ISSN 0138 - 3248

Rostocker Mathematisches Kolloquium

Heft 23

WILHELM-PIECK-UNIVERSITÄT ROSTOCK

ROSTOCKER MATHEMATISCHES KOLLOQUIUM

Heft 23

1983

Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik

Herausgeber: Der Rektor der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

Schriftleitung: Prof. Dr. Wolfgang Engel, Direktor der Sektion Mathematik
Prof. Dr. Gerhard Maeß, Schriftleiter
Dr. Klaus-Dieter Drews, Lektor
Dorothea Meyer, Herstellung der Druckvorlage

Sektion Mathematik der
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock,
DDR-2500 Rostock, Universitätsplatz 1

Das Rostocker Mathematische Kolloquium erscheint in der Regel dreimal im Jahr und ist im Rahmen des Schriftentausches über die Universitätsbibliothek, Tauschstelle, DDR-2500 Rostock, Universitätsplatz 5, zu beziehen.

Veröffentlicht durch die Abt. Wissenschaftspublizistik der
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, DDR-2500 Rostock
Vogelsang 13/14
Fernruf: 369 577

Genehmigungs-Nr.: C 59/83 ODR II-15-14
Druck: Ostsee-Druck Rostock, Werk II Ribnitz

Inhalt

		Seite
Grünwald, Norbert	Bestimmung sämtlicher abgeschlossener Mengen aus $P_{3,2}$, deren Projektion $F_8{}^n$ ist	5
Grünwald, Norbert	Beschreibung aller abgeschlossenen Mengen aus $P_{3,2}$, deren Projektion $F_8{}^2$ ist, mit Hilfe von Relationen	27
Gorlov, Valerij Vasilevič; Lau, Dietlinde	Über Automorphismen auf Funktionenalgebren	35
Denecke, Klaus	Eine algebraische Charakterisierung einer Klasse präprimaler Algebren	43
Radtke, Sabine	Die Anzahl aller möglichen Halbordnungsrelationen auf einer maximal sechselementigen Menge	55
Berg, Lothar	Über eine Folge von Hessenbergmatrizen aus Binomialkoeffizienten	63
Kozma, Laszlo	Some norm-inequalities of the convolution for matrices	69
Fisher, Brian	On defining the distribution $\delta^{(r)}(f(x))$	73
Fisher, Brian; Kuribayashi, Yukio	Theorems on the non-commutative neutrix product of distributions	81
Thielcke, Helmut	Eine Anwendung des Gaußschen Integralsatzes in der Ebene und im Raum zur Berechnung von Momenten bis zur zweiten Ordnung	91
Klipps, Bernd	Darstellung und Dekodierung von Vasil'ev-Codes	97

Seite

Autorreferate von Dissertationen

Herbst, Ehrhard	Spektralsynthese, Stabilität und Konvergenz in gewichteten Sobolew-Räumen	107
Bock, Jürgen	Die Bestimmung des Stichprobenumfangs in der linearen Regressionsanalyse Modell I und II	109
Schott, Dieter	Die Methode der Projektionskerne und ihre Anwendung bei Struktur- und Konvergenzuntersuchungen von Iterationsverfahren zur Lösung linearer Operatorgleichungen in Banachräumen	111

Rostock. Math. Kolloq. 23, 5 - 26 (1983) 03B50
03G20

Norbert Grünwald

Bestimmung sämtlicher abgeschlossener Mengen aus $P_{3,2}$, deren Projektion F_8^n ist

Um das Jahr 1920 begann E. L. Post (vgl. /1/) die Untersuchung der Menge P_2 der Booleschen Funktionen. Es gelang ihm, alle Teilalgebren von P_2 zu bestimmen. Diese Untersuchungen setzte S. V. Jablonskij 1953 fort (vgl. /4/), indem er die Menge P_k der Funktionen über der Menge $E_k = \{0,1,\ldots,k-1\}$ betrachtete. In /6/ wurde $P_{k,2}$ eingeführt, die Menge aller Funktionen aus P_k, deren Funktionswerte aus der Menge $\{0,1\}$ sind. Erstmals wurde in /6/ auch ein natürlicher Homomorphismus von $P_{3,2}$ auf P_2 betrachtet, der Projektion genannt wird. In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage nach denjenigen abgeschlossenen Mengen aus $P_{3,2}$, deren Projektion gleich einer festen abgeschlossenen Menge $A \subseteq P_2$ ist. Diese Untersuchungen wurden in /6/ begonnen und sollen in dieser Arbeit für $A = F_8^n$ fortgesetzt werden, $n \geq 2$.

Bezeichnungen und Begriffe

$P_{3,2}^n$ sei die Menge aller Funktionen aus $E_3^n = \{0,1,2\}^n$ in $E_2 = \{0,1\}$, und $P_{3,2} := \bigcup_{n\geq 1} P_{3,2}^n$. Ferner sei P_2 die Menge aller Booleschen Funktionen. Wir unterscheiden zwei Variablenalphabete $X = \{x,x_1,\ldots,x_n\ldots\}$ und $Y = \{y,y_1,\ldots,y_n\ldots\}$ wobei x bzw. x_i Werte aus E_3 und y bzw. y_i Werte aus E_2 annehmen können.

Sei $A \subseteq P_{3,2}$. Unter einer Superposition über A verstehen wir wie üblich eine Funktion, die man aus Funktionen von A erhält, indem man in endlicher Anzahl gewisse der folgenden Operationen anwendet: Identifizieren von Variablen, Hinzufügen fiktiver Variablen, Umbenennen von Variablen oder Einsetzen von Funktionen anstelle von Variablen einer Funktion. Als Abschluß [A] von

A, $A \subseteq P_{3,2}$, bezeichnen wir die Menge aller Superpositionen über A. Ist $A = [A]$, so heißt A abgeschlossen.

Sei $f \in P_{3,2}^n$. Die durch folgende Festsetzung gewonnene Funktion $F \in P_2$: Für $\underline{a} \in E_2^n$ sei stets $F(\underline{a}) := f(\underline{a})$, nennen wir Projektion der Funktion f, und schreiben $\mathrm{pr}\, f = F$. Unter der Projektion einer Menge $A \subseteq P_{3,2}$ verstehen wir die Menge

$\mathrm{pr}\, A = \{F \in P_2 \mid \exists f \in A \text{ mit } \mathrm{pr}\, f = F\}$. Für $A \subseteq P_2$ heißt die Menge

$\mathrm{pr}^{-1} A = \{f \in P_{3,2} \mid \mathrm{pr}\, f \in A\}$ Urbild von A.

Eine Teilmenge M der Menge $A = [A] \subseteq P_{3,2}$ heißt Erzeugendensystem für A, wenn $[M] = A$ ist. Eine abgeschlossene Teilmenge M der Menge $A = [A]$ heißt maximale Menge von A, wenn $M \subset A$ und für eine beliebige Funktion $f \in A \setminus M$ die Beziehung $[M \cup f] = A$ gilt. Wir sagen, eine Funktion f^n bewahrt die h-äre Relation $\varrho \subseteq E_3^h$, wenn für beliebige

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1h} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2h} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \vdots \\ a_{nh} \end{pmatrix} \in \varrho \quad \text{stets}$$

$$f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1h} & a_{2h} & \cdots & a_{nh} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}) \\ f(a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2}) \\ \vdots \\ f(a_{1h}, a_{2h}, \ldots, a_{nh}) \end{pmatrix} \in \varrho \text{ ist,}$$

wobei die Spalten $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ih})^T$, $i = 1,2,\ldots,n$, nicht notwendig voneinander verschieden sein müssen. Die leere Menge werde von allen Funktionen bewahrt. Mit $\mathrm{Pol}_A\, \varrho$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen aus A, welche die Relation ϱ bewahren. Falls A aus dem Zusammenhang hervorgeht, kann A als Index auch weggelassen werden.

Die Tupel aus $E_3^n = \{0,1,2\}^n$, $E_2^n = \{0,1\}^n$ sowie $E_{1,2}^n = \{1,2\}^n$ seien in Relationen spaltenweise geschrieben. Jede Relation ϱ läßt sich mit Hilfe einer Matrix darstellen.

Für zwei Matrizen M und N gelte $M \supseteq N$, falls folgendes gilt:

1) Nachdem in M und N alle Zeilen, welche doppelt auftreten, gestrichen worden sind, ist die Anzahl der Zeilen in M und N gleich groß. (Es ist klar, daß dabei die Relationen nicht verändert werden.)

2) Es existiert nun eine Permutation der Zeilen von M, so daß in der entstandenen Matrix M_1 jede Spalte aus N auch Spalte von M_1 ist.

Wir vereinbaren folgende Bezeichnungen:

$(\underline{i}) := (\underbrace{i,i,\dots,i}_{n\text{-mal}})^T$, $i \in \{0,1,2\}$,

$\mathrm{Pol}_{P_{3,2}}(\varrho_1\varrho_2) := \mathrm{Pol}_{P_{3,2}}(\varrho_1 \cup \varrho_2)$ mit Relationen ϱ_1 und ϱ_2,

$(\underline{a}_1,\underline{a}_2,\dots,\underline{a}_n)^T := (\underline{a}_1{}^T,\underline{a}_2{}^T,\dots,\underline{a}_n{}^T)^T$,

$F_8{}^n := \mathrm{Pol}_{P_2}(E_2{}^n \setminus \underline{1})$,

$\hat{F}_8{}^n := \mathrm{Pol}_{P_{3,2}}(E_2{}^n \setminus \underline{1})$,

$Z_{2,0} := \mathrm{Pol}_{P_{3,2}}\begin{pmatrix}0&1&2\\0&1&0\end{pmatrix}$,

$Z_{2,1} := \mathrm{Pol}_{P_{3,2}}\begin{pmatrix}0&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$,

$T_0{}^{0,2} := \mathrm{Pol}_{P_{3,2}}(0\ 2)$.

Wie man leicht sieht, ist pr $Z_{2,0} \supseteq F_8{}^n$, pr $Z_{2,1} \supseteq F_8{}^n$ und auch pr $T_0{}^{0,2} \supseteq F_8{}^n$.

Ferner sei

$$j_a(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x = a, \\ 0 & \text{für } x \in E_3 \setminus \{a\}, \end{cases}$$

und für

$\underline{a} = (a_1,a_2,\dots,a_n)$ mit $\underline{a} \in E_3{}^n$

$J_{\underline{a}} := j_{a_1}(x_1)\cdot j_{a_2}(x_2)\cdot \dots \cdot j_{a_n}(x_n)$.

Für die anschließende Bestimmung sämtlicher abgeschlossener Mengen aus $P_{3,2}$, deren Projektion $F_8{}^2$ ist, wird folgender Sachverhalt ausgenutzt: Sei N eine beliebige Menge mit $\mathrm{pr}\, N = F_8^2$. Dann existieren in [N] Urbilder

$h_1'(x_1,x_2,\dots,x_{m1})$ von $H_1(y_1,y_2,\dots,y_{n+1})$

$$= \bigvee_{i=1}^{m+1} y_1y_2\dots y_{i-1}y_{i+1}\dots y_{n+1},$$

$h_2'(x_1,x_2,\dots,x_{m2})$ von $H_2(y_1,y_2) = y_1y_2$,

$h_3'(x_1,x_2,\dots,x_{m3})$ von $H_3(y_1,y_2) = y_1\overline{y}_2$,

$h_4'(x_1,x_2,\dots,x_{m4})$ von $H_4(y_1,y_2,\dots,y_n) = y_1(y_2 \vee y_3 \vee \dots \vee y_n)$,

$h_5'(x_1,x_2,\dots,x_{m5})$ von $H_5(y) = y$,

$h_6'(x_1,x_2,\dots,x_{m6})$ von $H_6(y_1,y_2,y_3) = y_1y_2\overline{y}_3$,

$h_7'(x_1,x_2,\dots,x_{m7})$ von $H_7(y_1,y_2,y_3) = y_1\overline{y}_2\overline{y}_3$,

$h_8'(x_1,x_2,\dots,x_{m8})$ von $H_8(y_1,y_2,\dots,y_n) = y_1y_2\dots y_n$.

Durch eventuelles Umnumerieren und Identifizieren von Variablen erhält man hieraus Urbilder

$h_1^n(x_1,x_2,\dots,x_{n+1})$ von $H_1(y_1,y_2,\dots,y_{n+1})$,
$h_2(x_1,x_2)$ von $H_2(y_1,y_2)$,
$h_3(x_1,x_2)$ von $H_3(y_1,y_2)$,
$h_4^n(x_1,x_2,\dots,x_n)$ von $H_4(y_1,y_2,\dots,y_n)$,
$h_5(x)$ von $H_5(y)$,
$h_6(x_1,x_2,x_3)$ von $H_6(y_1,y_2,y_3)$,
$h_7(x_1,x_2,x_3)$ von $H_7(y_1,y_2,y_3)$,
$h_8^n(x_1,x_2,\dots,x_n)$ von $H_8(y_1,y_2,\dots,y_n)$.

Des weiteren gilt, daß die Funktion
$c_0 := h_3(h_2,h_2) \equiv 0$ in [N] enthalten ist.

Bestimmung der Struktur aller abgeschlossenen Mengen aus $P_{3,2}$, deren Projektion $F_8{}^n$ ist

Satz 1: Für jede der Mengen

$$K := \left[\bigcap_{i\in I} \mathrm{Pol}_{P_{3,2}}((E_2{}^n \setminus \underline{1})\varrho_i)\right] \cap A$$

mit $A \in \{T_0{}^{0,2},\ P_{3,2}\}$, $\varrho_i \subseteq (E_3{}^n \setminus E_2{}^n)$,

und $B := \{g \in K \mid g$ nimmt auf höchstens n Tupeln den Wert 1 an$\}$

$\cup \{h_1{}^n\}$ $(2 \leq n < \infty)$

gilt

$$[B] = K.$$

Beweis: Sei $f^{(k)} \in K$, und $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots \underline{a}_r$ seien die Tupel mit $f^{(k)}(\underline{a}_i) = 1$, $i = 1,2,\ldots,r$. Mittels Induktion über r beweisen wir $f^{(k)} \in [B]$. Für $r \leq n$ ist die Behauptung offenbar richtig. Für $r > n$ setzen wir voraus, daß in $[B]$ schon alle Funktionen $f' \in K$ liegen, welche auf weniger als r Tupeln Eins werden. Nach Definition von K sind aber auch die Funktionen

$$t_i{}^{(k)}(\underline{x}) = \begin{cases} 0 & \text{für } \underline{x} = \underline{a}_i, \\ f^{(k)}(\underline{x}) & \text{sonst} \end{cases} \qquad (i = 1,2,\ldots,n+1)$$

in K und daher nach Induktionsvoraussetzung auch in $[B]$ enthalten. Da ebenso $h_1{}^n$ in B enthalten ist, folgt

$$f^{(k)}(\underline{x}) = h_1{}^n(f_1{}^{(k)}(\underline{x}),\ldots,f_{n+1}{}^{(k)}(\underline{x})) \in [B]. \qquad \text{q.e.d.}$$

Lemma 1: Für jede Menge $M \subseteq P_{3,2}$ mit $\mathrm{pr}\, M = F_8{}^n$ und $M \subseteq \mathrm{Pol}(E_3{}^n \setminus \underline{1})$ ist

$$N := M \cup \{j_1(x_1)\cdot j_2(x_2),\ j_1(x),\ j_1(x_1)\cdot j_0(x_2)\}$$

ein Erzeugendensystem für $W_1{}^n := \mathrm{Pol}(E_3{}^n \setminus \underline{1})$.

Beweis: Nach Satz 1 genügt es zu zeigen, daß $J_{\underline{a}_1} \vee J_{\underline{a}_2} \vee \ldots \vee J_{\underline{a}_r}$ $(1 \leq r \leq n)$ aus $W_1{}^n$ auch im Abschluß von N liegen. Falls ein $J_{\underline{a}}$ in $W_1{}^n$ liegt, so muß $\underline{a} \notin \{0,2\}^k$ sein. O.B.d.A. sei $\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_s, \ldots, a_t, \ldots, a_k)$ mit

$a_1 = \dots = a_s = 0,\ a_{s+1} = \dots = a_t = 1,\ a_{t+1} = \dots = a_k = 2$

und $t > s$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} J_{\underline{a}} = h_8^{k}(& j_1(x_{s+1})\cdot j_0(x_1),\dots,j_1(x_{s+1})\cdot j_0(x_s),\\ & j_1(x_{s+1}),\dots,j_1(x_t),\\ & j_1(x_t)\cdot j_2(x_{t+1}),\dots,j_1(x_t)\cdot j_2(x_{\underline{k}})) \in [N]. \end{aligned}$$

Sei nun ein $J_{\underline{a}_1} \vee J_{\underline{a}_2} \vee \dots \vee J_{\underline{a}_r}$ in W_1^{n}, $2 \leq r \leq n$.

Dann muß nach Definition von W_1^{n} in allen Tupeln $\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_r$ für ein gewisses $i \in \{1,2,\dots,k\}$ $a_{1i} = \dots = a_{ri} = 1$ sein, und es gilt

$J_{\underline{a}_1} \vee \dots \vee J_{\underline{a}_r} = h_4^{r+1}(j_1(x_1),\ J_{\underline{a}_1},\dots,J_{\underline{a}_r}) \in [N].$ q.e.d.

Wir betrachten nun die Menge $\widehat{F_8^{n}} \cap Z_{2,0}$. Offenbar ist

$$pr(\widehat{F_8^{n}} \cap Z_{2,0}) = F_8^{n}. \tag{1}$$

Außerdem gilt

$$\widehat{F_8^{n}} \cap Z_{2,0} \subset W_1^{n}, \tag{2}$$

denn aus der Annahme $f^{(k)}(\underline{x}) \notin W_1^{n}$ und $f^{(k)}(\underline{x}) \in \widehat{F_8^{n}} \cap Z_{2,0}$ folgt, daß für gewisse Tupel $\underline{a}_1,\underline{a}_2,\dots,\underline{a}_n$ mit $(\underline{a}_1,\underline{a}_2,\dots,\underline{a}_n)^T \subseteq (E_3^n \setminus \underline{1})$ $(f^{(k)}(\underline{a}_1), f^{(k)}(\underline{a}_2),\dots,f^{(k)}(\underline{a}_n))^T = (\underline{1})$ ist.

Für $\underline{a}_1$ und $\underline{a}_n$ gilt dann speziell

$$\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{ni} \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},\quad 1 \leq i \leq k.$$

Indem man die Werteverteilung von $f^{(k)}(\underline{x})$ entsprechend dem folgenden Schema betrachtet, erhält man einen Widerspruch zu $f^{(k)}(\underline{a}_1) = f^{(k)}(\underline{a}_n) = 1$:

	$\underline{x}$	$f^{(k)}(\underline{x})$
$\underline{a}_1$:	0 0 1 2 0 1 2 2	1
	0 0 1 0 0 1 0 0	1, da $f^{(k)}(\underline{x}) \in Z_{2,0}$,
	0 1 0 0 0 0 1 0	0, da $f^{(k)}(\underline{x}) \in \widehat{F_8^{n}}$,
$\underline{a}_n$:	0 1 0 0 2 2 1 2	0, da $f^{(k)}(\underline{x}) \in Z_{2,0}$.

Folglich ist mit $f^{(k)}(\underline{x}) \in \widehat{F_8^n} \cap Z_{2,0}$ auch $f^{(k)}(\underline{x}) \in W_1^n$. Andererseits ist die Funktion $J_{(1,0)}(x_1,x_2)$ in W_1^n aber nicht in $Z_{2,0}$, und es gilt damit (2).

<u>Lemma 2:</u> Die Menge $\widehat{F_8^n} \cap Z_{2,0}$ ist maximal in W_1^n.

<u>Beweis:</u> Wir zeigen, daß für jede Funktion f aus W_1^n mit $f \notin \widehat{F_8^n} \cap Z_{2,0}$, d. h. $f \in W_1^n \setminus Z_{2,0}$, $[(F_8^n \cap Z_{2,0} \cup f] = W_1^n$ gilt. Dazu ist nach Lemma 1 zu zeigen, daß man jede der Funktionen $j_1(x)$, $j_1(x_1) \cdot j_0(x_2)$, $j_1(x_1) \cdot j_2(x_2)$ mit Hilfe von f und den Funktionen aus $\widehat{F_8^n} \cap Z_{2,0}$ erzeugen kann. Für die Menge M aus Lemma 1 können wir die Menge $\widehat{F_8^n} \cap Z_{2,0}$ nehmen wegen $\widehat{F_8^n} \cap Z_{2,0} \subset W_1^n$ und $pr(\widehat{F_8^n} \cap Z_{2,0}) = F_8^n$ (s. (2), (1)).

Es gilt $j_1(x) \in \widehat{F_8^n} \cap Z_{2,0}$.

Sei $f(x_1,\dots,x_k) \in W_1^n \setminus Z_{2,0}$. Durch eventuelles Identifizieren und Umbenennen von Variablen erhält man aus $f(x_1,\dots,x_k)$ eine Funktion $f_1(x_1,x_2,x_3)$ mit $f_1(0,1,2) \neq f_1(0,1,0)$, und wegen $C_0 \in \widehat{F_8^n} \cap Z_{2,0}$ ist mit $f_2(x_1,x_2) := f_1(C_0,x_1,x_2)$ also $f_2(1,2) \neq f_2(1,0)$. Da im $F_8^n \cap Z_{2,0}$ die Funktion $g(x_1,x_2) = J_{(1,0)}(x_1,x_2) \vee J_{(1,2)}(x_1,x_2)$ liegt, gilt für $f_2(1,0) = 0$

$$j_1(x_1) \cdot j_2(x_2) = h_2(f_2(x_1,x_2),\ g(x_1,x_2)) \text{ sowie}$$
$$j_1(x_1) \cdot j_0(x_2) = h_3(g(x_1,x_2),\ f_2(x_1,x_2)),$$

und für $f_2(1,0) = 1$ folgt

$$j_1(x_1) \cdot j_2(x_2) = h_3(g(x_1,x_2),\ f_2(x_1,x_2)) \text{ sowie}$$
$$j_1(x_1) \cdot j_0(x_2) = h_2(f_2(x_1,x_2),\ g(x_1,x_2)).$$

q.e.d.

<u>Lemma 3:</u> Für jede Menge $M \subseteq P_{3,2}$ mit $pr\, M = F_8^n$ und $M \subseteq Pol(E_3^n \setminus E_{1,2}^n)$ ist $N := M \cup \{j_1(x),\ j_2(x),\ j_1(x) \vee j_2(x)\}$ ein Erzeugendensystem für $W_2^n := Pol(E_3^n \setminus E_{1,2}^n)$.

Beweis: Nach Satz 1 genügt es zu zeigen, daß alle Funktionen $J_{\underline{a}_1} \vee J_{\underline{a}_2} \vee \dots \vee J_{\underline{a}_r}$, $1 \leq r \leq n$, aus W_2^n ebenso in [N] liegen. Nach Definition von W_2^n sind in W_2^n die Funktionen $J_{\underline{a}}$ mit $\underline{a} \neq (0,0,\dots,0)$ enthalten.

O.B.d.A. sei $\underline{a} = (a_1,\dots,a_s,\dots,a_t,\dots,a_k)$ mit

$$a_1 = a_2 = \dots = a_s = 0,$$

$$a_{s+1} = a_{s+2} = \dots = a_t = 1,$$

$$a_{t+1} = a_{t+2} = \dots = a_k = 2 \text{ und } s < k.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} J_{\underline{a}} = h_8^{\,k}(&h_3(j_v(x_w),\ j_1(x_1) \vee j_2(x_1)),\dots,\\ &h_3(j_v(x_w),\ j_1(x_s) \vee j_2(x_s)),\\ &j_1(x_{s+1}),\ j_1(x_{s+2}),\dots,\ j_1(x_t),\\ &j_2(x_{t+1}),\ j_2(x_{t+2}),\dots,\ j_2(x_k)), \end{aligned}$$

wobei $v \in \{1,2\}$ und $a_w = v$ ist, $w \in \{s+1,s+2,\dots,k\}$.

Sei nun eine Funktion $J_{\underline{a}_1} \vee J_{\underline{a}_2} \vee \dots \vee J_{\underline{a}_r}$, $2 \leq r \leq n$, in W_2^n. Dann gilt $(\underline{1}) \subseteq (\underline{a}_1,\underline{a}_2,\dots,\underline{a}_r)^T$ oder $(\underline{2}) \subseteq (\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_r)^T$, oder es existiert eine Spalte $(a_{1i},a_{2i},\dots,a_{ri})^T$ aus $(\underline{a}_1,\underline{a}_2,\dots,\underline{a}_r)^T$, bei der für alle a_{ji}, $1 \leq j \leq r$, $a_{ji} \in \{1,2\}$ ist.

Für $(a_{1i},a_{2i},\dots,a_{ri})^T = (\underline{1})$, $i \in \{1,2,\dots,k\}$ gilt

$$J_{\underline{a}_1} \vee J_{\underline{a}_2} \vee \dots \vee J_{\underline{a}_r} = h_4^{\,r+1}(j_1(x_i),J_{\underline{a}_1},\dots,J_{\underline{a}_r}).$$

Für $(a_{1i},a_{2i},\dots,a_{ri})^T = (\underline{2})$, $i \in \{1,2,\dots,k\}$ gilt

$$J_{\underline{a}_1} \vee J_{\underline{a}_2} \vee \dots \vee J_{\underline{a}_r} = h_4^{\,r+1}(j_2(x_i),J_{\underline{a}_1},\dots,J_{\underline{a}_r}).$$

Für $a_{ji} \in \{1,2\}$, $i \in \{1,2,\dots,k\}$, $1 \leq j \leq r$, gilt

$$J_{\underline{a}_1} \vee J_{\underline{a}_2} \vee \dots \vee J_{\underline{a}_r} = h_4^{\,r+1}(j_1(x_i) \vee j_2(x_i),J_{\underline{a}_1},\dots,J_{\underline{a}_r}).$$

q.e.d.

Wir betrachten jetzt die Menge $\hat{F}_8^{\,n} \cap Z_{2,1}$. Offenbar ist $pr(\hat{F}_8^{\,n} \cap Z_{2,1}) = F_8^{\,n}$. Außerdem gilt

$$(\hat{F}_8{}^n \cap Z_{2,1}) \subset W_2{}^n. \qquad (3)$$

Denn aus der Annahme $f^{(k)} \in \hat{F}_8{}^n \cap Z_{2,1}$ und $f^{(k)} \notin W_2{}^n$ folgt für gewisse Tupel $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$ mit $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n)^T \subseteq (E_3^n \setminus E_{1,2}{}^n)$ die Beziehung $f^{(k)}(\underline{a}_1) = f^{(k)}(\underline{a}_2) = \ldots = f^{(k)}(\underline{a}_n) = 1$. Nach Definition von $E_3{}^n \setminus E_{1,2}{}^n$ gibt es dann in jeder Spalte von $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n)^T$ mindestens eine Null. Betrachten wir jetzt die Tupel $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n$, die folgende Struktur haben:

$b_{ji} = 1$, falls $a_{ji} = 2$ oder $a_{ji} = 1$, und

$b_{ji} = 0$, falls $a_{ji} = 0$ $(1 \leq j \leq n,\ 1 \leq i \leq k)$.

Aus $f^{(k)} \in Z_{2,1}$ folgt $f^{(k)}(\underline{b}_1) = f^{(k)}(\underline{b}_2) = \ldots = f^{(k)}(\underline{b}_n) = 1$. Dies ist aber ein Widerspruch zu $f^{(k)} \in \hat{F}_8{}^n$, da $(\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n)^T$ keine durchgehende 1-Spalte enthält. Mit $j_2(\underline{x}) \in W_2{}^n$ und $j_2(\underline{x}) \notin \hat{F}_8{}^n \cap Z_{2,1}$ gilt schließlich (3).

Im folgenden untersuchen wir eine Menge B mit den Eigenschaften

$$B = [B] \subseteq P_{3,2},\ \mathrm{pr}\ B = F_8{}^n \text{ und } B \neq \hat{F}_8{}^n \cap Z_{2,i},\ i = 0,1. \qquad (4)$$

<u>Lemma 4:</u> Es gilt $B \supseteq W_1{}^n$.

<u>Beweis:</u> Nach der Voraussetzung $\mathrm{pr}\ B = F_8{}^n$ ist nur zu zeigen, daß die Funktionen $j_1(x)$, $j_1(x_1) \cdot j_0(x_2)$ und $j_1(x_1) \cdot j_2(x_2)$ in B liegen (s. Lemma 1).
Da B verschieden von $\hat{F}_8{}^n \cap Z_{2,i}$, $i = 0,1$, ist, gibt es eine Funktion f mit $f \notin Z_{2,1}$ und eine Funktion g mit $g \notin Z_{2,0}$ aber $f, g \in B$. Durch eventuelles Umnumerieren und Identifizieren von Variablen erhält man aus f und g Funktionen $f_1(x_1, x_2, x_3)$ und $g_1(x_1, x_2, x_3)$ mit $f_1(0,1,2) \neq f_1(0,1,1)$ und $g_1(0,1,2) \neq g_1(0,1,0)$.
Wegen $\mathrm{pr}\ B = F_8{}^n$ liegt C_0 in B, und für $f_2(x_1, x_2) := f_1(C_0, x_1, x_2)$, $g_2(x_1, x_2) := g_1(C_0, x_1, x_2)$ folgt

$f_2(1,2) \neq f_2(1,1)$ und $g_2(1,2) \neq g_2(1,0)$. Ebenfalls nach pr $B = F_8^n$ enthält B auch die Funktion $h_5(x)$ mit $h_5(0) = 0$, $h_5(1) = 1$ und $h_5(2) \in \{0,1\}$. Ist nun $h_5(2) = 0$, so gilt $j_1(x) \in B$, ist dagegen $h_5(2) = 1$, dann folgt $j_1(x) \vee j_2(x) \in B$. Im Fall $f_2(1,1) = 1$ ergibt sich $j_1(x) = f_2(j_1(x) \vee j_2(x),x)$, im Falle $f_2(1,1) = 0$ dagegen $j_1(x) = h_3(h_5(x), f_2(j_1(x) \vee j_2(x),x))$.

Wir betrachten nun folgende Tabelle:

x_1	x_2	$j_1(x_1)$	$j_1(x_2)$	$g_2(x_1,x_2)$
0	0	0	0	0
0	1	0	1	.
0	2	0	0	.
1	0	1	0	a
1	1	1	1	.
1	2	1	0	$\bar{a}$
2	0	0	0	.
2	1	0	1	.
2	2	0	0	.

, $a \in \{0,1\}$.

Wie man leicht aus der Tabelle sieht, gilt für

$a = 1$: $j_1(x_1) \cdot j_2(x_2) = h_7(j_1(x_1), j_1(x_2), g_2(x_1,x_2))$,

$j_1(x_1) \cdot j_0(x_2) = h_6(j_1(x_1), g_2(x_1,x_2), j_1(x_2))$, und für

$a = 0$: $j_1(x_1) \cdot j_0(x_2) = h_7(j_1(x_1), j_1(x_2), g_2(x_1,x_2))$,

$j_1(x_1) \cdot j_2(x_2) = h_6(j_1(x_1), g_2(x_1,x_2), j_1(x_2))$.

q.e.d.

<u>Lemma 5:</u> Jede Funktion $f^{(k)} \in P_{3,2}$, $k \geq 1$, die den folgenden Bedingungen genügt, liegt in W_1^n, $n \geq 2$:

1.) Es gibt genau ein Tupel $\underline{a} \in E_3^k$ mit $f^{(k)}(\underline{a}) = 1$,

2.) $\underline{a} \notin \{0,2\}^k$.

<u>Beweis:</u> Wenn $\underline{a} \notin \{0,2\}^k$ ist und $f^{(k)}$ nur an der Stelle $\underline{a}$ den Wert Eins annimmt, so gilt nach Definition von W_1^n stets $f^{(k)} \in W_1^n$.

q.e.d.

<u>Folgerung 1:</u> Für jede Funktion $f^{(k)}$, die den Bedingungen aus Lemma 5, und für jede Menge B, die der Bedingung (4) genügt, gilt $f^{(k)} \in B$.

Sei M nunmehr eine Menge folgender Struktur:

$$M = \bigcap_{i\in I} \mathrm{Pol}((E_2{}^n\setminus\underline{1})\varrho_i) \text{ mit } \varrho_i \subseteq (E_3{}^n\setminus(E_2^n \cup \underline{2})),\ n \geq 2. \qquad (5)$$

<u>Satz 2:</u> Maximale Mengen für M sind:

a) $T_0{}^{0,2} \cap M$,

b) $\mathrm{Pol}((E_2{}^n\setminus \underline{1})\delta) \cap M$ mit $\delta \subseteq (E_3{}^n \setminus (E_2{}^n \cup \underline{2}))$, $\nexists \varrho_i \supseteq \delta$ und

$$\forall \varepsilon \subset \delta\ \exists \varrho_i \supseteq \varepsilon,\ i \in I,$$

c) $pr^{-1}A \cap M$, wobei A maximal in $F_8{}^n$ ist.

Falls $N \subseteq M$, $N \nsubseteq Z_{2,i} \cap \hat{F}_8{}^n$ $(i = 1,0)$ und N in keiner der Mengen vom Typ a), b) oder c) enthalten ist, so gilt $[N] = M$.

