Rostocker Mathematisches Kolloquium

Heft 3

WILHELM-PIECK-UNIVERSITÄT
ROSTOCK

ROSTOCKER MATHEMATISCHES KOLLOQUIUM

Heft 3

1977

Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik

Redaktion: Abt. Wissenschaftspublizistik der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, 25 Rostock, Vogelsang 13/14
Fernruf 369 577

Verantwortlicher Redakteur: Dipl.-Ges.-Wiss. Bruno Schrage
Fachredakteur: Doz. Dr.rer.nat. Gerhard Maeß, Sektion Mathematik

Herausgegeben von der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock unter Genehmigungs-Nr. C 277/77

Druck: Ostsee-Druck Rostock, Werk II

https://doi.org/10.18453/rosdok_id00003789

Inhalt

Karl Weber

Beziehungen zwischen verschiedenen Kompliziertheitsmaßen bei alternativen Normalformen

Teil I. Logische Beziehungen

Bekanntlich läßt sich jede Boolesche Funktion (BF) f - i.A. auf mannigfache Weise - durch alternative Normalformen (ANF) realisieren (per Definitionem werden die Booleschen Konstanten 0 und 1 durch die leere ANF bzw. die leere Fundamentalkonjunktion (FK)[1] realisiert). Die zentrale Aufgabe innerhalb der Theorie der ANF besteht nun darin, für beliebige vorgegebene BF eine oder auch alle minimalen ANF, d.h. ANF kleinster Kompliziertheit zu konstruieren (Minimisierung von BF). Dabei betrachtet man gewöhnlich als Kompliziertheit l(A) einer ANF A die Anzahl der Stellen in A, an denen Variable bzw. negierte Variable stehen (auch kurz "Anzahl der Buchstaben in A" genannt).

Nun ist die Wahl gerade des Parameters l als Maß der Kompliziertheit (KM) von ANF mehr oder weniger willkürlich, und es liegt daher nahe, nach dem Einfluß der Wahl des KM auf Ablauf und Resultat der Minimisierung zu fragen. Dabei stellt sich heraus, daß die bekannten universellen Methoden der Minimisierung bzgl. l - die nebenbei bemerkt sämtlich sehr aufwendig sind, da sie für eine n-stellige BF i.A. die Durchsicht von weit mehr als 2^{2n} ANF erfordern - bei beliebigen sinnvollen KM μ und beliebig vorgegebener BF f zumindest die Bestimmung einer bzgl. μ minimalen ANF von f erlauben. So impliziert beispielsweise allein die Monotonieforderung $\mu(A_1) \leq \mu(A_2)$ für $A_1 \leq A_2$ (die ANF A_1 geht durch Streichen von Buchstaben oder ganzer FK aus der ANF A_2 hervor), die man an ein sinnvolles KM μ schon stellen muß, die Existenz gewisser bzgl. μ minimaler

[1] Hier nicht erklärte Begriffe findet man etwa in /2/.

ANF einer beliebigen BF f unter den unverkürzbaren ANF von f, d.h. den minimalen Elementen der Halbordnung ($\mathcal{A}$ (f), $\angle$), wo $\mathcal{A}$ (f) die Menge aller f realisierenden ANF ist.

Anders liegen die Dinge, was das Resultat der Minimisierung betrifft. So vermutete man beispielsweise eine Abhängigkeit der KM l und s - wo s(A) die Anzahl der FK in der ANF A - derart, daß für beliebige BF f jede bzgl. l minimale ANF von f auch bzgl. s minimal wäre. Diese Vermutung wurde in /3/ widerlegt (vgl. auch /2/), und es erfolgte daraufhin in /1/ eine eingehende Untersuchung der Beziehungen zwischen den KM l und s.

Im folgenden untersuchen wir logische Beziehungen[2/] zwischen l, s und dem in gewissem Sinne zu s dualen KM k ($s(A) + k(A) = l(A)$ für beliebige ANF A), wo also k(A) die Anzahl der Operationen " $\wedge$ " in der ANF A bezeichnet. Das heißt, wir untersuchen die Beziehungen zwischen den Mengen $M_k(f)$, $M_l(f)$ und $M_s(f)$ der bzgl. k, l bzw. s minimalen ANF in Abhängigkeit von der BF f. Dabei verstehen wir im folgenden unter s-minimalen ANF nur solche, die gleichzeitig unverkürzbar sind.

Wir nennen die KM k und l logisch unabhängig, wenn die folgenden fünf formal möglichen Fälle der Beziehung zwischen den Mengen M_k und M_l tatsächlich auftreten:

$M_k(f_1) = M_l(f_1)$ (1), $M_k(f_2) \subset M_l(f_2)$ (2),

$M_k(f_3) \subset M_l(f_3)$ (3), $M_k(f_4) \cap M_l(f_4) = \emptyset$ (4),

$M_k(f_5)$ und $M_l(f_5)$ genügen keiner der Beziehungen (1) - (4) (5).

Als Maß für den Grad der logischen Unabhängigkeit betrachten wir die Zahl $n_{k,l}$, die kleinste Variablenzahl, für die BF $f_1, \ldots, f_5$ mit (1) - (5) existieren. Ganz entsprechend seien die logische Unabhängigkeit der KM k und s bzw. l und s und die Zahlen $n_{k,s}$ bzw. $n_{l,s}$ erklärt.

2/ Metrischen Beziehungen ist der Teil II dieser Arbeit gewidmet

In der vorliegenden Arbeit beweisen wir den folgenden

SATZ. Die KM k, l und s sind paarweise logisch unabhängig, und zwar gilt

$$5 \leq n_{k,l} \leq 7 \;{}^{3/}, \quad 5 \leq n_{l,s} \leq 6 \;{}^{4/}, \; n_{k,s} = 5$$

1. Wir zerlegen die Menge P aller BF in die Klassen $F_{k,l}^{(i)} :=$ $:= \{f : f \text{ genügt } (i)\}$, $i = 1, \ldots, 5$. Völlig analog definieren wir die Zerlegungen $\{F_{k,s}^{(1)}, \ldots, F_{k,s}^{(5)}\}$ und $\{F_{l,s}^{(1)}, \ldots, F_{l,s}^{(5)}\}$. Per Definitionem gehören die Booleschen Konstanten 0 und 1 jeweils zur Klasse vom Typ $F^{(1)}$.

Sei $F \subseteq P$, P_n die Menge aller n-stelligen BF, dann bezeichnen wir den Durchschnitt $F \cap P_n$ mit $F(n)$. Realisiert die ANF $A(x^n)$ die BF $f(x^n)$[5/], so bezeichnet $\langle A \rangle$ die der ANF A entsprechende Überdeckung der Menge $\langle f \rangle = \{\alpha^n : f(\alpha^n) = 1\}$ von Ecken des n-dimensionalen Einheitswürfels E^n, d.h. $\langle A \rangle$ ist die Menge der den FK a_i aus A entsprechenden Teilwürfel - auch Intervalle genannt - $\langle a_i \rangle$ des E^n. Seien nun U_1 und U_2 unverkürzbare ANF einer BF f. Für die Alternative der Primimplikanten (PI), die sowohl in U_1 als auch in U_2 vorkommen, wollen wir die Bezeichnung B, für die Alternative der übrigen PI aus U_1 bzw. U_2 die Bezeichnung C_1 bzw. C_2 vereinbaren. Dann gelten die folgenden trivialen Aussagen:

1^o In C_1 und C_2 sind keine PI der Ränge[6/] 1 und n enthalten, bzw. $\langle C_1 \rangle$ und $\langle C_2 \rangle$ enthalten keine maximalen Intervalle der Dimensionen 0 und n-1.[7/] (6)

3/ Es gilt sogar $n_{k,l} \geq 6$, allerdings ist der Beweis sehr umfangreich.

4/ In /1/ wird gezeigt, daß $5 \leq n_{l,s} \leq 9$ ist.

5/ Für $(x_1, \ldots, x_n)$ schreiben wir kurz x^n.

6/ Als Rang eines PI und allgemein einer FK a bezeichnet man die Anzahl der in a enthaltenen Buchstaben.

7/ Man überlegt sich leicht, daß PI der Ränge 1 und n einer BF $f(x^n)$ stets in den Kern von f, d.h. in sämtliche unverkürzbaren ANF von f eingehen.

2° Jedes Intervall aus $\langle C_1 \rangle$ hat einen solchen gemeinsamen Punkt mit einem Intervall aus $\langle C_2 \rangle$, der in keinem Intervall aus $\langle B \rangle$ und in keinem weiteren Intervall aus $\langle C_1 \rangle$ enthalten ist. (7)

3° Jedes Intervall aus $\langle C_1 \rangle$ wird durch die Intervalle aus $\langle B \rangle \cup \langle C_2 \rangle$ überdeckt. (8)

Selbstverständlich kann man in diesen Aussagen C_1 durch C_2 und C_2 durch C_1 ersetzen.

Lemma 1. Für beliebige BF $f \in P_3$ gilt

$$M_k(f) = M_l(f) = M_s(f).$$

Beweis: Für beliebige $f \in P_2$ existiert genau eine unverkürzbare ANF von f, die mit der gekürzten ANF von f (Alternative aller PI von f) identisch ist.

Sei nun $f \in P_3$, U_1 und U_2 seien zwei unverkürzbare ANF von f. Dann sind wegen (6) in den Mengen C_1 und C_2 höchstens PI vom Rang 2 enthalten, und daher gilt

$$k(U_1) \underset{(=)}{<} k(U_2) \quad \text{gdw}^{8/}\ l(U_1) \underset{(=)}{<} l(U_2) \text{ gdw } s(U_1) \underset{(=)}{<} s(U_2).$$

Lemma 2. Für beliebige BF $f \in P_4$ gilt $M_k(f) \subseteq M_s(f)$. Des weiteren ist $F^{(2)}_{k,s}(4) \neq \emptyset$.

Beweis: Angenommen, für eine BF $f \in P_4$ existieren unverkürzbare ANF U_1 und U_2, die den folgenden drei Bedingungen genügen:

1° $s(U_1) < s(U_2)$, $k(U_1) > k(U_2)$. (9)

2° $U_1 \in M_s(f)$. (10)

3° $U_2 \in M_k(f)$. (11)

Wir zeigen im folgenden, daß das nicht möglich ist; die dazu angestellten Überlegungen führen uns gleichzeitig zu einer BF aus $F^{(2)}_{k,1}(4)$. Damit ist dann aber schon Lemma 2 bewiesen, denn offenbar ist die Existenz von U_1 und U_2 mit (9) - (11) eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß f in einer der Mengen $F^{(i)}_{k,s}$ (4), i = 3, 4, 5, enthalten ist.

8/ "genau dann, wenn"

In den Mengen C_1 und C_2 kommen wegen (6) höchstens PI der Ränge 2 und 3 vor. Wir wollen die Mengen C_1 und C_2 noch genauer beschreiben, indem wir (9) - (11) berücksichtigen.
Und zwar überzeugt man sich leicht davon, daß in $\langle f\rangle$ Punkte α_1 und α_2 9/ existieren, die gerade in einem Quadrat $Q_1 \in \langle C_2\rangle$ und einer Kante aus $\langle C_1\rangle$ bzw. gerade in einem Quadrat $Q_2 \in \langle C_2\rangle$ ($Q_2 \neq Q_1$) und einer Kante aus $\langle C_1\rangle$ enthalten sind (d.h. jeweils in keinen weiteren Intervallen der Menge $\langle B\rangle \cup \langle C_1\rangle \cup \langle C_2\rangle$). 10/

Dazu bezeichnen wir die Menge der Punkte aus $\langle f\rangle$, die gerade in Quadraten aus $\langle C_2\rangle$ und Kanten aus $\langle C_1\rangle$ enthalten sind, mit M. Offenbar besteht dann eine Menge $\tilde{Q}$ von Quadraten aus $\langle C_2\rangle$, die sämtliche Punkte aus M überdeckt, aus nicht weniger als zwei Quadraten. Ersetzt man nämlich in $\langle U_2\rangle$ die Quadrate aus $\langle C_2\rangle \setminus \tilde{Q}$ durch die aus $\langle C_1\rangle$, so erhält man wegen (8) wieder eine Überdeckung von $\langle f\rangle$. Da wegen (9) $\langle C_2\rangle$ mindestens zwei Quadrate mehr enthält als $\langle C_1\rangle$, kann wegen (11) $\tilde{Q}$ nicht weniger als zwei Quadrate enthalten. Nun ist aber wegen (8) ein Punkt, der durch ein Quadrat aus $\langle C_2\rangle$ und eine Kante aus $\langle C_1\rangle$ überdeckt wird, in keinem weiteren Intervall aus $\langle B\rangle \cup \langle C_1\rangle \cup \langle C_2\rangle$ enthalten.

O.B.d.A. sei also

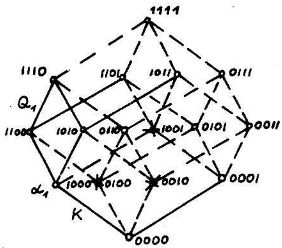
$$Q_1 = \langle x_1 \bar{x}_4\rangle$$
$$K = \langle \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4\rangle \in \langle C_1\rangle$$
$$\alpha_1 = (1000)$$

Wegen (8) ist dann die Kante $\langle \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\rangle$ aus $\langle B\rangle \cup \langle C_2\rangle$, und die Kanten $\langle x_1x_2\bar{x}_3\rangle$ und $\langle x_1\bar{x}_2x_3\rangle$ sind in Intervallen aus $\langle B\rangle \cup \langle C_1\rangle$ enthalten. Des weiteren sind wegen der Maximalität von K die Punkte (0100), (0010) sowie (1001) nicht in $\langle f\rangle$ (Bild 1a).

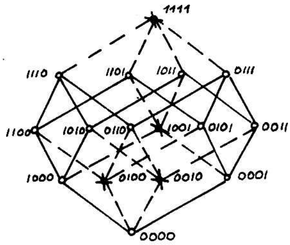
Der Punkt α_2 ist nun insbesondere nicht in Q_1 enthalten, und man überlegt sich leicht, daß α_2 nur einer der Punkte (0101), (0011) oder (0111) sein kann. Da Q_1, K und α_1 bzgl. Vertauschung der Variablen x_2 und x_3 invariant sind, reicht es, die

9/ Wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind, verzichten wir auf den oberen Index.

10/ Intervalle der Dimension 1 bzw. 2 nennen wir Kanten bzw. Quadrate, dementsprechend sind Punkte Intervalle der Dimension 0.



a



b

Bild 1

Fälle $\alpha_2 = (0101)$ und $\alpha_2 = (0111)$ zu untersuchen.

Fall 1: $\alpha_2 = (0101)$

Fall 1.1: $Q_2 = \langle \bar{x}_1 x_4 \rangle$

$K' = \langle x_2 \bar{x}_3 x_4 \rangle \in \langle C_1 \rangle$

Wegen der Maximalität von K' ist dann (1111) nicht in $\langle f \rangle$ enthalten, was wegen (8) $\langle \bar{x}_1 x_2 x_3 \rangle \in \langle B \rangle \cup \langle C_1 \rangle$ zur Folge hat. Es entsteht notwendig die in Bild 1b dargestellte Funktion, die offenbar in $F^{(1)}_{k,s}(4)$ enthalten ist.

Fall 1.2: $Q_2 = \langle x_2 x_4 \rangle$

$K' = \langle \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4 \rangle \in \langle C_1 \rangle$

Ebenso einfach wie unter Fall 1.1. erhalten wir dann notwendig die in Bild 2 dargestellte Funktion, die, wie man leicht nachweist, in $F^{(2)}_{k,s}(4)$ enthalten ist.

Fall 2: $\alpha_2 = (0111)$

Man überlegt sich leicht anhand von Bild 1a, daß dann notwendig $Q_2 = \langle \bar{x}_1 x_4 \rangle$ und $\langle \bar{x}_1 x_2 x_3 \rangle$ aus $\langle C_1 \rangle$ sein muß. Wir erhalten wie schon unter Fall 1.1 die in Bild 1b dargestellte Funktion

In /1/ wird gezeigt, daß für alle $f \in P_4$ $M_l(f) \subseteq M_s(f)$ gilt. Unter Berücksichtigung von Lemma 2 erhalten wir daher

Folgerung 3. Für alle $f \in P_4$ ist $M_k(f) = M_l(f)$.

Folgerung 4. Es gilt $n_{k,l} \geq 5$, $n_{k,s} \geq 5$, $n_{l,s} \geq 5$.

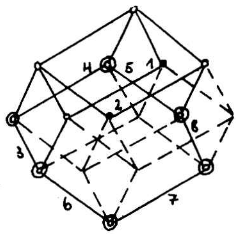


Bild 2

2. Wir werden im folgenden häufig ANF als gekürzt, unverkürzbar bzw. als in diesem oder jenem Sinne minimal nachzuweisen haben. Dazu stellen wir nun die nötigen Hilfsmittel bereit.

Lemma 5. (/1/) Eine ANF $A = \bigvee_{i=1}^{s} a_i$ ist genau dann gekürzt, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

1° $(a_i \rightarrow a_j) \neq 1$, $i \neq j$, $i,j = 1 \ldots, s$ [11/] (12)

2° Für beliebige $a_i = a_i' x_k$, $a_j = a_j' \bar{x}_k$ $(1 \leq i,j \leq s)$[12/] existiert eine FK a_p, $1 \leq p \leq s$, so daß $(a_i' \wedge a_j' \rightarrow a_p) = 1$ ist. (13)

FK a_i, a_j mit $a_i \wedge a_j = 0$ werden wir orthogonal nennen, die entsprechenden Intervalle sind dann offenbar gerade disjunkt. FK $a_i = a_i' x_k$ und $a_j = a_j' \bar{x}_k$ heißen benachbart, wenn a_i' und a_j' nicht orthogonal sind, andernfalls heißen sie fremd, für die

---

11/ Wir schreiben H = f, wenn die Formel H die BF f realisiert, " $\rightarrow$ " ist wie gewöhnlich als Implikation, 0 und 1 sind als Boolesche Konstanten zu interpretieren.

12/ Möglicherweise sind a_i' oder a_j' identisch mit der leeren FK, dann werden sie vereinbarungsgemäß wie die Boolesche Konstante 1 behandelt.

entsprechenden Intervalle verwenden wir dieselben Bezeichnungen. Haben wir uns mit Hilfe von Lemma 5 davon überzeugt, daß eine vorgegebene ANF A, die eine gewisse BF f realisiert, gekürzt ist, so können wir zur Bestimmung der minimalen ANF von f übergehen. Dazu benötigen wir das

Lemma 6. (Absorptionskriterium, /2/) Seien $a, a_1, \ldots, a_q$ FK mit $a \wedge a_i \neq 0$, $a \rightarrow a_i \neq 1$, $i = 1, \ldots, q$. Wir streichen in $a_1, \ldots, a_q$ sämtliche Buchstaben, die auch in a vorkommen und erhalten die FK $a'_1, \ldots, a'_q$. Dann sind die folgenden beiden Bedingungen äquivalent:

1^0 $(a \rightarrow \bigvee_{i=1}^{q} a_i) = 1$ [13]

$$2^0 \quad \bigvee_{i=1}^{q} a'_i = 1. \tag{14}$$

Allerdings läuft ein rein analytisches Vorgehen zur Bestimmung der minimalen ANF - das im wesentlichen auf dem Absorptionskriterium beruht - auf die Konstruktion und anschließende Durchmusterung einer i.A. großen Anzahl von unverkürzbaren ANF hinaus und ist deshalb sehr aufwendig. Wir wollen im folgenden ein analytisch-geometrisches Vorgehen beschreiben, das für unsere Zwecke ausreicht. Es zeichnet sich durch große Anschaulichkeit aus und stützt sich wesentlich auf den Begriff des Plans einer BF f.

Im Plan einer BF f (vgl. Pläne von $g_1, \ldots, g_6$) kennzeichnen wir jedes in $\langle f \rangle$ enthaltene maximale Intervall, das nicht durch Kernintervalle von f überdeckt wird, durch einen Kreis, in den wir zusätzlich noch den Rang des entsprechenden PI eintragen. Des weiteren werden sämtliche in $\langle f \rangle$ aber in keinem Kernintervall von f enthaltenen Punkte vermerkt. Durch Verbindungen zwischen Kreisen und Punkten wird deutlich gemacht, welche Punkte in welchen Intervallen enthalten sind.

---

[13] Man spricht dann auch davon, daß a durch die Alternative $\bigvee_{i=1}^{q} a_i$ absorbiert wird.

Wir bezeichnen eine Menge M von Kreisen als Überdeckung des Plans, wenn jeder Punkt des Plans mit einem Kreis aus M verbunden ist. Ist zusätzlich noch jeder Kreis einer Überdeckung M mit einem solchen Punkt des Plans verbunden, der mit keinem weiteren Kreis aus M verbunden ist, so nennen wir die Überdeckung M unverkürzbar. Offenbar entspricht jeder unverkürzbaren ANF einer BF f eine unverkürzbare Überdeckung des Plans von f und umgekehrt.

Wir erhalten den Plan jeweils durch "Vervollständigung" der Tabelle, die wir für den Nachweis der Gekürztheit einer vorgegebenen ANF sowieso anlegen müssen (vgl. Tabellen 1, 3 im Anhang). In den von uns noch zu betrachtenden Beispielen erweist sich nun - wegen der Überschaubarkeit der auftretenden Pläne - die Bestimmung der minimalen ANF anhand des Plans als sehr einfach.

<u>Beispiel 1.</u> Mit g_1 bezeichnen wir die BF, die durch die folgende ANF realisiert wird:

$$\begin{aligned} A_1(x^6) = {} & \overset{1}{\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_6} \vee \overset{2}{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_6} \vee \overset{3}{\bar{x}_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_6} \vee \overset{4}{x_2\bar{x}_3\bar{x}_4x_6} \vee \overset{5}{\bar{x}_2x_3x_5x_6} \vee \\ & \vee \overset{6}{x_1x_3x_4x_6} \vee \overset{7}{\bar{x}_1x_2\bar{x}_4\bar{x}_5\bar{x}_6} \vee \overset{8}{x_1x_3\bar{x}_4\bar{x}_5\bar{x}_6} \vee \overset{9}{x_2x_3\bar{x}_4x_5\bar{x}_6} \vee \\ & \vee \overset{10}{x_1x_2x_3x_4x_5} \vee \overset{11}{\bar{x}_1x_2x_4x_5x_6} \vee \overset{12}{x_2\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5} \vee \overset{13}{\bar{x}_2x_4\bar{x}_5\bar{x}_6} \vee \\ & \vee \overset{14}{\bar{x}_1\bar{x}_4x_5\bar{x}_6} \vee \overset{15}{\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_5} \vee \overset{16}{\cancel{x_3x_4x_5x_6}} \vee \overset{17}{x_1x_2x_3\bar{x}_6} \vee \\ & \vee \overset{18}{\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4} \vee \overset{19}{\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_5} \vee \overset{20}{\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4}. \end{aligned}$$

Im folgenden werden wir der Einfachheit halber zur Bezeichnung der FK die darüberstehenden Nummern verwenden.
Wir überzeugen uns zunächst anhand von Tabelle 1 (vgl. Anhang) davon, daß die angegebene ANF gekürzt ist.

In den benachbarten FK a_i, a_j entsprechenden Feldern der Tabelle ist die FK $a'_p = a'_i \wedge a'_j$ und gleichzeitig eine FK a_p mit $(a'_p \rightarrow a_p) = 1$ angegeben (vgl. (13)). Die fremden FK entsprechenden Felder sind mit "O" markiert, sie sind auch im folgenden nicht von Interesse. Die nichtorthogonalen FK entsprechenden Felder lassen wir zunächst frei und überprüfen nur, ob eine FK von einer anderen absorbiert wird (vgl. (12)). Da das hier nicht der Fall ist, ist der Nachweis beendet.

Bekanntlich gehört ein PI a einer BF f genau dann zum Kern von f, wenn er durch die Alternative sämtlicher übriger PI von f (dabei brauchen wir natürlich nur die zu a nichtorthogonalen PI zu berücksichtigen) nicht absorbiert wird. Eine Prüfung dieses Sachverhalts im Falle der BF g_1 bereitet anhand von Tabelle 1 ebenfalls keine Schwierigkeiten. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die freien Felder der Tabelle für solche Eintragungen zu nutzen, die anschließend ein bequemes Überprüfen von (14) erlauben. In den in dieser Arbeit angegebenen Tabellen wurde der besseren Übersicht wegen dieser Schritt nicht notiert, sondern es sind dort nur die Resultate vermerkt, d.h. im Falle von Kernintervallen ein Randpunkt[14/] und ansonsten eine absorbierende Alternative. Diese Angaben sind mit Hilfe des Absorptionskriteriums leicht zu überprüfen. Im weiteren interessieren weder die Zeilen noch die Spalten der Tabelle, die Kernimplikanten entsprechen.

In die den übrigen nichtorthogonalen PI von g_1 entsprechenden Felder von Tabelle 1 tragen wir nun sämtliche gemeinsamen Punkte der entsprechenden Intervalle ein und prüfen, ob sie in Kernintervallen von g_1 enthalten sind. Ist das für einen Punkt der Fall, so notieren wir den entsprechenden PI, ansonsten erhält der Punkt die Markierung "+". Dann sind offenbar gerade die mit "+" markierten Punkte aus Tabelle 1 die Punkte des Plans von g_1. Aus der Tabelle sind weiterhin leicht sämtliche Intervalle abzulesen, in denen diese Punkte jeweils enthalten

---

[14/] Als Randpunkt eines Kernintervalls der BF f bezeichnen wir einen solchen Punkt, der durch kein weiteres maximales Intervall von f überdeckt wird.

sind. Genau die Intervalle, in deren entsprechender Zeile und Spalte keine mit "+" markierten Punkte auftreten, werden durch die Kernintervalle überdeckt; dieser Nachweis ist also unabhängig von der absorbierenden Alternative, die wir zuvor notiert hatten, wir verändern diese Notierung entsprechend.

Aus den bis hierher angestellten Überlegungen erhalten wir den in Bild 3 dargestellten Plan von g_1

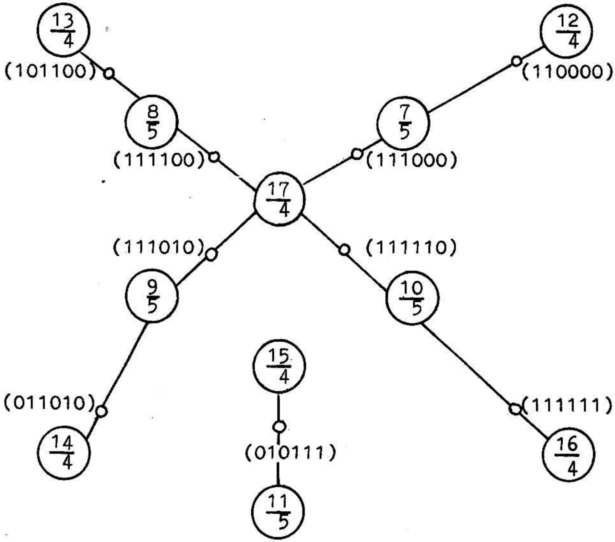


Bild 3

Wir wollen anhand des Plans von g_1 die minimalen ANF dieser Funktion bestimmen, wobei wir berücksichtigen, daß nach Tabelle 1 die PI 1, ..., 6 zum Kern von g_1 gehören, also in jede unverkürzbare ANF von g_1 eingehen, und daß die PI 18, 19 und 20 durch die Alternative der Kernimplikanten absorbiert werden, also in keine unverkürzbare ANF von g_1 eingehen (vgl. auch Punkt 3). Durch Fallunterscheidung hinsichtlich des Enthaltenseins des PI 17 in einer unverkürzbaren ANF von g_1 erhalten wir dann unmittelbar aus dem Plan von g_1, daß mit den Bezeichnungen $U_1 = U \vee 7 \vee \ldots \vee 10 \vee 15$, $U_2 = U \vee 12 \ldots \vee 17$, $U_3 = U \vee 7 \vee \ldots \vee 10 \vee 11$, wo $U = \bigvee i$ über alle $i = 1, \ldots, 6$, gilt:

$$M_k(g_1) = \{U_2\},\ M_1(g_1) = \{U_1, U_2\},\ M_s(g_1) = \{U_1, U_3\}.$$

Damit ist $g_1(x^6)$ in $F^{(5)}_{1,s}$ enthalten, und wir erhalten unter Berücksichtigung von $F^{(i)}_{1,s}(5) \neq \emptyset$ für $i = 1, \ldots, 4$ (vgl. /1/) die

Folgerung 7. Es gilt $n_{1,s} \leq 6$.

