ISSN 0138 - 3248

Rostocker Mathematisches Kolloquium

Heft 33

Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

Information

Rostocker Informatik-Berichte

Diese Schriftenreihe der Sektion Informatik der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock erscheint seit 1985.

Bisher liegen folgende Hefte vor:

Heft 1 (1985)	20 Jahre Rechenzentrum/Sektion Informationsverarbeitung
Heft 2 (1985)	DIGRA'84 (Internationale Tagung, November 1984, Ahrenshoop)
Heft 3 (1986)	Beiträge zur Digitalgraphik und ihren Anwendungen aus Institutionen und Kombinaten der DDR
Heft 4 (1986)	Arbeiten aus der Sektion Informatik
Heft 5 (1987)	Beiträge des Problemseminars "Graphisch-Interaktive Systeme"
vorgesehen Heft 6 (1988)	Beiträge aus der Sektion Informatik zur graphischen Standardisierung und Simulation

Bezugsmöglichkeiten

- Bestellungen aus der DDR über die Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, Abteilung Wissenschaftspublizistik, Vogelsang 13/14, Rostock, DDR-2500
- Bestellungen aus dem Ausland über die Firma Buchexport, Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, Leninstraße 16, Leipzig, DDR-7010

Die Hefte der Schriftenreihe sind im Rahmen des Schriftentausches über die Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, Universitätsbibliothek, Tauschstelle, Universitätsplatz 5, Rostock, DDR-2500, zu beziehen.

ROSTOCKER MATHEMATISCHES KOLLOQUIUM

Heft 33

Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
1988

Herausgeber: Der Rektor der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

Wissenschaftliche Leitung: Prof. Dr. Gustav Burosch
(Sektionsdirektor)
Prof. Dr. Gerhard Maeß

Redaktionelle Bearbeitung: Dr. Klaus-Dieter Drews

Herstellung der Druckvorlage: Dorothea Meyer

Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
Rostock
DDR-2500

Redaktionsschluß: 30. 09. 1987

Das Rostocker Mathematische Kolloquium erscheint dreimal im Jahr und ist im Rahmen des Schriftentausches über die Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, Universitätsbibliothek, Tauschstelle, Universitätsplatz 5, Rostock, DDR-2500, zu beziehen.

Außerdem bestehen Bezugsmöglichkeiten für
- Bestellungen aus der DDR über die Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, Abteilung Wissenschaftspublizistik, Vogelsang 13/14, Rostock, DDR-2500
- Bestellungen aus dem Ausland über die Firma Buchexport, Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, Leninstraße 16, Leipzig, DDR-7010

Zitat-Kurztitel: Rostock. Math. Kolloq. (1988) 33

Wilhelm-Pieck-Universität Rostock,
Abteilung Wissenschaftspublizistik,
Vogelsang 13/14, Telefon 369 577, Rostock, DDR-2500
Genehmigungs-Nr.: C 80/88
Druck: DDR WII-15-14,0,50

https://doi.org/10.18453/rosdok_id00003851

Inhalt Seite

Prof. Dr. István Fenyö

* 5. 3. 1917 † 28. 7. 1987

Rostock. Math. Kolloq. 33, 5 - 7 (1988)

Hans-Wolfgang Stolle

Nachruf für Prof. Dr. István Fenyö

Am 28. Juli 1987 starb im 71. Lebensjahr der ungarische Mathematiker Prof. Dr. István Fenyö aus Budapest. Er war viele Jahre hindurch eng mit dem mathematischen Leben an der Universität Rostock verbunden. Die Sektion Mathematik der Wilhelm-Pieck-Universität schuldet ihm großen Dank und hohe Anerkennung für seinen umfangreichen und richtungweisenden Einsatz in der Ausbildung und Forschung dieser Sektion.

Die vielfältigen Begabungen und Interessen von Prof. Fenyö und seine unermüdlichen Bemühungen um die Mathematik gehen aus seinem Lebenslauf hervor. Er wurde am 5. März 1917 in Budapest geboren und studierte dort nach Abschluß seiner Schulbildung Chemie und Mathematik. Von 1942 bis 1944 arbeitete er zunächst als Chemiker in einem Produktionsbetrieb, ehe er 1945 als Mathematiker an der Technischen Universität Budapest tätig wurde. Dort promovierte er 1946 zum Dr. phil. und habilitierte sich 1950. Im Jahr 1951 wurde er Dozent und zugleich Direktor des Mathematischen Instituts der Elektrotechnischen Fakultät der Technischen Universität Budapest. Dieses Amt bekleidete er auch nach seiner Berufung zum ordentlichen Professor noch viele Jahre lang.

Auf Grund seines hohen Fachwissens, seiner bewundernswerten Vielseitigkeit und seiner perfekten Sprachkenntnisse in Englisch, Französisch, Italienisch und Deutsch wurde er in der Folgezeit mehrfach zu Gastaufenthalten ins Ausland berufen. Er wirkte als Gastprofessor über jeweils längere Zeit in Italien, Frankreich, Kanada und der DDR und konnte auf eine insgesamt achtjährige Tätigkeit in Rostock zurückblicken. Vom 1. 8. 1964 bis zum 31. 8. 1966 und vom 1. 8. 1968 bis zum 31. 8. 1974 hatte er am damaligen Mathematischen Institut der Universität Rostock bzw. später an der Sektion Mathematik eine Professur mit Lehrstuhl für das Fachgebiet Analysis inne. Mehrere Jahre lang war er Mitglied des Wissenschaftlichen Rates der Roatocker Universität.

Prof. Fenyö war es zu verdanken, daß ein bis dahin in Rostock wenig betriebener moderner Zweig der Analysis, die Funktionalanalysis, auch an unserer Universität Einzug hielt und in Lehre und Forschung den ihr zukommenden Platz einnahm. Er war ein vielseitiger Forscher, der in mehreren modernen und aktuellen Gebieten der Mathematik bemerkenswerte wissenschaftliche Leistungen hervorbrachte und sich auch auf dem Gebiet der praktischen Anwendungen der Mathematik erfolgreich betätigte. Zahlreiche Nachwuchswissenschaftler der Analysis haben durch ihn bedeutende Impulse für ihre fachliche Orientierung und wissenschaftliche Qualifikation erhalten. Bei der Betreuung von Rostocker Diplomanden und Doktoranden, von denen er Selbständigkeit und Kreativität forderte, konnte er seine vielfältigen Kenntnisse und umfangreichen Erfahrungen auf den Gebieten der Mittelwerte und Funktionalgleichungen, der Integralgleichungen und Integraltransformationen, der Differentialgleichungen und speziellen Funktionen, der linearen Operatoren und verallgemeinerten Funktionen, der Analogrechner und der Anwendungen der Mathematik in Physik und Technik und schließlich auch der Geschichte der Mathematik voll zur Geltung bringen. Seine Vorlesungen für Studenten der Mathematik wie auch für Studenten der Ingenieurwissenschaften wurden von ihm sehr lebendig und mitreißend vorgetragen und zeichneten sich durch eine große Klarheit und ein hohes Niveau aus. Auch nach der Rückkehr von Prof. Fenyö in seine Heimat Ungarn blieb sein Einfluß auf die Rostocker Mathematik nachhaltig spürbar, und es gab bis zuletzt sehr enge wissenschaftliche und freundschaftliche Kontakte zu Rostocker Kollegen.

Es ist an dieser Stelle unmöglich, eine Übersicht über die zahlreichen und ein breites Spektrum überstreichenden mathematischen und mathematikhistorischen Publikatioren von Prof. Fenyö zu geben. Deshalb sollen nur die drei von ihm gemeinsam mit anderen Autoren in deutschen Verlagen erschienenen Lehrbücher genannt werden, die alle die Anwendung der Mathematik in Naturwissenschaft und Technik zum Inhalt haben, was ein wesentliches Anliegen des Mathematikers Fenyö war:

Fenyö, I., und Alexits, G.: Mathematik für Chemiker, Akademische Verlagsgesellschaft Leipzig 1982,

Fenyö, I., und Frey, Th.: Moderne mathematische Methoden in der Technik, Birkhäuser Verlag Basel, Bd. 1 1967, Bd. 2 1971, Bd. 3 1980,

Fenyö, I., und Stolle, H.-W.: Theorie und Praxis der linearen Integralgleichungen, Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin und Birkhäuser Verlag Basel, Bd. 1 1982, Bd. 2 1983, Bd. 3 1983, Bd. 4 1984.

Wer immer Prof. Fenyö gekannt hat, wird sein umfangreiches Wissen auf den verschiedensten Gebieten der Mathematik und Naturwissenschaften, der Geschichte und Kunst, der Musik und Architektur bewundert und geschätzt haben. Seine Vielseitigkeit, seine allseitige Interessiertheit, sein großes Informationsbedürfnis, seine entgegenkommende, immer freundliche und hilfsbereite Art machten ihn zu einem interessanten und anregenden Gesprächspartner. Er war immer zu einem Spaß bereit und wußte auch manch lustiges Histörchen zu erzählen. Was aber am meisten beeindruckend war für denjenigen, der mit ihm zusammen arbeitete, war sein bewundernswerter Einfallsreichtum, seine nie erlahmende Energie und seine ungeheure Zähigkeit bei der Lösung wissenschaftlicher Problemstellungen. Die Arbeit und das Wirken von Prof. Fenyö werden in der Sektion Mathematik der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock unvergessen bleiben.

eingegangen: 25. 09. 1987

Verfasser:

Prof. Dr. H.-W. Stolle
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
Rostock
DDR-2500

Rostock. Math. Kolloq. 33, 8 - 22 (1988) 03G25
08A99
08B99

Klaus Denecke

Kongruenzregularität und p-determinierte Kongruenzen in Varietäten, die von zweielementigen Algebren erzeugt werden

1. Einleitung

Abgeschlossene Mengen Boolescher Funktionen, die alle Projektionen enthalten, können als Mengen von Termfunktionen zweielementiger Algebren aufgefaßt werden. Dieser Ansatz gestattet die Anwendung von Begriffsbildungen und Methoden der Universellen Algebra und führt damit zu tieferen Einsichten in die Theorie Boolescher Funktionen. Das zeigt sich besonders deutlich, wenn außer den zweielementigen Algebren auch die von ihnen erzeugten Varietäten in die Betrachtungen einbezogen werden. Durch kategorientheoretische Äquivalenz übertragen sich viele Eigenschaften der von zweielementigen Algebren erzeugten Varietäten auf andere Varietäten. So können die grundlegenden Resultate von E. L. Post (/8 /) über abgeschlossene Klassen Boolescher Funktionen zu neuen Ergebnissen bei der Untersuchung spezieller Varietäten universaler Algebren beitragen.

In dieser Arbeit werden Eigenschaften der Kongruenzenverbände aller Algebren aus der von einer zweielementigen Algebra erzeugten Varietät vorgestellt. Während in /9 / die n-Distributivität, n-Vertauschbarkeit und n-Modularität derartiger Varietäten vollständig untersucht wurde, soll nun die Kongruenzregularität und ihr Zusammenhang mit der Kongruenzvertauschbarkeit zur Diskussion stehen. Weiter sollen alle diejenigen zweielementigen Algebren $\underline{2} = (\{0,1\};F)$ ermittelt werden, für die sämtliche Algebren aus der von $\underline{2}$ erzeugten Varietät $V(\underline{2})$ schon durch einen gewissen Term $\underline{p}$ determiniert sind.

Die Ergebnisse werden unabhängig von den Postschen Resultaten und von den Eigenschaften des Postschen Graphen (/8 /) gewonnen. Um dem Leser den Vergleich mit der Postschen Darstellung zu erleichtern, wird die in /6/ angegebene und von Post eingeführte

Bezeichnung abgeschlossener Mengen und Boolescher Funktionen verwendet. So bezeichnen $\wedge$, $\vee$, $\Longrightarrow$, $+$, $-$ Konjunktion, Alternative, Implikation, Addition modulo 2 bzw. Negation. Wir vereinbaren weiter: $xy := x \wedge y$, $\overline{x} := -x$.

2. Grundbegriffe

A sei eine nichtleere Menge. Die Menge aller n-stelligen Funktionen auf A werde mit $O_A^{(n)}$ $(n \geq 1)$ bezeichnet. Wir setzen $O_A = \bigcup_{n \geq 1} O_A^{(n)}$. Sei ϱ eine h-äre Relation auf A, d. h. $\varrho \subseteq A^h$. Man sagt, eine Funktion $f \in O_A^{(n)}$ bewahrt ϱ, wenn aus $(a_{11},\dots,a_{1h}) \in \varrho$, ..., $(a_{n1},\dots,a_{nh}) \in \varrho$ stets $(f(a_{11},\dots,a_{n1}), \dots, f(a_{1h},\dots,a_{nh})) \in \varrho$ folgt.

Die Menge aller auf A definierter Funktionen, die ϱ bewahren, wird mit $\mathrm{Pol}\,\varrho$ bezeichnet. $\mathrm{Pol}\,\varrho$ ist eine bezüglich Superposition abgeschlossene Menge. Für eine Algebra $\underline{A} = (A;F)$, $|A| > 1$, heißt die aus F durch Superposition von Funktionen entstehende abgeschlossene Menge unter der Voraussetzung, daß sie alle Projektionen, d. h. alle Funktionen $e_i^{(n)} \in O_A^{(n)}$ mit $e_i^{(n)}(x_1,\dots,x_n) = x_i$, $i = 1,\dots,n$, enthält, Menge der Termfunktionen von $\underline{A}$, bezeichnet durch $T(\underline{A})$. Zwei Algebren $\underline{A_1}$ und $\underline{A_2}$ heißen rational äquivalent, wenn $T(\underline{A_1}) = T(\underline{A_2})$ gilt. Es ist klar, daß eine superpositionsabgeschlossene Klasse Boolescher Funktionen eine zweielementige Algebra nur bis auf rationale Äquivalenz eindeutig bestimmt. Wir werden hier die zweielementigen Algebren so bezeichnen wie ihre Termfunktionsklassen.
Es bezeichne $\underline{2} = (\{0,1\};F)$, wobei F eine Menge Boolescher Funktionen ist, eine beliebige zweielementige Algebra. Für den Fall, daß $\underline{A}$ eine Termfunktion m mit $m(x,x,y) = m(x,y,x) = m(y,x,x) = x$ hat, lassen sich alle Termfunktionen von $\underline{A}$ mit Hilfe des bekannten Satzes von Baker/Pixley beschreiben:

Theorem 2.1 (/1/): Sei $\underline{A} = (A;F)$, $|A| \geq 2$, eine endliche Algebra mit einer Termfunktion m, für die $m(x,x,y) = m(x,y,x) = m(y,x,x) = x$ gilt.
Dann ist eine auf A definierte Funktion genau dann eine Termfunktion von $\underline{A}$, wenn sie alle Teilalgebren von $\underline{A}^2$ bewahrt.

Unter der von einer Algebra $\underline{A}$ erzeugten Varietät $V(\underline{A})$ versteht man die Klasse aller Algebren $\underline{B}$ vom gleichen Typ wie $\underline{A}$, in denen alle Identitäten von $\underline{A}$ gelten. Bezeichnet

$\mathbb{P}\underline{A}$ die Klasse aller direkten Potenzen von $\underline{A}$,
$\mathbb{P}_s\underline{A}$ die Klasse aller subdirekten Potenzen von $\underline{A}$,
$\mathbb{S}\underline{A}$ die Klasse aller Teilalgebren von $\underline{A}$,
$\mathbb{H}\underline{A}$ die Klasse aller homomorphen Bilder von $\underline{A}$,
$\mathbb{I}\underline{A}$ die Klasse aller isomorphen Bilder von $\underline{A}$,

so gilt $V(\underline{A}) = \mathbb{H}\mathbb{S}\mathbb{P}\underline{A}$, d. h., jede Algebra $\underline{B}$ der von $\underline{A}$ erzeugten Varietät läßt sich als homomorphes Bild einer Teilalgebra einer direkten Potenz von $\underline{A}$ darstellen. Hat $\underline{A}$ eine Termfunktion m, die die oben aufgeführten Identitäten erfüllt, so gilt in Anwendung eines bekannten Theorems von B. Jónsson (/7/)
$V(\underline{A}) = \mathbb{I}\mathbb{P}_s\mathbb{H}\mathbb{S}\underline{A}$.

Die Kongruenzen auf einer Algebra $\underline{A} = (A;F)$ bilden einen vollständigen algebraischen Verband. Wir bezeichnen diesen Verband durch $Con(\underline{A})$. Der Kongruenzenverband einer Algebra $\underline{A}$ heißt regulär, wenn jede Kongruenz bereits durch eine Kongruenzklasse eindeutig bestimmt ist. Ist dies der Fall, so nennen wir $\underline{A}$ kongruenzregulär. Ist jede Algebra einer Varietät V kongruenzregulär, so heißt V kongruenzregulär. Die folgende Mal'cev-Typ-Bedingung für die Kongruenzregularität jeder Algebra einer Varietät V wurde von R. Wille in /13/ angegeben:

Theorem 2.2 (/13/): Sei V eine Varietät. Dann ist jede Algebra aus V genau dann kongruenzregulär, wenn es dreistellige Terme $\underline{p_i}$ $(0 \leq i \leq n)$ und vierstellige Terme $\underline{q_k}$ $(1 \leq k \leq m)$ in V so gibt, daß für alle $1 \leq k \leq m$ und geeignete $0 \leq i_k, j_k \leq n$ gilt:

$\underline{p_o}(x,y,z) = z$, $\underline{p_i}(x,x,z) = z$ für alle $1 \leq i \leq n$,

$\underline{q_1}(\underline{p_{i_1}}(x,y,z),x,y,z) = x$,

$$\underline{q_{k-1}}(\underline{p_{j_{k-1}}}(x,y,z),x,y,z) = \underline{q_k}(\underline{p_{i_k}}(x,y,z),x,y,z) \quad (2 \le k \le m),$$

$$\underline{q_m}(\underline{p_{i_m}}(x,y,z),x,y,z) = y.$$

Zwei Kongruenzrelationen Θ und ψ der Algebra $\underline{A}$ heißen vertauschbar (genauer 2-vertauschbar), wenn $\Theta \circ \psi = \psi \circ \Theta$ gilt ($\circ$ Relationenprodukt).
Sind Θ und ψ vertauschbare Kongruenzrelationen der Algebra $\underline{A}$, so ist auch ihr Produkt eine Kongruenzrelation von $\underline{A}$. In diesem Falle gilt $\Theta \cup \psi = \psi \circ \Theta$.
Eine Verallgemeinerung der Vertauschbarkeit ist die n-Vertauschbarkeit. Zwei Kongruenzen Θ_o und Θ_1 heißen n-vertauschbar, wenn

$$\Theta_o \circ \Theta_1 \circ \Theta_o \circ \ldots \circ \Theta_\varepsilon \subseteq \Theta_1 \circ \Theta_o \circ \Theta_1 \circ \ldots \circ \Theta_{1-\varepsilon} \text{ gilt}$$

mit $\varepsilon=1$ oder $\varepsilon=0$ in Abhängigkeit davon, ob n gerade oder ungerade ist. Beide Seiten sind dabei n-fache Relationenprodukte.
Eine Algebra heißt n-vertauschbar, wenn zwei beliebige Kongruenzen aus Con($\underline{A}$) n-vertauschbar sind. Entsprechend heißt eine Varietät, die nur aus n-vertauschbaren Algebren besteht, eine n-vertauschbare Varietät. Es ist klar, daß Vertauschbarkeit gerade 2-Vertauschbarkeit ist und daß aus der n-Vertauschbarkeit die (n+1)-Vertauschbarkeit folgt. Eine Mal'cev-Typ-Bedingung für die n-Vertauschbarkeit wurde in /5/ angegeben.
In /9/ wurden für zweielementige Algebren und die von ihnen erzeugten Varietäten folgende Aussagen bewiesen:

Theorem 2.3 (/9/): Sei $\underline{2}$ eine beliebige zweielementige Algebra und V($\underline{2}$) die von $\underline{2}$ erzeugte Varietät.
Dann gelten folgende Aussagen:

1. V($\underline{2}$) ist genau dann 2-vertauschbar, wenn p mit $p(x,y,z) = x+y+z$ Termfunktion von $\underline{2}$ ist.

2. Ist die Varietät V($\underline{2}$) n-vertauschbar, so ist sie 3-vertauschbar.

3. V($\underline{2}$) ist genau dann 3-vertauschbar, aber nicht 2-vertauschbar, wenn entweder r mit $r(x,y,z) = x+xz+xyz$ oder r' mit $r'(x,y,z) = x+y+xy+xyz$ Termfunktionen von $\underline{2}$ sind, p aber keine Termfunktion von $\underline{2}$ ist.

3. Kongruenzregularität der von zweielementigen Algebren erzeugten Varietäten

Wir beweisen zunächst eine einfache Folgerung aus Theorem 2.2:

Korollar 3.1: Sei V eine Varietät. Gibt es dann einen dreistelligen Term $\underline{l}(x,y,z)$ in V mit

$$\underline{l}(x,y,z) = \begin{cases} z, & \text{wenn } x=y, \\ y, & \text{wenn } x=z, \\ x & \text{sonst,} \end{cases}$$

so ist V kongruenzregulär.

Beweis: Für n=1, m=1, $\underline{p_o}(x,y,z) = z$, $\underline{p_1}(x,y,z) = \underline{l}(x,y,z)$, $\underline{q_1}(u,x,y,z) = \underline{l}(u,y,z)$ sind die Voraussetzungen von Theorem 2.2 erfüllt, denn es gilt

$\underline{q_1}(\underline{p_o}(x,y,z),x,y,z) = \underline{l}(z,y,z) = y$ und

$\underline{q_1}(\underline{p_1}(x,y,z),x,y,z) = \underline{q_1}(\underline{l}(x,y,z),x,y,z) = \underline{l}(\underline{r}(x,y,z),y,z) = x$

sowie $\underline{p_1}(x,x,z) = \underline{l}(x,x,z) = z$. ■

Ist $\underline{2}$ eine zweielementige Algebra und $V(\underline{2})$ die von $\underline{2}$ erzeugte Varietät, so gibt es genau eine Termfunktion, die die oben angegebenen Bedingungen erfüllt, nämlich $p(x,y,z) = x+y+z$. Aus Theorem 2.3 folgt dann

Lemma 3.2: Ist die von einer zweielementigen Algebra erzeugte Varietät kongruenzvertauschbar, so ist sie kongruenzregulär.

Es ergibt sich die Frage, ob auch die Umkehrung gilt. Wir zeigen zunächst

Lemma 3.3: Ist die von einer zweielementigen Algebra erzeugte Varietät kongruenzregulär, so ist sie 3-vertauschbar.

Beweis: Hagemann hat in /4/ bewiesen, daß aus der Kongruenzregularität einer Varietät ihre n-Vertauschbarkeit für ein gewisses $n \geq 2$ folgt. Aus Theorem 2.3 würde daraus die Behauptung von Lemma 3.3 folgen. Wir wollen noch einen von Hagemanns Resultat unabhängigen Beweis angeben, der von den Methoden in /9/ Gebrauch macht, die dort für zweielementige Algebren und von ihnen erzeugte Varietäten entwickelt **wurden.**

Ist $V(\underline{2})$ regulär, so gibt es nach Theorem 2.2 wenigstens eine dreistellige Termfunktion p_i in $\underline{2}$ mit $p_i(x,x,z) = z$, die keine Projektion ist, da wir anderenfalls $q_1(z,x,y,z) = x$, $q_{k-1}(z,x,y,z) = q_k(z,x,y,z)$ für $2 \leq k \leq m$ und daher $q_m(z,x,y,z) = z$, aber $q_m(z,x,y,z) = y$ hätten.