<u>Beweis:</u> Aus $j_2(x) \in M$ und $j_2(x) \notin T_0{}^{0,2}$ folgt $T_0{}^{0,2} \cap M \subset M$. Betrachten wir weiter eine Funktion $f \in M$, die auf den Tupeln $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$, für die $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n)^T \subseteq ((E_2{}^n\setminus \underline{1})\delta)$ gilt, aber kein $i \in I$ existiert mit $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n)^T \subseteq ((E_2{}^n\setminus \underline{1})\varrho_i)$, den Wert 1 annimmt, so gilt $f \notin \mathrm{Pol}((E_2{}^n\setminus \underline{1})\delta)$ und damit $\mathrm{Pol}((E_2{}^n\setminus \underline{1})\delta) \cap M \subset M$. Ebenso klar ist $pr^{-1}A \cap M \subset M$.

Sei nun $N \subseteq M$, $N \nsubseteq Z_{2,i} \cap \hat{F}_8{}^n$ $(i = 1,0)$ und N in keiner der Mengen vom Typ a), b) oder c) enthalten. Da N in M, aber nicht in einer Menge vom Typ c) enthalten ist, gilt $prN = F_8{}^n$. Nach Satz 1 braucht dann nur noch aus $J_{\underline{a}_1} \vee J_{\underline{a}_2} \vee \ldots \vee J_{\underline{a}_r} \in M$, $1 \leq r \leq n$, $J_{\underline{a}_1} \vee J_{\underline{a}_2} \vee \ldots \vee J_{\underline{a}_r} \in N$ gefolgert zu werden. Wegen $pr\,N = F_8{}^n$ gilt nach Lemma 4 und Folgerung 1 von Lemma 5, daß in $[N]$ schon alle Funktionen $J_{\underline{a}}$, $\underline{a} \notin \{0,2\}^k$, enthalten sind. Nach Definition von M liegen in M aber auch alle $J_{\underline{a}}$ mit $\underline{a} \in \{0,2\}^k \setminus \{0\}^k$.

Da $N \nsubseteq T_0{}^{0,2} \cap M$ ist, gibt es eine Funktion $f \in N$, aus der man durch eventuelles Umnumerieren und Identifizieren von Variablen eine Funktion $f_1(x_1,x_2)$ erhält, für die $f_1(0,2) = 1$ gilt. Da $pr\,N = F_8{}^n$ ist, erhält man die Funktion $f_2(x) := f_1(C_0,x)$ mit $f_2(2) = 1$, und es folgt $j_2(x) = h_3(f_2(x), j_1(x))$.

Sei ein $J_{\underline{a}} \in M$ mit $\underline{a} \in \{0,2\}^k \setminus \{0\}^k$ und o.B.d.A.

$$a_1 = a_2 = \dots = a_s = 0,$$

$$a_{s+1} = a_{s+2} = \dots = a_k = 2, \; s < k.$$

Da nach obigen Bemerkungen $j_1(x)$ und $j_2(x)$ in N liegen, enthält N auch die Funktion

$J_{(0,2)} = h_7(j_2(x_2), j_1(x_1), j_2(x_1))$, und damit gilt

$$J_{\underline{a}} = h_8^{k-1}(J_{(0,2)}(x_1, x_{s+1}), J_{(0,2)}(x_2, x_{s+1}), \dots, J_{(0,2)}(x_s, x_{s+1}),$$
$$J_{(0,2)}(x_s, x_{s+2}), J_{(0,2)}(x_s, x_{s+3}), \dots, J_{(0,2)}(x_s, x_k)).$$

Setzen wir nun voraus, daß alle Funktionen

$J_{\underline{a}_1} \vee J_{\underline{a}_2} \vee \dots \vee J_{\underline{a}_{r-1}}$ aus M, $2 \leq r \leq n$, in [N] sind. Wir zeigen,

daß dann eine beliebige Funktion $J_{\underline{a}_1} \vee J_{\underline{a}_2} \vee \dots \vee J_{\underline{a}_r}$ aus M

gleichfalls in [N] liegt. Zuerst erweitern wir die Tupel $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_r$ mit den Tupeln $\underline{a}_{r+1}, \underline{a}_{r+2}, \dots, \underline{a}_n$, wobei $\underline{a}_i \in \{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_r\}$, $r+1 \leq i \leq n$, gilt. Da $N \subseteq M$ ist, muß für die Tupel $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ und für $i \in I$ stets

$(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)^T \not\subseteq ((E_2{}^n \setminus \underline{1})\varrho_i)$ gelten. Daher gibt es ein δ aus der Formulierung von Satz 2 mit

$\delta \subseteq (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)^T$, $(\underline{1}) \subseteq (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)^T$ oder

$(\underline{2}) \subseteq (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)^T$. Ist $(\underline{1})$ (bzw. $(\underline{2})$) $\subseteq (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)^T$, so gibt es ein i, $1 \leq i \leq k$, mit $(a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni})^T = (\underline{1})$ (bzw. $(\underline{2})$), und es folgt

$$J_{\underline{a}_1} \vee J_{\underline{a}_2} \vee \dots \vee J_{\underline{a}_r} = h_4{}^{n+1}(j_1(x_i), J_{\underline{a}_1}, J_{\underline{a}_2}, \dots, J_{\underline{a}_n})$$
$$(\text{bzw. } h_4{}^{n+1}(j_2(x_i), J_{\underline{a}_1}, J_{\underline{a}_2}, \dots, J_{\underline{a}_n})).$$

Sei nun $\delta \subseteq (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)^T$. Nach Voraussetzung gibt es in N eine Funktion f_3 mit $f_3 \notin \mathrm{Pol}((E_2{}^n \setminus \underline{1})\delta) \cap M$. Folglich gibt es Tupel $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n$ mit den Eigenschaften

$(\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n)^T \subseteq ((E_2{}^n \setminus \underline{1})\delta)$, für kein $i \in I$ gilt $(\underline{b}_1,\underline{b}_2,\ldots,\underline{b}_n)^T \subseteq ((E_2{}^n \setminus \underline{1})\varrho_i)$ und $(f_3(\underline{b}_1),f_3(\underline{b}_2),\ldots,f_3(\underline{b}_n)) = (\underline{1})$.

Durch Zeilen- und Spaltenvertauschungen in $(\underline{b}_1,\underline{b}_2,\ldots,\underline{b}_n)^T$ und entsprechender Umnumerierung der Variablen in f_3 erreichen wir, daß die aus $(\underline{b}_1,\underline{b}_2,\ldots,\underline{b}_n)^T$ entstehende Matrix $(\underline{c}_1,\underline{c}_2,\ldots,\underline{c}_n)^T$ mit $(\underline{a}_1,\underline{a}_2,\ldots,\underline{a}_n)^T$ in maximal vielen Spalten übereinstimmt. Wir bilden jetzt die Funktion

$f_4 := h_4{}^{n+1}(f_3,J_{\underline{a}_1},\ldots,J_{\underline{a}_n})$. Für die n Tupel $\underline{d}_1,\underline{d}_2,\ldots,\underline{d}_n$, auf denen f_4 Eins wird, gilt $(\underline{d}_1,\underline{d}_2,\ldots,\underline{d}_n)^T \supseteq (\underline{a}_1,\underline{a}_2,\ldots,\underline{a}_n)^T$ und $(\underline{d}_1,\underline{d}_2,\ldots,\underline{d}_n)^T \supseteq (\underline{c}_1,\underline{c}_2,\ldots,\underline{c}_n)^T$.

Wir interessieren uns nun für Spalten $(d_{1i},d_{2i},\ldots,d_{ni})^T$ aus $(\underline{d}_1,\underline{d}_2,\ldots,\underline{d}_n)^T$, welche in $(\underline{c}_1,\underline{c}_2,\ldots,\underline{c}_n)^T$ vorkommen aber nicht in $(\underline{a}_1,\underline{a}_2,\ldots,\underline{a}_n)^T$. Wegen $(\underline{c}_1,\underline{c}_2,\ldots,\underline{c}_n)^T \subseteq ((E_2{}^n \setminus \underline{1})\delta)$, $\delta \subseteq (\underline{a}_1,\underline{a}_2,\ldots,\underline{a}_n)^T$ und

$(d_{1i},d_{2i},\ldots,d_{ni})^T \subseteq (\underline{c}_1,\underline{c}_2,\ldots,\underline{c}_n)^T \setminus (\underline{a}_1,\underline{a}_2,\ldots,\underline{a}_n)^T$ kommen für $(d_{1i},d_{2i},\ldots,d_{ni})^T$ nur Spalten aus $E_2{}^n \setminus \underline{1}$ in Frage. Es ergeben sich für $(d_{1i},d_{2i},\ldots,d_{ni})^T$ folgende Möglichkeiten:

a) $\exists \underline{a}_{j_1},\underline{a}_{j_2},\ldots,\underline{a}_{j_r}$ aus $\{\underline{a}_1,\underline{a}_2,\ldots,\underline{a}_n\}$ mit

$\{\underline{a}_{j_1},\underline{a}_{j_2},\ldots,\underline{a}_{j_r}\} = \{\underline{a}_1,\underline{a}_2,\ldots,\underline{a}_n\}$ und $d_{j_s} = 0$, $1 \leq s \leq r$,

b) $\exists \underline{a}_{j_1},\underline{a}_{j_2},\ldots,\underline{a}_{j_r}$ aus $\{\underline{a}_1,\underline{a}_2,\ldots,\underline{a}_n\}$ mit

$\{\underline{a}_{j_1},\underline{a}_{j_2},\ldots,\underline{a}_{j_r}\} = \{\underline{a}_1,\underline{a}_2,\ldots,\underline{a}_n\}$, $\underline{d}_{j_1} = 0$ und $d_{j_r} = 1$.

Wir erhalten nun eine Funktion f_5, welche aus f_4 wie folgt hervorgeht:

- Man ersetze die Variablen x_i, bei denen $(d_{1i},d_{2i},\ldots,d_{ni})^T$ der Eigenschaft a) genügt, durch c_o.
- Man ersetze die Variablen x_i, bei denen $(d_{1i},d_{2i},\ldots,d_{ni})^T$ der Eigenschaft b) genügt, durch die Funktion

$\mathcal{J}_{\underline{a}_{t_1}} \vee \mathcal{J}_{\underline{a}_{t_2}} \vee \ldots \vee \mathcal{J}_{\underline{a}_{t_w}} \vee \mathcal{J}_{\underline{a}_r}$, wobei $\{t_1, t_2, \ldots, t_w\}$ die maximale Teilmenge von der Menge $\{j_2, j_3, \ldots, j_{r-1}\}$ ist, für die $d_{t_1} = 1$ gilt, $1 \leq i \leq w$. Diese Funktion ist nach Struktur von M und Induktionsvoraussetzung schon in [N].

Dann gilt

$$\mathcal{J}_{\underline{a}_1} \vee \mathcal{J}_{\underline{a}_2} \vee \ldots \vee \mathcal{J}_{\underline{a}_r} = f_5.$$

q.e.d.

<u>Folgerung 1:</u> Sei $M = W_2^n$. Dann hat M genau die maximalen Mengen vom Typ a), b) bzw. c) des Satzes 2 sowie

d) $Z_{2,1} \cap \hat{F}_8^n$.

<u>Beweis:</u> Nach Satz 2 hat M die maximalen Mengen vom Typ a), b) und c). Als weitere maximale Menge für M käme nach Satz 2 nur noch eine Menge N in Frage mit $N \subseteq Z_{2,i} \cap \hat{F}_8^n$, $i = 1,0$.

Wir zeigen, daß $Z_{2,1} \cap \hat{F}_8^n$ maximal in M ist. Für $N \subseteq Z_{2,0} \cap \hat{F}_8^n$ zeigen wir, daß N nicht maximal in M sein kann.

Sei $N = Z_{2,1} \cap \hat{F}_8^n$. Nach (3) gilt $N \subset W_2^n$, und es bleibt zu zeigen, daß man jede Funktion des Erzeugendensystems von W_2^n (s. Lemma 3) mit Hilfe von Funktionen aus $Z_{2,1} \cap \hat{F}_8^n$ sowie einer Funktion $f \in M \setminus (Z_{2,1} \cap \hat{F}_8^n)$ erzeugen kann. Offenbar ist $j_1(x) \vee j_2(x) \in Z_{2,1} \cap \hat{F}_8^n$. Durch eventuelles Umnumerieren und Identifizieren von Variablen, erhält man aus f eine Funktion $f_1(x_1, x_2, x_3)$ mit $f_1(0,1,2) \neq f_1(0,1,1)$. Da $pr(Z_{2,1} \cap \hat{F}_8^n) = F_8^n$ ist, gilt $f_2(x) := f_1(C_0, j_1(x) \vee j_2(x), x) \in [(Z_{2,1} \cap \hat{F}_8^n) \cup f]$ mit $f_2(2) \neq f_2(1)$.

Für $f_2(2) = 0$ ist $j_1(x) \in [(Z_{2,1} \cap \hat{F}_8^n) \cup f]$ und

$$j_2(x) = h_3(j_1(x) \vee j_2(x), j_1(x)) \in [(Z_{2,1} \cap \hat{F}_8^n) \cup f].$$

Für $f_2(2) = 1$ gilt ebenso $j_2(x) \in [(Z_{2,1} \cap \hat{F}_8^n) \cup f]$ und

$$j_1(x) = h_3(j_1(x) \vee j_2(x), j_2(x)) \in [(Z_{2,1} \cap \hat{F}_8^n) \cup f].$$

Mit $pr(Z_{2,1} \cap \hat{F}_8^n) = F_8^n$ folgt, daß $Z_{2,1} \cap \hat{F}_8^n$ maximal in W_2^n ist.

Sei nun $N \subseteq Z_{2,0} \cap \hat{P}_8^n$. Nach Lemma 2 und Lemma 4 folgt

$$W_2^n \supseteq W_1^n \supset Z_{2,0} \cap \hat{P}_8^n \supseteq N.$$

Da die Funktion $j_1(x) \vee j_2(x)$ in W_2^n aber nicht in W_1^n enthalten ist, gilt sogar $W_2^n \supset W_1^n \supset N$, wonach N nicht maximal in M ist.

q.e.d.

Folgerung 2: Hat M die in (5) genannte Struktur und ist $M \neq W_2^n$, dann besitzt M genau die maximalen Mengen vom Typ a), b) bzw. c) des Satzes 2.

Beweis: Nach Satz 2 hat M die maximalen Mengen vom Typ a), b) und c). Als weitere maximale Menge für M käme nach Satz 2 nur noch eine Menge N in Frage mit $N \subseteq Z_{2,i} \cap \hat{P}_8^n$, $i = 1,0$.

Sei $N \subseteq Z_{2,0} \cap \hat{P}_8^n$. Nach Lemma 2 und Lemma 4 gilt

$M \supseteq W_1^n \supset Z_{2,0} \cap \hat{P}_8^n \supseteq N$. Da aber die Funktion $j_2(x)$ in M und nicht in W_1^n enthalten ist, folgt sogar $M \supset W_1^n \supset N$, wonach N nicht maximal in M ist.

Sei nun $N \subseteq Z_{2,1} \cap \hat{P}_8^n$. Für $M = \bigcap_{i \in I} \mathrm{Pol}\,((E_2^n \setminus \underline{1})\varrho_i)$ mit $\varrho_i \subset (E_3^n \setminus (E_2^n \cup E_{1,2}^n))$ für alle $i \in I$ folgt

$$M \supset W_2^n \supset Z_{2,1} \cap \hat{P}_8^n \supseteq N$$

und damit, daß N nicht maximal in M ist.

Existiert hingegen ein $i \in I$ mit $\varrho_i \not\subseteq (E_3^n \setminus (E_2^n \cup E_{1,2}^n))$, dann gibt es eine Spalte $(a_1, a_2, \ldots, a_n)^T \subseteq \varrho_i$,

$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \{1,2\}$ und o.B.d.A. $a_1 = \ldots = a_r = 1$,

$a_{r+1} = \ldots = a_n = 2$, $r < n$.

Für eine beliebige Funktion $f \in Z_{2,1} \cap \hat{P}_8^n$, $f \notin C_0$, folgt, indem man die Werteverteilung von f entsprechend dem folgenden Schema betrachtet, ein Widerspruch zu $f \in M$:

$$\begin{array}{ccc|c}
 & \underline{x} & & f(\underline{x}) \\
0 & 1 & 2 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 \\
 & \vdots & & \\
0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 2 & 2 & 1 \\
 & \vdots & & \\
0 & 2 & 2 & 1
\end{array}
\quad \left.\begin{array}{l} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} r \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n \quad \begin{array}{l} \\ , \text{ da } f \in Z_{2,1} \\ \text{-"-} \\ \vdots \\ \text{-"-} \\ \text{-"-} \\ \vdots \\ \text{-"-} \end{array}$$

Damit ist $Z_{2,1} \cap \hat{F}_8{}^n \not\subseteq M$ und kann nicht maximal in M sein. Weiter gilt $N \cap M \subseteq (Z_{2,1} \cap F_8{}^n) \cap M \subseteq [C_0]$, und folglich kann N nicht maximal in M sein.

q.e.d.

Sei M nun eine beliebige Menge folgender Struktur:

$$M = T_0^{0,2} \cap \left(\bigcap_{i \in I} \text{Pol } ((E_2{}^n \setminus \underline{1})\varrho_i) \right) \text{ mit } \varrho_i \subseteq (E_3{}^n \setminus E_2{}^n). \qquad (6)$$

<u>Bemerkung 1:</u> Tritt in der Darstellung (6) von M ein ϱ_i, $i \in I$, mit $(2,2,\ldots,2)^T \subseteq \varrho_i$ auf, so gilt $M = \bigcap_{i \in I} \text{Pol } ((E_2{}^n \setminus \underline{1})\varrho_i)$, d. h., der Durchschnitt mit $T_o^{0,2}$ ist in diesem Fall ohne Bedeutung.

<u>Beweis:</u> Nehmen wir an, es gäbe eine Funktion f aus $\bigcap_{i \in I} \text{Pol } ((E_2{}^n \setminus \underline{1})\varrho_i)$, die nicht in $T_o^{0,2}$ liegt.

Wegen $f \notin T_0{}^{0,2}$ gibt es ein Tupel $\underline{a} \in \{0,2\}^n$, für das $f(\underline{a}) = 1$ ist. Daraus folgt mit $(f(\underline{a}),\ldots,f(\underline{a}))^T = (1,\ldots,1)^T$, daß $f \notin \text{Pol } ((E_2{}^n \setminus \underline{1})\varrho_i)$ für $(2,\ldots,2)^T \subseteq \varrho_i$ und demnach erst recht $f \notin \bigcap_{i \in I} \text{Pol } ((E_2{}^n \setminus \underline{1})\varrho_i)$ gilt, im Widerspruch zur Annahme.

q.e.d.

<u>Satz 3:</u> Maximale Mengen für Mengen M vom Typ (6) sind:

a) $\text{Pol } ((E_2{}^n \setminus \underline{1})\delta) \cap M$ mit $\delta \subseteq (E_3{}^n \setminus E_2{}^n)$, $\nexists \varrho_i \supseteq \delta$ und

$$\forall \varepsilon \subset \delta \ \exists \varrho_i \supseteq \varepsilon,\ i \in I,$$

b) $pr^{-1}A \cap M$, wobei A maximal in F_8^n ist.

Falls $N \subseteq M$, $N \not\subseteq Z_{2,i} \cap \hat{F}_8^n$ $(i = 1,0)$ und N in keiner der Mengen vom Typ a), b) enthalten ist, so gilt $[N] = M$.

<u>Beweis:</u> Wir betrachten eine Funktion $f \in M$, die wie folgt gewählt wird: f nimmt auf genau den Tupeln $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ den Wert 1 an, für die $\forall i \in I\ (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)^T \not\subseteq ((E_2^n \setminus \underline{1})\varrho_i)$ und $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)^T \subseteq ((E_2^n \setminus \underline{1})\delta)$ gilt. Daraus folgt

$f \notin Pol\ ((E_2^n \setminus \underline{1})\delta)$ und damit $Pol\ ((E_2^n \setminus \underline{1})\delta) \cap M \subset M$.

Es ist auch klar, daß $pr^{-1}A \cap M \subset M$ ist. Sei nun $N \subseteq M$, $N \not\subseteq Z_{2,i} \cap \hat{F}_8^n$ $(i = 1,0)$ und N in keiner der Mengen vom Typ a) oder b) enthalten. Nach Satz 1 braucht nur noch gezeigt zu werden, daß aus $J_{\underline{a}_1} \vee J_{\underline{a}_2} \vee \dots \vee J_{\underline{a}_r} \in M$, $1 \leq r \leq n$, auch $J_{\underline{a}_1} \vee J_{\underline{a}_2} \vee \dots \vee J_{\underline{a}_r} \in [N]$, $1 \leq r \leq n$, folgt. In M sind alle $J_{\underline{a}}$ enthalten mit $\underline{a} \notin \{0,2\}^n$ (wegen $T_0^{0,2} \supset M$). Diese sind aber nach Folgerung 1 aus Lemma 5 und nach Lemma 4 ebenso in $[N]$ enthalten.

Setzen wir nun voraus, daß alle Funktionen $J_{\underline{a}_1} \vee J_{\underline{a}_2} \vee \dots \vee J_{\underline{a}_{r-1}}$ aus M, $2 \leq r \leq n$, in $[N]$ enthalten sind.

Wir werden zeigen, daß dann auch eine beliebige Funktion $J_{\underline{a}_1} \vee J_{\underline{a}_2} \vee \dots \vee J_{\underline{a}_r}$ aus M ebenso in $[N]$ enthalten ist. Dazu betrachten wir die n Tupel $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_r, \underline{a}_{r+1}, \dots, \underline{a}_n$ mit $\underline{a}_r = \underline{a}_{r+1} = \dots = \underline{a}_n$. Weil dann auch die Funktion $J_{\underline{a}_1} \vee J_{\underline{a}_2} \vee \dots \vee J_{\underline{a}_n}$ in M liegt, folgt $\forall i \in I$ $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)^T \not\subseteq ((E_2^n \setminus \underline{1})\varrho_i)$. Daher gibt es ein δ (s. Satz 3) mit $\delta \subseteq (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)^T$ oder $(\underline{1}) \subseteq (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)^T$.

Für $(\underline{1}) \subseteq (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)^T$, speziell $a_{1i} = a_{2i} = \dots = a_{ni} = 1$, gilt $J_{\underline{a}_1} \vee J_{\underline{a}_2} \vee \dots \vee J_{\underline{a}_r} = h_4^{r+1}(j_1(x_i), J_{\underline{a}_1}, \dots, J_{\underline{a}_r})$.

Sei nun $\delta \subseteq (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)^T$. Nach Voraussetzung gibt es in N eine Funktion $f_1 \notin \mathrm{Pol}\,((E_2{}^n \setminus \underline{1})\delta) \cap M$. Folglich gibt es Tupel $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n$ mit $(\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n)^T \subseteq ((E_2{}^n \setminus \underline{1})\delta)$,

$\nexists\, i \in I\ (\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n)^T \subseteq ((E_2{}^n \setminus \underline{1})\varrho_i)$ und

$f_1(\underline{b}_1) = f_1(\underline{b}_2) = \dots = f_1(\underline{b}_n) = 1$.

Durch Zeilen- und Spaltenvertauschungen in $(\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n)^T$ und entsprechender Umnumerierung der Variablen in f_1 erreichen wir, daß die aus $(\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n)^T$ entstehende Matrix $(\underline{c}_1, \underline{c}_2, \dots, \underline{c}_n)^T$ in maximal vielen Spalten mit $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)^T$ übereinstimmt.

Wir bilden die Funktion $f_2 := h_4{}^{n+1}(f_1, J_{\underline{a}_1}, \dots, J_{\underline{a}_n})$.

Für die n Tupel $\underline{d}_1, \underline{d}_2, \dots, \underline{d}_n$, auf denen $f_2 = 1$ wird, gilt

$(\underline{d}_1, \underline{d}_2, \dots, \underline{d}_n)^T \supseteq (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)^T$ und

$(\underline{d}_1, \underline{d}_2, \dots, \underline{d}_n)^T \supseteq (\underline{c}_1, \underline{c}_2, \dots, \underline{c}_n)^T$.

Wir interessieren uns für die Spalten $(d_{1i}, d_{2i}, \dots, d_{ni})^T$ aus $(\underline{d}_1, \underline{d}_2, \dots, \underline{d}_n)^T$, welche in $(\underline{c}_1, \underline{c}_2, \dots, \underline{c}_n)^T$ vorkommen, aber nicht in $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)^T$. Wegen $(\underline{c}_1, \underline{c}_2, \dots, \underline{c}_n)^T \subseteq ((E_2{}^n \setminus \underline{1})\delta)$, $\delta \subseteq (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)^T$ und

$(d_{1i}, d_{2i}, \dots, d_{ni})^T \subseteq (\underline{c}_1, \underline{c}_2, \dots, \underline{c}_n)^T \setminus (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)^T$ kommen für $(d_{1i}, d_{2i}, \dots, d_{ni})^T$ nur Spalten aus $E_2{}^n \setminus \underline{1}$ in Frage. Es ergeben sich für $(d_{1i}, d_{2i}, \dots, d_{ni})^T$ folgende Möglichkeiten:

a) Es gilt $(d_{1i}, d_{2i}, \dots, d_{ni})^T = (\underline{0})$ oder

b) o.B.d.A. $d_{1i} = d_{2i} = \dots = d_{si} = 0$ und

$$d_{ji} = 1,\ s+1 \leq j \leq n,\ 1 \leq s < r \leq n.$$

Hiermit erhält man eine Funktion f_3, welche aus f_2 wie folgt hervorgeht:

- Man ersetze die Variablen x_i, bei denen $(d_{1i}, d_{2i}, \dots, d_{ni})^T$ der Eigenschaft a) genügt, durch c_0.
- Man ersetze die Variablen x_i, bei denen $(d_{1i}, d_{2i}, \dots, d_{ni})^T$ der Eigenschaft b) genügt, durch die Funktion

$J_{\underline{a}_{s+1}} \vee J_{\underline{a}_{s+2}} \vee \ldots \vee J_{\underline{a}_r}$, welche nach Induktionsvoraussetzung und Struktur von M schon in [N] liegt.

Dann gilt

$J_{\underline{a}_1} \vee J_{\underline{a}_2} \vee \ldots \vee J_{\underline{a}_r} = f_3$.

q.e.d.

<u>Folgerung 1:</u> Sei $M = W_1^n$.

Dann hat M die maximalen Mengen

a) $Z_{2,0} \cap \hat{F}_8^n$,

b) $pr^{-1}A \cap M$, wobei A maximal in F_8^n ist.

<u>Beweis:</u> Nach Lemma 2 ist $Z_{2,0} \cap \hat{F}_8^n$ maximal in M, nach Satz 3 $pr^{-1}A \cap M$ maximal in M. Weiter gilt nach Satz 3, daß M keine maximale Menge der Struktur Pol $((E_2^n \setminus \underline{1})\sigma) \cap M$ haben kann. Es bleibt noch zu zeigen, daß eine Menge N mit $N \subsetneq Z_{2,1} \cap \hat{F}_8^n$ nicht maximal in M sein kann. Für eine beliebige Funktion $f \in Z_{2,1} \cap \hat{F}_8^n$, $f \neq c_0$, folgt, indem man die Werteverteilung von f entsprechend dem folgenden Schema betrachtet, ein Widerspruch zu $f \in M$:

$$
\begin{array}{cccl}
\underline{x} & & f(\underline{x}) & \\
0\;1\;2 & & 1 & \\
0\;1\;1 & \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} & 1 & ,\quad \text{da} \quad f \in Z_{2,1} \\
0\;1\;1 & & 1 & \quad\quad\quad\;\; \text{-"-} \\
\vdots & n & \vdots & \quad\quad\quad\;\; \vdots \\
0\;1\;1 & & 1 & \quad\quad\quad\;\; \text{-"-} \\
0\;2\;2 & & 1 & \quad\quad\quad\;\; \text{-"-} \\
\vdots & & \vdots & \quad\quad\quad\;\; \vdots \\
0\;2\;2 & & 1 & \quad\quad\quad\;\; \text{-"-} \quad .
\end{array}
$$

Damit gilt $(Z_{2,1} \cap \hat{F}_8^n) \cap M \subsetneq [c_0]$, folglich ist $[N] \cap M \subsetneq [c_0]$, und [N] kann nicht maximal in M sein.

q.e.d.

<u>Folgerung 2:</u> Hat M die Struktur (6) und ist $M \neq W_1^n$, dann besitzt M genau die maximalen Mengen vom Typ a) bzw. b) des Satzes 3.

__Beweis:__ Nach Satz 3 hat M die maximalen Mengen vom Typ a) bzw. b). Des weiteren zeigen wir, daß eine beliebige Menge N mit $N \subsetneq Z_{2,i} \cap \hat{F}_8^n$ $(i = 1,0)$ nicht maximale Menge von M sein kann. Sei $N \subsetneq Z_{2,0} \cap \hat{F}_8^n$. Nach Lemma 4 und Lemma 2 gilt $M \supset W_1^n \supset Z_{2,0} \cap \hat{F}_8^n \supseteq N$, und folglich kann N nicht maximal in M sein. Sei nun $N \subsetneq Z_{2,1} \cap F_8^n$. Da $M \subsetneq T_0^{0,2}$ ist, folgt für eine beliebige Funktion $f \in Z_{2,1} \cap \hat{F}_8^n$, $f \notin C_0$, indem man die Werteverteilung von f entsprechend dem folgenden Schema betrachtet, ein Widerspruch zu $f \in T_0^{0,2}$ und demnach $f \notin M$:

$\underline{x}$	$f(\underline{x})$	
0 1 2	1	
0 1 1	1	, da $f \in Z_{2,1}$,
0 2 2	1	, da $f \in Z_{2,1}$.

Damit gilt $[N] \cap M \subsetneq (Z_{2,1} \cap \hat{F}_8^n) \cap M \subsetneq [C_0]$, und folglich ist N nicht maximal in M.

q.e.d.

Indem man schrittweise, beginnend bei $\hat{F}_8^n$, die maximalen Mengen bestimmt, von diesen wiederum die maximalen Mengen usw., kommt man nach den vorangehenden Betrachtungen zu den beiden "Endmengen" $\hat{F}_8^n \cap Z_{2,i}$, $i = 0,1$. Dadurch, daß die Werte von Funktionen aus $\hat{F}_8^n \cap Z_{2,i}$ $(i = 0,1)$ auf den Tupeln aus der Menge $\{E_3^k \setminus E_2^k\}$, $k \geq 1$, eineindeutig durch die Werte auf den Tupeln aus der Menge $\{E_2^k\}$ bestimmt werden, gilt $|\hat{F}_8^n \cap Z_{2,i}| = |F_8^n|$. Damit gibt es keine Menge $N \subset \hat{F}_8^n \cap Z_{2,i}$ $(i = 0,1)$ mit $\mathrm{pr}\, N = F_8^n$.

__Satz 4:__ Es gibt nur endlich viele abgeschlossene Mengen aus $P_{3,2}$ deren Projektion F_8^n ist.

__Beweis:__ Es gibt nur endlich viele Relationen mit vorgegebener Zeilenzahl n und ohne doppelt auftretende Spalten über der Menge E_3. Nach Satz 2 und Satz 3 sowie deren Folgerungen sind alle abgeschlossenen Mengen aus $P_{3,2}$, deren Projektion F_8^n ist, mit

Hilfe solcher Relationen bzw. Durchschnitten von solchen Relationen darstellbar, und es wird höchstens noch der Durchschnitt mit $T_0^{0,2}$ bzw. $\hat{F}_8^{\,n} \cap Z_{2,i}$ $(i = 0,1)$ gebildet. Damit ergeben sich nur endlich viele Möglichkeiten.

q.e.d.

In /7/ wird gezeigt, daß es für $n = 2$ genau 148 paarweise verschiedene Mengen aus $P_{3,2}$ gibt, deren Projektion $F_8^{\,2}$ ist. Diese Mengen werden angegeben.

Literatur

/1/ Jablonski, S. W., Gawrilow, G. P., und Kudrjawzew, W. B.: Boolesche Funktionen und Postsche Klassen. Berlin 1970

/2/ Pöschel, R., und Kalužnin, L. A.: Funktionen- und Relationenalgebren. Berlin 1979

/3/ Burosch, G., Dassow, J., Harnau, W., und Lau, D.: Über Algebren von Prädikaten. Elektron. Informationsverarb. Kybernetik (erscheint demnächst)

/4/ Jablonskij, S. V.: Funktional'nye postroenija v k-značnoj logike. Trudy Mat~~h~~. Inst. Steklov. 51, ~~4~~ 5 - 142 (1958)

/5/ Blochina, G. N.: O predikatnom opicanki klassov Posta. Diskret. Analiz. 16, 16 - 29 (1970)

/6/ Burosch, G.: Über die Ordnung der prävollständigen Klassen in Algebren von Prädikaten. Preprint, Wilhelm-Pieck-Universität Rostock 1973

/7/ Grünwald, N.: Beschreibung aller abgeschlossenen Mengen aus $P_{3,2}$, deren Projektion $F_8^{\,2}$ ist, mit Hilfe von Relationen. Rostock. Math. Kolloq. 23, 27 - 34 (1983)

eingegangen: 27. 07. 1982

Anschrift des Verfassers:

Dipl.-Math. N. Grünwald
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
DDR-2500 Rostock

Rostock. Math. Kolloq. 23, 27 - 34 (1983) 03B50
03G20

Norbert Grünwald

Beschreibung aller abgeschlossenen Mengen aus $P_{3,2}$, deren Projektion F_8^2 ist, mit Hilfe von Relationen

0. Einleitung

Um das Jahr 1920 begann Post (vgl. /1/) die Untersuchung der Menge P_2 aller Booleschen Funktionen. Diese Untersuchungen setzte S. V. Jablonskij 1953 (vgl. /4/) für die Menge P_k aller Funktionen über der Menge $E_k = \{0,1,\ldots,k-1\}$ fort. In /6/ wurde $P_{k,2}$, die Menge aller Funktionen aus P_k mit Funktionswerten in $E_2 = \{0,1\}$, eingeführt und ein Homomorphismus von $P_{3,2}$ auf P_2 betrachtet, der Projektion genannt wird. Es stellt sich die Frage nach denjenigen abgeschlossenen Mengen aus $P_{3,2}$, deren Projektion gleich einer festen Menge $A \subseteq P_2$ ist. Diese Untersuchungen wurden in /6/ begonnen, in /3/ fortgesetzt und in /7/ für $A = F_8^n$, $n \geq 2$, betrachtet. In dieser Arbeit werden auf Grundlage der Arbeit /7/ sämtliche 122 abgeschlossenen Mengen aus $P_{3,2}$, deren Projektion F_8^2 ist, mit Hilfe von Relationen angegeben.