3. Wir wollen nun Möglichkeiten zur Vereinfachung des Plans einer BF betrachten. In /2/ wird der Begriff "regulärer Punkt bzgl. eines Intervalls" definiert. Wir betrachten hier schlechthin reguläre Punkte und Punktmengen, weil es uns im folgenden nicht nur darum geht, in einem noch näher zu präzisierenden Sinne "überflüssige" PI von f auszusondern, sondern darüberhinaus sämtliche in $\langle f \rangle$ enthaltenen "überflüssigen" Punkte. Diese Überlegungen kann man in gewissen Fällen wesentlich zur Vereinfachung des Plans einer BF ausnutzen.

Mit G(f) bezeichnen wir die gekürzte ANF der BF f, dann ist die gekürzte Überdeckung $\langle G(f) \rangle$ von $\langle f \rangle$ also gerade die Menge der maximalen Intervalle von f. Für $\alpha \in \langle f \rangle$ bezeichnen wir mit $B(\alpha, f)$ die Menge der maximalen Intervalle von f, die α enthalten.

Definition 8. Ein Punkt $\alpha \in \langle f \rangle$ heißt regulärer Punkt von f, wenn ein Punkt $\beta \in \langle f \rangle$, $\beta \neq \alpha$, mit $B(\beta, f) \subseteq B(\alpha, f)$ existiert. Wir nennen dann auch α regulär zu β und β heißt Bezugspunkt von α. Eine Menge $M \subseteq \langle f \rangle$ heißt reguläre Punktmenge (rPM) von f, wenn jeder Punkt aus M zu einem Punkt aus $\langle f \rangle \setminus M$ regulär ist. Insbesondere nennen wir eine rPM von f maximal (mrPM), wenn keine M echt umfassend rPM von f existiert.

Lemma 9. Sei M eine nichtleere Teilmenge von $\langle f \rangle$. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

1° M ist eine rPM von f.

2° Jede Überdeckung $\{\langle a_1\rangle, \ldots, \langle a_t\rangle\} \subseteq \langle G(f)\rangle$, die

$$\langle f\rangle \setminus M \subseteq \bigcup_{i=1}^{t} \langle a_i\rangle \qquad (15)$$

genügt, ist eine Überdeckung von $\langle f\rangle$.

Beweis: Sei M eine rPM von f. Da dann nach Definition 8 für jeden Punkt aus M ein Bezugspunkt in $\langle f\rangle \setminus M$ existiert, der wegen (15) in einem der Intervalle $\langle a_i\rangle$, $i = 1, \ldots, t$, enthalten ist, wird auch jeder Punkt aus M durch eines dieser Intervalle überdeckt. Sei nun M keine rPM. Dann existiert ein Punkt $\alpha \in M$, der keinen Bezugspunkt in $\langle f\rangle \setminus M$ besitzt. Die Punkte aus $\langle f\rangle \setminus M$, die keine Bezugspunkte von α sind – und das sind in diesem Falle ja sämtliche Punkte aus $\langle f\rangle \setminus M$ –, werden nun aber offenbar durch solche Intervalle überdeckt, die α nicht enthalten, womit die Existenz einer in $\langle G(f)\rangle$ enthaltenen Überdeckung nachgewiesen ist, die zwar (15) genügt, dennoch aber keine Überdeckung von $\langle f\rangle$ ist. In Lemma 9 haben wir die wesentliche Eigenschaft rPM formuliert, wir erhalten daraus jedoch noch keinen Aufschluß über ihre Zusammensetzung. Kommen wir nun zur Charakterisierung regulärer, insbesondere maximaler regulärer Punktmengen.

Sei $\langle G(f)\rangle = \{\langle a_1\rangle, \ldots, \langle a_t\rangle\}$. Wir definieren eine Zerlegung $Z(f) = \{E_1, \ldots, E_p\}$ der Menge $\langle f\rangle$ durch die folgende Äquivalenzrelation

$$\alpha \sim \beta \quad \text{gdw } B(\alpha, f) = B(\beta, f).$$

Jeder Äquivalenzklasse E_i, $1 \leqslant i \leqslant p$, entspricht genau eine Überdeckung $\langle G_i\rangle = B(\alpha, f)$ mit $\alpha \in E_i$. Offenbar ist $p \leqslant \min(|\langle f\rangle|, 2^t-1)$. Die Enthaltenseinsrelation in der Potenzmenge von $\langle G(f)\rangle$ induziert die folgende Halbordnung in $Z(f)$:

$$E_i \leqslant E_j \quad \text{gdw } \langle G_i\rangle \subseteq \langle G_j\rangle,\ i,j = 1, \ldots, p.$$

Wie üblich nennen wir nun ein Element $E \in Z(f)$ minimal, wenn kein von E verschiedenes Element $E' \in Z(f)$ mit $E' \lneq E$ existiert 15/. Dann ist das folgende Lemma leicht einzusehen.

Lemma 10: Eine Menge $M \subseteq \langle f\rangle$ ist genau dann eine rPM von f, wenn sie kein minimales Element von Z(f) umfaßt.

Man beachte nur, daß mit E, $E' \in Z(f)$, $E \lneq E'$, jeder Punkt α aus E' zu jedem von α verschiedenen (dieser Zusatz ist natürlich überflüssig für $E \neq E'$) Punkt $\beta \in E$ regulär ist.

<u>Folgerung 11.</u> Alle mrPM einer BF f enthalten die gleiche Anzahl von Punkten.

<u>Beweis:</u> Jede mrPM M von f hat offenbar die Gestalt $M = \langle f \rangle \setminus M'$, wo M' aus jedem minimalen Element von Z(f) genau einen Punkt enthält. Damit ist M i.A. nicht eindeutig bestimmt. Da aber Z(f) ein eindeutig bestimmtes System minimaler Elemente besitzt, ist folglich $|M|$ eindeutig bestimmt.

Ist $E \in H(f)$, $\langle a \rangle \in \langle G(f) \rangle$, so gilt offenbar entweder $E \supseteq \langle a \rangle$ oder $E \cap \langle a \rangle = \emptyset$. Damit ist eine Überdeckung $\langle A \rangle \subseteq \langle G(f) \rangle$ genau dann eine Überdeckung von $\langle f \rangle$, wenn jedes minimale Element von Z(f) in einem Intervall aus $\langle A \rangle$ enthalten ist, darüberhinaus ist $\langle A \rangle$ unverkürzbar, wenn jedes Intervall aus $\langle A \rangle$ ein solches minimales Element von Z(f) enthält, das in keinem weiteren Intervall aus $\langle A \rangle$ enthalten ist.

Sei nun M eine mrPM von f. Wir eliminieren im Plan von f sämtliche Punkte, die in M enthalten sind, einschließlich der danach eventuell isoliert liegenden (d.h. mit keinem Punkt verbundenen) Kreise (letztere entsprechen gerade den regulären Intervallen[16/] von f). Wir erhalten einen vereinfachten Plan von f. Er ist bis auf die Punkte aus den minimalen Elementen von Z(f) eindeutig bestimmt. Überdeckungen bzw. unverkürzbare Überdeckungen eines vereinfachten Plans von f seien wie im Falle des Plans von f definiert. Dann ist aus dem oben Gesagten leicht ersichtlich, daß die unverkürzbaren Überdeckungen des Plans von f für beliebige BF f mit denen eines beliebigen vereinfachten Plans von f übereinstimmen.

Wir merken noch an, daß der Plan einer BF f sämtliche Informationen enthält, die wir zu seiner Vereinfachung benötigen,

---

15/ Zum Beispiel ist die Menge der Randpunkte eines Kernintervalls von f stets ein minimales Element von Z(f).

16/ vgl. /2/.

mit anderen Worten, daß man aus dem Plan von f stets sämtliche vereinfachten Pläne von f erhält, da die Bezugspunkte eines Punktes des Plans - sofern sie existieren - ebenfalls im Plan enthalten sind. Bei der Vereinfachung des Plans von f gehen wir von einem beliebigen Punkt des Plans aus, der einen Bezugspunkt besitzt, eliminieren ihn und suchen einen nächsten Punkt, der nun in dem nach der Eliminierung des ersten Punktes entstandenen Plan einen Bezugspunkt besitzt, eliminieren auch diesen usw., bis keine Vereinfachung mehr möglich ist, d.h. in dem entstandenen Plan zu keinem Punkt mehr ein Bezugspunkt existiert. Dabei gibt es in dem Sinne keine schlechte Strategie, als der entstehende vereinfachte Plan, unabhängig davon, in welcher Reihenfolge und welche Punkte wir eliminieren, stets die gleiche Anzahl von Punkten enthält (vgl. Folgerung 11).

Uns kommt es nun aber im folgenden nicht darauf an, sämtliche unverkürzbaren ANF einer BF f zu ermitteln, sondern unser eigentliches Ziel ist ja die Bestimmung der minimalen unter ihnen. Dieses Ziel ist aber oftmals anhand eines noch einfacheren Plans bzw. noch einfacherer Pläne von f zu realisieren. Einen möglichen Weg zur weiteren Vereinfachung eines vereinfachten Plans von f mit dem Ziel der Bestimmung der minimalen ANF zeigen die folgenden beiden Lemmata auf.

M sei im folgenden eine beliebige mrPM von f, weiter sei $\langle a \rangle \in \langle G(f) \rangle$ weder regulär noch Kernintervall. Wir bezeichnen die Menge $\langle a \rangle \setminus M$, die dann nicht leer ist, mit E_a. Dann sind die folgenden beiden Lemmata unmittelbar einzusehen.

<u>Lemma 12:</u> Sei μ eines der KM k, l. Existiert eine Überdeckung $\langle A \rangle = \{\langle a_1 \rangle, \ldots, \langle a_r \rangle\} \subseteq \langle G(f) \rangle$ so daß

$$E_a \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} \langle a_i \rangle \tag{16}$$

und

$$\mu(A) < \mu(a) \tag{17}$$

erfüllt sind, so ist $\langle a \rangle$ in keiner bzgl. μ minimalen Überdekkung von $\langle f\rangle$ enthalten (vgl. /2/, Satz 10).

Lemma 13: Es sei μ eines der KM k, l, s. Existiert eine Überdeckung $\langle A\rangle = \{\langle a_1\rangle, \ldots, \langle a_r\rangle\} \subseteq \langle G(f)\rangle$, $\langle a\rangle \notin \langle A\rangle$, die (16) und

$$\mu(A) = \mu(a) \tag{18}$$

genügt, so erhalten wir aus jeder μ -minimalen Überdeckung von $\langle f\rangle$, die $\langle a\rangle$ enthält, eine weitere μ-minimale Überdeckung von $\langle f\rangle$, wenn wir $\langle a\rangle$ durch $\langle A\rangle$ ersetzen.

(16), (17) bzw. (18) sind anhand des vereinfachten Plans von f leicht zu überprüfen.

Beispiel 2. $g_2(x^7)$ werde durch die folgende ANF realisiert:

$$\begin{aligned} A_2(x^7) = {} & \overset{1}{x_1x_2x_4\bar{x}_7} \vee \overset{2}{\bar{x}_3x_4\bar{x}_7} \vee \overset{3}{x_4x_5\bar{x}_7} \vee \overset{4}{x_4x_6\bar{x}_7} \vee \overset{5}{x_1x_2x_3\bar{x}_5\bar{x}_6\bar{x}_7} \vee \\ & \vee \overset{6}{\bar{x}_3x_4x_5x_6} \vee \overset{7}{\bar{x}_1\bar{x}_2x_4\bar{x}_7} \vee \overset{8}{x_1\bar{x}_2x_5\bar{x}_7} \vee \overset{9}{\bar{x}_1\bar{x}_4\bar{x}_6x_7} \vee \overset{10}{\bar{x}_2\bar{x}_4\bar{x}_5x_7} \vee \\ & \vee \overset{11}{\bar{x}_1x_2x_6\bar{x}_7} \vee \overset{12}{x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_6\bar{x}_7} \vee \overset{13}{x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5x_6} \vee \overset{14}{\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_5\bar{x}_7} \vee \\ & \vee \overset{15}{\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4x_5\bar{x}_6} \vee \overset{16}{\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_5\bar{x}_6} \vee \overset{17}{x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_5\bar{x}_6} \vee \overset{18}{x_1\bar{x}_2x_3x_4\bar{x}_5x_6} \\ & \vee \overset{19}{\bar{x}_1x_2x_3x_4x_5\bar{x}_6} \vee \overset{20}{\bar{x}_1x_2\bar{x}_5\bar{x}_6x_7} \vee \overset{21}{\bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_6x_7} \vee \overset{22}{x_1\bar{x}_2\bar{x}_5\bar{x}_6x_7} \vee \\ & \vee \overset{23}{x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_5x_7} \vee \overset{24}{x_1\bar{x}_2x_3x_4\bar{x}_6x_7} \vee \overset{25}{x_1\bar{x}_2x_3x_4x_5\bar{x}_6} \vee \\ & \vee \overset{26}{\bar{x}_1x_2x_3x_4\bar{x}_5x_7} \vee \overset{27}{\bar{x}_1x_2x_3x_4\bar{x}_5x_6}. \end{aligned}$$

Aus Tabelle 3 (vgl. Anhang) geht hervor, daß A_2 gekürzt ist und daß die PI 5, ..., 11 den Kern von g_2 bilden. Des weiteren erhalten wir den in Bild 4 dargestellten Plan von g_2. Diesem wiederum entnehmen wir folgendes:

1° Die Menge $\{(1111110), (11o1010), (1101100)\}$ ist regulär, Bezugspunkte sind (1111010) bzw. (1101000). (19)

2° Die PI 13 und 15 kommen in keiner k- und in keiner l-minimalen ANF von g_2 vor (vgl. Lemma 12), folglich gehen die PI 12 und 14 in jede k- und in jede l-minimale ANF von g_2 ein.

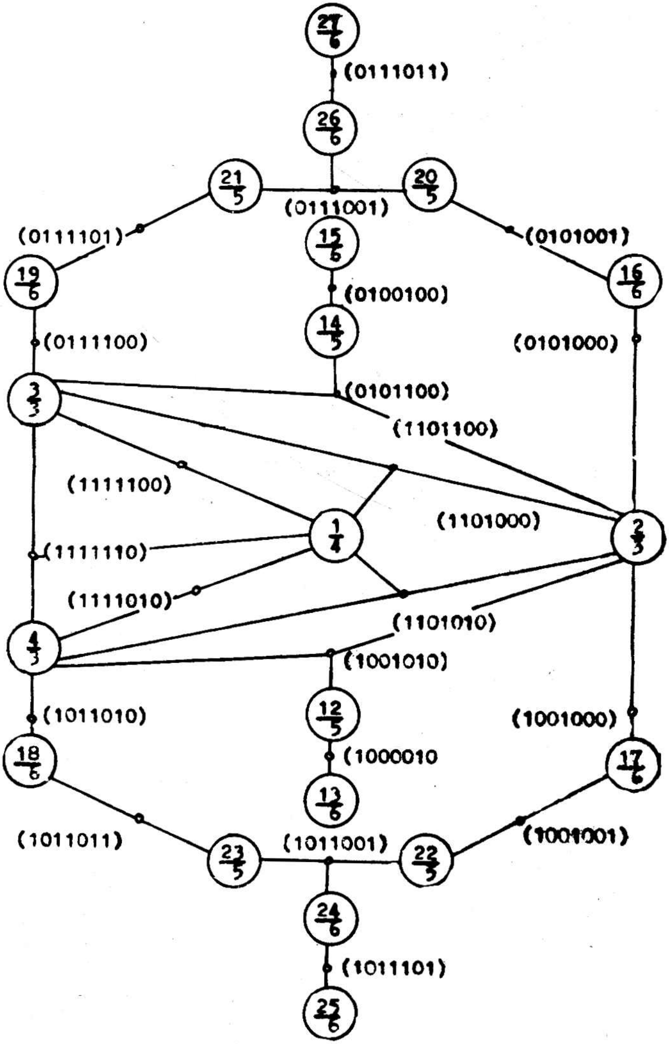

27/6
(0111011)
26/6
21/5
20/5
(0111001)
(0111101)
15/6
(0101001)
19/6
16/6
(0100100)
14/5
(0111100)
(0101000)
3/3
(0101100)
(1101100)
(1111100)
(1101000)
1/4
2/3
(1111110)
(1111010)
(1101010)
4/3
(1001010)
(1011010)
12/5
(1001000)
18/6
(1000010
17/6
13/6
(1011011)
(1011001)
(1001001)
23/5
22/5
24/6
(1011101)
25/6

Bild 4

Kommen 13 oder 15 in einer s-minimalen ANF von g_2 vor, so erhalten wir wieder s-minimale ANF von g_2, wenn wir sie durch 12 bzw. 14 ersetzen. (20)

3° Falls die PI 25 bzw. 27 in k-, l- oder s-minimalen ANF von g_2 vorkommen, so erhalten wir wieder entsprechend k-, l- oder s-minimale ANF von g_2, wenn wir sie durch 24 bzw. 26 ersetzen (vgl. Lemma 13). (21)

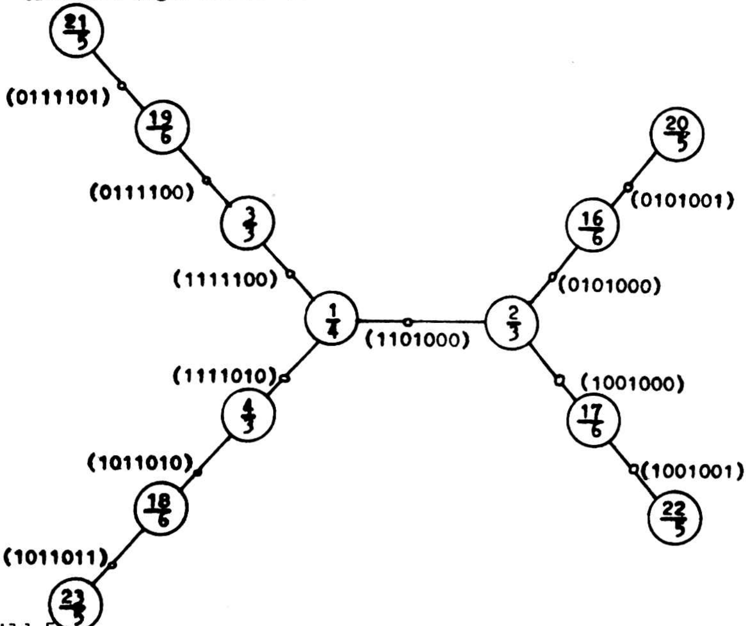


Bild 5

In Bild 5 ist ein stark vereinfachter Plan[17] von g_2 (12, 14, 24 und 26 seien in einer minimalen ANF von g_2 enthalten) dargestellt. Aus diesem Plan erhalten wir wegen der Lemmata 12, 13 und (19) - (21) bis auf eventuell möglichen Austausch von

---

17/ Wir wollen einen Plan, der aus dem vereinfachten Plan einer BF durch Anwendung der Hilfssätze 12 und 13 hervorgeht, zur Unterscheidung von diesem stark vereinfacht nennen.

a) 12 bzw. 14 durch 13 bzw. 15 und 24 bzw. 26 durch 25 bzw. 27 sämtliche s-minimalen ANF von g_2. (22)

b) 24 bzw. 26 durch 25 bzw. 27 sämtliche k- und sämtliche l-minimalen ANF von g_2. (23)

Aus dem stark vereinfachten Plan erhalten wir durch Fallunterscheidung hinsichtlich des Vorkommens der PI 1, ..., 4 die folgenden minimalen ANF von g_2:

$U_1 = U \vee U' \vee 1 \vee 16 \vee \ldots \vee 19$, wo $U = 5 \vee \ldots \vee 11$, $U' = 12 \vee 14 \vee 24 \vee 26$, ist sowohl l- als auch s-minimal, $U_2 = U \vee U' \vee 2 \vee 3 \vee 4 \vee 20 \vee \ldots \vee 23$ ist k-minimal.

Weitere minimale ANF von g_2 erhalten wir aus dem stark vereinfachten Plan, d.h. unter der Voraussetzung, daß U' in diese ANF eingeht, nicht. Prüfen wir nun (22) bzw. (23).
Da weder 2, 3, 4 noch 20, ..., 23 in U_1 vorkommen, müssen notwendig 12 und 14 wie auch 24 und 26 in U_1 eingehen (vgl. Bild 4), also ist keine der unter (22) bzw. (23) genannten Ersetzungen möglich. Mithin ist $M_s(g_2) = M_l(g_2) = \{U_1\}$.

In der k-minimalen ANF U_2 kommen die PI 20, ..., 23 vor, also sind (vgl. Bild 4) sämtliche der unter (23) genannten Ersetzungen möglich; die dadurch entstehenden k-minimalen ANF seien mit U_i, $i = 3, 4, 5$, bezeichnet. Damit erhalten wir $M_k(g_2) =$
$= \{U_j : j = 2, \ldots, 5\}$.
Folgerung 14. Es ist $F^{(4)}_{k,l}(7) \neq \emptyset$.

4. Durch die Angabe noch fehlender Beispiele führen wir den Beweis des Satzes zu Ende. Dabei geben wir jeweils nur noch die gekürzte ANF und den Plan der betreffenden BF an. Von der Richtigkeit dieser Angaben überzeugt man sich leicht - wie oben ausführlich beschrieben - anhand entsprechender Tabellen.
Beispiel 3. $g_3(x^5)$ sei die BF mit der gekürzten ANF

$$A_3 = \overset{1}{\bar{x}_1\bar{x}_3x_4} \vee \overset{2}{x_1\bar{x}_3\bar{x}_4} \vee \overset{3}{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4\bar{x}_5} \vee \overset{4}{\bar{x}_1x_2\bar{x}_4x_5} \vee \overset{5}{\bar{x}_2x_3x_4x_5} \vee$$
$$\vee \overset{6}{\bar{x}_1\bar{x}_2x_4x_5} \vee \overset{7}{x_1x_2\bar{x}_4\bar{x}_5} \vee \overset{8}{x_1x_2x_3\bar{x}_5} \vee \overset{9}{x_1x_3x_4} \vee \overset{10}{x_2\bar{x}_3x_5} \vee$$

$\vee \overset{11}{\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_5} \vee \overset{12}{x_1x_2x_4x_5} \vee \overset{13}{x_1\bar{x}_2x_4\bar{x}_5}.$

Aus dem Plan von g_3 (vgl. Bild 6) erhalten wir mit den Bezeichnungen $U = U' \vee 5 \vee 7 \vee 12 \vee 13$, $U_{i,j} = U' \vee i \vee j \vee 9 \vee 10 \vee 11$, wo $U' = 1 \vee \ldots \vee 4$, $M_s(g_3) = M_1(g_3) = \{U\}$, $M_k(g_3) = \{U, U_{i,j} : (i,j) \in \{\{5,6\} \times \{7,8\}\}\}$. Damit ist g_3 in $F^{(3)}_{k,s}(5)$ enthalten.

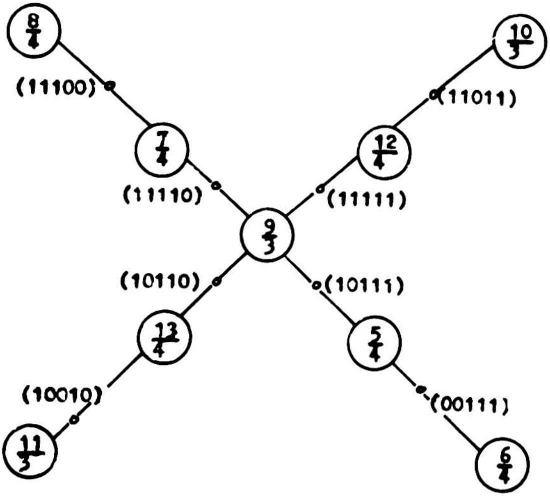


Bild 6

Beispiel 4. $g_4(x^5)$ sei die BF mit der gekürzten ANF

$$A_4 = \overset{1}{\bar{x}_1\bar{x}_2} \vee \overset{2}{\bar{x}_1x_5} \vee \overset{3}{\bar{x}_2x_3x_5} \vee \overset{4}{x_1\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5} \vee \overset{5}{\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5} \vee \overset{6}{x_2x_3\bar{x}_4\bar{x}_5} \vee$$
$$\vee \overset{7}{x_1x_2x_3x_4} \vee \overset{8}{x_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_5} \vee \overset{9}{x_1x_2\bar{x}_5} \vee \overset{10}{\bar{x}_1x_3\bar{x}_4} \vee \overset{11}{\bar{x}_1\bar{x}_3x_4} \vee \overset{12}{x_3x_4x_5}.$$

Mit den Bezeichnungen $U_1 = U' \vee 4 \vee 6 \vee 7 \vee 8$, $U_2 = U' \vee 4 \vee 9 \vee \ldots \vee 12$, $U_3 = U' \vee 5 \vee 9 \vee \ldots \vee 12$, wo $U' = 1 \vee 2 \vee 3$, erhalten wir aus dem Plan von g_4 (vgl. Bild 7) $M_s(g_4) = \{U_1\}$, $M_k(g_4) = \{U_2, U_3\}$ und $M_1(g_4) = M_s(g_4) \cup M_k(g_4)$, also ist g_4 in $F^{(4)}_{k,s}(5)$ enthalten.

Beispiel 5. $g_5(x^5)$ wird durch die folgende gekürzte ANF realisiert.

$$A_5 = \overset{1}{x_4x_5} \vee \overset{2}{\bar{x}_1x_3x_5} \vee \overset{3}{\bar{x}_1x_3x_4} \vee \overset{4}{\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5} \vee \overset{5}{x_1\bar{x}_4\bar{x}_5} \vee \overset{6}{\bar{x}_1\bar{x}_2x_5} \vee$$

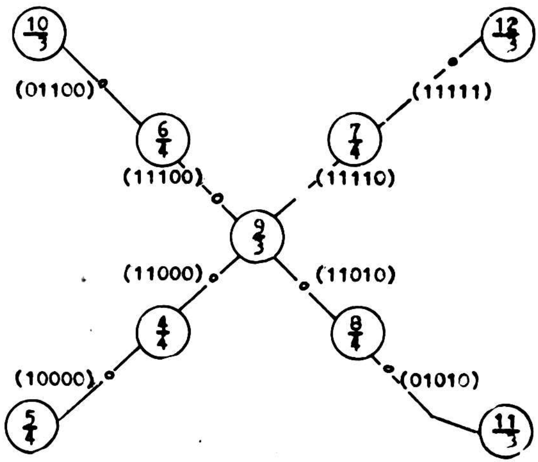


Bild 7

$$\vee \overset{7}{\bar{x}_2 x_3 x_5} \vee \overset{8}{x_2 x_3 x_4} \vee \overset{9}{\bar{x}_1 x_2 x_4} \vee \overset{10}{\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4} \vee \overset{11}{x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4} \vee \overset{12}{x_1 x_2 x_3 \bar{x}_5} \vee$$

$$\vee \overset{13}{\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_5}$$

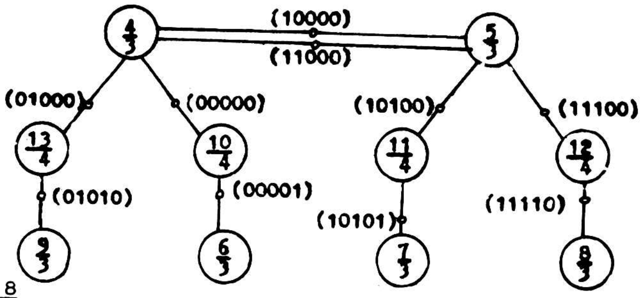


Bild 8

Die im Plan von g_5 nicht auftretenden PI 1, 2 und 3 gehören wiederum zum Kern von g_5. Durch Fallunterscheidung hinsichtlich des Vorkommens der PI 4 und 5 ermitteln wir sehr leicht anhand des Plans von g_5 (vgl. Bild 8) sämtliche minimalen ANF von g_5. Wir bezeichnen $U_1 = 1 \vee \ldots \vee 9$, $U_2 = 1 \vee \ldots \vee 4 \vee 6 \vee 9 \vee 11 \vee 12$ und $U_3 = 1 \vee 2 \vee 3 \vee 5 \vee 7 \vee 8 \vee 10 \vee 13$. Indem wir in den ANF U_2 und U_3 die PI 6, ..., 9 auf alle möglichen Arten durch die PI

10, 11, 12 bzw. 13 ersetzen, erhalten wir die unverkürzbaren ANF $U_4, \ldots, U_9$, auf deren ausführliche Notierung hier verzichtet werden soll. Wir erhalten $M_k(g_5) = \{U_1, U_2, U_3\}$, $M_s(g_5) = \{U_2, \ldots, U_9\}$ und $M_1(g_5) = M_k(g_5) \cap M_s(g_5)$.
Folglich ist g_5 in $F^{(5)}_{k,s}$ (5) enthalten.

