

REDUCCIÓN DE PERTURBACIONES MEDIANTE MOLIFICACIÓN DISCRETA Y UMBRALIZACIÓN POR WAVELETS

Noise reduction by discrete mollification and wavelet thresholding

RESUMEN

Se comparan dos técnicas para el filtrado de bioseñales: Umbralización por *wavelets* y Molificación Discreta. Ambas se han usado en la solución de problemas con alta sensibilidad a la presencia de ruido, especialmente en la regularización de problemas mal condicionados. El objeto es determinar qué método presenta más ventajas en bioseñales contaminadas con ruido no blanco. Se implementaron varias técnicas de umbralización: rígida y flexible (globalmente y por nivel) y estimación adaptativa (Estimador de Riesgo imparcial de Stein SURE). Las señales empleadas fueron señales electrocardiográficas (ECG) y señales de voz, con perturbaciones no blancas características de cada tipo de señal.

PALABRAS CLAVES: ECG, molificación discreta, regularización, ruido no blanco, señal de voz, umbralización, *wavelets*.

ABSTRACT

This paper compares two tools for noise reduction on biosignals: Wavelet thresholding and Discrete Mollification. Both have previously been used for solving problems with high sensitive to noise presence, especially in the regularization of Ill-Posed Problems. The aim is to find which one presents more advantages in order to be used with biosignals contaminated with non-white noise. Several thresholding techniques were implemented: hard and soft (globally and level by level) and adaptive estimation (Stein's unbiased risk estimator, SURE). As test data electrocardiographycal (ECG) were used and voice signals and typical non-white noise for each kind of signal are considered.

KEYWORDS: *discrete mollification, ECG, non-white noise, regularization, thresholding, voice signal, wavelets.*

1. INTRODUCCIÓN

La transformada Wavelet (WT) es una técnica matemática que ha cobrado gran importancia en los últimos años en aplicaciones de todo tipo relacionadas con el procesamiento de señales no estacionarias. Una de estas consiste en el procesamiento de señales e imágenes biomédicas, realizando valiosos aportes en diferentes campos donde ha alcanzado un desarrollo importante [3], [5], [19], [20], [21]. En este caso, se presenta un análisis de metodologías de reducción de perturbaciones para señales ECG por medio de diferentes clases de umbralización y tipos de umbral. Además, en señales de voz, es utilizada la transformada Wavelet para encontrar la aproximación de las variaciones introducidas por ruido browniano.

Por su parte, la molificación discreta es lo que se conoce como un método de regularización. En la teoría de regularización se desarrollan técnicas numéricas que permiten resolver de modo estable y consistente problemas que se conocen como mal condicionados por su alta sensibilidad a las perturbaciones presentes en los datos de

JUAN DIEGO PULGARÍN G

Ingeniero Electrónico. M. Eng.
Universidad Nacional de Colombia
Sede Manizales
juandiegopg@yahoo.com

CARLOS DANIEL ACOSTA M

Licenciado en Matemáticas, M.Sc.
Candidato a Doctor en Matemáticas
Profesor Asistente
Universidad Nacional de Colombia
Sede Manizales
cdacosta628@yahoo.es

GERMÁN CASTELLANOS D

Pregrado en Sistemas Radiotécnicos
Ph.D. en Dispositivos y Sistemas de
Proceso
Profesor Titular
Universidad Nacional de Colombia
Sede Manizales
gcastell@telesat.com.co

trabajo [10], [15]. En particular, la molificación discreta se basa en convoluciones discretas, con pesos generados por un núcleo particular, para proporcionar aproximaciones de calidad a partir de los datos ruidosos disponibles. Estas capacidades del filtrado por molificación discreta han sido comprobadas ya en otros campos de la ciencia y la ingeniería, [2], [14], [13].