I. Bezeichnungen und Begriffe

$P_{3,2}^n$ sei die Menge aller Funktionen aus $E_3^n = \{0,1,2\}^n$ in $E_2 = \{0,1\}$, und $P_{3,2} := \bigcup_{n\geq 1} P_{3,2}^n$. Ferner sei P_2 die Menge aller Booleschen Funktionen. Sei $A \subseteq P_{3,2}$. Unter einer Superposition über A verstehen wir wie üblich eine Funktion, die man aus Funktionen von A erhält, indem man in endlicher Anzahl gewisse der folgenden Operationen anwendet: Identifizieren von Variablen, Hinzufügen fiktiver Variablen, Umbenennen von Variablen oder Einsetzen von Funktionen anstelle von Variablen einer Funktion. Als Abschluß [A] von A, $A \subseteq P_{3,2}$, bezeichnen wir die Menge aller Superpositionen über A. Ist A = [A], so heißt A abgeschlossen.

Sei $f \in P_{3,2}^{n}$. Die durch folgende Festsetzung gewonnene Funktion $F \in P_2$: Für $\underline{a} \in E_2^{n}$ sei stets $F(\underline{a}) := f(\underline{a})$, nennen wir Projektion der Funktion f, und schreiben $pr\ f = F$. Unter der Projektion einer Menge $A \subseteq P_{3,2}$ verstehen wir die Menge $pr\ A = \{F \in P_2 \mid \exists f \in A \text{ mit } pr\ f = F\}$. Für $A \subseteq P_2$ heißt die Menge $pr^{-1}A = \{f \in P_{3,2} \mid pr\ f \in A\}$ Urbild von A.

Eine Teilmenge M der Menge $A = [A] \subseteq P_{3,2}$ heißt Erzeugendensystem für A, wenn $[M] = A$ ist. Eine abgeschlossene Teilmenge M der Menge $A = [A]$ heißt maximale Menge von A, wenn $M \subset A$ und für eine beliebige Funktion $f \in A \setminus M$ die Beziehung $[M \cup f] = A$ gilt.

Wir sagen, eine Funktion $f \in P_{3,2}^{n}$ bewahrt die h-äre Relation $\varrho \subseteq E_3^{h}$, wenn für beliebige

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{1h} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{2h} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{nh} \end{pmatrix} \in \varrho \text{ stets}$$

$$f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{1h} & a_{2h} & \cdots & a_{nh} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}) \\ f(a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f(a_{1h}, a_{2h}, \dots, a_{nh}) \end{pmatrix} \in \varrho \text{ ist,}$$

wobei die Spalten $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ih})^T$, $i = 1,2,\dots,n$, nicht notwendig voneinander verschieden sein müssen. Die leere Menge werde von allen Funktionen bewahrt. Mit $Pol_A\ \varrho$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen aus A, welche die Relation ϱ bewahren. Falls A aus dem Zusammenhang hervorgeht, kann A als Index auch weggelassen werden. Jede Relation ϱ läßt sich mit Hilfe einer Matrix darstellen, indem man die Elemente von ϱ als Spalten der Matrix schreibt. Für zwei Matrizen M und N gelte $M \cong N$, falls folgendes gilt:

1) Nachdem in M und N alle Zeilen, welche doppelt auftreten, gestrichen worden sind, ist die Anzahl der Zeilen in M und N gleich groß. (Es ist klar, daß dabei die Relationen nicht verändert werden.)

2) Es existiert nun eine Permutation der Zeilen von M, so daß in der entstandenen Matrix M_1 jede Spalte aus N auch Spalte aus M_1 ist.

Wir vereinbaren folgende Bezeichnungen:

$F_8{}^2 := \mathrm{Pol}_{P_2}\binom{0\ 0\ 1}{0\ 1\ 0}$,

$\hat{F}_8{}^2 := \mathrm{Pol}_{P_{3,2}}\binom{0\ 0\ 1}{0\ 1\ 0}$,

$Z_{2,0} := \mathrm{Pol}_{P_{3,2}}\binom{0\ 1\ 2}{0\ 1\ 0}$,

$Z_{2,1} := \mathrm{Pol}_{P_{3,2}}\binom{0\ 1\ 2}{0\ 1\ 1}$,

$T_0{}^{0,2} := \mathrm{Pol}_{P_{3,2}}(0\ 2)$,

$\mathrm{Pol}_A(\varrho\sigma) := \mathrm{Pol}_A(\varrho \cup \sigma)$.

2. Ergebnisse

Aus der Arbeit /7/ (Satz 2 und Satz 3 sowie deren Folgerungen) ergeben sich für den Fall $n = 2$ folgende Aussagen, wobei $\mathrm{Pol}\,\varrho$ stets $\mathrm{Pol}_{P_{3,2}}\,\varrho$ bedeutet:

1) Falls $M = \mathrm{Pol}\binom{00102}{01020}$ ist, so hat M genau die maximalen Mengen

   a) $T_0{}^{0,2} \cap M$,

   b) $\mathrm{Pol}\binom{0011}{0102} \cap M$,

   c) $Z_{2,1} \cap \hat{F}_8{}^2$,

   d) $pr^{-1} A \cap M$, wobei A maximal in $F_8{}^2$ ist.

2) Falls $M = \bigcap_{i\in I} \mathrm{Pol}(\begin{smallmatrix}001\\010\end{smallmatrix}\ \varrho_i)$ mit $\varrho_i \subseteq \binom{2021}{0212}$ und

$M \neq \mathrm{Pol}\binom{00102}{01020}$ ist, so hat M genau die maximalen Mengen

a) $T_0^{0,2} \cap M$,

b) $\mathrm{Pol}(\begin{smallmatrix}001\\010\end{smallmatrix}\ \delta) \cap M$ mit $\delta \subseteq \binom{2021}{0212}$, $\nexists \varrho_i \supseteq \delta$

und $\forall \varepsilon \subset \delta\ \ \exists \varrho_i \supseteq \varepsilon$, $i \in I$,

c) $pr^{-1}A \cap M$, wobei A maximal in F_8^2 ist.

3) Falls $M = \mathrm{Pol}\binom{00120212}{01002122} \cap T_0^{0,2}$ ist, dann hat M genau die maximalen Mengen

a) $Z_{2,0} \cap \hat{F}_8^2$,

b) $pr^{-1}A \cap M$, wobei A maximal in F_8^2 ist.

4) Falls $M = T_0^{0,2} \cap \bigcap_{i\in I} \mathrm{Pol}(\begin{smallmatrix}001\\010\end{smallmatrix}\ \varrho_i)$ mit $\varrho_i \subseteq \binom{20212}{02122}$ und

$M \neq \mathrm{Pol}\binom{00120212}{01002122}$ ist, so hat M genau die maximalen Mengen

a) $\mathrm{Pol}(\begin{smallmatrix}001\\010\end{smallmatrix}\ \delta) \cap M$ mit $\delta \subseteq \binom{20212}{02122}$, $\nexists \varrho_i \supseteq \delta$

und $\forall \varepsilon \subset \delta\ \ \exists \varrho_i \supseteq \varepsilon$, $i \in I$,

b) $pr^{-1}A \cap M$, wobei A maximal in F_8^2 ist.

5) Es gibt keine echte Teilmenge von $Z_{2,i} \cap \hat{F}_8^2$, $i = 0,1$, deren Projektion F_8^2 ist.

Mit Hilfe dieser 5 Aussagen kann man nun sämtliche maximalen Mengen aus $P_{3,2}$, deren Projektion F_8^2 ist, bestimmen.
Dabei geht man folgendermaßen vor: Offensichtlich ist das Urbild der Menge F_8^2 die Menge M mit $M = \mathrm{Pol}\binom{001}{010}$. Aussage 2) liefert für diese Menge alle maximalen Mengen. Von diesen Mengen sind für uns nur die Mengen vom Typ 2a) und 2b) von Interesse, da nur deren Projektion F_8^2 ist. Die maximalen Mengen dieser Mengen erhalten wir aber wieder durch die Aussagen

1) - 4). Von diesen neuen Mengen nehmen wir wieder nur die Mengen, deren Projektion $F_8^{\,2}$ ist, und können von diesen Mengen durch die Aussagen 1) - 4) deren maximale Mengen bestimmen u. s. w.

Wir erreichen schließlich die beiden "Endmengen" $Z_{2,i} \cap \hat{F}_8^{\,2}$, $i = 0,1$. Von diesen Mengen ist uns durch Aussage 5) bekannt, daß sie keine echten Teilmengen mehr haben, deren Projektion $F_8^{\,2}$ ist.

Wenn wir alle diejenigen Relationen ϱ' mit der Relation ϱ identifizieren, für die Pol ϱ = Pol ϱ' gilt, kommen wir zu den in der folgenden Tabelle angegebenen 148 paarweise verschiedenen Mengen, deren Projektion $F_8^{\,2}$ ist. Dabei werden wir die Mengen von Funktionen durch ihre Relationen und Durchschnitte von Mengen von Funktionen durch die Durchschnitte der entsprechenden Relationen charakterisieren (bis auf die Mengen $\hat{F}_8^{\,2}$, $Z_{2,0} \cap \hat{F}_8^{\,2}$ und $Z_{2,1} \cap \hat{F}_8^{\,2}$) und in den Relationen den stets auftretenden Teil $\begin{matrix}001\\010\end{matrix}$ weglassen.

1\. $\hat{F}_8^{\,2}$.

2\. - 5. $\binom{1}{2}$, $\binom{0}{2}$, $\binom{2}{2}$, $\hat{F}_8^{\,2} \cap (02)$.

6\. - 10. $\binom{1}{2} \cap \binom{2}{2}$, $\binom{1}{2} \cap \binom{0}{2}$, $\binom{0}{2} \cap \binom{2}{2}$, $\binom{1}{2} \cap (02)$, $\binom{0}{2} \cap (02)$.

11\. - 12. $\binom{1}{2} \cap \binom{0}{2} \cap \binom{2}{2}$, $\binom{1}{2} \cap \binom{0}{2} \cap (02)$.

13\. - 18. $\binom{12}{21}$, $\binom{12}{22}$, $\binom{10}{22}$, $\binom{12}{20}$, $\binom{22}{02}$, $\binom{20}{02}$.

19\. - 30. $\binom{12}{21} \cap \binom{2}{2}$, $\binom{12}{21} \cap \binom{2}{0}$, $\binom{12}{21} \cap (02)$, $\binom{12}{22} \cap \binom{0}{2}$,
$\binom{10}{22} \cap \binom{2}{2}$, $\binom{10}{22} \cap (02)$, $\binom{12}{20} \cap \binom{2}{2}$, $\binom{12}{20} \cap (02)$,
$\binom{22}{02} \cap \binom{1}{2}$, $\binom{20}{02} \cap (02)$, $\binom{20}{02} \cap \binom{1}{2}$, $\binom{20}{02} \cap \binom{2}{2}$.

31\. - 34. $\binom{12}{21} \cap \binom{2}{0} \cap \binom{2}{2}$, $\binom{12}{21} \cap \binom{2}{0} \cap (02)$, $\binom{20}{02} \cap \binom{1}{2} \cap \binom{2}{2}$,
$\binom{20}{02} \cap \binom{1}{2} \cap (02)$.

35. - 49. $\binom{12}{21} \cap \binom{12}{22}$, $\binom{12}{21} \cap \binom{10}{22}$, $\binom{12}{21} \cap \binom{12}{20}$, $\binom{12}{21} \cap \binom{22}{02}$,
$\binom{12}{21} \cap \binom{02}{20}$, $\binom{12}{22} \cap \binom{10}{22}$, $\binom{12}{22} \cap \binom{12}{20}$, $\binom{12}{22} \cap \binom{22}{02}$,
$\binom{12}{22} \cap \binom{02}{20}$, $\binom{10}{22} \cap \binom{12}{20}$, $\binom{10}{22} \cap \binom{22}{02}$, $\binom{10}{22} \cap \binom{02}{20}$,
$\binom{12}{20} \cap \binom{22}{02}$, $\binom{12}{20} \cap \binom{02}{20}$, $\binom{22}{02} \cap \binom{02}{20}$.

50. - 63. $\binom{12}{21} \cap \binom{12}{22} \cap \binom{0}{2}$, $\binom{12}{21} \cap \binom{10}{22} \cap (02)$, $\binom{12}{21} \cap \binom{12}{20} \cap (02)$,
$\binom{12}{21} \cap \binom{10}{22} \cap \binom{2}{2}$, $\binom{12}{21} \cap \binom{12}{20} \cap \binom{2}{2}$, $\binom{12}{21} \cap \binom{02}{20} \cap (02)$,
$\binom{12}{21} \cap \binom{02}{20} \cap \binom{2}{2}$, $\binom{10}{22} \cap \binom{12}{20} \cap (02)$, $\binom{10}{22} \cap \binom{12}{20} \cap \binom{2}{2}$,
$\binom{10}{22} \cap \binom{02}{20} \cap (02)$, $\binom{10}{22} \cap \binom{02}{20} \cap \binom{2}{2}$, $\binom{12}{20} \cap \binom{02}{20} \cap (02)$,
$\binom{12}{20} \cap \binom{02}{20} \cap \binom{2}{2}$, $\binom{22}{02} \cap \binom{02}{20} \cap \binom{1}{2}$.

64. - 69. $\binom{120}{212}$, $\binom{122}{212}$, $\binom{222}{102}$, $\binom{202}{122}$, $\binom{220}{102}$, $\binom{022}{202}$.

70. - 75. $\binom{120}{212} \cap (02)$, $\binom{120}{212} \cap \binom{2}{2}$, $\binom{122}{212} \cap \binom{0}{2}$, $\binom{022}{201} \cap (02)$,
$\binom{022}{201} \cap \binom{2}{2}$, $\binom{022}{202} \cap \binom{1}{2}$.

76. - 95. $\binom{120}{212} \cap \binom{12}{22}$, $\binom{120}{212} \cap \binom{22}{02}$, $\binom{122}{210} \cap \binom{02}{20}$, $\binom{122}{212} \cap \binom{10}{22}$,
$\binom{122}{212} \cap \binom{12}{20}$, $\binom{122}{212} \cap \binom{22}{02}$, $\binom{122}{212} \cap \binom{02}{20}$, $\binom{222}{102} \cap \binom{12}{21}$,
$\binom{222}{102} \cap \binom{12}{20}$, $\binom{222}{102} \cap \binom{02}{20}$, $\binom{022}{212} \cap \binom{12}{21}$, $\binom{022}{212} \cap \binom{12}{20}$,
$\binom{022}{212} \cap \binom{02}{20}$, $\binom{202}{021} \cap \binom{12}{21}$, $\binom{202}{021} \cap \binom{12}{22}$, $\binom{202}{021} \cap \binom{22}{02}$,
$\binom{202}{022} \cap \binom{12}{21}$, $\binom{022}{202} \cap \binom{12}{22}$, $\binom{022}{202} \cap \binom{10}{22}$, $\binom{022}{202} \cap \binom{12}{20}$.

96. - 99. $\binom{122}{210} \cap \binom{02}{20} \cap (02)$, $\binom{122}{210} \cap \binom{02}{20} \cap \binom{2}{2}$,
$\binom{021}{202} \cap \binom{12}{21} \cap (02)$, $\binom{021}{202} \cap \binom{12}{21} \cap \binom{2}{2}$.

100. - 114. $\binom{122}{210}\cap\binom{122}{212}$, $\binom{122}{210}\cap\binom{222}{102}$, $\binom{122}{210}\cap\binom{022}{212}$,

$\binom{120}{212}\cap\binom{202}{021}$, $\binom{122}{210}\cap\binom{202}{022}$, $\binom{122}{212}\cap\binom{222}{102}$,

$\binom{122}{212}\cap\binom{022}{212}$, $\binom{122}{212}\cap\binom{202}{021}$, $\binom{122}{212}\cap\binom{202}{022}$,

$\binom{222}{102}\cap\binom{022}{212}$, $\binom{222}{102}\cap\binom{202}{021}$, $\binom{222}{102}\cap\binom{202}{022}$,

$\binom{022}{212}\cap\binom{202}{021}$, $\binom{022}{212}\cap\binom{202}{022}$, $\binom{202}{021}\cap\binom{202}{022}$.

115. - 117. $\binom{1202}{2120}$, $\binom{1202}{2122}$, $\binom{2202}{1022}$.

118. - 119. $\binom{1202}{2120}\cap(02)$, $\binom{1202}{2120}\cap\binom{2}{2}$.

120. - 123. $\binom{1202}{2120}\cap\binom{22}{20}$, $\binom{1202}{2120}\cap\binom{22}{21}$,

$\binom{1202}{2122}\cap\binom{20}{02}$, $\binom{1202}{2022}\cap\binom{21}{12}$.

124. $\binom{1202}{2120}\cap\binom{22}{20}\cap\binom{22}{21}$.

125. - 132. $\binom{1220}{2102}\cap\binom{220}{202}$, $\binom{1220}{2102}\cap\binom{222}{201}$,

$\binom{1220}{2102}\cap\binom{221}{202}$, $\binom{1220}{2102}\cap\binom{221}{212}$,

$\binom{1202}{2122}\cap\binom{022}{202}$, $\binom{1202}{2122}\cap\binom{022}{201}$,

$\binom{2022}{1202}\cap\binom{212}{122}$, $\binom{2022}{1202}\cap\binom{212}{120}$.

133. - 134. $\binom{1202}{2120}\cap\binom{220}{202}\cap\binom{22}{21}$, $\binom{1202}{2120}\cap\binom{221}{212}\cap\binom{22}{20}$.

135. - 142. $\binom{1202}{2120}\cap\binom{220}{202}\cap\binom{222}{201}$, $\binom{1202}{2120}\cap\binom{202}{220}\cap\binom{221}{202}$,

$\binom{1202}{2120}\cap\binom{220}{202}\cap\binom{221}{212}$, $\binom{1202}{2120}\cap\binom{222}{201}\cap\binom{221}{202}$,

$\binom{1202}{2120}\cap\binom{222}{201}\cap\binom{221}{212}$, $\binom{1202}{2120}\cap\binom{221}{202}\cap\binom{221}{212}$,

$\binom{1202}{2122}\cap\binom{022}{202}\cap\binom{022}{201}$, $\binom{1202}{2022}\cap\binom{212}{122}\cap\binom{210}{122}$.

143. - 145. $\binom{1202}{2120}\cap\binom{1202}{2122}$, $\binom{1202}{2120}\cap\binom{2202}{1022}$,

$\binom{1202}{2122}\cap\binom{2202}{1022}$.

146. $\binom{12022}{21202}$.

147. - 148. $Z_{2,1}\cap\hat{F}_8^{\,2}$, $Z_{2,0}\cap\hat{F}_8^{\,2}$.

Literatur

/1/ Jablonski, S. W., Gawrilow, G. P., und Kudrjawzew, W. B.: Boolesche Funktionen und Postsche Klassen. Berlin 1970

/2/ Pöschel, R., und Kalužnin, L. A.: Funktionen- und Relationenalgebren. Berlin 1979

/3/ Burosch, G., Dassow, J., Harnau, W., und Lau, D.: Über Algebren von Prädikaten. Elektron. Informationsverarb. Kybernetik (erscheint demnächst)

/4/ Jablonskij, S. V.: Funktional'yne postroenija v k-značnoj logike. Trudy Mat. Inst. Steklov. 51, 5 - 142 (1958)

/5/ Blochina, G. N.: O predikatnom opisanii klassov Posta. Diskret. Analiz. 16, 16 - 29 (1970)

/6/ Burosch, G.: Über die Ordnung der prävollständigen Klassen in Algebren von Prädikaten. Preprint, Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, 1973

/7/ Grünwald, N.: Bestimmung sämtlicher abgeschlossener Mengen aus $P_{3,2}$, deren Projektion $F_8{}^n$ ist. Rostock. Math. Kolloq. 23, 5 - 26 (1983)

eingegangen: 27. 07. 1982

Anschrift des Verfassers:

Dipl.-Math. N. Grünwald
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
DDR-2500 Rostock

Rostock. Math. Kolloq. 23, 35 – 42 (1983) 03G20
08A40

Valerij Vasilevič Gorlov
Dietlinde Lau

Über Automorphismen auf Funktionenalgebren

Die im folgenden nicht näher erläuterten Begriffe und Bezeichnungen entnehme man /5/.
Sei $E_k = \{0,1,\dots,k-1\}$, $P_k^n = \{f^n: E_k^n \to E_k\}$, $P_k = \bigcup_{n\geq 1} P_k^n$ und $P_k^{[q]}$ die Menge aller Funktionen aus P_k^1, die genau q Werte annehmen. Die Stellenzahl n einer Funktion f^n aus P_k bezeichnen wir auch mit af. Gegenstand der folgenden Untersuchungen ist die Algebra $\langle P_k; \zeta, \tau, \Delta, \nabla, *\rangle$ (/3/, /5/).
Ein Automorphismus α auf einer abgeschlossenen Menge A von P_k heißt innerer Automorphismus, wenn eine Permutation φ auf E_k existiert, so daß für alle $f^n \in A$ die Beziehung $f^{\alpha}(x_1,\dots,x_n) = \varphi^{-1}(f(\varphi(x_1),\dots,\varphi(x_n)))$ gilt. Im folgenden sollen einige Eigenschaften von Automorphismen zusammengestellt werden und für gewisse abgeschlossene Mengen nachgewiesen werden, daß sie nur innere Automorphismen besitzen. Insbesondere wird der Nachweis geführt, daß alle Automorphismen auf Klassen von P_2 innere Automorphismen sind, dies aber nicht mehr für Klassen von P_k für $k \geq 3$ gilt. Grundlage der dabei geführten Beweise ist die Arbeit /3/ von A. I. Mal'cev, aus der viele Beweisdetails übernommen werden konnten bzw. deren Aussagen über Automorphismen hier verallgemeinert werden.

Lemma 1: Sei α ein Automorphismus auf einer abgeschlossenen Menge A von P_k. Dann gilt für beliebiges f aus A:

a) $af = af^{\alpha}$,
b) x_1 ist genau dann eine fiktive Variable von f, wenn x_1 eine fiktive Variable von f^{α} ist,
c) f ist genau dann eine Konstante, wenn f^{α} eine Konstante ist,
d) f ist genau dann eine Permutation, wenn f^{α} eine Permutation ist.

Beweis:

a) Angenommen, es existiert in A eine Funktion f mit $af \neq af^{\alpha}$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1: $n := af < af^{\alpha} =: m$.

Dann gilt $\Delta^{n-1}f = \Delta^{n}f$. Folglich ist $\Delta^{n-1}f^{\alpha} = \Delta^{n}f^{\alpha}$. Die Gleichung $\Delta^{n-1}f^{\alpha} = \Delta^{n}f^{\alpha}$ ist aber wegen $a(\Delta^{n-1}f^{\alpha}) = m-n+1$ und $a(\Delta^{n}f^{\alpha}) = m-n$ nicht möglich.

Fall 2: $af > af^{\alpha} =: m$.

In diesem Fall ist $\Delta^{m-1}f^{\alpha} = \Delta^{m}f^{\alpha}$. Hieraus folgt $(\Delta^{m-1}f)^{\alpha} = (\Delta^{m}f)^{\alpha}$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Eineindeutigkeit der Abbildung α.
Also muß für alle f aus A die Beziehung $af = af^{\alpha}$ gelten.

b) O.B.d.A. sei $i = 1$. Offensichtlich ist x_1 genau dann eine fiktive Variable von f, wenn $\nabla(\Delta f) = f$ ist. Die Gleichung $\nabla(\Delta f) = f$ gilt genau dann, wenn $\nabla(\Delta f^{\alpha}) = f^{\alpha}$ ist.
Also gilt b).

c) folgt unmittelbar aus b).

d) Sei $e(x) = x$ und $e \in A$. Die Funktion e ist die einzige Funktion aus A, für die für alle $f \in A^1$ stets $f * e = e * f$ gilt. Folglich ist für alle $f \in A^1$ auch $f^{\alpha} * e^{\alpha} = e^{\alpha} * f^{\alpha}$. Also ist $e^{\alpha} = e$. Da für jede Permutation $s \in A$ ein t mit $\underbrace{s * s * \ldots * s}_{t \text{ mal}} = e$ existiert, ist $s^{\alpha} * s^{\alpha} * \ldots * s^{\alpha} = e$ und damit s^{α} eine Permutation.

Satz 1: Sei A eine abgeschlossene Menge von P_k und T eine Teilmenge von A^r, $r \geq 1$, die folgende drei Eigenschaften hat:

(1) Alle Funktionen aus A bewahren die Funktionen aus T.

(2) Es existieren ein $\tilde{c} \in E_k^r$ und gewisse Funktionen

$g_0, g_1, \ldots, g_{k-1} \in T$ mit $g_i(\tilde{c}) = i$ für $i \in E_k$.

(3) Für jeden Automorphismus α auf A ist $T^{\alpha} = T$ und $\alpha_{/T}$ ein innerer Automorphismus.

Dann ist jeder Automorphismus auf A ein innerer Automorphismus.

__Beweis:__ Sei α ein Automorphismus auf A. Nach (3) ist $T^{\alpha} = T$ und $\alpha_{/T}$ ein innerer Automorphismus. Die zu diesem inneren Automorphismus gehörende Permutation φ definiert einen Isomorphismus β_{φ} von A auf $A^{\beta_{\varphi}}$ $(f^{\beta_{\varphi}}(\tilde{x}) = \varphi^{-1}(f(\varphi(x_1),\ldots,\varphi(x_n))))$. Wenn wir zeigen können, daß die Abbildung $\gamma := \beta_{\varphi}^{-1}\alpha$ die identische Abbildung ist, so ist $\beta_{\varphi} = \alpha$ und damit α ein innerer Automorphismus.

Sei $f^n \in A$ und $\tilde{a} = (a_1,\ldots,a_n) \in E_k^n$. Für jedes $a_i \in E_k$ existiert nach Voraussetzung (2) eine Funktion g_{a_i} aus T mit $g_{a_i}(\tilde{c}) = a_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Nach (1) gibt es eine Funktion $g \in T$, für die $f(g_{a_1}(\tilde{x}),\ldots,g_{a_n}(\tilde{x})) = g(\tilde{x})$ und $g(\tilde{c}) = f(\tilde{a})$ ist. Folglich ist $g^{\gamma} = f^{\gamma}(g_{a_1}^{\gamma},\ldots,g_{a_n}^{\gamma})$. Da die Funktionen aus T Fixpunkte der Abbildung γ sind, folgt hieraus $g = f^{\gamma}(g_{a_1},\ldots,g_{a_n})$. Folglich ist $f^{\gamma}(\tilde{a}) = g(\tilde{c}) = f(\tilde{a})$ für beliebiges $\tilde{a} \in E_k^n$, d. h., es ist $f = f^{\gamma}$ für beliebiges $f \in A$.

Mit Hilfe des eben bewiesenen Satzes werden wir die folgenden drei Sätze beweisen.

__Satz 2 (/4/):__ Enthält eine abgeschlossene Menge A von P_k alle Konstanten von P_k, so ist jeder Automorphismus auf A ein innerer.

__Beweis:__ Die Behauptung ergibt sich aus Satz 1 für $T = P_k^{[1]}$ unter Berücksichtigung von Lemma 1c).

Der folgende Satz verallgemeinert Theorem 2 aus /3/.

__Satz 3:__ Sei E eine Teilmenge von E_k,

$$t_{a,b}(x) := \begin{cases} a & \text{für } x \in E, \\ b & \text{für } x \in E_k \setminus E, \end{cases}$$

$T := \{t_{a,b} \mid a \in E,\ b \in E_k\}$, $S := P_k^{[k]} \cap \mathrm{Pol}\ E$ und A eine abgeschlossene Menge von P_k, die $S \cup T$ enthält. Dann ist jeder Automorphismus auf A ein innerer.

Beweis: Für $|E| = 1$ folgt Satz 3 aus dem Beweis von Theorem 2 der Arbeit /3/. Ist A keine Teilmenge von Pol E, dann folgt mit Hilfe von $S \cup T \subseteq A$, daß A alle Konstanten von P_k enthält. Nach Satz 2 hätte A dann nur innere Automorphismen. Wir können also für das Folgende $A \subseteq \mathrm{Pol}\, E$ voraussetzen.

Sei α ein Automorphismus auf A. Wir zeigen im folgenden, daß T die Voraussetzungen (1) - (3) von Satz 1 erfüllt.

Die Voraussetzung (1) ist wegen $A \subseteq \mathrm{Pol}\, E$ erfüllt, (2) gilt ebenfalls. Offensichtlich gilt für beliebiges $g \in A^1$

$$(\forall s \in S: g * s = g) \Longleftrightarrow g \in T. \tag{I}$$

Aus $g \in T$ folgt also $g * s = g$ für alle $s \in S$ und damit $g^\alpha * s^\alpha = g^\alpha$. Da nach Lemma 1d) $s^\alpha \in S$ ist, ist nach (I) $g^\alpha \in T$. Folglich gilt $T = T^\alpha$.

Wir zeigen als nächstes, daß für $T_1 := \{t_{a,b} \mid a \in E,\ b \in E_k \setminus E\}$ die Beziehung $T_1^\alpha = T_1$ richtig ist. Offensichtlich gilt für alle $t_{a,b}$ aus T

$$t_{a,b} * t_{a,b} = t_{c,c} \Longleftrightarrow a = c \wedge \{a,b\} \subseteq E. \tag{II}$$

Aus $t_{a,b} \in T \setminus T_1$ folgt also $t_{a,b} * t_{a,b} = t_{a,a}$ und hieraus $t_{a,b}^\alpha * t_{a,b}^\alpha = t_{a,a}^\alpha$. Da $t_{a,a}^\alpha$ nach Lemma 1c) eine Konstante ist, muß $t_{a,b}^\alpha$ nach (II) zu $T \setminus T_1$ gehören. Folglich ist $T_1^\alpha = T_1$.

Die Beschränkung der Funktionen aus $T_1 \cup S$ auf E bzw. auf $E_k \setminus E$ liefert Mengen $(T_1 \cup S)_{/E}$ aus P_E bzw. $(T_1 \cup S)_{/E_k \setminus E}$ aus $P_{E_k \setminus E}$. Da die Menge $(T_1 \cup S)_{/E}$ bzw. $(T_1 \cup S)_{/E_k \setminus E}$ sämtliche Konstanten aus P_E bzw. $P_{E_k \setminus E}$ enthält, ist $\alpha_{/(T_1 \cup S)_{/E}}$ bzw. $\alpha_{/(T_1 \cup S)_{/E_k \setminus E}}$ nach Satz 2 ein innerer Automorphismus auf der Halbgruppe $((T_1 \cup S)_{/E}, *)$ bzw. $((T_1 \cup S)_{/E_k \setminus E}, *)$. Folglich ist auch $\alpha_{/(T_1 \cup S)}$ ein innerer Automorphismus auf der Halbgruppe $(T_1 \cup S, *)$. Es existiert also eine Permutation φ auf E_k mit

$$h^\alpha = \varphi^{-1} * h * \varphi \tag{III}$$

für alle $h \in T_1 \cup S$. Wenn wir jetzt noch zeigen können, daß (III) auch für Funktionen h aus $T \setminus T_1$ gilt, ist die Bedingung (3) aus Satz 1 erfüllt und damit Satz 3 bewiesen.

Sei $t_{a,b} \in T \setminus T_1$, $t^{\alpha}_{a,b} = t_{a',b'}$ und s eine Permutation aus S mit den einzigen Fixpunkten a und b. Dann gilt $s * t_{a,b} = t_{a,b}$ und

$$s^{\alpha} * t_{a',b'} = t_{a',b'}. \tag{IV}$$

Aus (IV) folgt, daß a' und b' Fixpunkte der Permutation s^{α} sind. Wegen $s^{\alpha} = \varphi^{-1} * s * \varphi$ hat s^{α} nur die Fixpunkte $\varphi^{-1}(a)$ und $\varphi^{-1}(b)$. Folglich ist $\{a',b'\} = \{\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)\}$. Für $a = b$ ist damit $t^{\alpha}_{a,a} = \varphi^{-1} * t_{a,a} * \varphi$ gezeigt. Hieraus sowie aus den Beziehungen $t_{a,b} * t_{a,a} = t_{a,a}$ und $t_{a',b'} * t^{\alpha}_{a,a} = t^{\alpha}_{a,a}$ folgt dann, daß $a' = \varphi^{-1}(a)$ und $b' = \varphi^{-1}(b)$ ist. Folglich gilt
$t_{a',b'} = \varphi^{-1} * t_{a,b} * \varphi$.