Die Beispiele 3 - 5 ergeben zusammen mit Lemma 2 die

Folgerung 15. Es gilt $n_{k,s} = 5$.

Beispiel 6. $g_6(x^6)$ sei die BF mit der gekürzten ANF

$$
\begin{aligned}
A_6 = {} & \overset{1}{\bar{x}_4 x_6} \vee \overset{2}{\bar{x}_1 x_2 x_6} \vee \overset{3}{x_1 \bar{x}_4 x_5} \vee \overset{4}{x_1 \bar{x}_2 x_5 x_6} \vee \overset{5}{x_1 x_2 \bar{x}_3 x_5} \vee \overset{6}{x_2 x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5} \vee \\
& \vee \overset{7}{\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_5 \bar{x}_6} \vee \overset{8}{\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5} \vee \overset{9}{\bar{x}_3 x_5 x_6} \vee \overset{10}{x_1 x_3 \bar{x}_4} \vee \overset{11}{\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_4 \bar{x}_6} \vee \overset{12}{\bar{x}_2 x_4 \bar{x}_5 \bar{x}_6} \\
& \vee \overset{13}{\bar{x}_1 x_3 \bar{x}_5 x_6} \vee \overset{14}{\bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 x_5} \vee \overset{15}{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_6} \vee \overset{16}{\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 x_5} \vee \overset{17}{\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \bar{x}_5} \vee \\
& \vee \overset{18}{\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_5 \bar{x}_6} \vee \overset{19}{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5} \vee \overset{20}{x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_5 \bar{x}_6}.
\end{aligned}
$$

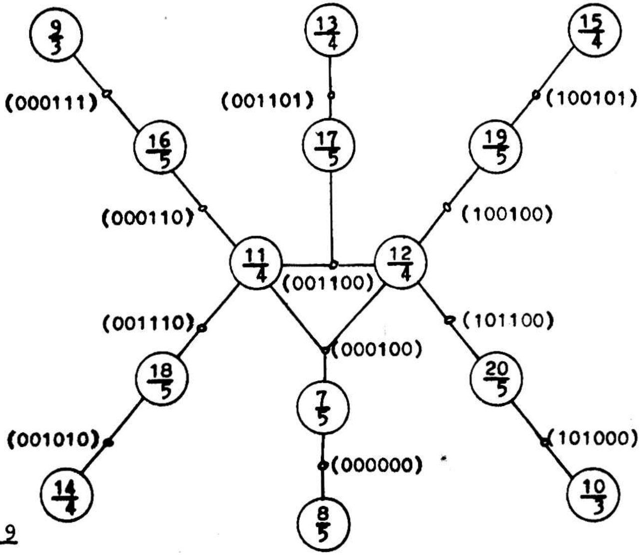


Bild 9

In Bild 9 ist der Plan von g_6 dargestellt. Wir unterscheiden bei der Diskussion des Plans von g_6 die Fälle, daß weder 11 noch 12, 12 aber nicht 11 (analog 11 aber nicht 12) bzw. beide PI in eine unverkürzbare ANF von g_6 eingehen. Dann erhalten wir, wenn wir berücksichtigen, daß der Kern von g_6 gerade aus den PI 1, ..., 6 besteht, mit den Bezeichnungen $U_{1,j} = U \vee 9 \vee \ldots \vee 15 \vee j$, $U_{2,j} = U \vee j \vee 12 \vee 10 \vee 13 \vee 15 \vee 16 \vee 18$, $U_{3,j} = U \vee j \vee 11 \vee 9 \vee 13 \vee 14 \vee 19 \vee 20$, $j = 7, 8$, $U_4 = U \vee 7 \vee 16 \vee \ldots \vee 20$, wo U die Alternative sämtlicher Kernimplikanten von g_6, daß gilt $M_k(g_6) = \{U_{1,j}, U_{2,j}, U_{3,j} : j = 7, 8\}$, $M_l(g_6) = \{U_{2,j}, U_{3,j}, U_4 : j = 7, 8\}$ und $M_s(g_6) = \{U_4\}$. Folglich ist g_6 in $F_{k,l}^{(5)}$ (6) enthalten.

Beachten wir weiter, daß $g_3 \in F_{k,l}^{(3)}$ (5) (vgl. Beispiel 3) und $g_4 \in F_{k,l}^{(2)}(5)$ (vgl. Beispiel 4), so erhalten wir unter Berücksichtigung von Folgerung 14 die
Folgerung 16. Es gilt $n_{k,l} \leqslant 7$.

Damit ist dann auch unser Satz vollständig bewiesen. Eine detaillierte Übersicht über die erzielten Resultate hinsichtlich der logischen Beziehungen zwischen je zweien der KM k,l und s enthält Tabelle 2 im Anhang. Dort notierte Ergebnisse, die nicht aus der vorliegenden Arbeit folgen, wurden entweder in /1/ bewiesen (Beziehungen zwischen l und s), oder der Beweis konnte wegen seines Umfangs im Rahmen dieser Arbeit nicht angeführt werden ($F_{k,l}^{(i)}(5) = \emptyset$ für $i = 4, 5$).

Schließlich sei noch erwähnt, daß von den 109 formal möglichen Fällen der Beziehung zwischen den drei Mengen $M_k(f)$, $M_l(f)$ und $M_s(f)$ tatsächlich nur 21 auftreten (daß die KM k,l und s logisch nicht unabhängig sind, ist ja wegen der für beliebige ANF A geltenden Beziehung $l(A) = k(A) + s(A)$ offensichtlich), und zwar schon für BF von 13 Veränderlichen.

	1 $\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_6$	2 $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_6$	3 $\bar{x}_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_6$	4 $x_2\bar{x}_3\bar{x}_4x_6$	5 $\bar{x}_2x_3x_5x_6$	6 $\bar{x}_1x_3x_4x_6$	7 $x_1x_2\bar{x}_4\bar{x}_5\bar{x}_6$	8 $x_1x_3x_4\bar{x}_5\bar{x}_6$	9 $x_2x_3\bar{x}_4x_5\bar{x}_6$
1 $\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_6$	(010100)	—	—	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$ 20	0	0	$x_2\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5\bar{x}_6$ 12	0	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_4x_5\bar{x}_6$ 14
2 $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_6$	(001000)		—	0	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_5$ 19	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$ 18	0	$\bar{x}_2x_3x_4\bar{x}_5\bar{x}_6$ 13	$\bar{x}_1x_3\bar{x}_4x_5\bar{x}_6$ 14
3 $\bar{x}_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_6$	(100110)			0	0	0	0	$x_1x_2x_4x_5x_6$ 13	0
4 $x_2\bar{x}_3\bar{x}_4x_6$	(110011)				0	0	$x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5$ 12	0	0
5 $\bar{x}_2x_3x_5x_6$	(101011)					—	0	0	0
6 $\bar{x}_1x_3x_4x_6$	(011101)						0	0	0
7 $x_1x_2\bar{x}_4\bar{x}_5\bar{x}_6$	$12 \vee 17$							$x_1x_2x_3\bar{x}_5\bar{x}_6$	$x_1x_2x_3\bar{x}_4\bar{x}_6$
8 $x_1x_3x_4\bar{x}_5\bar{x}_6$	$13 \vee 17$								0
9 $x_2x_3\bar{x}_4x_5\bar{x}_6$	$14 \vee 17$								
10 $x_1x_2x_3x_4x_5$	$16 \vee 17$								
11 $\bar{x}_1x_2x_4x_5x_6$	$6 \vee 15$								
12 $x_2\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5$	$1 \vee 4 \vee 7$								
13 $\bar{x}_2x_4\bar{x}_5x_6$	$2 \vee 3 \vee 8$								
14 $\bar{x}_1\bar{x}_4x_5\bar{x}_6$	$1 \vee 2 \vee 9$								
15 $\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_5$	$1 \vee 4 \vee 15$								
16 $x_3x_4x_5x_6$	$5 \vee 6 \vee 10$								
17 $x_1x_2x_3\bar{x}_6$	$7 \vee 8 \vee 9 \vee 10$								
18 $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$	$2 \vee 6$								
19 $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_5$	$2 \vee 5$								
20 $\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$1 \vee 4$								

Tabelle 1

	10 $x_1x_2x_3x_4x_5$	11 $\bar{x}_1x_2x_4x_5x_6$	12 $x_2x_3x_4x_5$	13 $\bar{x}_2x_4\bar{x}_5\bar{x}_6$	14 $\bar{x}_1\bar{x}_4x_5\bar{x}_6$	15 $\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_5$	16 $x_3x_4x_5x_6$	17 $x_1x_2x_3\bar{x}_6$	18 $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$	19 $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_5$	20 $\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4$
	0	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4x_5$ 15	—	—	—	—	0	0	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_5\bar{x}_6$ 2	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_5\bar{x}_6$ 2	—
	0	0	$\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5\bar{x}_6$ 1	—	—	$\bar{x}_1\bar{x}_3x_5\bar{x}_6$ 1	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4x_5$ 18	0	—	—	$\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_6$ 1
	0	0	0	—	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_5\bar{x}_6$ 1	$\bar{x}_1\bar{x}_3x_4x_5\bar{x}_6$ 1	0	0	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_4\bar{x}_6$ 2	$x_1x_2x_4x_5x_6$ 2	0
	0	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_5x_6$ 15	—	0	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4x_5$ 15	—	0	0	0	0	—
	$x_1x_3x_4x_5x_6$ 16	$\bar{x}_1x_3x_4x_5x_6$ 16	0	0	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4x_5$ 19	0	—	0	—	—	0
	$x_2x_3x_4x_5x_6$ 16	—	0	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4\bar{x}_5$ 18	0	$\bar{x}_1x_2x_4x_5x_6$ 11	—	0	—	—	0
	0	0	(110000)+	0	0	0	0	(111000)+	0	0	$x_2\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5\bar{x}_6$ 12
	$x_1x_2x_3x_4\bar{x}_6$ 17	0	0	(101100)+	0	0	0	(111100)+	$\bar{x}_2x_3x_4\bar{x}_5\bar{x}_6$ 13	0	0
	$x_1x_2x_3x_5\bar{x}_6$ 17	0	0	0	(011010)+	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_4x_5\bar{x}_6$ 14	0	(111010)+	0	$\bar{x}_1x_3\bar{x}_4x_5\bar{x}_6$ 14	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_4x_5\bar{x}_6$ 14
10		$x_2x_3x_4x_5x_6$ 16	0	0	0	0	(111111)+	(111110)+	0	0	0
11			0	0	0	(010111)+	(011111)e6	0	$\bar{x}_1x_3x_4x_5x_6$ 16	$\bar{x}_1x_3x_4x_5x_6$ 16	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_5x_6$ 15
12				0	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_6$ 20	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$ 20	0	$x_1x_2\bar{x}_4\bar{x}_5\bar{x}_6$ 7	0	0	(010000) e1 (010001) e4
13					0	0	0	$x_1x_3x_4\bar{x}_5\bar{x}_6$ 8	(001100) e2	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4\bar{x}_6$ 18	0
14						(010010) e1	0	$x_2x_3\bar{x}_4x_5\bar{x}_6$ 9	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_5\bar{x}_6$ 2	(001010) e2	(010010)e1
15							$\bar{x}_1x_2x_4x_5x_6$ 11	0	0	0	(010010)e1 (010011)e4
16								$x_1x_2x_3x_4x_5$ 10	(001111)e5	(001111) e5	0
17									0	0	0
18										(001110)e2 (001111)e5	0
19											0
20											

Tabelle 1

Tabelle 2

1. Logische Beziehungen zwischen den KM k und s

i \ m	1	2	3	4	5
1	+	+	+	+	+
2	-	-	-	+	+
3	-	-	-	-	+
4	-	-	-	-	+
5	-	-	-	-	+

2. Logische Beziehungen zwischen den KM l und s

i \ m	1	2	3	4	5	6
1	+	+	+	+	+	+
2	-	-	-	+	+	+
3	-	-	-	-	+	+
4	-	-	-	-	+	+
5	-	-	-	-	?	+

3. Logische Beziehungen zwischen den KM k und l

i \ m	1	2	3	4	5	6	7
1	+	+	+	+	+	+	+
2	-	-	-	-	+	+	+
3	-	-	-	-	+	+	+
4	-	-	-	-	-	?	+
5	-	-	-	-	-	+	+

Das Feld (i,m) ($1 \leq i \leq 5$, m=1,2, ...) der Tabelle unter 1. ist mit "+" markiert, wenn die Menge $F_{ks}^{(i)}$ nichtleer ist, mit "-", wenn diese Menge leer ist. Analog sind die Markierungen in den Tabellen unter 2. und 3. zu verstehen; das Fragezeichen bedeutet, daß diese Frage für den entsprechenden Fall noch nicht beantwortet werden konnte.

	1 $x_1x_2x_4\bar{x}_7$	2 $\bar{x}_3x_4\bar{x}_7$	3 $x_4x_5\bar{x}_7$	4 $x_4x_6\bar{x}_7$	5 $x_1x_2x_3\bar{x}_5\bar{x}_6\bar{x}_7$	6 $\bar{x}_3x_4x_5x_6$	7 $\bar{x}_1\bar{x}_2x_4\bar{x}_7$	8 $x_1\bar{x}_2x_5\bar{x}_7$	9 $\bar{x}_1\bar{x}_4\bar{x}_6x_7$	10 $\bar{x}_2\bar{x}_4\bar{x}_5x_7$	11 $\bar{x}_1x_2x_6\bar{x}_7$	12 $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_6\bar{x}_7$
1 $x_1x_2x_4\bar{x}_7$	2V3V4V5	(1101000) + (1101010) + (1101100) + (1101110) ∈ 6	(1101100) + (1101110) ∈ 6 (1111100) + (1111110) +	(1101010) + (1101110) ∈ 6 (1111010) + (1111110) +	—	—	0	$x_1x_4x_5\bar{x}_7$ 3	0	0	$x_2x_4x_6\bar{x}_7$ 4	$x_1x_2x_3x_6\bar{x}_7$ 4
2 $\bar{x}_3x_4\bar{x}_7$	1V7V8V11V12V14V16V17		(0001100) ∈ 7 (1001100) ∈ 8 (0101100) + (1101100) +	(0001010) ∈ 7 (0101010) ∈ 11 (1001010) + (1101010) +	$x_1x_2x_4\bar{x}_5\bar{x}_6\bar{x}_7$ 1	—	—	—	0	0	—	(1001010) + (1001110) ∈ 6
3 $x_4x_5\bar{x}_7$	1V7V8V11V14V19			(0011110) ∈ 7 (0111110) ∈ 11 (1011110) ∈ 8 (1111110) +	$x_1x_2x_3x_4\bar{x}_6\bar{x}_7$ 1	—	—	—	0	0	—	(1001110) ∈ 6
4 $x_4x_6\bar{x}_7$	1V7V8V11V12V18				$x_1x_2x_3x_4\bar{x}_5\bar{x}_7$ 1	—	—	—	0	0	—	(1001010) + (1001110) ∈ 6
5 $x_1x_2x_3\bar{x}_5\bar{x}_6\bar{x}_7$	(1110000)					0	0	0	0	0	0	0
6 $\bar{x}_3x_4x_5x_6$	(1001111)						—	—	0	0	—	—
7 $\bar{x}_1\bar{x}_2x_4\bar{x}_7$	(0011000)							$\bar{x}_2x_4x_5\bar{x}_7$ 3	0	0	$\bar{x}_1x_4x_6\bar{x}_7$ 4	$\bar{x}_2\bar{x}_3x_4x_6\bar{x}_7$ 4
8 $x_1\bar{x}_2x_5\bar{x}_7$	(1010100)								0	0	0	—
9 $\bar{x}_1\bar{x}_4\bar{x}_6x_7$	(0010101)									—	0	0
10 $\bar{x}_2\bar{x}_4\bar{x}_5x_7$	(0000011)										0	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5x_6$ 13
11 $\bar{x}_1x_2x_6\bar{x}_7$	(0110110)											0
12 $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_6\bar{x}_7$	2V8V13											

$\bar{x}_3x_4x_5x_6\bar{x}_7 \subseteq 6$

Tabelle 3

	13 $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5x_6$	14 $\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_5\bar{x}_7$	15 $\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4x_5\bar{x}_6$	16 $\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_5\bar{x}_6$	17 $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_5\bar{x}_6$
1 $x_1x_2x_4\bar{x}_7$	0	$x_2\bar{x}_3x_4x_5\bar{x}_7$ 3	0	$x_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_5\bar{x}_6\bar{x}_7$ 2	$x_1\bar{x}_3x_4\bar{x}_5\bar{x}_6\bar{x}_7$ 2
2 $\bar{x}_3x_4\bar{x}_7$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_5x_6\bar{x}_7$ 12	(0101100) + (0101110) ∈6	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_5\bar{x}_6\bar{x}_7$ 14	(0101000) +	(1001000) +
3 $x_4x_5\bar{x}_7$	0	(0101100) + (0101110) ∈6	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_5\bar{x}_6\bar{x}_7$ 14	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_6\bar{x}_7$ 2	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_6\bar{x}_7$ 2
4 $x_4x_6\bar{x}_7$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_5x_6\bar{x}_7$ 12	(0101110) ∈6	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_5\bar{x}_6\bar{x}_7$ 14	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_5x_7$ 2	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_5\bar{x}_7$ 2
5 $x_1x_2x_3\bar{x}_5\bar{x}_6\bar{x}_7$	0	0	0	0	0
6 $\bar{x}_3x_4x_5x_6$	0	—	0	0	0
7 $\bar{x}_1\bar{x}_2x_4\bar{x}_7$	0	$\bar{x}_1\bar{x}_3x_4x_5\bar{x}_7$ 3	0	$\bar{x}_1\bar{x}_3x_4\bar{x}_5\bar{x}_6\bar{x}_7$ 2	$\bar{x}_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_5\bar{x}_6\bar{x}_7$ 2
8 $x_1\bar{x}_2x_5\bar{x}_7$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4x_6\bar{x}_7$ 12	0	0	0	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_6\bar{x}_7$ 2
9 $\bar{x}_1\bar{x}_4\bar{x}_6x_7$	0	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4x_5\bar{x}_6$ 15	—	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_5\bar{x}_6x_7$ 20	0
10 $\bar{x}_2\bar{x}_4\bar{x}_5x_7$	—	0	0	0	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_5\bar{x}_6x_7$ 22
11 $\bar{x}_1x_2x_6\bar{x}_7$	0	—	0	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_5\bar{x}_7$ 2	0
12 $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_6\bar{x}_7$	(1000010) +	0	0	0	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_5\bar{x}_7$ 2
13 $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5x_6$	10∨12	0	0	0	0
14 $\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_5\bar{x}_7$	2∨11∨15		(0100100) +	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_6\bar{x}_7$ 2	0
15 $\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4x_5\bar{x}_6$	9∨14			0	0
16 $\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_5\bar{x}_6$	2∨20				0
17 $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_5\bar{x}_6$	2∨22				
18 $x_1\bar{x}_2x_3x_4\bar{x}_5x_6$	4∨23				
19 $\bar{x}_1x_2x_3x_4x_5\bar{x}_6$	3∨21				
20 $\bar{x}_1x_2\bar{x}_5\bar{x}_6x_7$	9∨16∨26				
21 $\bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_6x_7$	9∨19∨26				
22 $x_1\bar{x}_2\bar{x}_5\bar{x}_6x_7$	10∨17∨24				
23 $x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_5x_7$	10∨18∨24				

Tabelle 3

18 $x_1\bar{x}_2x_3x_4\bar{x}_5x_6$	19 $\bar{x}_1x_2x_3x_4x_5\bar{x}_6$	20 $\bar{x}_1x_2\bar{x}_5\bar{x}_6x_7$	21 $\bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_6x_7$	22 $x_1\bar{x}_2\bar{x}_5\bar{x}_6x_7$	23 $x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_5x_7$
$x_1x_3x_4\bar{x}_5x_6\bar{x}_7$ 4	$x_2x_3x_4x_5\bar{x}_6\bar{x}_7$ 3	0	0	0	0
$x_1\bar{x}_2x_4\bar{x}_5x_6\bar{x}_7$ 4	$\bar{x}_1x_2x_4x_5\bar{x}_6\bar{x}_7$ 3	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_5\bar{x}_6$ 16	0	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_5\bar{x}_6$ 17	0
$x_1\bar{x}_2x_3x_4x_6\bar{x}_7$ 4	(0111100) +	0	$\bar{x}_1x_2x_3x_4x_5\bar{x}_6$ 19	0	0
(1011010) +	$\bar{x}_1x_2x_3x_4x_5\bar{x}_7$ 3	0	0	0	$x_1\bar{x}_2x_3x_4\bar{x}_5x_6$ 18
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
$\bar{x}_2x_3x_4\bar{x}_5x_6\bar{x}_7$ 4	$\bar{x}_1x_3x_4x_5\bar{x}_6\bar{x}_7$ 3	0	0	0	0
$x_1\bar{x}_2x_3x_4x_6\bar{x}_7$ 4	0	0	0	0	0
0	$\bar{x}_1x_2x_3x_5\bar{x}_6x_7$ 21	—	—	$\bar{x}_2\bar{x}_4\bar{x}_5\bar{x}_6x_7$ 10	$\bar{x}_2x_3\bar{x}_4\bar{x}_5\bar{x}_6x_7$ 10
$x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_5x_6x_7$ 23	0	$\bar{x}_1\bar{x}_4\bar{x}_5\bar{x}_6x_7$ 9	$\bar{x}_1x_3\bar{x}_4\bar{x}_5\bar{x}_6x_7$ 9	—	—
0	$\bar{x}_1x_2x_3x_4x_5\bar{x}_7$ 3	0	0	0	0
$x_1\bar{x}_2x_4\bar{x}_5x_6\bar{x}_7$ 4	0	0	0	0	0
0	0	0	0	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5x_7$ 10	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_4\bar{x}_5x_6x_7$ 10
0	$\bar{x}_1x_2x_4x_5\bar{x}_6x_7$ 3	0	0	0	0
0	0	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_6x_7$ 9	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_4x_5\bar{x}_6x_7$ 9	0	0
0	0	(0101001) +	$\bar{x}_1x_2x_4\bar{x}_5\bar{x}_6x_7$ 21	0	0
0	0	0	0	(1001001) +	$x_1\bar{x}_2x_4\bar{x}_5\bar{x}_6x_7$ 22
18	0	0	0	$x_1\bar{x}_2x_3x_4\bar{x}_5x_7$ 23	(1011011) +
	19	$\bar{x}_1x_2x_3x_4\bar{x}_6x_7$ 21	(0111101) +	0	0
		20	(0110001) e9 (0111001) +	0	0
			21	0	0
				22	(1010001) e10 (1011001) +
					23

Tabelle 3

	24 $x_1\bar x_2x_3x_4\bar x_6x_7$	25 $x_1\bar x_2x_3x_4x_5\bar x_6$	26 $\bar x_1x_2x_3x_4\bar x_5x_7$	27 $\bar x_1x_2x_3x_4\bar x_5x_6$
1 $x_1x_2x_4\bar x_7$	0	$x_1x_3x_4x_5\bar x_6\bar x_7$ 3	0	$x_2x_3x_4\bar x_5x_6\bar x_7$ 4
2 $\bar x_3x_4\bar x_7$	0	$x_1\bar x_2x_4x_5\bar x_6\bar x_7$ 3	0	$\bar x_1x_2x_4\bar x_5x_6\bar x_7$ 4
3 $x_4x_5\bar x_7$	$x_1\bar x_2x_3x_4x_5\bar x_6$ 25	(1011100) ∈ 8	0	$\bar x_1x_2x_3x_4x_6\bar x_7$ 4
4 $x_4x_6\bar x_7$	0	$x_1x_2x_3x_4x_5x_7$ 3	$\bar x_1x_2x_3x_4\bar x_5x_6$ 27	(0111010) ∈ 11
5 $x_1x_2x_3\bar x_5\bar x_6\bar x_7$	0	0	0	0
6 $\bar x_3x_4x_5x_6$	0	0	0	0
7 $\bar x_1\bar x_2x_4\bar x_7$	0	$\bar x_2x_3x_4x_5\bar x_6\bar x_7$ 3	0	$\bar x_1x_3x_4\bar x_5x_6\bar x_7$ 4
8 $x_1\bar x_2x_5\bar x_7$	$x_1\bar x_2x_3x_4x_5\bar x_6$ 25	—	0	0
9 $\bar x_1\bar x_4\bar x_6x_7$	0	0	$\bar x_1x_2x_3\bar x_5\bar x_6x_7$ 20	0
10 $\bar x_2\bar x_4\bar x_5x_7$	$x_1\bar x_2x_3\bar x_5\bar x_6x_7$ 22	0	0	0
11 $\bar x_1x_2x_6\bar x_7$	0	0	$\bar x_1x_2x_3x_4\bar x_5x_6$ 27	
12 $x_1\bar x_2\bar x_3x_6\bar x_7$	0	0	0	0
13 $x_1\bar x_2\bar x_3\bar x_4\bar x_5x_6$	0	0	0	0
14 $\bar x_1x_2\bar x_3x_5\bar x_7$	0	0	0	0
15 $\bar x_1x_2\bar x_3\bar x_4x_5\bar x_6$	0	0	0	0
16 $\bar x_1x_2\bar x_3x_4\bar x_5\bar x_6$	0	0	$\bar x_1x_2x_4\bar x_5\bar x_6x_7$ 20	0
17 $x_1\bar x_2\bar x_3x_4\bar x_5\bar x_6$	$x_1\bar x_2x_4\bar x_5\bar x_6x_7$ 22	0	0	0
18 $x_1\bar x_2x_3x_4\bar x_5x_6$	$x_1\bar x_2x_3x_4\bar x_5x_7$ 23	0	0	0
19 $\bar x_1x_2x_3x_4x_5\bar x_6$	0	0	$\bar x_1x_2x_3x_4\bar x_6x_7$ 21	0
20 $\bar x_1x_2\bar x_5\bar x_6x_7$	0	0	(0111001) +	$\bar x_1x_2x_3x_4\bar x_5x_7$ 26
21 $\bar x_1x_2x_3\bar x_6x_7$	0	0	(0111001) +	$\bar x_1x_2x_3x_4\bar x_5x_7$ 26
22 $x_1\bar x_2\bar x_5\bar x_6x_7$	(1011001) +	$x_1\bar x_2x_3x_4\bar x_6x_7$ 24	0	0
23 $x_1\bar x_2x_3\bar x_5x_7$	(1011001) +	$x_1\bar x_2x_3x_4\bar x_6x_7$ 24	0	0
24 $x_1\bar x_2x_3x_4\bar x_6x_7$	24	(1011101) +	0	0
25 $x_1\bar x_2x_3x_4x_5\bar x_6$		25	0	0
26 $\bar x_1x_2x_3x_4\bar x_5x_7$			26	(0111011) +
27 $\bar x_1x_2x_3x_4\bar x_5x_6$				27

Tabelle 3

Literaturverzeichnis:

/1/ Lin Sin-Ljan Über den Vergleich der Kompliziertheit minimaler und kürzester ANF für Boolesche Funktionen. Probl. kyb. Bd. 18 (1967),russ.

