

GEOMETRÍA FRACTAL Y TRANSFORMADA DE FOURIER.

RESUMEN

En este artículo mostramos la existencia de una estrecha relación entre la geometría fractal, las leyes de potencias y la transformada de Fourier. Usando para ello la densidad espectral de potencia de un objeto fractal.

PALABRAS CLAVES: Auto semejanza, Espectro de potencia, Fractal, Leyes de potencias, Transformada de Fourier.

ABSTRACT

In this article we show the existence of a relationship between fractal geometry, power laws and the Fourier transform. For this, we used the power spectral density of a fractal object.

EDUARD RIVERA HENAO.

Ingeniero Mecánico, M. Sc.
Profesor auxiliar
Universidad Tecnológica de Pereira
erh@utp.edu.co

RICARDO LÓPEZ VARONA.

Ingeniero Electricista, M. Sc.
Profesor titular
Universidad Tecnológica de Pereira
rilopez@utp.edu.co

1. INTRODUCCIÓN

Para nadie es un secreto que estudiar las formas y los fenómenos de la naturaleza puede representar una tarea sumamente difícil; no por falta de interés, sino por la escasez de herramientas apropiadas para ello, especialmente si dichos fenómenos presentan comportamientos de no linealidad. También es cierto que en muchas de estas formas, fenómenos y problemas, es posible hallar propiedades de auto semejanza.

La geometría que observamos en la naturaleza no es exactamente una geometría euclídea, en ella existen rugosidades y cambios de forma, los contornos no son completamente lisos ni las curvas son perfectas. De igual forma ocurre con los procesos que se llevan a cabo en ella. *Benoît Mandelbrot* [1] define la geometría fractal como la geometría de la naturaleza: “Ni las nubes son esféricas, ni las montañas cónicas, ni las costas circulares, ni la corteza es suave, ni el rayo es rectilíneo”.

La geometría fractal puede llegar a ser una excelente herramienta, la cual permite acomodarse a la naturaleza de esas formas, fenómenos y problemas, hallando así ese patrón de comportamiento, que de alguna manera, nos ayude a comprenderlos y predecir su evolución.

2. CONTENIDO

Inicialmente veremos una corta introducción a la geometría fractal, continuando con la reconstrucción de una señal fractal y por último estudiar su espectro de potencias:

2.1 Fractal

“adj. Sentido intuitivo. Que tiene una forma, bien sea sumamente irregular, bien sumamente interrumpida o

fragmentada, y sigue siendo así a cualquier escala que se produzca el examen” [2].

La palabra *fractal* fue acuñada en 1975 por el matemático *Benoît Mandelbrot*. Tomando esta palabra del latín *fractus* o *frangere*, que sugiere “*fragmentado, interrumpido, discontinuo e irregular*”.

“Un fractal es por definición, un conjunto cuya dimensión de Hausdorff-Besicovitch es estrictamente mayor que su dimensión topológica” [1].

2.2 Dimensión Fractal

“Sentido genérico: Número que sirve para cuantificar el grado de irregularidad y fragmentación de un conjunto geométrico o de un objeto natural. La dimensión fractal no es necesariamente entera” [2].

2.3 ¿Cuánto Mide una Costa Marítima?

Desde *Lewis Fray Richardson* (1881-1953) hasta *Benoît Mandelbrot* (1924-2010), esta ha sido una interesante pregunta.

Obviamente la longitud de una costa será mayor o igual a la longitud de la línea recta que una los puntos extremos de ella. Si tomamos un compás de abertura r , comenzando cada paso en donde termina el anterior, esto en un mapa a escala de dicha costa, veremos que el valor de r multiplicado por el número de veces N que se repite, nos dará una longitud aproximada de la medida de la costa. Si reducimos un poco la abertura del compás, siendo cada vez más precisos en medir cada irregularidad veremos como la longitud de la costa aumenta. Si decidiéramos medirla con un instrumento microscópico la longitud de la costa tendería a ser infinita. Tenemos así

que la longitud de la costa es función del instrumento de medida, esto es:

$$L(r) \propto Nr. \quad (1)$$

2.4 Razón de Homotecia

“Cuando, hablando estadísticamente, cada pedazo de costa es homotético al todo -salvo detalles de los que decidimos no ocuparnos- se dirá que la costa posee una homotecia interna” [2].