Durch $p_i(x,x,z) = z$ ist p_i für alle Tripel außer für (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0) und (1,0,1) festgelegt. Es gibt also für p_i 16 Möglichkeiten, von denen wir die Projektion, die durch Vertauschen von x und y entstehenden Funktionen und die dualen Funktionen weglassen. Damit verbleiben genau die folgenden Fälle:

1. $p_i^1 = x+y+z = p$,

2. $p_i^2 = z+xz+yz$,

3. $p_i^3 = z+yz+xyz$,

4. $p_i^4 = x+z+xy+yz+xz$,

5. $p_i^5 = x+z+xy+yz+xz$,

6. $p_i^6 = x+z+xy$.

Im ersten Fall erhalten wir die 3-Vertauschbarkeit von $V(\underline{2})$ aus Theorem 2.3. Aus p_i^2 erhält man durch Superposition vermöge $p_i^2(p_i^2(x,y,z),z,x) = x+x(z+xz+yz)+xz = x+xz+xyz$ die Funktion r. Aus p_i^3 erhält man, wenn man x in z, z in y und y in x überführt, ebenfalls r. Aus p_i^4 ergibt sich durch Superposition $p_i^4(p_i^4(y,x,z),y,p_i^4(x,z,y)) = p(x,y,z)$. Aus p_i^5 ergibt sich ebenfalls p durch $p_i^5(p_i^5(x,z,y),x,p_i^5(x,y,z)) = p(x,y,z)$. Aus p_i^6 erhalten wir durch Superposition vermöge $p_i^6(p_i^6(x,y,z),y,y)$ $= p_i^6(x,y,z)+y+p_i^6(x,y,z)y = x+y+z+xy+yz$ und weiter $p_i^6(p_i^6(p_i^6,y,y),x,p_i^6(p_i^6,y,y)) = x+xz+xyz$ die Funktion r.

Damit erhält man in den aufgeführten Fällen p oder r als Termfunktion. Berücksichtigt man noch diejenigen Booleschen Funktionen, die durch Vertauschen von x und y entstehen, so ändert sich nichts an den geführten Überlegungen. Durch Einbeziehung der dualen Funktionen kann außer p und r noch die zu r duale Funktion r' mit $r'(x,y,z) = x+y+xy+yz+xyz$ auftreten. Nach Theorem 2.3 ist $V(\underline{2})$ damit 3-vertauschbar. ■

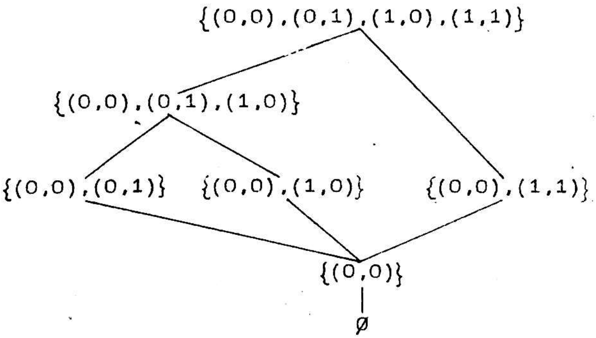
Als nächstes ist zu überprüfen, ob eine Varietät, die 3-vertauschbar, aber nicht 2-vertauschbar ist, kongruenzregulär sein kann. Dazu beweisen wir

Lemma 3.4: Ist die von einer zweielementigen Algebra $\underline{2}$ erzeugte Varietät $V(\underline{2})$ 3-vertauschbar, aber nicht 2-vertauschbar, so ist sie nicht kongruenzregulär.

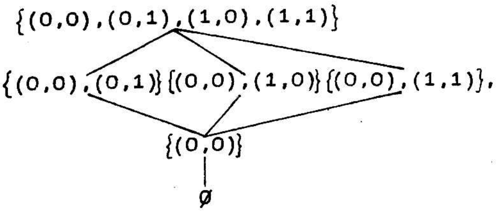
Beweis: Nach Theorem 2.3 ist zu zeigen: Wenn r (r') Termfuntion von $\underline{2}$, p aber keine Termfunktion von $\underline{2}$ ist, so ist $V(\underline{2})$ nicht kongruenzregulär. Es genügt, alle Überlegungen für r durchzuführen. Ist r' Termfunktion von $\underline{2}$, p aber nicht, so verlaufen die Betrachtungen analog.
Wir untersuchen die zweielementige Algebra $\underline{F_8^2}$ mit $T(\underline{F_8^2}) = \mathrm{Pol}(\{(0,0),(0,1),(1,0)\})$, F sei ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Pol}(\{(0,0),(0,1),(1,0)\})$. $V(\underline{F_8^2})$ ist 3-vertauschbar, aber nicht 2-vertauschbar, denn $p \notin \mathrm{Pol}(\{(0,0),(0,1),(1,0)\})$ ist sofort klar, außerdem gilt $t(x,y) = x\bar{y} \in \mathrm{Pol}(\{(0,0),(0,1),(1,0)\})$ und damit $r(x,y,z) = t(x,t(z,y)) \in \mathrm{Pol}(\{(0,0),(0,1),(1,0)\})$.
Die Varietät $V(\underline{F_8^2})$ ist nicht kongruenzregulär. Dazu betrachten wir die als Teilalgebra von $(\underline{F_8^2})^2$ zu $V(\underline{F_8^2})$ gehörende Algebra $(\{(0,0),(0,1),(1,0)\};F)$. Diese Algebra kann nicht einfach sein, denn sonst wäre sie subdirekt irreduzibel.
Da $m \in \mathrm{Pol}(\{(0,0),(0,1),(1,0)\})$ mit $m(x,y,z) = xy \vee xz \vee yz$ gilt und m die Identitäten $m(x,x,y) = m(x,y,x) = m(y,x,x) = x$ erfüllt, haben wir nach dem im 2. Abschnitt zitierten Theorem von B. Jónsson $V(\underline{F_8^2}) = \mathbb{I}\mathbb{P}_s\underline{F_8^2}$, d. h., $\underline{F_8^2}$ ist die einzige subdirekt irreduzible Algebra in $V(\underline{F_8^2})$. Da die dreielementige Algebra $(\{(0,0),(0,1),(1,0)\};F)$ nicht einfach ist, kann sie nicht regulär sein.

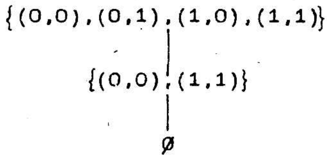
Sei $\underline{2}$ nun eine beliebige zweielementige Algebra, die eine 3-vertauschbare, aber nicht 2-vertauschbare Varietät $V(\underline{2})$ er-

zeugt. Wir zeigen, daß $T(\underline{2}) \subseteq Pol(\{(0,0),(0,1),(1,0)\})$ gilt, indem wir beweisen, daß $Pol(\{(0,0),(0,1),(1,0)\})$ maximal bezüglich der Eigenschaft, r aber nicht p zu enthalten, ist. Dazu ist zu zeigen, daß für beliebige Boolesche Funktionen f mit $f \notin Pol(\{(0,0),(0,1),(1,0)\})$ stets
$p \in \langle\{f\} \cup Pol(\{(0,0),(0,1),(1,0)\})\rangle$ gilt, wobei $\langle\,\rangle$ den Superpositionsabschluß kennzeichnet.
Die Klasse $\langle\{f\} \cup Pol(\{(0,0),(0,1),(1,0)\})\rangle$ ist Termfunktionsklasse einer zweielementigen Algebra $\underline{2}^{*}$. Da m mit
$m(x,y,z) = xy \vee yz \vee xz$ Termfunktion von $\underline{F_8^2}$ ist, können wir Theorem 2.1 anwenden, welches besagt, daß eine Funktion genau dann Termfunktion von $\underline{F_8^2}$ ist, wenn sie alle Teilalgebren von $(\underline{F_8^2})^2$ bewahrt. Der Teilalgebrenverband von $(\underline{F_8^2})^2$ hat die folgende Form:



Für eine zweielementige Algebra $\underline{2}^{*}$ mit $Pol(\{(0,0),(0,1),(1,0)\}) \subset T(\underline{2}^{*})$ hat $\underline{2}^{*2}$ genau einen der folgenden Teilverbände:





In beiden Fällen gilt $p \in T(\underline{2}^{*})$.

Für jede zweielementige Algebra $\underline{2}$ mit $T(\underline{2}) \subseteq Pol(\{(0,0),(0,1),(1,0)\})$ hat $\underline{2}^2$ eine dreielementige Teilalgebra mit der Trägermenge $\{(0,0),(0,1),(1,0)\}$, die nichttriviale Kongruenzen besitzt. Daraus folgt, daß die von einer solchen Algebra erzeugte Varietät nicht kongruenzregulär sein kann. ■

Aus Lemma 3.2, Lemma 3.3 und Lemma 3.4 ergibt sich

Theorem 3.5: Sei $\underline{2}$ eine zweielementige Algebra und $V(\underline{2})$ die von $\underline{2}$ erzeugte Varietät. Dann ist $V(\underline{2})$ genau dann kongruenzvertauschbar (2-vertauschbar), wenn sie kongruenzregulär ist.

Dieser Zusammenhang stellt für Varietäten, die von zweielementigen Algebren erzeugt werden, durchaus eine Besonderheit dar. Valutse hat in /12/ ein Beispiel für eine endliche Algebra mit regulären, aber nicht vertauschbaren Kongruenzen konstruiert.

Mit Hilfe des Theorems 3.5 erhalten wir, ausgehend von den Postschen Resultaten, einen Überblick über alle zweielementigen Algebren, die kongruenzreguläre Varietäten erzeugen. In der Postschen Bezeichnungsweise sind das die Algebren $\underline{L_n}(n=1,\ldots,5)$, $\underline{C_n}(n=1,\ldots,4)$, $\underline{D_1}$ und $\underline{D_3}$.

4. p-determinierte Kongruenzen

In diesem Abschnitt soll die Kongruenzregularität von Varietäten, die von einer zweielementigen Algebra erzeugt werden, noch etwas eingehender untersucht werden. Dazu gehen wir von dem Begriff der p-determinierten Kongruenz aus, der von Słominski in /11/ eingeführt wurde (vgl. auch /10/). Ausgangspunkt der Untersuchungen von Słominski ist die Feststellung, daß die Form einer Kongruenz in Gruppen, Ringen und Booleschen Algebren schon durch eine Kongruenzklasse eindeutig bestimmt ist, nämlich durch einen Normalteiler, ein Ideal bzw. ein Boolesches Ideal, d. h. durch die Kongruenzklasse des Einselementes bzw. des Nullelementes. Faßt man Gruppen, Ringe und Boolesche Algebren als universale Algebren $\underline{G} = (G;\cdot,{}^{-1})$, $\underline{R} = (R;+,-,\cdot)$, $\underline{B} = (B;\cap,\cup,')$ auf, so gilt für Kongruenzen Θ

in Gruppen: $x \equiv y(\Theta) \Longleftrightarrow x.y^{-1} \in N \Longleftrightarrow x.y^{-1} \equiv x.x^{-1} = e(\Theta)$,
wobei N ein Normalteiler und e das Einselement in $\underline{G}$ ist,

in Ringen: $x \equiv y(\Theta) \Longleftrightarrow x+(-y) \in I \Longleftrightarrow x+(-y) \equiv x+(-x) = O(\Theta)$,
wobei I ein Ideal und O das Nullelement in $\underline{R}$ ist,

in Booleschen Algebren: $x \equiv y(\Theta) \Longleftrightarrow x \cap y' \cup x' \cap y \in J$
$\Longleftrightarrow x \cap y' \cup x' \cap y \equiv x \cap x' \cup x' \cap x = O^{*}(\Theta)$,
wobei J ein Boolesches Ideal und O^{*} Boolesches Nullelement in $\underline{B}$ ist.

In allen diesen Fällen gibt es also einen Term $\underline{\varphi}(x,y)$ mit der folgenden Eigenschaft: Es gibt ein Element c in der Trägermenge A der betreffenden Algebra, so daß für alle a,b $\in$ A gilt: $a \equiv b(\Theta) \Longleftrightarrow \varphi(a,b) \equiv \varphi(c,c)(\Theta)$ (dabei ist φ die dem Term $\underline{\varphi}(x,y)$ aus $V(\underline{A})$ entsprechende Termfunktion der Algebra $\underline{A}$).
Dieser Sachverhalt soll nun auf Kongruenzen, deren Form durch einen ternären Term bestimmt ist, verallgemeinert werden. Sei $\underline{A} = (A;F)$ eine universale Algebra und $\underline{p}(x,y,z)$ ein ternärer Term aus $V(\underline{A})$. Dann heißt $\Theta \in Con(\underline{A})$ eine bezüglich c p-determinierte Kongruenz, wenn es ein Element c in $\underline{A}$ gibt, so daß für alle a,b $\in$ A gilt: $a \equiv b(\Theta) \Longleftrightarrow p(a,b,c) \equiv p(c,c,c)(\Theta)$.
Für p-determinierte Kongruenzen besteht der folgende Satz:

<u>Theorem 4.1:</u> Sei $\underline{A} = (A;F)$ eine Algebra, $\underline{p}(x,y,z)$ **ein Term** von $V(\underline{A})$ und $c \in A$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:
(i) Θ ist eine bezüglich $c \in A$ p-determinierte Kongruenz,
(ii) $a \equiv b(\Theta) \Longleftrightarrow \forall d \in A\ (p(a,b,c) \equiv p(d,d,c)(\Theta))$,
(iii) $\exists \Theta$-Klasse $N_c(a \equiv b(\Theta) \Longleftrightarrow p(a,b,c) \in N_c)$.

<u>Beweis:</u> (i) $\Longrightarrow$ (ii): Aus $d \equiv d(\Theta)$ für beliebige $d \in A$ folgt nach (i) $p(d,d,c) \equiv p(c,c,c)(\Theta)$. Daher gilt $a \equiv b(\Theta) \Longleftrightarrow p(a,b,c) \equiv p(d,d,c)(\Theta)$ für alle $d \in A$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): N_c sei diejenige Θ-Klasse, die die Elemente $p(d,d,c)$, $d \in A$, enthält. Die Beziehung $a \equiv b(\Theta)$ besteht nach (ii) genau dann, wenn für alle $d \in A$ $p(a,b,c) \equiv p(d,d,c)\ (\Theta)$, d. h., wenn $p(a,b,c) \in N_c$ ist.
(iii) $\Longrightarrow$ (i): Es ist klar, daß $p(c,c,c) \in N_c$ und somit $a \equiv b(\Theta) \Longleftrightarrow p(a,b,c) \equiv p(c,c,c)(\Theta)$ gilt. ■

Theorem 4.2: Der Term $\underline{p}(x,y,z)$ aus $V(\underline{A})$ determiniert alle Kongruenzen der Algebra $\underline{A} = (A;F)$ genau dann bezüglich c, wenn es für jedes Paar $a,b \in A$ ein $c \in A$ so gibt, daß

(i) $p(a,a,c) = p(b,b,c)$,

(ii) $a \equiv b(\Theta_{(p(a,b,c),p(a,a,c))})$ ist.

Beweis: Der Term $\underline{p}(x,y,z)$ möge alle Kongruenzen von $\underline{A}$ bezüglich $c \in A$ determinieren, also auch die Nullkongruenz $\omega \in Con(\underline{A})$. Aus $a \equiv a(\omega)$ für beliebiges $a \in A$ folgt nach Theorem 4.1(ii) $p(a,a,c) \equiv p(b,b,c)(\omega)$ für alle $b \in A$, d. h. $p(a,a,c) = p(b,b,c)$. Die Kongruenz $\Theta_{(p(a,b,c),p(a,a,c))}$ ist ebenfalls bezüglich c p-determiniert, so daß aus $p(a,b,c) \equiv p(a,a,c)(\Theta_{(p(a,b,c),p(a,a,c))})$ auch $a \equiv b(\Theta_{(p(a,b,c),p(a,a,c))})$ folgt.
Jetzt nehmen wir an, daß (i) und (ii) erfüllt sind und daß $\Theta \in Con(\underline{A})$ eine beliebige Kongruenz von $\underline{A}$ ist. Gilt $a \equiv b(\Theta)$, so folgt $p(a,b,c) \equiv p(a,a,c)(\Theta)$ aus $a \equiv a(\Theta)$, $b \equiv a(\Theta)$ und $c \equiv c(\Theta)$. Ist umgekehrt $p(a,b,c) \equiv p(a,a,c)(\Theta)$, so folgt wegen $\Theta_{(p(a,b,c),p(a,a,c))} \subseteq \Theta$ auf Grund von (ii) auch $a \equiv b(\Theta)$. Nach (i) ist $p(a,a,c) = p(c,c,c)$, d. h., es gilt $a \equiv b(\Theta) \Longleftrightarrow p(a,b,c) \equiv p(c,c,c)(\Theta)$, und Θ ist eine bezüglich $c \in A$ p-determinierte Kongruenz. ■

Eine Teilmenge N_c von A heißt p-normal bezüglich $c \in A$, wenn sie für eine bezüglich $c \in A$ p-determinierte Kongruenz Θ von $\underline{A}$ mit der Kongruenzklasse der Elemente $p(x,x,c)$ $(x \in A)$ übereinstimmt. In /11/ wurde näher ausgeführt, daß im Falle der durch einen zweistelligen Term determinierten Kongruenzen die Eigenschaften der p-normalen Teilmengen denen der Normalteiler in Gruppen ähneln. Das läßt sich auf den hier betrachteten Fall teilweise verallgemeinern.

Wenden wir uns nun wieder den zweielementigen Algebren und den von ihnen erzeugten Varietäten zu. Sei $\underline{2}$ eine zweielementige Algebra und $V(\underline{2})$ die von $\underline{2}$ erzeugte Varietät. Aus Theorem 3.5 folgt, daß $V(\underline{2})$ genau dann kongruenzregulär ist, wenn $p(x,y,z) = x+y+z$ Termfunktion von $\underline{2}$ ist. In einer kongruenzregulären Varietät $V(\underline{2})$ sind daher die folgenden Identitäten erfüllt:

(i) $x+y+y = x$,

(ii) $x+y+z = y+x+z$,

(iii) $x+y+z = x+z+y$,

(iv) $x+y+(z+u+v) = (x+y+z)+u+v$.

Sei $\underline{A} = (A;F)$ eine Algebra aus einer kongruenzregulären Varietät $V(\underline{2})$ und $c \in A$. Wir sehen sofort, daß für $a,b \in A$ stets $a+a+c = b+b+c$ gilt. Es ist auch $a+b+c \equiv a+a+c(\Theta_{(a+b+c,a+a+c)})$. Daraus folgt $(a+b+c)+a+c \equiv (a+a+c)+a+c(\Theta_{(a+b+c,a+a+c)})$. Aus (iv) folgt dann weiter $a+b+(c+a+c) \equiv a+a+(c+a+c)(\Theta_{(a+b+c,a+a+c)})$. Die Beziehungen (ii), (iii) und (i) ergeben $b \equiv a(\Theta_{(a+b+c,a+a+c)})$; damit sind die Bedingungen aus Theorem 4.2 erfüllt, und $p(x,y,z) = x+y+z$ determiniert alle Kongruenzen einer beliebigen Algebra aus einer kongruenzregulären Varietät $V(\underline{2})$ bezüglich irgendeines Elementes $c \in A$. Sind umgekehrt alle Kongruenzen einer beliebigen Algebra $\underline{A}$ aus $V(\underline{2})$ p-determiniert bezüglich eines Elementes $c \in A$, so ist $V(\underline{2})$ kongruenzregulär. Damit haben wir folgendes Theorem bewiesen:

<u>Theorem 4.3:</u> Sei $\underline{2}$ eine zweielementige Algebra und $V(\underline{2})$ die von $\underline{2}$ erzeugte Varietät. Dann ist $V(\underline{2})$ genau dann kongruenzregulär, wenn alle Kongruenzen einer beliebigen Algebra $\underline{A} \in V(\underline{2})$ bezüglich eines beliebigen Elementes $c \in A$ p-determiniert sind mit $\underline{p}(x,y,z) = x+y+z$.

<u>Bemerkung:</u> Ein wesentlicher Unterschied zwischen dem hier eingeführten Begriff der p-determinierten Kongruenz und dem von Słominski eingeführten besteht darin, daß durch Słominskis Terme $\varphi(x,y)$ gleichungsdefinierte konstante Elemente entstehen, während sich die p-Determiniertheit in unserem Sinne für unterschiedliche Algebren der betrachteten Varietät auf unterschiedliche Elemente bezieht.

<u>5. Anwendung der Ergebnisse auf andere Varietäten</u>

Um die Ergebnisse auf Varietäten, die nicht von zweielementigen Algebren erzeugt werden, zu übertragen, soll von der kategorientheoretischen Äquivalenz von Varietäten Gebrauch gemacht werden. Seien $\mathbb{L}$ und $\mathbb{K}$ Varietäten. Dann sind $\mathbb{L}$ und $\mathbb{K}$ als

Kategorien äquivalent, wenn es Funktoren $G:\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{L}$ und $H:\mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{K}$ und für jedes $\underline{A} \in \mathbb{K}$ und $\underline{B} \in \mathbb{L}$ Isomorphismen $\alpha_A:\underline{A} \longrightarrow HG(\underline{A})$ und $\beta_B:\underline{B} \longrightarrow GH(\underline{B})$ so gibt, daß für jedes $g:\underline{A} \longrightarrow \underline{A}'$ in $\mathbb{K}$ und für jedes $h:\underline{B} \longrightarrow \underline{B}'$ in $\mathbb{L}$ die folgenden Diagramme kommutativ sind:

$$
\begin{tikzcd}
\underline{A} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha_A"'] & \underline{A}' \arrow[d, "\alpha_{A'}"] \\
HG(\underline{A}) \arrow[r, "HG(g)"'] & HG(\underline{A}')
\end{tikzcd}
,\qquad
\begin{tikzcd}
\underline{B} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\beta_B"'] & \underline{B}' \arrow[d, "\beta_{B'}"] \\
GH(\underline{B}) \arrow[r, "GH(h)"'] & GH(\underline{B}')
\end{tikzcd}
.
$$

Es ergibt sich die Frage, welche Eigenschaften einer Varietät sich auf eine äquivalente Varietät übertragen. Darauf gibt folgendes Theorem teilweise eine Antwort.

<u>Theorem 5.1 (/2/):</u> Seien $\mathbb{L}$ und $\mathbb{K}$ Varietäten, die als Kategorien äquivalent sind durch die Funktoren $G:\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{L}$ und $H:\mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{K}$.

(1) Wenn $\underline{A} \in \mathbb{L}$ eine endliche Algebra ist, so ist auch $H(\underline{A})$ eine endliche Algebra.