Es sei noch bemerkt, daß aus Satz 2 und Satz 3 leicht folgt, daß bis auf maximale Klassen autodualer Funktionen alle anderen maximalen Klassen von P_k nur innere Automorphismen besitzen. Den Nachweis, daß es auch auf den maximalen Klassen autodualer Funktionen ebenfalls nur innere Automorphismen gibt, findet man in /2/.

<u>Satz 4:</u> Auf jeder abgeschlossenen Menge von P_2 gibt es nur innere Automorphismen.

<u>Beweis:</u> Sei $A = [A] \subseteq P_2$. Falls $\{c_0, c_1\} \subseteq A^1$ ist, folgt Satz 4 aus Satz 2.

Ist $A^1 \in \{\{c_0, x\}, \{c_1, x\}, \{x, \overline{x}\}\}$, so folgt Satz 4 aus Satz 1 für $T = A^1$ unter Berücksichtigung von Lemma 1c,d).

Ist $A^1 = \{x\}$, so ergibt sich aus dem Postschen Graphen (/1/)

$$A \in \{O_1, S_1, P_1, L_4, D_2, D_1, A_4, C_4\} \cup \{F^{\mu}_{a} \mid a \in \{1,2,5,6\},\ \mu \in \{2,3,\dots,\infty\}\}.$$

Wegen der Isomorphie einiger Klassen genügt es,

$$A \in \{O_1, S_1, L_4, D_2, D_1, A_4, C_4, F_5^{\mu}, F_5^{\infty}, F_6^{\mu}, F_6^{\infty}\}$$

zu betrachten, wobei

$$O_1 = [\{x\}],\ S_1 = [\{x \vee y\}],\ L_4 = [\{x+y+z\}],\ D_2 = [\{xy \vee xz \vee yz\}],$$

$$D_1 = [\{xy \vee x\overline{z} \vee y\overline{z}\}],\ A_4 = [\{xy, x \vee y\}],\ C_4 = [\{x \vee y, x(y+z+1)\}],$$

$$F_6^2 = [\{x(y \vee z), xy \vee xz \vee yz\}],$$

$$F_6^{\mu} = \Big[\Big\{\bigvee_{i=1}^{\mu+1} x_1 \ldots x_{i-1}x_{i+1} \ldots x_{\mu+1}\Big\}\Big],\ \mu \geq 3,$$

$$F_5^{\mu} = \Big[\Big\{x(y \vee \overline{z}),\ \bigvee_{i=1}^{\mu+1} x_1 \ldots x_{i-1}x_{i+1}x_{\mu+1}\Big\}\Big],\ \mu \geq 2,$$

$$F_5^{\infty} = [\{x(y \vee \overline{z})\}],\ F_6^{\infty} = \{x(y \vee z)\}].$$

Ist $A \in \{O_1, S_1, L_4, D_2\}$, so folgt aus Lemma 1b) und den Eigenschaften der Menge A, daß die oben angegebene Basisfunktion von A Fixpunkt jedes Automorphismus auf A ist. Da ein Automorphismus auf einer abgeschlossenen Menge aber vollständig durch die Bilder der Basiselemente bestimmt ist, gibt es auf $A \in \{O_1, S_1, L_4, D_2\}$ als Automorphismus nur die identische Abbildung, die trivialerweise ein innerer Automorphismus ist.

Ist $A \in \{D_1, A_4, C_4\} \cup \{F_a^{\mu} | a \in \{5,6\},\ \mu \in \{2,3,\ldots,\infty\}\}$, so erfüllt $T := A^2$ offensichtlich die Bedingungen (1) und (2) von Satz 1. Wir zeigen, daß A^2 auch die Bedingung (β) von Satz 1 erfüllt. Für $A \in \{A_4, C_4\}$ ist $A^2 = \{et,\ vel,\ e_1^2,\ e_2^2\}$, für $A = D_1$ ist $A^2 = \{e_1^2,\ e_2^2\}$ und für $A \in \{F_a^{\mu} | a \in \{5,6\},\ \mu \in \{2,3,\ldots,\infty\}\}$ ist $A^2 = \{et,\ e_1^2,\ e_2^2\}$, wobei $et(x,y) = xy$, $vel(x,y) = x \vee y$ und $e_i^2(x_1, x_2) = x_i$, $i = 1,2$. Nach Lemma 1b) ist $(e_i^2)^{\alpha} = e_i^2$ für jeden Automorphismus α von A. Dies berücksichtigend, überzeugt man sich leicht, daß $\alpha/_{A^2}$ für jeden Automorphismus α ein innerer Automorphismus ist. Folglich hat jede abgeschlossene Menge A von P_2 mit $A^1 = \{x\}$ nur innere Automorphismen.

Es bleibt noch der Fall $A^1 = \{c_a\}$ für $a \in E_2$ zu untersuchen. Dem Postschen Graphen kann man entnehmen, daß es nur die abgeschlossene Menge $A = [\{c_a\}]$ mit $A^1 = \{c_a\}$ gibt. Diese Menge hat aber offensichtlich nur innere Automorphismen.

Satz 5: Ist $k \geq 3$, so gibt es abgeschlossene Teilmengen von P_k, die nicht nur innere Automorphismen besitzen.

Beweis: Wir geben ein Beispiel für eine abgeschlossene Menge mit nichtinnerem Automorphismus an.
Sei

$$u(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \in E_2, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad v(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \in E_2, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Automorphismen auf der Menge $A := [\{u,v,c_0\}]$ sind nach Lemma 1a,b) eindeutig durch die Automorphismen auf der Halbgruppe $(A^1,*)$ bestimmt. Von der Abbildung α: $u \to v$, $v \to u$, $c_0 \to c_0$ stellt man leicht fest, daß sie ein Automorphismus auf $(A^1,*)$ ist.
Angenommen, α wäre ein innerer Automorphismus. Dann gibt es eine Permutation φ auf E_k mit

$$g^\alpha = \varphi^{-1} * g * \varphi \quad \text{für } g \in \{u,v,c_0\}. \tag{V}$$

Wegen $c_0^\alpha = c_0$ ist $\varphi(0) = 0$.

Aus (V) folgt $\varphi * u = v * \varphi$ und hieraus $\varphi(0) = v(\varphi(0))$ sowie $\varphi(0) = v(\varphi(2))$. Dies wiederum ist aber nach Definition von φ und v nur für $\varphi(0) = 1$ möglich. Wir haben damit einen Widerspruch zu der oben begründeten Aussage $\varphi(0) = 0$ erhalten. Also ist α kein innerer Automorphismus. Damit ist Satz 5 bewiesen.

Literatur

/1/ Jablonski, S. W., Gawrilow, G. P., und Kudrjawzew, W. B.: Boolesche Funktionen und Postsche Klassen. Berlin 1970

/2/ Lau, D.: Automorphismen auf den maximalen Klassen der k-wertigen Logik. Rostock. Math. Kolloq. 12, 13 - 16 (1979)

/3/ Мальцев, А.И.: Итеративные алгебры и многообразия Поста. Алгебра и логика 5, 2, 5 - 24 (1966)

/4/ Мальцев, А.И.: Конгруенции и автоморфизмы на клетках алгебр Поста. Алгебра и логика 2, 6, 666 - 672 (1972)

/5/ Pöschel, R., und Kalužnin, L. A.: Funktionen- und Relationenalgebren. Berlin 1979

eingegangen: 02. 08. 1982

Anschrift der Verfasser:

В.В. Горлов
Кафедра математической логики
Механико-математический факультет
Белорусский Государственный Университет им. В.И. Ленина
220080 Минск - 80
СССР

Dr. D. Lau
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
DDR-2500 Rostock

Rostock. Math. Kolloq. 23, 43 - 53 (1983) 03G25
08A99
08B99

Klaus Denecke

Eine algebraische Charakterisierung einer Klasse präprimaler Algebren

1. Eine wichtige Eigenschaft des klassischen zweiwertigen Aussagenkalküls ist seine funktionale Vollständigkeit. Diese Eigenschaft besagt, daß man alle Funktionen, die auf der Menge $\{0,1\}$ definiert sind, die sogenannten Booleschen Funktionen, bereits aus den "elementaren" Booleschen Funktionen durch Superposition erhalten kann. Den "elementaren" Booleschen Funktionen entsprechen im Aussagenkalkül Konjunktion, Disjunktion, Implikation, Äquivalenz und Negation. Bezeichnet man diese Funktionen durch $\wedge, \vee, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow, -$, so ist also $\langle \wedge, \vee, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow, - \rangle$ in der durch $\underline{F}(E_2)$ mit $E_2 = \{0,1\}$ bezeichneten Menge aller Booleschen Funktionen funktional vollständig. Aber auch schon $\langle \wedge, - \rangle$, $\langle \vee, - \rangle$, $\langle \Longrightarrow, - \rangle$ sind in $\underline{F}(E_2)$ funktional vollständig.

Der k-wertige Aussagenkalkül von Łukasiewicz und Post ist ebenfalls funktional vollständig. Hierbei betrachtet man Funktionen, die auf der Menge $E_k = \{0,\dots,k-1\}$ $(k > 1)$ definiert sind. Eine Klasse F von auf E_k definierten Funktionen ist funktional vollständig in $\underline{F}(E_k)$, wenn $\overline{F} = \underline{F}(E_k)$ ist, wobei $\overline{F}$ die aus F entstehende, bezüglich Superposition abgeschlossene Klasse von Funktionen ist. Eine wichtige Aufgabe besteht darin, festzustellen, ob eine Klasse von Funktionen funktional vollständig ist. Dieses Problem der funktionalen Vollständigkeit tritt zum Beispiel auch in der Schaltkreistheorie auf. Hier werden gewisse elementare Schaltkreise mit einem oder mehreren Eingängen und einem Ausgang betrachtet, die Realisierungen von Funktionen auf E_k sind. Aus den elementaren Schaltkreisen entstehen durch Vereinigung von Ausgängen mit Eingängen anderer Schaltkreise neue Schaltkreise, die wieder Funktionen auf E_k realisieren. Diesem Vorgehen entspricht die Superposition der zugehörigen Funktionen. Auch hier ist es eine praktisch sehr interessierende Frage, aus welchen Mengen von Elementarschaltkreisen man durch Zusammenschalten bereits alle möglichen Schaltkreise erhält.

Die funktionale Vollständigkeit läßt sich auch in der Terminologie der Universellen Algebra formulieren. Es werden endliche Algebren $\underline{A} = \langle A,F\rangle$ $(A=E_k)$ betrachtet. F ist dabei eine Klasse von auf A definierten Funktionen. Die aus F durch Superposition erzeugte abgeschlossene Klasse sei $\overline{F}$. Es wird vorausgesetzt, daß $\overline{F}$ alle Projektionen e_i mit $e_i(x_1,\dots,x_n) = x_i$ enthält. Dann heißt $\overline{F}$ Menge aller Termfunktionen der Algebra $\underline{A}$. Die der funktionalen Vollständigkeit entsprechende Begriffsbildung im der Universellen Algebra ist der von Foster und Pixley zuerst untersuchte Begriff der Primalität. $\underline{A} = \langle A,F\rangle$ heißt primal, wenn $\overline{F} = \underline{F}(A)$ gilt, d. h., wenn F in $\underline{F}(A)$ funktional vollständig ist. Beispiele für primale Algebren sind die zweielementige Boolesche Algebra $\langle E_2, \wedge, -\rangle$, aber auch die k-elementige Postsche Algebra der Ordnung k:

$\langle E_k, \cup, \cap, C, D_1,\dots,D_{k-1}, 0,1,\dots,k-1\rangle$ $(k>2)$ mit

$i \cup j = \max(i,j)$,

$i \cap j = \min(i,j)$, $D_i(j) = \begin{cases} k-1, & \text{wenn } i \le j \\ 0, & \text{wenn } i>j \end{cases}$, $C(i) = \begin{cases} k-1, & \text{wenn } i=0 \\ 0, & \text{wenn } i>0 \end{cases}$,

$i,j \in E_k$.

Eine algebraische Charakterisierung primaler Algebren wurde von Foster und Pixley in /2/ in folgender Weise angegeben:
Eine endliche nichttriviale Algebra $\underline{A} = \langle A,F\rangle$ ist genau dann primal, wenn sie

1. keine echten Teilalgebren hat, einfach ist und keine nichtidentischen Automorphismen besitzt,
2. eine kongruenzdistributive und kongruenzvertauschbare Varietät erzeugt.

Für die Lösung des Problems der funktionalen Vollständigkeit spielen die maximalen Klassen von Funktionen in $\underline{F}(E_k)$ eine entscheidende Rolle. Das sind Klassen F mit $\overline{F} \neq \underline{F}(E_k)$, für die aber $\overline{F \cup \{f\}} = \underline{F}(E_k)$ für alle $f \in \underline{F}(E_k) \setminus \overline{F}$ gilt. Eine Funktionenklasse ist genau dann funktional vollständig, wenn sie in keiner maximalen Klasse enthalten ist. Endliche Algebren $\underline{A} = \langle A,F\rangle$, deren Termfunktionen maximale Klassen in $\underline{F}(A)$ sind, heißen präprimal. I. Rosenberg (/7/) hat eine vollständige Klassifikation aller maximalen Klassen unter Verwendung von Relationen angegeben. Dagegen gibt es noch keine algebraische Charakterisierung präprimaler Algebren analog zu der für primale von Foster und Pixley (/2/).

In dieser Arbeit werden alle präprimalen Algebren, die 2-distributive Varietäten erzeugen, algebraisch charakterisiert und damit das obige Problem teilweise gelöst. Außerdem wird gezeigt, welche der präprimalen Algebren aus Rosenbergs Klassifikation durch diese Charakterisierung erfaßt werden. Die gewählte Darstellung ist unabhängig von Rosenbergs Arbeit /7/.

2. In diesem Abschnitt sollen zunächst einige Begriffe aus der Universellen Algebra definiert und grundlegende Zusammenhänge genannt werden, die für das Weitere wichtig sind. Für zusätzliche Informationen sei der Leser auf das Buch von Grätzer (/3/) verwiesen.

Unter der von einer endlichen Algebra $\underline{A}$ erzeugten Varietät versteht man die Klasse aller Algebren des gleichen Typs wie $\underline{A}$, die durch Bildung von Homomorphismen, Teilalgebren und direkten Potenzen aus $\underline{A}$ entstehen, symbolisch: $V_{\underline{A}} = HSP\underline{A}$. Ein weiterer hier benötigter Begriff ist der einer kongruenzdistributiven Varietät. Der Kongruenzenverband einer Algebra ist distributiv, wenn für beliebige Kongruenzen $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ über $\underline{A}$ gilt:

$\Theta_1 \cup (\Theta_2 \cap \Theta_3) = (\Theta_1 \cup \Theta_2) \cap (\Theta_1 \cup \Theta_3)$.

Sind alle Algebren einer Varietät kongruenzdistributiv, so wird die Varietät kongruenzdistributiv genannt. Pixley hat in /5/ die folgende Aussage über kongruenzdistributive Varietäten bewiesen:

Lemma 2.1 (Pixley /5/): Wenn in einer Varietät V ein ternärer Term $\underline{d}$ (majority term) so existiert, daß für jede Algebra $\underline{A}$ in V und für alle $x, y \in A$ $\underline{d}(x,x,y) = \underline{d}(x,y,x) = x$, $\underline{d}(x,y,y) = y$ gilt, so ist V kongruenzdistributiv.

Dieses Lemma erhält man für n=2 aus einer von Jonsson (/4/) angegebenen hinreichenden und notwendigen Bedingung für die Kongruenzdistributivität einer Varietät V. Aus diesem Grund wird der durch Lemma 2.1 gegebene Sachverhalt auch als 2-Distributivität von V bezeichnet.

Bei der Darstellung und beim Beweis der Ergebnisse wird von der folgenden Formulierung Gebrauch gemacht:
"Eine n-stellige Funktion f über A bewahrt eine Teilalgebra $\underline{D} \subseteq \underline{A}^2$". Wir wollen erklären, was darunter zu verstehen ist.

Sei $\underline{D}$ eine Teilalgebra einer direkten Potenz $\underline{A}^h$ von $\underline{A}$. Eine n-stellige Funktion $f : A^n \rightarrow A$ bewahrt $\underline{D}$, wenn aus

$(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{h1}) \in \underline{D}, (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{h2}) \in \underline{D}, \ldots, (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{hn}) \in \underline{D}$

stets

$(f(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), f(a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}), \ldots, f(a_{h1}, a_{h2}, \ldots, a_{hn})) \in \underline{D}$

folgt.
Die Klasse aller Funktionen über A, die $\underline{D}$ bewahren, ist eine superpositionsabgeschlossene Klasse. Sie werde mit Pol $\underline{D}$ bezeichnet.

Das folgende Theorem ist ein Spezialfall einer von Baker und Pixley (/1/) bewiesenen Aussage und stellt einen Zusammenhang zwischen den soeben definierten Begriffen der 2-Distributivität und des Bewahrens her.

Theorem 2.2 (Baker/Pixley /1/): Sei $\underline{A}$ eine endliche nichttriviale Algebra, die eine 2-distributive Varietät erzeugt. Dann ist für eine beliebige positive ganze Zahl n eine n-stellige Funktion $f : A^n \rightarrow A$ genau dann eine Termfunktion von $\underline{A}$, wenn f jede Teilalgebra von $\underline{A}^2$ bewahrt.

Wendet man Theorem 2.2 auf primale Algebren an, so erhält man eine weitere Charakterisierung primaler Algebren. Sei
$\Delta(\underline{A}) = \{(a,a) \mid a \in A\}$.

Korollar 2.3: Ist $\underline{A}$ eine endliche nichttriviale Algebra, die eine 2-distributive Varietät erzeugt, so ist $\underline{A}$ genau dann primal, wenn $\underline{A}^2$ keine von $\Delta(\underline{A})$ und $\underline{A}^2$ verschiedene Teilalgebra enthält.

Der Beweis des Korollars 2.3 ergibt sich sofort durch Anwendung des Theorems 2.2. Es erhebt sich die Frage, ob man präprimale Algebren, die 2-distributive Varietäten erzeugen, in ähnlicher Weise charakterisieren kann. Man erhält zunächst:

Lemma 2.4: Sei $\underline{A} = \langle A,F \rangle$ eine endliche nichttriviale Algebra, die eine 2-distributive Varietät erzeugt. Hat $\underline{A}^2$ (bis auf Isomorphie) genau eine von $\Delta(\underline{A})$ und $\underline{A}^2$ verschiedene Teilalgebra, so ist $\underline{A}$ präprimal.

<u>Beweis:</u> Habe $\underline{A}^2$ (bis auf Isomorphie) genau eine Teilalgebra $\underline{D} \neq \underline{A}^2$, $\underline{D} \neq \Delta(\underline{A})$. Nach Theorem 2.2 sind genau die Funktionen über A, die $\underline{D}$ bewahren, Termfunktionen von $\underline{A}$, d. h. $\mathbb{F}$ = Pol $\underline{D}$. Sei $g \in \underline{F}(A) \setminus$ Pol $\underline{D}$, d. h., g bewahrt $\underline{D}$ nicht. Wir betrachten die Algebra $\underline{A}' = \langle A, \text{Pol } \underline{D} \cup \{g\}\rangle$. $\underline{A}'$ erzeugt eine 2-distributive Varietät ($d \in$ Pol $\underline{D}$). $\underline{A}'^2$ hat keine von $\underline{A}'^2$ und $\Delta(\underline{A}')$ verschiedene Teilalgebra. Daher ist $\underline{A}'$ nach Korollar 2.3 primal und $\underline{A}$ nach Definition präprimal. ▲

3. Als nächstes sollen die durch Lemma 2.4 gegebenen präprimalen Algebren näher charakterisiert werden. Dazu wird untersucht, welche Eigenschaften die einzige von $\underline{A}^2$ und $\Delta(\underline{A})$ verschiedene Teilalgebra von $\underline{A}^2$ haben kann. Wir führen zunächst einige Begriffe und Bezeichnungen ein: Sei D eine Teilmenge von A^2, dann ist D^{-1} definiert durch $D^{-1} = \{(a,b) \mid (b,a) \in D\}$. Für zwei Teilmengen $D_1, D_2 \subseteq A^2$ verstehen wir unter $D_1 \circ D_2$ die durch $D_1 \circ D_2 = \{(a,b) \mid$ es existiert ein c, so daß $(a,c) \in D_1$ und $(c,b) \in D_2\}$ definierte Teilmenge von A^2. Eine Teilmenge $D \subseteq A^2$ heißt symmetrisch, wenn $D = D^{-1}$ ist, sie heißt transitiv, wenn $D \circ D = D$, und reflexiv, wenn $\Delta(A) \subseteq D$ gilt. Eine Teilmenge $\Theta \subseteq A^2$ ist eine Äquivalenzrelation, wenn Θ reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Eine reflexive und symmetrische Teilalgebra γ von A^2 heißt zentral, wenn es eine nichtleere, echte Teilmenge C von A gibt, so daß $(a,c) \in \gamma$ für alle $a \in A$ und ein $c \in C$ gilt. Eine Teilmenge $\varrho \subseteq A^2$ ist eine partielle Ordnung, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch, d. h. $\varrho \cap \varrho^{-1} = \Delta(A)$, und transitiv ist. Das Element e_0 heißt kleinstes Element von $\varrho \subseteq A^2$, wenn $(e_0,a) \in \varrho$ für alle $a \in A$, und e_1 größtes Element, wenn $(a,e_1) \in \varrho$ für alle $a \in A$ gilt. Existieren zu zwei beliebigen Elementen aus A Supremum und Infimum bezüglich ϱ, so ist ϱ eine Verbandsordnung. Weiterhin betrachten wir Teilmengen $D_s \subseteq A^2$, definiert durch $D_s = \{(a,s(a)) \mid a \in A\}$, wobei s eine Permutation über A ohne invariante Elemente mit Zyklen gleicher Primzahllänge ist.

Beim Beweis des nächsten Lemmas wird von Teilmengen D_n, D_n' von A^n Gebrauch gemacht, die folgendermaßen definiert sind: Sei D eine Teilmenge von A^2, dann ist

$$D_n = \{(a_1,a_2,\dots,a_n) \mid \text{es gibt ein } b \in A, \text{ so daß } (a_1,b) \in D, (a_2,b) \in D,\dots, (a_n,b) \in D\},$$

$$D_n' = \{(a_1,a_2,\dots,a_n) \mid \text{es gibt ein } b \in A, \text{ so daß } (b,a_1) \in D, (b,a_2) \in D,\dots, (b,a_n) \in D\}.$$

Wir betrachten folgende Algebren:

$\underline{A}_\Theta = \langle A,F\rangle$ mit $\overline{F} = \mathrm{Pol}\ \Theta$, wobei Θ eine auf A definierte Äquivalenzrelation ist, die von $\underline{A}^2$ und von $\Delta(\underline{A})$ verschieden ist,

$\underline{A}_\gamma = \langle A,F\rangle$ mit $\overline{F} = \mathrm{Pol}\ \gamma$, wobei γ eine zentrale Relation aus $\underline{A}^2$ ist,

$\underline{A}_B = \langle A,F\rangle$ mit $\overline{F} = \mathrm{Pol}\ B$, wobei $\underline{B}$ eine einelementige Teilalgebra von $\underline{A}$ ist,

$\underline{A}_\varrho = \langle A,F\rangle$ mit $\overline{F} = \mathrm{Pol}\ \varrho$, wo ϱ eine Verbandsordnung auf A ist,

$\underline{A}_s = \langle A,F\rangle$ mit $\overline{F} = \mathrm{Pol}\ D_s$.

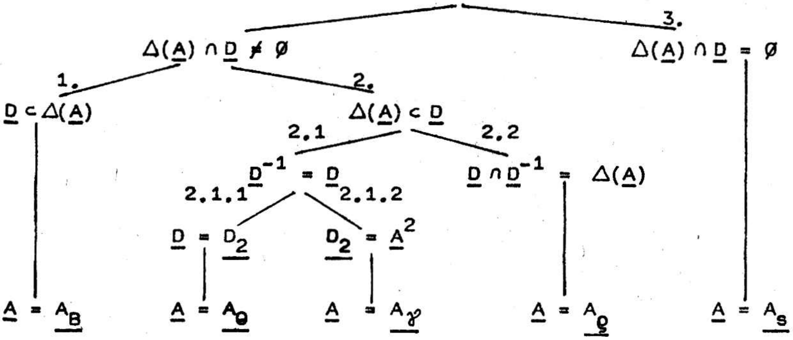
Es ist leicht zu sehen, daß diese Algebren 2-distributive Varietäten erzeugen. Für alle diese Algebren werden wir zeigen, daß $\underline{A}^2$ genau eine von $\underline{A}^2$ und $\Delta(\underline{A})$ verschiedene Teilalgebra hat. Damit sind diese Algebren nach Lemma 2.4 präprimal.

Wir zeigen als nächstes, daß eine Algebra, die eine 2-distributive Varietät erzeugt und für die $\underline{A}^2$ genau eine von $\underline{A}^2$ und $\Delta(\underline{A})$ verschiedene Teilalgebra hat, eine Algebra der Form $\underline{A}_\Theta$, $\underline{A}_\gamma$, $\underline{A}_B$, $\underline{A}_\varrho$ oder $\underline{A}_s$ sein muß.

<u>Lemma 3.1:</u> Eine Algebra, die eine 2-distributive Varietät erzeugt und für die $\underline{A}^2$ genau eine von $\underline{A}^2$ und von $\Delta(\underline{A})$ verschiedene Teilalgebra hat (bis auf Isomorphie) kann nur eine Algebra der Form $\underline{A}_\Theta$, $\underline{A}_B$, $\underline{A}_\gamma$, $\underline{A}_\varrho$, $\underline{A}_s$ sein.

<u>Beweis:</u> Es sind alle Möglichkeiten zu untersuchen, die es für die einzige von $\underline{A}^2$ und von $\Delta(\underline{A})$ verschiedene Teilalgebra von $\underline{A}^2$ gibt. Die Überlegungen sollen entsprechend der folgenden Übersicht erfolgen:

$\underline{A}$ ist 2-distributiv und $\underline{A}^2$ hat (bis auf Isomorphie) genau eine Teilalgebra $\underline{D}$ verschieden von $\underline{A}^2$ und $\Delta(\underline{A})$



Für eine Teilalgebra $\underline{D} \subset \underline{A}^2$, $\underline{D} \neq \Delta(\underline{A})$ gibt es genau die beiden Möglichkeiten $\Delta(\underline{A}) \cap \underline{D} \neq \emptyset$, d. h. $\underline{D} \subset \Delta(\underline{A})$ oder $\Delta(\underline{A}) \subset \underline{D}$, da $\underline{D}$ einzige nichttriviale Teilalgebra von $\underline{A}^2$ ist, und $\Delta(\underline{A}) \cap \underline{D} = \emptyset$. Daher sind die folgenden 3 Fälle zu unterscheiden:

1. $\underline{D} \subset \Delta(\underline{A})$,
2. $\Delta(\underline{A}) \subset \underline{D}$,
3. $\Delta(\underline{A}) \cap \underline{D} = \emptyset$.

1. Der Teilalgebra $\underline{D} \subset \Delta(\underline{A})$ entspricht eine Teilalgebra $\underline{B} \subset \underline{A}$. Anwendung des Theorems 2.2 ergibt, daß eine präprimale Algebra der Form $\underline{A_B}$ vorliegt.

2. Im zweiten Fall gibt es nur die Möglichkeiten $\underline{D}^{-1} = \underline{D}$ oder $\underline{D}^{-1} \neq \underline{D}$ (aber $\underline{D}^{-1} \cong \underline{D}$); dann ist $\underline{D} \cap \underline{D}^{-1} = \Delta(\underline{A})$, denn $\underline{D}$ ist die einzige von $\Delta(\underline{A})$ und $\underline{A}^2$ verschiedene Teilalgebra.

2.1 $\underline{D}^{-1} = \underline{D}$

$\underline{D}$ ist symmetrisch und wegen $\Delta(\underline{A}) \subset \underline{D}$ reflexiv. Wir betrachten die oben definierte Teilmenge D_2 von A^2. $\langle D_2, F\rangle$ ist eine reflexive Teilalgebra von $\underline{A}^2$. Sei $(a_1, a_2) \in D$. Wir wählen $b = a_1$. Aus $(a_1, a_1) \in D$ und $(a_2, a_1) \in D$ folgt $(a_1, a_2) \in D_2$, d. h. $\underline{D} \subseteq \underline{D_2} \subseteq \underline{A}^2$. Daher ist entweder $\underline{D} = \underline{D_2}$ oder $\underline{D_2} = \underline{A}^2$.

2.1.1 $\underline{D} = \underline{D}_2$ $(\underline{D}_2 \neq \underline{A}^2)$

Aus $(a_1,a_3) \in \underline{D}$ und $(a_3,a_2) \in \underline{D}$ folgt, da $\underline{D}$ symmetrisch ist, zunächst $(a_2,a_3) \in \underline{D}$, daher $(a_1,a_2) \in \underline{D}_2$ und wegen $\underline{D} = \underline{D}_2$ auch $(a_1,a_2) \in \underline{D}$, d. h., $\underline{D}$ ist transitiv. Folglich ist $\underline{D}$ eine Äquivalenzrelation und in Anwendung des Theorems 2.2 ist $\underline{A}$ eine Algebra der Form $\underline{A}_{\theta}$.

2.1.2 $\underline{D}_2 = \underline{A}^2 (\underline{D} \neq \underline{D}_2)$

Wir beweisen durch Induktion nach n, daß für alle $2 \leq n \leq k$ stets $D_n = A^n$ gilt. Es ist klar, daß $\langle D_n, F\rangle$ eine Teilalgebra von $\underline{A}^n$ ist. Sei $D_{n-1} = A^{n-1}$, dann gilt für alle $a_0, a_1, \ldots, a_n \in A$:

$(a_1,a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{n-1}) \in \underline{D}_n$,

$(a_0,a_0,a_2,a_3,\ldots,a_{n-1}) \in \underline{D}_n$,

$(a_0,a_1,a_1,a_3,\ldots,a_{n-1}) \in \underline{D}_n$.

Da d eine Termfunktion von $\underline{A}$ ist, erhalten wir
$(d(a_1,a_0,a_0),\ d(a_1,a_0,a_1),\ d(a_2,a_2,a_1),\ d(a_3,a_3,a_3),\ldots,$
$d(a_{n-1},a_{n-1},a_{n-1})) = (a_0,a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{n-1}) \in \underline{D}_n$, d. h. $\underline{D}_n = \underline{A}^n$.
Daher ist auch $D_k = \underline{A}^k$ und damit $(0,1,\ldots,k-1) \in D_k$, d. h., für alle $a \in A$ existiert ein Element $c \in A$, so daß $(a,c) \in \underline{D}$ gilt. Dies bedeutet, daß $\underline{D}$ ein Zentrum hat und $\underline{A}$ nach Theorem 2.2 eine Algebra der Form $\underline{A}_{\gamma}$ ist.

2.2 $\underline{D} \cap \underline{D}^{-1} = \Delta(\underline{A})$

In diesem Fall ist $\underline{D}$ antisymmetrisch. $\underline{D} \circ \underline{D}^{-1}$ ist symmetrisch, daher ist $\underline{D} \neq \underline{D} \circ \underline{D}^{-1}$. Es muß also $\underline{D} \circ \underline{D}^{-1} = \underline{A}^2$ sein. Wegen $\underline{D}_2 = \underline{D} \circ \underline{D}^{-1}$ folgt $\underline{D}_2 = \underline{A}^2$. Durch Induktion erhalten wir wieder $\underline{D}_k = \underline{A}^k$ und $(0,1,\ldots,k-1) \in \underline{D}_k$, d. h., für alle $a \in A$ existiert ein $e_1 \in A$ mit $(a,e_1) \in D$, e_1 ist also größtes Element von $\underline{D}$. Durch analoge Überlegungen weist man unter Verwendung der Algebra $\underline{D}_n$' die Existenz eines kleinsten Elementes e_0 nach.
$\langle D \circ D, F\rangle$ ist eine Teilalgebra von $\underline{A}^2$. Da für $a \neq e_1$ $(e_1,a) \notin \underline{D} \circ \underline{D}$ gilt, haben wir $\underline{D} \circ \underline{D} \neq \underline{A}^2$. Da $\underline{D} \circ \underline{D}$ andererseits $\Delta(\underline{A})$ echt enthält, folgt $\underline{D} \circ \underline{D} = \underline{D}$, und $\underline{D}$ ist transitiv, daher eine per-

tielle Ordnung mit kleinstem und größtem Element. Das Infimum und Supremum zweier beliebiger Elemente x,y bezüglich der durch $\underline{D}$ gegebenen partiellen Ordnung erhält man durch $d(x,y,e_0)$ bzw. $d(x,y,e_1)$. Anwendung des Theorems 2.2 zeigt, daß $\underline{A}$ von der Form $\underline{A_\rho}$ ist mit einer Verbandsordnung ρ auf A.