/2/ J.I. Shurawlew Mengentheoretische Methoden in der Aussagenlogik. Probl. d. Kyb. Bd. 8 (1965, russ. Original 1962)

/3/ J.I. Shurawlew Über verschiedene Minimalitätsbegriffe bei ANF. Sibirski mat.Shurnal I,4 (1960, russ.)

eingegangen: 14. 12. 1976

Anschrift des Verfassers:

Dr. Karl Weber
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
DDR 25 Rostock
Universitätsplatz 1

Dietlinde Lau

Kongruenzen auf gewissen Teilklassen von $P_{k,l}$

Die vorliegende Arbeit ist ein Beitrag zur Untersuchung der Unteralgebra $P_{k,l}$ der k-wertigen Logik P_k, mit der sich auch die Arbeiten /1/ und /3/ beschäftigen. Es werden die Kongruenzen auf den vollen Urbildern von abgeschlossenen Klassen aus P_l, die alle Projektionen enthalten, bestimmt.

Sei $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. $P_{k,l}^{(n)}$ bezeichne die Menge aller Funktionen $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$: $E_k^n \longrightarrow E_l$ $(2 \leq l < k,\ n \geq 1)$. Weiter sei $P_{k,l} = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_{k,l}^{(n)}$. Die Anzahl der Variablen n einer Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ bezeichnen wir mit af.

Wir betrachten folgende Operationen über Funktionen aus $P_{k,l}$ (/4/):

Umordnen von Variablen – ζ, τ:

$$(\zeta f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) := f(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1)$$
$$(\tau f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) := f(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n)$$

Identifizieren von Variablen – Δ:

$$(\Delta f)(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) := f(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$

Hinzufügen fiktiver Variablen – ∇:

$$(\nabla f)(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) := f(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1})$$

Einsetzen von Funktionen – $*$:

$$(f * g)(x_1, x_2 \ldots, x_{n+m-1}) := f(g(x_1, \ldots, x_m), x_{m+1}, \ldots, x_{m+n-1}),$$

wobei f, g beliebige n- bzw. m-stellige Funktionen aus $P_{k,l}$ sind.

Eine Funktion $f \in P_{k,l}$ ist eine <u>Superposition über</u> K $\subseteq P_{k,l}$, wenn f aus Funktionen aus K durch die Operationen $\zeta, \tau, \Delta, \nabla, *$ in endlich vielen Schritten erhalten werden kann.

Die Menge aller Superpositionen $[K]$ über $K \subseteq P_{k,l}$ wird Abschluß (Hülle) von K genannt. Ist $K = [K]$, so heißt K abgeschlossen.

Mit pr bezeichnen wir einen Homomorphismus von $P_{k,l}$ auf P_l, der wie folgt definiert ist:

Sei $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_{k,l}$.

$\mathrm{pr}\, f(x_1, \ldots, x_n) = F(y_1, \ldots, y_n) \in P_l \;:\Leftrightarrow \forall\, \underline{a} \in E_l^n: f(\underline{a}) = F(\underline{a})$

Unter dem vollen Urbild von $K \subseteq P_l$ verstehen wir die Menge aller Funktionen $f \in P_{k,l}$ mit $\mathrm{pr}\, f \in K$ (Bezeichnung: $\mathrm{pr}^{-1}K$).

$\mathfrak{M}$ sei die Menge aller vollen Urbilder von abgeschlossenen Klassen $K \subseteq P_{k,l}$, die die Menge aller Projektionen

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n} \{E_n^i (y_1, \ldots, y_n) = y_i\}$$

enthalten.

Eine Äquivalenzrelation auf $K = [K] \subseteq P_{k,l}$ nennen wir eine Kongruenz auf K, wenn für beliebige $f_1, f_2, f_3, f_4 \in K$ gilt:

$$\begin{aligned} & f_1 \sim f_2\ (\varkappa),\ f_3 \sim f_4\ (\varkappa) \\ \Longrightarrow\ & \zeta f_1 \sim \zeta f_2\ (\varkappa),\ \tau f_1 \sim \tau f_2\ (\varkappa), \\ & \Delta f_1 \sim \Delta f_2\ (\varkappa),\ \nabla f_1 \sim \nabla f_2\ (\varkappa), \\ & f_1 * f_3 \sim f_2 * f_4\ (\varkappa). \end{aligned}$$

Wir schreiben $\varkappa \leq \varkappa'$, wenn für alle $f_1, f_2 \in K$ gilt:

$f_1 \sim f_2\ (\varkappa) \Longrightarrow f_1 \sim f_2\ (\varkappa')$.

Auf jeder abgeschlossenen Klasse existieren mindestens die drei trivialen Kongruenzen $\varkappa_0, \varkappa_a, \varkappa_1$ /4/:

$f \sim g\ (\varkappa_0) :\Leftrightarrow f = g$

$f \sim g\ (\varkappa_a) :\Leftrightarrow af = ag$

Bezüglich $\varkappa_1$ sind alle Funktionen untereinander kongruent. Falls $\varkappa$ eine Kongruenz auf $K = [K] \subseteq P_{k,l}$ ist, so ist $\mathrm{pr}\,\varkappa$:

$F \sim G\ (\mathrm{pr}\,\varkappa) \;:\Longleftrightarrow \exists\, f \in \mathrm{pr}^{-1}\{F\} \wedge \exists\, g \in \mathrm{pr}^{-1}\{G\}: f \sim g\ (\varkappa)$

eine Kongruenz auf $\mathrm{pr}\, K \subseteq P_l$.

Wir geben als nächstes einige Relationen an, von denen sich leicht nachprüfen läßt, daß es sich hierbei um Kongruenzen auf abgeschlossenen Klassen $K \subseteq P_{k,l}$ handelt.

Sei κ eine Kongruenz auf $\mathrm{pr}\, K \subseteq P_l$. Dann sei

$$f \sim g\ (\mathrm{pr}^{-1}\,\kappa) \quad :\Longleftrightarrow \quad \mathrm{pr}\, f \sim \mathrm{pr}\, g\ (\kappa).$$

Speziell ist $\mathrm{pr}^{-1}\,\kappa_1 = \varkappa_1$ und $\mathrm{pr}^{-1}\,K_a = \varkappa_a$.

Seien $A_1, A_2, \ldots, A_t$ gewisse nichtleere Teilmengen von $E_k \setminus E_l$ und $\mathfrak{A}^n(A_1, A_2, \ldots, A_t) := \{(a_1, \ldots, a_n) \in E_k^n \mid \exists\, i: A_i \nsubseteq \{a_1, \ldots, a_n\}\}$.

Die Kongruenz $\varkappa_{A_1, \ldots, A_t}$ auf einer abgeschlossenen Klasse $K \subseteq P_{k,l}$ sei wie folgt definiert:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \sim g\,(x_1, \ldots, x_n)\ (\varkappa_{A_1, \ldots, A_t})$$
$$:\Longleftrightarrow (af = ag) \wedge (\forall\, \underline{a} \in E_k^n \setminus \mathfrak{A}^n(A_1, \ldots, A_t) : f(\underline{a}) = g(\underline{a})).$$

Speziell ist $\varkappa_{\{l\},\{l+1\}, \ldots, \{k-1\}} = \mathrm{pr}^{-1}\kappa_o$.

Aus der Definition von $\varkappa_{A_1, \ldots, A_t}$ läßt sich herleiten, daß für beliebige $A_1, A_2, A_3 \subseteq E_k \setminus E_l$ gilt:

$$\varkappa_{A_1} \subseteq \varkappa_{A_1, A_2} \tag{1}$$
$$\varkappa_{A_1} \subsetneq \varkappa_{A_2} \Longleftrightarrow A_2 \subsetneq A_1 \tag{2}$$
$$\varkappa_{A_1, A_2} \quad \varkappa_{A_3} \Longleftrightarrow A_3 \subseteq A_1 \cap A_2 \tag{3}$$
$$\varkappa_{A_1} \not\lesseqgtr \varkappa_{A_2} \Longleftrightarrow A_1 \not\lesseqgtr A_2 \tag{4}$$
$$\varkappa_{A_1, A_2} = \varkappa_{A_1} \Longleftrightarrow A_1 \subseteq A_2 \tag{5}$$

Unser Ziel ist es zu zeigen, daß auf $M \in \mathfrak{M}$ nur die oben angegebenen Kongruenzen existieren. Wir beweisen dazu zunächst fünf Lemmata.

Analog zu /2/, Lemma 1 gilt:

Lemma 1. Sei $\varkappa$ eine Kongruenz auf $M \in \mathfrak{M}$, und es existieren $\varkappa$-kongruente Funktionen $f, g \in M$ mit $af \neq ag$. Dann ist $\varkappa = \varkappa_1$.

Beweis: O.B. d. A. können wir $af = n > ag$ annehmen. Folglich ist $h(x_1, x_2) := \Delta^{n-2} f \sim \Delta^{n-2} g =: t\,(x_1)\ (\varkappa)$.

Zu M gehören die Funktionen

$$e_i^n(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} x_i & \text{für } x_i \in E_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$(1 \leq i \leq n,\ n \geq 1)$.

Somit gilt

$$e_3^3 = e_2^2 * h \sim e_2^2 * t = e_2^2 \ (\varkappa)$$

und

$$e_2^2 = \Delta e_3^3 \sim \Delta e_2^2 = e_1^1 \ (\varkappa).$$

Hieraus läßt sich für beliebige m, $p \geq 1$

$$e_m^m \sim e_p^p \ (\varkappa)$$

ableiten. Damit gilt für alle $f(x_1, \ldots, x_n) \in M$:

$$e_1^1 * f = f \sim e_2^2 * f = e_{n+1}^{n+1} \sim e_1^1 \ (\varkappa),$$

d.h. $\varkappa = \varkappa_1$, w.z.b.w.

<u>Lemma 2.</u> Sei $\emptyset \neq A \subsetneq E_k \setminus E_1$, $\varkappa$ eine Kongruenz auf $M \in \mathfrak{M}$ und $f(x_1, \ldots, x_n), g(x_1, \ldots, x_n)$ $\varkappa$-kongruente Funktionen aus M, für die ein $\underline{a} \in (A \cup E_1)^n \cap \mathfrak{A}^n(A)$ mit $f(\underline{a}) \neq g(\underline{a})$ existiert. Dann ist $\varkappa_A \leq \varkappa$.

<u>Beweis:</u> Sei $\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. O. B. d. A. können wir $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\} = A$, $|A| = r$ und $\{a_{r+1}, \ldots, a_n\} \subseteq E_1$ annehmen.

Zu M gehören die Funktionen

$$t_a(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in E_1 \\ a & \text{sonst} \end{cases} \qquad (a \in E_1).$$

Folglich ist

$$f(x_1, \ldots, x_r, t_{a_{r+1}}(x_1), \ldots, t_{a_n}(x_1)) =: f'(x_1, \ldots, x_r)$$

$$\sim g(x_1, \ldots, x_r, t_{a_{r+1}}(x_1), \ldots, t_{a_n}(x_1)) =: g'(x_1, \ldots, x_r) \ (\varkappa)$$

und

$$f'(a_1, \ldots, a_r) \neq g'(a_1, \ldots, a_r).$$

Mit $f_1(x_1, \ldots, x_m)$ und $f_2(x_1, \ldots, x_m)$ seien zwei beliebige Funktionen aus M bezeichnet, die auf Tupeln aus $E_k^m \setminus \mathfrak{A}^m(A)$ übereinstimmen, $m \geqslant r$. Wir haben zu zeigen, daß $f_1 \sim f_2$ $(\varkappa)$. Dazu führen wir noch einige Bezeichnungen ein.

$I = (i_1, \ldots, i_r)$ sei eine Variation der Zahlen $1, 2, \ldots, m$, $x_I = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})$ und $I_1, I_2 \ldots, I_t$ alle möglichen Variationen von $1, 2, \ldots, m$ zur r-ten Klasse (d.h. $t = \frac{m!}{(m-r)!}$).

Zu M gehört auch die Funktion

$$h(x_1,\ldots,x_m,z_1,\ldots,z_t) = \begin{cases} f_1(x_1,\ldots,x_m) \text{ für } (x_1,\ldots x_m) \in \\ \qquad \mathfrak{A}^m(A) \wedge \forall i\colon z_i = f`(x_{I_i}) \,. \\ f_2(x_1,\ldots,x_m) \text{ sonst} \end{cases}$$

Somit ist

$$h(x_1, \ldots, x_m, f`(x_{I_1}), \ldots, f`(x_{I_t})) = f_1(x_1, \ldots, x_m)$$
$$\sim h(x_1, \ldots, x_m, g`(x_{I_1}),\ldots, g`(x_{I_t})) = f_2(x_1, \ldots, x_m) \; (\varkappa),$$

d.h. $\varkappa_A \leqslant \varkappa$.

<u>Lemma 3.</u> Sei $\varkappa$ eine Kongruenz auf einem beliebigen vollen Urbild M aus $P_{k,1}$, $A_1, A_2, \ldots, A_t, A_{t+1} \subseteq E_k \setminus E_1$ und $\varkappa_{A_1, \ldots, A_t}$, $\varkappa_{A_{t+1}} \leqslant \varkappa$. Dann gilt $\varkappa_{A_1, \ldots, A_t, A_{t+1}} \leqslant \varkappa$.

<u>Beweis:</u> Falls ein $i (1 \leqslant i \leqslant t)$ mit $A_i \subseteq A_{t+1}$ existiert, so ist $\varkappa_{A_1, \ldots, A_t, A_{t+1}} = \varkappa_{A_1, \ldots, A_t} \leqslant \varkappa$. Sei jetzt $A_{t+1} \not\supseteq A \in \{A_1, \ldots, A_t\}$ und $f(x_1, \ldots, x_n), g(x_1, \ldots, x_n) \in M$ mit $f(\underline{a}) = g(\underline{a})$ für alle $\underline{a} \in E_k^n \setminus \mathfrak{A}^n(A_1, A_2, \ldots, A_t, A_{t+1})$.

Da $\varkappa_{A_1, \ldots, A_t} \leqslant \varkappa$, gilt

$$f(x_1, \ldots, x_n)$$
$$\sim f`(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} g(x_1, \ldots, x_n) \text{ für } (x_1,\ldots,x_n) \\ \qquad\qquad\qquad \in \mathfrak{A}^n(A_1,\ldots,A_t) \; (\varkappa). \\ f(x_1, \ldots, x_n) \text{ sonst} \end{cases}$$

Wegen $\varkappa_{A_{t+1}} \leqslant \varkappa$ ist außerdem

$$f'(x_1, \dots, x_n) \sim g(x_1, \dots, x_n) \ (\varkappa),$$

d.h. $f \sim g$ $(\varkappa)$. Folglich ist $\varkappa_{A_1, A_2, \dots, A_t, A_{t+1}} \leq \varkappa$.

<u>Lemma 4.</u> Sei $\varkappa$ eine Kongruenz auf $M \in \mathfrak{M}$. Wenn $\varkappa$-kongruente Funktionen $f(x_1, \dots, x_n)$, $g(x_1, \dots, x_n) \in M$ existieren, die sich auf einem Tupel $\underline{a} \in E_l^n$ unterscheiden, dann ist $pr^{-1}\mathbf{K}_0 \leq \varkappa$.

<u>Beweis:</u> Sei $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ und

$$t_a(x) = \begin{cases} x \text{ für } x \in E_l \\ a \text{ sonst} \end{cases}, \quad a \in E_l.$$

Wegen $f \sim g$ ist

$$f'(x) := f(t_{a_1}(x), \dots, t_{a_n}(x)) \sim g(t_{a_1}(x), \dots, t_{a_n}(x)) =: g'(x) \ (\varkappa).$$

Da $f(\underline{a}) \neq g(\underline{a})$, gilt für beliebiges $c \in E_k \setminus E_l$: $f'(c) \neq g'(c)$. Unter Verwendung von Lemma 2 folgt hieraus, daß

$$\varkappa_{\{l\}}, \varkappa_{\{l+1\}}, \dots, \varkappa_{\{k-1\}} \leq \varkappa.$$

Aus Lemma 3 ergibt sich dann die Behauptung:

$$\varkappa_{\{l\},\{l+1\}, \dots, \{k-1\}} = pr^{-1}\mathbf{K}_0 \leq \varkappa .$$

<u>Lemma 5.</u> Sei $\varkappa$ eine Kongruenz auf $M \in \mathfrak{M}$ und $pr\,\varkappa = \mathbf{K} \neq \mathbf{K}_0$. Dann ist $\varkappa = pr^{-1}\mathbf{K}$.

<u>Beweis:</u> Offensichtlich ist $\varkappa \leq pr^{-1}\mathbf{K}$. Falls $pr\,\varkappa = \mathbf{K}_1$, so existieren in M zwei $\varkappa$-kongruente Funktionen mit verschiedenen Variablenzahlen. Es gilt dann nach Lemma 1: $\varkappa = \varkappa_1 = pr^{-1}\mathbf{K}_1$. Wenn $pr\,\varkappa \neq \mathbf{K}_1$ ist, dann haben alle $\varkappa$-kongruenten Funktionen aus M die gleiche Variablenzahl. Da $pr\,\varkappa \neq \mathbf{K}_0$, existieren $\varkappa$-kongruente Funktionen $f(x_1, \dots, x_n)$, $g(x_1, \dots, x_n)$ mit $f(\underline{a}) \neq g(\underline{a})$ für ein gewisses Tupel $\underline{a} \in E_l^n$. Nach Lemma 4 ist dann $pr^{-1}\mathbf{K}_0 \leq \varkappa$. Hieraus und aus $pr\,\varkappa = \mathbf{K}$ läßt sich leicht $pr^{-1}\mathbf{K} \leq \varkappa$ herleiten. Es gilt also $\varkappa = pr^{-1}\mathbf{K}$, w. z. b. w.

Faßt man Lemma 1 - 5 zusammen, so ergibt sich

Satz: Eine nichttriviale Kongruenz auf $M \in \mathfrak{M}$ ist entweder vom Typ $pr^{-1}\mathbf{K}$ ($\mathbf{K}$ Kongruenz auf pr M) oder hat die Form $\varkappa_{A_1, \ldots, A_t}$, wobei $A_1, \ldots, A_t \subseteq E_k \setminus E_1$ und $A_i \nsubseteq A_j$ für alle $i \neq j$.

In /2/ wurden von V.V. Gorlov sämtliche Kongruenzen auf den abgeschlossenen Klassen von P_2 ermittelt. Damit sind bis auf drei Klassen nach dem oben bewiesenen Satz auch alle Kongruenzen auf den vollen Urbildern von $P_{k,2}$ bekannt.

Literatur:

/1/ Burosch, G., Dassow, J., Harnau, W., Lau, D. Über Algebren von Prädikaten, (Manuskript)

/2/ Gorlov, V.V. O kongruencijach na zamknutych klassach Posta, Matematičeskie zametki, 13, 5, 725 - 734, (1973)

/3/ Lau, D. Prävollständige Klassen von $P_{(k,1)}$, EIK, 11, 10 - 12, 624 - 626, (1975)

/4/ Mal'cev, A.I. Iterativnye algebry i mnogoobrazija Posta, Algebra i logika, 5, 2, 5 - 24, (1966).

eingegangen: 21. 9. 1976

Anschrift des Verfassers:

Dipl.-Math. Dietlinde Lau
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
25 Rostock
Universitätsplatz 1

Hans-Dietrich Gronau

Erzeugung dualer Vektoren durch gewisse abgeschlossene Mengen BOOLEscher Funktionen

In /1/ begann der Autor die Untersuchung der Vollständigkeit von Mengen dualer Vektoren bzgl. der abgeschlossenen Mengen BOOLEscher Funktionen, und zwar wurden dort als abgeschlossene Mengen die Mengen selbstdualer Funktionen betrachtet, während wir uns in dieser Arbeit mit den Mengen C_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ F_i^{∞} $(i = 1, 4, 5, 8)$ und F_i^{μ} $(i = 1, 4, 5, 8)$, also genau den nicht monotonen und nicht selbstdualen Mengen von C_i, D_i, A_i, F_i^{∞} und F_i^{μ} beschäftigen.

Eine Einführung in die Problemstellung und alle hier nicht definierten Begriffe findet man in /1/.
Zusätzlich definieren wir:

Def. 1: Eine Menge $M \subseteq V_k$ erfüllt genau dann die Bedingung B_1, wenn alle Zeilen von M paarweise untereinander verschieden sind.

Def. 2: Es sei $a \in \{o, 1\}$. Eine Menge $M \subseteq V_k$ erfüllt genau dann die Bedingung $B_2(a)$, wenn in M die Zeile $(a, a, \ldots, a)$ nicht vorkommt.

Def. 3: Es sei $a \in \{0,1\}$ und $p \geqq 2$ eine natürliche Zahl. Dann erfüllt eine Menge $M \subseteq V_k$ genau dann die Bedingung $B_3(a,p)$, wenn jede Matrix, die aus genau p Zeilen von M gebildet wird, die Spalte $\begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix}$ enthält.

1. Die Mengen C_i

Satz 1.1: Eine Menge $M \subseteq V_k$ ist genau dann $C_1/C_2/C_3/C_4$-vollständig, wenn M die Bedingung $B_1/B_1 \wedge B_2(1)/B_1 \wedge B_2(o)/$ $B_1 \wedge B_2(o) \wedge B_2(1)$ erfüllt.

Beweis: 1. Notw.: Erfüllt M die Bedingung B_1 nicht, so gibt es in M mindestens zwei identische Zeilen, so daß bei Anwendung einer beliebigen Funktion f stets die gleichen

Funktionswerte in diesen Zeilen entstehen, d.h., es lassen sich nicht alle dualen Vektoren erzeugen.

Alle Funktionen $f \in C_2$ und $f \in C_4$ haben überdies die Eigenschaft $f(1, 1, \ldots, 1) = 1$, so daß bei Vorhandensein der Zeile $(1, 1, \ldots, 1)$ in M nur Vektoren erzeugt werden können, die in dieser Zeile ebenfalls eine 1 haben, d.h., es lassen sich nicht alle dualen Vektoren erzeugen.

Analoges gilt natürlich auch für C_3 und C_4, da für alle Funktionen $f \in C_3$ und $f \in C_4$ $f(o, o, \ldots, o) = o$ ist.

<u>2. Hinl.:</u> M erfülle die angegebenen Bedingungen. M habe den Zeilenaufbau

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$$

Wir geben für jede der Mengen C_i und jeden dualen Vektor

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} \in V_k$$

eine Funktion $f \in C_i$ mit $f(M) = \underline{a}$ an.

<u>C_1, C_2:</u>

$$f(\alpha) = \begin{cases} a_i & \text{für } \alpha = \alpha_i \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

<u>C_3, C_4:</u>

$$f(\alpha) = \begin{cases} o & \text{für } \alpha = (o, o, \ldots, o) \\ a_i & \text{für } \alpha = \alpha_i \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

<u>Satz 1.2.:</u> Für die C_i-Breite gilt:

$$b_{C_i}(V_k) = \begin{cases}]\log_2 k[& \text{für } i = 1, \\ ]\log_2 (k+1)[& \text{für } i = 2,\ 3, \\ ]\log_2 (k+2)[& \text{für } i = 4. \end{cases}$$

<u>Beweis:</u>

1. Wir betrachten (o,1)-Matrizen N_i (i = 1, 2, 3, 4) vom Format $a_i$xb. Wir wählen b fest und bestimmen maximale a_i, so daß die Matrix N_i C_i-vollständig ist. N_1 besteht aus paarweise verschiedenen Zeilen, derer gibt es sicher genau 2^b. In N_2 und N_3 dürfen je eine Zeile, nämlich (o,o, ..., o) bzw. (1,1, ..., 1) nicht vorkommen und in N_4 schließlich dürfen beide Zeilen nicht vorkommen, so daß wir für die a_i erhalten:

$$a_1 = 2^b; \quad a_2 = a_3 = 2^b-1 \ ; \ a_4 = 2^b-2. \tag{1}$$

2. Die C_i-Breite ist nun sicher die kleinste Zahl b, so daß aber noch $a_i \geqq k$ ist, d.h.

$$b_{C_i}(V_k) = \Big]\min_{\substack{b \\ a_i \geqq k}} b(a_i)\Big[\ ,$$

da überdies die C_i-Breite eine natürliche Zahl ist. Schließlich läßt sich auch sofort eine C_i-vollständige Matrix M vom Format $(b_{C_i}(V_k))$xk angeben.

Damit ist Satz 1.2. bewiesen.

<u>Satz 1.3:</u> Für die Mächtigkeit $m(C_i)$ einer maximalen C_i-Basis von V_k gilt

$$m(C_i) = \begin{cases} k - 1 & \text{für } i = 1, \\ k & \text{für } i = 2,\ 3, \\ k + 1 & \text{für } i = 4. \end{cases}$$

<u>Beweis:</u> Es bezeichne m_k^i die Mächtigkeit einer maximalen C_i-Basis von V_k.

M sei eine beliebige maximale C_i-Basis von V_k. Wird von M eine Spalte gestrichen, so entsteht die Matrix M', die nicht mehr C_i-vollständig ist, d.h., es gibt in M' mindestens zwei identische Zeilen α_ν und $\alpha_{\nu'}$ ($\nu \neq \nu'$) oder mindestens eine Zeile α=

$(o, o, \ldots, o)$ falls $i = 3, 4$ oder mindestens eine Zeile $\beta = (1, 1, \ldots, 1)$ falls $i = 2, 4$.

Streichen wir jetzt die Zeilen α, β und von jeder Menge gleicher Zeilen alle bis auf jeweils einen Repräsentanten, so erhalten wir eine Matrix M'' vom Format $1 \times m^i_{k-1}$ mit $1 \leqq k - 1$. M'' ist nun C_i-Basis von V_1, denn sicher ist M'' ein C_i-Erzeugendensystem von V_1 und wenn es in M'' eine Spalte gäbe, so daß M'' nach Streichen dieser Spalte immer noch C_i-vollständig ist, könnte man die entsprechende Spalte auch in M streichen, ohne daß die C_i-Vollständigkeit verletzt worden wäre.

Somit haben wir $m^i_k - 1 \leqq m^i_{k-1}$ $(i = 1, 2, 3, 4,)$ und per Induktion

$$m^i_k \leqq k - 2 + m^i_2. \tag{2}$$

Sicher muß in jeder C_i-Basis M von V_2 die Spalte $\binom{o}{1}$(oder $\binom{1}{o}$) auftauchen. $\left\{\binom{o}{1}\right\}$ ist aber schon C_1-Basis von V_2, d.h. $m^1_2 = 1$. In einer C_2-Basis gibt es neben $\binom{o}{1}$ mindestens eine Spalte, die in der zweiten Komponente eine o hat. Sowohl $\left\{\binom{o}{1}, \binom{o}{o}\right\}$ als auch $\left\{\binom{o}{1}, \binom{1}{o}\right\}$ sind C_2-Basen, d.h. $m^2_2 = 2$. Analog ist $m^3_2 = 2$. Sicher ist V_2 selbst keine C_4-Basis, jedoch $V_2 \setminus \left\{\binom{o}{1}\right\}$ und $V_2 \setminus \left\{\binom{1}{o}\right\}$, also $m^4_2 = 3$.

Aus den Resultaten für m^i_2 und der Rekursionsformel (2) erhalten wir

$$m(C_i) \leqq \begin{cases} k - 1 & \text{für } i = 1, \\ k & \text{für } i = 2, 3, \\ k + 1 & \text{für } i = 4. \end{cases}$$

Um nachzuweisen, daß in (3) stets das Gleichheitszeichen gilt, geben wir je eine C_i-Basis der Mächtigkeit $m(C_i)$ an.

$\underline{C_1:}$ $\left.\underbrace{\begin{pmatrix} ooo & \ldots & o \\ 1oo & \ldots & o \\ o1o & \ldots & o \\ \ldots & & . \\ \ldots & & . \\ ooo & \ldots & 1 \end{pmatrix}}_{k-1}\right\} k$ $\qquad$ $\underline{C_2:}$ $\left.\underbrace{\begin{pmatrix} o11 & \ldots & 1 \\ 1o1 & \ldots & 1 \\ 11o & \ldots & 1 \\ \ldots & & . \\ \ldots & & . \\ 111 & \ldots & o \end{pmatrix}}_{k}\right\} k$

C_3:
$$\left.\underbrace{\begin{pmatrix} 100 \dots 0 \\ 010 \dots 0 \\ 001 \dots 0 \\ \dots \quad . \\ \dots \quad . \\ 000 \dots 1 \end{pmatrix}}_{k}\right\} k \qquad C_4: \left.\underbrace{\begin{pmatrix} 011 \dots 1 \\ 001 \dots 1 \\ 000 \dots 1 \\ \dots \quad . \\ \dots \quad . \\ 000 \dots 1 \end{pmatrix}}_{k+1}\right\} k$$

Es ist leicht zu sehen, daß die Matrizen C_i-vollständig sind. Aus der folgenden Tabelle ist ersichtlich, daß sie sogar C_i-Basen sind.