En este artículo se muestra como la molificación discreta es capaz de obtener resultados de filtrado por lo menos comparables a los obtenidos por el método de filtrado por umbralización de coeficientes wavelet, en el problema del filtrado de señales ECG y de voz. Adicionalmente, la presentación que aquí se hace de la molificación basada en convoluciones discretas, garantiza una teoría más simple y una implementación eficiente.

2. REDUCCIÓN DE PERTURBACIONES MEDIANTE LA WT

Se encuentran diversos métodos basados en la

transformada Wavelet para reducir el ruido en bioseñales (considerando en la mayoría de dicho ruido como blanco gaussiano) [6], [8], [9], [21]. Los procedimientos similares de descomposición y recomposición, la mayoría basados en modificaciones del método propuesto en [6], varían únicamente en la cantidad de niveles de acuerdo a la necesidad y procedimientos, difiriendo al momento de llevar a cabo la filtración, mediante parámetros estadísticos y la manera de aplicarlos a los coeficientes de detalle. En [21] se describen algunas modificaciones a la umbralización para aplicar el método en algunos casos donde el ruido no corresponde a un ruido blanco gaussiano, tal como se supone en la mayoría de ocasiones.

2.1. Reducción de perturbaciones mediante umbralización

La característica común de los métodos incluidos es la utilización de la WT para cambiar el dominio de la señal. En este dominio se lleva a cabo una serie de operaciones sobre los coeficientes, realizando normalmente una umbralización y posteriormente el cálculo de la transformada inversa para trasladar la señal al dominio del tiempo una vez ha sido modificada. El efecto de la WT es filtrar la señal mediante un banco de filtros de dos tipos: pasa bajas o aproximación y pasa altas o detalles. El número de veces que es filtrada la señal viene determinado por el nivel de la descomposición. Para reducir el ruido de la señal, se eliminan los componentes obtenidos en la transformada Wavelet que estén por debajo de cierto umbral o multiplicarlos por un factor de ponderación, antes de llevar a cabo la transformada inversa. En estos elementos, el umbral o la ponderación, se encuentran las diferencias más significativas entre la mayoría de métodos propuestos en trabajos relacionados con esta aplicación. Para la reducción del ruido se utiliza un procedimiento no lineal, denominado umbralización, obtenido mediante cálculos estadísticos [5].

Sea la señal adquirida $y[n]$ como $y[n] = x[n] + \mu e[n]$, donde $n = 1 \dots N$, $x[n]$ es la señal sin ruido, $e[n]$ representa ruido blanco gaussiano con media nula y varianza 1, mientras μ representa su nivel. El proceso genérico para reducir el ruido de una señal utilizando la WT se muestra a continuación:

- 1) Escoger una wavelet, un nivel y calcular la descomposición Wavelet de la señal s en el nivel J .
- 2) Aplicar un umbral a los coeficientes de detalle, del nivel 1 al J . El cálculo de este umbral y la forma de aplicarlo, determinará el resultado del proceso. El umbral será de la forma $\delta = [\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_j]$.
- 3) Reconstruir la señal, basándose en los coeficientes de aproximación y los coeficientes modificados de detalle.

Las condiciones exigibles a este proceso de reducción del ruido son la minimización en el error cuadrático medio (o

lo mismo, que maximice la SNR resultante) y la señal obtenida sea al menos tan suave como la señal inicial para evitar que, aunque se cumpla la primera condición, aparezcan picos en la señal resultante que se pueden confundir con información presente en la señal o puede dar lugar a que se eliminen puntos característicos de la señal.

El método para reducir el ruido es el propuesto en [6] en el cual se utiliza la transformada Wavelet con el umbral

$$\delta = \sqrt{2 \log(N)} \hat{\sigma}, \quad (1)$$

donde la umbralización es realizada con la expresión:

$$C_{\delta}(i, j) = \begin{cases} 0, & \text{si } |C(i, j)| < \delta \\ \text{sgn}(C(i, j))(|C(i, j)| - \delta), & \text{si } |C(i, j)| \geq \delta \end{cases} \quad (2)$$

donde $C(i, j)$ representa los coeficientes de los detalles obtenidos mediante la transformada Wavelet. El valor de $\hat{\sigma}$ utilizado para este umbral viene dado por la expresión $\hat{\sigma} = \text{median}(|C(i, j)|) / 0,6745$.