3. $\Delta(\underline{A}) \cap \underline{D} = \emptyset$

Wir betrachten wieder die Teilalgebra $\underline{D_2}$ von $\underline{A}^2$. Da $\underline{D_2}$ reflexiv ist, gilt $\underline{D_2} \neq \emptyset$ und $\underline{D_2} \neq \underline{D}$. Aus $\underline{D_2} = \underline{A^2}$ würde sich durch Induktion $\underline{D_k} = \underline{A}^k$ ergeben, d. h. $(0,1,\ldots,k-1) \in D_k$, und für ein gewisses $u \in A$ hätten wir $(a,u) \in D$ für alle $a \in A$, d. h. $(u,u) \in D$ im Widerspruch zu $\Delta(\underline{A}) \cap \underline{D} = \emptyset$. Daher ist $\underline{D_2} = \Delta(\underline{A})$, d. h., $(a_1,a_2) \in D_2$ gilt genau dann, wenn $a_1 = a_2$ ist. Aber $(a_1,a_2) \in D_2$ ist genau dann erfüllt, wenn (a_1,b), $(a_2,b) \in \underline{D}$ für ein gewisses $b \in A$ gilt. Damit erhalten wir die Aussage:

+) Aus $(a_1,b) \in \underline{D}$ und $(a_2,b) \in \underline{D}$ folgt $a_1 = a_2$.

Analog ergibt sich mit Hilfe von $\underline{D_n}'$ statt $\underline{D_n}$ die Aussage:

++) Aus $(b,a_1) \in \underline{D}$ und $(b,a_2) \in \underline{D}$ folgt $a_1 = a_2$.

+) und ++) zeigen, daß D eine eineindeutige Abbildung ist. Es ist noch zu beweisen, daß D surjektiv ist. Dazu betrachten wir die Menge $A_1 = \{a \mid \text{es gibt ein } b \in A, \text{ so daß } (b,a) \in D\}$, d. h. den Wertebereich von D. $\underline{A_1}$ ist eine Teilalgebra von $\underline{A}$. Da $\underline{A}$ keine echte nichttriviale Teilalgebra hat, denn sonst würde Fall 1 vorliegen, muß $\underline{A_1} = \underline{A}$ sein. Daher ist D surjektiv. Es folgt, daß jedes Element von $\underline{D}$ die Form $(a,s(a))$ hat, wobei s eine Permutation auf A ist, die wegen $\Delta(\underline{A}) \cap \underline{D} = \emptyset$ keine invarianten Elemente hat. Ferner ist s ein Automorphismus der Algebra $\underline{A}$, und da eine Potenz eines Automorphismus wieder ein Automorphismus ist, folgt, daß s aus Zyklen gleicher Primzahllänge besteht. Anwendung des Theorems 2.2 zeigt, daß $\underline{A}$ von der Form $\underline{A_s}$ ist.

Da es für eine nichttriviale Teilalgebra $\underline{D}$ von $\underline{A}^2$ keine weitere Möglichkeit geben kann, ist Lemma 3.1 bewiesen. ▲

Nun wenden wir Ergebnisse von Rosenberg an und zeigen, daß auch die Umkehrung des Lemmas 2.4 gilt:

Lemma 3.2: Sei $\underline{A} = \langle A,F\rangle$ eine endliche nichttriviale Algebra, die eine 2-distributive Varietät erzeugt und keine nichttriviale Teilalgebra hat. Ist $\underline{A}$ präprimal, so hat $\underline{A}^2$ bis auf Isomorphie genau eine von $\Delta(\underline{A})$ und von $\underline{A}^2$ verschiedene Teilalgebra.

Beweis: Wir haben Algebren der Form $\underline{A_B}$, $\underline{A_\Theta}$, $\underline{A_\gamma}$, $\underline{A_\varrho}$ (ϱ eine Verbandsordnung) und $\underline{A_s}$ zu untersuchen. Aus der Definition dieser Algebren ergibt sich, daß in jedem Fall eine Teilalgebra $\underline{D}$ von $\underline{A}^2$ existiert, die von $\Delta(\underline{A})$ und von $\underline{A}^2$ verschieden ist. Es muß bewiesen werden, daß es nicht mehrere nichtisomorphe Teilalgebren geben kann. Sei $R = \{D_1,\dots,D_m\}$ die Menge aller von $\underline{A}^2$ und $\Delta(\underline{A})$ verschiedenen Teilalgebren von $\underline{A}^2$. Nach Theorem 2.2 gilt $\overline{F} = \mathrm{Pol}\ R = \mathrm{Pol}\ D_1 \cap \dots \cap \mathrm{Pol}\ D_m$. Daraus folgt $\overline{F} = \mathrm{Pol}\ R \subseteq \mathrm{Pol}\ D_i$ für alle $i = 1,\dots,m$. Da $\underline{A}$ präprimal ist und damit $\overline{F}$ eine maximale Klasse von Funktionen in $\underline{F}(A)$, gilt $\mathrm{Pol}\ R = \mathrm{Pol}\ D_i$ für alle $i = 1,\dots,m$.

Wir betrachten folgende Klassen von Teilalgebren von $\underline{A}^2$: Teilalgebren von $\underline{A}^2$, die einelementigen Teilalgebren von $\underline{A}$ entsprechen, Äquivalenzrelationen, zentrale Teilalgebren, Verbandsordnungen, Teilalgebren der Form $\{(a,s(a)) \mid a \in A\}$ mit einer Permutation s von A ohne invariante Elemente mit Zyklen gleicher Primzahllänge. Rosenberg (/7/) hat bewiesen, daß $\mathrm{Pol}\ \underline{D_1} = \mathrm{Pol}\ \underline{D_2}$ nur möglich ist, wenn $\underline{D_1}$ und $\underline{D_2}$ derselben Klasse angehören. Sind $\underline{D_1}$ und $\underline{D_2}$ zwei Teilalgebren von $\underline{A}$, zwei Äquivalenzrelationen oder zwei zentrale Teilalgebren von $\underline{A}^2$, so folgt nach einem anderen Ergebnis von Rosenberg (/7/), daß $\underline{D_1} = \underline{D_2}$ gilt. Sind $\underline{D_1}$ und $\underline{D_2}$ zwei Verbandsrelationen, so folgt aus $\mathrm{Pol}\ \underline{D_1} = \mathrm{Pol}\ \underline{D_2}$ ebenfalls $\underline{D_1} = \underline{D_2}$ oder $\underline{D_1} = \underline{D_2}^{-1}$, im letzten Fall sind $\underline{D_1}$ und $\underline{D_2}$ isomorph. Aus $\mathrm{Pol}\ \underline{D_s} = \mathrm{Pol}\ \underline{D_{s'}}$ folgt, daß es eine natürliche Zahl r gibt mit $s' = s^r$. Man kann leicht zeigen, daß $\underline{D_s}$ und $\underline{D_{s'}}$ in diesem Fall auch isomorph sind. ▲

Aus Lemma 2.4 und Lemma 3.2 ergibt sich schließlich:

Theorem 3.3: Sei $\underline{A} = \langle A,F\rangle$ eine endliche nichttriviale Algebra, die eine 2-distributive Varietät erzeugt und keine nichttriviale

Teilalgebra hat. Dann ist $\underline{A}$ genau dann präprimal, wenn $\underline{A}^2$ bis auf Isomorphie genau eine von $\Delta(\underline{A})$ und von $\underline{A}^2$ verschiedene Teilalgebra hat.

Literatur

/1/ Baker, K. A., and Pixley, A.: Polynomial interpolation and the Chinese Remainder Theorem for algebraic systems. Math. Z. <u>143</u>, 165 - 174 (1975)

/2/ Foster, A. L., and Pixley, A.: Semi-categorical algebras, I. Math. Z. <u>83</u>, 147 - 169 (1964)

/3/ Grätzer, G.: Universal algebra. Berlin 1979

/4/ Jonsson, B.: Algebras whose congruence lattices are distributive. Math. Scand. <u>21</u>, 110 - 121 (1967)

/5/ Pixley, A. F.: Distributivity and permutability of congruence relations in equational classes of algebras. Proc. Amer. Math. Soc. <u>14</u>, 105 - 109 (1963)

/6/ Rosenberg, I.: Über die Verschiedenheit maximaler Klassen in P_k. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. <u>14</u>, 431 - 438 (1969)

/7/ Rosenberg, I.: Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken. Rozpravy Československe Akad. Věd, Řada Mat. Přirod. Věd <u>80</u>, 3 - 93 (1970)

<u>eingegangen:</u> April 1982

<u>Anschrift des Verfassers:</u>

Dr. K. Denecke
Akademie der Landwirtschaftswissenschaften der DDR
Institut für Züchtungsforschung
Ethel- und Julius-Rosenberg-Str. 22/23
DDR-4300 Quedlinburg

Rostock. Math. Kolloq. 23, 55 - 61 (1983) 05A99
06A10

Sabine Radtke

Die Anzahl aller möglichen Halbordnungsrelationen auf einer maximal sechselementigen Menge

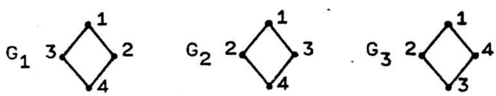
Die Anzahl aller möglichen Halbordnungsrelationen auf einer n-elementigen Menge sei in der vorliegenden Arbeit mit H(n) bezeichnet, wobei $1 \leq n \leq 6$ und $n \in \mathbb{N}$ gelten soll. Die Anzahlen H(n) für $n \leq 6$ findet man ohne nähere Begründung in /1/. In den Arbeiten /2/ und /3/ wurden diese Anzahlen für $n \leq 5$ übernommen. Wir können hier die Zahlen H(n) für $n \leq 5$ aus /1/ bestätigen, kommen jedoch für H(6) zu einem anderen Ergebnis (in /1/: H(6) = 130 023).

Die Kenntnis von H(n) ist nicht nur kombinatorisch interessant. Sie ermöglicht es z. B., die Anzahl aller maximalen abgeschlossenen Klassen von Funktionen der k-wertigen Logik zu bestimmen, was aus der Arbeit /3/ hervorgeht. Auf diese Folgeresultate wird im Anschluß an die Ermittlung von H(n) eingegangen werden. Bei der Ermittlung von H(n) wird benutzt, daß jede Halbordnungsrelation σ auf einer n-elementigen Menge M durch einen Hasse-Graphen (auch Hasse-Diagramm) eineindeutig dargestellt werden kann. Bei dieser Darstellung gelte hier für alle $\{a,b\} \subset M$ mit $a < b$ bei σ, daß der zu a gehörige Knoten oberhalb des zu b gehörigen Knotens angeordnet wird. Es sei der zu σ gehörige Graph mit G_σ bezeichnet, bzw. die durch G dargestellte Halbordnungsrelation mit σ_G.

Jeder eine Halbordnungsrelation σ darstellende Hasse-Graph G_σ ist entweder zusammenhängend oder nicht zusammenhängend. Folglich ist H(n) die Summe der Anzahl aller Halbordnungsrelationen, die durch zusammenhängende Graphen, und der Anzahl aller Halbordnungsrelationen, die durch nicht zusammenhängende Graphen dargestellt werden. Die Anzahl, die sich aus den zusammenhängenden Graphen ergibt, sei mit Z(n), und die Anzahl, die sich aus den nicht zusammenhängenden Graphen ergibt, sei mit K(n) bezeichnet. Man überlegt sich leicht, daß man aus Z(n-1), Z(n-2),...,Z(1) die Anzahl K(n) ermitteln kann. Ausführliche

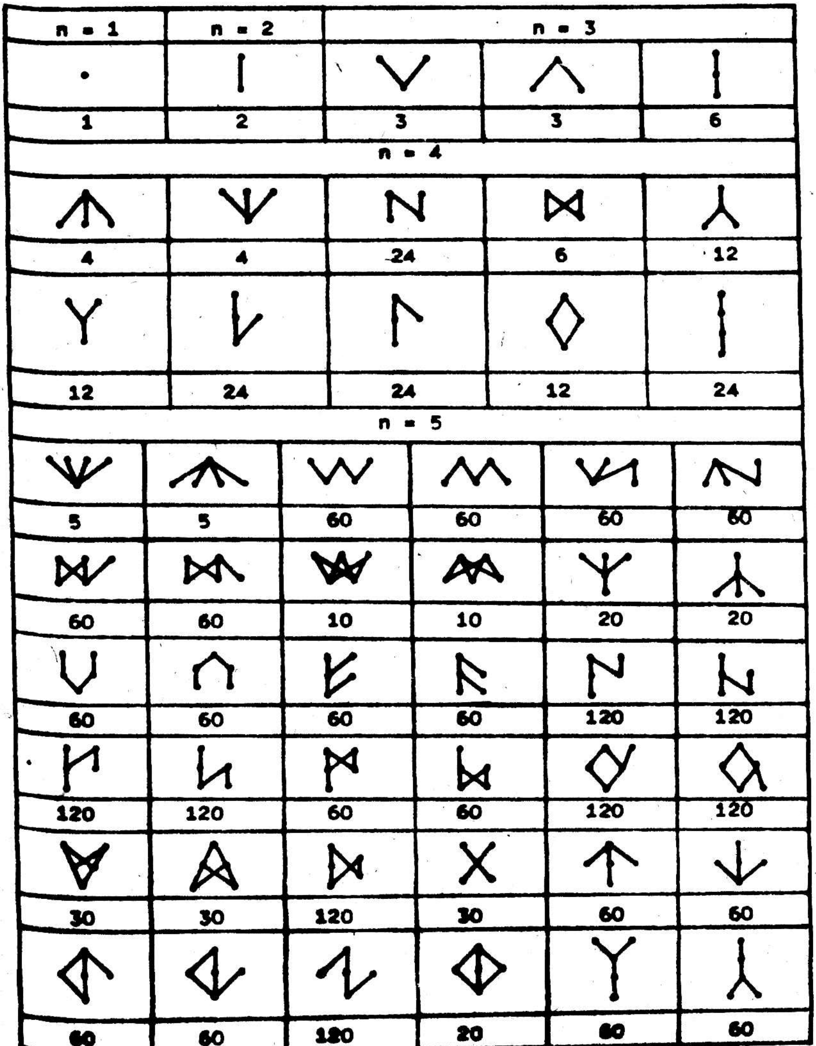
Angaben darüber findet man in /4/. Wir wollen deshalb zunächst Z(n) bestimmen.
Stellt ein zusammenhängender Hasse-Graph, bei dem man jedem Knoten genau ein Element der Menge M zugeordnet hat, eineindeutig die Halbordnungsrelation σ_G dar, so kann durch eine Umbenennung der Knoten des Graphen die eineindeutige Darstellung einer von σ_G verschiedenen Halbordnungsrelation entstehen. Jedoch nicht jede Knotenumbenennung liefert die Darstellung einer von der ursprünglichen Halbordnungsrelation verschiedenen Halbordnungsrelation. Wie man aus der Abb. 1 ersehen kann, entstehen offensichtlich aus G_1 durch Umbenennung G_2 und G_3, und es gilt $\sigma_{G_1} = \sigma_{G_2}$ und $\sigma_{G_2} \neq \sigma_{G_3}$.

Abb. 1



Durch Durchmusterung der einzelnen möglichen unbenannten zusammenhängenden Graphen mit der gleichen Knotenanzahl läßt sich für jeden die Anzahl der möglichen verschiedenen Knotenbenennungen, die paarweise verschiedene Halbordnungsrelationen eineindeutig darstellen, ermitteln.
In Tabelle 1 sind alle zusammenhängenden Graphen mit n Knoten ($1 \leq n \leq 6$) aufgeführt. Unter jedem Graphen ist die für ihn ermittelte Anzahl der dazugehörigen verschiedenen Halbordnungsrelationen angegeben. Wegen der Übersichtlichkeit werden die Graphen mit kleinstmöglicher Kantenanzahl zwischen oberen und unteren Knoten zuerst aufgeführt.
Die sich daraus ergebenden Werte für Z(n), K(n) und H(n) = Z(n) + K(n) sind in der Tabelle 2 zusammengefaßt.
Wir kommen jetzt zu der einleitend erwähnten Anwendung des erhaltenen Resultats. In /3/ wurde die Anzahlbestimmung der maximalen Klassen der k-wertigen Logik auf die Bestimmung der Mächtigkeiten von sechs verschiedenen Mengen von Relationen über k Elementen zurückgeführt. Eine dieser Relationsmengen ist die Menge aller Halbordnungsrelationen mit einem kleinsten und einem größten Element. Für diese Menge ergibt sich die Mächtigkeit $k(k-1)\cdot H(k-2)$. Da die Mächtigkeiten der anderen Relationsmengen explizit berechenbar sind, kann man durch die Kenntnis

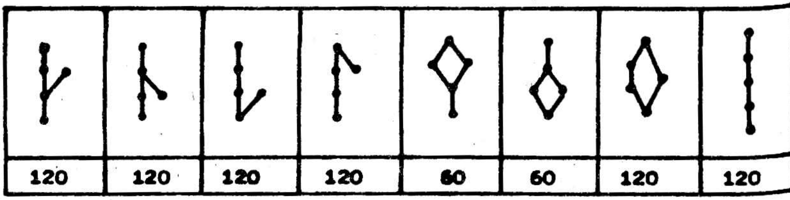
Tabelle 1



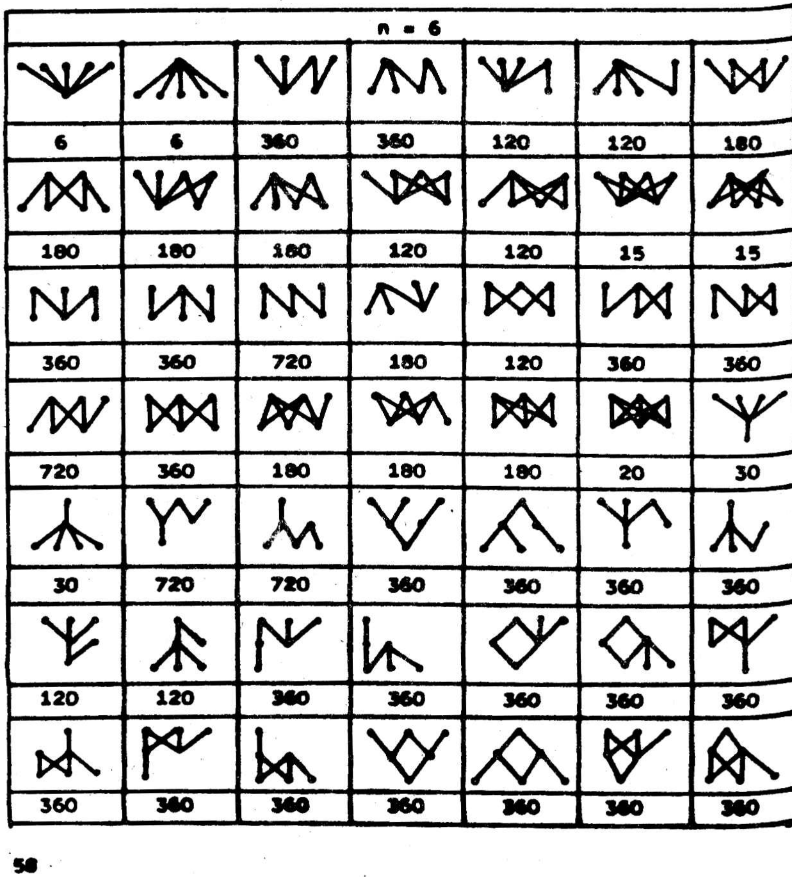
n = 1	n = 2	n = 3		
1	2	3	3	6

n = 4				
4	4	24	6	12
12	24	24	12	24

n = 5					
5	5	60	60	60	60
60	60	10	10	20	20
60	60	60	60	120	120
120	120	60	60	120	120
30	30	120	30	60	60
60	60	120	20	60	60

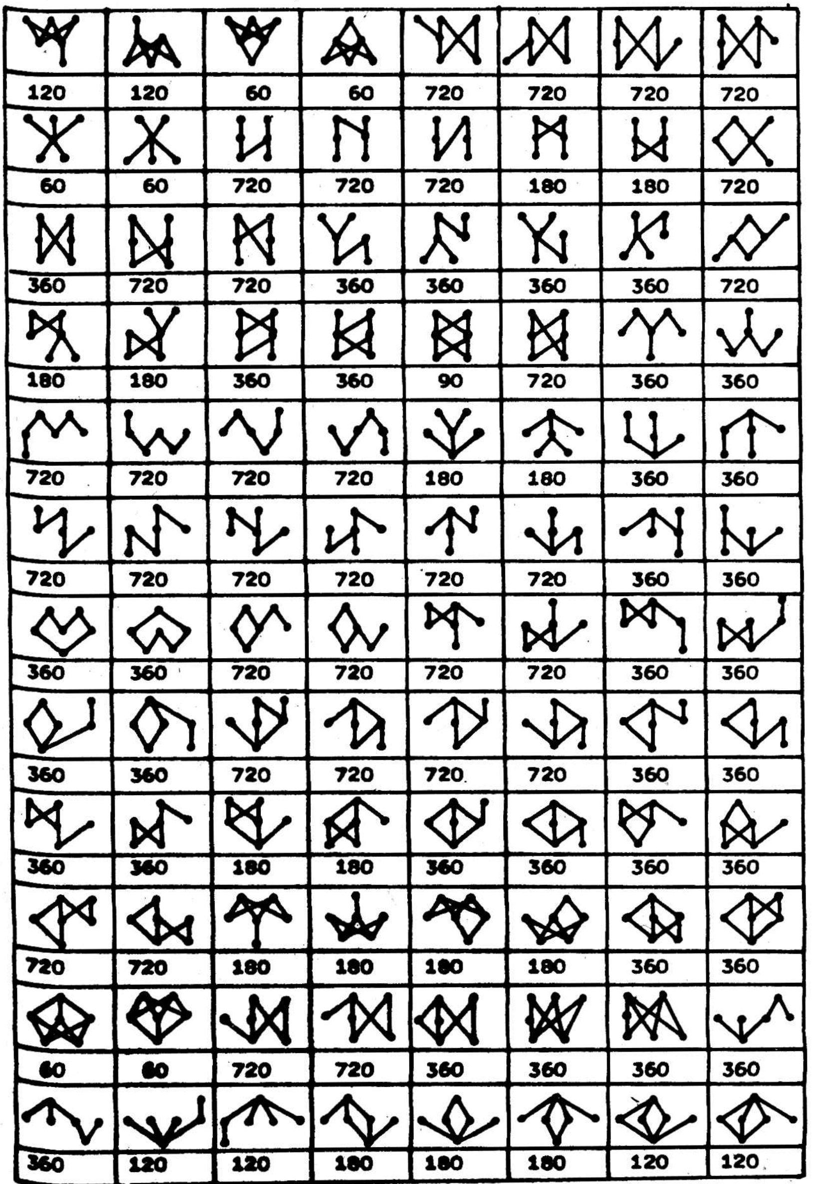


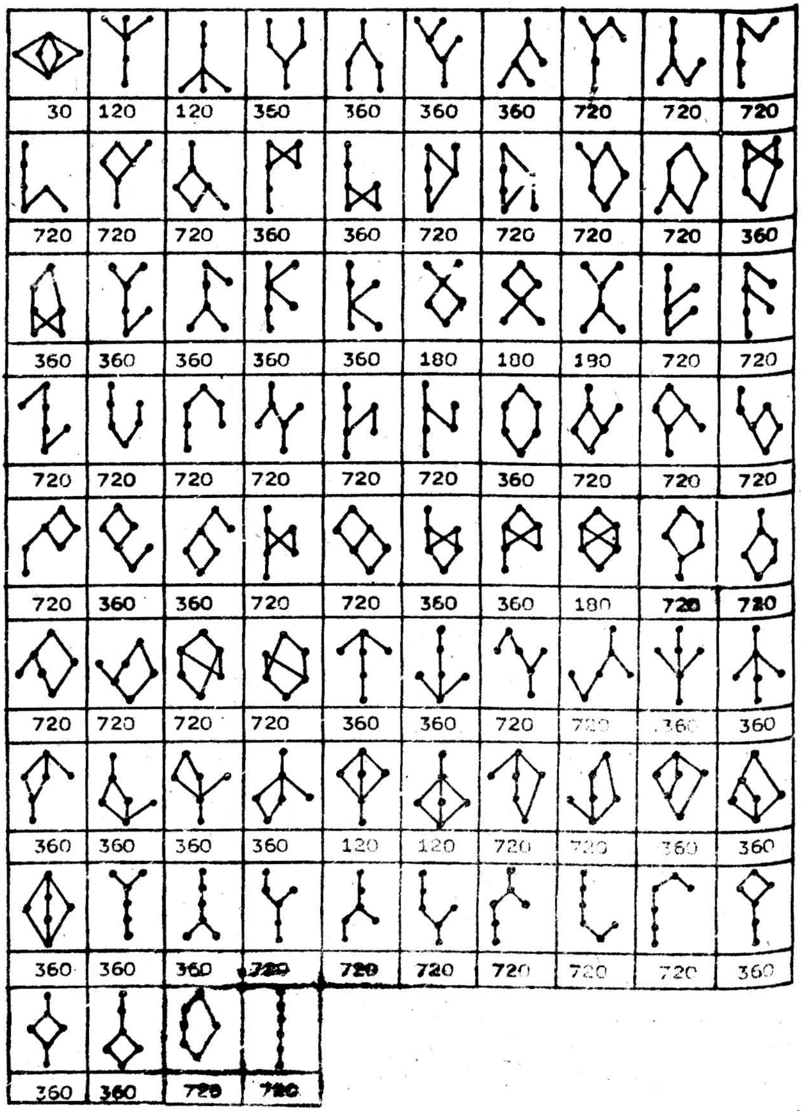
120	120	120	120	60	60	120	120



n = 6

6	6	360	360	120	120	180
180	180	180	120	120	15	15
360	360	720	180	120	360	360
720	360	180	180	180	20	30
30	720	720	360	360	360	360
120	120	360	360	360	360	360
360	360	360	360	360	360	360


120 120 60 60 720 720 720 720
60 60 720 720 720 180 180 720
360 720 720 360 360 360 360 720
180 180 360 360 90 720 360 360
720 720 720 720 180 180 360 360
720 720 720 720 720 720 360 360
360 360 720 720 720 720 360 360
360 360 720 720 720 720 360 360
360 360 180 180 360 360 360 360
720 720 180 180 180 180 360 360
60 60 720 720 360 360 360 360
360 120 120 180 180 180 120 120


30 120 120 360 360 360 360 720 720 720
720 720 720 360 360 720 720 720 720 360
360 360 360 360 360 180 180 180 720 720
720 720 720 720 720 720 360 720 720 720
720 360 360 720 720 360 360 180 720 720
720 720 720 720 360 360 720 720 360 360
360 360 360 360 120 120 720 720 360 360
360 360 360 720 720 720 720 720 720 360
360 360 720 720

von H(6) die Anzahl der maximalen Klassen der achtwertigen Logik ermitteln. Sie lautet: 549 761 772 249. Die Anzahlen für die drei- bis siebenwertige Logik wurden schon in /3/ angegeben.

Tabelle 2

n	Z(n)	K(n)	H(n)
1	1	0	1
2	2	1	3
3	12	7	19
4	146	73	219
5	3 060	1 171	4 231
6	97 502	28 381	125 883

Literatur

/1/ Comtet, L.: Recouvrements, bases de filtre et topologies d'un ensemble fini. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A - B 262, A 1091 - A 1094 (1966)

/2/ Pöschel, R., und Kalužnin, L. A.: Funktionen- und Relationenalgebren. Berlin 1979

/3/ Rosenberg, I.: The Number of Maximal Closed Classes in the Set of Functions over a Finite Domain. J. Combin. Theory Ser. A 14, 1 - 7 (1973)

/4/ Radtke, S.: Über die Anzahl maximal abgeschlossener Klassen von Funktionen der k-wertigen Logik. Diplomarbeit, Wilhelm-Pieck-Universität Rostock 1980

eingegangen: 04. 06. 1981

Anschrift des Verfassers:

S. Radtke
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
DDR-2500 Rostock

Rostock. Math. Kolloq. 23, 63 - 68 (1983) 15A18
65F15

Lothar Berg

Über eine Folge von Hessenbergmatrizen aus Binomialkoeffizienten

Für numerische Testzwecke ist es nützlich, explizite Kenntnisse über einfache Folgen von Matrizen zu besitzen (vgl. G. Zielke /3/). Im folgenden sollen daher einige Aussagen über die Hessenbergmatrizen $H_n = ((-1)^{i+j}\binom{i}{j-1})$, $i,j = 1,2,\dots,n$, zusammengestellt werden, d. h. über die Matrizen $H_1 = (1)$,

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ H_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix},\ H_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & -6 & 4 \end{pmatrix},\ \dots \quad (1)$$

Nach /1/ sind die Determinanten dieser Matrizen alle gleich Eins, und die zugehörigen inversen Matrizen besitzen die Elemente

$$\sum_{k=\mathrm{Max}(i,j)}^{n} \binom{k-1}{j-1},$$

die für $i \leq j$ gleich $\binom{n}{j}$ sind. Damit sind alle Matrizen H_n von monotoner Art, und es gilt speziell

$$H_2^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ H_3^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ H_4^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ \dots$$

sowie

$$H_5 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -6 & 4 & -1 \\ 1 & -5 & 10 & -10 & 5 \end{pmatrix},\quad H_5^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ 4 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ 3 & 9 & 10 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 9 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eine Hessenbergmatrix ist eine Matrix der Form $H = L - J$, wobei L eine untere Dreiecksmatrix ist und $J = (b_{ij})$ eine Jordanmatrix mit $b_{i,i+1} = 1$ und $b_{ij} = 0$ sonst. Will man ein Gleichungssystem mit der Matrix H mit Hilfe des Einzelschrittverfahrens lösen, so konvergiert dieses Verfahren, wenn alle Eigenwerte der Matrix $L^{-1}J$, d. h. alle Lösungen λ der Gleichung

$$\det(\lambda L-J) = 0,$$

betragsmäßig kleiner als Eins sind. Im Fall der Matrizen (1) schreiben wir $H_n = L_n - J_n$ und setzen

$$xP_n(x) = (-1)^{n-1}\det(xL_n-J_n). \tag{2}$$

Die uns interessierenden nichttrivialen Eigenwerte sind dann gerade die Nullstellen der durch (2) definierten Polynome. Die ersten dieser Polynome lauten

$$P_1(x) = 1,\ P_2(x) = 1-2x,\ P_3(x) = 1-6x+6x^2,$$

$$P_4(x) = 1-14x+36x^2-24x^3 = (1-2x)(1-12x+12x^2),$$

$$P_5(x) = 1-30x+150x^2-240x^3+120x^4 = 1-30(x-x^2)+120(x-x^2)^2,$$

$$P_6(x) = (1-2x)(1-60(x-x^2)+360(x-x^2)^2),$$

$$P_7(x) = 1-126(x-x^2)+1680(x-x^2)^2-5040(x-x^2)^3.$$

Um zu allgemeineren Aussagen zu gelangen, gehen wir von der Rekursionsformel

$$P_n(x) = 1-x\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n}{j}P_j(x) \tag{3}$$

aus, die unmittelbar aus (2) durch Anwendung des Laplaceschen Entwicklungssatzes auf die letzte Zeile der Determinante hervorgeht. Für die erzeugende Funktion

$$F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}P_n(x)t^n \tag{4}$$

findet man mit Hilfe von (3) die Darstellung

$$F(x,t) = \frac{e^t-1}{1+x(e^t-1)}, \tag{5}$$

so daß die Polynome $P_n(x)$ verallgemeinerte Appell-Polynome sind (vgl. /2/).

