SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE CAUCHY - EULER POR MEDIO DE LA TRANSFORMADA DE MELLIN.

Solution of the equation Cauchy – Euler by the Mellin Transform

RESUMEN
En el presente trabajo se da una solución de una ecuación diferencial lineal ordinaria no homogénea con coeficientes variables, caso Cauchy – Euler, haciendo uso de la técnica de las transformadas integrales. La técnica mas apropiada para la solución de la ecuación en mención es la Transformada de Mellin.

PALABRAS CLAVES: Ecuación Diferencial, Cauchy, Euler, Transformada de Mellin.

ABSTRACT
In the present work a solution of a linear ordinary differential equation with variable coefficients inhomogeneous, case Cauchy - Euler, using the technique of integral transforms, is given. The most appropriate technique for the solution of the equation in question is the Mellin transform.
.

KEYWORDS: *Cauchy, Differential Equation, Euler, Mellin transform.*

JOSE RODRIGO GONZALEZ G.
Profesor Auxiliar, Ph.D.,
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Tecnológica de Pereira
jorodryy@utp.edu.co
jorodryy@gmail.com

LUIS FERNANDO PLAZA GALVEZ
Ingeniero Electricista, Especialista en Finanzas, Candidato a Magíster en Enseñanza de las Matemáticas con énfasis en la línea de Ecuaciones Diferenciales en la Universidad Tecnológica de Pereira.
Docente Tiempo Completo en la Unidad Central del Valle del Cauca, UCEVA
lplaza@uceva.edu.co
lufepla@gmail.com

1. INTRODUCCIÓN

Este trabajo corresponde a la aplicación de la técnica de las transformadas integrales a la solución de la ecuación diferencial ordinaria con coeficientes variables.

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x) \qquad (1)$$

Esta última ecuación (1) representa la conocida ecuación de Cauchy - Euler ó *Ecuación Equidimensional.* La cual es una ecuación diferencial ordinaria de orden n con coeficientes variables no homogénea, donde a_n, a_{n-1}, ….. a_1, a_0, son constantes reales, o de igual modo:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} + a_0 y = g(x) \qquad (2)$$

Finalmente se da una solución algorítmica por medio de la transformada de Mellin, el cual permite poner en práctica una alternativa con software especializado.

2. TRANSFORMADA DE MELLIN

2.1 Generalidades

La transformada de Mellin es la transformada más popular en el análisis de algoritmos. Además está estrechamente relacionado con la transformada bilateral de Laplace y la de Fourier. La popularidad de esta transformada radica en dos propiedades importantes: permite la reducción de ciertas ecuaciones funcionales en unas algebraicas, y suministra un mapeo directo entre expansiones asintóticas de una función cercana a cero o infinito y el conjunto de singularidades de la transformada en el plano complejo. [1] La transformada de Mellin puede ser vista como la transformada de Fourier.

Fecha de Recepción: 8 de junio de 2009
Fecha de Aceptación: 28 de julio de 2009

2.2 Definición

Dada una función *f(x)* definida para valores positivos de *x* y que satisfaga las condiciones [2]:

$$\int_0^1 \left| f(x) \right| x^{\sigma_1 - 1}\, dx < \infty$$

$$\int_1^\infty \left| f(x) \right| x^{\sigma_2 - 1}\, dx < \infty$$

Para algunos números reales σ_1 y σ_2, con $\sigma_1 < \sigma_2$, la transformada de Mellin de *f(x)*, se define por

$$\hat{F}(s) = \int_0^\infty f(x) x^{s-1} dx, \qquad (3)$$

con $s = \sigma + i\tau$, con s compleja.

La fórmula (3) se puede escribir de la forma:

$$\hat{F}(s) = M\{f(x)\},$$

ó

$$\hat{F}(s) = M\{f(x), s\}$$

Con $\hat{F}(s)$ conocida, la función *f(x)* se obtiene aplicando la transformada inversa de Mellin así:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \hat{F}(s) x^{-s} ds \qquad (4)$$

Donde el camino de integración se sitúa paralelo al eje imaginario del plano complejo s, su integral se entiende como su valor principal. La fórmula (4) se cumple para funciones *f(x)* continuas.