(2) Wenn $\mathbb{L}$ die durch eine Algebra $\underline{A}$ erzeugte Varietät ist, so ist $\mathbb{K}$ die durch $H(\underline{A})$ erzeugte Varietät.

(3) Wenn $\mathbb{L}$ und $\mathbb{K}$ Varietäten sind und $\mathbb{L}$ eine Mal'cev-Typ-Bedingung ohne Komposition von Termen erfüllt, so erfüllt $\mathbb{K}$ dieselbe Bedingung.

Sei $V(\underline{2})$ die von einer zweielementigen Algebra erzeugte Varietät und $\mathbb{K}$ eine Varietät, die als Kategorie äquivalent zu $V(\underline{2})$ ist. In 3. wurde festgestellt, daß für $V(\underline{2})$ folgende Bedingungen äquivalent sind:

(i) $V(\underline{2})$ ist kongruenzvertauschbar,

(ii) $V(\underline{2})$ ist kongruenzregulär,

(iii) es gibt einen Term $\underline{p}(x,y,z)$ in $V(\underline{2})$, der die Identitäten $\underline{p}(x,y,z) = \underline{p}(x,y,x) = \underline{p}(y,x,x) = y$ erfüllt.

Nach Theorem 5.1 (3) sind dann für $\mathbb{K}$ ebenfalls (i), (ii) und (iii) erfüllt und untereinander äquivalent.

Als Beispiel soll die zweielementige Algebra $\underline{D_3} = (\{0,1\};x+y+z, xy \vee yz \vee xz)$ untersucht werden. Dann ist $T(\underline{D_3})$ die Klasse aller selbstdualen Booleschen Funktionen, $V(\underline{D_3})$ ist kongruenzvertauschbar (und daher auch kongruenzregulär). Weiter betrachten wir eine endliche Algebra $\underline{A_s}$ mit $T(\underline{A_s}) = \mathrm{Pol}\ s_2^{*}$, wobei s_2 eine Permutation auf der Trägermenge A von $\underline{A_s}$ ohne invariante Elemente mit Zyklen der gleichen Länge 2 ist und s_2^{*} die zugehörige binäre Relation $s_2^{*} = \{(a,s_2(a)) | a \in A\}$ bezeichnet. In /3/ wurde gezeigt, daß $V(\underline{A_s})$ als Kategorie äquivalent zu $V(\underline{D_3})$ ist. Nach Theorem 5.1(3) ist (iii) erfüllt und damit zu (i) und (ii) äquivalent.

<u>Literatur</u>

/1/ Baker, K. A., and Pixley, A. F.: Polynomial interpolation and the Chinese Remainder Theorem for algebraic systems. Math. Z. <u>143</u>, 165 - 174 (1975)

/2/ Davey, B. A., and Werner, H.: Dualities and equivalences for varieties of algebras. In: Huhn, A. P., and Schmidt, E. T. (Eds.): Contributions to lattice theory. Colloq. Math. Soc. János Bolyai <u>33</u>, 101 - 275, Amsterdam 1983

/3/ Denecke, K.: Varieties generated by two-element majority algebras and their equivalences. Beiträge Algebra und Geometrie <u>21</u>, 35 - 56 (1986)

/4/ Hagemann, J.: On regular and weakly regular congruences. Preprint 1973

/5/ Hagemann, J., and Mitschke, A.: On n-permutable congruences. Algebra Universalis <u>3</u>, 8 - 12 (1973)

/6/ Jablonski, S. W., Gawrilow, G. P., und Kudrjawzew, W. B.: Boolesche Funktionen und Postsche Klassen. Berlin 1970

/7/ Jónsson, B.: Algebras whose congruence lattices are distributive. Math. Scand. 21, 110 - 121 (1967)

/8/ Post, E. L.: Two-valued iterative systems of mathematical logic. Princeton 1941

/9/ Reschke, M., Lüders, O., und Denecke, K.: Kongruenzdistributivität, Kongruenzvertauschbarkeit und Kongruenzmodularität zweielementiger Algebren. Preprint 1986

/10/ Schmidt, E. T.: Kongruenzrelationen Algebraischer Strukturen. Berlin 1969

/11/ Słominski, J.: On the determining of the form of congruences in abstract algebras with equationally definable constant elements. Fund. Math. XLVIII, 325-341 (1960)

/12/ Valutse, I. I.: Universal algebras with regular but not permutable congruences (in Russian). Uspechi Mat. Nauk 18 (3), 145 - 148 (1963)

/13/ Wille, R.: Kongruenzklassengeometrien. Lecture Notes in Math. 113, Berlin 1970

eingegangen: 05. 01. 1987

Verfasser:

Dr. K. Denecke
Pädagogische Hochschule
"Karl Liebknecht" Potsdam
Sektion Mathematik/Physik
Am Neuen Palais
Potsdam
DDR-1500

Rostock. Math. Kolloq. 33, 23 - 48 (1988) 03G20
08A40

Dietlinde Lau

Über partielle Funktionenalgebren

Sei $k \geq 2$ und $E_k = \{0,1,\ldots,k-1\}$. In Verallgemeinerung der Funktionenalgebra $(P_k, \zeta, \tau, \Delta, \nabla, *)$ (siehe z. B. /9/) sollen hier die beiden Algebren

$$\underline{\tilde{P}}_k := (\tilde{P}_k, \zeta, \tau, \Delta, \nabla, \circledast) \quad (/2/, /3/, /8/, /10/)$$

und

$$\underline{P}_{k,L} := (P_{k,L}, \zeta, \tau, \Delta, \nabla, \boxed{*}) \text{ für } L > k$$

untersucht werden, mit

$$\tilde{P}_k := \bigcup_{n \geq 1} \{f^n \mid f^n : E_k^n \to E_k \cup \{\blacktriangle\}\},$$

$$P_{k,L} := \bigcup_{n \geq 1} \{f^n \mid f^n : E_k^n \to E_L\},$$

wobei die Operationen ζ, τ, Δ, ∇ analog zu denen auf P_k definiert sind (/8/ bzw. /9/) und

$$(f^n \circledast g^m)(x_1,\ldots,x_{n+m-1}) := \begin{cases} f(g(x_1,\ldots,x_m), x_{m+1},\ldots,x_{n+m-1}), \\ \qquad \text{falls } g(x_1,\ldots,x_m) \in E_k, \\ \blacktriangle \quad \text{sonst} \end{cases}$$

für $f, g \in \tilde{P}_k$ sowie

$$f \boxed{*} g := \begin{cases} f * g, & \text{falls } g \in P_k, \\ f & \text{sonst} \end{cases}$$

für $f, g \in P_{k,L}$ festgelegt sei.

Die Algebren $\underline{\tilde{P}}_k$ und $\underline{P}_{k,k+1}$ können als Modelle zweier möglicher Funktionenalgebren über partiellen Funktionen verstanden werden, wobei $f(a_1,\ldots,a_n) = \blacktriangle$ bzw. $f(a_1,\ldots,a_n) = k$ für "$f(a_1,\ldots,a_n)$ ist auf $(a_1,\ldots,a_n)$ nicht definiert" steht und in denen Einsetzen von echten partiellen Funktionen in andere erlaubt bzw. verboten ist. Die Festlegung $f \boxed{*} g = f$ für

$g \in P_{k,L} \setminus P_k$ hat hier nur den Sinn, $\boxed{*}$ für alle $f,g \in P_{k,L}$ zu definieren. Nach der Einführung weiterer Begriffe und Bezeichnungen wird hier zunächst gezeigt, daß die Anzahl der maximalen Klassen von $\tilde{P}_k$ mit denen von $P_{k,L}$ übereinstimmt und – bis auf eine Ausnahme – die maximalen Klassen von $P_{k,L}$ durch die gleichen Relationen wie die maximalen Klassen von $\tilde{P}_k$ beschreibbar sind, womit sich aus bekannten Resultaten über $\tilde{P}_k$ solche für $P_{k,L}$ ergeben und umgekehrt. Anschließend werden für die 6 (bzw. 5) endlich erzeugten maximalen Klassen von $\tilde{P}_2$ (bzw. $P_{2,3}$) die in ihnen maximalen abgeschlossenen Mengen – die sogenannten submaximalen Klassen von $\tilde{P}_2$ (bzw. $P_{2,3}$) – bestimmt.

1. Grundbegriffe und Bezeichnungen

Als bekannt seien nachfolgend /5/ und /9/ vorausgesetzt. Nur die hier etwas abgeänderten bzw. in diesen Arbeiten nicht definierten Begriffe und Bezeichnungen sollen im folgenden kurz angegeben werden.

Es bezeichne P_k^n die Menge aller n-stelligen Funktionen f^n über E_k, und es sei $P_k := \bigcup_{n \geq 1} P_k^n$. Falls die Stellenzahl der Funktion $f \in \tilde{P}_k \cup P_{k,L}$ aus dem Zusammenhang ersichtlich ist, schreiben wir nur f. Den Wertebereich von f kürzen wir mit W(f) ab.

Die durch $e_i^n(x_1,\dots,x_n) = x_i$ bzw. $c_a^n(x_1,\dots,x_n) = a$ $(a \in E_L \cup \{\blacktriangle\})$ definierten Funktionen e_i^n bzw. c_a^n aus $\tilde{P}_k \cup P_{k,L}$ heißen <u>Projektionen</u> bzw. <u>Konstanten</u>. Zur Beschreibung der Booleschen Funktionen (der Funktionen aus P_2) verwenden wir die üblichen Symbole $\vee$, $\wedge$ (oder $\cdot$), $+$, $-$. Nachfolgend steht P für ein Element aus $\{\tilde{P}_k, P_{k,L}\}$. Die Menge aller Funktionen, die aus Funktionen einer Menge A ($\subseteq$ P) mit Hilfe der auf P definierten Operationen in endlich vielen Schritten erhalten werden können, wird <u>Abschluß</u> von A genannt und mit [A] bezeichnet. Ist A = [A], so heißt A ($\subseteq$ P) abgeschlossene (Teil-)Menge von P bzw. <u>Teilklasse</u> von P. Eine echte Teilklasse A' von A nennt man <u>maximale Klasse</u> von A, wenn für alle $f \in A \setminus A'$ stets $[A' \cup \{f\}] = A$ gilt. Eine Menge B ($\subseteq$ A) heißt <u>vollständig</u> in A, wenn [B] = A gilt.

Das kleinste r mit $[A^r] = A$ wird <u>Ordnung</u> von A genannt und mit ord A bezeichnet ($A^r := P^r \cap A$).

Zur Beschreibung von abgeschlossenen Teilmengen von P_k verwendet man oft h-stellige (h-äre) Relationen, $h \geq 1$, über E_k, d. h. Teilmengen von E_k^h, deren Elemente $(a_1,\ldots,a_n)$ wir hier zumeist als Spalten

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_h \end{pmatrix}$$

aufschreiben werden und die Relation selbst in Form einer Matrix, deren Spalten die Elemente der Relation sind. Entsprechendes sei hier für h-stellige Relationen über E_L bzw. $E_k \cup \{\blacktriangle\}$ vereinbart. Wir sagen, eine h-äre Relation ϱ über E_L (bzw. $E_k \cup \{\blacktriangle\}$) wird von einer Funktion $f^n \in P_{k,L}$ (bzw. $\tilde{P}_k$) <u>bewahrt</u>, wenn für alle $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \varrho \cap E_k^h$ (bzw. $r_1,\ldots,r_n \in \varrho$) mit $r_i := (r_{1i},\ldots,r_{hi})$, $i = 1,2,\ldots,n$ stets

$$f(r_1,\ldots,r_n) := \begin{pmatrix} f(r_{11},\ldots,r_{1n}) \\ f(r_{21},\ldots,r_{2n}) \\ \vdots \\ f(r_{h1},\ldots,r_{hn}) \end{pmatrix} \in \varrho$$

gilt, wobei für $\underline{a} \in (E_k \cup \{\blacktriangle\})^n \setminus E_k^n$ noch $f(\underline{a}) = \blacktriangle$ festgelegt sei.

Die Menge aller Funktionen aus P, die die Relation ϱ bewahren, sei mit $\mathrm{Pol}_P\, \varrho$ bzw. nur mit $\mathrm{Pol}\, \varrho$ bezeichnet.

Für eine Relation $\varrho' \subseteq E_k^h$ schreiben wir anstelle von

$\mathrm{Pol}_{P_{k,L}}(\varrho' \cup (E_L^h \setminus E_k^h))$ (bzw. $\mathrm{Pol}_{\tilde{P}_k}(\varrho' \cup ((E_k \cup \{\blacktriangle\})^h \setminus E_k^h)))$ nur

$\mathrm{POL}_{P_{k,L}}\, \varrho'$ (bzw. $\mathrm{POL}_{\tilde{P}_k}\, \varrho'$) oder noch kürzer $\mathrm{POL}\, \varrho'$.

$\mathrm{Pol}_{P_k}\, \varrho'$ steht für $P_k \cap \mathrm{Pol}\, \varrho'$. Die Mengen $\mathrm{Pol}_P\, \varrho$ und $\mathrm{POL}\, \varrho'$ sind offenbar abgeschlossen.

Mit R_k^h bezeichnen wir die Menge aller h-ären Relationen über E_k, und es sei $R_k := \bigcup_{h\geq 1} R_k^h$. Spezielle hier verwendete Bezeichnungen für Relationen sind außerdem

$$\iota_k^h := \{(a_1,\ldots,a_h) \in E_k^h \mid \exists i,j: i \neq j \wedge a_i = a_j\},$$

$$\lambda_k := \{(a,a,b,b),\ (a,b,a,b),\ (a,b,b,a) \mid a,b \in E_k\}$$

und

$$G_n(A) := \{(f(0,\ldots,0),\ f(0,\ldots,1),\ldots,\ f(k-1,\ldots,k-1)) \mid f \in A^n\}$$

("n-te Graphik der Menge $A \subseteq P_k$", siehe /7/, S. 49). Analog zu $G_n(A)$ für $A \subseteq P_k$ sei $G_n(A)$ für $A \subseteq P$ definiert.

Anstelle von $(x_1,\ldots,x_n)$, $(0,0,\ldots,0)$, $(1,1,\ldots,1)$ schreiben wir auch $\underline{x}$, $\underline{0}$, $\underline{1}$.

Mit φ bezeichnen wir die bijektive Abbildung von $P_{k,k+1}$ auf $\tilde{P}_k$ mit

$$(\varphi(f))(\underline{x}) = \begin{cases} f(\underline{x}), & \text{falls } f(\underline{x}) \in E_k, \\ \blacktriangle & \text{sonst} \end{cases}$$

$(f \in P_{k,k+1})$. Außerdem sei $\varphi(A) := \{\varphi(f) \mid f \in A\}$ für $A \subseteq P_{k,k+1}$. Die maximalen Klassen von P_2 (/4/) bezeichnen wir folgendermaßen:

$T_a := \mathrm{Pol}_{P_2}(a)$ $(a \in E_2)$, $M := \mathrm{Pol}_{P_2}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$, $S := \mathrm{Pol}_{P_2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ und

$$L := \mathrm{Pol}_{P_2} \lambda_2 \ \left(= \mathrm{Pol} \begin{pmatrix} 0&0&0&1&1&0&1&1 \\ 0&0&1&1&0&1&0&1 \\ 0&1&0&0&1&1&0&1 \\ 0&1&1&0&0&0&1&1 \end{pmatrix}\right).$$

2. Vollständigkeitskriterien für $P_{k,L}$ $(L > k)$ und $\tilde{P}_k$, einige maximale Klassen von $P_{k,L}$ bzw. $\tilde{P}_k$

Nachfolgend sei stets $L > k$, $P \in \{P_{k,L}, \tilde{P}_k\}$ und

$$\mathcal{P}_P := \begin{cases} \{f \in P_{k,L} \mid |W(f)| \leq L-1\} & \text{für } P = P_{k,L}, \\ P_k \cup [\{c_\blacktriangle\}] & \text{für } P = \tilde{P}_k. \end{cases}$$

Offenbar ist $\mathcal{R}_{P_{k,L}}$ in $P_{k,L}$ und $\mathcal{R}_{\tilde{P}_k}$ in $\tilde{P}_k$ abgeschlossen.

Lemma 1: (a) Für jedes $g \in P \setminus \mathcal{R}_P$ gilt $[P_k \cup \{g\}] = P$.

(b) $\mathcal{R}_P$ ist die einzige maximale Klasse von P, die P_k enthält.

Beweis: Es genügt, (a) zu beweisen.

Sei zunächst $g^m \in P_{k,L} \setminus \mathcal{R}_{P_{k,L}}$. Dann existieren Tupel $\underline{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im})$ mit $g(\underline{a}_i) = i$ $(i \in E_L)$. Sei f^n eine beliebige Funktion aus $P_{k,L}$. Folgende Funktionen gehören zu P_k:

$$f_j(x_1, \dots, x_n) := a_{ij} \text{ für } f(x_1, \dots, x_n) = i$$

$(i \in E_L,\ j = 1,2,\dots,m)$. Folglich gilt

$f(\underline{x}) = g(f_1(\underline{x}), f_2(\underline{x}), \dots, f_m(\underline{x}))$, d. h. $f \in [P_k \cup \{g\}]$.

Falls $h \in \tilde{P}_k \setminus [\{c_\blacktriangle\}]$ ist, gehört die Funktion $h' := \varphi^{-1}(e_2^2 \circledast h)$ zu $P_{k,k+1} \setminus \mathcal{R}_{P_{k,k+1}}$. Damit ergibt sich $[P_k \cup \{h\}] = \tilde{P}_k$ aus dem obigen Beweis für $[P_k \cup \{g\}] = P_{k,k+1}$. □

Analog zu entsprechenden Aussagen über P_k (siehe /11/) beweist man

Lemma 2: Sei A eine maximale Klasse von P mit $A \cap P_k \neq P_k$. Dann gilt: (a) A enthält alle Projektionen,

(b) $$A = \bigcup_{n \geq 1} \{f^n \in P \mid \forall g_1, \dots, g_n \in A^2 \cap P_k : f(g_1, \dots, g_n) \in (A^2 \cap P_k) \cup (P^2 \setminus P_k)\},$$

(c)[1] $A \in \{POL\ \varrho \mid \varrho \in R_k^h \wedge 1 \leq h \leq k^2\}$.

Satz 1: Sei $\varrho \in R_k^h$, $1 \leq h \leq k^2$ und $\mathrm{Pol}_{P_k} \varrho \neq P_k$.

$\mathrm{POL}_{P_{k,L}} \varrho$ ist genau dann in $P_{k,L}$ maximal, wenn $\mathrm{POL}_{\tilde{P}_k} \varrho$ in $\tilde{P}_k$ maximal ist.

---

1 Für $P = \tilde{P}_k$ ist (c) eine Folgerung aus /3/, Theorem 4.

Beweis: Sei $\{P,P'\} = \{\tilde{P}_k, P_{k,L}\}$, $POL\ \varrho$ maximal in P und $Pol_{P_k}\varrho =: A \neq P_k$ (d. h. speziell $A^2 \subset P_k^2$).

Da $Pol_P\varrho$ maximal in P ist, gibt es für jede abgeschlossene Menge A' mit $A \subset A' \subset P_k$ und $A^2 \neq A'^2$ eine Funktion $h \in POL_P\varrho$, die bei Einsetzen gewisser Funktionen aus A'^2 eine Funktion aus $P_k^2 \setminus A'$ liefert. Wäre dies nicht der Fall, so hätten wir $POL_P\varrho \subset POL_P G_2(A') \subset P$, was der Maximalität von $POL_P\varrho$ widerspricht. Die gleiche Eigenschaft besitzt dann auch $POL_{P'}\varrho$. Folglich läßt sich aus $g \in P' \setminus POL_{P'}\varrho$ durch Einsetzen gewisser Funktionen aus $A^2 \subsetneq POL\ \varrho$ eine Funktion $g' \in P_k^2 \setminus A$ konstruieren. Ist $[\{g'\} \cup A] =: A' \neq P_k$, so liefert das Einsetzen von gewissen Funktionen aus A'^2 in eine bestimmte Funktion aus $POL_{P'}\varrho$ eine Funktion $g'' \in P_k^2 \setminus A'$, usw. Folglich gilt $P_k \subsetneq [POL_{P'}\ \varrho \cup \{g\}]$. Zu $POL_{P'}\ \varrho$ gehören Funktionen, die auf Tupeln der Art $(c,c,\ldots,c)$ den Wert c annehmen $(c \in E_k)$ und auf den restlichen Tupeln nur Werte, die nicht zu E_k gehören. Damit folgt aus Lemma 1, daß $POL_{P'}\varrho \cup \{g\}$ in P' vollständig ist, d. h., $POL_{P'}\varrho$ ist maximal in P', wenn $POL_P\varrho$ maximal in P ist. □

Satz 2: Die maximalen Klassen von $P \in \{\tilde{P}_2, P_{2,L}\}$ sind

$POL_P(0)$, $POL_P(1)$, $POL_P\binom{0}{1}$, $POL_P\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $POL_P\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $POL_P\lambda_2$, $POL_P G_2([P_2^1])$ und $\mathcal{R}_P$.

Eine Teilmenge A von $P \in \{\tilde{P}_2, P_{2,L}\}$ ist genau dann in P vollständig, wenn sie keine Teilmenge der oben angegebenen 8 maximalen Klassen von P ist.

Der Beweis ergibt sich aus /2/ oder /3/, wo die maximalen Klassen von $\tilde{P}_2$ bestimmt wurden, sowie aus Satz 1.

Als nächstes werden wir die in Lemma 2 angegebene Beschreibung der maximalen Klassen von P für beliebiges k etwas präzisieren.

Wir verwenden folgende Bezeichnungen: $\varrho_1 := G_2([P_k^1])$, $\varrho_2 := \lambda_k$, $\varrho_i := \iota_k^i$ für $i \in \{3,4,\ldots,k\}$, $\varrho_{k+1} := E_k$.

<u>Satz 3 (s. /1/):</u> Sämtliche Klassen von P_k, die P_k^1 enthalten, sind Pol ϱ_i für $i = 1,2,\ldots,k+1$. Außerdem ist Pol ϱ_i maximale Klasse von Pol ϱ_{i+1} $(i=1,2,\ldots,k)$.

<u>Satz 4:</u> Die Klassen $\mathrm{POL}_P\, \varrho_i$ $(i=1,\ldots,k)$ sind maximal in P.