2.1.1. Umbralización rígida y flexible

El procedimiento por el cual los coeficientes pequeños son removidos mientras los demás valores permanecen inalterables se denomina umbralización rígida ("keep-or-kill"). Una alternativa diferente es conocida como umbralización flexible: se resta el valor del umbral a la magnitud de los coeficientes por encima de éste, para que el campo entrada-salida sea continuo. Mientras a primera vista, la umbralización rígida puede parecer un acercamiento más natural, la continuidad de la operación de umbralización flexible posee importantes ventajas. Algunos algoritmos aún iguales no trabajan en combinación con umbralización rígida [8].

Umbralización rígida

Para la eliminación del ruido se aplica la siguiente transformada no lineal para los coeficientes wavelet:

$$F(x) = x \cdot I(|x| > \delta), \quad (3)$$

donde el umbral δ es el valor a priori fijo de umbral e I es la función indicadora.

Umbralización flexible

La umbralización flexible está en la elección de la transformada no-lineal sobre los coeficientes wavelet, usando:

$$S(x) = \text{sgn}(x)(|x| - \delta)I(|x| > \delta), \quad (4)$$

donde δ es el umbral.

2.1.2. Tipos de umbrales Umbral Universal

El valor δ (1), es conocido y usado como un

valor de umbral, siendo llamado el umbral universal. Este nombre refleja la idea que este umbral es válido para todas las señales con longitud N , dado que estas señales son suficientemente suaves, siendo un valor general de umbral [6]. El umbral universal se concentra en el suavizado, donde se intenta minimizar el error cuadrático medio [8].

Estimador de Riesgo Imparcial de Stein (SURE)

Diferente al umbral universal (1), el umbral SURE depende directamente de la señal puesta en la entrada y no sólo por la estimación basada en los datos de la varianza del ruido σ^2 . De manera particular observa un umbral separado por cada escala, donde, todos los coeficientes dentro de un mismo nivel de resolución son puestos juntos en un vector de datos.

SURE desarrolla asintóticamente un umbral tan bueno como un umbral minimax sobre un espacio dado [8]. El desarrollo alcanzado por SURE es mejor que el umbral universal por un factor logarítmico. El procedimiento de umbralización por el principio de Stein [8] se define como: la función de riesgo $R(s_k, Z_k, t)$ con $Z_k = c_k + s_k e_k, k = 1, \dots, M$, donde c_k es un coeficiente desconocido, s_k parámetro escalar conocido (o puede ser estimado), t el umbral, e_k son variables aleatorias i.i.d. (independiente, e idénticamente distribuidas), con distribución gaussiana $N(0,1)$. Según Stein el umbral óptimo t^* es el argumento que hace mínimo el riesgo:

$$\sum_{k=1}^M R(s_k, Z_k, t), \tag{5}$$

El argumento de minimización de riesgo puede también ser estimado y será tomado luego como el umbral adaptativo óptimo.

3. ELIMINACIÓN DE PERTURBACIONES MEDIANTE MOLIFICACIÓN DISCRETA

La definición de molificación que aquí se utiliza es sustancialmente la misma dada en [1], [4], [11], [12] y [22], pero la forma de calcular la molificación discreta es diferente. Ésta se basa en las características espectrales del núcleo de molificación y considera el número de puntos en la discretización del núcleo como el parámetro de regularización. Otro aspecto importante de esta implementación es la utilización de matrices que adaptan el filtro a la falta de información en los bordes, evitando así tener que usar núcleos no simétricos, como en [1], o llevar a cabo extensiones de datos, como en [12].