Si en el punto $x = x_0$, $x_0 > 0$, la función *f(x)* posee un punto singular finito de primer orden, entonces la parte derecha de (4) en ese punto toma el valor de

$$\frac{1}{2}\left[f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)\right]$$

De igual forma (4) se escribe de la forma

$$f(x) = M^{-1}\{\hat{F}(s)\},$$

ó

$$f(x) = M^{-1}\{\hat{F}(s), x\}$$

2.3 Relaciones entre las transformadas de Mellin y las transformadas de Laplace (L) y de Fourier (F).

Se relacionan de la siguiente forma

$$\hat{F}(s) = M\{f(x), s\} = L\{f(e^{-x}), s\} + L\{f(e^{x}), -s\}$$

$$\hat{F}(s) = M\{f(x), s\} = F\{f(e^{-x}), is\}.$$

Lo que permite utilizar de manera valiosa las tablas ya existentes para las transformadas de Laplace y de Fourier.

2.4 Propiedades de la Transformada de Mellin

Es de recalcar que la transformada de Mellin cumple las siguientes propiedades así [3]:

FUNCIÓN	TRANSFORMADA
$y = f(x)$	$M\{f(x)\} = \hat{Y}(s)$
$af_1(x) + bf_2(x)$	$a\hat{F}_1(s) + b\hat{F}_2(s)$
$f(ax), \quad a > 0$	$a^{-s}\hat{F}(s)$
$x^a f(x)$	$\hat{F}(s + a)$
$f\left(\frac{1}{x}\right)$	$\hat{F}(-s)$
$f(x^\beta), \quad \beta > 0$	$\frac{1}{\beta}\hat{F}\left(\frac{s}{\beta}\right)$
$f'_x(x)$	$-(s-1)\hat{F}(s-1)$
$xf'_x(x)$	$-s\hat{F}(s)$
$f^n{}_x(x)$	$(-1)^n \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-n)}\hat{F}(s-n)$
e^{-ax}	$a^{-s}\Gamma(s)$

Tabla 1. Propiedades de la transformada de Mellin.

2.5 Solución a un problema

Basados en la tabla No. 1, obtener para $g(x) = xf'_x(x)$ la transformada de Mellin correspondiente aplicando (3).

Sea $\hat{F}(s) = M\{f(x)\}$ y $\hat{G}(s) = M\{g(x)\}$, y al aplicar (3), se tiene que:

$$\hat{G}(s) = \int_0^\infty x\ f\ '(x)x^{s-1}dx$$

$$\hat{G}(s) = \int_0^\infty f\ '(x)x^{s}dx$$

Donde esta última integral se puede resolver por partes, llegando a:

$$\hat{G}(s) = x^s f(x)\ \Big|_0^\infty - s\int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx \qquad (5)$$

La expresión $x^s f(x)\ \Big|_0^\infty$, se anula en *x=0,* y en $x = \infty$, debido a que *f(x)* es una función acotada. Por lo tanto al analizar la integral definida encontramos de que en el integrando de (5) se encuentra definida la transformada de Mellín de *f(x),* la cual es de la forma

$M\ \{f(x)\} = \hat{F}(s)$, es decir

$$\hat{G}(s) = M\ \{g(x)\} = M\ \{xf\ '(x)\} = -s\hat{F}(s)\ .$$

De igual manera para *h(x)=*$x^2 f\ ''_x(x)$ es fácil obtener la transformada, veamos:

Sea $\hat{H}(s) = M\{h(x)\}$ y al aplicar la definición expuesta en (3), se tiene

$$\hat{H}(s) = \int_0^\infty x^2\ f\ ''(x)x^{s-1}dx\ ,$$

$$\hat{H}(s) = \int_0^\infty f\ ''(x)x^{s+1}dx\ .$$

Donde esta última integral se puede resolver por partes en forma análoga a la anterior, llegando a:

$$\hat{H}(s) = x^{s+1} f\ '(x)\ \Big|_0^\infty - (s+1)\int_0^\infty f\ '(x)x^{s}dx \qquad (6)$$

Utilizando la acotación de *g(x)* de (6) se encuentra definida la Transformada de Mellin para *g(x)= x f '(x),* la cual es de la forma $M\ \{g(x)\} = \hat{G}(s)$ así:

$$\hat{H}(s) = M\ \{h(x)\} = M\ \{x^2\ f\ ''(x)\} = -(s+1)(-s\hat{F}(s))$$

$$M\ \{x^2\ f\ ''(x)\} = (s+1)(s\hat{F}(s))\ .$$

Utilizando procedimientos análogos (recurrencia) es fácil demostrar que:

$$M\ \{x^3\ f\ '''(x)\} = -s(s+1)(s+2)\hat{F}(s)$$

Resumiendo en forma de tabla, se tiene.