Si una figura es autosemejante, se puede descomponer en N partes relacionadas con el todo por una transformación de semejanza de razón r , llamada razón de homotecia [1].

2.5 Dimensión Euclídea

La dimensión euclídea es simplemente el número de coordenadas requeridas para especificar un objeto [3].

2.6 Dimensión Topológica

La dimensión topológica mide la habilidad para cubrir un objeto con conjuntos abiertos de radio pequeño. Una dimensión topológica cero describe un conjunto que puede ser cubierto por pequeños conjuntos abiertos que son disyuntos. La dimensión topológica uno describe un conjunto que puede ser cubierto por pequeños conjuntos abiertos con sólo una intersección entre adyacentes pares de ellos. Un conjunto es considerado de dimensión topológica dos si puede ser cubierto por pequeños conjuntos abiertos que se intersecan sólo tres veces ...[4]. La dimensión topológica usualmente tiene el mismo valor que la dimensión euclídea [5].

2.7 Dimensión de Contenido o Dimensión de Hausdorff – Besicovitch

Un contenido lineal se calcula sumando pasos r elevados al exponente uno, que es la dimensión de la línea recta. Un contenido de superficie se calcula sumando pasos r (donde r es el lado de cada uno de los cuadrados que compone la superficie) elevados al exponente dos, que es la dimensión del plano. Un contenido de volumen se calcula sumando pasos r (donde r es el lado de cada uno de los cubos que compone el volumen) elevados al exponente tres, que es la dimensión del espacio. Así:

$$\text{Contenido} = Nr^D. \quad (2)$$

Una costa está formada por pequeños segmentos de recta de longitud r , si queremos hallar el contenido de dicha costa, siguiendo el proceso enunciado por *Hausdorff*, deberíamos entonces hacer una suma de elementos de longitud r elevados al exponente D , donde D es la dimensión de la costa. La dimensión de la costa no es la de una línea recta ni la de un plano, es decir; $1 < D < 2$.

Digamos ahora que la curva de *Helge Von Koch* (1870-1924) mostrada en la figura 1, modela una costa marítima.

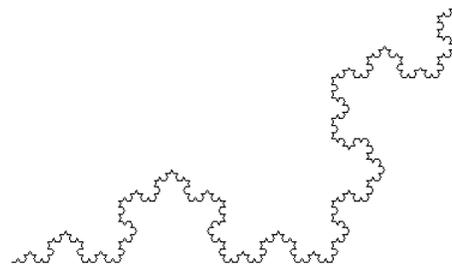


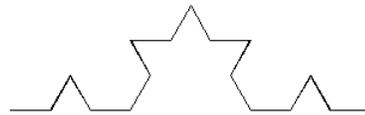
Figura 1. Curva de Koch.

En ella podemos identificar que existe cierto *patrón* de comportamiento que se repite, y que si conocemos dicho patrón podemos generar la curva en el detalle que deseemos. Pues dicho patrón o elemento generador se origina así: Tenemos una línea recta de longitud 1 que llamaremos iniciador, la cual se divide en tres partes iguales. Sustituimos el tercio central del segmento por un promontorio triangular de lado $1/3$. Lo que resulta es una línea quebrada formada por cuatro segmentos iguales que llamaremos generador.

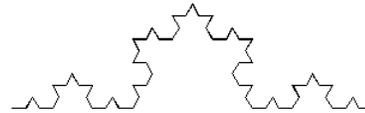


Figura 2. Generador para la curva de Koch.