Wegen

$$F(x,t) - F(x,-t) = \frac{e^t - e^{-t}}{1+(x-x^2)(e^t-2+e^{-t})},$$

$$F(x,t) + F(x,-t) = \frac{(1-2x)(e^t-2+e^{-t})}{1+(x-x^2)(e^t-2+e^{-t})}$$

und (4) ist sofort ersichtlich, daß die Polynome $P_n(x)$ allgemein für gerade n durch 1-2x teilbar und sonst sogar Polynome in $x-x^2$ sind. Wegen

$$\frac{F(y,t) - F(x,t)}{x - y} = F(y,t)F(x,t)$$

ergibt sich durch Einsetzen von (4) außerdem die Formel vom Christoffel-Darboux-Typ

$$\frac{P_n(y) - P_n(x)}{x - y} = \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} P_j(y)P_{n-j}(x)$$

und hieraus für $y \to x$ die Rekursionsformel für die Ableitungen

$$P_n'(x) = - \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} P_j(x)P_{n-j}(x). \qquad (6)$$

Als Funktion von t ist (5) eine meromorphe Funktion mit den Polstellen $t_k = \ln(1-\frac{1}{x}) + 2\pi ki$, wobei k eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Für $0 < x < 1$ ist das Argument des Logarithmus negativ und somit

$$t_k = \ln\left|1 - \frac{1}{x}\right| + (2k+1)\pi i. \qquad (7)$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$l = \ln\left|1 - \frac{1}{x}\right|, \qquad (8)$$

so ist offenbar $\sqrt{l^2+\pi^2}$ der Konvergenzradius von (4). An allen Polen t_k besitzt F(x,t) das Residuum

$$\frac{e^{t_k}-1}{xe^{t_k}} = \frac{1}{x(1-x)},$$

so daß die Mittag-Lefflersche Partialbruchzerlegung dieser Funktion

$$F(x,t) = \frac{1}{x(1-x)} \left(\frac{1}{t-l-\pi i} + \frac{1}{t-l+\pi i} + \frac{1}{t-l-3\pi i} + \frac{1}{t-l+3\pi i} + \ldots\right)$$

lautet. Mit Hilfe von (4) und der geometrischen Reihe kann man hieraus sofort bei festem x aus $0 < x < 1$ für $n \to \infty$ das asymptotische Verhalten der Polynome

$$P_n(x) = \frac{2 \cdot n!}{x(x-1)} \left((l^2+\pi^2)^{-(n+1)/2} \cos\left((n+1)\arctan \frac{\pi}{l}\right) + O\left((l^2+9\pi^2)^{-(n+1)/2}\right) \right) \tag{9}$$

mit (8) ablesen. Aus den Nullstellen $(k+\frac{1}{2})\pi$ des Kosinus ergeben sich unter Beachtung von (8) für die Nullstellen von $P_n(x)$ und damit für die nichttrivialen Eigenwerte λ_k die Näherungswerte

$$\lambda_k = \left(1 + \exp\left(\pi \cot\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right)\right)\right)^{-1} \tag{10}$$

für $k = 1,2,\ldots,n-1$. Diese Werte liegen alle im Intervall $(0,1)$, kommen aber der Eins beliebig nahe. Für kleine n stimmen sie bereits erstaunlich gut mit den exakten Eigenwerten überein, wie die folgende Tabelle zeigt, in der die auf fünf Stellen gerundeten exakten Werte jeweils über den Näherungswerten stehen:

n \ k	1	2	3	4	5	6
2	0.5 0.5					
3	0.21132 0.21395	0.78868 0.78605				
4	0.09175 0.09258	0.5 0.5	0.90825 0.90742			
5	0.04132 0.04142	0.30098 0.30116	0.69902 0.69884	0.95868 0.95858		
6	0.01915 0.01909	0.18044 0.18051	0.5 0.5	0.81956 0.81949	0.98085 0.98091	
7	0.00907 0.00900	0.10917 0.10918	0.34865 0.34867	0.65135 0.65133	0.89083 0.89082	0.99093 0.99100

Die Werte (10) mit $k = 0$

n	1	2	3	4	5	6
λ_o	4.142 ≠ -2	4.315 ≠ -3	5.080 ≠ -4	6.322 ≠ -5	8.092 ≠ -6	1.053 ≠ -6

und die zugehörigen Werte $\lambda_n = 1 - \lambda_o$ liefern zwar zwei weitere Nullstellen des Kosinus aus (9), diese liegen aber in unmittelbarer Umgebung der Randpunkte $x = 0$ bzw. $x = 1$, wo die asymptotische Approximation (9) nicht mehr gültig ist. Für $x \longrightarrow +0$ sowie für $x \longrightarrow 1-0$ divergiert nämlich das Hauptglied auf der rechten Seite von (9) gegen $-\infty$, während aus (4) und (5)

$$P_n(0) = 1, \; P_n(1) = (-1)^{n+1}$$

hervorgeht. Durch Integration von (5) folgt

$$\int_0^1 F(x,t)dx = \ln(1+x(e^t-1))\Big|_0^1 = t,$$

so daß wir aus (4) weiterhin

$$\int_0^1 P_n(x)dx = 0 \tag{11}$$

für $n \geq 2$ erhalten.
Ganz analog ergibt sich für $n \geq 1$

$$\int_0^1 x\, P_n(x)dx = B_n, \tag{12}$$

wobei mit B_n die durch

$$\frac{t}{e^t-1} = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n!} B_n t^n$$

definierten Bernoullischen Zahlen bezeichnet werden. Wegen $P_n(1-x) = (-1)^{n+1}P_n(x)$ und $B_{2n+1} = 0$ für alle natürlichen Zahlen n ist (11) nur für ungerade und (12), wenn man dort den Faktor x durch $x - 1/2$ ersetzt, nur für gerade n bemerkenswert.

Die erzeugende Funktion (5) läßt sich auch noch etwas umformen.

Die in der Partialbruchzerlegung dieser Funktion auftretende Reihe besitzt bis auf den Vorfaktor die Summe $\frac{1}{2}$ tanh $\frac{1}{2}(t-1)$.

Berechnet man noch den zugehörigen ganzen Anteil, so ergibt sich für $0 < x < 1$ die Darstellung

$$F(x,t) = \frac{1}{2x(1-x)}\,(1-2x+\tanh \tfrac{1}{2}(t-1)).$$

Dies bedeutet, daß an Stelle von (9) sogar

$$P_n(x) = \frac{2\cdot n!}{x(x-1)} \sum_{k=0}^{\infty} (l^2+(2k+1)^2\,\pi^2)^{-(n+1)/2} \times$$
$$\times \cos((n+1)\arctan(\frac{2k+1}{l}\,\pi))$$

gilt. Für $x = \frac{1}{2}$ wird $l = 0$, und wir erhalten neben $P_{2n}(\frac{1}{2}) = 0$ unter Beachtung von

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^{2n}} = \frac{4^n-1}{2(2n)!}\,\pi^{2n}\,|B_{2n}|$$

den weiteren Zusammenhang mit den Bernoullischen Zahlen:

$$P_{2n-1}(\tfrac{1}{2}) = \frac{2}{n}(4^n-1)B_{2n}.$$

Literatur

/1/ Berg, L.: Die Invertierung von Matrizen aus Binomialkoeffizienten. Z. Angew. Math. Mech. (im Druck)

/2/ Boas, R. P., und Buck, R. C.: Polynomial Expansions of Analytic Functions. Berlin 1958

/3/ Zielke, G.: Testmatrizen mit freien Parametern. Computing 15, 87 - 103 (1975)

eingegangen: 14. 02. 1983

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. L. Berg
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
DDR-2500 Rostock

Rostock. Math. Kolloq. 23, 69 - 72 (1983) 15A39
15A60

Laszlo Kozma

Some norm-inequalities of the convolution for matrices

The aim of this paper is to generalize some norm-inequalities concerning the convolution of vectors.
The convolution of two complex vectors $\underline{x} = [x(0),\dots,x(N-1)]^T$ and $\underline{y} = [y(0),\dots,y(N-1)]^T$ is defined by

$$\underline{z} = \underline{x} * \underline{y} = [z(0),\dots,z(N-1)]^T$$

with

$$z(n) = \sum_{j=0}^{N-1} x(n-j)\ y(j), \quad (n=0,\dots,N-1).$$

Note that the indices are defined modulo N.
The p-norm of vector $\underline{x}$ is defined by

$$\|\underline{x}\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^p\right)^{1/p} & \text{if } 1 \le p < \infty, \\ \max\{|x(n)| : n=0,\dots,N-1\} & \text{if } p = \infty. \end{cases}$$

Then we have the well-known norm-inequalities

$$\|\underline{x} * \underline{y}\|_\infty \le \|\underline{x}\|_p\ \|\underline{y}\|_q \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\quad 1 \le p,q \le \infty\right), \tag{1}$$

$$\|\underline{x} * \underline{y}\|_p \le \|\underline{x}\|_p\ \|\underline{y}\|_1 \quad (1 \le p \le \infty) \tag{2}$$

for all vectors $\underline{x}$ and $\underline{y}$.
Now let A be a complex $N \times M$-matrix with elements $a(n,m)$, $(n=0,\dots,N-1;\ m=0,\dots,M-1)$. We introduce the following notations:

$$\underline{a}^n = [a(n,0),\dots,a(n,M-1)]^T \quad (n=0,\dots,N-1),$$
$$\underline{a}_m = [a(0,m),\dots,a(N-1,m)]^T \quad (m=0,\dots,M-1),$$

$$\underline{\alpha}^p = [\|\underline{a}^0\|_p,\dots,\|\underline{a}^{N-1}\|_p]^T \quad (1 \le p \le \infty),$$
$$\underline{\alpha}_p = [\|\underline{a}_0\|_p,\dots,\|\underline{a}_{M-1}\|_p]^T \quad (1 \le p \le \infty).$$

Then we can define the <u>(p,r)-column-norm</u> $\|A\|_{p,r}$ and the <u>(p,r)-row-norm</u> $\|A\|^{p,r}$ of the matrix A (see /2/) by

$$\|A\|_{p,r} = \|\underline{\alpha}_p\|_r, \quad \|A\|^{p,r} = \|\underline{\alpha}^p\|_r \qquad (1 \le p,r \le \infty).$$

For some special p and r we obtain well-known norms:

$$\|A\|_{1,1} = \|A\|^{1,1} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} |a(n,m)|,$$

$$\|A\|_{2,2} = \|A\|^{2,2} = \Big(\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} |a(n,m)|^2\Big)^{1/2},$$

$$\|A\|_{\infty,\infty} = \|A\|^{\infty,\infty} = \max\Big\{|a(n,m)| : n=0,\dots,N-1;\ m=0,\dots,M-1\Big\},$$

$$\|A\|^{1,\infty} = \max\Big\{\sum_{m=0}^{M-1} |a(n,m)| : n=0,\dots,N-1\Big\}.$$

The <u>convolution</u> of two complex $N \times M$-matrices A and B can be defined similarly to that of two vectors by $C = A * B$ with the elements

$$c(n,m) = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{M-1} a(n-j,m-k)\ b(j,k), \quad (n=0,\dots,N-1;\ m=0,\dots,M-1).$$

Note that the row-indices are defined modulo N and the column-indices are defined modulo M.
The following assertions are generalizations of (1) and (2) concerning the norms of matrices.

<u>Proposition 1:</u> Let A, B be two complex $N \times M$-matrices and

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1, \quad 1 \le p,q,r,s \le \infty.$$

Then

$$\|A * B\|_{\infty,\infty} \le \|A\|^{p,r}\ \|B\|^{q,s}, \tag{3}$$

$$\|A * B\|_{\infty,\infty} \le \|A\|_{p,r}\ \|B\|_{q,s}. \tag{4}$$

<u>Proof:</u> It will be sufficiently to show that

$$|c(n,m)| \le \|A\|^{p,r}\ \|B\|^{q,s}$$

for all elements $c(n,m)$ of $A * B$. That is proved by the following sequence of inequalities, in which only the definitions and the inequality (1) are used:

$$\|A\|^{p,r}\,\|B\|^{q,s} = \|\underline{\alpha}^p\|_r \|\underline{\beta}^q\|_s \geq \|\underline{\alpha}^p * \underline{\beta}^q\|_\infty$$

$$\geq \sum_{j=0}^{N-1} \|\underline{a}^{n-j}\|_p \,\|\underline{b}^j\|_q \geq \sum_{j=0}^{N-1} \|\underline{a}^{n-j} * \underline{b}^j\|_\infty$$

$$\geq \sum_{j=0}^{N-1} \Big|\sum_{k=0}^{M-1} a^{n-j}(m-k)\; b^j(k)\Big| = \sum_{j=0}^{N-1} \Big|\sum_{k=0}^{M-1} a(n-j,m-k)\; b(j,k)\Big|$$

$$\geq |c(n,m)|.$$

We remark that (4) can be proved similarly.□

To prove the second assertion we need one of the generalizations of the Hölder-inequality.

<u>Lemma</u> (cf. /1/, p. 21): If A is a complex $N \times M$-matrix and $p \geq 1$, then

$$\|A\|^{1,p} \leq \|A\|_{p,1}, \quad \|A\|_{1,p} \leq \|A\|^{p,1},$$

that means especially

$$\Big(\sum_{m=0}^{M-1} \Big(\sum_{n=0}^{N-1} |a(n,m)|\Big)^p\Big)^{1/p} \leq \sum_{n=0}^{N-1} \Big(\sum_{m=0}^{M-1} |a(n,m)|^p\Big)^{1/p}$$

<u>Proposition 2:</u> Let A, B be two complex $N \times M$-matrices and $1 \leq p,r \leq \infty$. Then

$$\|A * B\|^{p,r} \leq \|A\|^{p,r}\, \|B\|_{1,1}, \tag{5}$$

$$\|A * B\|_{p,r} \leq \|A\|_{p,r}\, \|B\|_{1,1}. \tag{6}$$

<u>Proof:</u> Denote $C = A * B$ with rows $\underline{c}^n$ $(n=0,\dots,N-1)$. First of all we estimate $\|\underline{c}^n\|_p$. By the lemma we get

$$\|\underline{c}^n\|_p = \Big(\sum_{m=0}^{M-1} \Big|\sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{M-1} a(n-j,m-k)\; b(j,k)\Big|^p\Big)^{1/p}$$

$$\leq \Big(\sum_{m=0}^{M-1} \Big(\sum_{j=0}^{N-1} \Big|\sum_{k=0}^{M-1} a(n-j,m-k)\; b(j,k)\Big|\Big)^p\Big)^{1/p}$$

$$\leq \sum_{j=0}^{N-1} \Big(\sum_{m=0}^{M-1} \Big|\sum_{k=0}^{M-1} a(n-j,m-k)\; b(j,k)\Big|^p\Big)^{1/p}.$$

Note that

$$\sum_{k=o}^{M-1} a(n-j,m-k)\ b(j,k) = (\underline{a}^{n-j} * \underline{b}^{j})(m).$$

Hence we obtain by inequality (2)

$$\|\underline{c}^n\|_p \leq \sum_{j=o}^{N-1} \|\underline{a}^{n-j} * \underline{b}^j\|_p \leq \sum_{j=o}^{N-1} \|\underline{a}^{n-j}\|_p \ \|\underline{b}^j\|_1.$$

By using of this estimation and by

$$(\underline{\alpha}^p * \underline{\beta}^1)(n) = \sum_{j=o}^{N-1} \|\underline{a}^{n-j}\|_p \ \|\underline{b}^j\|_1$$

we get

$$\|A * B\|^{p,r} = \Big(\sum_{n=o}^{N-1}(\|\underline{c}^n\|_p)^r\Big)^{1/r} \leq \Big(\sum_{n=o}^{N-1}|(\underline{\alpha}^p * \underline{\beta}^1)(n)|^r\Big)^{1/r}$$
$$= \|\underline{\alpha}^p * \underline{\beta}^1\|_r.$$

Using (2) once more we can complete the proof of (5):

$$\|A * B\|^{p,r} \leq \|\underline{\alpha}^p * \underline{\beta}^1\|_r \leq \|\underline{\alpha}^p\|_r \|\underline{\beta}^1\|_1 = \|A\|^{p,r} \ \|B\|_{1,1}.$$

We remark that a similar proof can be given for (6). □

References

/1/ Beckenbach, E. F., and Bellmann, R.: Inequalities. Berlin 1961

/2/ Ostrowski, A.: Über Normen von Matrizen. Math. Z. 63, 2 - 18 (1955)

received: December 6, 1982

Author's address:

L. Kozma

University of Debrecen

Department of Mathematics

Egyetem ter 1

4028 Debrecen

Hungary

Rostock. Math. Kolloq. 23, 73 - 80 (1983) 46F10

Brian Fisher

On defining the distribution $\delta^{(r)}(f(x))$

In the following we let ϱ be a fixed infinitely differentiable function having the properties

(i) $\varrho(x) = 0$ for $|x| \geq 1$,

(ii) $\varrho(x) \geq 0$,

(iii) $\varrho(x) = \varrho(-x)$,

(iv) $\int_{-1}^{1} \varrho(x)dx = 1$.

We define the function δ_n by

$$\delta_n(x) = n\varrho(nx)$$

for $n = 1,2,\ldots$. It is obvious that $\{\delta_n\}$ is a regular sequence converging to the Dirac delta-function δ so that if ϕ is an arbitrary test function we have

$$(\delta^{(r)}(x), \phi(x)) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n^{(r)}(x)\, \phi(x)\, dx.$$

This suggests the following definition for the distribution $\delta^{(r)}(f(x))$.

Definition 1: Let f be an infinitely differentiable function. We say that the distribution $\delta^{(r)}(f(x))$ exists and is equal to h on the open interval (a,b) if

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n^{(r)}(f(x))\, \phi(x)\, dx = (h(x), \phi(x))$$

for all test functions ϕ with support contained in the interval (a,b).

Theorem 1: Let f be an infinitely differentiable function and suppose that the equation $f(x) = 0$ has a single simple root at the point $x = x_1$ in the open interval (a,b). Then the distribution $\delta^{(r)}(f(x))$ exists and

$$\delta^{(r)}(f(x)) = \frac{1}{|f'(x_1)|}\left[\frac{1}{f'(x)}\frac{d}{dx}\right]^r \delta(x-x_1) \tag{1}$$

on the interval (a,b).

<u>Proof:</u> We note first of all that $\delta^{(r)}(f(x))$ will be identically equal to zero on any open interval which does not contain a root of the equation $f(x) = 0$. Since $x = x_1$ is a simple root of the equation $f(x) = 0$, we have $f'(x_1) \neq 0$ and so we may assume that the interval (a,b) is bounded and that $f'(x) \neq 0$ on this interval. Further, the equation $f(x) = t$ will then have an inverse $x = g(t)$ on the interval (a,b) and the function g will be infinitely differentiable.

Now let Φ be an arbitrary test function with support contained in the interval (a,b). On making the substitution $f(x) = t$ we have

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n^{(r)}(f(x))\,\Phi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n^{(r)}(t)\,\Phi(g(t))|g'(t)|\,dt$$

which converges to

$$(\delta^{(r)}(t),\ \Phi(g(t))|g'(t)|)$$

on letting n tend to infinity. This proves the existence of $\delta^{(r)}(f(x))$. In particular when $r = 0$ we have

$$\begin{aligned}(\delta(f(x)),\ \Phi(x)) &= (\delta(t),\ \Phi(g(t))|g'(t)|)\\ &= \Phi(g(0))|g'(0)|\\ &= \Phi(x_1)/|f'(x_1)|\\ &= (\delta(x-x_1)/|f'(x_1)|,\ \Phi(x))\end{aligned}$$

and so

$$\delta(f(x)) = \delta(x-x_1)/|f'(x_1)|.$$

Equation (1) therefore holds when $r = 0$.

Suppose now that equation (1) holds for some r. Then

$$\begin{aligned}(\delta^{(r+1)}(f(x)),\ \Phi(x)) &= \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n^{(r+1)}(f(x))\,\Phi(x)\,dx\\ &= -\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n^{(r)}(f(x))[\Phi(x)/f'(x)]'\,dx\end{aligned}$$

$$= (\delta^{(r)}(f(x)), [\Phi(x)/f'(x)]')$$
$$= ([\delta^{(r)}(f(x))]'/f'(x), \Phi(x))$$

and so

$$\delta^{(r+1)}(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \frac{d}{dx} \delta^{(r)}(f(x))$$
$$= \frac{1}{|f'(x_1)|} \left[\frac{1}{f'(x)} \frac{d}{dx}\right]^{r+1} \delta(x-x_1)$$

by our assumption. Equation (1) now follows by induction. This completes the proof of the theorem.

It follows easily that if the equation $f(x) = 0$ has only simple roots at the points $x = x_1, x_2, \ldots$ then

$$\delta^{(r)}(f(x)) = \sum_k \frac{1}{|f'(x_k)|} \left[\frac{1}{f'(x)} \frac{d}{dx}\right]^r \delta(x-x_k),$$

the summation being taken over all the simple roots. This is in agreement with the definition of $\delta^{(r)}(f(x))$ given by Gelfand and Shilov, see /2/.
However we will now extend Definition 1 so that $\delta^{(r)}(f(x))$ can be defined at multiple roots of the equation $f(x) = 0$. First of all we need the following definition given by van der Corput, see /1/.

Definition 2: A neutrix N is a commutative additive group of functions $\nu(\xi)$ defined on a domain N' with values in an additive group N", where further if for some ν in N, $\nu(\xi) = \gamma$ for all ξ in N', then $\gamma = 0$. The functions in N are called negligible functions. Now let N' be a set contained in a topological space with a limit point b which does not belong to N'. If $f(\xi)$ is a function defined on N' with values in N" and it is possible to find an constant β such that $f(\xi) - \beta$ is negligible in N, then β is called the neutrix limit or N-limit of f as ξ tends to b and we write

$$\underset{\xi \to b}{\text{N-lim}}\, f(\xi) = \beta,$$

where the limit β must be unique if it exists.

The following definition is an extension of Definition 1.

Definition 3: Let f be an infinitely differentiable function.

We say that the distribution $\delta^{(r)}(f(x))$ exists and is equal to h on the open interval (a,b) if

$$\underset{n\to\infty}{\text{N-lim}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n^{(r)}(f(x))\,\Phi(x)\,dx = (h(x),\,\Phi(x))$$

for all test functions Φ with support contained in the interval (a,b), where N is the neutrix having domain N' = $\{1,2,\ldots,n,\ldots\}$ and range N" the real numbers with negligible functions linear sums of the functions n^{λ} for $\lambda>0$ and all functions which converge to zero as n tends to infinity.

<u>Theorem 2:</u> Let f_1 be an infinitely differentiable function and suppose that the equation $f_1(x) = 0$ has a single simple root at the point $x = x_1$ in the open interval (a,b). Then if $f = f_1{}^s$, the distribution $\delta^{(r)}(f(x))$ exists and

$$\frac{d}{dx}\,\delta^{(r)}(f(x)) = f'(x)\delta^{(r+1)}(f(x))$$

on the interval (a,b) for $r = 0,1,2,\ldots$ and $s = 1,2,\ldots$.
In particular

$$\delta^{(r)}(f(x)) = 0$$

on the interval (a,b) for $r = 0,1,2,\ldots$ and $s = 2,4,\ldots$ and

$$\delta^{(r)}((x-x_1)^s) = \frac{r!}{s(rs+s-1)!}\,\delta^{(rs+s-1)}(x-x_1)$$

on the real line for $r = 0,1,2,\ldots$ and $s = 1,3,5,\ldots$

<u>Proof:</u> We will prove the theorem for the case $x_1 = 0$. The case $x_1 \neq 0$ will then follow by translation. We therefore have $x = 0$ as a simple root of the equation $f_1(x) = 0$ and we may assume that the interval (a,b) containing the origin is bounded and $f'(x) \neq 0$ on this interval. The equation $f_1(x) = y$ will then have an inverse $x = g(y)$ on the interval (a,b) and the function g will be infinitely differentiable.
Now let Φ be an arbitrary test function with support contained in the interval (a,b). Then

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n^{(r)}(f(x))\,\Phi(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} \delta_n^{(r)}(f(x))\,\Phi(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} \delta_n^{(r)}(f(-x))\,\Phi(-x)\,dx.$$

On making the substitution $t^{1/s} = f_1(x)$ or $x = g(t^{1/s})$ we have

$$\int_0^\infty \delta_n^{(r)}(f(x))\,\Phi(x)dx = \frac{1}{s}\int_0^\infty \delta_n^{(r)}(t)\Phi(g(t^{1/s}))|g'(t^{1/s})|\,t^{\frac{1}{s}-1}dt.$$

The function $\psi(y) = \Phi(g(y))|g'(y)|$ is infinitely differentiable and so by Taylor's theorem

$$\psi(y) = \sum_{i=0}^{rs+s-1} \frac{\psi^{(i)}(0)}{i!}\,y^i + \frac{\psi^{(rs+s)}(\xi y)}{(rs+s)!}\,y^{rs+s},$$

where $0 \leq \xi \leq 1$. Thus

$$s\int_0^\infty \delta_n^{(r)}(f(x))\Phi(x)dx = \sum_{i=0}^{rs+s-1} \frac{\psi^{(i)}(0)}{i!}\int_0^\infty \delta_n^{(r)}(t)\,t^{\frac{i+1}{s}-1}dt$$

$$+ \int_0^\infty \frac{\psi^{(rs+s)}(\xi t^{1/s})}{(rs+s)!}\,\delta_n^{(r)}(t)\,t^{r+\frac{1}{s}}dt$$

$$= \sum_{i=0}^{rs+s-2} \frac{\psi^{(i)}(0)}{i!}\int_0^1 n^r\rho^{(r)}(u)(u/n)^{\frac{i+1}{s}-1}du$$

$$+ \frac{\psi^{(rs+s-1)}(0)}{(rs+s-1)!}\int_0^1 \rho^{(r)}(u)u^r du$$

$$+ \int_0^1 \frac{\psi^{(rs+s)}(\xi(u/n)^{1/s})}{(rs+s)!}\,n^r\rho^{(r)}(u)(u/n)^{r+\frac{1}{s}}du$$

on making the substitution $nt = u$. It now follows that the neutrix limit of

$\int_0^\infty \delta_n^{(r)}(f(x))\Phi(x)dx$ exists and is equal to

$$\frac{\psi^{(rs+s-1)}(0)}{s(rs+s-1)!}\int_0^1 \rho^{(r)}(u)u^r du = \frac{(-1)^r r!\,\psi^{(rs+s-1)}(0)}{2s(rs+s-1)!}.$$

Now let us consider

$$\int_0^{\infty} \delta_n^{(r)}(f(-x))\, \Phi(-x)\, dx$$

and make the substitution $t^{1/s} = f_1(-x)$, where $t^{1/s} \geq 0$. Solving for $-x$ we get $-x = g(-t^{1/s})$. It follows that

$$s\int_0^{\infty} \delta_n^{(r)}(f(-x))\, \Phi(-x)\, dx$$

$$= \int_0^{\infty} \delta_n^{(r)}((-1)^s t)\, \Phi(g(-t^{1/s}))\,|g'(-t^{1/s})|\, t^{\frac{1}{s}-1} dt$$

$$= (-1)^{rs}\int_0^{\infty} \delta_n^{(r)}(t)\, \psi(-t^{1/s})\, t^{\frac{1}{s}-1} dt,$$

where ψ is the function defined above. It follows that

$$\underset{n\to\infty}{\text{N-lim}} \int_0^{\infty} \delta_n^{(r)}(f(-x))\, \Phi(-x)\, dx$$

$$= \frac{(-1)^{s-1}\, \psi^{(rs+s-1)}(0)}{s(rs+s-1)!} \int_0^1 \rho^{(r)}(u)\, u^r du$$

$$= -\frac{(-1)^{r+s} r!\, \psi^{(rs+s-1)}(0)}{2s(rs+s-1)!}.$$

Thus

$$\underset{n\to\infty}{\text{N-lim}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n^{(r)}(f(x))\Phi(x)\, dx = \begin{cases} 0, & s=2,4,\ldots \\ \dfrac{(-1)^r r!\, \psi^{(rs+s-1)}(0)}{s(rs+s-1)!}, & s=1,3,\ldots \end{cases}$$

proving the existence of $\delta^{(r)}(f(x))$ on the interval (a,b) for $r = 0,1,2,\ldots$ and $s = 1,2,\ldots$ In particular

$$\delta^{(r)}(f(x)) = 0$$

on the interval (a,b) for $r = 0,1,2,\ldots$ and $s = 2,4,\ldots$

Now consider the particular case $f(x) = x^s$ where s is odd. Then if Φ is an arbitrary test function, the function ψ defined above is identical to Φ. It follows from what we have just proved that

$$(\delta^{(r)}(f(x)),\ \Phi(x)) = \frac{(-1)^r r!\ \Phi^{(rs+s-1)}(0)}{s(rs+s-1)!}$$

$$= \frac{r!}{s(rs+s-1)!}\ (\delta^{(rs+s-1)}(x),\ \Phi(x))$$

and so

$$\delta^{(r)}(x^s) = \frac{r!}{s(rs+s-1)!}\ \delta^{(rs+s-1)}(x)$$

on the real line for $r = 0,1,2,\ldots$ and $s = 1,3,5,\ldots$

Finally we have

$$([\delta^{(r)}(f(x))]',\ \Phi(x)) = -(\delta^{(r)}(f(x)),\ \Phi'(x))$$

$$= -\ \underset{n\to\infty}{\text{N-lim}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n^{(r)}(f(x))\,\Phi'(x)dx$$

$$= \underset{n\to\infty}{\text{N-lim}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n^{(r+1)}(f(x))\ \Phi(x)f'(x)dx$$

on integrating by parts and so

$$([\delta^{(r)}(f(x))]',\ \Phi(x)) = (\delta^{(r+1)}(f(x)),\ \Phi(x)f'(x)).$$

Thus

$$\frac{d}{dx}\ \delta^{(r)}(f(x)) = f'(x)\delta^{(r+1)}(f(x))$$

on the interval (a,b) for $r = 0,1,2,\ldots$ and $s = 1,2,\ldots$

This completes the proof of the theorem.

As an example of Theorem 2 let us consider the function $f(x) = \sin^3 x$. Using the notation of the proof of Theorem 2, the equation $f_1(x) = \sin x = 0$ has simple roots at the points $x = 0,\ \pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \ldots$ and

$$g(y) = \sin^{-1} y = y + \tfrac{1}{6}y^3 + \tfrac{3}{40}y^5 + \ldots .$$

$$|g'(y)| = (1-y^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{3}{8}y^4 + \ldots$$

on the open interval $(-1,1)$. Thus

$$\psi(y) = \Phi(\sin^{-1}y)(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}$$

and it can be shown that

$$\psi''(0) = \Phi(0) + \Phi''(0),$$

$$\psi^{(5)}(0) = 64\,\Phi'(0) + 20\,\Phi'''(0) + \Phi^{(5)}(0).$$

It follows from the proof of Theorem 2 that

$$(\delta(\sin^3 x),\ \Phi(x)) = \tfrac{1}{6}\psi''(0) = \tfrac{1}{6}\Phi(0) + \tfrac{1}{6}\Phi''(0),$$

$$\begin{aligned}(\delta'(\sin^3 x),\ \Phi(x)) &= -\tfrac{1}{360}\psi^{(5)}(0)\\ &= -\tfrac{8}{45}\Phi'(0) - \tfrac{1}{18}\Phi'''(0) - \tfrac{1}{360}\Phi^{(5)}(0)\end{aligned}$$

and so

$$\delta(\sin^3 x) = \tfrac{1}{6}\delta(x) + \tfrac{1}{6}\delta''(x),$$

$$\delta'(\sin^3 x) = \tfrac{8}{45}\,\delta'(x) + \tfrac{1}{18}\delta'''(x) + \tfrac{1}{360}\delta^{(5)}(x)$$

on the open interval $(-\pi,\pi)$.
Since δ is an even distribution and δ' is an odd distribution

$$\delta(-\sin^3 x) = \delta(\sin^3 x),$$

$$\delta'(-\sin^3 x) = -\,\delta'(\sin^3 x)$$

on the open interval $(-\pi,\pi)$ and it now follows by translation that

$$\delta(\sin^3 x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{6}\left[\delta(x-k\pi) + \delta''(x-k\pi)\right],$$

$$\delta'(\sin^3 x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{360}\left[64\delta'(x-k\pi) + 20\delta'''(x-k\pi) + \delta^{(5)}(x-k\pi)\right]$$

on the real line.

References

/1/ van der Corput, J. G.: Introduction to the neutrix calculus. J. Analyse Math. 7, 291 - 398 (1959)

/2/ Gelfand, I. M., and Shilov, G. E.: Generalized Functions, Vol. I. New York 1964

received: October 11, 1982

Author's address:
B. Fisher
Department of Mathematics, The University
Leicester
LE1 7RH, England

Rostock. Math. Kolloq. 23, 81 - 90 (1983) 46F10

Brian Fisher
Yukio Kuribayashi

Theorems on the non-commutative neutrix product of distributions

In the following we define the ordinary summable function x_+^λ for $\lambda > -1$ by

$$x_+^\lambda = \begin{cases} x^\lambda & \text{for } x > 0, \\ 0 & \text{for } x < 0 \end{cases}$$

and we define the ordinary summable function $\ln x_+$ by

$$\ln x_+ = \begin{cases} \ln x & \text{for } x > 0, \\ 0 & \text{for } x < 0. \end{cases}$$

We define the distribution x_+^{-1} by

$$x_+^{-1} = (\ln x_+)'$$

and we define the distribution x_+^λ for $\lambda < -1$ inductively by

$$x_+^\lambda = (\lambda+1)^{-1}(x_+^{\lambda+1})'.$$

The following definition for the product of two distributions was given in /2/.

<u>Definition 1:</u> Let f and g be distributions for which on the open interval (a,b), f is the r-th derivative of an ordinary summable function F in $L^p(a,b)$ and $g^{(r)}$ is an ordinary summable function in $L^q(a,b)$ with $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Then the product $fg = gf$ of f and g is defined on the open interval (a,b) by

$$fg = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} [Fg^{(i)}]^{(r-i)},$$

where $\binom{r}{i} = \frac{r!}{i!(r-i)!}$.

The next definition was given by van der Corput /1/.

Definition 2: A neutrix N is a commutative additive group of functions $\nu(\xi)$ defined on a domain N' with values in an additive group N", where further if for some ν in N, $\nu(\xi) = \gamma$ for all ξ in N', then $\gamma = 0$. The functions in N are called negligible functions. Now let N' be a set contained in a topological space with a limit point b which does not belong to N'. If $f(\xi)$ is a function defined on N' with values in N" and it is possible to find a constant β such that $f(\xi) - \beta$ is negligible in N, then β is called the neutrix limit of f as ξ tends to b and we write

$$\operatorname*{N-lim}_{\xi \to b} f(\xi) = \beta,$$

where the limit β must be unique if it exists.

Now let ρ be a fixed infinitely differentiable function having the properties

(i) $\rho(x) = 0$, for $|x| \geq 1$,

(ii) $\rho(x) \geq 0$,

(iii) $\rho(x) = \rho(-x)$,

(iv) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \rho(x)dx = 1.$

We define the function δ_n by $\delta_n(x) = n\rho(nx)$ for $n = 1,2,\ldots$. The sequence $\{\delta_n\}$ is regular and converges to the Dirac delta-distribution δ. For an arbitrary distribution g we define the function g_n by

$$g_n(x) = g * \delta_n = \int_{-1/n}^{1/n} g(x-t)\delta_n(t)dt$$

for $n = 1,2,\ldots$. The sequence $\{g_n\}$ is regular and converges to g.

The following definition for the product of two distributions extends definition 1 to a wider class of distributions and was given in /4/.