C-Menge	gestrichene Spalte	C-abhängige Zeilen
C_1	i. (i = 1, ..., k-1)	1., (i + 1).
C_2, C_3	i. (i = 1, ..., k)	i.
C_4	1.	1.
	i. (i = 2, ..., k)	(i - 1)., i.
	(k + 1).	k.

2. Ein Satz über Vollständigkeit bzgl. dualer Mengen

Satz 2: Es sei C eine abgeschlossene Menge BOOLEscher Funktionen und C^* die zu C duale Menge. Dann ist $M \subseteq V_k$ genau dann C-vollständig, wenn $\bar{M}$ [1] C^*-vollständig ist.

Beweis: Wir beweisen zunächst für eine beliebige Menge $M \subseteq V_k$:

$$[M]_C = \overline{[\bar{M}]_{C^*}}. \qquad (4)$$

Es sei X ein beliebiger Vektor aus $[M]_C$. Dann gibt es eine Funktion $f \in C$ mit $f(M) = X$. Die zu f duale Funktion f^* liegt in C^* und es ist

$$\overline{f^*(\bar{M})} = \overline{\overline{f}\,(M)} = f(M) = X, \text{ also}$$
$$X \in \overline{[\bar{M}]_{C^*}},$$

d.h.

$$[M]_C \subseteq \overline{[\bar{M}]_{C^*}} \text{ und } \overline{[\bar{M}]_{C^*}} \subseteq \overline{\overline{[\bar{\bar{M}}]_{C^{**}}}} = [M]_C .$$

[1] $\bar{M} = \{\bar{X} : X \in M\}$; $\bar{X}$ ist der zu X in allen Komponenten negiert Vektor

$[M]_C = V_k$ ist wegen (4) äquivalent mit

$\overline{[M]_{C^*}} = V_k$ und dieses wiederum mit

$[\overline{M}]_{C^*} = \overline{V_k} = V_k$.

Damit ist Satz 2 bewiesen.

3. Die Mengen F_i^∞, F_i^μ (i= 1, 4, 5, 8)

Da die Mengen F_i^∞ und F_i^μ (i = 1,4) zu den Mengen F_{i+4}^∞ und F_{i+4}^μ dual sind, beschränken wir uns auf die Untersuchungen der F_i^∞ und F_i^μ (i = 1,4). Die Ergebnisse lassen sich dann wegen des Satzes 2 sofort übertragen.

1. F_i^∞, F_i^μ $\mu \geqq k$ (i = 1,4)

Satz 3.1: Eine Menge $M \subseteq V_k$ ist genau dann F_i^∞-bzw. F_i^μ- vollständig ($\mu \geqq k$; i = 1,4), wenn gilt:

1. $\begin{pmatrix} o \\ \cdot \\ \cdot \\ o \end{pmatrix} \in M$,

2. M erfüllt die Bedingung $\begin{cases} B_1 & \text{für } i = 4 \\ B_1 \wedge B_2\ (0) & \text{für } i = 1. \end{cases}$

Beweis: 1. Notw.: Wegen der F_i^∞- bzw. F_i^μ-Vollständigkeit ($\mu \geqq k$) und

$$\underline{o} = \begin{pmatrix} o \\ \vdots \\ o \end{pmatrix} \in [M]_{F_i^\infty}$$

und $\underline{o} \in [M]_{F_i^\mu}$ ist entweder $\underline{o} \in M$, oder es gibt eine Funktion $f \in F_i^\infty$ bzw. $f' \in F_i^\mu$ mit $f(M) = \underline{o}$ bzw. $f'(M) = \underline{o}$. Wegen der o-Separation von f und der o-Separation vom Grade $\mu \geqq k$ von f' muß M schlechthin o-separierend sei d.h. $\underline{o} \in M$.

Ferner ist wegen des Satzes 1.1 (1. Teil des Beweises auch die Bedingung 2 notwendig. Dabei ist eigentlich Fall i = 1 auch noch die Bedingung $B_2(1)$ erforderlic diese Bedingung ist sicher immer wegen $\underline{o} \in M$ erfüllt.

<u>2.Hinl.:</u> M erfülle die Bedingungen des Satzes. Ist $\underline{a} \in V_k$ ein beliebiger Vektor, so können wir ihn aus M mittels folgender Funktion $f \in F_i^{\infty} \subset F_i^{\mu}$ erzeugen:

$$f(\alpha) = \begin{cases} a_i & \text{für } \alpha = \alpha_i \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach Satz 3.1 ist M genau dann F_i^{∞}-vollständig, wenn M F_i^{μ}-vollständig ist. Deshalb werden wir im folgenden nur noch die F_i^{∞}-Vollständigkeit betrachten ($i = 1,4$; $\mu \geq k$).
Ist M F_i^{∞}-vollständig ($i = 1,4$), so hat M o.B.d.A. den Aufbau:

$$M = \left(\begin{array}{c|c} o & \\ \vdots & M' \\ o & \end{array} \right).$$

Ferner folgt aus Satz 3.1. unmittelbar, daß M genau dann F_1^{∞}-vollständig ist, wenn M' C_3-vollständig und genau dann F_4^{∞}-vollständig ist, wenn M' C_1-vollständig ist.
Somit können wir die Ergebnisse aus 1. direkt übertragen und erhalten den Satz

<u>Satz 3.2:</u>

1. Für die F_4^{∞}-Breite gilt: $b_{F_4^{\infty}}(V_k) =]\log_2 k[+ 1$.
2. Für die F_1^{∞}-Breite gilt: $b_{F_1^{\infty}}(V_k) =]\log_2 (k+1)[+1$.
3. Für die Mächtigkeit einer maximalen F_4^{∞}-Basis gilt: $m(F_4^{\infty}) = k$.
4. Für die Mächtigkeit einer maximalen F_1^{∞}-Basis gilt: $m(F_1^{\infty}) = k + 1$.

2. F_i^{μ} $\mu < k$ $(i = 1,4)$

<u>Satz 3.3:</u> Eine Menge $M \subseteq V_k$ ist genau dann F_i^{μ}-vollständig ($\mu < k$; $i = 1,4$), wenn M folgende Bedingungen erfüllt:

1. $B_3(o;\mu)$,

$$2. \begin{cases} B_1 & \text{für } i = 4 \\ B_1 \wedge B_2\,(o) & \text{für } i = 1 \end{cases}$$

Beweis: 1. Notw.: Ist $\underline{o} \in M$, so erfüllt M $B_3(o,\mu)$. Ist $\underline{o} \notin M$, so muß aber wegen der F_i^μ-Vollständigkeit $\underline{o} \in [M]_{F_i^\mu}$, d.h. $\exists f \in F_i^\mu$ mit $f(M) = \underline{o}$. Nun muß aber eben wegen $f \in F_i^\mu$ jede μ-elementige Teilmenge von $f^{-1}(o)$ o-separabel sein. Da M aber nur aus Zeilen von $f^{-1}(o)$ besteht, muß jede μ-elementige Teilmenge von M o-separabel sein, d.h. M erfüllt die Bedingung $B_3\ (o,\mu)$. Analog zu Satz 3.1 ist natürlich auch hier leicht einzusehen, daß M die Bedingungen B_1 bzw. $B_1 \wedge B_2(o)$ erfüllen muß. Im letzteren Fall ist auch $B_2(1)$ notwendig, doch ist diese Bedingung wegen $B_3(o,\mu)$ immer erfüllt.

2. Hinl.: M erfülle die angegebenen Bedingungen. Ist $\underline{a} \in V_k$ wieder ein beliebiger Vektor, so können wir ihn aus M mittels folgender Funktion $f \in F_i^\mu$ erzeugen:

$$f(\alpha) = \begin{cases} a_i & \text{für } \alpha = \alpha_i \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Satz 3.4: Für die extremalen Mächtigkeiten von F_4^μ/F_1^μ-Basen gilt:

1. $$b_{F_4^\mu}(V_k) = \left]\log_2 k\right[+ 1 ,$$
   $$b_{F_1^\mu}(V_k) = \left]\log_2 (k+1)\right[+ 1 ,$$

2. $$m(F_4^\mu) = \binom{k}{\mu}$$
   $$m(F_1^\mu) = \begin{cases} \binom{k}{\mu} & \text{für } 2 \leq \mu \leq k-2 , \\ k+1 & \text{für } \mu = k-1. \end{cases}$$

Beweis:

1. Es sei M eine minimale F_4^μ/F_1^μ-Basis mit $\underline{o} \notin M$. Dann hat M o.B.d.A. den Aufbau

$$M = \left(\begin{array}{c|c} o & \\ \vdots & M_1 \\ o & \\ \hline 1 & \\ \vdots & M_2 \\ 1 & \end{array}\right)$$

Wir betrachten die Matrix M', die wir folgendermaßen aus M erhalten:

$$M' = \left(\begin{array}{c|c} o & M_1 \\ \vdots & \\ \hline \vdots & \\ o & \bar{M}_2 \end{array} \right) .$$

M' erfüllt die Bedingung B_3 (o,μ). Die Matrix M_1 und auch die Matrix $\bar{M}_2$ erfüllen beide die Bedingung B_1. Da M die Bedingung B_3 (o,μ) erfüllt, ist jede μ-Zeilen-Teilmenge von M_1 und M_2 (mindestens eine Zeile aus M_1 und eine aus M_2) o-separabel. Folglich ist jedes Zeilenpaar β, γ mit $\beta \in M_1, \gamma \in M_2$ Teilmenge einer solchen o-separablen Teilmenge, d.h. $\binom{o}{o} \in \binom{\beta}{\gamma}$, also $\binom{o}{1} \in \binom{\beta}{\bar{\gamma}}$. Letzteres bedeutet aber $\beta \neq \bar{\gamma}$, so daß auch die Zeilen von M_1 und $\bar{M}_2$ paarweise verschieden sind. Damit erfüllt M' B_1. Erfüllt M schließlich $B_2(o)$, so tut es auch M_1 und damit M'. (Da M_2 sicher immer $B_2(1)$ erfüllt, genügt $\bar{M}_2$ der Bedingung $B_2(o)$.)

Zu einer beliebigen F_i^μ-Basis M mit $\underline{o} \notin M$ haben wir ein F_i^μ-Erzeugendensystem vom gleichen Format mit $\underline{o} \in M'$ konstruiert. Da jedes Erzeugendensystem eine entsprechende Basis enthält, gibt es keine F_i^μ-Basis mit $\underline{o} \notin M$, deren Mächtigkeit kleiner als die der min. F_i^μ-Basen mit $\underline{o} \in M$ ist. Schließlich ist für $\underline{o} \in M$ M genau dann F_i^μ-Basis, wenn M F_i^∞-Basis (i = 1,4) ist. Aus Satz 3.2 erhalten wir die F_i^μ-Breite.

2. Es sei M eine max. F_4^μ/F_1^μ-Basis. M kann dargestellt werden durch $M = (M_1|M_2)$, wobei M_1 o-separabel vom Grade μ, jedoch für beliebige $X \in M$ $M\setminus\{X\}$ nicht mehr o-separabel vom Grade μ ist. Für jedes $X \in M$ bezeichnen wir genau die μ-Tupel $(j_1, j_2, \ldots, j_\mu)$ mit $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_\mu \leq k$, für die die Untermatrix von $M\setminus\{X\}$, die genau aus den Zeilen von $M\setminus\{X\}$ mit den Nummern $j_1, j_2, \ldots, j_\mu$ gebildet wird und nicht mehr schlechthin o-separabel ist, als wesentliche μ-Nullen-Kombination. In M_2 liegen die restlichen Spalten von M, die bewirken, daß M auch C_1/C_4-vollständig ist.

Da M eine F_4^μ/F_1^μ-Basis ist, enthält jede Spalte von M_1 mindestens eine wesentliche μ-Nullen-Kombination. Da es aber maximal $\binom{k}{\mu}$ solcher wesentlichen μ-Nullen-Kombinationen gibt, ist $|M_1| \leqq \binom{k}{\mu}$. Wir teilen die Zeilennummern 1, 2, ..., k so in r Klassen $K_1, K_2, \ldots, K_r$ ein, daß Zeilen von M_1 mit Nummern aus der gleichen Klasse gleich und mit Nummern aus verschiedenen Klassen verschieden sind. Sicher ist $\sum_{j=1}^{r} |K_j| = k$.

Falls M_1 bereits C_1/C_4-vollständig ist, haben wir $|M_2| = o$ und $|M| \leqq \binom{k}{\mu}$.

Sei jetzt M_1 noch nicht C_1/C_4-vollständig.

Also ist $1 \leqq r \leqq k - 1$.

Für jedes $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$ bilden die Zeilen von M_2 mit den Nummern von K_j die Matrix M_2^j.

a) Wir betrachten den Fall der C_1-Vollständigkeit von M.
Die Matrix M_2^j enthält mindestens eine C_1-Basis, wobei die Mächtigkeit jeder dieser C_1-Basen nach Satz 1.3 nicht grösser als $|K_j| - 1$ ist. Somit ist

$$|M_2| \leqq \sum_{j=1}^{r} |K_j| - r = k - r \leqq k - 1 \leqq \binom{k-1}{\mu-1}. \qquad (5)$$

Da mindestens für eine Klasse K_j $|K_j| \geqq 2$ gilt, heißt das, daß in M_1 mindestens zwei gleiche Zeilen auftreten. O.B.d.A. seien die erste und zweite Zeile von M_1 gleich. Nun ist natürlich jede μ-Nullen-Kombination $(1, j_2, \ldots, j_\mu)$ $(3 \leqq j_2 < \ldots < j_\mu \leqq k)$ genau dann wesentlich, wenn die μ-Nullen-Kombination $(2, j_2, \ldots, j_\mu)$ wesentlich ist. Jede μ-Nullen-Kombination $(1, 2, j_3, \ldots, j_\mu)$ ist sicher in mindestens einer $(\mu+1)$-Nullen-Kombination $(1, 2, j_3', \ldots, j_{\mu+1}')$ enthalten, so daß es in M_1 keine Spalte gibt, die nur die μ-Nullen-Kombination $(1, 2, j_3 \ldots, j_\mu)$ als wesentliche enthält. Da mindestens $\binom{k-1}{\mu-1}$ μ-Nullen-Kombinationen in Spalten auftreten, die bereits eine andere wesentliche μ-Nullen-Kombination enthält, ist

$$|M_1| \leqq \binom{k}{\mu} - \binom{k-1}{\mu-1} = \binom{k-1}{\mu}. \qquad (6)$$

Aus (5) und (6) folgt

$$|M| \leqq \binom{k-1}{\mu} + \binom{k-1}{\mu-1} = \binom{k}{\mu}$$

Mit $M(k,\mu)$ bezeichnen wir die Matrix, die genau die Spalten von V_k enthält, die genau μ Nullen enthalten. Sicher ist $|M(k,\mu)| = \binom{k}{\mu}$ und $M(k,\mu)$ ist eine F_4^{μ}-Basis.

b) Wir betrachten den Fall der C_4-Vollständigkeit von M. M_2 hat die Darstellung $(M_2' | M_2'')$, wobei $(M_1 | M_2')$ F_4^{μ}-vollständig ist. Die Spalten von M_2'' bewirken, daß M auch die Bedingung $B_2(o)$ (Satz 3.3) erfüllt. Da in $(M_1 | M_2')$ alle Zeilen paarweise verschieden sind, existiert dort max. eine Zeile, die identisch mit (o,o, ..., o) ist, d.h. M_2'' enthält maximal eine Spalte, nämlich eine, die in dieser Zeile eine 1 hat.

Ist $|M_2''| = o$, so folgt aus (5) und (6) ebenfalls $|M| \leq \binom{k}{\mu}$.
Sei $|M_2''| = 1$. Dann folgt aus (5) für $r \geq 2$

$|M_2| \leq k - r + 1 \leq k - 1 \leq \binom{k-1}{\mu-1}$ und wegen (6) ebenfalls $|M| \leq \binom{k}{\mu}$. Schließlich sei r = 1, d.h. $M_1 = \underline{o}$ und M_2 ist eine C_3-Basis, d.h. wegen Satz 1.3 $|M| \leq 1 + k$.
Für $2 \leq \mu \leq k - 2$ ist $1 + k \leq \frac{3}{2}k \leq \frac{k}{2}(k-1) = \binom{k}{2} \leq \binom{k}{\mu}$ und $|M| \leq \binom{k}{\mu}$. Lediglich für $\mu = k - 1$ ist $\binom{k}{\mu} < k + 1$, also $|M| \leq k + 1$.

Tatsächlich ist im letzten Fall

$$\left.\begin{pmatrix} o111 & \dots & 1 \\ oo11 & \dots & 1 \\ ooo1 & \dots & 1 \\ \dots & & . \\ \dots & & . \\ oooo & \dots & 1 \end{pmatrix}\right\} k \qquad \text{(Spaltenzahl } k+1\text{)}$$

eine F_1^{μ}-Basis. In allen anderen Fällen ist $M(k,\mu)$ eine F_1^{μ}-Basis mit der Mächtigkeit $\binom{k}{\mu}$.
Damit ist der Satz 3.4. vollständig bewiesen.

Literatur:

/1/ Gronau, H.-D.: Erzeugung dualer Vektoren durch selbstduale Funktionen
Wiss. Zeitschrift der Universität Rostock
Math.-Nat. Reihe, 23, 9, 791 - 799 (1974)

eingegangen: 11. 10. 1976

Anschrift des Verfassers:

Hans-Dietrich Gronau
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
DDR-25 Rostock
Universitätsplatz 1

Wolfgang Guba

Ein maximaler lokaler Algorithmus für Klassen unverkürzbarer Überdeckungen

Eine Aufgabe besteht darin, Algorithmen zur Konstruktion gewisser Klassen von Überdeckungen aufzustellen. Die größte Bedeutung besitzen dabei die Algorithmen zum Aufbau minimaler Überdeckungen. Diese sind mit einer Reihe bekannter mathematischer Probleme verbunden. Es können zum Beispiel die Minimisierung Boolescher Funktionen, Aufgaben der Überdeckung von Graphen durch Kanten und Klassen von Optimierungsaufgaben genannt werden. Die Frage nach einem universellen Algorithmus zur Konstruktion der minimalen Überdeckungen einer beliebigen Überdeckungsaufgabe läßt sich trivial beantworten:

1. Man konstruiere sämtliche unverkürzbaren Überdeckungen der vorgegebenen Aufgabe.
2. Ein Durchmusterungsprozeß sucht aus der Klasse der unverkürzbaren Überdeckungen die minimalen heraus.

Die Resultate über die Anzahl der unverkürzbaren Überdeckungen weisen jedoch diesen Algorithmus als im allgemeinen nicht praktikabel aus. Ein Zugang zu derartigen Problemen wird durch die Theorie der lokalen Algorithmen gegeben (vgl. /1, 2/). Dabei betrachten wir zwei wesentliche Eigenschaften:

P_1 $(N_j, \mathfrak{M}, M)$: N_j geht in alle minimalen Überdeckungen der Menge M mit Elementen aus $\mathfrak{M}$ ein.

P_2 $(N_j, \mathfrak{M}, M)$: N_j geht in keine minimale Überdeckung von M mit Elementen aus $\mathfrak{M}$ ein.

Daneben können weitere Eigenschaften P_3, P_4, ..., P_l der Menge N_j zur Entscheidung von P_1 und P_2 herangezogen werden - sie dienen als Hilfsprädikate. Neue Informationen über N_j bezüglich eines der Prädikate werden aus einer Umgebung des Elements N_j in der Menge $\mathfrak{M}$ gewonnen.

Ein lokaler Algorithmus wird somit für eine Menge von Prädikaten P_1, P_2, ..., P_l und bezüglich eines speziellen Umgebungsbegriffes definiert. Eine besondere Bedeutung hat die Konstruktion bestmöglicher oder maximaler lokaler Algorithmen. Maximal nennen wir dabei einen lokalen Algorithmus mit der folgenden Eigenschaft: Wenn mit einem Algorithmus, der die gleichen Parameter besitzt (Prädikatenmenge, Umgebungsbegriff), der Wert eines Prädikats bestimmt werden kann, so ist dies auch mit Hilfe des maximalen Algorithmus möglich. In der Arbeit /1/ wurde gezeigt, daß in jeder Klasse lokaler Algorithmen mit vorgegebener Prädikatenmenge und Angabe des Umgebungsbegriffes ein maximaler lokaler Algorithmus existiert. Die Angabe eines solchen maximalen Algorithmus erweist sich dabei als eine echte und sinnvolle Aufgabenstellung.

Im Jahre 1966 wurde von J.I. Žuravlev in /2/ die Konstruktion eines maximalen lokalen Algorithmus mit den Hauptprädikaten P_1 und P_2 angegeben. 1975 wurde dieser Algorithmus vom Verfasser erweitert. Es wurden weitere Hilfsprädikate, die sich auf Klassen unverkürzbarer bzw. minimaler Überdeckungen beziehen, hinzugenommen. In der vorliegenden Arbeit werden wir uns zunächst mit Klassen von Überdeckungen beschäftigen und dabei bereits verwendete Begriffe präzisieren. Danach erfolgt die Konstruktion eines maximalen lokalen Algorithmus für Klassen unverkürzbarer Überdeckungen.

§ 1 Klassen von Überdeckungen

Es sei M eine endliche Menge. Mit $\mathfrak{M}$ bezeichnen wir ein endliches System endlicher Mengen ($\mathfrak{M} = \{ N_1, N_2, \dots, N_n \}$, N_j endliche Menge). Weiterhin soll gelten, daß

$\bigcup_{j=1}^{n} N_j = M$. Jede Teilmenge $\mathfrak{M}' = \{ N_{i_1}, N_{i_2}, \dots, N_{i_t} \}$ von $\mathfrak{M}$, für die $\bigcup_{j=1}^{t} N_{i_j} = M$ gilt, nennen wir Überdeckung von M mit Elementen aus $\mathfrak{M}$.

Definition 1: Eine Überdeckung $\mathfrak{M}' = \{N_{i_1}, N_{i_2}, \ldots, N_{i_t}\}$ heißt unverkürzbar, wenn folgendes gilt: Es existiert kein k, $k \in \{1, 2, \ldots, t\}$ mit

$$M = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{t} N_{i_j} .$$

Unter einer Wichtung der Elemente aus $\mathfrak{M}$ verstehen wir eine eindeutige Abbildung μ von $\mathfrak{M}$ in Re^+ (Menge der nichtnegativen reellen Zahlen). Diese Abbildung ordnet jedem N_j, $N_j \in \mathfrak{M}$, ein Gewicht $\mu(N_j, \mathfrak{M})$ zu.

Definition 2: Die Überdeckung $\mathfrak{M}' = \{N_{i_1}, N_{i_2}, \ldots, N_{i_t}\}$ wird minimal genannt, wenn $\sum_{j=1}^{t} \mu(N_{i_j}, \mathfrak{M})$ minimal bezüglich aller anderen Überdeckungen von M mit Elementen aus $\mathfrak{M}$ ist.

Bezeichnen wir die Menge aller unverkürzbaren bzw. minimalen Überdeckungen von M mit $Q^u(M, \mathfrak{M})$ bzw. $Q^m(M, \mathfrak{M})$, so gilt offenbar die Beziehung $Q^m(M, \mathfrak{M}) \subseteq Q^u(M, \mathfrak{M})$.

Sei $\mathfrak{M}'$ eine minimale Überdeckung von M und $\mathfrak{M}^i \subseteq \mathfrak{M}'$, so lassen sich weitere Überdeckungsklassen definieren.

$$Q^i(M, \mathfrak{M}) := \{\mathfrak{M}'' / \mathfrak{M}'' \in Q^m(M, \mathfrak{M}) \text{ und } \mathfrak{M}^i \subseteq \mathfrak{M}''\} \quad i=1,2,\ldots,s$$

$$Q^i(M, \mathfrak{M}) := \{\mathfrak{M}''' / \mathfrak{M}''' \in Q^u(M, \mathfrak{M}) \text{ und } \mathfrak{M}^i \subseteq \mathfrak{M}'''\} \quad i=s+1,\ldots,l$$

Letztere Klassen werden als A d d i t i o n s k l a s s e n bezeichnet. Es gilt: $Q^u \supseteq Q^m \supseteq Q^i$ $(i=1, 2, \ldots, s)$. Für den Fall, daß $\mathfrak{M}^i$ nur Mengen enthält, die in alle minimalen Überdeckungen eingehen, erhalten wir $Q^m = Q^i$ für $i = 1, 2, \ldots, s$ bzw. $Q^u \supseteq Q^i \supseteq Q^m$ für $i = s + 1, \ldots, l$.

Wir erhalten somit die folgenden Prädikatbeziehungen.

$P(N_j, \mathfrak{M}, M)$: N_j geht in alle unverkürzbaren Überdeckungen von M ein.

$P(N_j, \mathfrak{M}, M)$: N_j geht in keine unverkürzbare Überdeckung von M ein.

$P_1^i(N_j, \mathfrak{M}, M)$: N_j geht in alle Überdeckungen aus $Q^i(M, \mathfrak{M})$ ein.

P_2^i $(N_j, \mathfrak{m}, M)$: N_j geht in keine Überdeckung aus $Q^i(M, \mathfrak{m})$ ein.

Tabelle 1

Aus	folgt	P	P'	P_1	P_2	P_1^i	P_2^i	P_1^i	P_2^i
P wahr (w)		w	f	w	f	w	f	w	f
falsch (f)		f	-	-	-	-	-	-	-
P' w		f	w	f	w	f	w	f	w
f		-	f	-	-	-	-	-	-
P_1 w		-	f	w	f	w	f	-	f
f		f	-	f	-	-	-	-	-
P_2 w		f	-	f	w	f	w	f	-
f		-	f	-	f	-	-	-	-
P_1^i w		-	f	-	f	w	f	-	-
f		f	-	-	-	f	-	-	-
P_2^i w	$i \in \{1,2,..,s\}$	f	-	f	-	f	w	-	-
f		-	f	-	f	-	f	-	-
P_1^i w		-	f	-	-	-	-	w	f
f		f	-	-	-	-	-	f	-
w	$i \in \{s+1,..,l\}$	f	-	f	-	-	-	f	w
f		-	f	-	-	-	-	-	f

§ 2 Der lokale Algorithmus $A_{k2}^i = \{A_\pi, P_1^i, P_2^i, \varphi_1^i, \varphi_2^i, 2\}$

Gegeben sei eine Überdeckungsaufgabe $(M, \mathfrak{m}, \mu)$. $\mathfrak{m}^i$ werde als Teilmenge einer beliebigen minimalen Überdeckung gegeben. Die weiteren Betrachtungen beziehen sich auf die Additionsklasse $Q^i(M, \mathfrak{m}) = \{\mathfrak{m}' / \mathfrak{m}' \in Q^u(M, \mathfrak{m}), \mathfrak{m}^i \subseteq \mathfrak{m}'\}$.

1. Auswahl der Prädikate: Hauptprädikate: P_1^i, P_2^i

Hilfsprädikate: keine

2. Der Umgebungsbegriff: Die folgende induktive Definition legt für eine beliebige Menge N_j, $N_j \in \mathfrak{M}$, ein System von Umgebungen fest.

$S_1(N_j, \mathfrak{M})$ ist die Menge aller N_i, $N_i \in \mathfrak{M}$, für die gilt:

a) $N_j \cap N_i \neq \emptyset$ oder

b) $N_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{t} N_{i_j}$, wobei $N_{i_1} \ldots, N_{i_t}$ der Bedingung a) genügen müssen.

$S_k(N_j, \mathfrak{M})$ ist die Menge aller N_f, $N_f \in \mathfrak{M}$, für die gilt:
$(k \geq 2)$

a) $N_f \cap N_g \neq \emptyset$, wobei $N_g \in S_{k-1}(N_j, \mathfrak{M})$. oder

b) $N_f \subseteq \bigcup_{j=1}^{t} N_{i_j}$, wobei $N_{i_1}, \ldots, N_{i_t}$ der Bedingung a) genügen müssen.