Podremos repetir el proceso en cada uno de los cuatro lados de nuestra nueva figura, dando origen a un mayor detalle, es decir, podríamos sustituir cada uno de los cuatro segmentos del generador por generadores de tamaño reducido en un tercio.



La última figura generada podría dar origen a una nueva que mostraría con mucho más detalle las irregularidades, basta sólo con escalar (multiplicar por el factor $1/3$) dicha figura y organizar copias del resultado de manera adecuada, para obtener:



La curva de *Koch* fue creada por *Helge Von Koch* en 1904. Es un objeto fractal cuya dimensión $1 < D < 2$, y posee una razón de homotecia $r = 1/3$. Inicialmente la hemos usado como modelo simplificado de una costa de longitud infinita.

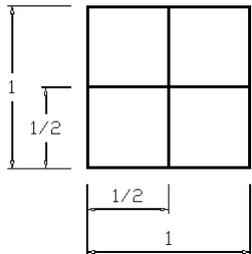
Para familiarizarnos un poco más con estos conceptos, veremos algunos ejemplos de diferentes objetos:

Una línea recta posee dimensión topológica 1. Dicha línea puede ser dividida en tres partes como copias de sí misma; cada una de ellas de longitud $1/3$. Donde el número de copias se puede expresar así: $3 = 3^1$.



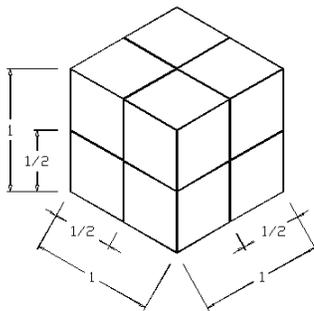
Razón de homotecia $r = 1/3$. Cantidad de copias $N = 3$. Dimensión topológica $d = 1$.

Un cuadrado que posee dimensión topológica 2, puede ser formado por 4 copias de sí mismo, cada una de ellas de lado igual a $1/2$. Donde el número de copias se puede expresar así: $4 = 2^2$.



Razón de homotecia $r = 1/2$. Cantidad de copias $N = 4$. Dimensión topológica $d = 2$.

Un cubo que posee dimensión topológica 3, puede ser formado por 8 copias de sí mismo, cada una de ellas de lado igual a $1/2$. Donde el número de copias se puede expresar así: $8 = 2^3$.



Razón de homotecia $r = 1/2$. Cantidad de copias $N = 8$. Dimensión topológica $d = 3$.

Vemos que existe una relación entre la razón de homotecia r , la dimensión topológica d y el número de copias N , esto es:

$$N(r) = \left(\frac{1}{r}\right)^d = r^{-d}. \quad (3)$$

Así, conociendo cuántas copias de sí mismo posee un objeto, y cuál es su razón de homotecia o razón de similitud, podremos hallar su dimensión, y si esta es mayor que su dimensión topológica, podremos clasificarlo como un objeto fractal.

La curva de Koch, por ejemplo, posee dimensión topológica 1, dicha curva en su forma más simple está formada por 4 copias de sí misma, cada una de ellas de longitud igual a $1/3$. Véase figura 2.

Razón de homotecia $r = 1/3$. Cantidad de copias $N = 4$. Dimensión topológica $d = 1$.

Si pretendemos que la curva de Koch satisfaga la ecuación (3), deberá existir un exponente no entero al cual elevar el recíproco de su razón de homotecia para obtener el número de copias presentes. Necesitaremos de un nuevo exponente D , tal que $D > d$.

Donde D será la dimensión de Hausdorff-Besicovitch para la curva de Koch.

2.8 Dimensión de Hausdorff – Besicovitch

La dimensión de Hausdorff-Besicovitch [2] está dada por la fórmula:

$$D = \frac{\log N}{\log \left(\frac{1}{r}\right)} \quad (4)$$

donde:

N = Número de copias de sí mismo.

D = Dimensión de Hausdorff.

r = Razón de homotecia (razón de similitud).

