APROXIMACIÓN AL CRITERIO DE HOLMES-MELNIKOV.

RESUMEN
En este artículo se resuelve una integral impropia usando el teorema de los residuos y la transformada de Fourier. Esta integral resulta de la utilización del método de *Melnikov* en un sistema dinámico no lineal.

PALABRAS CLAVES: Integral impropia, Teorema de los residuos, Transformada de Fourier, **Método de Melnikov.**

ABSTRACT
In this article an improper integral is solved using the residue theorem and the Fourier transform. This integral result by the Melnikov´s method utilization in a nonlinear dynamical system.

EDUARD RIVERA HENAO.
Ingeniero Mecánico,
Profesor auxiliar
Universidad Tecnológica de Pereira
erh@utp.edu.co

RICARDO LÓPEZ VARONA.
Ingeniero Electricista, M. Sc.
Profesor titular
Universidad Tecnológica de Pereira
rilopez@utp.edu.co

1. INTRODUCCIÓN

Algunos métodos empleados en el estudio de los sistemas dinámicos, especialmente los sistemas dinámicos no lineales, requieren la solución de integrales para las cuales un curso básico de cálculo integral no es suficiente, haciéndose necesaria la utilización de otras herramientas que faciliten dicha solución. Muestra esto entonces la importancia de la comunicación entre los diferentes cursos de matemáticas, que no son islas perdidas en un inmenso océano de conocimiento, sino poblaciones vecinas que vale la pena conocer, volver a visitar o redescubrir, para subir a una colina desde donde se puedan ver todas como una sola localidad funcional y útil. Sirviendo así de ejemplo para el futuro profesional de la importancia de la capacidad de integración de los conceptos para su posterior utilización.

2. CONTENIDO

Pretendemos entonces obtener una solución para la siguiente integral impropia, planteada por *Guckenheimer* y *Holmes* en [1]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech} t \tanh t \cos \omega(t+t_0)\, dt. \qquad (1)$$

Sabemos que:

$$e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \operatorname{sen} \omega t$$
$$e^{-j\omega t_0} = \cos \omega t_0 - j \operatorname{sen} \omega t_0$$

Así:

$$e^{-j\omega t} e^{-j\omega t_0} = e^{-(j\omega t + j\omega t_0)}$$
$$e^{-j\omega t} e^{-j\omega t_0} = \left(\cos \omega t - j \operatorname{sen} \omega t\right)\left(\cos \omega t_0 - j \operatorname{sen} \omega t_0\right)$$

Fecha Recepción: 9 de Septiembre de 2010
Fecha aceptación: 15 de Noviembre de 2010

$$e^{-j\omega t} e^{-j\omega t_0} = \cos \omega t \cos \omega t_0 - \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} \omega t_0 - j(\cos \omega t \operatorname{sen} \omega t_0 + \operatorname{sen} \omega t \cos \omega t_0)$$

tomando la parte real, tenemos:

$$\Re\{e^{-j\omega t} e^{-j\omega t_0}\} = \cos \omega(t+t_0)$$

gracias a esto podemos escribir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech} t \tanh t \cos \omega(t+t_0)\, dt = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech} t \tanh t\, e^{-j\omega t} dt$$

simplificando un poco el problema.

2.1 Transformada de Fourier

La transformada de Fourier de una función $f(t)$, es:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

donde la condición para que $F(\omega)$ exista generalmente está dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty,$$

siendo esta una condición suficiente pero no necesaria.[2]

Así, la integral que pretendemos solucionar será el resultado de hallar la transformada de *Fourier* para la función $\operatorname{sech} t \tanh t$, esto es:

$$\mathcal{F}\{\operatorname{sech} t \tanh t\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech} t \tanh t\, e^{-j\omega t} dt$$

Será de gran ayuda recordar que:

$$\frac{d}{dt}(\operatorname{sech} t) = -\operatorname{sech} t \tanh t$$

de esta forma,

$$\mathcal{F}\{\operatorname{sech} t \tanh t\} = -\mathcal{F}\left\{\frac{d}{dt}(\operatorname{sech} t)\right\}$$

Recordemos además, que la diferenciación en el dominio del tiempo corresponde a la multiplicación de la transformada de *Fourier* por $j\omega$, dado que $f(t) \to 0$, cuando $t \to \pm\infty$. [2]

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = j\omega\, F(\omega)^* = j\omega\, \mathcal{F}\{f(t)\}$$

donde

$$F(\omega)^* = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt,$$

Así,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\operatorname{sech} t \tanh t\} &= -j\omega\, F(\omega)^* \\ &= -j\omega \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech} t\, e^{-j\omega t} dt, \qquad (2)\end{aligned}$$

donde,

$$F(\omega)^* = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\omega t} dt}{\cosh t}.$$

Hasta este punto hemos mostrado que para poder conocer la transformada de *Fourier* $F(\omega)$ de la función $\operatorname{sech} t \tanh t$, basta con conocer la transformada de *Fourier* $F(\omega)^*$ de la función $\operatorname{sech} t$ y multiplicarla por $-j\omega$. Para esto usaremos el teorema de los residuos.