3. Systeme von Teilmengen der Menge M: (Vereinbarung: $N = \{N_1, \ldots, N_n\}$, dann $\underline{N} = \bigcup_{j=1}^{n} N_j$) Wir setzen:

$$M_{(k,j)} = \underline{S_k(N_j, \mathfrak{M})}, \quad M_{k,k-1} = M_{(k,j)} \setminus M_{(k-1,j)}$$

$$M^i_{(k,j)} = \underline{S_k(N_j, \mathfrak{M})} \setminus \underline{\mathfrak{M}^i}, \quad M^i_{k,k-1} = M^i_{(k,j)} \setminus M^i_{(k-1,j)}$$

Beispiel 1: $M = \{a, b, c, \ldots, s, t, u\}$

$N_7 = \{a, i, o, p\}$ $N_1 = \{a, b, c\}$

$\mathfrak{M} = \{N_1, \ldots, N_{13}\}$

$N_8 = \{o, p, q\}$ $N_2 = \{b, c, d, e\}$

$N_9 = \{p, q\}$ $N_3 = \{e, f, g\}$

$S_1(N_1, \mathfrak{M}) = \{N_1, N_2, N_4, N_7\}$

$N_{10} = \{q, r, s,\}$ $N_4 = \{b, h, i, j\}$

$S_2(N_1, \mathfrak{M}) = \{N_1, N_2, N_4, N_7, N_3, \ldots, N_5, N_8, N_9\}$

$$N_{11} = \{n,r\} \qquad N_5 = \{j,k,l\}$$
$$N_{12} = \{s,t\} \qquad N_6 = \{l,m,n\}$$
$$N_{13} = \{g,t,u\}$$

$$\mathfrak{m}^i = \{N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_{13}\}$$

$$M_{(1,1)} = \{a,b,c,d,e,h,i,j,o,p\} \qquad M_{(2,1)} = M_{(1,1)} \cup \{f,g,q,k,l\}$$
$$M^i_{(2,1)} = \{a,o,p,q\}$$

$$M_{2,1} = \{f,g,q,k,l\} \qquad M^i_{2,1} = \{q\}$$

Mit Hilfe der Äquivalenzrelation: a ist äquivalent zu b ($a \sim b$), wenn

$$\{N_h /\ a \in N_h,\ N_h \in S_k(N_j, \mathfrak{m})\} = \{N_g /\ b \in N_g,\ N_g \in S_k(N_j, \mathfrak{m})\} -$$

wird die Menge $M^i_{k,k-1}$ in Klassen äquivalenter Elemente eingeteilt. Diese werden mit K_1, K_2, ..., K_q symbolisiert. Der nächste Schritt besteht dann im Aussondern der Mengen M_s.

$$M_s = M^i_{(k-1,j)} \cup \underline{A}_s \qquad (A_s \subseteq \{K_1, \ldots, K_q\} \quad s = 1, 2, \ldots, 2^q)$$

Wir erhalten schließlich ein System von Teilmengen der Menge M, das wir mit $\{M_s\}$ bezeichnen.

4. Zulässige Überdeckungen:

Definition 3: Eine Überdeckung Ü einer Menge M_s, $M_s \in \{M_s\}$, mit Elementen aus $S_k(N_j, \mathfrak{m})$ heißt **w i d e r s p r ü c h l i c h** , wenn mindestens eine der folgenden Aussagen zutrifft.

1. Es existiert eine Menge N_f, $N_f \in S_k(N_j, \mathfrak{m})$, $N_f \notin \mathfrak{m}^i$, von der bekannt ist, daß sie in alle Überdeckungen aus $Q^i(M, \mathfrak{m})$ eingeht. N_f geht aber nicht in Ü ein.
2. Es existiert eine Menge N_h, $N_h \in S_k(N_j, \mathfrak{m})$, von der bekannt ist, daß sie in keine Überdeckung aus $Q^i(M, \mathfrak{m})$ eingeht. N_h geht aber in

Die Definition der widersprüchlichen Überdeckung bezieht sich auf ein eventuell gegebenes System von Informationen über gewisse Mengen bezüglich der Prädikate P_1^i und P_2^i . Wir werden im folgenden nur solche Überdeckungen $Ü = Ü(M_s, S_k(N_j, \mathfrak{m}))$, $M_s \in \{M_s\}$, zulassen, für die gilt:

(1) <u>Ü ist unverkürzbare Überdeckung</u>.

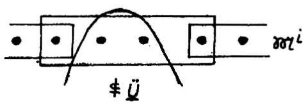
(2) <u>Ü ist nicht widersprüchlich im Sinne der Definition 3</u>.

Bezeichnung: Sei $\mathfrak{m}^i = \{ N_{i_1}, \ldots, N_{i_t} \}$, so sind

$$N^i_{i_j} = N_{i_j} \setminus \bigcup_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{t} N_{i_l}$$

$$j = 1,2,\ldots,t$$

(3) <u>Es existiert keine Menge N_{i_j}, $N_{i_j} \in \mathfrak{m}^i$, für die $\underline{Ü} \supseteq N^i_{i_j}$</u> gilt.



(4) <u>Es existiert eine Auswahl $A = (a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_r)$,</u>

Bezeichnung: - für $j = 1,\ldots, m$: $a_j \in N^i_{i_j}$, $N_{i_j} \in \mathfrak{m}^i$,
$N^i_{i_j} \cap M_{(k-1,j)} = \emptyset$
$a_j \notin \underline{Ü}$

- für $j = m + 1, \ldots, r$: $a_j \in N^i_{i_j}$,
$N_{i_j} \in \mathfrak{m}^i$, $N^i_{i_j} \cap M_{(k-1,j)} \neq \emptyset$
$a_j \notin \underline{Ü}$ oder ($a_j \in \underline{Ü}$ und $\underline{Ü} \not\supseteq N^i_{i_j}$ $M_{k,k-1}$)

- für $j,s = 1, \ldots, r$: aus $j \neq s$ folgt $N_{i_j} \neq N_{i_s}$.

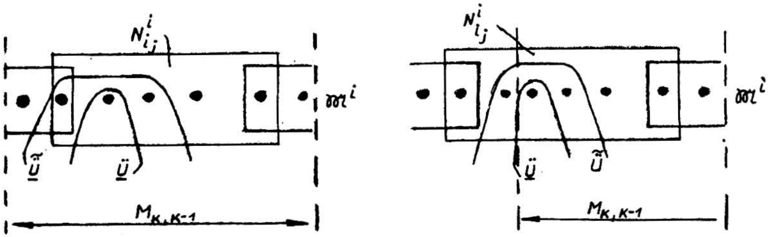
so daß für alle $\tilde{Ü} = \tilde{Ü}(M_s,\ S_k(N_j, \mathfrak{M}))$ ($\tilde{Ü}$ erfüllt (1) und (3), aber nicht (2)) gilt:

(a) $\underline{\tilde{Ü}} \cap \{a_1, \ldots, a_m\} \neq \emptyset$

oder

(b) $\underline{\tilde{Ü}} \cap \{a_{m+1}, \ldots, a_r\} \neq \emptyset$ und $\underline{\tilde{Ü}} \supseteq (N^i_{i_j} \setminus M_{k,k-1})$

$$j \in \{j \,/ a_j \in \underline{\tilde{Ü}} \cap \{a_{m+1}, \ldots a_r\}\}$$



Definition 4: Überdeckungen, die den Bedingungen (1), (3) und (4) genügen, nennen wir i-zulässig (aus (4) folgt (2)).

Hilfssatz 1: Jede Überdeckung $Ü(M, \mathfrak{M}) \in Q^i(M, \mathfrak{M})$ enthält eine i-zulässige Überdeckung $Ü(M_s,\ S_k(N_j, \mathfrak{M}))$, $M_s \in \{M_s\}$.

Beweis: Wir betrachten $Ü(M, \mathfrak{M}) \setminus (\mathfrak{M} \setminus (S_k(N_j, \mathfrak{M}) \cup \mathfrak{M}^i)) = Ü$ und behaupten, daß Ü i-zulässig ist. Offenbar erfüllt Ü die Bedingungen (1) und (3), so daß wir uns auf (4) zu konzentrieren haben. Im Fall, daß Ü keine i-zulässige Überdeckung darstellt, erhalten wir

(a) Für alle $(a_1, \ldots, a_m)$ (vgl. Bed. (4)) gibt es eine Überdeckung $\tilde{Ü}$, $\tilde{Ü} = \tilde{Ü}(M_s,\ S_k(N_j, \mathfrak{M}))$, für die $\tilde{Ü} \cap \{a_1, \ldots, a_m\} = \emptyset$ gilt.

$\tilde{Ü}$ ist
- unverkürzbare Überdeckung,
- eine Überdeckung, die keine Menge $N^i_{i_j}$ überdeckt ($N_{i_j} \in \mathfrak{M}^i$),
- eine Überdeckung, die widersprüchlich ist.

Ferner gilt dann auch

(b) Für alle $(a_{m+1}, \ldots, a_r)$ (vgl. Bed. (4)) erhalten wir
$\underline{\tilde{Ü}} \cap \{a_{m+1}, \ldots, a_r\} = \emptyset$ oder
$\underline{\tilde{Ü}} \cap \{a_{m+1}, \ldots, a_r\} \neq \emptyset$, aber $\underline{\tilde{Ü}} \not\subseteq (N^i_{i_j} \setminus M_{k,k-1})$
für alle j, $j \in \{ j / a_j \in \underline{\tilde{Ü}} \cap \{a_{m+1}, \ldots, a_r\}\}$.

(a) und (b) können wir auch wie folgt interpretieren:

Die Mengen $O_j = \{ a_k / a_k$ wird in $Ü(M, \mathfrak{M})$ nur von N_{i_j} überdeckt, $N_{i_j} \in \mathfrak{M}^i \} \cup (N^i_{i_j} \setminus M_{k,k-1})$

werden nicht vollständig von $\tilde{Ü}$ überdeckt.
Dieses heißt wiederum, daß

$Ü'(M, \mathfrak{M}) = (Ü(M, \mathfrak{M}) \setminus Ü) \cup \tilde{Ü} \in Q^i (M, \mathfrak{M})$.

Wir erhalten einen Widerspruch zur Voraussetzung, denn
- Ü' enthält eine Menge, von der bekannt ist, daß sie in keine Überdeckung aus $Q^i (M, \mathfrak{M})$ eingeht, oder
- Ü' enthält nicht eine Menge, von der bekannt ist, daß sie in alle Überdeckungen aus $Q^i(M, \mathfrak{M})$ eingeht.

Hilfssatz 1 ist damit bewiesen.

5. Die Funktionen φ^i_1 und φ^i_2

φ^i_1 $(N_j, S_k(N_j, \mathfrak{M})$, vorhandene Informationen) =
= $(1, a_{2_j})$ (d.h. $P^i_1 (N_j, \mathfrak{M}, M)$ wahr), wenn
$N_j \in \mathfrak{M}^i$ oder wenn $M_{k,k-1} \neq \emptyset$ und N_j in alle i-zulässigen Überdeckungen eingeht.
(Δ, a_{2_j}) (d.h. $P^i_1(N_j, \mathfrak{M}, M)$ **kann** nicht entschieden werden) in allen anderen Fällen.

φ^i_2 $(N_j, S_k(N_j, \mathfrak{M})$, vorhandene Informationen) =
= $(a_{1_j}, 1)$ (d.h. $P^i_2(N_j, \mathfrak{M}, M)$ wahr), wenn N_j in keine i-zulässige Überdeckung eingeht $(N_j \notin \mathfrak{M}^i)$.

(a_{1_j}, Δ) (d.h. $P_2^i(N_j, \mathfrak{M}, M)$ kann nicht entschieden werden) in allen anderen Fällen.

Wir wollen an dieser Stelle nicht auf Kriterien eingehen, die $P_1^i(N_j, \mathfrak{M}, M)$ bzw. $P_2^i(N_j, \mathfrak{M}, M)$ als falsch ausweisen.

Satz: φ_1^i und φ_2^i sind zulässige Funktionen, d.h. sie liefern keine falschen Informationen.
Der Beweis dieses Satzes folgt im wesentlichen aus dem Hilfssatz 1.

6. Die Maximalität des lokalen Algorithmus

Satz: Der lokale Algorithmus $A_{k2}^i = (A_\pi, P_1^i, P_2^i, \varphi_1^i, \varphi_2^i, 2)$ ist in der Klasse der Algorithmen mit den Hauptprädikaten P_1^i und P_2^i und ohne Hilfsprädikate maximal.

Wir wollen die Beweisidee für diesen Satz angeben. Wir nehmen an, daß A_{k2}^i nicht maximal wäre. In diesem Fall gilt:

(a) $\tilde{\varphi}_1^i(N_j, S_k(N_j, \mathfrak{M}), \text{vorh. Inf.}) = (1, a_{2_j})$ (1)

$\varphi_1^i(N_j, S_k(N_j, \mathfrak{M}), \text{vorh. Inf.}) = (\Delta, a_{2_j})$ (2)

oder

(b) $\tilde{\varphi}_2^i(N_j, S_k(N_j, \mathfrak{M}), \text{vorh. Inf.}) = (a_{1_j}, 1)$ (1)

$\varphi_2^i(N_j, S_k(N_j, \mathfrak{M}), \text{vorh. Inf.}) = (a_{1_j}, \Delta)$ (2)

$\tilde{\varphi}_1^i$ und $\tilde{\varphi}_2^i$ sind die Funktionen eines lokalen Algorithmus der gleichen Klasse. Mit Hilfe der Aussagen (2) wird eine Überdeckungsaufgabe $(\tilde{M}, \tilde{\mathfrak{M}}, \tilde{\mathfrak{M}}^i)$ konstruiert, die den folgenden Bedingungen genügt.

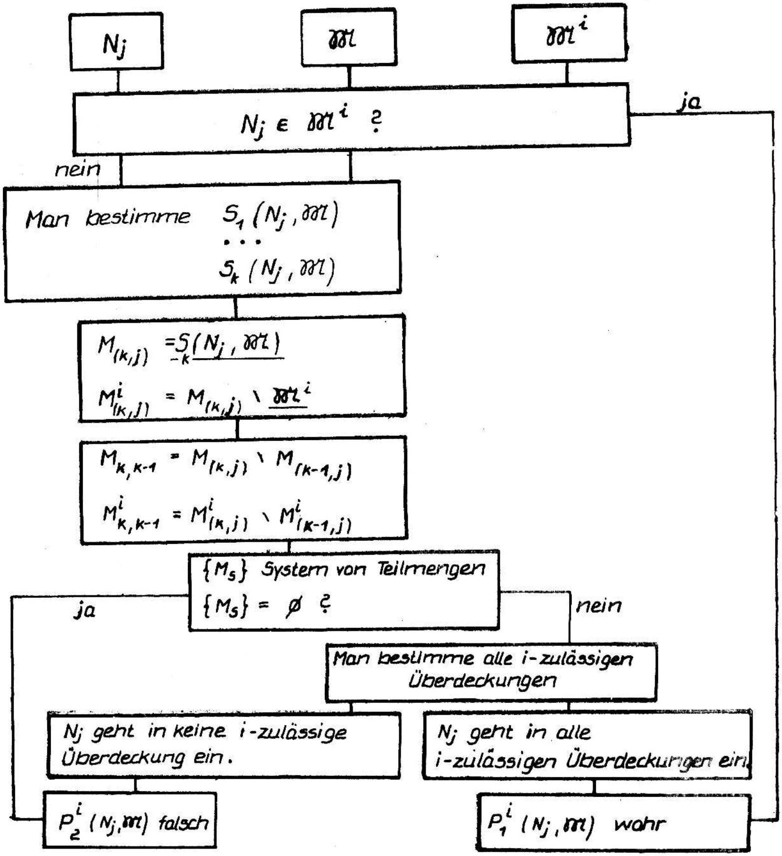
1) $S_k(N_j, \mathfrak{M}) = S_k(N_j, \tilde{\mathfrak{M}})$
2) Die vorhandenen Informationen über $(M, \mathfrak{M}, \mathfrak{M}^i)$ treffen ebenso auf $(\tilde{M}, \tilde{\mathfrak{M}}, \tilde{\mathfrak{M}}^i)$ zu.
3) N_j geht nicht in alle Überdeckungen aus $Q^i(\tilde{M}, \tilde{\mathfrak{M}})$ ein (falls a) gilt). N_j geht in eine Überdeckung aus $Q^i(\tilde{M}, \tilde{\mathfrak{M}})$ ein (falls b) gilt).

Wir erhalten so den Widerspruch

$$\tilde{\varphi}^i_1(N_j,\ S_k(N_j,\tilde{\mathfrak{M}}),\ \text{vorh. Inf.}) = \tilde{\varphi}^i_1(N_j,\ S_k(N_j,\mathfrak{M}),\ \text{vorh. Inf.}) = (1,\ a_{2_j})$$

bzw. analoge Aussage für $\tilde{\varphi}^i_2$.

7. Übersicht



Literatur:

/1/ Žuravlev, Ju.I.: Lokal'nye algoritmy vyčislenija informacii I. Žurnal Kibernetika 1 (1965), 12 - 19

/2/ Žuravlev, Ju.I.: Lokal'nye algoritmy vyčislenija informacii II. Žurnal Kibernetika 2 (1966), 1 - 11

/3/ Žuravlev, Ju. I., Finkel'stejn, Ju.Ju.: Lokal'nye algoritmy dlja zadač linejnogo celočislennogo programmirovanija. Problemy kibernetiki 14, "Nauka" 1965, 289 - 295

eingegangen: 21. 9. 1976

Anschrift des Verfassers:

Wolfgang Guba
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
DDR-25 Rostock
Universitätsplatz 1

Jürgen Dassow

Einige Bemerkungen zu einem modifizierten Vollständigkeitsbegriff für Automatenabbildungen

In der vorliegenden Arbeit setzen wir die in /4/ begonnenen Untersuchungen über Kleene-Mengen fort. Während in /4/ nur der Fall betrachtet wurde, daß die logischen Netze über $E_2 = \{0,1\}$ definiert sind, diskutieren wir hier zwei Verallgemeinerungen. Als erstes betrachten wir den Fall, daß als Grundmenge $E_k = \{0,1, \dots, k-1\}$, $k \geq 3$, dient und als zweites logische Netze, die über einer endlichen Menge von (durchschnittsfremden) Mengen definiert sind.

In beiden Fällen untersuchen wir die Anzahl der Kleene-Mengen, die Anzahl der minimalen Kleene-Mengen, und wir zeigen, daß das Problem der Kleene-Vollständigkeit algorithmisch unentscheidbar ist.

1. Grundbegriffe und Hauptresultate

Sei A eine beliebige Menge. Dann bezeichne A^n das n-fache kartesische Produkt von A, $|A|$ die Kardinalzahl von A, A^+ die freie Halbgruppe (ohne Einselement) über A und A^* die freie Halbgruppe mit Einselement über A.
Es sei P_k die Menge der Abbildungen von $((E_k)^n)^+$ in E_k^+, die durch endliche Automaten (logische Netze) realisiert werden können. In P_k sind die Operationen Superposition, Rückkopplung, Identifizieren von Eingängen, Hinzufügen und Streichen fiktiver Eingangsvariabler erklärt, und P_k bildet mit diesen Operationen eine Algebra. Sei $M \subseteq P_k$. $[M]$ bezeichne die kleinste in dieser Algebra abgeschlossene Menge, die M enthält.

Die Menge $S \subseteq ((E_k)^n)^+$ heißt darstellbar durch den Operator $F \in P_k$ und die Menge $Y \subset E_k$, wenn die beiden folgenden Bedingungen äquivalent sind:

i) $x_1 x_2 \dots x_k \in S$

ii) $F(x_1x_2 \ldots x_k) = y_1y_2 \ldots y_k$ erfüllt $y_k \in Y$,

S heißt darstellbar durch F, falls es ein Y gibt, so daß S durch F und Y darstellbar ist. S wird regulär genannt, wenn S durch ein F darstellbar ist.

<u>Definition:</u> $M \subseteq P_k$ heißt Kleene-Menge in P_k, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. M ist abgeschlossen in P_k.
2. Für jedes $n \geq 1$ und jede reguläre Menge $S \subseteq ((E_k)^n)^+$ existiert eine Abbildung $F \in M$, durch die S darstellbar ist.

M wird minimale Kleene-Menge genannt, wenn es keine Kleene-Menge N mit $N \subset M$ gibt.

$M \subseteq P_k$ heißt Kleene-vollständig in P_k, wenn $[M]$ eine Kleene-Menge in P_k ist.

<u>Satz 1:</u> Sei K_k die Menge der Kleene-Mengen in P_k. Dann gilt

i) $|K_2| = 3$,

ii) $|K_k| = \mathfrak{c}$ für $k \geq 3$, wobei $\mathfrak{c}$ die Kardinalzahl des Kontinuums ist.

<u>Satz 2:</u> i) Ist $k = 2$, so gibt es genau zwei minimale Kleene-Mengen.

ii) Für $k \geq 3$ ist die Menge der minimalen Kleene-Mengen unendlich.

In den letzten Jahren sind mehrere Arbeiten erschienen, in denen die Theorie der Booleschen Funktionen auf den Fall übertragen wird, daß die Funktionen über einer endlichen Familie von endlichen Mengen definiert sind und Werte aus jeweils einer dieser Mengen annehmen (/1/, /2/, /9/, /10/).

Seien diese Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_l$ und $k_1, k_2, \ldots, k_l$ die Kardinalzahlen dieser Mengen. Mit $P_{k_1, k_2, \ldots, k_l}$ bezeichnen wir die Menge aller durch logische Netze realisierbaren Abbildungen der freien Halbgruppe über einem kartesischen Produkt, dessen Faktoren aus der Menge $A_1, A_2, \ldots, A_l$ sind, in die freie Halbgruppe über einem A_j. Insbesondere setzen wir noch $P = P_{2,2}$. Es ist ohne Schwierigkeiten möglich, die Operationen in P_k auf diesen Fall zu übertragen (wie das in den entsprechenden Arbeiten für Funktionen auch gemacht wurde). In analoger Weise lassen sich auch Kleene-Mengen definieren. Ferner setzen wir voraus, daß die Mengen A_1, A_2, ..., A_l paarweise disjunkt sind.

Dann ergeben sich folgende Resultate.

Satz 3: i) In P gibt es 20 minimale Kleene-Mengen.
ii) $\mathfrak{c}$ ist die Kardinalzahl der Menge aller Kleene-Mengen in P.

Satz 4: Ist $l \geq 2$ und erfüllt mindestens ein k_i, $1 \leq i \leq l$, die Ungleichung $k_i \geq 3$, dann gilt für $P_{k_1, k_2, \ldots, k_l}$:
i) $\mathfrak{c}$ ist die Kardinalzahl der Menge aller Kleene-Mengen.
ii) Es gibt unendlich viele minimale Kleene-Mengen.
In /4/ war nachgewiesen worden, daß es algorithmisch nicht entscheidbar ist, ob eine endliche Menge in P_2 Kleene-vollständig ist oder nicht. Der folgende Satz löst dieses Problem für P_k, $k \geq 3$, und $P_{k_1, k_2, \ldots, k_l}$, $l \geq 2$.

Satz 5: i) Das Problem der Kleene-Vollständigkeit ist für eine endliche Menge $M \subseteq P_k$, $k \geq 2$, algorithmisch unlösbar.
ii) Es gibt keinen Algorithmus, der für jede endliche Menge M in $P_{k_1, k_2, \ldots, k_l}$, $l \geq 2$, entscheidet, ob Kleene-vollständig ist.

2. Kleene-Mengen in P_k

In diesem Abschnitt werden wir die Sätze 1 und 2 beweisen.
Beweis von Satz 1: i) folgt aus /4/ sofort.
ii) $M_{(0,1)} = \{ F : F(x^n)(t) \in \{0,1\}$ für alle x^n und alle $t \}$ ist nach /5/ eine Kleene-Menge. (Dabei bezeichnet $F(x^n)(t)$ die Ausgabe im t-ten Takt bei Eingabe von x^n.) Wir bezeichnen mit $\widetilde{C}$ die Menge der konstanten Abbildungen in $M_{(0,1)}$. Jedem $F \in \widetilde{C}$ ordnen wir die Abbildung

$$F'(x^n)(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } F(x^n)(t) = 0 \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

zu und bezeichnen mit C die Menge der so konstruierten Operatoren. Sei C' eine Teilmenge von C. Wir setzen

$$M_{C'} = M_{(0,1)} \cup C'.$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß $M_{C'}$ abgeschlossen ist. Aus der Definition der Kleene-Menge folgt, daß eine abgeschlossene Menge, die eine Kleene-Menge enthält, eine Kleene-Menge ist. Somit ist $M_{C'}$ eine Kleene-Menge. Außerdem gilt $M_{C'} = M_{C''}$ genau dann, wenn $C' = C''$ ist. Da $|\{C' : C' \subseteq C\}| = \mathfrak{c}$ ist, haben wir $|K_k| \geq \mathfrak{c}$. Andererseits ist P_k eine abzählbare Menge, so daß $|K_k| \leq \mathfrak{c}$ gilt. Damit ist der Satz bewiesen.

Folgerung: Für $k \geq 3$ existieren Kleene-Mengen, die keine endliche Basis besitzen.

Beweis: Wir betrachten $M_{C'}$ für eine unendliche Menge C'. Angenommen, $M_{C'}$ besitzt eine endliche Basis B. Dann ist $B \cap C' = C''$ eine endliche Menge. Damit gilt $C'' \subset C'$, und somit ist $[B] \subseteq M_{C''} \subset M_{C'}$, womit der gewünschte Widerspruch hergeleitet ist.

Wir bemerken, daß für k = 2 jede Kleene-Menge eine endliche Basis besitzt, wie in /6/ gezeigt wurde.

Beweis von Satz 2: i) ergibt sich unmittelbar aus /4/.

ii) Jeder Operator $F \in M_{(0,1)}$ realisiert im ersten Takt eine Funktion $\varphi_F \in P_k'$, wobei P_k' die Menge der eindeutigen Abbildungen von E_k^n in E_k ist. Für jedes $F \in M_{(0,1)}$ und jede natürliche Zahl t definieren wir F_t wie folgt:

$$F_t(x^n)(s) = \begin{cases} F(x^n)(s) & \text{für } s \neq t \\ 0 & \text{für } s = t \text{ und } F(x^n)(t) = 0 \\ 2 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Weiterhin setzen wir

$$M_t = \left\{F_t : F \in M_{(0,1)},\ \varphi_F \in T_0\right\},$$

wobei $T_0 = \{f : f \in P_k',\ f(0,0,\ldots,0) = 0\}$ ist. Es ist leicht zu zeigen, daß M_t für jede natürliche Zahl t abgeschlossen ist. Mittels analoger Argumente wie beim Beweis von Satz 4 in /4/ erhalten wir, daß M_t eine minimale Kleene-Menge ist. Aber für $t_1 \neq t_2$ ist auch $M_{t_1} \neq M_{t_2}$, und somit ist die Behauptung bewiesen.

3. Der Beweis von Satz 3

Wir geben zuerst einige Definitionen und Bezeichnungen. Wir setzen $A_1 = \{0,1\}$ und $A_2 = \{2,3\}$. Die Menge der Operatoren, deren Wertevorrat $(A_i)^+$ ist, bezeichnen wir mit M^{A_i}. Die Funktionen k_i und e_i definieren wir durch die folgenden Tabellen:

x	$k_i(x)$
0	i
1	i
2	i
3	i

x	$e_0(x)$	$e_1(x)$
0	2	3
1	3	2

x	$e_2(x)$	$e_3(x)$
2	0	1
3	1	0

Ferner bezeichnen wir die Funktionen, die $A_1{}^n$ in A_1 abbilden, wie die entsprechenden Booleschen Funktionen. Falls der Operator $F \in P$ die Funktion f, $f : A_1{}^n \times A_2{}^m \rightarrow A_i$, realisiert, bezeichnen wir ihn mit $F_{(f)}$. Sei $\widetilde{M} = \{ f : F_{(f)} \in M\}$.
Mit $F_{(r;f;a_1, \ldots, a_r)}$ bezeichnen wir den Operator, der die Funktion f mit der Verzögerung r realisiert und in den ersten r Takten die Ausgabefolge $a_1 a_2 \ldots a_r$ hat.
Die folgenden Lemmata sind leicht zu beweisen:

Lemma 1: Enthält die Menge $\widetilde{M}$ der Kleene-Menge $M \subseteq P$ eine der Funktionen e_0, e_1, e_2, e_3, so ist auch M^{A_i} für ein i eine Kleene-Menge.