La molificación discreta de una señal adquirida $y[n]$, para $n = 1 \dots N$, con un ancho de ventana de $2\eta + 1$ se obtiene mediante la expresión

$$J_\eta y = D_\eta^{-1} T_\eta y, \tag{6}$$

donde las entradas de la matriz T_η están dadas por la expresión

$$T_\eta(i, j) = \begin{cases} w_{j-i}, & 0 \leq |j-i| \leq \eta \\ 0, & e.o.c. \end{cases}, \tag{7}$$

y además,

$$w_j = \int_{(j-1/2)h}^{(j+1/2)h} k_\delta(-t) dt, \tag{8}$$

$$h = \frac{6\delta}{2\eta + 1}, \tag{9}$$

$$D_\eta = \text{diag}(\text{sum}(T_\eta^T)). \tag{10}$$

En estas expresiones k denota el núcleo de molificación escogido para el filtrado y δ el parámetro asociado al mismo.

Esta definición equivale a una convolución discreta, escalada en los bordes, de los datos con el núcleo seleccionado.

A continuación se describen los dos tipos de núcleos utilizados en este trabajo:

3.1. Núcleo Gaussiano

Para $\tau > 0$, se define el núcleo gaussiano ρ_τ como:

$$\rho_\tau(x) = \begin{cases} A_3 \tau^{-1} \exp\left(-\frac{x^2}{\tau^2}\right), & -3\tau \leq x \leq 3\tau \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{11}$$

donde A_3 se define como:

$$A_3 = \left(\int_{-3}^3 \exp(-s^2) ds \right)^{-1}. \tag{12}$$

Comportamiento Espectral

Apoyándose en la transformada de Fourier, se puede identificar el comportamiento espectral de este núcleo. Esto permite escoger el valor adecuado del parámetro τ para llevar a cabo los cálculos:

$$\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \leftrightarrow \sigma\sqrt{2\pi} \exp(-\sigma^2 \omega^2 / 2), \quad \omega = 2\pi f.$$

$$\tau^{-1} \exp\left(-\frac{t^2}{\tau^2}\right) \leftrightarrow \sqrt{\pi} \exp(-\tau^2 \omega^2 / 4) \tag{13}$$

Si asumimos $\sqrt{\pi} \exp(-\tau^2 \omega^2 / 4) \approx 0$ para $\tau^2 \omega^2 / 4 \geq 4$, se tiene la frecuencia de corte $f_c \approx \frac{2}{\pi \tau}$.

3.2. Núcleo tipo Sinc

Se define el núcleo de la siguiente manera:

$$\rho_\lambda(x) = \begin{cases} K\lambda^{-1} \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{\lambda}\right), & -3\lambda \leq x \leq 3\lambda \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (14)$$

Donde $\lambda > 0$ y K , se define como:

$$K = \left(\int_{-3}^3 \operatorname{sinc}(s) ds \right)^{-1} \quad (15)$$

Comportamiento Espectral

$$\frac{\sin at}{\pi t} \leftrightarrow \begin{cases} 1, & |\omega| < a \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad \omega = 2\pi f \quad (16)$$

$$\lambda^{-1} \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{\lambda}\right) \leftrightarrow \begin{cases} 1, & |\omega| < \lambda^{-1}\pi \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (17)$$

Por tanto la frecuencia de corte será $f_c = \frac{1}{2\lambda}$.

4. MARCO EXPERIMENTAL

El desarrollo de la pruebas se llevo sobre dos tipos de bioseñales, señales electrocardiográficas (ECG) y señales de voz. En los dos tipos de señales tratados, los núcleos de molificación fueron generados para cada caso. Entre tanto, al usar umbralización por *wavelets*, se opto por trabajar con la *wavelet Daubechies 4*, con un nivel de descomposición 4 en señales ECG, y 8 en señales de voz, basado en experiencias anteriores [16], [18].