Usando la función inversa de la logarítmica en ambos lados de la igualdad, tenemos:

$$1 = Nr^D. \\ \text{Contenido} = Nr^D.$$

Recordemos que para Mandelbrot: “Un fractal es por definición, un conjunto cuya dimensión de Hausdorff-Besicovitch es estrictamente mayor que su dimensión topológica” [1].

Si tomamos el ejemplo del cubo formado por 8 copias de sí mismo y usamos para él la ecuación (4), podremos hallar su dimensión de Hausdorff-Besicovitch, obteniendo:

$$D = \frac{\log 8}{\log 2} = 3.$$

Observando que su dimensión de Hausdorff-Besicovitch es igual a su dimensión topológica. No representando así un objeto fractal.

Ahora, tomando el ejemplo de la curva de Koch y usando para ella la ecuación (4), podemos hallar cuál es su dimensión de Hausdorff-Besicovitch, obteniendo:

$$D = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.261859507 \dots$$

Ya que su dimensión de Hausdorff-Besicovitch $D \cong 1.26$ es estrictamente mayor que su dimensión topológica $d = 1$, podemos clasificar la curva de Koch como un objeto fractal. Mostrando una vez más la validez de nuestra ecuación:

$$N(r) = r^{-D} \quad (5)$$

para la cual tendremos objetos fractales cuando la dimensión de Hausdorff-Besicovitch D , que la satisfaga, sea estrictamente mayor que la dimensión topológica d .

Existen muchos objetos fractales, algunos de ellos creados por el hombre, como: la curva de *Koch*, el conjunto de *Cantor*, el triángulo de *Sierpinski*, los conjunto de *Julia*, el conjunto de *Mandelbrot*... y existen muchos otros creados por la naturaleza, como: las plantas Coníferas, los helechos, el brócoli romanescu, las olas del mar, la distribución de los cuerpos celestes, las nubes, el cauce de los ríos, la estructura interna de nuestros órganos (la red vascular, los pulmones, las redes neuronales...) además del surgimiento y propagación de enfermedades y desastres naturales. Por todo esto y mucho más, es importante el estudio de la geometría fractal, pues en realidad permite acercarse a la naturaleza, no solo de nuestros problemas, sino a aquella que nos rodea y nos habla en un lenguaje que a veces es difícil de entender.

2.9 Construcción de una Señal Fractal

Reconstruiremos rápidamente una señal fractal creada por *Scheianu* y *Tutanescu* en su artículo “*Fractal Signals*” [6]. Nos interesa mostrar como la transformada de *Fourier* permite obtener su espectro de potencia, y como este obedece a una ley de potencia similar a la ecuación (5), veamos:

Los autores consideran una función periódica, de período $T_0 = 4\tau_0$. Esta función inicialmente se divide en dos regiones de medio período, una de ellas denominada T_+ y otra denominada T_- . La primera componente, $x_0(t)$, es una señal continua cuya amplitud es igual a la unidad, y partiendo de ella se generan $x_1(t), x_2(t)$... las cuales son pulsos derivados de la región de medio período escalada en su tercera parte.

Las componentes $x_i(t)$ son descritas por las siguientes ecuaciones:

$$x_0(t) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^0; & t \in T_+ = [-\tau_0, \tau_0] \\ 0; & t \notin T_+ \end{cases} \quad (6)$$

$$x_1(t) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^1; & t \in T_1 = [-(1/3)\tau_0, (1/3)\tau_0] \\ -(\frac{1}{2})^1; & t \in T_+ - T_1 \\ 0; & t \notin T_+ \end{cases}$$

Así, para el primer período la sumatoria de las componentes de las señales obedece las siguientes relaciones:

$$x^+(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t); \quad t \in T_+$$

$$x^-(t) = -\sum_{i=0}^{\infty} x_i(t - 2\tau_0); \quad t \in T_-$$

Observando que la última relación refleja la señal $x^+(t)$ por debajo del eje horizontal y la traslada $2\tau_0$ unidades hacia la derecha. Obteniendo así la señal fractal:

$$s_f(t) = [x^+(t) + x^-(t)]_{T_0}$$

En la figura 3, podemos observar la evolución de estas señales.