Definition 3: Let f and g be arbitrary distributions and let

$g_n = g * \delta_n$. We say that the neutrix product $f \circ g$ of f and g exists and is equal to h on the open interval (a,b) if

$$\underset{n\to\infty}{\text{N-lim}}\,(fg_n,\phi) = \underset{n\to\infty}{\text{N-lim}}\,(f,g_n\phi) = (h,\phi)$$

for all test functions ϕ with compact support contained in the interval (a,b), where h is independent of the choice of the function ϱ and N is the neutrix having domain $N' = \{1,2,\ldots,n,\ldots\}$ and range N" the real numbers with negligible functions linear sums of the functions $n^\lambda \ln^{r-1} n$, $\ln^r n$ for $\lambda > 0$ and $r = 1,2,\ldots$ and all functions of n which converge to zero as n tends to infinity.

The following theorem is an immediate consequence of theorems proved in /3/ and /4/.

<u>Theorem 1:</u> Let f and g be distributions. If the product fg exists on the open interval (a,b) then the neutrix products $f \circ g$ and $g \circ f$ exist and $f \circ g = g \circ f = fg$ on the interval (a,b).

This theorem shows that definition 3 is an extension of definition 1. We now prove the following theorem.

<u>Theorem 2:</u> Let f and g be distributions and suppose that the neutrix products $f \circ g$ and $f^{(r-i)} \circ g^{(i)}$ exist on the open interval (a,b) for $i = 1,\ldots,r$ (or $i = 0,1,\ldots,r-1$). Then the neutrix product $f^{(r)} \circ g$ (or $f \circ g^{(r)}$) exists and

$$(f \circ g)^{(r)} = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} f^{(r-i)} \circ g^{(i)} \tag{1}$$

on the interval (a,b).

<u>Proof:</u> Let ϕ be an arbitrary test function with compact support contained in the interval (a,b) and let $g_n = g * \delta_n$. Since g_n is an infinitely differentiable function the product fg_n exists and further

$$(fg_n)^{(r)} = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} f^{(r-i)} g_n^{(i)}.$$

It follows that

$$(f^{(r)}g_n,\phi) = ((fg_n)^{(r)},\phi) - \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r}{i}(f^{(r-i)}g_n^{(i)},\phi).$$

The existence of the neutrix products $f \circ g$ and $f^{(r-i)} \circ g^{(i)}$ for $i = 1,\ldots,r$ implies that the neutrix limit of the right-hand side of this equation exists and is equal to

$$((f \circ g)^{(r)},\phi) - \sum_{i=0}^{r-1}\binom{r}{i} (f^{(r-i)} \circ g^{(i)},\phi).$$

This must be equal to the neutrix limit of the left-hand side, proving the existence of the neutrix product $f^{(r)} \circ g$. Equation (1) follows.

That the neutrix product $f \circ g^{(r)}$ exists when the neutrix products $f \circ g$ and $f^{(r-i)} \circ g^{(i)}$ exist for $i = 0,1,\ldots,r-1$ follows similarly. This completes the proof of the theorem.

Theorem 3: Let f be a distribution and let $f_n = f * \delta_n$. If the neutrix limit of the sequence $\{f_n^{(r)}(0)\}$ exists and equals α_r for $r = 0,1,\ldots,s$ then the neutrix product $\delta^{(r)} \circ f$ exists and

$$\delta^{(r)} \circ f = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i}(-1)^{r-i}\alpha_{r-i}\delta^{(i)} \tag{2}$$

for $r = 0,1,\ldots,s$.

Proof: Let ϕ be an arbitrary test function with compact support. Then

$$(\delta^{(r)},f_n\phi) = (-1)^r \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i}f_n^{(r-i)}(0)\phi^{(i)}(0)$$

and it follows that

$$(\delta^{(r)} \circ f,\phi) = \underset{n\to\infty}{\text{N-lim}}\ (\delta^{(r)},f_n\phi) = (-1)^r \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i}\alpha_{r-i}\phi^{(i)}(0)$$

$$= \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i}(-1)^{r-i}\alpha_{r-i}(\delta^{(i)},\phi)$$

for $r = 0,1,\ldots,s$. Equation (2) now follows. This completes the proof of the theorem.

Corollary 3.1: Let f be a distribution and suppose that $f(x) = -f(-x)$ on an open interval $(-a,a)$. Then the neutrix product $\delta \circ f$ exists and $\delta \circ f = 0$.

The result of this corollary was given in /3/.

Corollary 3.2: The neutrix product $\delta^{(r)} \circ x_+^{\lambda}$ exists for all real λ and $r = 0,1,2,\ldots$. Further

$$\delta^{(r)} \circ x_+^{p} = \frac{(-1)^p r!}{2(r-p)!}\,\delta^{(r-p)} \tag{3}$$

for $p = 0,1,\ldots,r$ and $r = 0,1,2,\ldots$ and

$$\delta^{(r)} \circ x_+^{\lambda} = 0 \tag{4}$$

for $\lambda \neq 0,1,\ldots,r$ and $r = 0,1,2,\ldots$.

Proof: Put $x_+^{\lambda} = f(x,\lambda)$ and suppose first of all that $\lambda > -1$. Then

$$f_n(x,\lambda) = f(x,\lambda) * \delta_n = \int_{-1/n}^{x} (x-t)^{\lambda}\delta_n(t)\,dt$$

for $-1/n \leq x \leq 1/n$ and so

$$f_n^{(r)}(0,\lambda) = \int_{-1/n}^{0} (-t)^{\lambda}\delta_n^{(r)}(t)\,dt = (-1)^r n^{r-\lambda}\int_0^1 u^{\lambda}\rho^{(r)}(u)\,du$$

where the substitution $-nt = u$ has been made. It follows that

$$\underset{n\to\infty}{\text{N-lim}}\; f_n^{(r)}(0,r) = \tfrac{1}{2}r!$$

for $r = 0,1,2,\ldots$ and

$$\underset{n\to\infty}{\text{N-lim}}\; f_n^{(r)}(0,\lambda) = 0$$

for $\lambda > -1$, $\lambda \neq r$ and $r = 0,1,2,\ldots$.

Since $(x_+^{\lambda})' = \lambda x_+^{\lambda-1}$ it follows that

$$\underset{n\to\infty}{\text{N-lim}}\; f_n^{(r)}(0,\lambda) = 0$$

for all real $\lambda \neq r,-1,-2,\ldots$ and $r = 0,1,2,\ldots$.

Equation (3) now follows from the theorem for $p = 0,1,\ldots,r$ and $r = 0,1,2,\ldots$ and equation (4) also follows from the theorem for $\lambda \neq 0,1,\ldots,r,-1,-2,\ldots$ and $r = 0,1,2,\ldots$.

To deal with the cases $\lambda = -1,-2,\ldots$ we have

$$f_n(x,-1) = \int_{-1/n}^{x} \ln(x-t)\delta_n'(t)dt$$

for $-1/n \leq x \leq 1/n$ and so

$$f_n^{(r)}(0,-1) = \int_{-1/n}^{0} \ln(-t)\delta_n^{(r+1)}(t)dt$$

$$= (-1)^{r+1}n^{r+1} \int_{0}^{1} (\ln u - \ln n)\rho^{(r+1)}(u)du.$$

It follows that

$$\underset{n\to\infty}{\text{N-lim}}\, f_n^{(r)}(0,-1) = 0$$

for $r = 0,1,2,\ldots$.

Since $(x_+^{\lambda})' = \lambda x_+^{\lambda-1}$ it follows that

$$\underset{n\to\infty}{\text{N-lim}}\, f_n^{(r)}(0,\lambda) = 0$$

for $\lambda = -1,-2,\ldots$ and $r = 0,1,2,\ldots$. Equation (4) now follows from the theorem for $\lambda = -1,-2,\ldots$ and $r = 0,1,2,\ldots$.

Equation (3) was obtained in /3/ and equation (4) was obtained in /5/ for $\lambda \neq -1,-2,\ldots$.

<u>Corollary 3.3:</u> The neutrix product $\delta^{(r)} \circ \delta^{(p)}$ exists and

$$\delta^{(r)} \circ \delta^{(p)} = 0 \tag{5}$$

for $r,p = 0,1,2,\ldots$.

The result of this corollary was given in /4/.

<u>Theorem 4:</u> Let f be an ordinary summable function and let $f_n = f * \delta_n$. If the neutrix limit of the sequence $\{f_n^{(r)}(0)\}$ exists for $r = 0,1,\ldots,s$ then the neutrix product $x_+^p \circ f^{(q)}$ exists for $q = 0,1,\ldots,s+p+1$ and $p = 0,1,2,\ldots$.

Proof: Since f is an ordinary summable function, the existence of the neutrix product $x_+^p \circ f$ follows from definition 1 and theorem 1 for $p = 0,1,2,\ldots$. The neutrix product $\delta^{(r)} \circ f^{(i)}$ also exists by theorem 3 for $i = 0,1,\ldots,s-r$ and $r = 0,1,\ldots,s$. It now follows from theorem 2 that the neutrix product $H \circ f^{(q)}$, where $H = x_+^0$, exists and in fact

$$H \circ f^{(q)} = (H \circ f)^{(q)} - \sum_{i=0}^{q-1} \binom{q}{i} \delta^{(q-i-1)} \circ f^{(i)}$$

for $q = 1,\ldots,s+1$. The theorem is therefore true when $p = 0$. Now assume the theorem is true for some positive integer p. Then since the neutrix product $x_+^{p+1} \circ f$ exists, it again follows from theorem 2 that the neutrix product $x_+^{p+1} \circ f^{(q)}$ exists and

$$x_+^{p+1} \circ f^{(q)} = (x_+^{p+1} \circ f)^{(q)} - \sum_{i=0}^{q-1} \binom{q}{i} (x_+^{p+1})^{(q-i)} \circ f^{(i)}$$

for $q = 0,1,\ldots,s+p+2$. The theorem is therefore true for p+1 and the result follows by induction. This completes the proof of the theorem.

Corollary 4.1: The neutrix product $x_+^p \circ x_+^\lambda$ exists and

$$x_+^p \circ x_+^\lambda = x_+^{p+\lambda} \tag{6}$$

for $\lambda \neq -1,-2,\ldots$ and $p = 0,1,2,\ldots$.

Proof: The neutrix product $x_+^p \circ x_+^\lambda$ exists by the theorem for all real $\lambda \neq -1,-2,\ldots$ and $p = 0,1,2,\ldots$.

It follows from definition 1 and theorem 1 that equation (6) holds when $\lambda > -1$ and $p = 0,1,2,\ldots$. Let us therefore assume that equation (6) holds when $-s < \lambda < -s+1$. This is certainly true when $s = 1$. Then from theorem 2 we have

$$px_+^{p-1} \circ x_+^\lambda + \lambda x_+^p \circ x_+^{\lambda-1} = (p+\lambda)x_+^{p+\lambda-1}$$

for $p = 1,2,\ldots$. It follows from our assumption that

$$x_+^{p} \circ x_+^{\lambda-1} = x_+^{p+\lambda-1} \tag{7}$$

for $p = 1,2,\ldots$, where $-s-1 < \lambda-1 < -s$. To deal with the case $p = 0$ we have

$$H \circ x_+^{\lambda} = x_+^{\lambda}$$

and it follows from theorem 2 that

$$\delta \circ x_+^{\lambda} + \lambda H \circ x_+^{\lambda-1} = \lambda x_+^{\lambda-1}.$$

Since $\delta \circ x_+^{\lambda} = 0$ by corollary 3.2 we see that

$$H \circ x_+^{\lambda-1} = x_+^{\lambda-1}$$

and so equation (7) holds for $p = 0,1,2,\ldots$. Equation (6) now follows by induction for $\lambda \neq -1,-2,\ldots$ and $p = 0,1,2,\ldots$.

Now let us see what happens in this corollary when $\lambda = -1,-2,\ldots$. Putting $f(x) = \ln x_+$ and

$$f_n(x) = f * \delta_n = \int_{-1/n}^{x} f(x-t)\, \delta_n(t)dt,$$

for $-1/n \leq x \leq 1/n$, we have

$$f_n(0) = \int_{-1/n}^{0} \ln(-t)\, \delta_n(t)dt = \int_{0}^{1} (\ln u - \ln n)\varrho(u)du.$$

It follows that

$$\underset{n\to\infty}{\text{N-lim}}\, f_n(0) = \int_0^1 \ln u\, \varrho(u)du = c(\varrho), \text{ where}$$

$$c(\varrho) = \int_0^1 \ln u\, \varrho(u)du$$

depends on the choice of the function ϱ.

Theorem 3 tells us that

$$\underset{n\to\infty}{\text{N-lim}}\, \delta^{(r)} f_n(x) = c(\varrho)\delta^{(r)}$$

and for convenience we write

$$\delta^{(r)} \circ \ln x_+ = c(\rho)\delta^{(r)}$$

for $r = 0,1,2,\ldots$ although strictly speaking this neutrix product does not exist by definition 3, since the product is dependent on ρ.

Since $H \circ \ln x_+ = \ln x_+$ it follows from theorem 2 that

$$H \circ x_+^{-1} = x_+^{-1} - \delta \circ \ln x_+ = x_+^{-1} - c(\rho)\delta \tag{9}$$

where once again $H \circ x_+^{-1}$ depends on ρ.

Further, we notice that the product $x_+^p \circ \ln x_+$ exists and is equal to the ordinary summable function $x_+^p \ln x_+$ for $p = 0,1,2,\ldots$. Differentiating we get

$$x_+^p \circ x_+^{-1} + p x_+^{p-1} \circ \ln x_+ = x_+^{p-1} + p x_+^{p-1} \ln x_+$$

or

$$x_+^p \circ x_+^{-1} = x_+^{p-1}$$

for $p = 1,2,\ldots$. Differentiating again we have

$$-x_+^p \circ x_+^{-2} + p x_+^{p-1} \circ x_+^{-1} = (p-1)x_+^{p-2}$$

or from what we have just proved

$$x_+^p \circ x_+^{-2} = x_+^{p-2}$$

for $p = 2,3,\ldots$ and so on. The more general result

$$x_+^p \circ x_+^{-r} = x_+^{p-r}$$

for $p = r, r+1,\ldots$ follows by induction. The particular case $p = r$ gives us

$$x_+^p \circ x_+^{-p} = H \text{ and so}$$

$$p x_+^{p-1} \circ x_+^{-p} - p x_+^p \circ x_+^{-p-1} = \delta$$

for $p = 1,2,\ldots$. Using equation (9) it follows by induction that

$$x_+^p \circ x_+^{-p-1} = x_+^{-1} - \left[c(\rho) + \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{i}\right]\delta$$

for $p = 1,2,\ldots,$ the product again being dependent on ρ.

Corollary 4.2: The neutrix product $x_+^p \cdot \delta^{(r)}$ exists and

$$x_+^p \cdot \delta^{(r)} = \frac{(-1)^p r!}{2(r-p)!}\,\delta^{(r-p)} \tag{10}$$

for $p = 0,1,\ldots,r$ and $r = 0,1,2,\ldots$ and

$$x_+^p \cdot \delta^{(r)} = 0$$

for $p = r+1,\ r+2,\ldots$ and $r = 0,1,2,\ldots$.

The existence of the neutrix product $x_+^p \cdot \delta^{(r)}$ follows from the theorem immediately. Equation (10) was proved in /4/ and for $p > r$, the product of x_+^p and $\delta^{(r)}$ exists and equals zero by definition 1.

References

/1/ Van der Corput, J. G.: Introduction to the neutrix calculus. J. Analyse Math. 7, 291 - 398 (1959 - 60)

/2/ Fisher, B.: The product of distributions. Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 22, 291 - 298 (1971)

/3/ Fisher, B.: On defining the product of distributions. Math. Nachr. 99, 239 - 249 (1980)

/4/ Fisher, B.: A non-commutative neutrix product of distributions. Math. Nachr. 108, 117 - 127 (1982)

received: October 29, 1982
revised: March 28, 1983

Author's address:

B. Fisher
Department of Mathematics
The University
Leicester, England
LE1 7RH

Y. Kuribayashi
Department of Mathematics
The University
Leicester, England
LE1 7RH

(Permanent address)
Faculty of Education
Tottori University
101 Koyama-cho-Minami 4-chome
Tottori 680, Japan

Rostock. Math. Kolloq. 23, 91 - 95 (1983) 65D32

Helmut Thielcke

Eine Anwendung des Gaußschen Integralsatzes in der Ebene und im Raum zur Berechnung von Momenten bis zur zweiten Ordnung

Der Gaußsche Integralsatz erweist sich bei der Berechnung von Inhalt und Momenten (näherungsweise) geradlinig bzw. ebenflächig begrenzter Gebilde des 2- bzw. 3-dimensionalen Raumes als nützliches Hilfsmittel.
Die Berechnung entsprechend komplizierter Objekte läßt sich rechentechnisch auf die Betrachtung von Grundelementen zurückführen, in der Ebene dient dazu das Dreieck, im Raum das Tetraeder mit konstanter Dichtefunktion.
Wir betrachten zunächst den 2-dimensionalen Fall. Die im folgenden gewonnenen Ergebnisse werden abschließend teilweise in rechentechnisch aufbereiteter Form dargestellt, geeignet auch für Tisch- und Taschenrechneranwendungen.
Als Ausgangspunkt der Dreiecksberechnungen dient der Gaußsche Integralsatz der Ebene, der hier wie folgt notiert wird:

$$\iint\limits_{(B)} (a_x+b_y)\, dB = \int\limits_{u_0}^{u_1} \det \begin{pmatrix} a & b \\ x_u & y_u \end{pmatrix} du. \tag{1}$$

Dabei beschreiben $x = x(u)$, $y = y(u)$ den Rand des Bereichs B.
Ferner betrachten wir das Dreieck mit den Randlinien

$$\begin{aligned} x(u) &= x_0 + u(x_1-x_0), \\ y(u) &= y_0 + u(y_1-y_0), \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} x(u) &= x_1 + u(x_2-x_1), \\ y(u) &= y_1 + u(y_2-y_1), \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} x(u) &= x_2 + u(x_0-x_2), \\ y(u) &= y_2 + u(y_0-y_2), \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$0 \leq u \leq 1. \tag{2.4}$$

Zur Berechnung der Dreieckfläche F wählen wir in (1) $a = x$, $b = y$ und erhalten, wenn wir in jeder Determinante des u-fache der letzten Zeile von der ersten Zeile abziehen,

$$2F = \det\begin{pmatrix} x_o & y_o \\ x_1-x_o & y_1-y_o \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ x_o-x_2 & y_o-y_2 \end{pmatrix}$$

und nach einfachen Umformungen die Jacobi-Determinante

$$2F = \det\begin{pmatrix} x_1-x_o & y_1-y_o \\ x_2-x_o & y_2-y_o \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Wählt man dagegen $a = x^2$ und $b = xy$, so kann man das Moment Mx berechnen:

$$3\ Mx = (x_o+x_1+x_2)F. \qquad (4)$$

Entsprechend ergibt sich

$$3\ My = (y_o+y_1+y_2)F. \qquad (5)$$

Analog finden wir die Momente Mxx, Mxy und Myy, womit die interessierenden Größen vieler Anwendungsfälle gegeben sind.
Für $a = x^3$, $b = x^2y$ entsteht

$$4\ Mxx = ((x_o+x_1+x_2)^2+x_o^2+x_1^2+x_2^2)F/3, \qquad (6)$$

für $a = x^2y$, $b = xy^2$ entsteht

$$4\ Mxy = ((x_o+x_1+x_2)(y_o+y_1+y_2)+x_oy_o+x_1y_1+x_2y_2)F/3 \qquad (7)$$

und für $a = xy^2$, $b = y^3$ schließlich

$$4\ Myy = ((y_o+y_1+y_2)^2+y_o^2+y_1^2+y_2^2)F/3. \qquad (8)$$

Noch deutlicher treten die Vorzüge der Determinantenschreibweise bei den entsprechenden Berechnungen für ein Tetraeder hervor. Mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes für den Raum erhält man unter Berücksichtigung einer Parameterdarstellung der begrenzenden Oberfläche

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v) \qquad (9)$$

die Beziehung

$$\iiint_{(V)} (a_x+b_y+c_z)\ dV = \int_{u_o}^{u_1}\int_{v_o(u)}^{v_1(u)} \det\begin{pmatrix} a & b & c \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} dv\ du. \qquad (10)$$

Eine weitere Verallgemeinerung von (1) bzw. (10) wird in /1/ vorgenommen, soll hier aber nicht betrachtet werden.
Wir untersuchen nun das Tetraeder mit den Randflächen

$$\begin{aligned} x(u,v) &= x_o + u(x_2-x_o) + v(x_1-x_o), \\ y(u,v) &= y_o + u(y_2-y_o) + v(y_1-y_o), \\ z(u,v) &= z_o + u(z_2-z_o) + v(z_1-z_o), \end{aligned} \tag{11.1}$$

$$\begin{aligned} x(u,v) &= x_o + u(x_3-x_o) + v(x_2-x_o), \\ y(u,v) &= y_o + u(y_3-y_o) + v(y_2-y_o), \\ z(u,v) &= z_o + u(z_3-z_o) + v(z_2-z_o), \end{aligned} \tag{11.2}$$

$$\begin{aligned} x(u,v) &= x_o + u(x_1-x_o) + v(x_3-x_o), \\ y(u,v) &= y_o + u(y_1-y_o) + v(y_3-y_o), \\ z(u,v) &= z_o + u(z_1-z_o) + v(z_3-z_o), \end{aligned} \tag{11.3}$$

$$\begin{aligned} x(u,v) &= x_1 + u(x_2-x_1) + v(x_3-x_1), \\ y(u,v) &= y_1 + u(y_2-y_1) + v(y_3-y_1), \\ z(u,v) &= z_1 + u(z_2-z_1) + v(z_3-z_1). \end{aligned} \tag{11.4}$$

$$0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1 - u. \tag{11.5}$$

Zur Berechnung des Volumens wählen wir z. B. $a = x$, $b = y$, $c = z$ und setzen (11.1) bis (11.4) in (10) ein, wobei die Integrationsgrenzen sich aus (11.5) ergeben. Es entsteht die Beziehung

$$3\ V = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} x_1-x_o, & y_1-y_o, & z_1-z_o \\ x_2-x_o, & y_2-y_o, & z_2-z_o \\ x_3-x_o, & y_3-y_o, & z_3-z_o \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Für $a = x^2$, $b = xy$, $c = xz$ ergibt sich

$$4\ Mx = (x_o+x_1+x_2+x_3)V. \tag{13}$$

Entsprechend gewinnt man

$$4\ My = (y_o+y_1+y_2+y_3)V \tag{14}$$

sowie

$$4\ Mz = (z_o+z_1+z_2+z_3)V. \tag{15}$$

Die Resultate (13) bis (15) beinhalten den bekannten Sachverhalt, daß der Schwerpunkt eines mit konstanter Dichte gegebenen Tetraeders mit dem Schwerpunkt seiner Eckpunkte übereinstimmt, was in /1/ auch allgemein für ein (n+1)-Eck im n-dimensionalen Raum bestätigt wird. Um die Momente Mxx, Mxy zu berechnen, wählen wir $a = x^3$, $b = x^2y$, $c = x^2z$ im ersten bzw. $a = x^2y$, $b = xy^2$, $c = xyz$ im zweiten Fall. Wir erhalten

$$5\ Mxx = \frac{1}{4}\left((x_o+x_1+x_2+x_3)^2+x_o^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)V, \tag{16}$$

$$5\ Mxy = \frac{1}{4}\left((x_o+x_1+x_2+x_3)(y_o+y_1+y_2+y_3) + x_oy_o+x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3\right)V. \tag{17}$$

Dies läßt sich entsprechend fortsetzen. Während die rechentechnische Auswertung der Ergebnisse (12) bis (17) zur Untersuchung von Körpern konstanter Dichte zusätzliche Informationen über die Reihenfolge der Zusammenstellung von Punkten zu Tetraedern erfordert, um den zu untersuchenden Körper in seinem Aufbau zu charakterisieren, kann im zweidimensionalen Fall vereinfachend eine gegebene Eckpunktreihenfolge gemäß Abspeicherung der Koordinaten in entsprechenden Feldern unmittelbar ausgewertet werden, wie das die folgende FORTRAN-Notation zeigt:

```
  SUBROUTINE FMXY (N,X,Y,M,F,MX,MY,MXX,MXY,MYY)
  REAL M,MX,MY,MXX,MXY,MYY,X(N),Y(N)
  XO = X(1)
  YO = Y(1)
  X1 = X(2)
  Y1 = Y(2)
  DO 1 I = 3,N
  X2 = X(I)
  Y2 = Y(I)
  DF = ((X1 - XO) * (Y2 - YO) - (X2 - XO) * (Y1 - YO)) * M / 2.
  F = F + DF
  DF = DF / 3.
  XS = XO + X1 + X2
  YS = YO + Y1 + Y2
  MX = MX + XS * DF
  MY = MY + YS * DF
  DF = DF / 4.
  MXX = MXX + (XS * XS +XO * XO + X1 * X1 + X2 * X2) * DF
  MXY = MXY + (XS * YS +XO * YO + X1 * Y1 + X2 * Y2) * DF
  MYY = MYY + (YS * YS +YO * YO + Y1 * Y1 + Y2 * Y2) * DF
  X1 = X2
1 Y1 = Y2
  RETURN
  END
```

Literatur

/1/ Thielcke, H.: Eine Anwendung des Gaußschen Integralsatzes auf Inhalts- und Momentenberechnungen des (n+1)-Ecks im n-dimensionalen Raum.
Z. Angew. Math. Mech., Kleine Mitteilungen, in Vorbereitung

eingereicht: 01. 03. 1983

Anschrift des Verfassers:

Dr. H. Thielcke
Dr. Johannes-Dieckmann-Str. 1
DDR-2520 Rostock

Rostock. Math. Kolloq. 23, 97 - 106 (1983) 94B35
94B60

Bernd Klipps

Darstellung und Dekodierung von Vasil'ev-Codes

Die perfekten Codes beanspruchten auf Grund ihrer optimalen Eigenschaften stets das Interesse der Kodierungstheorie. Bezüglich ihrer Existenz konnte Tietäväinen 1973 nachweisen (/5/), daß es über Alphabeten mit Primzahlpotenzmächtigkeit außer trivialen perfekten Codes nur Einzelfehler korrigierende Codes und die Golay-Codes (/1/) gibt. Die Golay-Codes sind eindeutig bestimmt. Die Klassifizierung der perfekten Einzelfehler korrigierenden Codes ist ein offenes Problem (/4/, Problem 6.6).
Im binären Fall sind folgende perfekte Einzelfehler korrigierende Codes (kurz BPE-Codes) bekannt:

- lineare Hamming-Codes (/2/),
- nichtlineare Codes von Vasil'ev (/6/) und Hergert (/3/).

Durch induktive Anwendung der Vasil'evschen Methode erhalten wir ausgehend vom trivialen BPE-Code $\{(0)\}$ eine Klasse von BPE-Codes, deren Elemente wir als Vasil'ev-Codes bezeichnen.
Im Hinblick auf ihre Klassifizierung wird in dieser Arbeit eine einfache Darstellung der Vasil'ev-Codes mit Hilfe der Kontrollmatrix des linearen Hamming-Codes abgeleitet. Dazu stellen wir im ersten Abschnitt die notwendigen Definitionen zur Verfügung und leiten im zweiten Abschnitt die Darstellung ab. Als unmittelbare Folgerung erhalten wir einen Algorithmus zur Dekodierung der Vasil'ev-Codes, den wir im Abschnitt 3 vorstellen.

1. Definitionen und Bezeichnungen

Mit E_2^n bezeichnen wir den n-dimensionalen Vektorraum über $E_2 = \{0,1\}$. Eine Teilmenge des E_2^n wird als Code der Länge n, ein Teilraum als linearer Code bezeichnet. Ist C ein linearer Code, so wird eine Matrix H, deren Zeilenvektoren eine Basis des zu C orthogonalen Teilraums bilden, als Kontrollmatrix bezeichnet.

Es gilt

$$c \in C \Longleftrightarrow H \cdot c^T = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

$C \subseteq E_2^n$ heißt <u>binärer perfekter Einzelfehler korrigierender Code (BPE-Code)</u>, wenn es für jedes $a \in E_2^n$ genau ein Codewort $c \in C$ gibt, so daß $d(a,c) \leq 1$ ist. Dabei ist die Hammingdistanz $d(a,c)$ definiert als die Anzahl der Komponenten, in denen sich a und c unterscheiden.

In der Arbeit benutzen und untersuchen wir die folgenden beiden BPE-Codes.

Der <u>Hamming-Code</u> HC_r ist ein linearer Code der Länge $2^r - 1$, dessen Kontrollmatrix alle vom Nullvektor verschiedenen binären Vektoren der Länge r genau einmal als Spalte enthält (/4/). Wir wählen als Kontrollmatrix H_r speziell diejenige, in der die Spalte i die Dualdarstellung der Zahl i repräsentiert, d. h.

$$H_r := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & . & . & . & 1 \\ 0 & 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Die Vasil'ev-Codes definieren wir über den

<u>Satz (Vasil'ev /6/):</u> Ist C_r ein BPE-Code der Länge $2^r - 1$, der das Nullwort $\underline{0} = (0...0)$ enthält und $\lambda : C_r \longrightarrow E_2$ eine Abbildung mit $\lambda(\underline{0}) = 0$, so erhält man mit

$$C_r^\lambda := \{(c+a, \lambda(c) + /a/, a) \ : \ c \in C_r,\ a \in E_2^{2^r-1}\} \tag{3}$$

einen BPE-Code der Länge $2^{r+1}-1$, der das Nullwort enthält. (Dabei bezeichne $/a/$ die Summe der Komponenten von a modulo 2.)

Als <u>Vasil'ev-Code $V(\lambda^1, \ldots, \lambda^r)$</u> bezeichnen wir folgenden induktiv definierten Code:

$$V(\lambda^1) := \{(0)\}^{\lambda^1} = \{(000), (111)\},$$

$$V(\lambda^1, \ldots, \lambda^i) := V(\lambda^1, \ldots, \lambda^{i-1})^{\lambda^i} \quad (2 \leq i \leq r),$$

wobei λ^1 eine Abbildung von $\{(0)\}$ in E_2 mit $\lambda^1((0)) = 0$ und λ^i eine Abbildung von $V(\lambda^1, \ldots, \lambda^{i-1})$ in E_2 mit $\lambda^i(\underline{0}) = 0$ ist.

Da $\{(0)\}$ ein BPE-Code ist, erhalten wir mit $V(\lambda^1,\dots,\lambda^r)$ einen BPE-Code der Länge $2^{r+1}-1$.
Schließlich führen wir den Begriff des systematischen Codes ein, und zwar heiße $C \subseteq E_2^n$ ein systematischer (n,k)-Code, wenn es k verschiedene Indizes $i_1,\dots,i_k$ gibt, so daß

$$|C| = \left|\{(c_{i_1},\dots,c_{i_k}) : (\dots,c_{i_1},\dots,c_{i_k},\dots) \in C\}\right| = 2^k$$

ist. Man prüft leicht nach, daß $V(\lambda^1,\dots,\lambda^r)$ ein systematischer $(2^{r+1}-1,2^{r+1}-1-(r+1))$-Code in den Indizes $3,5,6,7,\dots,2^r+1,\dots,2^{r+1}-1$ ist.

2. Darstellung der Vasil'ev-Codes

Bevor wir unser Resultat in einem Satz formulieren, werden wir den Vasil'ev-Code $V(\lambda^1,\dots,\lambda^r)$ unter Ausnutzung seiner induktiven Konstruktion und der erwähnten Systematik in geschlossener Form angeben. Dazu stellen wir jeder Abbildung λ^i eine Boolesche Funktion $\overline{\lambda}^i$ gegenüber. Dies liefert uns gleichzeitig die Möglichkeit einer sehr einfachen Darstellung der Resultate.

Für $v = (v_1,\dots,v_{2^{r+1}-1}) \in E_2^{2^{r+1}-1}$ definieren wir zunächst induktiv:

$$\left.\begin{aligned} v_t^r &:= v_{2^r+t} && (1 \le t \le 2^r-1), \\ v_t^s &:= v_{2^s+t} + \sum_{k=s+1}^{r} v^k_{2^s+t} && (0 < s < r,\ 1 \le t \le 2^s-1) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

sowie

$$v^0 := (0),\ v^s := (v_1^s,\dots,v^s_{2^s-1},\dots,v_1^2,v_2^2,v_3^2,v_1^1)\ (1 \le s \le r). \tag{5}$$

Nun gilt:
1. $(v_3,v_5,v_6,v_7,\dots,v_{2^r+1},\dots,v_{2^{r+1}-1})$ bestimmt eineindeutig v^r über (4). Demzufolge ist

$$\left|\{v^r : v \in V(\lambda^1,\dots,\lambda^r)\}\right| = \left|V(\lambda^1,\dots,\lambda^r)\right| = 2^{2^{r+1}-r-2}. \tag{6}$$

Für jedes $a \in E_2^{2^{r+1}-r-2}$ existiert folglich genau ein Codewort

$v \in V(\lambda^1,\dots,\lambda^r)$ mit $v^r = a$. Dieses Codewort sei $c(a)$. Mittels der Abbildung $\lambda^{r+1} : V(\lambda^1,\dots,\lambda^r) \to E_2$ definieren wir nun die Boolesche Funktion $\bar{\lambda}^{r+1}$:

$$\bar{\lambda}^{r+1}: E_2^{2^{r+1}-r-2} \to E_2, \quad \bar{\lambda}^{r+1}(a) := \lambda^{r+1}(c(a)). \tag{7}$$

Umgekehrt gilt für $v \in V(\lambda^1,\dots,\lambda^r)$

$$\lambda^{r+1}(v) = \bar{\lambda}^{r+1}(v^r). \tag{8}$$

Über (7) bzw. (8) können wir jeder Abbildung λ^i eine Boolesche Funktion in 2^i-i-1 Variablen gegenüberstellen und damit jeden Code $V(\lambda^1,\dots,\lambda^r)$ über ein r-Tupel Boolescher Funktionen

$$\bar{\lambda}^i : E_2^{2^i-i-1} \to E_2, \quad \bar{\lambda}^i(\underline{0}) = 0 \quad (1 \le i \le r)$$

definieren. Wir werden im folgenden diesen Code mit $V(\bar{\lambda}^1,\dots,\bar{\lambda}^r)$ bezeichnen.