Lemma 2: Enthält die Menge $\widetilde{M}$ der Kleene-Menge $M \subseteq P$ zwei Konstanten, so ist auch M^{A_i} für ein i eine Kleene-Menge.
Wir setzen ferner

$$\begin{aligned} Q_i = \{ f : {} & f(0, \ldots, 0,i, \ldots, i) \neq f(1, \ldots, 1, i, \ldots, i) \rightarrow \\ & \qquad \Rightarrow f(0, \ldots, 0,i, \ldots, i) = 0, \\ & f(0, \ldots, 0,i, \ldots, i) = f(1, \ldots, 1,i, \ldots, i) \rightarrow \\ & \qquad \Rightarrow f(0, \ldots, 0,i, \ldots, i) = i \}, \end{aligned}$$

für $i \in A_2$, und für $i \in A_1$ legen wir Q_i entsprechend fest.

<u>Lemma 3:</u> Q_i ist für $i = 0, 1, 2, 3$ abgeschlossen (in der Algebra der Funktionen über A_1 und A_2).

<u>Lemma 4:</u> Sei M eine Kleene-Menge. Dann gilt entweder $\widetilde{M} = Q_i$ für ein i oder M^{A_j} ist für ein j auch eine Kleene-Menge.

<u>Beweis:</u> Zur Darstellung von $(A_1 \times A_2)^+$ benötigen wir eine Konstante $F = F_{(k)}$. O.B.d.A. sei $k = k_2$.

Sei nun $f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \in \widetilde{M}$. Wir betrachten $f'(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n, 2, \ldots, 2)$. Gilt nun $f'(0, \ldots, 0) = f'(1, \ldots, 1)$, so entsteht bei Identifikation eine Konstante. Wegen Lemma 2 gilt daher $f'(0, \ldots, 0) = 2$ und folglich $f(0, \ldots, 0, 2, \ldots, 2) = f(1, \ldots, 1, 2, \ldots, 2) = 2$ oder M^{A_j} ist für ein j Kleene-Menge. Sei nun $f'(0, \ldots, 0) \neq f'(1, \ldots, 1)$, dann entsteht nach Identifikation eine der folgenden Funktionen: id, non, e_0, e_1. Nach Lemma 1 ist M^{A_j} eine Kleene-Menge für ein j oder $e_0, e_1 \notin M$. Nun haben wir in M mindestens einen Operator, der $S_1 = (A_1{}^2)^* \{(1,1)\}$ darstellt, d.h. einer der Operatoren $F_{(et)}$, $F_{(sh)}$, $F_{(e_0(et))}$, $F_{(e_1(et))}$ liegt in M. Bei $F_{(sh)} \in M$ gilt, daß M^{A_j} für ein j eine Kleene-Menge ist, da aus der Shefferfunktion zwei Konstante erzeugt werden können. Falls $F_{(e_0(et))}$, $F_{(e_1(et))} \in M$ ist, schließen wir bei Identifikation wie oben auf M^{A_j} ist Kleene-Menge. Somit können wir $F_{(et)} \in M$ annehmen. Gilt nun auch noch non $\in \widetilde{M}$, so können wir erneut zwei Konstante erzeugen, und M^{A_j} ist für ein j Kleene-Menge. Daher gilt $f'(0, \ldots, 0) = 0 \neq f'(1, \ldots, 1)$ und somit auch $f(0, \ldots, 0, 2, \ldots, 2) = 0 \neq f(1, \ldots, 1, 2, \ldots, 2)$. Damit ist $f \in Q_2$ nachgewiesen, und es gilt $\widetilde{M} \subseteq Q_2$.

$\widetilde{M} \subset Q_2$ ist aber unmöglich, denn dann liegt in Q_2 eine Funktion g mit $g \notin \widetilde{M}$. Sei $X^* S$ das von $F_{(g)}$ mittels Y dargestellte Ereignis.

1. Fall: Sei $g \in Q_2{}^{A_1}$. Da $g \in Q_2$ ist, ist damit $g(0, \ldots, 0, 2, \ldots, 2) = 0$, $g(1, \ldots, 1, 2, \ldots, 2) = 1$. Nun wird $X^* S$ nur noch durch $F_{(non(g))}$, $F_{(e_0(g))}$, $F_{(e_1(g))}$ darge-

stellt, und es gelten die folgenden Beziehungen:

$\mathrm{non}(g(0, \ldots, 0, 2, \ldots, 2)) = 1,$

$e_0(g(0, \ldots, 0, 2, \ldots, 2)) = 3,$

$e_1(g(0, \ldots, 0, 2, \ldots, 2)) = 3.$

Damit liegen die von den obigen Operatoren realisierten Funktionen nicht in Q_2 und damit erst recht nicht in M. Damit ist X^*S aber in M nicht darstellbar. Folglich muß $\widetilde{M} = Q_2$ gelten. Wir haben nun noch zu zeigen, daß sich die beiden möglichen Fälle ausschließen. Das folgt aber direkt aus den Definitionen von Q_2 und M.

<u>Lemma 5:</u> Es gibt genau drei Kleene-Mengen U_{i1}, U_{i2}, U_{i3} mit $\widetilde{U_{ij}} = Q_i$, $j = 1, 2, 3$.

Beweis: Wir führen den Beweis nur für Q_2. Sei M eine Kleene-Menge mit $\widetilde{M} = Q_2$. Die folgenden Ereignisse werden durch die folgenden Operatoren dargestellt:

$A_1 \cup A_1^* \{0\} A_1$: $F_{11} = F_{(1;\mathrm{id};0)}$, $F_{12} = F_{(1;\mathrm{non};1)}$,
$F_{13} = F_{(1;e_0;2)}$, $F_{14} = F_{(1;e_1;3)}$,

$A_1^* \{0\} A_1$: $F_{21} = F_{(1;\mathrm{id};1)}$, $F_{22} = F_{(1;\mathrm{non};0)}$,
$F_{23} = F_{(1;e_0;3)}$, $F_{24} = F_{(1;e_1;2)}$,

$A_2 \cup A_2^* \{2\} A_2$: $F_{31} = F_{(1;e_2;0)}$, $F_{32} = F_{(1;e_3;1)}$,
$F_{33} = F_{(1;\mathrm{id};2)}$, $F_{34} = F_{(1;\mathrm{non};3)}$,

$A_2^* \{2\} A_2$: $F_{41} = F_{(1;e_2;1)}$, $F_{42} = F_{(1;e_3;0)}$,
$F_{43} = F_{(1;\mathrm{id};3)}$, $F_{44} = F_{(1;\mathrm{non};2)}$.

Da $k_2 \in Q_2$ ist, folgt $F_{(k_2)} \in M$. Ferner muß aber ein $F_{3i} \in M$ sein. Falls $F_{3j} \in M$, $j \neq 3$, ist, so gilt $F_{3j}(F_{(k_2)}) = F_{(k_l)}$, $l \neq 2$. Aus Lemma 2 folgt dann, daß M^{A_i} für ein i eine Kleene-Menge ist. Dann wäre aber $\widetilde{M} \neq Q_2$. Daher ist $F_{33} \in M$. Ferner gilt $F_{43} \notin M$, da bei einfacher Rückkopplung $F_{(k_3)}$ entsteht.

1. Fall: Sei $F_{41} \in M$. Dann ist $F' = F_{41}(F_{(k_2)}) \in M$. Entsprechend Abb. 6 aus /4/ zeigt man F_{11}, $F_{21} \notin M$. Angenommen es wäre $F_{22} \in M$. Dann gilt $F_{(et)}(F', F_{22}) = F_{(k_0)} \in M$. Angenommen, es wäre $F_{23} \in M$. Dann gilt $F_{(g)}(F', F_{23}) = F_{(k_0)} \in M$ für $g(0,2) = g(0,3) = g(1,3) = 0$, $g(1,2) = 1$. In beiden Fällen wäre wegen Lemma 2 auch M^{Ai} für ein i eine Kleene-Menge, also $\widetilde{M} \neq Q_2$. Daher gilt $F_{24} \in M$.

Analog zeigt man $F_{13} \notin M$, $F_{14} \notin M$, so daß $F_{12} \in M$ gelten muß. Wir betrachten nun die Menge

$$U_{21} = \{F : F((1, \ldots, 1, 2, \ldots, 2)(0, \ldots, 0, 2, \ldots, 2)) \in \\ \in \{10, 22\}\}.$$

Es ist leicht zu zeigen, daß U_{21} abgeschlossen ist. Man erkennt sofort

$$[\{F_{(f)} : f \in Q_2\} \cup \{F_{12}, F_{24}, F_{33}, F_{41}\}] \subseteq U_{21}.$$

Wir zeigen nun die umgekehrte Inklusion. Sei dazu

$$G_1 = F_{24}(F_{41}(F_{(k_2)})) = \begin{cases} 2 & t \leq 2, \\ 3 & t \geq 3. \end{cases}$$ Die Funktion

$u(z_1, z_2, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ sei wie folgt definiert:

$$u(z^2, x^n, y^m) = \begin{cases} 2 & \text{für } z_1 = 2,\ z_2 = 1,\ x_1 = \ldots = x_n = 1, \\ & \qquad y_1 = \ldots y_m = 2, \\ 2 & \text{für } z_1 = 2,\ z_2 = 0,\ x_1 = \ldots = x_n = 0, \\ & \qquad y_1 = \ldots y_m = 2, \\ 3 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir betrachten $G_2 \in M$, wobei G_2 durch das in Abb. 1 gegebene Schema definiert ist.

Mit $\widetilde{z_1}' = (1, \ldots, 1, 2, \ldots, 2)$ und $\widetilde{z_2}' = (0, \ldots, 0, 2, \ldots, 2)$ gilt

$$G_2(\widetilde{z}_1 \widetilde{z}_2 \ldots) = \begin{cases} 22333\ldots & \text{für } \widetilde{z}_1 = \widetilde{z}_1',\ \widetilde{z}_2 = \widetilde{z}_2' \\ 23333\ldots & \text{für } \widetilde{z}_1 = \widetilde{z}_1',\ \widetilde{z}_2 \neq \widetilde{z}_2' \\ 33333\ldots & \text{sonst.} \end{cases}$$

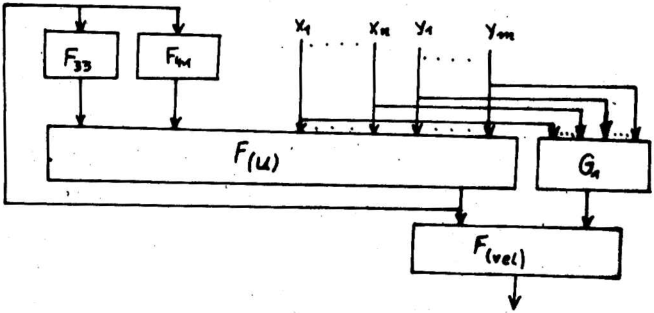


Abb. 1

Sei nun $F \in U_{21}^{A_1}$, d.h. $F(\widetilde{z}_1'\widetilde{z}_2') = 10$. Dann kann F durch einen Automaten erzeugt werden, für den

$$z_i' = \delta_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_k)$$
$$y = \lambda(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_k)$$

gilt, dessen Zustandsmenge durch Tupel aus $\{0,1\}^k$ kodiert ist und dessen Anfangszustand (1, ..., 1) ist. Wir definieren nun δ_i' und λ' wie folgt:

$$\delta_i'(u_1, u_2, u_3, u_4, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_k) =$$

$$= \begin{cases} 1 \text{ für } u_1 = x_1 = \ldots = x_n = z_1 = \ldots = z_k = 1, \\ \qquad u_2 = u_3 = u_4 = y_1 = \ldots = y_m = 2 \\ 0 \text{ für } u_1 = x_1 = \ldots = x_n = z_1 = \ldots = z_k = 0, \\ \qquad u_2 = u_3 = u_4 = y_1 = \ldots = y_m = 2 \\ \mathrm{non}(\delta_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, v_{11}, \ldots, v_{k1})) \text{ für } u_1 = 1, \\ \qquad u_2 = u_4 = 2\ u_3 = 3 \\ \mathrm{non}(\delta_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, v_{12}, \ldots, v_{k2})) \text{ für } u_1 = 1, \\ \qquad u_2 = u_3 = 3,\ u_4 = 2 \\ \mathrm{non}(\delta_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_k)) \text{ für } \\ \qquad (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \{(1, 2, 3, 2,), (1, 3, 3, 3), (0,2,3,3)\} \\ \text{und sonst beliebig} \end{cases}$$

$$\lambda'(u_1, u_2, u_3, u_4, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_k) =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{für } u_1 = x_1 = \ldots = x_n = z_1 = \ldots = z_k = 1, \\ & \qquad u_2 = u_3 = u_4 = y_1 = \ldots = y_m = 2 \\ 0 & \text{für } u_1 = x_1 = \ldots = x_n = z_1 = \ldots = z_k = 0, \\ & \qquad u_2 = u_3 = u_4 = y_1 = \ldots = y_m = 2 \\ (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, v_{11}, \ldots, v_{k1}) & \text{für } u_1 = 0, \\ & \qquad u_2 = 4 = 2,\ u_3 = 3 \\ (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, v_{12}, \ldots, v_{k2}) & \text{für } u_1 = 1, \\ & \qquad u_2 = u_3 = 3,\ u_4 = 2 \\ (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_k) & \text{für } (u_1, u_2, u_3, u_4) \\ & \qquad \in \{(1, 2, 3, 2), 1, 3, 3, 3,), (0, 2, 3, 3)\} \\ \text{und sonst beliebig.} & \end{cases}$$

Dabei sei $v_{i1} = \delta_i(1, \ldots, 1, 2, \ldots, 2, 1, \ldots, 1)$,

$v_{i2} = \delta_i(0, \ldots, 0, 2, \ldots, 2, v_{11}, \ldots, v_{k1})$.

Man erkennt, daß δ_i' und λ' aus Q_2 sind. Das folgende Schema realisiert F, wie man leicht nachprüft.

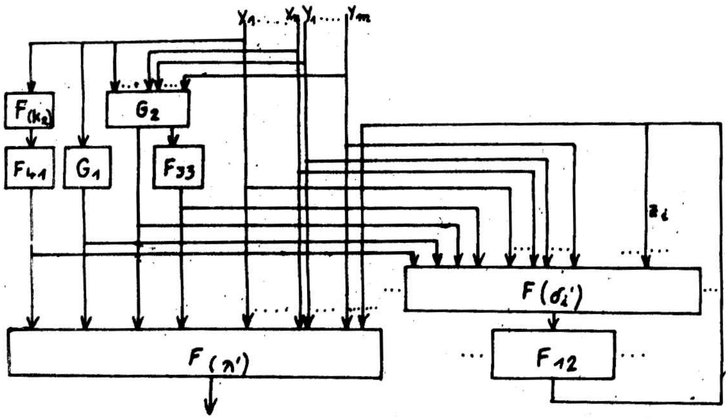


Abb. 2

Durch eine leichte Modifikation der Überlegungen ist auch $F \in U_{21}^{A_2}$ erzeugbar. Nach diesen Überlegungen gilt also $M \supseteq U_{21}$. Gilt nun $M \supset U_{21}$, so ist für ein i auch M^{A_i} eine Kleene-Menge, denn in M liegt ein Operator F mit $F(\tilde{z}_1{}'\tilde{z}_2{}') \in \{00, 01, 11, 23, 32, 33\}$. Dann zeigt Abb. 3 eine Konstante K, die in den ersten beiden Takten die Ausgabefolge $y_1y_2 \in \{00, 01, 11, 23, 32, 33\}$ hat. Für den Fall $y_1y_2 = 00$ zeigt Abb. 4 $F_{(k_0)}$. Im Fall $y_1y_2 = 01$ zeigt Abb. 5 $F_{(k_0)}$. Ähnlich geht man auch in den anderen Fällen vor.

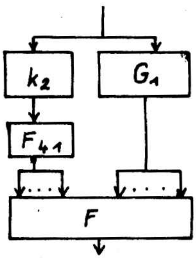


Abb. 3

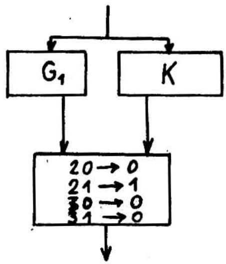


Abb. 4

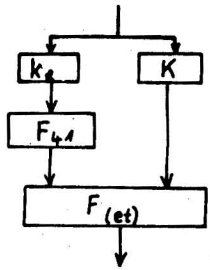


Abb. 5

Somit muß wegen $\tilde{M} = Q_2$ auch $M = U_{21}$ gelten.

Nun ist U_{21} noch als Kleene-Menge nachzuweisen. Sei S ein beliebiges reguläres Ereignis über $A_1{}^n \times A_2{}^m$.

a) Gilt $\tilde{z}_1{}'\tilde{z}_2{}' \in S$ und $\tilde{z}_1{}' \in S$, wählen wir $Y = \{2\}$.
b) $\tilde{z}_1{}'\tilde{z}_2{}' \in S$, $\tilde{z}_1{}' \notin S$. Dann wählen wir $Y = \{0\}$.
c) $\tilde{z}_1{}'\tilde{z}_2{}' \notin S$, $\tilde{z}_1{}' \notin S$. Wir nehmen $Y = \{3\}$.
d) $\tilde{z}_1{}'\tilde{z}_2{}' \notin S$, $\tilde{z}_1{}' \in S$. Wir wählen $Y = \{1\}$.

In jedem Fall gibt es dann nach der Definition von U_{21} ein $F \in U_{21}$, durch das S dargestellt wird.

Wir kommen nun zum zweiten Fall.

2. Fall: $F_{42} \in M$.

Durch die gleichen Schlüsse wie eben erhalten wir

$$U_{22} = [\{F_{(f)} : f \in Q_2\} \cup \{F_{42}, F_{33}, F_{22}, F_{13}\}]$$

$\{F : F(\tilde{z}_2{}'\tilde{z}_1{}') \in \{01,\ 22\}\}$.

3. Fall: $F_{44} \in M$.
Hier erhalten wir entsprechend (man benutze die Konstruktion aus /6/):

$$U_{23} = [\{F_{(f)} : f \in Q_2\} \cup \{F_{44}, F_{33}, F_{24}, F_{13}\}] = \{F : \varphi_F \in Q_2\}.$$

In diesem Fall führen wir den Beweis, daß bei $M \supset U_{23}$ für ein i auch M^{A_i} eine Kleene-Menge ist, wie folgt:

$F \in M$, $F \notin U_{23}$ impliziert $\varphi_F \notin Q_2$. Sei zuerst $F \in M^{A_1}$. Dann ist φ_F nach entsprechenden Identifikationen und der Substitution von $F_{(k_2)}$ für die Variablen aus A_2 eine der folgenden Funktionen: non, k_0, k_1. Da $F_{(et)} \in M$ gilt, haben wir in jedem Fall $k_i \in \varphi(M) = \{\varphi_F : F \in M\}$ mit $i \in \{0,1\}$. Sei $k_i = \varphi_G$. Dann gilt $F_{(f)}(G, F_{44}(F_{(k_2)})) = F_{(k_i)}$ mit $f(i,2) = f(j,3) = i$, $f(\bar{i},2) = \bar{i}$, $j \in \{i, \bar{i}\}$. Somit ist für ein 1 auch M^{A_1} eine Kleene-Menge.

Sei nun $F \in M^{A_2}$. Nach entsprechenden Identifikationen und Substitutionen entsteht dann eine der folgenden Funktionen: k_3, e_0, e_1. Für $k_3 = \varphi_F$ ist alles klar (analog obigem). Für $e_0 \in \varphi(M)$ sei $e_0 = \varphi_{G'}$. Wir betrachten den Operator, der in Abb. 6 gegeben ist. Für ihn gilt $H = F_{(e_2)}$. Aus Lemma 1 folgt nun, daß M^{A_i} für ein i eine Kleene-Menge ist. Für $e_1 \in \varphi(M)$ schliessen wir analog.

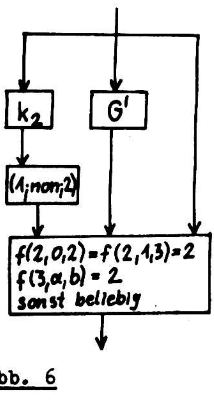
<u>Lemma 6:</u> Sei M eine Kleene-Menge, für die auch M^{A_i} für ein $i \in \{1,2\}$ eine Kleene-Menge ist. Dann umfaßt M eine der folgenden Mengen:

$M_{0,2}$, $M_{0,3}$, $M_{1,2}$, $M_{1,3}$, $M_{2,0}$, $M_{2,1}$, $M_{3,0}$, $M_{3,1}$, wobei

$$M_{a,b} = \{F ;\ F \in M^{\{a,c\}},\ F((a, \ldots, a, b, \ldots, b)) = a\}$$

ist.

<u>Beweis.:</u> Offenbar reicht es, die minilen Kleene-Mengen in P^{A_i} zu bestimme-



<u>Abb. 6</u>

Daß das genau die im Lemma angegebenen Mengen sind, wird wie in /4/ und /5/ bewiesen.

Beweis von Satz 3: i) folgt aus Lemma 1 - 6.
ii) $M_{0,2} \subset P^{A_1}$ ist Kleene-Menge. Sei C eine beliebige Menge von Konstanten aus P^{A_2}. Dann gilt $[P^{A_1} \cup C] = P^{A_1} \cup C$, und damit ist $P^{A_1} \cup C$ eine Kleene-Menge. Da es kontinuumviele C gibt, ist die Behauptung bewiesen.
Der Beweis von Satz 4 wird unter Berücksichtigung kleiner Modifikationen wie Satz 1ii) und Satz 2ii) geführt.
Wir möchten an dieser Stelle bemerken, daß die Aussagen von Satz 3 und 4 auch dann gültig bleiben, wenn nur verlangt wird, daß die Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_l$ paarweise verschieden sind.

4. Die Unentscheidbarkeit der Kleene-Vollständigkeit

Wir beweisen in diesem Abschnitt Satz 5. Dabei geben wir den Beweis nur für den Teil i), ii) wird analog bewiesen durch Zurückführung auf das Resultat aus /4/ oder auf i).
Sei M eine Teilmenge von P_2. Jedem $F \in M$ ordnen wir ein $G_F \in P_k$ in der folgenden Weise zu:

$$G_F(x^n)(t) = \begin{cases} F(x^n)(t) & \text{für } (x^n)(i) \in \{0,1\}^n \text{ für alle } i \le t \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Weiterhin setzen wir

$$G_M = \{G_F : F \in M\} \cup \{F_{(h_i)} : i = 2, \ldots, k-2\},$$

wobei $h_i(x)$ durch $h_i(1) = h_i(i) = 1$, $h_i(j) = 0$ für $j \neq 1, i$ definiert ist.

Lemma 7: M ist genau dann vollständig in P_2, wenn G_M in $M_{(0,1)}$ vollständig ist.

Beweis: Wir definieren die Abbildung pr als Beschränkung von $G \in M_{(0,1)}$ auf die Eingaben über E_2. pr ist ein Homomorphismus von $M_{(0,1)}$ auf P_2 bzgl. der hier betrachteten Operationen. Deshalb ist $\mathrm{pr}\,[M'] = [\mathrm{pr}\,M']$ für $M' \subseteq G_{P_2}$.

Sei nun M in P_2 vollständig. Dann sind $F_{(et)}$, $F_{(non)}$, $F_{(aut)}$

und $F_{(1;id;0)}$ in M enthalten, und wir können die entsprechenden logischen Netze konstruieren, ausgehend von Netzen, deren Abbildungen in M liegen. In der gleichen Weise können wir Netze konstruieren, deren Projektion $F_{(et)}$, $F_{(non)}$, $F_{(aut)}$ und $F_{(1;id;0)}$ sind, indem wir mit Netzen aus G_M beginnen. Seien diese Netze G_1, G_2, G_3 und G_4. Dann ist $G_3(F_{(h_1)}, F_{(h_i)}) = F_{(j_i)}$, wobei die Funktion $j_i(x)$ durch $j_i(i) = 1$, $j_i(l) = 0$ für $l \neq i$ definiert ist. Deshalb haben wir $[G_M] \supseteq \{F_{(f)} : f \in P'_{k,2}\}$ nach Lemma aus /3/, wobei $P'_{k,2}$ die Menge der Funktionen aus P'_k ist, deren Werte nur in E_2 liegen. Durch eine leichte Modifikation des Synthesetheorems in /7/ können wir nun

$$M_{(0,1)} = [\{G_1, G_2, G_3, G_4\} \cup \{F_{(j_i)} : i = 1, 2, \ldots, k-2\}] \leq [G_M]$$

zeigen. Damit ist G_M in $M_{(0,1)}$ vollständig.
Jetzt nehmen wir an, daß G_M in $M_{(0,1)}$ vollständig ist, und M in P_2 nicht vollständig ist. Sei F ein Automatenoperator mit $F \in P_2$, $F \in [M]$. Nun gibt es eine Abbildung $G \in M_{(0,1)}$ mit pr G = = F, und somit ist

$$F = \text{pr } G \in \text{pr } [G_M] = [\text{pr } G_M] = [M \cup \{id\}],$$

da es sehr leicht zu zeigen ist, daß M genau dann vollständig ist, wenn $M \cup \{id\}$ vollständig ist. Damit haben wir den gewünschten Widerspruch.

Beweis von Satz 5 i): Angenommen, solch ein Algorithmus existiert, und sei $M \subseteq P_2$ eine endliche Menge. Dann ist G_M ebenfalls eine endliche Menge und genau dann vollständig in $M_{(0,1)}$, wenn M in P_2 vollständig ist. Wenn wir die Resultate aus /5/ ausnutzen, können wir analog /4/ zeigen, daß G_M in $M_{(0,1)}$ genau dann vollständig ist, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

i) G_M ist Kleene-vollständig.

ii) G_M enthält $F_0 \notin M_{T_0}$, $F_1 \notin M_{T_1}$.

Nach unserer Annahme ist daher die Vollständigkeit in $M_{(0,1)}$ und damit auch die Vollständigkeit in P_2 entscheidbar.
Dies widerspricht /8/.

Literatur

/1/ Blochina, G.N., Kudrjavcev, W.B., Burosch, G.
Über gewisse Eigenschaften des Systems P
Math.Nachr. 54, S. 355 - 378 (1972)

/2/ -, -, -, Das Problem der Vollständigkeit für Boolesche Funktionen über zwei Dualmengen mit nichtleerem Durchschnitt
Zeitsch. f. math. Logik und Grundlagen der Math. 19, S. 163 - 180 (1973

/3/ Burosch, G. Über die Ordnung der prävollständigen Klassen in Algebren von Prädikaten
Preprint, Univ. Rostock

/4/ Dassow, J. Kleene-Mengen und Kleene-Vollständigkeit
EIK 10, S. 287 - 295 (1974)

/5/ -, Kleene-Mengen und trennende Mengen
Math.Nachr. 74, 89 - 97 (1976)

/6/ -, Über zwei abgeschlossene Mengen von Automatenoperatoren
Wiss. Zeitschr. Univ. Rostock, Math.-Nat. Reihe, 23 , 763 - 767 (1974)

/7/ Kobrinski, N.E., Trachtenbrot, B.A.
Einführung in die Theorie der endlichen Automaten, Berlin 1967

/8/ Kratko, M.I., Algorithmische Unlösbarkeit des Entscheidungsproblems der Vollständigkeit von endlichen Automaten
Dokl. Akad. Nauk 155, (1964), (russ.)

/9/ Kudrjavcev, W.B., Burosch, G.
Das Problem der Vollständigkeit für Boolesche Funktionen über zwei Dualmengen
Math.Nachr. 54, S. 105 - 125 (1972)

/10/ Pöschel, R. Postsche Algebren von Funktionen über einer Familie endlicher Mengen
Zeitsch.f.math.Logik und Grundlagen d.