<u>Beweis:</u> Für $P = \tilde{P}_k$ wurde der Satz in /10/ bewiesen. In /6/ findet man für $P = P_{k,L}$ folgenden Beweis: Sei
$f \in P_{k,L} \setminus \mathrm{POL}\ \varrho_i (1 \leq i \leq k)$. Da $\mathrm{Pol}_{P_k} \varrho_i$ maximal in $\mathrm{Pol}_{P_k} \varrho_{i+1}$ ist, gilt $\mathrm{Pol}_{P_k} \varrho_{i+1} \subseteq [\mathrm{POL}\ \varrho_i \cup \{f\}]$. Zu POL ϱ_i gehören $|\varrho_j|$-stellige Funktionen f_j $(j=i+1,\ldots,k)$, die auf allen Tupeln, die nicht zu den Zeilen der Relationenmatrix von ϱ_j gehören, den Wert k annehmen und für die außerdem $f_j(\varrho_j) \in E_k^a \setminus \varrho_j$ ($a=j$ für $j \geq 3$, $a=4$ für $j=2$) gilt. Folglich läßt sich durch Iterieren
$P_k \subseteq [\mathrm{POL}\ \varrho_i \cup \{f\}]$ herleiten. Da offensichtlich zu POL ϱ_i gewisse Funktionen gehören, die L verschiedene Werte annehmen, haben wir nach Lemma 1 $[\mathrm{POL}\ \varrho_i \cup \{f\}] = P_{k,L}$. □

Die übrigen maximalen Klassen von P, die von den in Lemma 1 und Satz 3 genannten verschieden sind, gehören offensichtlich zur Menge

$$\mathfrak{M} := \left\{ \mathrm{POL}_P \varrho \,\middle|\, \varrho \in \bigcup_{h=1}^{k} R_k^h \wedge \mathrm{Pol}_{P_k}\ \varrho \neq P_k \right\}.$$

Detaillierte Beschreibungen dieser Relationen (und damit eine Lösung des Vollständigkeitsproblems für die partielle Logik) wurden von I. G. Rosenberg und L. Haddad in /4/ bzw. (in etwas anderer Form) von Lo Czukai in /7/ angegeben. Hier sollen abschließend nur noch sämtliche maximalen Klassen von $\tilde{P}_3$ bzw. $P_{3,L}$ aufgelistet werden, die recht gut illustrieren, daß die für k=2 noch bestehende Ähnlichkeit der maximalen Klassen von $P \in \{\tilde{P}_k, P_{k,L}\}$ mit denen von P_k für beliebiges k nicht mehr besteht. Nach /10/ (Beweis für $\tilde{P}_3$) bzw. /6/ (Beweis für $P_{3,L}$) gilt der nachfolgende Satz.

i	τ_i	i	τ_i	i	τ_i
1	(0)	15	$\begin{pmatrix}0&1\\2&2\end{pmatrix}$	29	$\begin{pmatrix}0&1&2&1&2\\0&1&2&0&1\end{pmatrix}$
2	(1)	16	$\begin{pmatrix}0&1&0&2\\1&0&2&0\end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix}0&1&2&2&1\\0&1&2&0&2\end{pmatrix}$
3	(2)	17	$\begin{pmatrix}0&1&1&2\\1&0&2&1\end{pmatrix}$	31	$\begin{pmatrix}0&1&2&0&0&2\\0&1&2&1&2&1\end{pmatrix}$
4	$(0\ 1)$	18	$\begin{pmatrix}0&2&1&2\\2&0&2&1\end{pmatrix}$	32	$\begin{pmatrix}0&1&2&0&2&2\\0&1&2&1&1&0\end{pmatrix}$
5	$(0\ 2)$	19	$\begin{pmatrix}0&1&2&0\\0&1&2&1\end{pmatrix}$	33	$\begin{pmatrix}0&1&2&0&1&0\\0&1&2&2&2&1\end{pmatrix}$
6	$(1\ 2)$	20	$\begin{pmatrix}0&1&2&0\\0&1&2&2\end{pmatrix}$	34	$\begin{pmatrix}0&1&2&0&1&0&2\\0&1&2&1&0&2&0\end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$	21	$\begin{pmatrix}0&1&2&1\\0&1&2&2\end{pmatrix}$	35	$\begin{pmatrix}0&1&2&0&1&1&2\\0&1&2&1&0&2&1\end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix}0&1&2&0&1\\0&1&2&1&0\end{pmatrix}$	36	$\begin{pmatrix}0&1&2&0&2&1&2\\0&1&2&2&0&2&1\end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$	23	$\begin{pmatrix}0&1&2&0&2\\0&1&2&2&0\end{pmatrix}$	37	$\{(0,1,2)\}$
10	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix}0&1&2&1&2\\0&1&2&2&1\end{pmatrix}$	38	$\{(0,1,2),(0,2,1)\}$
11	$\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}$	25	$\begin{pmatrix}0&1&2&0&0\\0&1&2&1&2\end{pmatrix}$	39	$\{(0,1,2),(2,1,0)\}$
12	$\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix}0&1&2&0&2\\0&1&2&1&1\end{pmatrix}$	40	$\{(0,1,2),(1,0,2)\}$
13	$\begin{pmatrix}0&0\\1&2\end{pmatrix}$	27	$\begin{pmatrix}0&1&2&0&1\\0&1&2&2&2\end{pmatrix}$	41	$\{(0,1,2),(1,2,0),(2,0,1)\}$
14	$\begin{pmatrix}0&2\\1&1\end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix}0&1&2&0&2\\0&1&2&1&0\end{pmatrix}$		

i	τ_i	i	τ_i
42	$\begin{pmatrix}0&0&1&1&2&2\\1&2&0&2&0&1\\2&1&2&0&1&0\end{pmatrix}$	49	$\{(0,1,2),(a,a,b)\mid a,b\in E_3\}$
43	$\begin{pmatrix}0&1&2&0\\0&1&2&1\\0&1&2&2\end{pmatrix}$	50	$\{(0,1,2),(a,b,a)\mid a,b\in E_3\}$
44	$\begin{pmatrix}0&1&2&0&0\\0&1&2&1&2\\0&1&2&2&1\end{pmatrix}$	51	$\{(0,1,2),(b,a,a)\mid a,b\in E_3\}$
45	$\begin{pmatrix}0&1&2&0&2\\0&1&2&1&1\\0&1&2&2&0\end{pmatrix}$	52	$\{(0,1,2),(1,0,2),(a,a,b)\mid a,b\in E_3\}$
46	$\begin{pmatrix}0&1&2&0&1\\0&1&2&1&0\\0&1&2&2&2\end{pmatrix}$	53	$\{(0,1,2),(2,1,0),(a,b,a)\mid a,b\in E_3\}$
47	$\begin{pmatrix}0&1&2&0&1&2\\0&1&2&1&2&0\\0&1&2&2&0&1\end{pmatrix}$	54	$\{(0,1,2),(0,2,1),(b,a,a)\mid a,b\in E_3\}$
48	$\begin{pmatrix}0&1&2&0&0&1&1&2&2\\0&1&2&1&2&0&2&0&1\\0&1&2&2&1&2&0&1&0\end{pmatrix}$		

Tabelle 1

Satz 5: $P \in \{\tilde{P}_3, P_{3,L}\}$ besitzt genau 58 maximale Klassen[1]. Es sind dies die Mengen $\mathcal{P}_P$, $POL_P G_2([P_3^1])$, $POL_P\,\lambda_3$, $POL_P\,\iota_3^3$ und $POL_P\,\mathcal{T}_i$ für $i = 1,2,\ldots,54$, wobei die Relationen $\mathcal{T}_i$ in Tabelle 1 angegeben sind. Eine Menge $A \subseteq P$ ist genau dann in P vollständig, wenn sie keine Teilmenge der angegebenen 58 Klassen ist.

3. Submaximale Klassen von $\tilde{P}_2$ und $P_{2,3}$

Nachfolgend sollen für die im Satz 2 angegebenen maximalen Klassen von $\tilde{P}_2$ bzw. $P_{2,3}$ deren endliche bzw. nicht endliche Erzeugbarkeit gezeigt und (im Falle der endlichen Erzeugbarkeit) die in ihnen maximalen Klassen bestimmt werden. Die dabei erhaltenen Resultate für $P_{2,3}$ lassen sich ohne große Mühe auf $P_{2,L}$ $(L > 3)$ übertragen, so daß auf deren Angabe hier aus Platzgründen verzichtet werden soll.

Satz 6: Die Mengen $POL_P\,\lambda_2$ und $POL_P G_2([P_2^1])$ besitzen für $P \in \{\tilde{P}_2, P_{2,3}\}$ keine endlichen Erzeugendensysteme.

Beweis: Es genügt, den Satz für $P = \tilde{P}_2$ zu beweisen.
Sowohl zu $\tilde{L} := POL_{P_2}\,\lambda_2$ als auch zu $POL_{\tilde{P}_2} G_2([P_2^1])$ gehören Funktionen h_n mit

$$h_n(x_1,\ldots,x_n) := \begin{cases} \blacktriangle, & \text{falls } x_1 = \ldots = x_n = 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und $n = 1,2,\ldots$. Wir zeigen zunächst, daß h_n für jedes $n \geq 1$ keine Superposition über $\tilde{L}^{n-1}$ ist. Die Funktion h_n kann offenbar nicht durch Superpositionen der Form $f_o(f_1,\ldots,f_t)$ dargestellt werden, wobei eine der Funktionen f_i $(i \geq 1)$ zu $\tilde{L}^{n-1} \setminus L$

1 In /10/ fehlen in der Aufzählung der maximalen Klassen die Mengen $POL\,\mathcal{T}_i$ für i = 31, 32, 33, die sich jedoch aus angegebenen Sätzen ergeben.

gehört, da jede Funktion der Form $f_o(f_1,\dots,f_t)$ mit einem $f_i \in \tilde{P}_2^{n-1} \setminus P_2$, $i \geq 1$, auf mindestens zwei verschiedenen Tupeln den Wert ▲ annimmt. Falls also $h_n \in [\tilde{L}^{n-1}]$ ist, existieren gewisse n-stellige Funktionen $f_1,\dots,f_{n-1}$ aus L und eine (n-1)-stellige Funktion f_o aus $\tilde{L}$ mit

$$h_n(\underline{x}) = f_o(f_1(\underline{x}),\dots,f_{n-1}(\underline{x})), \tag{1}$$

wobei $f_i(\underline{x}) = b_{io} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j$, $i = 1,2,\dots,n-1$. Da die Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned}
b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n &= 0,\\
b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n &= 0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots&\dots,\\
b_{n-1,1}x_1 + \dots + b_{n-1,n}x_n &= 0
\end{aligned}$$

höchstens den Rang n-1 hat, besitzt dieses Gleichungssystem mindestens zwei verschiedene Lösungen $\underline{O}$, $\underline{a}$, womit $f_o(f_1(\underline{a}),\dots,f_{n-1}(\underline{a})) = f_o(b_{1o},b_{2o},\dots,b_{n-1,o}) = ▲$ ist, im Widerspruch zu (1) und $h_n(\underline{a}) = 0$.

Wegen $P_2 \cap \mathrm{POL}\ G_2([P_2^1]) = [P_2^1]$ und $P_2^1 \subseteq L$ läßt sich analog zu oben auch $h_n \notin [(\mathrm{POL}\ G_2([P_2^1]))^{n-1}]$ beweisen. □

<u>Satz 7:</u> Die Menge $M' := \mathrm{POL}_{P_{2,3}}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ ist nicht endlich erzeugbar.

<u>Beweis:</u> Es genügt zu zeigen, daß $[M'^{m}] \subsetneq [M'^{m+1}]$ gilt für alle $m \geq 1$. Dazu betrachten wir die Relation

$$\varrho_h := \{(a_1,\dots,a_h) \in E_3^h \mid (\exists i: a_i = a_{i+1}) \wedge (\forall p,q: \{a_p,a_q\} \subseteq E_2 \wedge p<q \Rightarrow a_p \leq a_q)\}$$

für $h \geq 3$. In Matrizenschreibweise läßt sich $\varrho_h \cap E_2^h$ durch folgende (h,h+1)-Matrix beschreiben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alle Funktionen aus M', die höchstens n-stellig sind, bewahren die Relation ϱ_{n+2}, da eine beliebige Auswahl von Tupeln $r_1,\dots,r_n$ aus $\varrho_{n+2} \cap E_2^{n+2}$ mindestens ein Tupel der Form $(0,\dots,0,1,1,\dots,1)$ nicht enthält und damit die Matrix $(r_1,\dots,r_n)$ (Tupel hier wieder als Spalten aufgeschrieben) mindestens zwei gleiche benachbarte Zeilen besitzt. Die (n+1)-stelligen Funktionen aus M' haben diese Eigenschaft i. allg. nicht. So bewahrt z. B. die Funktion g^{n+1} aus M' mit

$$g\begin{pmatrix} 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 1 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & . & . & . & 0 \\ 1 & 1 & . & . & . & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ . \end{pmatrix}$$ sowie $g(\underline{x}) = 2$, falls

$\underline{x} \notin \{(0,\dots,0),(1,0,\dots,0),\dots,(1,1,\dots,1)\}$, die Relation ϱ_{n+2} nicht. Folglich gilt $[M'^{n}] \subsetneq [M'^{n+1}]$ für beliebiges $n \geq 1$. □

3.1. Die maximalen Klassen von $POL_{\tilde{P}_2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Sei $\tilde{M} := POL_{\tilde{P}_2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $M_o := POL_{\tilde{P}_2}\,\gamma$, wobei

$$\gamma = \begin{pmatrix} 00010000001\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle001001\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle01\blacktriangle \\ 0101010011100101\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle0010101\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle011\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle01\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle \\ 1001010101100011001\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle0011011\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle01\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle \\ 110111\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle01111011011\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle01\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle \end{pmatrix}$$ bzw.

$$\gamma = G_2(\tilde{M}) \setminus \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \blacktriangle & \blacktriangle & \blacktriangle & \blacktriangle & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \blacktriangle & \blacktriangle & \blacktriangle & \blacktriangle \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ ist.

Lemma 3: (a) Für jedes $g \in \tilde{M} \setminus M_o$ gilt $[M \cup \{g\}] = \tilde{M}$.

(b) M_o ist die einzige maximale Klasse von $\tilde{M}$, die M enthält.

(c) ord $\tilde{M} = 2$.

__Beweis:__ Sei $g \in \tilde{M} \setminus M_0$. Dann erhält man als Superposition über $M \cup \{g\}$ eine zweistellige Funktion g', die nur auf $(1,0)$ den Wert $\blacktriangle$ annimmt. Folglich ist $q := c_0 \circledast g' \in [M \cup \{g\}]$ mit

$$q(x,y) = \begin{cases} \blacktriangle \text{ für } (x,y) = (1,0), \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Sei

$$g_{\underline{a}}(x_1,\dots,x_n) := \begin{cases} \blacktriangle, \text{ falls } \underline{x} = \underline{a}, \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $g_{\underline{a}}(\underline{x}) = q(p_1(\underline{x}), p_2(\underline{x}))$, wo

$$p_1(\underline{x}) := \begin{cases} 1, \text{ falls } \underline{x} \geq \underline{a}, \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} \quad \text{und } p_2(\underline{x}) := \begin{cases} 1, \text{ falls } \underline{x} > \underline{a}, \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

aus M sind. Eine beliebige Funktion g^m aus $\tilde{M}$ mit $W(g) \subseteq \{0, \blacktriangle\}$ ist dann eine Superposition über $\{g_{\underline{a}} \mid \underline{a} \in E_2^m\} \cup \{x \vee y\} \subseteq [M \cup \{g\}]$ wegen $g(\underline{x}) = \bigvee_{\underline{a}, g(\underline{a}) = \blacktriangle} g_{\underline{a}}(\underline{x})$. Jede Funktion $f^n \in \tilde{M}$ erhält man dann mit Hilfe der monotonen Funktionen $x \vee y$,

$$f_1(\underline{x}) := \begin{cases} 1, \text{ falls ein } \underline{a} \in E_2^n \text{ mit } f(\underline{a}) = 1 \text{ und } \underline{x} \geq \underline{a} \text{ existiert,} \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

und der Funktion

$$g_f(\underline{x}) := \begin{cases} \blacktriangle, \text{ falls } f(\underline{x}) = \blacktriangle, \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

durch $f_1(\underline{x}) \vee g_f(\underline{x}) = f(\underline{x})$ als Superposition über $M \cup \{g\}$. Folglich ist $[M \cup \{g\}] = \tilde{M}$ und (unter Berücksichtigung von $\operatorname{ord} M = 2$) $\operatorname{ord} \tilde{M} = 2$.
(b) folgt unmittelbar aus (a). □

__Lemma 4:__ Sei $M_1 := \tilde{M} \cap \mathrm{POL}\binom{0}{1}$, $M_2 := \tilde{M} \cap \mathrm{POL}(0)$, $M_3 := \tilde{M} \cap \mathrm{POL}(1)$,

$$M_4 := \tilde{M} \cap \mathrm{POL}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_5 := \tilde{M} \cap \mathrm{POL}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$M_6 := \tilde{M} \cap \mathrm{POL}\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0 \\ 0&1&0&1&1 \\ 0&1&1&0&1 \\ 0&1&1&1&1 \end{pmatrix}$. Für jede Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $\tilde{M}$, die in keiner Menge M_i, $i \in \{1,2,\ldots,6\}$, enthalten ist, gilt $M \subseteq [\mathfrak{M}]$.

Beweis: Wegen $\mathfrak{M} \not\subseteq M_1$ gehört zu $[\mathfrak{M}]$ eine gewisse Konstante c_a ($a \in E_2$). Hieraus und aus $\mathfrak{M} \not\subseteq M_2$ sowie $\mathfrak{M} \not\subseteq M_3$ folgt $c_0, c_1 \in [\mathfrak{M}]$. Aus einer Funktion, die nicht zu M_4 gehört, erhält man mittels Identifizieren gewisser Variablen und Einsetzen von c_0, c_1 eine zweistellige monotone Funktion $g \in \{x \vee y, x \cdot y\}$. Dann gilt für Funktionen $p, q \in \mathfrak{M}$ mit $p \notin M_5$, $q \notin M_6$ offenbar $\{x \vee y, x \cdot y\} \subseteq [\{c_0, c_1, g, p, q\}]$. Folglich ist $[\{x \vee y, x \cdot y, c_0, c_1\}] = M \subseteq [\mathfrak{M}]$. □

Satz 8: M besitzt genau 7 maximale Klassen: $M_0, M_1, \ldots, M_6$.

Beweis: Die Aussage des Satzes ergibt sich aus Lemma 3 und 4 sowie der paarweisen Unvergleichbarkeit der Mengen $M_0, \ldots, M_6$, die man der Tabelle 2 entnehmen kann, wobei

$$m_1(x,y) := \begin{cases} \blacktriangle & \text{für } (x,y)=(1,0), \\ x & \text{sonst}, \end{cases} \qquad m_2 := c_0,\ m_3 := c_1,$$

$$m_4(x,y) := x \cdot y,\ m_5(x,y) := x \vee y,\ m_6\binom{0}{1} := \binom{1}{\blacktriangle},\ m_7\binom{0}{1} := \binom{\blacktriangle}{0},$$

$$m_8(x,y,z) := \begin{cases} x \vee y & \text{für } z = x \cdot y, \\ \blacktriangle & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und } m_9(x,y,z) := \begin{cases} x \cdot y & \text{für } z = x \vee y, \\ \blacktriangle & \text{sonst} \end{cases}$$

gesetzt ist.

5*

	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9
M_0	-	+	+	+	+	+	+		
M_1	+	-	-	+	+	+	+		
M_2	+	+	-	+	+	-	+		
M_3	+	-	+	+	+	+	-		
M_4	+	+	+	-	-			+	+
M_5	+	+	+	+	-			-	
M_6	+	+	+	-	+				-

(+ steht für das Enthaltensein, - für das Nichtenthaltensein der Funktionen in den Mengen.) Tabelle 2

3.2. Die maximalen Klassen von $POL_P\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

3.2.1. $P = P_{2,3}$

Die Menge $POL_{P_{2,3}}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ bezeichnen wir nachfolgend kurz mit S'.

Für $\binom{\alpha}{\beta} \in \begin{pmatrix}0&0&1&2\\1&2&2&2\end{pmatrix}$ und $f^n \in POL\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ sei

$T_{\alpha\beta}(f^n) := \left\{(a_1,\dots,a_n) \in E_2^n \,|\, (f(a_1,\dots,a_n), f(\overline{a}_1,\dots,\overline{a}_n)) = (\alpha,\beta)\right\}.$

Mit Hilfe der Mengen $T_{\alpha\beta}$ läßt sich folgende abgeschlossene Teilmenge S_o von S' definieren:

$$S_o := \bigcup_{n\geq 1}\left\{f \in S' \,|\, \exists\binom{\alpha}{\beta} \in \begin{pmatrix}0&0&1&2\\1&2&2&2\end{pmatrix} : T_{\alpha\beta}(f) = \emptyset\right\}.$$

Lemma 5: (a) Für jedes $g \in S' \setminus S_o$ gilt $[S \cup \{g\}] = S'$.

(b) S_o ist die einzige maximale Klasse von S', die S enthält.

(c) ord S' = 3.

Beweis: (a): Im Falle $g^m \in S' \setminus S_o$ existieren gewisse Tupel $\underline{a}_i = (a_{i1},\dots,a_{im}) \in E_2^n$ $(i = 1,2,3,4)$ mit

$$g\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \overline{a}_{11} & \dots & \overline{a}_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2m} \\ \overline{a}_{21} & \dots & \overline{a}_{2m} \\ a_{31} & \dots & a_{3m} \\ \overline{a}_{31} & \dots & \overline{a}_{3m} \\ a_{41} & \dots & a_{4m} \\ \overline{a}_{41} & \dots & \overline{a}_{4m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bezeichne f^n eine beliebige Funktion aus S'. Die Funktionen f_i^n mit der Eigenschaft

$$f_i\binom{x_1 \dots x_n}{\overline{x}_1 \dots \overline{x}_n} = \begin{cases} \binom{a_{1i}}{\overline{a}_{1i}}, & \text{falls } \underline{x} \in T_{01}(f), \\ \binom{a_{2i}}{\overline{a}_{2i}}, & \text{falls } \underline{x} \in T_{02}(f), \\ \binom{a_{3i}}{\overline{a}_{3i}}, & \text{falls } \underline{x} \in T_{12}(f), \\ \binom{a_{4i}}{\overline{a}_{4i}}, & \text{falls } \{\underline{x},\underline{\overline{x}}\} \subseteq T_{22}(f), \end{cases}$$

$i = 1,2,\dots,m$, gehören dann zu S und sind stets so definierbar, daß $g(f_1(\underline{x}),\dots,f_n(\underline{x})) = f(\underline{x})$ gilt. Folglich ist $[\{g\} \cup S] = S'$.

(b) folgt unmittelbar aus (a).

(c) ergibt sich aus (a) unter Beachtung von ord $S = 3$. □

<u>Lemma 6:</u> Sei $S_1 := S' \cap \mathrm{POL}\ \binom{0}{1}$, $S_2 := S' \cap \mathrm{POL}\ G_3(S \cap [P_2^1])$ und $S_3 := S' \cap \mathrm{POL}\ G_3(S \cap L)$. Für jede Teilmenge $\mathfrak{M}$ von S', die keine Teilmenge von S_1, S_2 und S_3 ist, gilt $S \subseteq [\mathfrak{M}]$.

<u>Beweis:</u> Wegen $\mathfrak{M} \nsubseteq S_1$ gehört $\overline{x}$ zu $[\mathfrak{M}]$, und wegen $\mathfrak{M} \nsubseteq S_2$ findet man in $[\mathfrak{M}]$ eine Funktion g mit

$g'(x,y,z) := g(x,y,z,\overline{x},\overline{y},\overline{z}) \in S^3 \setminus \{x,y,z,\overline{x},\overline{y},\overline{z}\}$.

<u>1. Fall:</u> $g' \notin S \cap L$.