4.1. Base de Señales ECG

Se utilizaron 55 registros ECG normalizados de la base de datos de arritmias MIT-BIH, contaminados sintéticamente con ruido electromiográfico, electroquirúrgico, e interferencia de línea de potencia de 60 Hz [7], [17]. La intensidad del ruido produce en los registros una relación señal a ruido de 6 dB.

Dentro de las técnicas de umbralización escogidas, dados los desarrollos se compara la efectividad de los siguientes métodos [18]:

Umbralización extrema. Por medio de esta forma de umbralización se usan los coeficientes de aproximación en un nivel dado. Todos los coeficientes de detalle son llevados a cero, y la Transformada *Wavelet Inversa* (IWT) es hecha solamente con los coeficientes de aproximación.

Umbralización rígida. Procesa la señal por medio de un umbral universal constante. Los coeficientes no son ponderados y aquellos que no alcanzan a estar por debajo del umbral son llevados a cero.

Umbralización flexible y umbral global. Los coeficientes son ponderados mediante el cálculo de un umbral global δ , el cual es aplicado de igual forma a cada uno de los niveles de detalle en la descomposición.

Umbralización flexible y umbral para cada nivel. Este método es similar al anterior, pero los coeficientes de detalle son tratados independientemente en cada nivel, y allí es aplicada la misma forma de umbral universal.

Umbralización flexible y estimador de riesgo imparcial SURE. Este tipo de estimación de umbral es adaptativa, además es nivel por nivel.

4.2. Base de Señales de Voz

Se utilizaron 51 registros de voz normalizados, donde se pronuncia la vocal a , contaminadas con ruido browniano sintético, el cual es modelado como $\frac{1}{f^2}$. Así, la

intensidad del ruido disminuye proporcionalmente a través del ancho de banda efectivo del registro (hasta 22050 Hz). La señal contaminada es descompuesta en 8 niveles para obtener las componentes frecuenciales más bajas, es decir, donde se encuentran las perturbaciones mas intensas producidas por ruido browniano. Es importante reconstruir la señal obtenida en la aproximación, mediante la Transformada *Wavelet Inversa* (IWT), ya que si no se realiza mediante este proceso, la señal puede presentar problemas de magnitud y fase, debido a factores como el submuestreo y el sobremuestreo hechos en cada nivel, de la WT y IWT, respectivamente.

4.3. Análisis de Desempeño

El desempeño se compara calculando el error absoluto entre la señal original y la señal filtrada.

$$e = | \text{Señal Filtrada} - \text{Señal Original} | \quad (18)$$

Así, el análisis de desempeño se obtiene calculando en cada método la media del error, su varianza, error máximo y mínimo:

$$\text{media del error} = \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i \quad (19)$$

$$\text{varianza del error} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (e_i - \mu)^2 \quad (20)$$

$$\text{máximo del error} = \max | e_i | \quad (21)$$

$$\text{mínimo del error} = \min | e_i | \quad (22)$$

5. RESULTADOS

5.1. Base de Señales ECG

Se aplicaron diversas técnicas de umbralización, que varían en rendimiento y eficiencia, los cuales pueden ir, desde la pérdida de la señal original, pasando por la

pérdida de información, hasta llegar a una forma en la cual la señal original es conservada significativamente permitiendo así un resultado satisfactorio. Dentro de las técnicas de umbralización escogidas, dados los desarrollos se compara la efectividad de los siguientes métodos:

Umbralización extrema. Este método presenta falencias significativas dentro del proceso de filtrado, ya que al intentar eliminar la frecuencia de la red, conlleva a eliminar información valiosa de la señal ECG, que representa una poca eficiencia del método.

Umbralización rígida. El procedimiento alcanza cierto nivel de desempeño, pero no el necesario, ya que al no realizar la ponderación, ciertos coeficientes importantes de la señal son perdidos.