FUNCIÓN	TRANSFORMADA
y=f(x)	$M\{y = f(x)\} = \hat{Y}(s)$
$x\dfrac{dy}{dx}$	$-sY(s)$
$x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}$	$s(s+1)\hat{Y}(s)$
$x^3\dfrac{d^3y}{dx^3}$	$-s(s+1)(s+2)\hat{Y}(s)$
$x^4\dfrac{d^4y}{dx^4}$	$s(s+1)(s+2)(s+3)\hat{Y}(s)$

Tabla 2. Resumen al problema planteado.

Por inducción, se tiene el siguiente resultado:

$$M\left\{x^k\ \frac{d^k y}{dx^k}\right\} = (-1)^k s(s+1)(s+2)...(s+k-1)\hat{Y}(s),$$

con $k \in [1,2,..n]$.

Utilizando esta última expresión, se obtiene:

$$M\left[x^k\ \frac{d^k y}{dx^k}\right] = \hat{Y}(s)(-1)^k \prod_{i=1}^{k}(s+k-1). \qquad (7)$$

3. SOLUCION DE LA ECUACIÓN DE CAUCHY-EULER

Al aplicar la transformada de Mellin en (2), obtenemos [4]:

$$M\left[\sum_{k=1}^{n} a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k}\right] + M\left[a_0 y\right] = M\left[g(x)\right].$$

Suponiendo que el término no homogéneo, *g(x)*, es transformable Mellin, denotada por $M\ \{g(x)\} = \hat{G}(s)$, y que la transformada de Mellin de una suma es la suma de las transformadas, obtenemos:

$$\sum_{k=1}^{n} M\left[a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k}\right] + M\left[a_0 y\right] = \hat{G}(s),$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k M\left[x^k \frac{d^k y}{dx^k}\right] + a_0 M\left[y\right] = \hat{G}(s).$$

Reemplazando la expresión obtenida en (7), se llega a:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \hat{Y}(s)(-1)^k \prod_{i=1}^{k} (s + k - 1) + a_0 \hat{Y}(s) = \hat{G}(s),$$

de aquí:

$$\hat{Y}(s) = \frac{\hat{G}(s)}{a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k (-1)^k \prod_{i=1}^{k} (s + k - 1)}$$

Tomando la transformada inversa de Mellin a la última expresión, se llega a la solución de la Ecuación de Cauchy-Euler de la siguiente forma.

$$y(x) = M^{-1}\left[\frac{\hat{G}(s)}{a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k (-1)^k \prod_{i=1}^{k} (s + k - 1)}\right] \quad (8)$$

4. CONCLUSIÓN GENERAL

Como hemos visto la transformada de Mellin es útil en la representación de los modelos de las transformadas integrales, para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias, donde no es aplicable otro tipo de transformadas. Utilizando un algoritmo similar al descrito en este trabajo es posible realizar algoritmos computacionales para la solución de (1) empleando software especializado como es el caso de Matlab, Scilab, Maple entre otros.

5. BIBLIOGRAFÍA

[1] Sneddon I. A.. Fourier Transform. Ed. Mc Graw Hill Book Company, INC. New York; 1951.

[2] Hochstad H.; Integral Equations; Wiley- Interscience Publication; New York; 1973.

[3] Polyanin A. D. y Manzhirov A.V.; Hand book of Integral Equations; CRC Press LLC; Boca Raton, Florida (U.S.A.); 1998.

[4] Madoz M.A. Resolución numérica de la Ecuación de Valoración; Trabajo de Investigación del programa de doctorado interuniversitario en Finanzas Cuantitativas No. 004; Universidad Complutense de Madrid, Universidad del País Vasco, Universitat de Valencia; Valencia (España); 2004.