabalho, a utilização do Teorema Fundamental da Aritmética como uma complementação do conteúdo ou até mesmo sendo um assunto visto regulamente, é um método que vai auxiliar no avanço do conhecimento matemático dos alunos.

A consequência do TFA é uma alternativa de solucionar o cálculo de todos os divisores positivos de um número natural de uma maneira mais rápida e prática utilizando a fatoração canônica. Esse estudo foi aplicado em sala de aula e mostrou que é viável o uso dessa ferramenta pelos professores na prática docente, já que foi bem aceito pelos alunos.

Portanto, diante do que foi exposto, essa pesquisa tem o propósito de ser utilizada como forma de facilitar o aprendizado dos alunos e que consequentemente impulsione o surgimento de novos trabalhos nessa linha de pesquisa.

REFERÊCIAS

Clubes de matemática da OBMEP. **Teorema Fundamental da Aritmética – TFA.** 2015. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/teorema-fundamental-daaritmetica/#:~:text=Se%20n%20%C3%A9%20um%20n%C3%BAmero%20natural%2 0composto%2C%20ent%C3%A3o%20n%20tem,tais%20que%20n%3Dab. Acesso em: 16 de março de 2022.

JUNQUEIRA, L. C. S. **Critérios de divisibilidade.** 2001. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de Santa Catarina, 2001.

VIEIRA, V. L. **Um curso básico em teoria dos números.** 21. ed. Campina Grande: EDUEPB, 2015

VIEIRA, V. L. **Álgebra Abstrata para Licenciatura.** 21. ed. Campina Grande: EDUEPB, 2013.

APÊNDICE A – Questionário aplicado para verificação do conhecimento

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA- IFPB - CAMPUS DE CAMPINA GRANDE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

QUESTIONÁRIO PARA VERIFICAÇÃO DO CONHECIMENTO A CERCA DA CONSEQUÊNCIA DO TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA.

Nome (a) : ____

1 – Você sabe o conceito da divisibilidade?

Resposta: SIM ( ) NÃO ( )

2 – Você sabe como se calcula a quantidade de divisores positivos de um número natural?

Resposta: SIM ( ) NÃO ( )

3 – Você sabe calcular todos os divisores positivos de um número natural?

Resposta: SIM ( ) NÃO ( )

4 - Você concorda que ao dividir um número natural por outro, o resultado nem sempre será exato?

Resposta: SIM ( ) NÃO ( )

5 – O que você achou do método que usa o teorema fundamental da aritmética no cálculo dos divisores positivos de um número natural?

Resposta: PÉSSIMO ( ) RUIM ( ) REGULAR ( ) BOM ( ) OTIMO ( )

APÊNDICE B – Plano de aula

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
PARAÍBA
Campus Campina Grande

PLANO DE AULA

***Professor*:** Jailson Almeida da Paixão Santos			
***Tema*:** Questionário - TCC	***Turma*:** 1º Ano do Ensino Médio	***Data*:** 04 / 08 / 22	***Duração*:** 50 min

***Objetivo Geral*:**

O trabalho tem como objetivo apresentar uma maneira de calcular todos os divisores positivos de um número natural usando a consequência do teorema fundamental da aritmética.

***Objetivos Específicos*:**

- Definir divisibilidade;
- Definir números primos positivos;
- Enunciar o teorema fundamental da aritmética;
- Aplicar o teorema fundamental da aritmética;
- Mostrar como calcular a quantidade de divisores positivos de um número natural;

***Conteúdos*:**

- Divisibilidade.
- Números primos.
- Teorema Fundamental da Aritmética.

***Metodologia*:**

Com a finalidade de atingir os objetivos propostos, será explorado o conhecimento matemático mostrando uma maneira de calcular todos os divisores positivos de um número natural. No início da aula será entregue um questionário sobre o assunto que vai ser abordado, os alunos irão responde as questões usando seus conhecimentos, sendo que, a última questão será respondida após o termino da aula. Então, será iniciada a aula de forma expositiva e dialogada, então definirá divisibilidade e números primos, será enunciado o teorema fundamental da aritmética. Em seguida se mostrará como calcular todos os divisores positivos de um número natural e a quantidade de tais divisores dando exemplos por fim, os alunos responderão a última questão do questionário que se trata do método utilizado no decorrer da aula.

***Recursos Didáticos*:**

Lousa, Pincel Atômico, Apagador e questionário.

***Referências*:**

JUNQUEIRA, L. C. S. **Critérios de divisibilidade.** 2001. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de Santa Catarina, 2001.

VIEIRA, V. L. **Um curso básico em teoria dos números.** 21. ed. Campina Grande: EDUEPB, 2015

VIEIRA, V. L. **Álgebra Abstrata para Licenciatura.** 21. ed. Campina Grande: EDUEPB, 2013.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Campina Grande
R. Tranqüilino Coelho Lemos, 671, Dinamérica, CEP 58432-300, Campina Grande (PB)
CNPJ: 10.783.898/0003-37 - Telefone: (83) 2102.6200

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

Versão Final de TCC

Assunto:	Versão Final de TCC
Assinado por:	Jailson Santos
Tipo do Documento:	Anexo
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Jailson Almeida da Paixão Santos, ALUNO (20152123012) DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - CAMPINA GRANDE**, em 16/09/2022 17:35:05.

Este documento foi armazenado no SUAP em 24/09/2022. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 634103
Código de Autenticação: fdf691f223