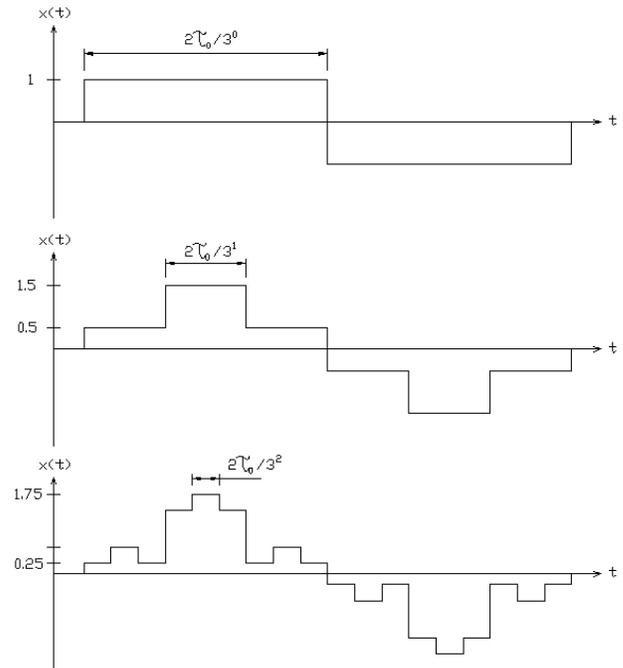


Figura 3. Señal fractal.

La señal queda entonces descrita por las siguientes funciones periódicas [6]:

$$[x_0(t)]_{T_0}^{\pm} = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0(t - nT_0); & t \in [T_+]_{T_0} \\ 0; & t \notin [T_+]_{T_0} \end{cases}$$

$$[x_1(t)]_{T_0}^{\pm} = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(t - nT_0); & t \in [T_+]_{T_0} \\ 0; & t \notin [T_+]_{T_0} \end{cases}$$

Ahora buscaremos la transformada de *Fourier* para estas funciones.

2.10 Transformada de Fourier

La transformada de Fourier de una función $f(t)$, es:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (7)$$

Donde la condición para que $F(\omega)$ exista generalmente está dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty,$$

siendo esta una condición suficiente pero no necesaria [7].

Ya que nuestra función es periódica, podremos expresarla en la forma:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \quad (8)$$

donde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, y C_n es el coeficiente complejo de *Fourier*

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt.$$

La transformada de *Fourier* de una función periódica está expresada en la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t)\} &= \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}\right\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \mathcal{F}\{e^{jn\omega_0 t}\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Debemos entonces hallar $\mathcal{F}\{e^{jn\omega_0 t}\}$ y multiplicarla por el coeficiente C_n . Tomando la ecuación (7):

$$\mathcal{F}\{e^{jn\omega_0 t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - n\omega_0)t} dt$$

$$\mathcal{F}\{e^{jn\omega_0 t}\} = 2\pi \delta(\omega - n\omega_0).$$

Hallando ahora el coeficiente complejo de *Fourier* para la función $x_0(t)$:

$$C_n = \frac{1}{4\tau_0} \int_{-2\tau_0}^{2\tau_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{4\tau_0} \int_{-2\tau_0}^{-\tau_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt + \frac{1}{4\tau_0} \int_{-\tau_0}^{\tau_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &\quad + \frac{1}{4\tau_0} \int_{\tau_0}^{2\tau_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \end{aligned}$$

observamos de la ecuación (6) que la primera y tercera integrales son iguales a cero, ya que $f(t) = 0$ en sus límites de integración. Así nos queda sólo la integral central en donde $f(t) = 1$ para $t \in [-\tau_0, \tau_0]$