In diesem Fall ist $\{g',\overline{x}\}$ ($\subseteq S \cap [\mathfrak{M}]$) weder Teilmenge von $S \cap L$ noch von $S \cap T_0$. Da bekanntlich $S \cap L$ und $S \cap T_0$ die einzigen maximalen Klassen von S sind, gilt die Behauptung im Fall 1.

2. Fall: $g' \in S \cap L$.
Offenbar ist in diesem Fall $S \cap L^3 \subseteq [\mathfrak{M}]$. Wegen $\mathfrak{M} \not\subseteq S_3$ existiert in $[\mathfrak{M}]$ eine Funktion $h \in S^3 \setminus L$, womit $S \subseteq [\mathfrak{M}]$ nach Fall 1 folgt. □

Satz 9: S' besitzt genau 4 maximale Klassen: S_0, S_1, S_2, S_3.

Beweis: Die Behauptung ergibt sich aus Lemma 5 und 6 sowie der paarweisen Unvergleichbarkeit (bez. Inklusion) der Mengen $S_0,\dots,S_3$, die man der Tabelle 3 entnehmen kann, wobei

$s_1(x,y,z) := x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee \bar{y}\,\bar{z}$,

$$s_2(x,y,z) := \begin{cases} y, & \text{falls } (x,y,z) \in \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,1,1)\}, \\ 2 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$s_3(x) := \bar{x}$, $s_4(x,y,z) := xy \vee xz \vee yz$, $s_5(x,y,z) := x+y+z$ und

$$s_6(x,y,z,u) := \begin{cases} xy \vee xz \vee yz, & \text{falls } u = x+y+z, \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

gesetzt ist.

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
S_0	+	-				
S_1	-	+	-	+		
S_2	-	+	+	-	-	+
S_3	-	+	+	-	+	-

Tabelle 3

3.2.2. $P = \tilde{P}_2$

Die Menge $POL_{\tilde{P}_2}\binom{0\ 1}{1\ 0}$ sei nachfolgend mit $\tilde{S}$ bezeichnet.

Zur Bestimmung der maximalen Klassen von $\tilde{S}$ prüft man zunächst leicht nach, daß nur $\varphi(S_0)$ von den Mengen $\varphi(S_i)$, $i = 0,1,2,3$, nicht bez. ⊛ abgeschlossen ist. Abgeschlossen in $\tilde{P}_2$ ist aber die Teilmenge

$$S_o^* := \mathrm{Pol}\,\{(a_1,a_2,a_3,a_4) \in \{0,1,\blacktriangle\}^4 \mid ((a_1,a_4) \in E_2^2 \Rightarrow a_4 = \bar{a}_1) \wedge$$
$$((a_2,a_3) \in E_2^2 \Rightarrow a_3 = \bar{a}_2) \wedge ((a_1,\ldots,a_4) \in E_2^4 \vee \exists i \neq j : a_i = a_j = \blacktriangle)\}$$

$$= \mathrm{Pol}\begin{pmatrix} 0011\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle0100110011\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle01\blacktriangle \\ 0110\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle001101\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle0101\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle01\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle \\ 10010011\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle10\blacktriangle\blacktriangle0101\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle01\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle \\ 110001010101\blacktriangle\blacktriangle10\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle01\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle \end{pmatrix}$$

von $\tilde{S}$.

<u>Lemma 7:</u> (a) Für jedes $g \in \tilde{S} \setminus S_o^*$ gilt $[S \cup \{g\}] = \tilde{S}$.

(b) S_o^* ist die einzige maximale Klasse von $\tilde{S}$, die S enthält.

(c) $\mathrm{ord}\,\tilde{S} = 3$.

<u>Beweis:</u> Es genügt, (a) zu beweisen.

Im Falle $g \in \tilde{S} \setminus S_o^*$ existiert als Superposition über g und $\bar{x}$ in $[S \cup \{g\}]$ eine zweistellige Funktion g' mit $g'(\alpha,\beta) = \blacktriangle$ und $g'(x,y) \in E_2$ für $(x,y) \in E_2^2 \setminus \{(\alpha,\beta)\}$. Folglich gehören zu $[S \cup \{g\}]$ auch die Funktionen

$$h_{a,b}(x,y) := e_1^2(x, g((x^a)^\alpha,(y^b)^\beta)) = \begin{cases} \blacktriangle \text{ für } (x,y) = (a,b), \\ x \text{ sonst} \end{cases}$$

$((a,b) \in E_2^2)$ und

$$h(x,y) := e_1^2(h_{0,1}(x,y), h_{1,0}(x,y)) = \begin{cases} \blacktriangle \text{ für } (x,y) \in \{(0,1),(1,0)\}, \\ x \text{ sonst}, \end{cases}$$

wobei

$$x^a := \begin{cases} \bar{x}, \text{ falls } a = 0, \\ x \text{ sonst} \end{cases}$$

sei. Man prüft nun leicht nach, daß die Funktion

$e_1^3(h_{1,0}(e_2^3(x,y,z), \bar{x}y \vee \bar{x}z \vee yz), h_{0,1}(e_2^3(x,y,z), \bar{x}yz \vee x(y \vee z)),$

$h(e_2^3(x,y,z), \bar{x}(y\bar{z}) \vee x(y \vee \bar{z})))$ $(= \varphi(s_2)(x,y,z)$, s_2 wurde im Beweis von Satz 9 definiert) zu $\tilde{S} \setminus \varphi(S_o)$ gehört, und nach Lemma 5 (a) gilt somit $[S \cup \{g\}] = \tilde{S}$. □

Als Folgerung aus Lemma 7 und Abschnitt 3.2.1 erhalten wir den

<u>Satz 10:</u> $\tilde{S}$ besitzt genau 4 maximale Klassen:
S^{*}, $\varphi(S_1)$, $\varphi(S_2)$, $\varphi(S_3)$.

3.3. Die maximalen Klassen von $POL_p(a)$

Es sei o. B. d. A. $a = 0$.

3.3.1. $P = P_{2,3}$

Die Teilmengen

$N_0 := \{f \in POL(0) \mid f(0,\ldots,0) = 0 \vee |W(f)| \leq 2\}$ und
$N_1 := \{f \in POL(0) \mid f(0,\ldots,0) = 2 \vee |W(f)| \leq 2\}$

von $N := POL(0)$ sind offenbar abgeschlossen.

<u>Lemma 8:</u> (a) Für jede Funktion $p \in POL(0) \setminus N_0$ und $q \in POL(0) \setminus N_1$ gilt $[T_0 \cup \{p,q\}] = POL(0)$.

(b) N_0 und N_1 sind die einzigen maximalen Klassen von N, die T_0 enthalten.

(c) ord $N = 2$.

<u>Beweis:</u> Es genügt, (a) zu beweisen.

Sei $f^n \in N$. Dann sind folgende 2 Fälle möglich:

<u>1. Fall:</u> $f(0,\ldots,0) = 0$.

Für eine Funktion $q^m \in N \setminus N_0$ gilt $q(\underline{0}) = 0$, und es existieren Tupel $\underline{a} := (a_1,\ldots,a_m)$, $\underline{b} := (b_1,\ldots,b_m) \in E_2^m \setminus \{\underline{0}\}$ mit $q(\underline{a}) = 1$ und $q(\underline{b}) = 2$. Die Funktionen g_i^n mit

$$g_i^n(\underline{x}) = \begin{cases} 0 & \text{für } f(\underline{x}) = 0, \\ a_i & \text{für } f(\underline{x}) = 1, \\ b_i & \text{für } f(\underline{x}) = 2 \end{cases} \qquad (i = 1,2,\ldots,m)$$

gehören zu T_0, womit $f(\underline{x}) = q(g_1(\underline{x}),\ldots,g_m(\underline{x}))$ eine Superposition über $T_0 \cup \{q\}$ ist.

__2. Fall:__ $f(0,\ldots,0) = 2$.

Für eine Funktion $p^r \in N \setminus N_1$ gilt $p(0) = 2$ und $p(\underline{c}) = 0$ sowie $p(\underline{d}) = 1$ für gewisse Tupel $\underline{c} = (c_1,\ldots,c_r)$, $\underline{d} = (d_1,\ldots,d_r) \in E_2^r \setminus \{\underline{0}\}$.

Die Funktionen

$$h_i^n(\underline{x}) := \begin{cases} c_i & \text{für } f(\underline{x}) = 0, \\ d_i & \text{für } f(\underline{x}) = 1, \\ 0 & \text{für } f(\underline{x}) = 2 \end{cases} \qquad (i = 1,2,\ldots,r)$$

gehören zu T_0. Folglich ist $f(\underline{x}) = p(h_1(\underline{x}),\ldots,h_r(\underline{x}))$ eine Superposition über $T_0 \cup \{p\}$. □

__Lemma 9:__ Sei $N_2 := N \cap \mathrm{POL}\binom{0}{1}$, $N_3 := N \cap \mathrm{POL}\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\\0&1&1 \end{pmatrix}$,

$$N_4 := N \cap \mathrm{POL}\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&1&0&1\\0&1&1&0 \end{pmatrix}, \quad N_5 := N \cap \mathrm{POL}\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&1&1&1 \end{pmatrix},$$

$$N_6 := N \cap \mathrm{POL}\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&1&0&1\\0&1&1&1 \end{pmatrix}, \quad N_7 := N \cap \mathrm{POL}\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0&1 \end{pmatrix},$$

$$N_8 := N \cap \mathrm{POL}\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\0&0&1&0&1\\0&1&0&0&1\\0&1&1&1&1 \end{pmatrix}$$ und $\mathfrak{M} \subseteq N$ keine Teilmenge von N_i für jedes $i \in \{2,\ldots,8\}$. Dann gilt $T_0 \subseteq [\mathfrak{M}]$.

__Beweis:__ Wegen $\mathfrak{M} \not\subseteq N_i$ existieren in $\mathfrak{M}$ Funktionen f_i mit $f_i \notin N_i$ für $i \in \{2,\ldots,8\}$. Offenbar ist $f_2(x,\ldots,x) = c_0(x) \in [\mathfrak{M}]$ und $[\{c_0, f_3\}] \cap (T_0^2 \setminus \{e_1^2, e_2^2, c_0\}) \neq \emptyset$, d. h., zu $[\mathfrak{M}]$ gehört mindestens eine der Funktionen g_i $(i = 1,2,3,4)$ mit $g_1(x,y) = \overline{x}y$, $g_2(x,y) = xy$, $g_3(x,y) = x+y$, $g_4(x,y) = x \vee y$. Nach $xy, x\overline{y} \in [\{\overline{x}y\}]$ $(xy = \overline{\overline{x} \cdot y} \cdot y)$ ist $[\{g_1, f_7\}] \cap \{g_3, g_4\} \neq \emptyset$. Außerdem gilt $[\{c_0, g_2, f_5\}] \cap \{g_1, g_3, g_4\} \neq \emptyset$, $[\{c_0, g_3, f_4\}] \cap \{g_1, g_2, g_4\} \neq \emptyset$ und $[\{c_0, g_4, f_6\}] \cap \{g_1, g_2, g_3\} \neq \emptyset$. Folglich ist mindestens eine der

Mengen $\{g_1, g_3\}$, $\{g_1, g_4\}$, $\{g_2, g_3\}$, $\{g_2, g_4\}$ oder $\{g_3, g_4\}$ in $[\mathfrak{M}]$ enthalten. Bis auf $\{g_2, g_4\}$ ist jede dieser Mengen keine Teilmenge irgendeiner maximalen Klasse

$A \in \left\{T_0 \cap T_1,\ T_0 \cap M,\ T_0 \cap L,\ \mathrm{Pol}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ von T_0, d. h. in T_0 vollständig. Unter Beachtung von $[\{c_0, g_2, g_4, f_8\}] \cap \{g_1, g_3\} \neq \emptyset$ gehört T_0 somit zum Abschluß von $\mathfrak{M}$. □

<u>Satz 11:</u> POL(0) besitzt genau 9 maximale Klassen: $N_o, N_1, \ldots, N_8$.

<u>Beweis:</u>Die Behauptung folgt aus Lemma 8 und 9 sowie der Tabelle 4, der man die paarweise Unvergleichbarkeit (bez. Inklusion) der Mengen $N_o, N_1, \ldots, N_8$ entnehmen kann, wobei die Funktionen $n_1, \ldots, n_6$ in Tabelle 5 angegeben sind, ferner $n_7 = c_0$, $n_8(x,y,z) = x+y+z$, für die Funktionen $n_9, \ldots, n_{12}$

$$n_9\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad n_{10}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad n_{11}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$n_{12}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ gilt und diese Funktionen auf den restlichen Tupeln stets den Wert 2 annehmen. □

	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8	n_9	n_{10}	n_{11}	n_{12}
N_o	-	+	+	+	+	+	+	+				
N_1	+	-	+	+	+	+	+	+				
N_2	+	+	-	+	-	+	-	+				
N_3	+	+	-	-	-	-	+		+	+	+	
N_4	+	+	+	-	-	-	+				-	
N_5	+	+	-	+	-	-	+		-		+	+
N_6	+	+	-	-	-	+	+		+		-	
N_7	+	+	-	+	+	-	+		-			-
N_8	+	+	-	+	-	+	+	-	-		-	

Tabelle 4

x	y	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6
0	0	2	0	0	0	0	0
0	1	0	2	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	0	1
1	1	1	1	0	1	0	1

Tabelle 5

3.3.2. $P = \tilde{P}_2$

Die Mengen

$N_o' := \{f \mid f(0,\dots,0) = 0\} \cup [\{c_\blacktriangle\}]$, $N_1' := \{f \mid f \in T_0 \vee f(0,\dots,0) = \blacktriangle\}$

sind Teilklassen von $POL_{\tilde{P}_2}(0)$.

Lemma 10: (a) Für jedes $f \in POL(0) \setminus N_o'$ und $g \in POL(0) \setminus N_1'$ gilt $[T_0 \cup \{f,g\}] = POL(0)$.

(b) N_o' und N_1' sind die einzigen maximalen Klassen von $POL(0)$, die T_0 enthalten.

(c) ord $POL(0) = 2$.

Beweis: Falls $f \in POL(0) \setminus N_o'$ und $g \in POL(0) \setminus N_1'$ ist, gilt $e_2^2 \circledast f \notin \varphi(N_o)$ und $e_2^2 \circledast g \notin \varphi(N_1)$. Folglich ergeben sich die Behauptungen aus dem Beweis von Lemma 8. □

Als Folgerumg aus Lemma 10 und Abschnitt 3.3.1 erhält man den

Satz 12: $POL_{\tilde{P}_2}(0)$ besitzt genau 9 maximale Klassen:

N_o', N_1', $\varphi(N_2), \dots, \varphi(N_8)$.

3.4. Die maximalen Klassen von $POL_P\binom{0}{1}$

3.4.1. $P = P_{2,3}$

Sei $A := POL_{P_{2,3}}\binom{0}{1}$, $\varrho_A := \{(0,1),(0,2),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2)\}$

und $A_{ab} := \bigcup_{n\geq 1} \{f^n \in A \mid |W(f)| \leq 2 \vee (f(0,\dots,0), f(1,\dots,1)) \in \varrho_A \setminus \{(a,b)\}\}$

für $(a,b) \in \varrho_A$.

Lemma 11: (a) Sei $f_{ab} \in A \setminus A_{ab}$ für $(a,b) \in \varrho_A$. Dann gilt $[T_0 \cap T_1 \cup \{f_{ab} \mid (a,b) \in \varrho_A\}] = A$.

(b) Die einzigen maximalen Klassen von A, die $T_0 \cap T_1$ enthalten, sind A_{ab} für $(a,b) \in \varrho_A$.

(c) ord $A = 3$.

Beweis: (a): Sei g^m eine beliebige Funktion aus A und $g\begin{pmatrix}0 & \dots & 0\\ 1 & \dots & 1\end{pmatrix} = \binom{a}{b}$. Nach Definition von A ist dann $(a,b) \in \varrho_A$. O. B. d. A. sei $(a,b) \neq (0,0)$. Für die Funktion f^n_{ab} existiert ein Tupel $\underline{d} = (d_1,\dots,d_n) \in E_2^n \setminus \{\underline{0},\underline{1}\}$ mit $f(\underline{d}) = c$ und $\{a,b,c\} = \{0,1,2\}$. Weiter gehören die Funktionen g_i^m mit

$$g_i(\underline{x}) = \begin{cases} 0 \text{ für } g(\underline{x}) = a, \\ 1 \text{ für } g(\underline{x}) = b, \\ d_i \text{ für } g(\underline{x}) = c \end{cases} \qquad (i = 1,2,\dots,n)$$

zu $T_0 \cap T_1$. Folglich gilt

$g(\underline{x}) = f_{ab}(g_1(\underline{x}),\dots,g_n(\underline{x})) \in [T_0 \cap T_1 \cup \{f_{ab} \mid (a,b) \in \varrho_A\}]$.

(b) und (c) folgen aus (a) unter Berücksichtigung von $\operatorname{ord} T_0 \cap T_1 = 3$. □

Lemma 12: Sei

$$A_1 := A \cap \operatorname{POL}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ A_2 := A \cap \operatorname{POL}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix},\ A_3 := A \cap \operatorname{POL}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

$A_4 := A \cap \operatorname{POL} G_3(T_0 \cap T_1 \cap M)$ und $\mathfrak{M} (\subseteq A)$ keine Teilmenge von A_i für $i = 1,\dots,4$. Dann gilt $T_0 \cap T_1 \subseteq [\mathfrak{M}]$.

Beweis: Bezeichne f_i eine Funktion aus $A \setminus A_i$ für $i \in \{1,2,3,4\}$. Durch Identifizieren gewisser Variablen von f_1 erhält man offenbar eine Funktion aus $\{xy, x \vee y\}$. Aus $xy \in [\{x \vee y, f_3\}]$ und $x \vee y \in [\{xy, f_2\}]$ folgt $T_0 \cap T_1 \cap M = [\{xy, x \vee y\}] \subseteq [\mathfrak{M}]$. Wegen der Maximalität von $T_0 \cap T_1 \cap M$ in $T_0 \cap T_1$ ist demnach $T_0 \cap T_1 \subseteq [T_0 \cap T_1 \cap M \cup \{f_4\}] \subseteq [\mathfrak{M}]$. □

Satz 13: A besitzt genau 10 maximale Klassen:
A_{ab} $((a,b) \in \varrho_A)$, A_1, A_2, A_3, A_4.

Beweis: Wegen $S \cap T_0 \subseteq A_1$, $T_1 \cap \mathrm{Pol}\binom{0\ 0\ 1}{0\ 1\ 0} \subseteq A_2$, $T_0 \cap \mathrm{Pol}\binom{0\ 1\ 1}{1\ 0\ 1} \subseteq A_3$, $M \cap T_0 \cap T_1 \subseteq A_4$, $T_0 \cap T_1 \subseteq A_{ab}$ $((a,b) \in \varrho_A)$, $A^2 \setminus (T_0 \cap T_1) \subseteq A_i$ für $i \in \{1,2,3,4\}$ und $A^2 \setminus (T_0 \cap T_1) \not\subseteq A_{ab}$ für alle $(a,b) \in \varrho_A$ prüft man leicht nach, daß die im Satz angegebenen 10 Teilklassen von A bez. Inklusion paarweise unvergleichbar sind. Hieraus und aus Lemma 11 und 12 ergibt sich die Behauptung. □

3.4.2. $P = \tilde{P}_2$

Sei $A' := \mathrm{POL}_{\tilde{P}_2}\binom{0}{1}$ und

$A_0 := \{f \in A' \mid \blacktriangle \in W(f) \Rightarrow f(0,\dots,0) = \blacktriangle \vee f(1,\dots,1) = \blacktriangle\}$.

Offenbar ist A_0 eine abgeschlossene echte Teilklasse von A'.

Lemma 13: (a) Sei $f \in A' \setminus A_0$, $g \in A' \setminus \mathrm{POL}(0)$ und $h \in A' \setminus \mathrm{POL}(1)$. Dann gilt $[(T_0 \cap T_1) \cup \{f,g,h\}] = A'$.

(b) A_0, $A' \cap \mathrm{POL}(0)$, und $A' \cap \mathrm{POL}(1)$ sind die einzigen maximalen Klassen von A', die $T_0 \cap T_1$ enthalten.

(c) ord A' = 3.

Beweis: Es genügt, (a) zu beweisen.

Offenbar gehören zum Abschluß von $\{f,g\}$ einstellige Funktionen f', g' mit $f'\binom{0}{1} = \binom{1}{\blacktriangle}$ und $g'\binom{0}{1} = \binom{\blacktriangle}{0}$. Folglich sind die Funktionen $t_1,\dots,t_5$ mit $t_1 := e_2^2 \circledast f'$, $t_2 := e_2^2 \circledast g'$, $t_3(x,y) := e_2^2(f'(x \wedge y) \wedge g'(x \vee y), y)$, $t_4(x,y) := f'(x) \vee (x \vee y)$ und $t_5(x,y) := g'(x) \wedge (x \wedge y)$ Superpositionen über $T_0 \cap T_1 \cup \{f,g\}$. Für diese Funktionen gilt nun $t_1 \notin \varphi(A_{02})$, $t_2 \notin \varphi(A_{21})$, $t_3 \notin \varphi(A_{22})$, $t_4 \notin \varphi(A_{12})$ und $t_5 \notin \varphi(A_{20})$. Da außerdem $h \notin \varphi(A_{01})$ ist, folgt aus Lemma 11 die Behauptung (a). □

Aus Lemma 13 und Abschnitt 3.4.1 folgt der

<u>Satz 14:</u> A' besitzt genau 7 maximale Klassen:
A_o, $A' \cap POL(0)$, $A' \cap POL(1)$, $\varphi(A_1)$, $\varphi(A_2)$, $\varphi(A_3)$ und $\varphi(A_4)$.

3.5. Die maximalen Klassen von $\mathcal{R}_P$

3.5.1. $P = P_{2,3}$

Sei $\mathcal{R} := \mathcal{R}_{P_{2,3}}$,
$\mathcal{R}_o = P_2 \cup \{f \mid W(f) \subseteq \{0,2\}\}$ und $\mathcal{R}_1 := P_2 \cup \{f \mid W(f) \subseteq \{1,2\}\}$.
Analog zu Lemma 1 beweist man

<u>Lemma 14:</u> (a) Für jedes $f \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{R}_o$ und jedes $g \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{R}_1$ gilt
$[P_2 \cup \{f,g\}] = \mathcal{R}$.
(b) $\mathcal{R}_o$ und $\mathcal{R}_1$ sind die einzigen maximalen Klassen von $\mathcal{R}$, die P_2 enthalten.
(c) ord $\mathcal{R} = 2$.

<u>Lemma 15:</u> Sei $\mathcal{R}_2 := \mathcal{R} \cap POL\binom{0}{1}$, $\mathcal{R}_3 := \mathcal{R} \cap POL\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$,
$\mathcal{R}_4 := \mathcal{R} \cap POL(0)$, $\mathcal{R}_5 := \mathcal{R} \cap POL(1)$,
$\mathcal{R}_6 := \mathcal{R} \cap POL\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $\mathcal{R}_7 := \mathcal{R} \cap POL\,\lambda_2$ und $\mathfrak{M} (\subseteq \mathcal{R})$
für jedes $i \in \{2,3,\ldots,7\}$ keine Teilmenge von $\mathcal{R}_i$.
Dann gilt $P_2 \subseteq [\mathfrak{M}]$.