Umbralización flexible y umbral global. Este método presenta complicaciones, ya que los coeficientes de detalle deben ser tratados de manera independiente, no simplemente como un conjunto global de coeficientes, sino como un conjunto de características similares dentro de un mismo vector de detalles.

Umbralización flexible y umbral para cada nivel. Este método es similar al anterior, pero mejora considerablemente un aspecto, los coeficientes de detalle son tratados independientemente en cada nivel; aquí es aplicada la misma forma de umbral universal, ofreciendo mejoras en la umbralización.

Umbralización flexible y estimador de riesgo imparcial SURE. Este tipo de estimación de umbral es adaptativa, además es nivel por nivel, cuenta con mejoras significativas en el cálculo del umbral, ya que no se toma un umbral universal.

Los anteriores métodos analizados ofrecen garantías para el filtrado en señales de ECG, gracias a la poca pérdida de información después de realizado el filtrado de la señal (Tabla 1), pero el factor discriminante en su selección sería el error máximo presente, por lo cual la umbralización flexible con un umbral por cada nivel presenta el menor de ellos.

	Media	Var	Máx	Mín
Umbr. Extrema	0.0610	0.0047	0.7597	0.00
Umbr. Rígida	0.0654	0.0067	0.9411	0.00
Umbr. univ. Global	0.0584	0.0036	0.5016	0.00
Umbr. univ. por nivel	0.0530	0.0025	0.4105	0.00
Rigorous SURE	0.0581	0.0032	0.5831	0.00

Tabla 1. Medidas del error absoluto en señales electrocardiográficas después de aplicar diferentes tipos de umbralización por Wavelets

El uso de los algoritmos de molificación para el filtrado de las bioseñales presenta un bajo costo computacional, pero lleva una pérdida de precisión frente al desempeño de las técnicas por umbralización de *wavelets*, conforme puede apreciarse en el error máximo (Tabla 2).

	Media	Var	Máx	Mín
Núcleo gaussiano	0.0502	0.0029	0.6018	0.00
Núcleo Sinc	0.0663	0.0065	0.7733	0.00
Aprox. Por WT	0.0534	0.0026	0.4280	0.00

Tabla 2. Medidas del error absoluto en señales ECG. Técnicas de molificación discreta y umbralización flexible con umbral universal para cada nivel.

5.2. Base señales de voz

En ambos métodos, molificación discreta y transformada Wavelet, se obtiene un desempeño equivalente, pero al observar el error máximo, se induce que la aproximación por *Wavelets* no es tan suave, lo que genera reducción en picos de la señal y por consiguiente una mayor pérdida de información de estas (Tabla 3).

	Media	Var	Máx	Mín
Núcleo gaussiano	0.0864	0.0045	0.5748	0.00
Núcleo Sinc	0.1064	0.0068	0.6527	0.00
Aprox. por WT	0.1197	0.0088	0.7587	0.00

Tabla 3. Medidas del error absoluto en señales de voz. Técnicas de molificación discreta y aproximación por wt db4 nivel 8. Vocal /a/.

6. CONCLUSIONES

Los dos métodos de filtrado, molificación y wavelets, mostraron ser de alta eficiencia y con niveles de desempeño comparables. Por supuesto, la simplicidad teórica de la molificación discreta permitió una implementación computacional más sencilla. Es importante anotar que la umbralización SURE no proporcionó un desempeño superior, aun cuando el cálculo del umbral es adaptativo, de ahí la importancia de contar con varios estimadores de parámetros pues no hay forma de tener un único selector de parámetro que funcione en todos los problemas, [10]. Se requiere mayor estudio para implementar algoritmos automáticos de selección del parámetro de umbralización de modo que se adapten, bajo algún criterio de optimalidad, a la calidad de los datos y al tipo de ruido. Los métodos GCV y L-Curve son una buena pista [8], [10].