$$C_n = \frac{1}{4\tau_0(-jn\omega_0)} (\text{Cos } n\omega_0 \tau_0 - j \text{Sen } n\omega_0 \tau_0) \Big|_{-\tau_0}^{\tau_0}$$

$$C_n = \frac{\text{Sen } n\omega_0 \tau_0}{2n\omega_0 \tau_0} = \frac{1}{2} \text{Sa}(n\omega_0 \tau_0)$$

así,

$$C_1 = \frac{1}{2} \text{Sa}(\omega_0 \tau_0).$$

Reemplazando en la ecuación (9) encontramos la transformada de *Fourier* para la primera función de nuestra señal fractal:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x_0(t)\} &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \text{Sa}(\omega_0 \tau_0) \delta(\omega - n\omega_0). \\ x_0(\omega) &= \pi \text{Sa}(\omega_0 \tau_0) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0). \end{aligned} \quad (10)$$

Es interesante observar como la función $f(t) = \frac{\text{Sen } \pi t}{\pi t}$ presenta propiedades de autosemejanza [8]. Usando la identidad trigonométrica $\text{Sen } 2t = 2 \text{Sen } t \text{Cos } t$ podemos mostrar que:

$$\frac{\text{Sen } \pi t}{\pi t} \propto \frac{\text{Sen} \left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\left(\frac{\pi t}{2}\right)}$$

2.11 Espectro de Potencia

El contenido de energía de una función $f(t)$ está dado por $\frac{1}{2\pi}$ multiplicado por el área bajo la curva $|F(\omega)|^2$. Por esta razón la cantidad $|F(\omega)|^2$ se denomina espectro de energía o función densidad de energía espectral de $f(t)$ [7]. Así, el espectro de energía o densidad de energía de $f(t)$ es finito y se define:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega.$$

Para estas funciones, la potencia promedio en el intervalo T se aproxima a cero a medida que T se aproxima a infinito, así:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt = 0.$$

La cantidad

$$P(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j\omega t} dt \right|^2 \quad (11)$$

se denomina espectro de potencia o densidad espectral de potencia de la función $f(t)$ [7].

Aunque la anterior es una forma para hallar el espectro de potencia usando la transformada de *Fourier*, *Scheianu* y *Tutanesco* [6] en su artículo deciden hacerlo usando una sumatoria de las transformadas de *Fourier* para cada una de las funciones, obteniendo así:

$$P(\omega) = \frac{4\pi}{3} \text{Sa} \left(\frac{\omega \tau_0}{3}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left[\omega - (2n + 1) \frac{2\pi}{4\tau_0}\right]. \quad (12)$$

2.12 Leyes de Potencia

Nos interesa ahora mostrar que el espectro de potencia de la ecuación (12) obedece a leyes de potencias de la forma $f(x) = cx^\alpha$, donde c y α son constantes.

Para los autores *Zwiggelaar* y *Bull* [9], la transformada de *Fourier* y la dimensión fractal de una imagen están relacionadas a través de un espectro de potencia. Argumentan además, que el espectro de potencia resultante de una imagen fractal es proporcional a la frecuencia elevada a una potencia d_f , cuyo valor está linealmente relacionado con la dimensión fractal. $P(\omega) \propto \omega^{d_f}$.

Ya hemos visto varios ejemplos de la relación existente entre las leyes de potencias y los objetos autosemejantes, para esto recordemos la ecuación (5) de este artículo; $N(r) = r^{-D}$.

Muchos otros fenómenos de la naturaleza, especialmente aquellos que presentan propiedades de autosemejanza, obedecen estas leyes. Por ejemplo: para $\alpha = 1$ y $c < 0$, en la ecuación $f(x) = cx^\alpha$, tenemos la fuerza de restitución de un resorte lineal; para $\alpha = -2$ y $c < 0$ tenemos la ley de Newton de atracción gravitacional [8]. El tiempo de caída libre de una roca es independiente de su masa, ese tiempo obedece especialmente a la raíz cuadrada de la distancia recorrida, así $t(h) \sim h^{\frac{1}{2}}$. Las señales que presentan cambios impredecibles a medida que el tiempo transcurre, denominadas *ruidos*, también obedecen a leyes de potencias; y precisamente su clasificación depende del exponente al cual esté elevada su frecuencia [10].