<u>Beweis:</u> Wegen $\mathfrak{M} \nsubseteq \mathcal{R}_j$ für $j \in \{2,3,4,5,6\}$ gehört offenbar P_2^1 zum Abschluß von $\mathfrak{M}$. Jede Funktion f aus $\mathcal{R} \setminus \mathcal{R}_7$ ist aus $P_2 \setminus L$, womit $[\mathfrak{M}] \cap P_2$ keine Teilmenge irgendeiner maximalen Klasse von P_2 ist und folglich $[\mathfrak{M}] \cap P_2 = P_2$ gilt. □

<u>Satz 15:</u> $\mathcal{R}$ besitzt genau 8 maximale Klassen: $\mathcal{R}_o, \mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_7$.

Der Beweis folgt unmittelbar aus Lemma 14 und 15 sowie dem leicht nachprüfbaren Fakt der paarweisen Unvergleichbarkeit der Mengen $\mathcal{R}_o, \ldots, \mathcal{R}_7$.

3.5.2. $P = \breve{P}_2$

Da bekanntlich P_2 die 5 maximalen Klassen T_0, T_1, S, M, L besitzt, gilt der

Satz 16: $\mathcal{P}_{\breve{P}_2}$ $(= P_2 \cup [\{c_\blacktriangle\}])$ besitzt genau 6 maximale Klassen: P_2, $T_0 \cup [\{c_\blacktriangle\}]$, $T_1 \cup [\{c_\blacktriangle\}]$, $M \cup [\{c_\blacktriangle\}]$, $S \cup [\{c_\blacktriangle\}]$ und $L \cup [\{c_\blacktriangle\}]$.

Literatur

/1/ Бурле, Г. А.: Классы k-значной логики, содержащие все функции одной переменной. Дискретный Анализ 10, 3 - 7 (1967)

/2/ Фрейвалд, Р. В.: Функциональная полнота для не всюду определенных функций алгебры логики. Дискретный Анализ 8, 55 - 68 (1966)

/3/ Фрейвалд, Р. В.: Критерии полноты для частичных функций алгебры логики и многозначных логик. Докл. Акад. Наук СССР 167, 1249 - 1250 (1966)

/4/ Haddad, L., et Rosenberg, I. G.: Critère général de complétude pour les algèbres partielles finies. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math. 304, 507 - 509 (1987)

/5/ Jablonski, S. W., Gawrilow, G. P., und Kudrjawzew, W. B.: Boolesche Funktionen und Postsche Klassen. Berlin 1970

/6/ Lau, D.: Eigenschaften gewisser abgeschlossener Klassen in Postschen Algebren. Dissertation (A), Wilhelm-Pieck-Universität Rostock 1977

/7/ Lo Czukai: The completeness theory of partial many-valued logic functions. Proc. XVII. Internat. Symp. on Multiple-valued Logic, Boston, 118 - 121 (1987)

/8/ Мальцев, А. И.: Итеративные алгебры и многообразия Поста. Алгебра и Логика 5, 5 - 24 (1966)

/9/ Pöschel, R., und Kalužnin, L. A.: Funktionen- und Relationenalgebren. Berlin 1979

/10/ Ромов, Б. А.: О максимальных подалгебрах алгебры частичных функций многозначной логики. Кибернетика, 1, 28 - 36 (1980)

/11/ Rosenberg, I. G.: Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken. Rozpravy Československé Akad. Věd, Řada Mat. Přirod. Věd 80, 3 - 93 (1970)

/12/ Rosenberg, I. G.: Galois theory for partial algebras. In: Freese, R. S., and Garcia, O. C., (Eds.): Universal algebra and lattice theory. Proc. 4. Internat. Conf., Puebla 1982. Lecture Notes in Math. 1004, 257 - 272, Berlin 1983

eingegangen: 25. 02. 1987

Verfasser:

Dr. D. Lau
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
Rostock
DDR-2500

Rostock. Math. Kolloq. 33, 49 - 56 (1988) 06A05
20M14

Lothar Berg

Linear involutory semigroups with two generators

Abstract

We construct four classes of linear involutory semigroups of finite order n with two generating elements called generators. These classes contain all such semigroups in the already completely known cases with $n \leq 7$.

1. Linear involutory semigroups

In /1/ there was introduced the notion of an involutory semigroup, which can be modified in the following way.

Definition: A (partially) ordered set $S(\leq,+,*)$ with an addition $+$ and an involution $*$ is called an involutory semigroup, if with respect to the addition it is a commutative semigroup with zero element, if the addition is syntonous and the involution antitonous, and if

$$a^* \leq (a + b)^* + b \tag{1}$$

for all $a,b \in S$.

The original definition of an involutory semigroup was done by means of the notion of complementary semigroups, which possess also a kind of subtraction. However, in view of Lemma 2 of /1/ and the representation $a-b = (a^*+b)^*$ both definitions are equivalent. The two monotony requirements in the definition mean that for ell $a,b,c \in S$

$$a \leq b \text{ implies both } a + c \leq b + c \text{ and } a^* \geq b^*.$$

An involution is an operation with the property $(a^*)^* = a$. An involutory semigroup is called nontrivial, if it contains at least two different elements.

An ordered semigroup is called linear, if the addition is syntonous and if the ordering is total, i.e. if every pair of two elements are comparable.

Linear involutory semigroups can be characterized by the following

Lemma: A linear commutative semigroup S with zero element and an antitonous involution is an involutory semigroup, if and only if for all $a \in S$ with $a \neq u$

$$a^* + \underline{a} < o^* \leq a^* + a, \tag{2}$$

where $\underline{a}$ is the predecessor of a with respect to the ordering and where u is the smallest element, so far as it exists.

Proof: The second inequality of (2) follows from (1) with $a = o$. Let be $o^* \leq c^* + \underline{c}$ and therefore $(c^* + \underline{c})^* \leq o$. Then (1) with $a = c^*$ and $b = \underline{c}$ gives the contradiction $c \leq (c^*+\underline{c})^* + \underline{c} \leq \underline{c}$. Conversely, if (2) is satisfied and $(a^*+b)^* + b \leq \underline{a} < a$, then we obtain the contradiction $(a^*+b)^* + (a^*+b) \leq a^* + \underline{a} < o^*$. In what follows we only consider finite semigroups.

2. The modified combination

In /2/ there was mentioned a procedure termed as modified combination of the Theorems 2 and 4 of /2/. Now we describe in detail what this means.

Theorem: For every nontrivial linear involutory semigroup S of order n with the smallest element u and for every integer $p \geq 1$ there exists a linear involutory semigroup $S^{(\underline{p})}$ of order $np+n+1$ with the elements (a,i), $a \in S$, $0 \leq i \leq p+1$, the ordering

$$(a,i) \leq (b,j) \text{ if } i < j \text{ or } i = j \text{ and } a \leq b, \tag{3}$$

the addition

$$(a,i) + (b,j) = ((a^o + b^o)^o, i+j), \tag{4}$$

the involution

$$(a,i)^* = \begin{cases} ((\underline{a})^o, p-i) & \text{for } a \neq u \text{ and } i \leq p, \\ (u, p+1-i) & \text{for } a = u \text{ and } i \leq p+1, \end{cases} \tag{5}$$

and the identification

$$m = (a,i) \text{ for all } a \in S \text{ and } i > p, \tag{6}$$

where the upper index o denotes the symbol for the involution in S, and m denotes the greatest element of $S^{(\underline{p})}$.

Proof: The zero element reads $o = (o^o, 0)$, the ordering is linear. The associative law follows from

$$(a,i) + (b,j) + (c,k) = ((a^o+b^o+c^o)^o,\ i+j+k),$$

the involution property from $a^o = (\underline{a})^o$, and the monotony is also clear. Finally, choosing the representation $m = (u, p+1)$, we have

$$(a,i)^* + (a,i) = ((\underline{a}+a^o)^o, p),\quad (a,i) + \underline{(a,i)} = ((\underline{a}+\underline{a}^o)^o, p)$$

for $a \neq u$ and

$$(u,i)^* + (u,i) = m,\quad (u,i)^* + \underline{(u,i)} = ((u^o+u)^o, p)$$

as well as $o^* = (\overline{o}, p)$ with $\overline{o} = (\underline{(o^o)})^o$ the successor of o, since $o^o \neq u$. In view of $(b+b^o)^o \leq o < \overline{o}$ the first inequality of (2) is satisfied, and in view of $o < \overline{o} \leq (\underline{a}+a^o)^o$ also the second one. According to (6) the order of the semigroup $S^{(\underline{p})}$ equals to $n(p+1)+1$. Hence the theorem is proved.

Examples for this theorem are the semigroups H_5^5, H_{20}^7, H_{18}^7 from /2/ and /3/ with H^2, H_1^3 and H_2^3, respectively, instead of S and $p = 1$ as well as H_{21}^7 with $S = H^2$ and $p = 2$.

If we choose $S = A_n$ from /2/ the linear involutory semigroup of order $n+1 \geq 2$ with one generator $e = \overline{o}$, then $A_n^{(\underline{p})}$ is a semigroup with the two generators $(e^o, 0)$ and $(o^o, 1)$. The semigroup $\underline{A}_n$ constructed by means of Theorem 4 of /2/ can be considered as the case $A_n^{(\underline{0})}$.

3. Archimedian semigroups

Now we construct a class S_{pqr} of linear archimedian involutory semigroups with nonnegative elements depending on three integers as **parameters**, where p, q have no common divisors, $r \geq 3$ for $p = 2$ and $r \geq 1$ for $p \geq 3$. We require that $p < q$ and define S_{pqr} as the semigroup with zero element generated by the integers p, q and the equality

$$pq - p - q + r = pq - p - q + r + 1. \tag{7}$$

This semigroup possesses the greatest element $2(pq-p-q)+r+1$ and the order $pq-p-q+r+1$.

To <u>prove</u> this assertion we use a theorem of Sylvester (cf. L. Rédei /4/), by which the semigroup with zero element generated by p and q possesses for every i exactly one of the two numbers i and $pq-p-q-i$. Since $i = 0$ is the smallest element of this semigroup, $i = pq-p-q$ is the greatest integer not belonging to it. The identification (7) implies that all integers from

$$(pq-p-q+r) + (pq-p-q+1) = 2(pq-p-q) + r + 1 \tag{8}$$

are equal to each other, so that (8) is the greatest element.

If an integer i with $0 \leq i \leq pq-p-q$ belongs to the semigroup, then $pq-p-q-i$ does not belong to it, what implies according to (7) that

$$2(pq-p-q) + r - i \neq 2(pq-p-q) + r + 1 - i$$

and vice versa. This means that the semigroup possesses $(pq-p-q+1) + r$ elements, and according to Theorem 3 of /2/ it is an involutory semigroup with

$$i^* = 2(pq-p-q) + r + 1 - i.$$

The just constructed semigroup possesses two generators if $q < pq-p-q+r$, i.e. $p < (p-2)q + r$. For $p = 2$ this means that $r \geq 3$, whereas else $r \geq 1$ is possible.

The semigroup with the generators $p = 3$, $q = 8$, the identification $14 = 15 = 16$ and the consequence $17 = 18 = 19$ is not of the foregoing type, but it is isomorphic to S_{256} as can be seen from the following addition tables

0	3	6	8	9	11	12	14	17	20
3	6	9	11	12	14	14	17	20	.
6	9	12	14	14	17	17	20		.
8	11	14	14	17	17	20			.
9	12	14	17	17	20				.
11	14	17	17	20					.
12	14	17	20						.
14	17	20							.
17	20								.
20	.	.	.	.	.	.	.	.	20

0	2	4	5	6	7	8	9	11	13
2	4	6	7	8	9	9	11	13	.
4	6	8	9	9	11	11	13		.
5	7	9	9	11	11	13			.
6	8	9	11	11	13				.
7	9	11	11	13					.
8	9	11	13						.
9	11	13							.
11	13								.
13	.	.	.	.	.	.	.	.	13

with 9 = 10 and 11 = 12 in the second case. The class with $p=2$ is already known from /2/, namely $S_{2,2s+1,t+2}=D_{st}$ with $s\geq 1$, $t\geq 1$ and $D_{1t}=B_{2,t+1}$, moreover, in the notations of /2/ and /3/ we have

$$S_{233}=H_8^5,\ S_{234}=H_{16}^6,\ S_{235}=H_{33}^7,\ S_{253}=H_{31}^7,\ S_{341}=H_{34}^7.$$

4. The number of the semigroups

Up to now we have four classes of linear involutory semigroups with two generators, namely $\underline{A}_p$ of order $p+1$, $A_p^{(q)}$ of order $p(q+1)$, $A_p^{(\underline{q})}$ of order $p(q+1)+1$ and S_{pqr} of order $pq-p-q+r+1$, the first two classes arise by means of Theorem 2 and Theorem 4 of /2/, respectively, with the generators (e,0) and (o,1) in the second case. The numbers k_3 of the first three classes of order n are contained for $n\leq 40$ in the table

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
$\underline{A}_p$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$A_p^{(q)}$		1		2		2	1	2		4		2	2	3		4		4	2	2
$A_p^{(\underline{q})}$			1		2		2	1	2		4		2	2	3		4		4	2
k_3	1	2	2	3	3	3	4	4	3	5	5	3	5	6	4	5	5	5	7	5

n	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
$\underline{A}_p$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$A_p^{(q)}$		6	1	2	2	4		6		4	2	2	2	7		2	2	6
$A_p^{(\underline{q})}$	2		6	1	2	2	4		6		4	2	2	2	7		2	2
k_3	3	7	8	4	5	7	5	7	7	5	7	5	5	10	8	3	5	9

where the number of semigroups $A_p^{(q)}$ of order n equals to the number of different possibilities to split n into two factors. The orders of the semigroups S_{2q3} are the odd numbers from 5, and the orders of the first semigroups S_{pq1} are

p \ q	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3	7	9		13	15		19	21		25	27		31	33		37	39
4		13		19		25		31		37		43		49		55	
5			21	25	29	33		41	45	49	53		61	65	69	73	
6				31				51		61				81		91	

Hence the numbers k_2 of the semigroups S_{2q3}, the numbers k_1 of the semigroups s_{pq1} with $p \geq 3$, the numbers k_4 of all semigroups S_{pqr} and the total numbers k of all four classes of semigroups of order n are

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
k_2			1		1		1		1		1		1		1		1		1	
k_1					1		1				2		1				2		2	
k_4			1	1	3	3	5	5	6	6	9	9	11	11	12	12	15	15	18	18
k	1	2	3	4	6	6	9	9	9	11	14	12	16	17	16	17	20	20	25	23

n	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
k_2	1		1		1		1		1		1		1		1		1	
k_1			3		1		1		3		2				2		1	
k_4	19	19	23	23	25	25	27	27	31	31	34	34	35	35	38	38	40	40
k	22	26	31	27	30	32	32	34	38	36	41	39	40	45	46	41	45	49

with $k_4^{(n)} = \sum_{v \leq n} (k_1^{(v)} + k_2^{(v)})$ and $k = k_3 + k_4$, where the upper index indicates the corresponding order. According to /2/ and /3/ the constructed semigroups with $n \leq 7$ are all linear involutory semigroups with two generators. In the cases up to $n = 40$ we have $k^{(n)} \geq n-2$ with equality in the seven cases $n = 2,3,4,5,6,8,11$ and 14.

5. Supplement from August 7, 1987

The just mentioned inequality

$$k^{(n)} \geq n-2 \tag{9}$$

for $n \leq 40$ is also valid for all n, in fact we have

$$k^{(n)} \geq \frac{6}{5} n - 9, \tag{10}$$

what implies (9) for $n \geq 35$.

Proof: Let $l_p^{(n)}$ be the numbers of the semigroups S_{pq1} with fixed p and, as before, $k_2^{(n)}$ the numbers of the semigroups S_{2q3} of order n. From the last table we have $k_4^{(31)} = 31$. Hence for $n \geq 31$ the number

$$l^{(n)} = 28 + \sum_{v=31}^{n} (k_2^{(v)} + \sum_{q=3}^{p} l_q^{(v)}) \tag{11}$$

with p=5 is a lower bound for the total numbers $k^{(n)}$, and it suffices to prove $l^{(n)} \geq m^{(n)}$ for $n > 35$, where $m^{(n)}$ denotes the right-hand side of (10). The numbers $k_2^{(n)}$, $l_3^{(n)}$, $l_4^{(n)}$, $l_5^{(n)}$ have the periods 2, 6, 6, 20, respectively, so that the common period is 60. Hence the inequality (10) is proved for all n, if we check it for the 60 values from, let us say, n = 31 up to n = 90. This is done in the following table, if we consider $l^{(2i)} = l^{(2i-1)}$ and $m^{(2i)} = m^{(2i-1)} + 1.2$. For simplicity we denote the last number rounded up to the next integer by $m_+^{(2i-1)}$ and drop the upper index n = 2i-1 in all cases:

n	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61
k_2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
l_3	1	1		1	1		1	1		1	1		1	1		1
l_4	1			1			1			1			1			1
l_5		1				1		1		1		1				1
l	31	34	35	38	40	42	45	48	49	53	55	57	60	62	63	67
m_+	30	32	35	37	39	42	44	47	49	51	54	56	59	61	63	66

n	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85	87	89	91
k_2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
l_3	1		1	1		1	1		1	1		1	1		1
l_4			1			1			1			1			1
l_5		1		1		1				1		1		1	
l	69	71	74	77	78	82	84	85	88	91	92	96	98	100	103
m_+	68	71	73	75	78	80	83	85	87	90	92	95	97	99	102

Moreover, we can sharpen (10) by $k^{(n)} = an - b$ with an arbitrary large a, because if we consider for $k^{(n)}$ the lower bound (11) in the case that p and q are primes, then we find

$$a = \sum_{q=2}^{p} \frac{1}{q},$$

and this number tends to infinity as $p \to \infty$.

Correction of /2/: On p.4 of /2/ read at the end of section 1: Every commutative linear semigroup with zero element and a maximal element m with m+x = m for all x is a complementary semigroup.

References

/1/ Berg, L.: Every commutative semigroup can be embedded into a complementary semigroup with involution. Math. Nachr. (to appear)

/2/ Berg, L.: Erzeugung linearer involutorischer Halbgruppen. Rostock. Math. Kolloq. 32, 25 - 38 (1987)

/3/ Peters, W.: Berechnung der linearen involutorischen Halbgruppen sechster und siebenter Ordnung. Rostock. Math. Kolloq. (to appear)

/4/ Rédei, L.: Theorie der endlich erzeugbaren kommutativen Halbgruppen. Leipzig 1963

received: June 3, 1987

Author:

Prof. Dr. L. Berg
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
Rostock
DDR-2500

Rostock. Math. Kolloq. 33, 57 - 64 (1988)

15A06
65R20

Michael J. C. Gover

The efficient solution of a set of linear equations with a near r-Toeplitz coefficient matrix

Abstract

A well known algorithm for solving a Toeplitz set of linear equations is adapted to solve equations with a Toeplitz-like coefficient matrix. These equations arise from applying the technique of product integration to the numerical solution of certain integral equations.

1. Introduction

Integral equations of the type

$$y(t) = f(t) + \int_0^1 k(t-s)y(s)ds, \quad 0 \leq t \leq 1 \tag{1.1}$$

occur frequently in practical applications. One example of this in which we have recently been involved is the investigation of sound propagation over an inhomogeneous plane /4/. In this problem, a number of strips of admittance ϱ_2 are embedded in a plane of admittance ϱ_1. If the integral is split into a number of equal subintervals, (1.1) reduces to a set of linear equations. The coefficient matrix of this set is either Toeplitz or r-Toeplitz depending on whether one or more strips have been embedded into the original plane.

Definition 1.1: A matrix $A = [a_{ij}]$, of order n, is r-Toeplitz if

$$a_{i+r,j+r} = a_{ij}, \quad i,j = 1,2,\ldots,n-r. \tag{1.2}$$

The set of r-Toeplitz matrices contains both Toeplitz (when r=1) and block Toeplitz (when n=rm) matrices as subsets. An algorithm for solving r-Toeplitz equations is given in /7/, which also contains an inversion algorithm for r-Toeplitz matrices and an algorithm for solving a Toeplitz set of equations, when the coefficient matrix is not strongly nonsingular.

The technique described above becomes inaccurate in the case of weakly singular integral equations. This leads us to consider the method of product integration, further details of which can be found, for example, in /1/ and /2/. It is shown in /3/ that we obtain the set of 2n+1 linear equations

$$(A+B)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{2n+1} \end{bmatrix}, \tag{1.3}$$

where A is a 2-Toeplitz matrix, the only nonzero elements of B occur in its first and last columns and A + B is centrosymmetric.

Definition 1.2 (/6/): A matrix D, of order n, is centrosymmetric if it satisfies the equation

$$DJ = JD, \tag{1.4}$$

where J is the reverse unit matrix having ones in the secondary diagonal and zeros elsewhere.

The purpose of this paper is to give an efficient algorithm for solving (1.3), taking advantage of all the pattern of A + B. This is achieved by first modifying the algorithm in /7/, to take account of the centrosymmetry, and then using a bordering technique, similar to that found, for example, in /5/.

2. The solution of $(A+B)\underline{x} = \underline{c}$ - Theory

We shall assume throughout this paper that A + B, the submatrix T_{2n-1} of A + B formed by removing its first and last rows and columns and the submatrices of T_{2n-1}, T_i formed by removing its first 2p rows and columns, p = 1,2,...,n-2 are all nonsingular.

It is important to note that T_{2n-1} and T_i, i = 3,5,...,2n-3 are both 2-Toeplitz and centrosymmetric. Since $J^{-1} = J$, (1.4) shows that T_i^{-1}, i = 3,5,...,2n-1 is also centrosymmetric.

The set of equations

$$T_{2n-1}\underline{y} = \underline{d}, \tag{2.1}$$

where $\underline{d} = [c_2, \dots, c_{2n}]^T$ and $\underline{y} = [y_1, \dots, y_{2n-1}]^T$ can now be solved using the r-Toeplitz algorithm in /7/, with r = 2. However the centrosymmetry of T_{2n-1} and its submatrices lead to certain simplifications. Details of this algorithm are given in the next section.

In order to complete the solution of (1.3), let $A + B = [p_{ij}]$ and partition (1.3) in the form

$$\begin{bmatrix} \alpha & \underline{u}^T & \beta \\ \underline{v} & T_{2n-1} & J\underline{v} \\ \beta & \underline{u}^T J & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \underline{x}' \\ x_{2n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \underline{d} \\ c_{2n+1} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

where $\alpha = p_{11} = p_{2n+1,2n+1}$, $\beta = p_{2n+1,1} = p_{1,2n+1}$,

$\underline{u}^T = [p_{12}, \dots, p_{1,2n}]$, and $\underline{v} = [p_{21}, \dots, p_{2n,1}]^T$.