2.2 Teorema de los residuos

Se establece que sea *C* un contorno cerrado simple dentro y sobre el cual una función f es analítica excepto para un número finito de puntos singulares $z_1, z_2, \dots, z_n$ interiores a *C*. Si $B_1, B_2, \dots, B_n$ denota los residuos de f en esos puntos, se cumple

$$\int_C f(z) dz = 2\pi j (B_1 + B_2 + \cdots + B_n)$$

donde *C* está descrito en sentido positivo. [3]

Este teorema nos dice que el valor de la integral de f alrededor de C es $2\pi j$ veces la suma de los residuos asociados con esos puntos singulares.

Sea entonces:

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{e^{-j\omega z}}{\cosh z}$$

Según [3], la función f tiene un polo simple en z_0 si, al igual que las condiciones ahí, $q(z_0) = 0$ y $q'(z_0) \neq 0$. El residuo de f en el polo simple z_0 está dado por la fórmula:

$$B_1 = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

Si,

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{e^{-j\omega z}}{\cosh z}$$

entonces tendremos un polo simple en $z_0 = \frac{\pi j}{2}$.

Así,

$$\begin{aligned} p(z) &= e^{-j\omega z}; \quad & p(z_0) &= e^{\frac{\omega\pi}{2}} \\ q(z) &= \cosh z\,; \quad & q(z_0) &= 0 \\ q'(z) &= \operatorname{senh} z; \quad & q'(z_0) &= j. \end{aligned}$$

nuestro residuo será:

$$B_1 = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} = \frac{e^{\frac{\omega\pi}{2}}}{j}.$$

Ahora, la región sobre la cual integraremos será un rectángulo cuya base comprende el intervalo [-R, R] y vértices superiores en (-R, -R+ πj), (R, R+ πj). Así el único polo de la función en esta región es $z_0 = \frac{\pi j}{2}$.

$$\begin{aligned}\int_C f(z) dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{-j\omega t} dt}{\cosh t} + \int_0^1 \frac{e^{-j\omega(\mathrm{R} + \pi j y)} dy}{\cosh(\mathrm{R} + \pi j y)} \\ + \int_R^{-R} \frac{e^{-j\omega(t+\pi j)} dt}{\cosh(t + \pi j)} \\ + \int_1^0 \frac{e^{-j\omega(-\mathrm{R} + \pi j y)} dy}{\cosh(-\mathrm{R} + \pi j y)}\end{aligned}$$

Como $R \to \infty$, las integrales $\int_0^1 \frac{e^{-j\omega(\mathrm{R}+\pi j y)} dy}{\cosh(\mathrm{R}+\pi j y)}$ y $\int_1^0 \frac{e^{-j\omega(-\mathrm{R}+\pi j y)} dy}{\cosh(-\mathrm{R}+\pi j y)}$ tienden a cero, por lo tanto:

$$\begin{aligned}\int_C f(z) dz &= \int_{-R}^{R} \frac{e^{-j\omega t} dt}{\cosh t} + \int_R^{-R} \frac{e^{-j\omega(t+\pi j)} dt}{\cosh(t + \pi j)} \\ &= \int_{-R}^{R} \frac{e^{-j\omega t} dt}{\cosh t} - \int_{-R}^{R} \frac{e^{-j\omega(t+\pi j)} dt}{\cosh(t + \pi j)} \\ &= \int_{-R}^{R} \frac{e^{-j\omega t} dt}{\cosh t} - \int_{-R}^{R} \frac{e^{-j\omega t} e^{\omega\pi} dt}{\cosh(t + \pi j)}\end{aligned}$$

Donde

$$\cosh(t + \pi j) = \frac{e^{t+\pi j} + e^{-t-\pi j}}{2} = -\cosh t.$$

Usando el teorema de los residuos tendremos:

$$\int_C f(z) dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{-j\omega t} dt}{\cosh t} + e^{\omega\pi} \int_{-R}^{R} \frac{e^{-j\omega t} dt}{\cosh t} = 2\pi j B_1$$

$$= (1 + e^{\omega\pi}) \int_{-R}^{R} \frac{e^{-j\omega t} dt}{\cosh t} = 2\pi j B_1$$

$$= (1 + e^{\omega\pi}) \int_{-R}^{R} \frac{e^{-j\omega t} dt}{\cosh t} = 2\pi j \left(\frac{e^{\frac{\omega\pi}{2}}}{j} \right)$$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{e^{-j\omega t} dt}{\cosh t} = \frac{2\pi\, e^{\frac{\omega\pi}{2}}}{1 + e^{\omega\pi}}$$

ahora,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\omega t} dt}{\cosh t} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{-j\omega t} dt}{\cosh t} = \frac{2\pi\, e^{\frac{\omega\pi}{2}}}{1 + e^{\omega\pi}}$$

sabemos que:

$$\frac{2\, e^{\frac{\omega\pi}{2}}}{1 + e^{\omega\pi}} = \frac{2}{e^{\frac{-\omega\pi}{2}} + e^{\frac{\omega\pi}{2}}} = \frac{1}{\cosh\left(\frac{\omega\pi}{2}\right)}.$$