Para el caso de Molificación discreta la estructura espectral de los núcleos permitió que se atenuaran las componentes de mayor energía en el ruido obteniendo un filtrado de calidad. En la presencia de ruidos más complicados se requeriría el diseño de nuevos filtros, que basados en molificación se adapten mejor a situaciones más complicadas como lo son la captura de discontinuidades y ruidos con componente fuerte en la región espectral que el filtro no afecta.

7. BIBLIOGRAFÍA

- [1] C. D. Acosta, “La mollificación discreta como estimador lineal,” M.Sc thesis, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín, 2000.
- [2] C. D. Acosta, C.E. Mejía, “Stabilization of explicit methods for convection diffusion equations by discrete mollification,” *Computers and Mathematics with Applications*, 2007.
- [3] A. Aldroubi and M. A. Unser, *Wavelets in Medicine and Biology*, CRC Press, 1996.
- [4] C. Coles, “Numerical identification of parameters in inverse heat conduction and inverse Euler Bernoulli Beam theory,” PhD dissertation, University of Cincinnati, 2000.
- [5] D. Cuesta, “Estudio de métodos para procesamiento y agrupación de señales electrocardiográficas,” Ph.D. dissertation, Valencia, 2001.
- [6] D. Donoho, “De-noising by soft-thresholding,” Tech. Rep. Dept. of Statistics, Stanford University, 1995.
- [7] G. M. Friesen, T. C. Jannett, M. A. Jadallah, S. L. Yates, S. L. Quint, and H. T. Nagle, “A comparison of the noise sensitivity of nine qrs detection algorithms,” *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 37:85–98, 1990.
- [8] M. Jansen, *Noise Reduction by Wavelet Thresholding*, Springer 2001.
- [9] I. Johnstone, and D. Donoho, “Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage,” *J. Amer. Stat. Assoc.*, 90. 1995.
- [10] P. C. Hansen, *Rank-deficient and discrete ill-posed problems: numerical aspects of linear inversion*, Siam, 1998.
- [11] C. E. Mejía and D. Murio, “Numerical solution of generalized ICHP by discrete mollification,” *Computers Math. Applic.*, 32:33–50. 1996.
- [12] D. Murio, C. E. Mejía and S. Zhan, “Discrete mollification and numerical differentiation,” *Computers Math. Applic.*, 35:1–16. 1998.
- [13] D. A. Murio, *The mollification method and the numerical solution of ill-posed problems*, John Wiley, 1993.
- [14] D. A. Murio, *Mollification and space marching*, in: K. Woodbury (Ed.), *Inverse Engineering Handbook*, CRC Press, 2002.
- [15] A. Neumaier, “Solving ill-conditioned and singular linear systems: A tutorial on regularization”, *Siam Review* 40: 636-666, 1998.
- [16] C. F. Ojeda, “Extracción de características usando transformada Wavelet en la identificación de voces patológicas,” Trabajo de Grado, Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales, 2003.
- [17] R. Orozco, M. Pérez, J. V. Lorenzo, R. Grau and R. Ramos, “Evaluation of QRS morphological classifiers in the presence of noise,” *Computers and Biomedical Research*, 30:200–210, 1997.
- [18] J. F. Ramírez, “Reducción en tiempo real de perturbaciones en señales de ECG empleando la transformada Wavelet sobre DSP”, Trabajo de Grado, Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales, 2003.
- [19] R. M. Rangayyan, *Biomedical Signal Analysis, A Case-Study Approach*, John Wiley & Son, 2002.
- [20] R. M. Rangayyan, *Biomedical Image Analysis*, CRC Press, 2005.
- [21] R. O. Wells and K. Berkner, “Wavelet transforms and denoising algorithms”, in *Proceedings of Thirty-Second Asilomar Conference on Signals, Systems & Computers*, IEEE, pages 1639–1643, 1998.
- [22] S. Zhan and D. Murio, “Surface fitting and numerical gradient computation by discrete mollification”, *Computers math. Applic.*, 37:145–159, 1999.z