From (2.2) we now obtain the three equations

$$\alpha x_1 + \underline{u}^T \underline{x}' + \beta x_{2n+1} = c_1, \tag{2.3}$$

$$x_1 \underline{v} + T_{2n-1} \underline{x}' + x_{2n+1} J \underline{v} = \underline{d}, \tag{2.4}$$

$$\beta x_1 + \underline{u}^T J \underline{x}' + \alpha x_{2n+1} = c_{2n+1}. \tag{2.5}$$

Equation (2.4) can be solved for $\underline{x}'$, using (2.1), (1.4) and the centrosymmetry of T_{2n-1}, to give

$$\underline{x}' = \underline{y} - x_1 T_{2n-1}^{-1} \underline{v} - x_{2n+1} J T_{2n-1}^{-1} \underline{v}. \tag{2.6}$$

Substituting (2.6) in (2.3) and (2.5) produces a pair of simultaneous equations in x_1 and x_{2n+1}. Equation (2.6) can then be used to find $\underline{x}'$, thus solving (1.3).
The major task in these solutions is to calculate $T_{2n-1}^{-1}\underline{v}$, i.e. to solve, for $\underline{z}$, the equation

$$T_{2n-1} \underline{z} = \underline{v}. \tag{2.7}$$

This has the same coefficient matrix as (2.1) and so instead of solving (2.1) and (2.7) separately, we solve the single equation

$$T_{2n-1} [\underline{y} \; \underline{z}] = [\underline{d} \; \underline{v}] = V. \tag{2.8}$$

Remark: In most bordering methods, as for example in /5/, a single row and column are removed. However in (2.2) the partitioning is chosen so as to retain the centrosymmetry property.

3. The solution of $(A+B)\underline{x} = \underline{c}$ – Algorithm

The first two steps below are the adapted 2-Toeplitz algorithm from /7/, used to solve (2.8). The third step solves (2.3), (2.4) and (2.5) and hence (1.3).

Let $[A+B]_{ij} = p_{ij}$ and $[\underline{c}]_i = c_i$.

Step 1: Determine T_3^{-1} and $[\underline{y}_3\ \underline{z}_3] = T_3^{-1}V_3$ where

$$T_3 = \begin{bmatrix} p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{32} & p_{33} & p_{32} \\ p_{24} & p_{23} & p_{22} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad V_3 = \begin{bmatrix} c_2 & p_{21} \\ c_3 & p_{31} \\ c_4 & p_{41} \end{bmatrix}.$$

Define Y_1, E_1 and F_1 from

$$T_3^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} Y_1 & E_1^T \\ F_1 & \cdot \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 2 \\ 1 \end{array}.$$

Step 2: Define $R_1 = [p_{24}\ p_{34}]$, $S_1 = [p_{42}\ p_{43}]$, $D_3 = JV_3$.

For $k = 3,5,\ldots,2n-3$ define

$$R_k^1 = \begin{bmatrix} p_{2,k+3} & p_{3,k+3} \\ p_{2,k+2} & p_{3,k+2} \end{bmatrix}, \quad D_{k+2}^1 = \begin{bmatrix} c_{k+3} & p_{k+3,1} \\ c_{k+2} & p_{k+2,1} \end{bmatrix},$$

$$R_k = \begin{bmatrix} R_k^1 \\ R_{k-2} \end{bmatrix}, \quad S_k = \begin{bmatrix} J(R_k^1)^T J \\ S_{k-2} \end{bmatrix}, \quad D_{k+2} = \begin{bmatrix} D_{k+2}^1 \\ D_k \end{bmatrix}.$$

For $k = 1,3,\ldots,2n-5$ determine

$$\gamma_k = Y_k^T R_{k+2}^1 + F_k^T R_k,$$

$$\delta_k = Y_k (R_{k+2}^1)^T + E_k^T S_k,$$

$$Y_{k+2} = (I-\delta_k^4)^{-1}(Y_k+\delta_k Y_k \gamma_k^T),$$

$$E_{k+2} = \begin{bmatrix} E_k Y_k^{-T} Y_{k+2}^T - J_k E_k Y_k^{-T}(\delta_k Y_{k+2})^T \\ J_2(\delta_k Y_{k+2})^T \end{bmatrix},$$

$$F_{k+2} = \begin{bmatrix} F_k Y_k^{-1} Y_{k+2} - J_k F_k Y_k^{-1} \delta_k Y_{k+2} \\ J_2 \delta_k Y_{k+2} \end{bmatrix},$$

$$\Theta_{k+2} = Y_{k+2}^{-1} E_{k+2}^T D_{k+2} + D_{k+4}^1,$$

$$\left[\underline{y}_{k+4} \quad \underline{z}_{k+4}\right] = \begin{bmatrix} [\underline{y}_{k+2} \quad \underline{z}_{k+2}] + J_{k+2} F_{k+2} \Theta_{k+2} \\ J_2 Y_{k+2} \Theta_{k+2} \end{bmatrix}.$$

<u>Step 3:</u> Determine, using the notation of (2.2),

$$\mu = p_{11} - \underline{u}^T \underline{z}, \quad \nu = p_{2n+1,1} - \underline{u}^T J \underline{z},$$

$$\xi = \underline{u}^T \underline{y}, \quad \eta = \underline{u}^T J \underline{y},$$

$$x_1 = \left[(c_1 - \xi)\mu - (c_{2n+1} - \eta)\nu\right]/(\mu^2 - \nu^2),$$

$$x_{2n+1} = \left[(c_{2n+1} - \eta)\mu - (c_1 - \xi)\nu\right]/(\mu^2 - \nu^2),$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \underline{y} - x_1 \underline{z} - x_{2n+1} J \underline{z} \\ x_{2n+1} \end{bmatrix}.$$

An operation count on this algorithm gives $32n^2 + O(n^2)$ flops. Using a standard solution method for a set of equations of order $2n+1$ gives approximately $8n^3/3$ flops so that the algorithm given here is more efficient when $n > 12$.

4. The solution of $(A+B)\underline{x} = \underline{c}$ - Example

To solve

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \\ -4 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

Step 1:

$$T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad V_3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{gives}$$

$$[\underline{y}_3 \quad \underline{z}_3] = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ 1 & -1/4 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix},$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}, \quad E_1 = [1/2 \ \ 1/4], \quad F_1 = [1/2 \ \ -1/2].$$

Step 2: Define $R_1 = [2 \ -1]$, $S_1 = [2 \ 2]$,

$$R_3^1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_3 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_5^1 = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -13 & 5 \end{bmatrix}, \quad \delta_1 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad Y_3 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 12 & 16 \\ -7 & -11 \end{bmatrix},$$

$$E_3 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -15 & 10 \\ 19 & -9 \\ 13 & -8 \end{bmatrix}, \quad F_3 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -20 & -30 \\ -8 & -9 \\ 13 & 19 \end{bmatrix},$$

$$\Theta_3 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 36 & 9 \\ -16 & 3 \end{bmatrix}, \quad [\underline{y}_5\ \underline{z}_5] = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 164 & 164 \\ -124 & -104 \\ -220 & -260 \\ -76 & -96 \\ 176 & 156 \end{bmatrix}.$$

Step 3: $\mu = \frac{48}{5}, \quad \nu = \frac{42}{5}, \quad \xi = -\frac{53}{5}, \quad \zeta = -\frac{32}{5},$

$x_1 = 1, \ x_2 = 0, \ \underline{x}' = [0\ -1\ \ 2\ \ 1\ \ 1].$

The solution to (4.1) is therefore

$\underline{x} = [1\ \ 0\ -1\ \ 2\ \ 1\ \ 1\ \ 0]^T.$

References

/1/ Atkinson, K. E.: The numerical solution of Fredholm integral equations of the second kind. SIAM J. Numer. Anal. 4, 337 - 348 (1967)

/2/ Chandler, G. A.: Product integration methods for weakly singular second kind integral equations. Research Report, Australian Nat. Univ., Centre Math. Anal., Canberra 1979

/3/ Chandler-Wilde, S. N., and Gover, M. J. C.: On the application of a generalisation of Toeplitz matrices to the numerical solution of weakly singular integral equations. 1. Int. Conf. on Indust. and Appl. Math., Paris 1987

/4/ Chandler-Wilde, S. N., Gover, M. J. C., and Hothersall, D. C.: Sound propagation over inhomogeneous boundaries. Internoise Conf., Cambridge, Mass., 1986

/5/ Frazer, R. A., Duncan, W. J., and Collar, A. R.: Elementary Matrices. Cambridge U. P. 1938

/6/ Good, I. J.: The inverse of a centrosymmetric matrix. Technometrics 12, 925 - 928, 1970

/7/ Gover, M. J. C., and Barnett, S.: Inversion of Toeplitz matrices which are not strongly nonsingular. IMA J. Numer. Anal. 5, 101 - 110 (1985)

received: May 26, 1987

Author:

Doz. Dr. M. J. C. Gover
School of Mathematical Sciences
University of Bradford
Bradford
West Yorkshire BD7 1DP
England

Rostock. Math. Kolloq. 33, 65 - 74 (1988) 35J05 35J25

Klaus Bayer

Zu den Integralgleichungen für Polarisation und Magnetisierung[1]

1. Einleitung

Wir betrachten zwei klassische Probleme der Potentialtheorie: die Polarisation eines Dielektrikums unter dem Einfluß eines stationären elektrischen Felds und ihr magnetisches Analogon, die Magnetisierung eines Dia- bzw. Paramagnetikums.
Im ersten Fall ist die Polarisation P eines in ein elektrisches Feld E_a gebrachten dielektrischen Körpers Ω (mit Lipschitz-Rand Γ) zu bestimmen. Befinden sich die Feldquellen $\operatorname{div} E_a = 4\pi\varrho$ (im Gaußschen Maßsystem) außerhalb $\bar{\Omega}$, d. h., gilt

$$\operatorname{spt} \varrho \cap \bar{\Omega} = \emptyset, \tag{1.1}$$

so ist bei linearem Zusammenhang

$$P = \chi E, \ \chi = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \tag{1.2}$$

zwischen Polarisation und Gesamtfeld E das Kopplungsproblem

$$\operatorname{rot} E = 0, \ \operatorname{div}(E - E_a) = 0 \text{ in } \Omega \text{ und in } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega},$$

$$E_t^+ - E_t^- = E_n^+ - \varepsilon E_n^- = 0 \text{ längs } \Gamma,$$

$$E - E_a = O(|x|^{-2}) \text{ für } |x|^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 \to \infty$$

zu lösen. Dabei bezeichnet $\varepsilon > 1$ die Dielektrizitätskonstante von Ω; die unteren Indizes t bzw. n weisen auf die tangentiallen bzw. normalen Komponenten des Feldstärkevektors, schließlich kennzeichnen obere Signa Grenzwerte von außen ("+") und von innen ("-"). Unser Ausgangspunkt ist die klassische Integralgleichung

$$E = E_a - \nabla \int_{\Omega} P \nabla_y \frac{1}{r} \, dy \text{ mit } (1.2) \tag{1.3}$$

---

1 Vortrag, gehalten am 08. 10. 1986 im Mathematischen Kolloquium der Sektion Mathematik der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

(s. z.B. /3/) zur Bestimmung der Polarisation. Es ist $dy = dy_1 dy_2 dy_3$, und $r = |y-x|$ bezeichnet den Abstand zwischen Integrations- und Aufpunkt. In Abschnitt 2 wird gezeigt, daß dieser Gleichung ein positiv definites Variationsproblem über dem Raum

$$H(\mathrm{div};\Omega) = \left\{P \in L_2(\Omega,\mathbb{R}^3):\ \mathrm{div}\ P \in L_2(\Omega)\right\},$$

$$\|P;\ H(\mathrm{div};\Omega)\| = \left(\|P;\ L_2(\Omega,\mathbb{R}^3)\|^2 + \|\mathrm{div}\ P;\ L_2(\Omega)\|^2\right)^{1/2}$$

(zu [illegible] m s. /2/) entspricht.

Der zweite Fall betrifft die Magnetisierung M eines Dia- bzw. Paramagnetikums Ω. Verfügen wir über die Quellen $\mathrm{rot}\ B_a = 4\pi j$ des erregenden Felds B_a wie eben

$$\mathrm{spt}\ j \cap \bar{\Omega} = \emptyset, \tag{1.4}$$

so führt dies bei voraussetzungsgemäßem linearen Zusammenhang

$$M = \frac{\chi}{\mu} B, \quad \chi = \frac{\mu-1}{4\pi} \tag{1.5}$$

zwischen Magnetisierung und Gesamtfeld B zu dem magnetischen Kopplungsproblem

$$\mathrm{div}\ B = 0,\ \mathrm{rot}\ (B-B_a) = 0 \text{ in } \Omega \text{ und in } R^3 \setminus \bar{\Omega},$$

$$B_n^+ - B_n^- = B_t^+ - \mu B_t^- = 0 \text{ längs } \Gamma$$

$$B - B_a = O(|x|^{-2}) \text{ für } |x|^2 \to \infty$$

(Indizierung wie oben). Die Konstante $\mu > 0$ bezeichnet die magnetische Permeabilität des Magnetikums und χ seine Suszeptibilität. An die Stelle von (1.3) tritt jetzt die Integralgleichung

$$B = B_a + \mathrm{rot} \int_{\Omega} M \times \nabla_y \frac{1}{r}\, dy \text{ mit } (1.5) \tag{1.6}$$

zur Berechnung von M. Abschnitt 3 enthält die Konstruktion eines dazu äquivalenten Variationsproblems. Auf die numerischen Aspekte dieses Zugangs soll in anderem Zusammenhang eingegangen werden.

2. Polarisation

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand Γ. Wir betrachten die Integralgleichung (1.3)

$$\frac{P}{\chi} = E_a - \nabla \int_{\Omega} P \nabla_y \frac{1}{r} \, dy$$

bzw. - nach partieller Integration -

$$\frac{P}{\chi} = E_a + \nabla \int_{\Omega} \operatorname{div} P \frac{dy}{r} - \nabla \int_{\Gamma} P_n \frac{d\Gamma}{r}, \tag{2.1}$$

wobei $P_n = nP$ die Normalkomponente des Polarisationsfelds bez. der Außennormalen n an Γ bezeichnet. Divergenzbildung auf beiden Seiten von (2.1) liefert

$$\frac{1}{\chi} \operatorname{div} P = \operatorname{div} E_a - 4\pi \operatorname{div} P \text{ in } \Omega,$$

also wegen (1.1)

$$\operatorname{div} P = 0 \text{ in } \Omega. \tag{2.2}$$

Mit dieser Vereinfachung geht (2.1) über in

$$\frac{P}{\chi} = E_a - \nabla \int_{\Gamma} P_n \frac{d\Gamma}{r} \text{ in } \Omega. \tag{2.3}$$

Multiplizieren wir (2.3) mit Testfunktionen $\varphi \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$, $\operatorname{div} \varphi = 0$ in Ω, und setzen abkürzend $\varphi_n = n\varphi$ sowie

$$V = V[P_n] = \int_{\Gamma} P_n \frac{d\Gamma}{r},$$

so folgt nach Integration über Ω

$$\frac{1}{\chi} \int_{\Omega} \varphi P dx = \int_{\Omega} \varphi E_a dx - \int_{\Omega} \varphi \nabla V dx = \int_{\Omega} \varphi E_a dx - \int_{\Gamma} \varphi_n V d\Gamma. \tag{2.4}$$

Offensichtlich sind das die Variationsgleichungen zu dem quadratischen Variationsproblem

$$\frac{1}{2\chi} \int_{\Omega} |P|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} P_n V[P_n] d\Gamma - \int_{\Omega} E_a P dx \longrightarrow \min \tag{2.5}$$

unter der Nebenbedingung (2.2).

Problem (2.5) ist über dem Hilbertraum $H(\mathrm{div};\Omega)$ zu stellen. Über diesem Raum gilt der wichtige Spursatz (s. /2/):
Die Spurabbildung

$$P \longrightarrow nP|_{\Gamma} = P_n \tag{2.6}$$

überführt $H(\mathrm{div};\Omega)$ stetig auf $H^{-1/2}(\Gamma)$.

<u>Satz 1:</u> Unter den Voraussetzungen

$$E_a \in L_2(\Omega, \mathbb{R}^3), \ \mathrm{div}\, E_a = 0 \text{ in } \Omega \tag{2.7}$$

ist (2.5) über $H(\mathrm{div};\Omega)$ eindeutig lösbar. Die Extremale ist Lösung von (2.3).

<u>Beweis:</u> Der Beweis beruht auf einer bekannten Abbildungseigenschaft des Potentials

$$f \longrightarrow V[f] = \int_{\Gamma} f \frac{d\Gamma}{r} \tag{2.8}$$

der einfachen Schicht (s. /1/, /7/): Die Abbildung (2.8) definiert einen Isomorphismus von $H^{-1/2}(\Gamma)$ auf $H^{1/2}(\Gamma)$. Darüber hinaus stellt die Paarung

$$_{H^{-1/2}(\Gamma)}\langle f, V[f] \rangle_{H^{1/2}(\Gamma)} = \int_{\Gamma}\int_{\Gamma} \frac{f(x)f(y)}{|x-y|}\, d\Gamma_x d\Gamma_y \tag{2.9}$$

eine über $H^{-1/2}(\Gamma)$ positiv definite quadratische Form dar. Die Stetigkeitseigenschaften der Abbildungen (2.6), (2.8-9) implizieren

$$0 \leq \int_{\Gamma} P_n V[P_n] d\Gamma \leq \|P_n\|_{-1/2} \|V[P_n]\|_{1/2} \leq C\|P_n\|^2_{-1/2}$$

$$\leq C' \|P;\ H(\mathrm{div};\Omega)\|^2;$$

das Randintegral in (2.5) definiert demzufolge eine beschränkte, nichtnegative quadratische Form über $H(\mathrm{div};\Omega)$. Die eindeutige Lösbarkeit des Variationsproblems über dem Unterraum der divergenzfreien Felder folgt danach aus dem Lemma von Lax-Milgram; man beachte $\chi > 0$.

Für divergenzfreie Felder $\varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$ gelten nach (2.4) die Variationsgleichungen

$$\frac{1}{\chi} \int_\Omega \varphi P dx - \int_\Omega \varphi E_a dx = 0.$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{\chi} P - E_a = \nabla u, \; u \in \mathcal{D}'(\Omega) \tag{2.10}$$

nach einem bekannten Satz von de Rham (s. /8/, /9/). Da die linke Seite dieser Gleichung wegen (2.7) zu $L_2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ gehört, gilt (für beschränkte Lipschitzgebiete) $u \in L_2(\Omega)$, mithin $u \in H^1(\Omega)$. Formel (2.10) und die vollständigen Variationsgleichungen implizieren

$$0 = \int_\Omega \varphi \nabla u dx + \int_\Gamma \varphi_n V d\Gamma = \int_\Gamma (u+V) \varphi_n d\Gamma$$

für alle $\varphi \in L_2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ mit div $\varphi = 0$, woraus

$$u + V[P_n] = \text{const. längs } \Gamma \tag{2.11}$$

folgt. Da u nach (2.7) und (2.10) harmonisch in Ω ist, trifft (2.11) auch innerhalb Ω zu, woraus schließlich (2.3) folgt.

<u>Bemerkung:</u> Für $\varepsilon \to +\infty$ geht (2.5) über in

$$\frac{1}{2} \int_\Gamma P_n V[P_n] d\Gamma - \int_\Omega E_a P dx \longrightarrow \min. \tag{2.12}$$

Führen wir in (2.12) $E_a = -\nabla u_a$ ein und integrieren partiell, so gelangen wir mit Gauß /4/ zum Variationsproblem

$$\frac{1}{2} \int_\Gamma P_n V[P_n] d\Gamma - \int_\Gamma u_a P_n d\Gamma \longrightarrow \min \text{ (über } H^{-1/2}(\Gamma)) \tag{2.13}$$

unter der Nebenbedingung $\int_\Gamma P_n d\Gamma = 0.$

(2.13) beschreibt die unter E_a induzierte Ladungsdichte längs einer Leiteroberfläche.

3. Magnetisierung

Wenden wir uns jetzt (1.6) zu:

$$\frac{\mu}{\chi} M = B_a + \operatorname{rot} \int_\Omega M \times \nabla_y \frac{1}{r}\, dy. \tag{3.1}$$

Wie vorn bezeichne Ω ein beschränktes Lipschitzgebiet im $\mathbb{R}^3$ mit Rand Γ.

Nach Umformung des Volumenintegrals

$$\operatorname{rot} \int_\Omega M \times \nabla_y \frac{1}{r}\, dy = - \operatorname{rot} \int_\Omega M \times \nabla_x \frac{1}{r}\, dy$$

$$= \operatorname{rot} \operatorname{rot} \int_\Omega M \frac{dy}{r} = \nabla \operatorname{div} \int_\Omega M \frac{dy}{r} + 4\pi M \text{ in } \Omega,$$

ergibt sich bei Berechnung der Rotation von (3.1)

$$\frac{\mu}{\chi} \operatorname{rot} M = \operatorname{rot} B_a + 4\pi \operatorname{rot} M = 4\pi(j + \operatorname{rot} M)$$

und hieraus folgend

$$\operatorname{rot} M = 0 \text{ in } \Omega; \tag{3.2}$$

man beachte die Voraussetzung (1.4) über den Träger von j. Integrieren wir jetzt in (3.1) partiell und ber ichtigen dabei (3.2), so folgt

$$\frac{\mu}{\chi} M = B_a - \operatorname{rot} \int_\Gamma n \times M \frac{d\Gamma}{r} = B_a - \operatorname{rot} V[n \times M] \tag{3.3}$$

mit der Abkürzung (2.8).

Auf dem weiteren Wege multiplizieren wir (3.3) mit wirbelfreien Testfunktionen $\varphi \in C^1(\bar{\Omega}, R^3)$ und integrieren über Ω, wobei wir

$$\frac{\mu}{\chi} \int_\Omega M \varphi\, dx = \int_\Omega B_a \varphi\, dx - \int_\Omega \varphi \operatorname{rot} V[n \times M]\, dx$$

bzw. nach erneuter partieller Integration

$$\frac{\mu}{\chi}\int_\Omega M\,\varphi\,dx = \int_\Omega B_a\,\varphi\,dx + \int_\Gamma (n\times\varphi)V[n\times M]\,d\Gamma \tag{3.4}$$

erhalten.

Die folgenden Überlegungen treffen für einfach zusammenhängende Gebiete zu. Nach Einführung von

$M = \nabla u$ bzw. $\varphi = \nabla v$

in (3.4) folgt

$$\frac{\mu}{\chi}\int_\Omega \nabla u\,\nabla v\,dx - \int_\Gamma (n\times\nabla v)V[n\times\nabla u]\,d\Gamma = \int_\Omega B_a\,\nabla v\,dx. \tag{3.5}$$

Dies sind die Variationsgleichungen zu

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2dx - \frac{\chi}{2\mu}\int_\Gamma (n\times\nabla u)V[n\times\nabla u]\,d\Gamma - \frac{\chi}{\mu}\int_\Omega B_a\,\nabla u\,dx \to \min, \tag{3.6}$$

wobei das Variationsproblem über dem Faktorraum $\overset{\bullet}{L}{}_2^1(\Omega)$,

$$\overset{\bullet}{L}{}_2^1(\Omega) = \left\{u \in \mathcal{D}'(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(\Omega) \text{ für } i = 1,2,3\right\}/\mathbb{R},$$

$$\|u;\, \overset{\bullet}{L}{}_2^1(\Omega)\| = \||\nabla u|;\, L_2(\Omega)\|$$

zu stellen ist. (Zu diesem Raum s. z.B. /6/.)