2. Ist $v = (v'+a,b,a)$ mit $b \in E_2$ und $v',a \in E_2^{2^r-1}$, so gilt

$$v'^{\,r-1}_t = v'_{2^{r-1}+t} = v_{2^{r-1}+t} + a_{2^{r-1}+t} = v_{2^{r-1}+t} + v^r_{2^{r-1}+t} = v^{r-1}_t.$$

Mittels Induktion über s $(s+1 \to s)$ folgt:

$$v'^{\,s}_t = v'_{2^s+t} + \sum_{k=s+1}^{r-1} v'^{\,k}_{2^s+t} = v_{2^s+t} + \sum_{k=s+1}^{r} v^k_{2^s+t} = v^s_t.$$

Damit erhalten wir

$$v'^{\,s}_t = v^s_t \quad (1 \le s < r,\ 1 \le t \le 2^s-1). \tag{9}$$

Lemma: Es gilt genau dann $v = (v_1,\dots,v_{2^{r+1}-1}) \in V(\bar{\lambda}^1,\dots,\bar{\lambda}^r)$, wenn

$$v_{2^s+t} = v^s_t + \sum_{k=s+1}^{r} v^k_{2^s+t} \qquad (1 \le s \le r,\ 1 \le t \le 2^s-1), \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} v_{2^s} &= \bar{\lambda}^s(v^{s-1}) + \sum_{t=1}^{2^s-1} v^s_t + \sum_{k=s+1}^{r} v^k_{2^s} \qquad (1 \le s \le r), \\ v_1 &= \sum_{k=1}^{r} v^k_1 \text{ gilt.} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Beweis: Da sich nach (10) und (11) genau $|V(\overline{\lambda}^1,\dots,\overline{\lambda}^r)|$ Vektoren darstellen lassen, genügt es, (10) und (11) für ein Codewort nachzuweisen. Das geschieht durch Induktion über r.

Für $v \in V(\overline{\lambda}^1) = \{(000),(111)\}$ gelten (10) und (11).

Für $v \in V(\overline{\lambda}^1,\dots,\overline{\lambda}^r)$ folgt (10) sofort aus (4). Weiter ist

$$v = (v'+(v_1^r,\dots,v_{2^r-1}^r),\ \overline{\lambda}^r(v'^{\,r-1}) + \sum_{t=1}^{2^r-1} v_t^r, v_1^r,\dots,v_{2^r-1}^r)$$

mit $v' \in V(\overline{\lambda}^1,\dots,\overline{\lambda}^{r-1})$. Wenden wir auf v' die Induktionsvoraussetzung an und beachten $v'^{\,s} = v^s$ (wegen (9)), so folgt (11) aus

$$v_{2^s} = v'_{2^s} + v_{2^s}^r \ (0 \leq s \leq r-1),\ v_{2^r} = \overline{\lambda}^r(v^{r-1}) + \sum_{t=1}^{2^r-1} v_t^r.$$

<u>Satz:</u> Für den Vasil'ev-Code $V(\overline{\lambda}^1,\dots,\overline{\lambda}^r)$ gilt

$$v \in V(\overline{\lambda}^1,\dots,\overline{\lambda}^r) \Leftrightarrow H_{r+1}\cdot v^T = \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{\lambda}^1(v^0) \\ \vdots \\ \overline{\lambda}^r(v^{r-1}) \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Dabei sind $\overline{\lambda}^i : E_2^{2^i-i-1} \to E_2$ Boolesche Funktionen mit $\overline{\lambda}^i(\underline{0}) = 0$ $(1 \leq i \leq r)$. H_{r+1} bezeichnet die Kontrollmatrix (2) des linearen Hamming-Codes HC_{r+1}.

Es sei bemerkt, daß sich in diese Darstellung auch der lineare Hamming-Code einordnen läßt. Wegen (1) und (2) ist $HC_{r+1} = V(\overline{\lambda}^1,\dots,\overline{\lambda}^r)$ mit $\overline{\lambda}^i(a) = 0$ für jedes a aus $E_2^{2^i-i-1}$ $(1 \leq i \leq r)$.

<u>Beweis des Satzes:</u>

I. Für $0 \leq s \leq r$, $0 \leq t \leq 2^s-1$ sei

$$I_t^s := \{j \in \{1,\dots,2^{r+1}-1\} : j \equiv 2^s+t \pmod{2^{s+1}}\},\ I^s := \bigcup_{t=0}^{2^s-1} I_t^s.$$

Für diese Indexmengen sind folgende Beziehungen erfüllt:

$|I_t^s| = 2^{r-s}$, $0 \leq t_1 < t_2 \leq 2^s-1 \rightarrow I_{t_1}^s \cap I_{t_2}^s = \emptyset$, $|I^s| = 2^r$.

Ist h^s die (s+1)-te Zeile von H_{r+1}, so gilt für $v \in E^{2^{r+1}-1}$ stets $\sum_{j\in I^s} v_j = h^s \cdot v^T$. Wir haben also nur diese Komponentensumme zu berechnen, um $H_{r+1} \cdot v^T$ zu bestimmen.

Sei $v \in V(\overline{\lambda}^1, \dots, \overline{\lambda}^r)$ nach (10) und (11) dargestellt. Wir untersuchen zunächst, welchen Beitrag $v_{t'}^{s'}$ $(0<s' \leq r,\ 0<t'<2^{s'})$ zur Summe der v_j mit $j \in I_t^s$ liefert. Da $v_{t'}^{s'}$ nur in den Komponenten t', $2^{s'}+t'$, $2^{s'}$ von v auftritt, folgt:

Für $s' < s$: $v_{t'}^{s'}$ tritt nur in den ersten $2^s+t' \leq 2^s-1$ Komponenten von v auf, liefert also keinen Beitrag zur Summe.

Für $s' = s$: Ist $t = 0$, so liefert jedes $v_{t'}^s$ sowie $\overline{\lambda}^s(v^{s-1})$ einen Beitrag, ist $t \neq 0$, so liefert genau das $v_{t'}^s$ mit $t' = t$ einen Beitrag.

Für $s' > s$: Zunächst ist $2^{s'} \notin I_t^s$. Wegen $2^{s'} \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2^{s+1})$ gilt $t' \equiv 2^s+t\ (\mathrm{mod}\ 2^{s+1}) \Leftrightarrow 2^{s'}+t' \equiv 2^s+t\ (\mathrm{mod}\ 2^{s+1})$, d. h., $v_{t'}^{s'}$ liefert zweimal einen Beitrag oder keinen Beitrag.

Wir erhalten

$$\sum_{j\in I_t^s} v_j = \begin{cases} 0 & (s=0,\ t=0), \\ v_t^s & (1 \leq s \leq r,\ 1 \leq t \leq 2^s-1), \\ \overline{\lambda}^s(v^{s-1}) + \sum_{t'=1}^{2^s-1} v_{t'}^s & (1 \leq s \leq r,\ t=0) \end{cases}$$

sowie

$$\sum_{j\in I^s} v_j = \sum_{t=0}^{2^s-1} \sum_{j\in I_t^s} v_j = \begin{cases} 0 & (s=0), \\ \overline{\lambda}^s(v^{s-1}) & (1 \leq s \leq r) \end{cases}$$

und damit die geforderte Bedingung.

II. Die Umkehrung erfolgt mittels Induktion über r.

Für $r = 1$ liefert $H_2 \cdot v^T = \binom{0}{0}$ die Bedingungen $v_1+v_3 = v_2+v_3 = 0$. Es folgt $v \in \{(000), (111)\} = V(\overline{\lambda}^1)$.

Sei $v = (v'+a,b,a) \in E_2^{2^{r+1}-1}$ mit $v', a \in E_2^{2^{r-1}}$, $b \in E_2$ sowie

$H_{r+1} \cdot v^T = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \overline{\lambda}^r(v^{r-1}) \end{pmatrix}$. Hieraus erhalten wir

$\overline{\lambda}^r(v^{r-1}) = h_{r+1} \cdot v^T = b + /a/$, d. h. $b = \overline{\lambda}^r(v^{r-1}) + /a/$, sowie

$$H_r \cdot v'^T = \left(H_r \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} H_r\right) \cdot v^T = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \overline{\lambda}^{r-1}(v^{r-2}) \end{pmatrix}.$$

Wegen (9) gilt $v'^s = v^s$ für $0 \leq s \leq r-1$. Wir können auf v' die Induktionsvoraussetzung anwenden und erhalten

$v' \in V(\overline{\lambda}^1, \ldots, \overline{\lambda}^{r-1})$. Damit wird aber

$v = (v'+a, \overline{\lambda}^r(v'^{r-1})+/a/, a) \in V(\overline{\lambda}^1, \ldots, \overline{\lambda}^r)$, und auch die Rückrichtung ist bewiesen.

3. Dekodierung der Vasil'ev-Codes

Aus dem soeben bewiesenen Satz ergibt sich eine sehr einfache Möglichkeit der Dekodierung der Vasil'ev-Codes. Da $V(\overline{\lambda}^1, \ldots, \overline{\lambda}^r)$ ein BPE-Code ist, haben wir folgendes Dekodierungsproblem zu lösen:

Man bestimme für beliebiges $a \in E_2^{2^{r+1}-1}$ dasjenige Codewort $v \in V(\overline{\lambda}^1, \ldots, \overline{\lambda}^r)$, für das $d(a,v) \leq 1$ ist.

Dazu sei

$$H_{r+1} \cdot a^T = \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_r \end{pmatrix} \tag{13}$$

sowie $v \in V(\overline{\lambda}^1, \ldots, \overline{\lambda}^r)$ das Codewort mit $d(a,v) = 1$, $e = a+v$ der Fehlervektor. Der Fehler liege in der Kompomemte f vor, tritt kein Fehler auf, so sei $f = 0$. Es gilt

$$H_{r+1} \cdot e^T = \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_r \end{pmatrix}, \quad f = \sum_{i=0}^{r} f_i \cdot 2^i$$

sowie nach dem von uns bewiesenen Darstellungssatz

$$H_{r+1}\cdot e^T = H_{r+1}\cdot a^T + H_{r+1}\cdot v^T = \begin{pmatrix} c_o \\ \vdots \\ c_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \overline{\lambda}^r(v^{r-1}) \end{pmatrix}.$$

Nun läßt sich f aus

$$\begin{pmatrix} f_o \\ \vdots \\ f_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_o \\ \vdots \\ c_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \overline{\lambda}^r(v^{r-1}) \end{pmatrix} \tag{14}$$

berechnen. Dabei ist zunächst v unbekannt. Aus (14) folgt sofort

$$\left.\begin{aligned} & f_o = c_o, \\ & f_1 = \overline{\lambda}^1(v^0) + c_1 = c_1 \text{ wegen } v^0 = (0). \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Für $1 \leq s \leq r$ seien $f_o,\ldots,f_s$ sowie v^{s-1} bekannt. Wir erhalten v^s wie folgt: Für $1 \leq t \leq 2^s-1$ ist

$$a_t^s = \sum a_j = \sum v_j + e_j = v_t^s + \sum e_j;$$

dabei summieren wir über $j \in I_t^s$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} v_t^s = a_t^s + 1 &\Leftrightarrow f \in I_t^s \Leftrightarrow f \equiv 2^s + t \pmod{2^{s+1}} \\ &\Leftrightarrow f_s = 1 \wedge f_o + 2f_1 + \ldots + 2^{s-1}f_{s-1} = t, \end{aligned}$$

d. h.

$$v_t^s = a_t^s + f_s \cdot \delta_{t,f_o+\ldots+2^{s-1}f_{s-1}} \tag{16}$$

mit $\delta_{i,j} = 1$ für $i = j$ und $\delta_{i,j} = 0$ für $i \neq j$.

Weiter erhalten wir

$$v^s = \left\{\begin{array}{ll} (v_1^1), & \text{falls } s = 1, \\ (v_1^s,\ldots,v_{2^s-1}^s, v^{s-1}), & \text{falls } s > 1, \end{array}\right\} \tag{17}$$

$$f_{s+1} = c_{s+1} + \overline{\lambda}^{s+1}(v^s), \qquad \text{falls } s \neq r \text{ ist.} \tag{18}$$

Da (14) genau eine Lösung hat (denn es gibt nur ein v und ein f), wird diese durch (15) bis (18) gegeben.

Zusammenfassend erhalten wir folgenden Dekodierungsalgorithmus für das eingangs gestellte Problem:

Sei $a \in E_2^{2^{r+1}-1}$, $(c_o,\ldots,c_r)^T$ der sich aus (13) ergebende Vektor.

Für $s = 0,1$: f_s ergibt sich aus (15).

Für $2 \leq s \leq r$: Es seien $f_o,\ldots,f_{s-1}$ bestimmt und auch v^{s-2} bekannt; v^{s-1} ergibt sich aus (16), (17), f_s aus (18).

Schließlich ist $f = f_o + 2f_1 + \ldots + 2^r f_r$, und a wird dekodiert als $v = a + (0\ldots01_f0\ldots0)$.

Beispiel: Wir betrachten $V(\overline{\lambda}^1, \overline{\lambda}^2, \overline{\lambda}^3)$ mit $\overline{\lambda}^i(x) = 0 \Leftrightarrow x = \underline{0}$ $(i=1,2,3)$,

$a = (100011101101011)$, $a^2 = (1000)$, $H_4 \cdot a^T = (1101)^T$.

Für $s = 0,1$: $f_o = 1$, $f_1 = 1$.

Für $s = 2$: $v_1^1 = 1$, $f_2 = 1$.

Für $s = 3$: $v^2 = (1011)$, $f_3 = 0$.

Damit folgt $f = 7$, $v = (100011\underline{0}01101011)$.

Es gilt

$$H_4 \cdot v^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (0, \overline{\lambda}^1(0), \overline{\lambda}^2(1), \overline{\lambda}^3(1011))^T.$$

Literatur

/1/ Golay, M. J. E.: Notes on digital coding. Proc. IEEE 37, 657 (1949)

/2/ Hamming, R. W.: Error detecting and error correcting codes. Bell System Techn. J. 29, 147 - 160 (1950)

/3/ Hergert, F.: Beiträge zur Theorie nichtlinearer Fehlerkorrigierender Codes. Diplomarbeit, Math.Institut der Technischen Hochschule, Darmstadt 1980

/4/ Mac Williams, F. J., and Sloane, N. J. A.: The Theory of Error-correcting codes. Amsterdam 1978

/5/ Tietäväinen, A.: On the nonexistence of perfect codes over finite fields, SIAM J. Appl. Math. <u>24</u>, 88 - 96 (1973)

/6/ Vasil'ev, Ju. L.: O negruppovych plotno upakovannych kodach (Russ.), Problemy Kibernet. <u>8</u>, 337 - 339 (1962)

<u>eingegangen:</u> 04. 10. 1982

<u>Anschrift des Verfassers:</u>

Dipl.-Math. B. Klippe
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
<u>DDR-2500 Rostock</u>

Rostock. Math. Kolloq. 23, 107 - 108 (1983) 31B15
46E35

Ehrhard Herbst

Spektralsynthese, Stabilität und Konvergenz in gewichteten Sobolew-Räumen

Autorreferat der Dissertation A

Die Arbeit stellt einen Versuch dar, den Apparat der klassischen Potentialtheorie auf gewichtete Sobolew-Räume zu übertragen. Den Hintergrund dieser Überlegungen bildet die Tatsache, daß Lösungen von linearen partiellen Differentialgleichungen mit gestörter Elliptizität in gewichteten Sobolew-Räumen gesucht werden. Von grundlegender Bedeutung ist dabei die Kapazitätstheorie. In der Arbeit wird eine Kapazität $k_{g,1,p}$ für die gewichteten Sobolew-Räume $W^p_{g,1}$ eingeführt, die die folgende Präzisierung von Funktionen aus $W^p_{g,1}$ gestattet.

Satz: Wenn u eine Funktion aus $W^p_{g,1}$ ist, dann kann man u auf einer Menge vom Maß Null so zu einer Funktion $\bar{u} \in W^p_{g,1}$ abändern, daß gilt: 1. $\bar{u}$ ist quasi überall, d. h. überall bis auf eine Menge der Kapazität Null, erklärt. 2. Für jede Zahl $\varepsilon > o$ gibt es eine offene Menge G_ε derart, daß $k_{g,1,p}(G_\varepsilon) < \varepsilon$ gilt und $\bar{u}$ eingeschränkt auf G^c_ε, das Komplement von G_ε, stetig in G^c_ε ist.

Diese zu u gehörige präzisierte Funktion $\bar{u}$ ist in dem Sinn eindeutig bestimmt, daß für zwei präzisierte Funktionen $\bar{u}, \bar{v} \in W^p_{g,1}$ gilt: $\bar{u}(x) = \bar{v}(x)$ fast überall impliziert $\bar{u}(x) = \bar{v}(x)$ quasi überall. Damit wird es sinnvoll, von der Einschränkung von Funktionen aus dem Raum $W^p_{g,1}$ auf Mengen positiver Kapazität zu sprechen, und man kann das feine Dirichlet-Problem für Differentialoperatoren zweiter Ordnung mit gestörter Elliptizität formulieren. Für den klassischen Fall stammt diese Formulierung von Brelot.

Definition: Für das beschränkte Gebiet $G \subset R^d$, $d \geq 2$, und die Funktion $f \in W^p_{g,1}$ finde man ein $u \in W^p_{g,1}$ mit den Eigenschaften $Au = o$ in G und $u|_{G^c} = f|_{G^c}$.

Dieses Problem steht in einem engen Zusammenhang mit der Spektralsynthese in gewichteten Sobolew-Räumen.

Definition: Die beschränkte offene Menge $G \subset R^d$, $d \geq 2$, genügt der $(g,1,p)$-Spektralsynthese, wenn jede Funktion $f \in W^p_{g,1}$ mit $f_{|G^c} = o$ im Raum $W^p_{g,1}$ durch glatte Funktionen aus $W^p_{g,1}$ approximiert werden kann, die in einer Umgebung von G^c verschwinden.

Satz: Das feine Dirichlet-Problem ist genau dann für alle Randwerte $f \in W^2_{g,1}$ für das beschränkte Gebiet G eindeutig lösbar, wenn G der $(g,1,2)$-Spektralsynthese genügt.

Die Spektralsynthese ist eine notwendige Bedingung für die Stabilität.

Definition: Die kompakte Menge $K \subset R^d$, $d \geq 2$, heißt $(g,1,p)$-stabil, wenn jede Funktion $f \in W^p_{g,1}$ mit $f_{|K^c} = o$ im Raum $W^p_{g,1}$ approximiert werden kann durch glatte Funktionen aus $W^p_{g,1}$ mit kompaktem Träger im Inneren von K.

In Analogie zu den klassischen Ergebnissen von Hedberg u. a. gilt die folgende Aussage.

Satz: Das Innere K^o der kompakten Menge K genüge der $(g,1,p)$-Spektralsynthese. Dann ist die kompakte Menge K genau dann $(g,1,p)$-stabil, wenn für alle offenen Mengen $G \subset R^d$, $d \geq 2$, gilt: $k_{g,1,p}(G \setminus K) = k_{g,1,p}(G \setminus K^o)$.

Mit dem Begriff der Stabilität werden Konvergenzaussagen für Sobolew-Räume und gewichtete Sobolew-Räume formuliert.

eingereicht: 28. 04. 1982 verteidigt: 12. 12. 1982

Gutachter: Prof. Dr. G. Anger (Halle/S.),
Prof. Dr. G. Wildenhain (Rostock),
Doz. Dr. A.-M. Sändig (Rostock)

Anschrift des Verfassers:

Dr. rer. nat. E. Herbst
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
DDR-2500 Rostock

Rostock. Math. Kolloq. 23, 109 - 110 (1983) 62J05 62K05

Jürgen Bock

Die Bestimmung des Stichprobenumfangs in der linearen Regressionsanalyse Modell I und II[1]

Autorreferat der Dissertation B

Im ersten Teil der Arbeit werden die konkreten bzw. diskreten Versuchspläne mit minimalem Umfang bzw. minimalen Kosten für eine Reihe von Schätz- und Testproblemen der einfachen linearen Regression bestimmt. Dabei bezieht sich das Minimum jeweils auf eine Klasse von Versuchsplänen, für die bestimmte Genauigkeitsforderungen (beschränkte erwartete Konfidenzintervallbreite, vorgegebene Risiken 1. und 2. Art für Tests bei gegebener praktisch interessierender Mindestdifferenz u. ä.) erfüllt sind. Besondere Aufmerksamkeit wird dem Parallelitätstest für mehrere Regressionsgeraden über den Intervallen (x_{hu}, x_{ho}) der Länge L_h $(h=1,\dots,a)$ geschenkt.

Satz: Es bezeichne V^F_{d,α,β_A} die Klasse der diskreten Versuchspläne mit den Gesamtumfängen $N = \sum_h n_h$ (N - natürlich, $n_h \geq 2$, reell), für die das Risiko 2. Art des F-Testes für die Nullhypothese $H_o : \beta_{11} = \dots = \beta_{a1}$ (β_{h1}-Anstieg der h-ten Geraden) bei gegebenem Risiko 1. Art α für alle Tupel $\beta_{11},\dots,\beta_{a1}$ mit $\max_h \beta_{h1} - \min_h \beta_{h1} \geq d > 0$ durch β_A nach oben beschränkt ist. Dann ordnet der Plan minimalen Umfangs N^* aus dieser Klasse den x_{hu} und x_{ho} die Gewichte $n^*_h/2$ zu, wobei N^* die kleinste natürliche Zahl ist, die die Ungleichung $F(a-1,N-a,1-\alpha) \leq F(a-1,N-a,\lambda^*_{aN},\beta_A)$ für die Quantile der zentralen bzw. nichtzentralen F-Verteilung erfüllt. Der Nichtzentralitätsparameter und die Aufteilung von N^* hängen von den Gewichten $p_h = 1/(L_h \sum_j 1/L^2_j)$ der Versuchsbereiche ab. Für $\max p_h \leq 1/2$ gilt $n^*_h = N^* p_h$ und $\lambda^*_{aN} = \frac{d^2}{8\sigma^2} \cdot \frac{N^*}{\sum_j 1/L^2_j}$ (σ^2-Restvarianz).

---

[1] Erscheint demnächst als Heft 254 der Nova Acta Leopoldina, Leipzig

In der Arbeit ist auch die optimale Aufteilung für $\max_h p_h > 1/2$ angegeben. Analoge Aussagen werden für den multiplen t-Test sowie für die Tukey- und Scheffe-Prozedur gewonnen. Im Falle des Modells II der einfachen und multiplen Regression werden Ungleichungen für die Stichprobenumfänge aus gegebenen Schranken für die erwartete Konfidenzintervallbreite bzw. die erwarteten Durchmesser des Konfidenzellipsoids abgeleitet. Für Probleme der einfachen Korrelationsanalyse ergeben sich unter Zuhilfenahme der Fisherschen z-Transformation approximative Formeln für den benötigten Stichprobenumfang. Schwieriger gestaltet sich die Bestimmung der Umfänge für Tests für die Regressionskoeffizienten. Im Falle der einfachen linearen Regression, Modell II, wird die Dichte für die t-Statistik zum Vergleich des Anstiegs mit einer Konstanten unter der Alternativhypothese hergeleitet. Es zeigt sich, daß $r(\underline{t}) = \underline{t}/\sqrt{f+\underline{t}^2}$ (f - Freiheitsgrade) eine Dichte besitzt, die die gleiche funktionale Gestalt hat, wie die des Stichprobenkorrelationskoeffizienten. Daher können die Ergebnisse zur Korrelationsanalyse ausgenutzt werden. Eines der wichtigsten Ergebnisse der Arbeit ist die Darstellung des Risikos 2. Art ß des F-Testes für den Vergleich einiger Regressionskoeffizienten mit Null (multiple lineare Regression, Modell II) in Form einer konvergenten Reihe, deren Glieder auf einfache Weise rekursiv berechnet werden können. Bei der graphischen Darstellung von ß in Abhängigkeit von den Freiheitsgraden und vom partiell-multiplen Bestimmtheitsmaß in Wahrscheinlichkeitspapier erhält man in sehr guter Näherung Geraden und damit Nomogramme zur Bestimmung des Umfangs.

eingereicht: 05. 12. 1978 verteidigt: 01. 06. 1979

Gutachter: Prof. Dr. H. Ahrens (Berlin),
Prof. Dr. J. Adam (Halle),
Prof. Dr. D. Rasch (Rostock).

Anschrift des Verfassers:
Doz. Dr. sc. nat. J. Bock
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
Universitätsplatz 1
DDR-2500 Rostock

Rostock. Math. Kolloq. 23, 111 - 112 (1983)
65J10
65F10
65F20

Dieter Schott

Die Methode der Projektionskerne und ihre Anwendung bei Struktur- und Konvergenzuntersuchungen von Iterationsverfahren zur Lösung linearer Operatorgleichungen in Banachräumen

Autorreferat der Dissertation B

Der erste Teil der Arbeit beschäftigt sich mit Projektionskernen P von Mengen $\mathcal{U}$ linearer Operatoren U, d. h. mit linearen Projektoren P, die der Beziehung

$$P = PU = UP \quad (\forall U \in \mathcal{U}) \tag{1}$$

genügen. Es werden zahlreiche Beispiele für Projektionskerne angegeben. Weiterhin wird die Frage untersucht, unter welchen Bedingungen sie vorhanden sind und wie sie sich bestimmen lassen. Eine besondere Rolle spielen die optimalen Projektionskerne. Das sind solche Projektoren P, für die

$$\mathbb{R}(P) = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} \mathbb{N}(I-U), \quad \mathbb{N}(P) = \operatorname{span} \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \mathbb{R}(I-U) \tag{2}$$

gilt. Bei vielen Iterationsverfahren zur Lösung linearer Operatorgleichungen $Ax = y$ treten Operatorfolgen (U_n) auf, deren zugeordnete Menge $\{U_n : n \in N\}$ einen optimalen Projektionskern P besitzt. Dabei erleichtert die Kenntnis derartiger Operatoren P den Konvergenznachweis beträchtlich.
Daher wird die Methode der Projektionskerne im zweiten Teil der Arbeit zur Struktur- und Konvergenzuntersuchung des allgemeinen Iterationsverfahrens

$$x_{n+1} = (I-D_nA)x_n + D_ny = P_nx_o + B_ny \tag{3}$$

mit der Restiteration

$$r_{n+1} = (I-AD_n)r_n = Q_nr_o \quad (r_o = y-Ax_o)$$

eingesetzt. Daneben findet der Begriff der kontrahierenden Operatorfolge Verwendung, der den Begriff des kontrahierenden Operators verallgemeinert.
Unter der Voraussetzung, daß (D_n) eine Folge mit dem Zyklus k ist, werden außerdem die stationären Iterationsverfahren

$$z_{n+1} = (I-DA)z_n + Dy \tag{4}$$

mit

$$D = \sum_{i=o}^{k-1} (I-D_{k-1}A)\dots(I-D_{i+1}A)D_i'$$

bzw.

$$D = \sum_{i=o}^{k-1} \alpha_i D_i \quad (\alpha_i \geq 0, \sum_{i=o}^{k-1} \alpha_i = 1)$$

betrachtet. Neben Konvergenzaussagen werden auch Eigenschaften der Grenzoperatoren P_∞, Q_∞, B_∞ und der Grenzelemente x_∞, r_∞ angegeben.

Besondere Beachtung finden solche Iterationsverfahren, bei denen entweder die Operatoren $T_n = I-D_nA$ oder die Operatoren $S_n = I-AD_n$ sogenannte Relaxationen

$$(1-\lambda_n)I + \lambda_n V_n \quad (|\lambda_n-1| < 1) \tag{5}$$

von orthogonalen Projektoren V_n sind. Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn

$$D_n = \lambda_n(G_nA)^+G_n \tag{6}$$

oder

$$D_n = \lambda_n H_n(AH_n)^+ \tag{7}$$

gewählt wird. Hier erweisen sich P_∞ bzw. Q_∞ als optimaler Projektionskern von $\{T_n: n \in N\}$ bzw. $\{S_n: n \in N\}$ und B_∞ als verallgemeinerte Inverse von A. Aus den Iterationsverfahren (3)/(6) und (3)/(7) gewinnt man durch Spezialisierung das PSH- und das SPA-Verfahren zur Lösung konsistenter und inkonsistenter linearer Gleichungssysteme. Die Arbeit verallgemeinert und vereinheitlicht die dazu bekannten Ergebnisse.

eingereicht: 13. 07. 1982 verteidigt: 11. 11. 1982

Gutachter: Prof. Dr. L. Berg (Rostock),
Prof. Dr. K. Beyer (Rostock),
Prof. Dr. G. Porath (Güstrow).

Dr. sc. nat. D. Schott
Pädagogische Hochschule
"Liselotte Herrmann" Güstrow
Sektion Mathematik/Physik
Goldberger Str. 12
DDR-2600 Güstrow

Hinweise für Autoren

Manuskripte (in deutscher, ggf. auch in russischer oder englischer Sprache) bitten wir, an die Schriftleitung zu schicken. Die gesamte Arbeit ist linksbündig zu schreiben. Eine Ausnahme hiervon bilden hervorzuhebende Formeln und das Literaturverzeichnis. Der Kopf der Arbeit soll folgende Form haben: Rostock. Math. Kolloq. /Leerzeile/ Vorname Name/ Leerzeile/ Titel der Arbeit/ 1 Zeilenumschaltung/ Unterstreichung/ Leerzeile. Der Text der Arbeit ist eineinhalbzeilig (= 3 Zeilenumschaltungen) zu schreiben mit maximal 63 Anschlägen je Zeile und maximal 37 Zeilen je Seite. Zwischenüberschriften sind wie folgt einzuordnen: 6 Zeilenumschaltungen/ Zwischenüberschrift/ Unterstreichung (ohne Zeilenumschaltung)/ 5 Zeilenumschaltungen. Hervorhebungen sind durch Unterstreichen und Sperren möglich. Ankündigungen wie Satz, Definition, Bemerkung, Beweis u. a. sind zu unterstreichen und mit einem Doppelpunkt abzuschließen. Vor und nach Sätzen, Definitionen u. ä. ist ein Zeilenabstand von 5 Umschaltungen zu lassen. Fußnoten sind möglichst zu vermeiden. Sollte doch davon Gebrauch gemacht werden, so sind sie durch eine hochgestellte Ziffer im Text zu kennzeichnen und innerhalb des oben angegebenen Satzspiegels unten auf der gleichen Seite anzugeben. Formeln und Bezeichnungen sollen möglichst mit der Schreibmaschine zu schreiben sein. Hervorzuhebende Formeln sind drei Leerzeichen einzurücken und mit 6 Umschaltungen zum übrigen Text zu schreiben. Formelzähler sollen am rechten Rand stehen. Der Platz für Abbildungen ist beim Schreiben auszusparen; die Abbildungen selbst sind in der dem ausgesparten Platz entsprechenden Größe gesondert nach TGL-Vorschrift auf Transparentpapier beizufügen. Der zugehörige Begleittext ist im Manuskript mitzuschreiben. Sein Abstand nach unten beträgt 5 Umschaltungen. Literaturzitate im Text sind durch laufende Nummern in Schrägstrichen (vgl. /8/, /9/ und /10/) zu kennzeichnen und am Schluß der Arbeit unter der Zwischenüberschrift Literatur zusammenzustellen.

Beispiele: (Zeitschriftenabkürzungen nach Math. Reviews)

/8/ Zariski, O., and Samuel, P.: Commutative Algebra. Princeton 1958

/9/ Steinitz, E.: Algebraische Theorie der Körper. J. Reine Angew. Math. 137, 167 - 309 (1920)

/10/ Gnedenko, B. W.: Über die Arbeiten von C. F. Gauß zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. In: Reichardt, H. (Ed.): C. F. Gauß, Gedenkband anläßlich des 100. Todestages. S. 193 - 204, Leipzig 1967

Die Angaben sollen in Originalsprache erfolgen; bei kyrillischen Buchstaben soll die bibliothekarische Transkription (Duden) verwendet werden.
Am Ende der Arbeit stehen folgende Angaben zum Autor und zur Arbeit: eingegangen: Datum/ Leerzeile/ Anschrift des Verfassers:/ Titel Initialen der Vornamen Name/ Institution/ Struktureinheit/ Straße Hausnummer/ Land Postleitzahl Ort.
Der Autor wird gebeten, eine Korrektur des Durchschlags vom Offsetmanuskript zu lesen und dabei die mathematischen Symbole einzutragen. Ferner sollte er 1 - 2 Klassifizierungsnummern (entsprechend der "1980 Mathematics Subject Classification" der Math. Reviews) zur inhaltlichen Einordnung seiner Arbeit angeben.