Partiendo de la ecuación (12) y usando el método de regresión lineal de mínimos cuadrados, encontramos que la recta, $y = mx + b$ que mejor se acerca a los datos de un gráfico $\log(\omega) - \log(P(\omega))$ para diferentes valores de ω , tiene pendiente $m = -1$. Así obtenemos:

$$\log(P(\omega)) = -\log(\omega) + b$$

por lo tanto,

$$P(\omega) = e^b \omega^{-1}$$

garantizando así:

$$P(\omega) \propto \omega^{-1}. \quad (13)$$

3. CONCLUSIONES

Existe una relación muy cercana entre la geometría fractal, las leyes de potencias y la transformada de *Fourier*. Tres temas de gran profundidad para ser tratados en un artículo tan corto, el cual pretende solamente mostrar la importancia de construir puentes que permitan su comunicación, y de esta manera hacer frente a diferentes problemas con una variedad de herramientas, las cuales hacen parte de un mismo hábitat.

La geometría fractal ofrece muchos atractivos, la mayoría de ellos, de una belleza inquietante al exhibir patrones que se autocontienen en una secuencia de infinitas iteraciones. En la práctica, conocer el patrón de comportamiento de un fenómeno o proceso, puede ser de gran utilidad para predecir su evolución en el tiempo.

La curva de *Koch*, por ejemplo, sin importar la escala en la cual se decida realizar un examen, exhibirá el mismo patrón de comportamiento, para el cual su exponente D (dimensión fractal) permanecerá constante en la ecuación $N(r) = r^{-D}$.

Queremos mostrar al lector que la belleza de los fractales es tan amplia, que contagia, de la mejor manera, muchas otras disciplinas; mostrando que para ellas también existen patrones que se repiten, propiedades de autosemejanza, y así, sin importar la escala a la cual se produzca el examen, tendremos el mismo fenómeno, en un mayor o menor grado de resolución. Comportamiento

propio de los fractales, ser invariantes al cambio de escala. El espectro de potencia de la señal fractal analizada se comporta de igual manera, como logramos evidenciar

$$P(\omega) \propto \omega^{-1}.$$

4. BIBLIOGRAFÍA

1. MANDELBROT, Benoît. *La geometría fractal de la naturaleza*. Tusquets editores S.A. Barcelona. 2006.
2. MANDELBROT, Benoît. *Los objetos fractales. Forma, azar y dimensión*. Tusquets editores S.A. Barcelona. 2006.
3. ADDISON, Paul S. *Fractals and chaos: an illustrated course*. Institute of physics publishing. London. 1997.
4. EDGAR, Gerald. *Measure, topology, and fractal geometry*. Second edition. Springer. New York, 2008.
5. WILLIAMS, Garnett P. *Chaos theory tamed*. Joseph Henry Press/National academy press. Washington DC. 1999.
6. SCHEIANU, Dumitru. TUTANESCU, Ion. *Fractal signals*. Applied Electronics. Pilsen. 2006.
7. HWEI P, Hsu. *Análisis de Fourier*. Addison Wesley Longman. México S.A de C.V. 1998.
8. SCHROEDER, Manfred. *Fractals, chaos, power laws. Minutes from an infinite paradise*. W.H. Freeman and Company. New York. 1991.
9. ZWIGGELAAR, R. BULL, C.R. *On the use local and scalable Fourier transform, fractal dimension information, and texture segmentation*. Silsoe Research Institute. United Kingdom. IEEE. 1995.
10. PEITGEN, Heinz-Otto. SAUPE, Dietmar. *The science of fractal images*. Springer-Verlag. New York. 1988.