Así,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\omega t} dt}{\cosh t} = \frac{2\pi\, e^{\frac{\omega\pi}{2}}}{1 + e^{\omega\pi}} = \frac{\pi}{\cosh\left(\frac{\omega\pi}{2}\right)}.$$

Por lo tanto hemos hallado la transformada de *Fourier* para la función $\operatorname{sech} t$, esto es:

$$F(\omega)^* = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\omega t} dt}{\cosh t} = \frac{\pi}{\cosh\left(\frac{\omega\pi}{2}\right)}$$

Ahora, retomando la ecuación (2):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\operatorname{sech} t \tanh t\} &= -j\omega\, F(\omega)^* \\ &= -j\omega \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech} t\, e^{-j\omega t} dt \\ &= -j\omega \frac{\pi}{\cosh\left(\frac{\omega\pi}{2}\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\operatorname{sech} t \tanh t\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech} t \tanh t\, e^{-j\omega t} dt \\ &= -j\omega \frac{\pi}{\cosh\left(\frac{\omega\pi}{2}\right)} \end{aligned}$$

Multiplicando por el factor $e^{-j\omega t_0}$, tendremos:

$$\begin{aligned} e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech} t \tanh t\, e^{-j\omega t} dt &= \frac{-e^{-j\omega t_0} j\omega\pi}{\cosh\left(\frac{\omega\pi}{2}\right)} \\ &= -(\cos\omega t_0 - j \operatorname{sen}\omega t_0) \frac{j\omega\pi}{\cosh\left(\frac{\omega\pi}{2}\right)} \end{aligned}$$

Tomando la parte real tendremos la solución para la integral impropia (1):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech} t \tanh t \cos\omega(t + t_0)\, dt = \frac{-\omega\pi \operatorname{sen}\omega t_0}{\cosh\left(\frac{\omega\pi}{2}\right)}.$$

3. CONCLUSIONES

Aunque el título de este documento puede causar temores de todo tipo al referirse a temas tan amplios en el estudio de las matemáticas, nuestro interés no ha sido desmotivar, al contrario; pretendemos mostrar la importancia de tener claridad sobre dichos temas y motivar a su posterior utilización en conjunto, pues la alianza que proponemos nos permite salir bien librados de una integral impropia que por otros métodos sería difícil de abordar.

Sin desconocer el valor del resultado que hemos obtenido, queremos hacer énfasis en el camino recorrido para llegar a dicho resultado; la utilización de las herramientas adecuadas en el momento necesario: el cálculo diferencial, el cálculo integral, la transformada de Fourier, el teorema de los residuos, además del uso de propiedades e identidades sin las cuales no habría sido posible dicha solución.

Este resultado que hemos obtenido es ampliamente usado en diferentes artículos y libros relacionados con la utilización del método de *Melnikov* en sistemas dinámicos no lineales, pretendiendo evidenciar tendencia hacia comportamientos caóticos de los mismos. Algunas de estas publicaciones son: [1],[4],[5],[6],[7].

4. BIBLIOGRAFÍA

1. GUCKENHEIMER, John. HOLMES, Philip. *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*. Springer-Verlag. New York. 1983.

2. HWEI P, Hsu. *Análisis de Fourier*. Addison Wesley Longman. México S.A de C.V. 1998.

3. CHURCHILL, Ruel V. BROWN, James W. VERHEY, Roger F. Variables complejas y sus aplicaciones. Segunda edición. McGraw-Hill. México, D.F. 1982.

4. SZEMPLÍNSKA-STUPNICKA, Wanda. *Chaos bifurcations and fractals around us, a brief introduction*. Institute of fundamental technological

research, Polish Academy of science. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltda. Singapore. 2003.

5. MOON, F.C. LI, G-X. *Fractal basin boundaries and homoclinic orbits for periodic motion in a two-well potential*. Physical review letters. Volume 55. Number 14. September 30 1985. Pp 1439-1442.

6. SMITH, Sterling. *Basin Boundaries of the Forced Duffing Equation*. Physics 4550, Dr. Peak. Fall 2003.

7. AWREJCEWICZ Jan. HOLICKE Mariusz M. *Smooth and nonsmooth high dimensional chaos and the Melnikov-type methods*. World Scientific publishing Co. Pte. Ltd. Singapore. 2007.