<u>Satz 2.</u> (i) Unter der Voraussetzung $B_a \in L_2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ besitzt (3.6) eine eindeutig bestimmte Extremale $u \in \overset{\bullet}{L}{}_2^1(\Omega)$. Dabei ist u schwache Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= -\frac{\chi}{\mu}\operatorname{div} B_a \text{ in } \Omega,\\ \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\chi}{\mu}\, n\cdot\operatorname{rot} V[n\times\nabla u] &= \frac{\chi}{\mu}\, nB_a \text{ längs } \Gamma.^{2} \end{aligned} \tag{3.7}$$

(ii) Ist Ω einfach zusammenhängend und gilt zusätzlich

$$\operatorname{rot} B_a = 0 \text{ in } \Omega, \tag{3.8}$$

so wird (3.3) durch $M = \nabla u$ gelöst.

---

2 Die Randbedingung ist über $H^{-1/2}(\Gamma)$ aufzufassen, falls $\operatorname{div} B_a \in L_2(\Omega)$.

Wir erinnern vor dem Beweis an die im distributiven Sinn für Funktionen $u \in H^1(\Omega)$, $\varphi \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ gültige Formel

$$\int_\Gamma (n \times \nabla u)\, \varphi \, d\Gamma = - \int_\Gamma u \; n \cdot \operatorname{rot} \varphi \, d\Gamma \tag{3.9}$$

sowie an die wichtige Beziehung

$$\operatorname{rot} V[n \times \nabla u] = \nabla W[u] \text{ in } \Omega \text{ (für } u \in H^{1/2}(\Gamma)) \tag{3.10}$$

zwischen den Potentialen V (vgl. (2.8)) bzw. W der einfachen bzw. doppelten Schicht,

$$W[u] = \int_\Gamma u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \, d\Gamma.$$

(Zu den Abbildungseigenschaften des Dipolpotentials s. /1/, /5/).

<u>Hilfssatz 1:</u> Für $u \in H^1(\Omega)$ gilt

$$\int_\Gamma (n \times \nabla u) V[n \times \nabla u] \, d\Gamma \leq 4\pi \int_\Omega |\nabla u|^2.$$

<u>Beweis:</u> Gehört u zu $H^1(\Omega)$, so gilt nach (3.9) und (3.10)

$$\int_\Gamma (n \times \nabla u) V[n \times \nabla u] \, d\Gamma = - \int_\Gamma u \; n \cdot \operatorname{rot} V[n \times \nabla u] \, d\Gamma$$

$$= - \int_\Gamma u \frac{\partial}{\partial n} W[u] \, d\Gamma = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma (W[u]^- - W[u]^+) \frac{\partial}{\partial n} W[u] \, d\Gamma$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma |\nabla W[u]|^2 dx + \frac{1}{4\pi} \int_{R^3 \setminus \bar{\Omega}} |\nabla W[u]|^2 dx.$$

Obere Signa kennzeichnen wie vorn die Grenzwerte von außen bzw. von innen. Fassen wir W[u] als Extremale des Variationsproblems

$$\int_\Omega |\nabla W|^2 dx + \int_{R^3 \setminus \bar{\Omega}} |\nabla W|^2 dx \to \min \text{ (über } \mathring{L}_2^1(\Omega) \times \mathring{L}_2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}))$$

$$\text{unter } W^+ - W^- = 4\pi u \text{ (+ const.) längs } \Gamma$$

auf, dann liefert das Vergleichspaar

$(4\pi u, 0) \in \mathring{L}_2^1(\Omega) \times \mathring{L}_2^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})$ die behauptete obere Schranke

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\Omega}|\nabla W[u]|^2dx + \frac{1}{4\pi}\int_{R^3\setminus\bar{\Omega}}|\nabla W[u]|^2dx \leq 4\pi\int_{\Omega}|\nabla u|^2dx$$

für das Variationsintegral.

Beweis von Satz 2: Existenz und Unität der Extremalen in (i) sind in bekannter Weise aus der Positivität des quadratischen Anteils von (3.6)

$$\int_{\Omega}|\nabla u|^2dx - \frac{\chi}{\mu}\int_{\Gamma}(n\times\nabla u)V[n\times\nabla u]d\Gamma$$

$$\geq (1-\frac{4\pi\chi}{\mu})\int_{\Omega}|\nabla u|^2dx = \frac{1}{\mu}\|u;\ \dot{L}_2^1(\Omega)\|^2$$

(vgl. Hilfssatz 1) in Verbindung mit der Stetigkeit der Spurabbildung

$$n\times\nabla(\ ):\ H^1(\Omega)\longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$$

zu erschließen. (3.7) folgt nach Vergleich von (3.5) mit (3.9).

Zum Nachweis von (ii) setze man $B_a = \nabla\psi$, wobei (für beschränkte Lipschitzgebiete) $\psi \in H^1(\Omega)$ wegen $B_a \in L_2(\Omega,\mathbb{R}^3)$ gilt. Aus (3.7) und (3.10) entnimmt man nun die Gültigkeit von

$$-\Delta(u+\frac{\chi}{\mu}W[u]-\frac{\chi}{\mu}\psi) = 0 \text{ in } \Omega \text{ und}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}(u+\frac{\chi}{\mu}W[u]-\frac{\chi}{\mu}\psi) = 0 \text{ längs } \Gamma,$$

woraus

$$u+\frac{\chi}{\mu}W[u]-\frac{\chi}{\mu}\psi = \text{const. in } \Omega$$

und weiter

$$\nabla(u+\frac{\chi}{\mu}W[u]-\frac{\chi}{\mu}\psi) = \nabla u + \frac{\chi}{\mu}\operatorname{rot} V[n\times\nabla u] - \frac{\chi}{\mu}B_a = 0$$

folgt.

Auf die Modifikationen bei mehrfachem Zusammenhang wird in dieser Note nicht eingegangen.

Literatur

/1/ Costabel, M.: Boundary integral operators on Lipschitz-domains: Elementary results. Techn. Hochschule Darmstadt: Preprint 898, Darmstadt 1985

/2/ Duvaut, G., et Lions, J.-L.: Les inéquations en mécanique et en physique. Paris 1972

/3/ Friedrichs, K. O.: Mathematical methods of electromagnetic theory. New York 1974

/4/ Gauß, C. F.: Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstoßungskräfte (1840). Leipzig 1889

/5/ Giroire, J., and Nedelec, J. C.: Numerical solution of an exterior Neumann problem using a double layer potential. Math. Comp. 32, 973 - 990 (1978)

/6/ Maz'ja, V. G.: Sobolev Spaces. Berlin 1985

/7/ Nedelec, J. C., et Planchard, J.: Une méthode variationelle d' éléments finis pour la résolution numérique d'un problème extérieur dans R^3. RAIRO R-3 7, 105 - 129 (1973)

/8/ de Rham, G.: Variétés différentiables. Formes, courants, formes harmoniques. Paris 1955

/9/ Temam, R.: Navier-Stokes-Equations, theory and numerical analysis. Amsterdam 1979

eingegangen: 06. 07. 1987

Verfasser:

Prof. Dr. K. Beyer
Karl-Marx-Universität Leipzig
Sektion Mathematik
Karl-Marx-Platz
Leipzig
DDR-7010

Rostock. Math. Kolloq. 33, 75 - 76 (1988) 20D10
20D30

Armando A. Sabater Fernández

Endliche Gruppen mit Ketteneigenschaften für gewisse Untergruppen

Autorreferat der Dissertation A

In der Arbeit wird die Struktur endlicher Gruppen untersucht, in denen Untergruppenketten mit gegebenen Eigenschaften vorkommen. Sie untergliedert sich in zwei Hauptteile.

Im ersten Teil werden Gruppen mit gewissen Subnormalreihen betrachtet, wobei Fragen nach p-Abgeschlossenheit und p-Nilpotenz im Mittelpunkt stehen. Für einen Normalteiler M der Gruppe G heißt eine Untergruppe U von G M-subnormal, falls ein Supplement H zu M in G existiert, so daß U subnormal in H ist. Unter anderem wurden folgende Ergebnisse erzielt, wobei P eine p-Sylowgruppe von G bezeichnet.

Theorem 1: Die Kommutatorgruppe G' der Gruppe G ist genau dann p-abgeschlossen, wenn $O_p(N_G(P)')$ subnormal in G ist.

Theorem 2: Wird unter A ein p-Sylowkomplement in $N_G(P)$ verstanden, sind folgende Aussagen gleichwertig:

1) $N_G(P)'$ ist subnormal in G.

2) G' ist p-abgeschlossen und A' ist $O_p(G')$-subnormal in G.

3) $O_p(G)$ enthält $O_p(N_G(P'))$ und A' ist $O_p(G)$-subnormal in G.

Theorem 3: Genau dann ist G' nilpotent, wenn die Ableitungen aller Untergruppen von G in G subnormal sind.

Im zweiten Teil werden sogenannte DSC-Gruppen betrachtet, welche dadurch definiert sind, daß in ihnen die Ableitungen aller Untergruppen bezüglich der Inklusion linear geordnet sind. Zu ihnen gehören neben den abelschen Gruppen die Redéi-Gruppen und die Gruppen mit einer Primzahl als Kommutatorgruppenordnung. Die DSC-Gruppen erweisen sich als auflösbar. Genauere Aussagen über ihre Ableitung enthält

Theorem 4: Für eine DSC-Gruppe gilt:

1) G' ist eine p-Gruppe zu einer gewissen Primzahl p.
2) Bezeichnet P eine p-Sylowgruppe von G, so ist G' = P' notwendig und hinreichend für die Nilpotenz von G.

Die Struktur der nichtnilpotenten DSC-Gruppen konnte vollständig geklärt werden. Sie unterteilen sich in drei Typen gemäß den möglichen Werten für die Auflösbarkeitsstufen s_1 einer p-Sylowgruppe von G und s_2 von G, nämlich Typ I: $s_1 = 1$, $s_2 = 2$; Typ II: $s_1 = 2$, $s_2 = 2$; Typ III: $s_1 = 2$, $s_2 = 3$. Die Gruppen lassen sich als gewisse direkte und semidirekte Produkte konstruieren, wobei unter den Faktoren homozyklische bzw. extraspezielle p-Gruppen auftreten. Die Wirkung jeweils eines Faktors auf den anderen erhält man mittels darstellungstheoretischer Methoden. Erwähnenswert ist, daß hinsichtlich des Typs I auch Darstellungen über gewissen lokalen Ringen heranzuziehen sind an Stelle der sonst üblichen Darstellungen über Körpern. Das Isomorphieproblem für die behandelten Gruppen wird nicht bearbeitet. Die Untersuchung der nilpotenten DSC-Gruppen läuft auf die der DSC-p-Gruppen hinaus und scheint völlig andere Methoden zu erfordern als bei den nichtnilpotenten DSC-Gruppen verwendet wurden.

eingereicht: 29. 05. 1986 verteidigt: 14. 11. 1986

Gutachter: Prof. Dr. G. Pazderski (Rostock),
Doz. Dr. L. Prohaska (Rostock),
Prof. Dr. K. Rosenbaum (Erfurt).

Verfasser:

Dr. A. A. Sabater Fernández
I. S. P. Frank Pais
carretera de cindamar Km $3^{1/2}$
Santiago de Cuba
Kuba

Rostock. Math. Kolloq. 33, 77 - 78 (1988) 00-01
00A25

Uwe Boosmann

Zum Arbeiten mit Größen im Mathematikunterricht der POS unter Beachtung eines abgestimmten Vorgehens mit dem naturwissenschaftlichen und polytechnischen Unterricht

Autorreferat der Dissertation A

Das Wissen und Können zum Arbeiten mit Größen ist eine wichtige Voraussetzung für die Realisierung von Unterrichtszielen im mathematisch-naturwissenschaftlichen und polytechnischen Unterricht. Es ist zugleich eine Grundlage für die Auseinandersetzung der Schüler mit ihrer Umwelt und trägt zur Herausbildung allgemein geistiger Fähigkeiten bei.
Unter dem Arbeiten mit Größen verstehen wir einen Komplex von Schülertätigkeiten:

- das Umwandeln von Größenangaben,
- das Messen von Größen,
- das Rechnen mit Größen,
- das Lösen von Größengleichungen sowie
- das Entwickeln von Größenvorstellungen.

In der Arbeit werden grundlegende Standpunkte zu Zielen und Inhalten des Unterrichts hinsichtlich des Arbeitens mit Größen angegeben und das bis zum Abschluß der POS (allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule) zu erreichende Niveau konkret ausgewiesen. Eine zusammenfassende Darstellung kennzeichnet eine Linienführung für den Mathematikunterricht der Klassen 1 bis 10. Hinweise für ein methodisch abgestimmtes und weitestgehend einheitliches Vorgehen werden daraus abgeleitet.
Es wird auf bestehende Unzulänglichkeiten und Widersprüche hinsichtlich eines inhaltlich, zeitlich und methodisch abgestimmten Vorgehens beim Arbeiten mit Größen im Unterricht der Fächer Mathematik, Physik, Chemie und ESP (Einführung in die sozialistische Produktion) verwiesen. Anhand konkreter Beispiele aus dem Unterricht werden Hinweise und Vorschläge für ein koordiniertes Vorgehen im Unterricht der genannten Fächer

praxisnah angegeben. Die Verantwortlichkeit der einzelnen Unterrichtsfächer für die Realisierung des bis zum Abschluß der POS angestrebten Niveaus im Arbeiten mit Größen wird herausgestellt. Als Grundlage für die Bearbeitung der aufgegriffenen Problematik wurden theoretische Darlegungen zum Aufbau eines Größensystems, insbesondere für die Hand des Lehrers gedacht, vorangestellt. Hierbei galt es, die Festlegungen des Internationalen Einheitensystems (SI) zu berücksichtigen. Die Ergebnisse der Arbeit sind im wesentlichen Resultat theoretisch-analytischer Untersuchungen. Dabei wurden Erkenntnisse früherer schulpraktischer Untersuchungen genutzt.

eingereicht: 06. 06. 1986 verteidigt: 12. 12. 1986

Gutachter: Prof. Dr. W. Engel (Rostock),
Prof. Dr. M. Gimpel (Halle),
Doz. Dr. H. Henning (Magdeburg).

Verfasser:

Dr. paed. U. Boosmann
Spezialschule mathematisch-naturwissenschaftlich-technischer Richtung
Goetheplatz 5/6
Rostock
DDR-2500

Rostock. Math. Kolloq. 33, 79 - 80 (1988) 60-01
00-01
00A25

Rainer Hellmann

Zu Fragen der Behandlung stochastischer Sachverhalte im mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule

Autorreferat der Dissertation A

Es ist unumstritten, daß der Inhalt des gesamten Unterrichts an **unserer POS (allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule) ein Defizit bezüglich der expliziten** Berücksichtigung des Zufalls **in Natur, Technik und Gesellschaft verzeichnet.**
Die kurze Erwähnung des statistischen Charakters des radioaktiven Kernzerfalls und desgleichen bei den Mendelschen Gesetzen im Physik- bzw. Biologieunterricht der Klasse 10 kann der Bedeutung der Rolle des Zufalls und seiner Gesetze in unserer Welt nicht gerecht werden.
Außerdem wird mit dem jetzigen Zustand die Tatsache negiert, daß Methoden und Verfahren der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, deren Anwendung ein gewisses Maß an sogenannter stochastischer Denkweise voraussetzt, in nahezu allen Bereichen von Wissenschaft, Technik und Produktion Einzug gehalten haben.
Um die allgemeinen Zielvorstellungen bezüglich der Behandlung stochastischer Sachverhalte, di. beim Schüler anzustrebenden allgemeingeistigen Fähigkeiten zu **charakterisieren**, benutzen auch wir den Begriff der stochastischen Denkweise:

1) Die Anerkennung der objektiven Existenz des Zufalls. Die Einsicht, daß der Zufall etwas völlig normales, allgegenwärtiges darstellt und in der Natur, Technik und Gesellschaft eine wichtige Rolle spielt.

2) Das Wissen um die Berechenbarkeit von Zufallserscheinungen auf Grund der objektiven Existenz stabiler empirischer Parameter, die mathematisch erfaßt und weiterverarbeitet werden können. Auch der Zufall unterliegt Gesetzmäßigkeiten.

3) Die Analyse der Bedingungen, unter denen ein Vorgang mit Zufallscharakter abläuft. Die Modellierung solcher Vorgänge auf verschiedenen Stufen der Angepaßtheit, Formalisierung und Komplexität sowie die Interpretation der Ergebnisse.

In der Dissertation wird dargelegt, wie vor allem auch die naturwissenschaftlichen Fächer einen wichtigen Beitrag zur Realisierung der oben genannten Ziele leisten können.

<u>eingereicht:</u> 29. 08. 1986 <u>verteidigt:</u> 23. 01. 1987

<u>Gutachter:</u> Prof. Dr. W. Engel (Rostock),
Prof. Dr. K. Nawrotzki (Potsdam),
Doz. Dr. H. Henning (Magdeburg).

<u>Verfasser:</u>

Dr. paed. R. Hellmann
Spezialschule mathematisch-
naturwissenschaftlich-tecnnischer Richtung
Goetheplatz 5/6
Rostock
DDR-2500

Hinweise für Autoren

Manuskripte (in deutscher, ggf. auch in russischer oder englischer Sprache) bitten wir, an die Schriftleitung zu schicken. Die gesamte Arbeit ist linksbündig zu schreiben. Eine Ausnahme hiervon bilden hervorzuhebende Formeln und das Literaturverzeichnis. Der Kopf der Arbeit soll folgende Form haben: Rostock. Math. Kolloq. /Leerzeile/ Vorname Name/ Leerzeile/ Titel der Arbeit/ 1 Zeilenumschaltung/ Unterstreichung/ Leerzeile. Der Text der Arbeit ist eineinhalbzeilig (= 3 Zeilenumschaltungen) zu schreiben mit maximal 63 Anschlägen je Zeile und maximal 37 Zeilen je Seite. Zwischenüberschriften sind wie folgt einzuordnen: 6 Zeilenumschaltungen/ Zwischenüberschrift/ Unterstreichung (ohne Zeilenumschaltung)/ 5 Zeilenumschaltungen. Hervorhebungen sind durch Unterstreichen und Sperren möglich. Ankündigungen wie Satz, Definition, Bemerkung, Beweis u. a. sind zu unterstreichen und mit einem Doppelpunkt abzuschließen. Vor und nach Sätzen, Definitionen u. ä. ist ein Zeilenabstand von 5 Umschaltungen zu lassen. Fußnoten sind möglichst zu vermeiden. Sollte doch davon Gebrauch gemacht werden, so sind sie durch eine hochgestellte Ziffer im Text zu kennzeichnen und innerhalb des oben angegebenen Satzspiegels unten auf der gleichen Seite anzugeben. Formeln und Bezeichnungen sollen möglichst mit der Schreibmaschine zu schreiben sein. Hervorzuhebende Formeln sind drei Leerzeichen einzurücken und mit 6 Umschaltungen zum übrigen Text zu schreiben. Formelzähler sollen am rechten Rand stehen. Der Platz für Abbildungen ist beim Schreiben auszusparen; die Abbildungen selbst sind in der dem ausgesparten Platz entsprechenden Größe gesondert nach TGL-Vorschrift auf Transparentpapier beizufügen. Der zugehörige Begleittext ist im Manuskript mitzuschreiben. Sein Abstand nach unten beträgt 5 Umschaltungen. Literaturzitate im Text sind durch laufende Nummern in Schrägstrichen (vgl. /8/, /9/ und /10/) zu kennzeichnen und am Schluß der Arbeit unter der Zwischenüberschrift Literatur zusammenzustellen.

Beispiele: (Zeitschriftenabkürzungen nach Math. Reviews)

/8/ Zariski, O., and Samuel, P.: Commutative Algebra. Princeton 1958

/9/ Steinitz, E.: Algebraische Theorie der Körper. J. Reine Angew. Math. 137, 167 - 309 (1920)

/10/ Gnedenko, B. W.: Über die Arbeiten von C. F. Gauß zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. In: Reichardt, H. (Ed.): C. F. Gauß, Gedenkband anläßlich des 100. Todestages. S. 193 - 204, Leipzig 1967

Die Angaben sollen in Originalsprache erfolgen; bei kyrillischen Buchstaben soll die bibliothekarische Transkription (Duden) verwendet werden.

Am Ende der Arbeit stehen folgende Angaben zum Autor und zur Arbeit: eingegangen: Datum/ Leerzeile/ Verfasser:/ Titel Initialen der Vornamen Name/ Institution/ Struktureinheit/ Straße Hausnummer/ Ort/ Land-Postleitzahl.

Der Autor wird gebeten, eine Korrektur des Durchschlags vom Offsetmanuskript zu lesen und dabei die mathematischen Symbole einzutragen. Ferner sollte er 1 - 2 Klassifizierungsnummern (entsprechend der "1980 Mathematics Subject Classification" der Math. Reviews) zur inhaltlichen Einordnung seiner Arbeit angeben.

Schriftenreihen der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

– Archiv der Freunde der Naturgeschichte in Mecklenburg	ISSN 0518-3189
– Rostocker Agrarwissenschaftliche Beiträge	ISSN 0138-3299
– Rostocker Betriebswirtschaftliche Manuskripte	ISSN 0232-3066
– Rostocker Mathematisches Kolloquium	ISSN 0138-3248
– Rostocker Philosophische Manuskripte	ISSN 0557-3599
– Rostocker Physikalische Manuskripte	ISSN 0138-3140
– Rostocker Wissenschaftshistorische Manuskripte	ISSN 0138-3191
– Lateinamerika/Semesterbericht der Sektion Lateinamerikawissenschaften	ISSN 0458-7944
– Erziehungswissenschaftliche Beiträge	ISSN 0138-2373
– Fremdarbeiterpolitik des Imperialismus	ISSN 0138-3396
– Beiträge zur Geschichte der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock	ISSN 0232-539X
– Beiträge zur Geschichte der FDJ	ISSN 9233-0830
– Probleme der Agrargeschichte des Feudalismus und des Kapitalismus	ISSN 0233-0636
– Rostocker Beiträge zur Hoch- und Fachschulpädagogik	ISSN 0233-0539
– Rostocker Informatik-Berichte	ISSN 0233-0784
– Studien zur Geschichte der deutsch-polnischen Beziehungen	ISSN 0233-0687
– Rostocker Forschungen zur Sprach- und Literaturwissenschaft	ISSN 0233-0644
– Rostocker Universitätsreden	

Bezugsmöglichkeiten
- Bestellungen aus der DDR über die Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, Abt. Wissenschaftspublizistik, Vogelsang 13/14, Rostock, DDR-2500.
- Bestellungen aus dem Ausland über die Firma Buchexport, Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, Leninstr. 16, Leipzig, DDR-7010.

Ferner sind die Hefte der Schriftenreihen im Rahmen des Schriftentausches über die Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, Universitätsbibliothek, Tauschstelle, Universitätsplatz 5, Rostock, DDR-2500, zu beziehen.