Math. 19, S. 37 - 74 (1973).

eingegangen: 21. 9. 1976

Anschrift des Verfassers:

Dr. Jürgen Dassow
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
DDR-25 Rostock
Universitätsplatz 1

Hansgeorg Meißner

Zu einigen Begriffen und Resultaten aus der Theorie der Baumautomaten

1. Einführung

Die Motivationen für die Ausarbeitung einer Theorie der Baumautomaten sind vielfältig. Auf der einen Seite gibt es eine Reihe interessanter theoretischer Aspekte bei der Untersuchung von Baumautomaten. So hat z.B. W. THATCHER in seiner Arbeit [19] auf eine interessante Verbindung der Baumautomaten mit den kontextfreien Sprachen hingewiesen. Es zeigte sich weiterhin, daß eine Reihe von Entscheidungsproblemen in der Logik mit den Mitteln der Theorie der Baumautomaten bearbeitet und gelöst werden konnte. In diesem Zusammenhang sei insbesondere auf die Arbeiten von DONER [3] und THATCHER/WRIGHT [20] hingewiesen. Auf der anderen Seite entsprang aus einer Vielzahl von praktischen Aufgabenstellungen ein gesteigertes Interesse am Aufbau einer Theorie der Baumautomaten. So legte z.B. MAIBAUM [9] auf der Grundlage der Baumautomaten einen verallgemeinerten Zugang zur Theorie der formalen Sprachen vor. JOSHI wies in seiner Arbeit [4] auf Zusammenhänge zwischen der Theorie der Baumautomaten und der Zeichenerkennung hin. Schließlich sei vermerkt, daß die Baumautomaten überall dort auf Interesse stoßen, wo sich die Verarbeitung hierarchisch geordneter Datenmengen notwendig macht bzw. wo es um die Verarbeitung von strukturierten Zeichenreihen wie Termen, Ausdrücken, Formeln u.ä. geht.
Ziel der folgenden Ausführungen ist es, einige wesentliche Begriffsbildungen und Resultate aus der Theorie der Baumautomaten zusammenzustellen, um einen gewissen Eindruck von diesem Gebiet zu vermitteln. Bedingt durch den zur Verfügung stehenden Platz ergibt sich die Notwendigkeit, aus den bisher bekannten Ergebnissen der Untersuchungen zum Problemkreis der Baumautomaten einige wenige auszuwählen und in entsprechender Kürze darzulegen.
Dem angestrebten Ziel Rechnung tragend, wird im allgemeinen

auf Beweise verzichtet und inhaltlichen Erläuterungen der Vorrang gegeben.
Anhand der angefügten Literaturhinweise kann jedoch jederzeit ermittelt werden, wo die entsprechenden Beweise in der Literatur zu finden sind.

2. Baumakzeptoren:

Den Begriff des Baumakzeptors kann man sich als Verallgemeinerung eines endlichen MEDWEDJEW-Automaten vorstellen ([20, 10]):
Es sei $\mathfrak{A} = [Z, X, f, z_0, Z_F]$ ein endlicher initialer MEDWEDJEW-Automat mit der Zustandsmenge Z, dem Eingabealphabet X, der Überführungsfunktion f, dem Initialzustand z_0 und der Finalmenge Z_F. Auf Grund der Festlegung $x(z) = f(z, x)$ kann jedes Eingabesymbol $x \in X$ als einstellige Operation über Z betrachtet werden. Wir erhalten somit eine endliche Algebra $A = [Z, X \cup \{z_0\}]$ mit der Trägermenge Z, der Menge der einstelligen Operation X und der nullstelligen Operation (der Konstanten) z_0.
Läßt man in dieser Algebra A nicht nur einstellige Operationen und nicht nur eine nullstellige Operation zu, so kommt man zu den sogenannten v e r a l l g e m e i n e r t e n e n d l i c h e n A u t o m a t e n oder auch B a u m a u t o m a t e n . Die Bezeichnung Baumautomaten rührt daher, daß bei diesen Automaten die Eingabewörter zu Eingabebäumen (bzw. Eingabetermen) werden.
Im folgenden werden nun die angedeuteten Begriffe präzisiert und der Begriff des Baumakzeptors definiert:

D e f i n i t i o n 2.1:

$\langle \Sigma, r \rangle$ heißt R a n g - A l p h a b e t $=_{Df}$ Σ ist ein endliches Alphabet und r ist eine eindeutige Abbildung[1] von Σ in die Menge der natürlichen Zahlen Nz.

---

[1] Es ist auch möglich, r als Relation zu wählen (vgl. z.B. [21])

Gilt $r(\sigma) = n$, so sagen wir, σ hat den R a n g oder den S t e l l e n i n d e x n . Weiter vereinbaren wir $r^{-1}(n) =_{Df} \sum_n$.

Die Elemente aus $\sum_0$ betrachten wir wie üblich als Konstanten und setzen im weiteren stets voraus: $\sum_0 \neq \emptyset$.

Wir definieren nun die Menge T_Σ aller T e r m e (bzw. aller B ä u m e) über Σ :

D e f i n i t i o n 2.2:

(1) $\Sigma_0 \subseteq T_\Sigma$

(2) $f \in \Sigma_n \wedge t_1, \dots, t_n \in T_\Sigma \longrightarrow f t_1 \dots t_n \in T_\Sigma$. $(n = 1, 2, \dots)$

Im folgenden Beispiel werden einige Beispiele von Termen angegeben und es wird gezeigt, wie jeder Term aus T_Σ als Baum betrachtet werden kann und umgekehrt.

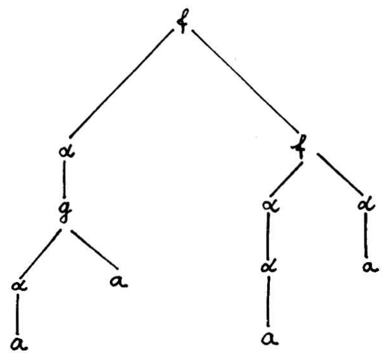
B e i s p i e l 2.3:

Es sei $\Sigma_0 = \{a\}$, $\Sigma_1 = \{\alpha\}$, $\Sigma_2 = \{f, g\}$, $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2$.

Dann gilt:

$T_\Sigma = \{a, \alpha a, faa, gaa, \alpha\alpha a, \dots, f\alpha g\alpha aaf\alpha\alpha a\alpha a, \dots\}$

Der Term $f\alpha g\alpha aaf\alpha\alpha a\alpha a$ hat als Baum aufgeschrieben folgende Gestalt:



Dieses Beispiel zeigt deutlich, daß die Begriffe T e r m ü b e r Σ und B a u m ü b e r Σ inhaltlich dasselbe bedeuten. Wir identifizieren deshalb diese Begriffe und ver-

wenden sie jeweils so, wie es dem Verständnis am dienlichsten ist.
Eine von t verschiedene Teilzeichenreihe t' eines Terms t, die selbst Term ist, wollen wir T e i l t e r m von t nennen und notieren dies durch $t' \prec t$.
Damit können wir definieren:

<u>D e f i n i t i o n 2.4</u>:

Es sei $t \in T_\Sigma$. d(t) heißt T i e f e des Terms t $=_{Df}$

$$d(t) = \begin{cases} 0, \text{ falls } t \in \Sigma_0 \\ \max\limits_{t' \prec t} d(t') + 1 \text{ , sonst .} \end{cases}$$

Der in 2.3 als Baum aufgeschriebene Term hat somit die Tiefe 4.
Interpretiert man entsprechend der Festlegung
$f(t_1,\ldots,t_n) =_{Df} f\, t_1\ldots t_n$ für $f \in \Sigma_n$ und $t_1,\ldots,t_n \in T_\Sigma$ die Elemente aus Σ als Operationen über T_Σ, so wird $\mathcal{F}_\Sigma =_{Df} [T_\Sigma, \Sigma]$ zu einer absolut freien Algebra mit der Trägermenge T_Σ und dem Operationensystem Σ.
Damit kann nun gesagt werden, was wir unter einem Baumakzeptor verstehen wollen:

<u>D e f i n i t i o n 2.5</u>:

$\mathcal{A} = [\Sigma', Z, h, Z_F]$ heißt B a u m a k z e p t o r über Σ $=_{Df}$

1. $[Z, \Sigma']$ ist eine endliche Algebra mit einem endlichen Operationensystem Σ', das der Bedingung $\Sigma_0 \neq \emptyset$ genügt.
2. h ist ein Homomorphismus von $\mathcal{F}_\Sigma = [T_\Sigma, \Sigma]$ in $[Z, \Sigma']$ wobei Σ die zu Σ' gehörende Menge von Funktionensymbolen ist.
3.

In Analogie zur Theorie der „gewöhnlichen" endlichen Automaten nennen wir T_Σ die Menge der E i n g a b e t e r m e (bzw. der E i n g a b e b ä u m e), Z die Z u s t a n d s m e n g e und Z_F die F i n a l m e n g e. Dadurch, daß $\mathcal{F}_\Sigma$ eine freie Algebra ist, ist h durch die Bilder der Elemente aus Σ_0 eindeutig bestimmt. Die Abbildung h zeichnet also gewissermaßen die Initialmenge aus.

D e f i n i t i o n 2.6:

(1) $\mathfrak{U} \subseteq T_\Sigma$ heißt die v o n d e m A u t o m a t e n $\mathcal{A} = [X, Z, h, Z_F]$ a k z e p t i e r t e T e r m m e n g e $=_{Df}$ $h^{-1}(Z_F) = \mathfrak{U}$.

(2) $\mathfrak{U} \subseteq T_\Sigma$ heißt akzeptierbar $=_{Df}$ Es gibt einen Baumakzeptor, der $\mathfrak{U}$ akzeptiert.

Veranschaulichen wir die vorangegangenen Begriffsbildungen an einem Beispiel:

B e i s p i e l 2.7:

Es sei $\mathcal{A} = [\Sigma', Z, h, Z_F]$ ein Baumautomat, wobei gilt: $Z = \{z_0, z_1, z_2\}$, $Z_F = \{z_2\}$, und in Σ' seien eine nullstellige Operation z_0, zwei einstellige Operationen α' und β' und eine zweistellige Operation φ' enthalten. Die Operationen seien wie folgt definiert:

α'	
z_0	z_2
z_1	z_2
z_2	z_1

β'	
z_0	z_0
z_1	z_1
z_2	z_0

φ'	z_0	z_1	z_2
z_0	z_1	z_1	z_2
z_1	z_0	z_2	z_1
z_2	z_1	z_2	z_0

Als Symbol für die eine vorhandene nullstellige Operation wählen wir λ und erhalten somit: $h(\lambda) = z_0$ und

$$\Sigma_0 = \{\lambda\}, \quad \Sigma_1 = \{\alpha, \beta\}, \quad \Sigma_2 = \{\varphi\} \quad \text{und} \; \Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2 .$$

Wir geben nun einen Ausschnitt aus der Menge T_Σ an und kennzeichnen die von $\mathcal{A}$ akzeptierten Terme durch Unterstreichungen:

$$T_\Sigma = \{\lambda, \underline{\alpha\lambda}, \beta\lambda, \varphi\lambda\lambda, \underline{\alpha\varphi\lambda\lambda}, \alpha\alpha\lambda, \underline{\alpha\beta\lambda}, \varphi\alpha\lambda\lambda, \ldots$$
$$\underline{\alpha\varphi\varphi\beta\lambda\alpha\varphi\alpha\lambda\beta\lambda\beta\lambda}, \ldots\}$$

Der Homomorphismus h induziert in bekannter Weise auf T_Σ eine Kongruenzrelation $\underset{h}{\sim}$ ($t_1 \underset{h}{\sim} t_2 \;=_{Df}\; h(t_1) = h(t_2)$) mit endlichem Index. Ist $\mathfrak{U}$ die von einem Automaten $\mathcal{A} = [\Sigma', Z, h, Z_F]$ akzeptierte Termmenge, so kann $\mathfrak{U}$ als Vereinigung von gewissen Klassen aus $T_\Sigma / \underset{h}{\sim}$ dargestellt werden.

3. Reguläre Baummengen:

Eines der grundlegenden Resultate in der Automatentheorie ist die algebraische Charakterisierung der von MEDWEDJEW-Automaten akzeptierbaren Wortmengen. Diese auf KLEENE [6] zurückgehende Beschreibungsmöglichkeit akzeptierbarer Wortmengen gestattet es, alle (und nur die) akzeptierbaren Wortmengen durch Ausdrücke eines geeigneten Kalküls zu beschreiben. Es liegt nahe, auch für akzeptierbare Baummengen eine dem KLEENE-Kalkül ähnliche Charakterisierung zu versuchen. Zunächst einmal gilt der folgende Satz:

S a t z 3.1

Die akzeptierbaren Baummengen sind abgeschlossen bezüglich der Booleschen Operationen (Vereinigung, Durchschnitt, Komplement). Der Beweis erfolgt wie üblich durch Konstruktion geeigneter Akzeptoren und ist in [20] nachzulesen.
Ebenfalls in [20] wurden die folgenden Operationen auf Baummengen definiert:

D e f i n i t i o n 3.2:

Es seien $\mathfrak{U}, \mathfrak{V} \subseteq T_\Sigma$ und $\lambda \in \Sigma_0$.

(1) $\mathfrak{U} \cdot_\lambda \mathfrak{V} =_{Df}$ Menge aller Terme t aus T_Σ, für die ein t'$\in$ U derart existiert, daß t durch Einsetzen von Termen aus $\mathfrak{V}$ für alle in t' eingeschlossene λ erhalten werden kann.

(2) $\mathfrak{U}^\lambda =_{Df} \{\lambda\} \cup \mathfrak{U} \cup \mathfrak{U} \cdot_\lambda \mathfrak{U} \cup (\mathfrak{U} \cdot_\lambda \mathfrak{U}) \cdot_\lambda \mathfrak{U} \cup \cdots$

Die unter (1) angegebene Operation ist offensichtlich eine entsprechend verallgemeinerte Produktbildung und die unter (2) angegebene entspricht der Iteration.

B e i s p i e l 3.3:

Wir ermitteln einige Elemente der durch $\{faab\}^a \cdot_b \alpha a$ beschriebenen Baummenge U:

$U = \{a, f a \alpha \alpha a, f f a \alpha \alpha a \alpha \alpha a, f f f a \alpha \alpha a \alpha \alpha a \alpha \alpha a, \ldots\}$

Die Klasse der regulären Wortmengen über einem Alphabet ist bekanntlich die kleinste Klasse, die alle endlichen Mengen enthält und die gegenüber Vereinigung, Produktbildung und Iteration abgeschlossen ist (vgl. [6]). Weiterhin ist bekannt, daß die so definierten regulären Mengen mit den durch MEDWEDJEW-Automaten azeptierbaren Mengen zusammenfallen. Eine entsprechende Verallgemeinerung auf Baummengen gilt leider nicht, wie das folgende Beispiel zeigt:

Es sei $\Sigma_0 = \{\lambda\}$, $\Sigma_2 = \{f\}$ und $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$.

Wir definieren eine Menge V induktiv auf folgende Weise:

(1) $\lambda \in V$,

(2) $t \in V \longrightarrow f \lambda t \in V$.

Die Menge V hat also folgende Gestalt:

$V = \{\lambda, f\lambda\lambda, f\lambda f\lambda\lambda, f\lambda f\lambda f\lambda\lambda, \ldots\}$

Es läßt sich unschwer nachweisen, daß V akzeptierbar ist. V ist jedoch nicht mit den obigen Operationen darstellbar. (Das liegt daran, daß bei einer λ -Iteration von $f\lambda\lambda$ immer an beiden Stellen, an denen λ vorkommt, eingesetzt werden muß, was jedoch bei der hier vorgelegten Menge V nicht erlaubt ist).

Durch Einführung zusätzlicher nullstelliger Symbole läßt sich jedoch eine entsprechende Darstellung erreichen.

$$V = \{f\delta\lambda\}^{\lambda} \cdot_{\delta} \{\lambda\}$$

Damit ist die folgende Definition von r e g u l ä r e n B a u m m e n g e n motiviert:

D e f i n i t i o n 3.4:

$U \subseteq T_{\Sigma}$ heißt regulär $=_{Df}$ Es existiert ein $\hat{\Sigma}$ derart, daß $\hat{\Sigma}_n = \Sigma_n$ für $n \neq 0$, und U ist aus endlichen Teilmengen von $T_{\hat{\Sigma}}$ mit Hilfe der Operation $\cup, \cdot_{\lambda}, {}^{\lambda}$ $(\lambda \in \hat{\Sigma})$ darstellbar (Im Sinne von 3.2 und 3.3).

Definiert man die Regularität von Baummengen wie in 3.4 so kann die entsprechende Verallgemeinerung eines bekannten Satzes aus der Automatentheorie formuliert werden:

S a t z 3.5:

$U \subseteq T_\Sigma$ ist genau dann regulär, wenn U akzeptierbar ist. Der Beweis dieses Satzes ist etwas aufwendig und kann bei THATCHER/WRIGHT [20] nachgelesen werden.

In [2] hat W.S.BRAINERD sogenannte „Baumerzeugende reguläre Systeme" eingeführt. Diese entsprechen ihrem Wesen nach regulären Grammatiken, nur daß hier nicht Wortmengen sondern Baummengen erzeugt werden. In dieser Arbeit wurde auch der Nachweis geführt, daß die von den regulären Systemen erzeugbaren Baummengen mit den akzeptierbaren Baummengen zusammenfallen.
Insgesamt kann also (als analoges Resultat zur Theorie der gewöhnlichen endlichen Automaten) festgestellt werden, daß die durch Baumakzeptoren akzeptierbaren Baummengen, die regulären Baummengen und die durch reguläre Baumgrammatiken (so wollen wir die regulären Systeme nennen) erzeugbaren Baummengen zusammenfallen.

4. Lokale Mengen und kontextfreie Sprachen

In diesem Abschnitt sollen die Beziehungen zwischen Baumakzeptoren und den kontextfreien Sprachen etwas näher erläutert werden.

D e f i n i t i o n 4.1:

Eine Baummenge $V \subseteq T_\Sigma$ heißt l o k a l $=_{Df}$ Es gibt eine kontextfreie Grammatik G derart, daß V gleich der von G erzeugten Menge von Ableitungsbäumen D(G) ist.

B e i s p i e l 4.2:

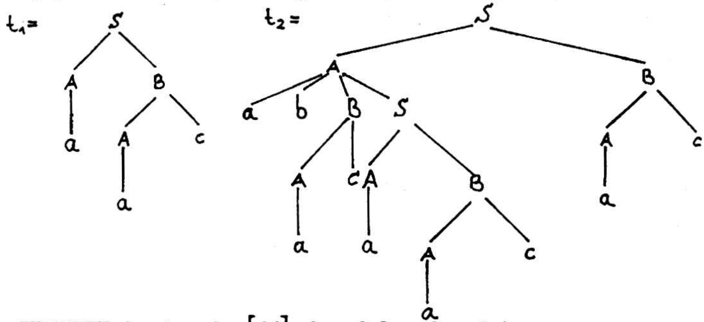
Es sei G = [X, N, R, S] eine kontextfreie Grammatik mit dem terminalen Alphabet X, dem nichtterminalen Alphabet N, der Regelmenge R und dem Startsymbol S. G habe folgende Regelmenge: $S \longrightarrow AB$

$A \longrightarrow abBS$

$B \longrightarrow Ac$

$A \longrightarrow a$

In D(G) sind dann z.B. folgende Bäume enthalten:



W. THATCHER bewies in [21] den folgenden Satz:

S a t z 5.3:

Jede lokale Teilmenge von T_Σ ist akzeptierbar.

Naturgemäß stellt sich hier die Frage nach der Umkehrung dieses Satzes. Dazu müssen wir jedoch zunächst den Begriff der Projektion einführen:

D e f i n i t i o n 4.4:

Es seien $\langle \Sigma, r \rangle$ und $\langle \Omega, s \rangle$ zwei Rang-Alphabete und es sei π eine Abbildung von Σ in Ω mit der Eigenschaft: $\pi(\Sigma_n) \subseteq \Omega_n$.
Wir erweitern π zu einer Abbildung $\bar{\pi}$ von T_Σ in T_Ω :
$\bar{\pi}(\sigma t_1 \cdots t_n) =_{Df} \pi(\sigma)\bar{\pi}(t_1) \dots \bar{\pi}(t_n)$.
Eine derartige Abbildung $\bar{\pi}$ heißt P r o j e k t i o n.
Damit können wir nun eine Reihe von Resultaten formulieren, die von THATCHER und ROUNDS in den Arbeiten [15,19,21] bewiesen wurden.

S a t z 4.5:

Die akzeptierbaren Baummengen sind abgeschlossen bzgl. Projektion.

S a t z 4.6:

Ist $U \subseteq T_\Sigma$ akzeptierbar und ist $\bar{\pi}$ eine Projektion von T_Ω in T_{Σ}, so ist $\bar{\pi}^{-1}(U)$ akzeptierbar.
Nach 4.6 sind also die akzeptierbaren Mengen auch bezüglich inverser Projektionen abgeschlossen.

S a t z 4.7:
Jede akzeptierbare Teilmenge von T_Σ kann durch Projektion aus einer lokalen Teilmenge von T_Ω (bei geeignetem Ω) erhalten werden.

Als Zusammenfassung erhalten wir somit:

S a t z 4.8:
Eine Baummenge ist genau dann akzeptierbar, wenn sie Projektion einer lokalen Menge ist.

In 4.2 ist deutlich zu erkennen, daß die Wörter der von G erzeugten Sprache aus den Ableitungsbäumen dadurch entstehen, daß die nullstelligen Symbole als Wort aufgeschrieben werden. Wir definieren deshalb:

D e f i n i t i o n 4.9:

Es sei Σ_0^* die von Σ_0 erzeugte Wortmenge.
Eine Abbildung fr von T_Σ in Σ_0^* heißt F r o n t f u n k t i o n $=_{Df}$ fr (t) ist die Folge der nullstelligen Symbole in t in der Reihenfolge, in der sie in t vorkommen.

B e i s p i e l 4.10:

Für die beiden in 4.2 angegebenen Bäume t_1 und t_2 gilt:
$fr(t_1) = aac$, $fr(t_2) = abacaacac$

Aus 4.1 und 4.9 ergibt sich unmittelbar:

F o l g e r u n g 4.11:
Ist $V \subseteq T_\Sigma$ lokal, so ist fr (V) eine kontextfreie Sprache.
Da die kontextfreien Sprachen bezüglich Projektion abgeschlossen sind, ergibt sich:

L e m m a 4.12:
Ist $V \subseteq T_\Sigma$ akzeptierbar, so ist $fr(V) \subseteq \Sigma_0^*$ eine kontextfreie Sprache. Die Umkehrung dieses Lemmas gilt auch, so daß wir insgesamt formulieren können:

S a t z 4.13:

$U \subseteq \Sigma_0^*$ ist genau dann kontextfrei, wenn eine akzeptierbare Baummenge $V \subseteq T_\Sigma$ derart existiert, daß $fr(V) = U$ gilt.
Dieses Resultat geht auf DONER [3] und THATCHER [19] zurück.
In [10] wurde darauf noch einmal eingegangen und in [7] wur-

den effektive Algorithmen für den Übergang von einer kontextfreien Grammatik zum zugehörigen Baumakzeptor und umgekehrt erarbeitet.

5. Minimisierung und Dechiffrierung

W.S.BRAINERD nennt in seiner Arbeit [1] einen Baumakzeptor r e d u z i e r t , wenn es für jeden Zustand $z \in Z$ einen Term $t \in T_\Sigma$ derart gibt, daß $h(t) = z$ gilt. Bei der Reduzierung von Automaten, werden also Zustände, die überhaupt nicht erreichbar sind, weggelassen.

Die Grundlage für die weitere Minimisierung der Zustandsmenge, bei der auch noch äquivalente Zustände zusammengefaßt werden, bildet die folgende Äquivalenzdefinition für Zustände (vgl. [1,11]).

D e f i n i t i o n 5.1:

Es seien $\mathcal{A} = [\Sigma', Z, h, Z_F]$ ein Baumakzeptor und $z_1, z_2 \in Z$.

(1) z_1 und z_2 heißen 0-äquivalent $(z_1 \underset{\mathcal{A},0}{\sim} z_2) =_{Df}$
$z_1 \in Z_F \longleftrightarrow z_2 \in Z_F$.

(2) z_1 und z_2 heißen m-äquivalent $(z_1 \underset{\mathcal{A},m}{\sim} z_2) =_{Df} z_1 \underset{\mathcal{A},m-1}{\sim} z_2$ und

$$\forall n \forall \omega' \forall z_{i_1} \cdots \forall z_{i_{n-1}} (n \in Nz \wedge \omega' \in \Sigma'_n \wedge z_{i_1}, \ldots, z_{i_{n-1}} \in Z \longrightarrow$$
$$\omega'(z_1, z_{i_1}, \ldots, z_{i_{n-1}}) \underset{\mathcal{A},m-1}{\sim} \omega'(z_2, z_{i_1}, \ldots, z_{i_{n-1}}) \wedge$$
$$\omega'(z_{i_1}, z_1, z_{i_2}, \ldots, z_{i_{n-1}}) \underset{\mathcal{A},m-1}{\sim} \omega'(z_{i_1}, z_2, z_{i_2}, \ldots, z_{i_n}) \wedge$$
$$\vdots$$
$$\omega'(z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots, z_{i_{n-1}}, z_1) \underset{\mathcal{A},m-1}{\sim} \omega'(z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots, z_{i_{n-1}}, z_2))$$

(3) z_1 und z_2 heißen äquivalent $(z_1 \underset{\mathcal{A}}{\sim} z_2) =_{Df}$
$\forall m(m \in Nz \longrightarrow z_1 \underset{\mathcal{A},m}{\sim} z_2)$

Die Relation $\underset{\mathcal{A},m}{\sim}$ ist für jeden Baumakzeptor $\mathcal{A}$ und für jedes $m \in Nz$ eine Äquivalenzrelation. Mit $\mathcal{A}/\sim$ bezeichnen wir denjenigen Automaten, der aus $\mathcal{A}$ durch Faktorisierung der Zustandsmenge hervorgegangen ist. Die Zustände von $\mathcal{A}/\sim$ sind die Klassen aus $Z/\underset{\mathcal{A}}{\sim}$.

In Analogie zur Theorie der üblichen endlichen Automaten gilt dann der folgende Satz:

S a t z 5.2:

Es sei $U \subseteq T_\Sigma$ die von $\mathcal{A}$ akzeptierte Baummenge. Dann ist

$\mathcal{A}_{/\sim}$ ein Automat mit der kleinstmöglichen Zustandsanzahl, der U akzeptiert.
$\mathcal{A}_{/\sim}$ ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.
Dieser Satz wurde von BRAINERD [1] bewiesen. In dieser Arbeit findet sich auch ein Algorithmus für die Minimisierung von Baumakzeptoren.
Die in 5.1 angegebene Definition der Zustandsäquivalenz bildet auch eine wesentliche Grundlage für die Untersuchung von Dechiffrierungsmöglichkeiten für Baumakzeptoren.
Bei der Untersuchung der Dechiffrierungsprobleme werden die Automaten als black-box betrachtet, d.h. als Systeme, bei denen nur das Eingabe-Ausgabe-Verhalten beobachtet werden kann. Die Aufgabe besteht dann darin, festzustellen, welche Experimente mit einer solchen black-box durchgeführt werden müssen, um ihre innere Struktur vollständig zu bestimmen. Bezüglich der Dechiffrierung von Baumakzeptoren gilt der folgende Satz:

<u>S a t z 5.3</u>:
Es sei $\mathcal{A}$ ein Baumakzeptor mit höchstens k Zuständen. Dann existiert ein Algorithmus, mit dem die innere Struktur von $\mathcal{A}$ vollständig bestimmt werden kann, wenn das Verhalten von $\mathcal{A}$ auf der Menge $\{t \mid t \in T_\Sigma \wedge d(t) \leq 2k-2\}$ bekannt ist.
Der Beweis dieses Satzes mit der Angabe des zugehörigen Dechiffrierungsalgorithmus bildet den Inhalt von [11].

6. Sequentielle Baumoperatoren

Aus der Theorie der gewöhnlichen endlichen Automaten ist bekannt, daß die von endlichen Automaten (mit Ausgabe) realisierten Abbildungen genau die sequentiellen Wortfunktionen mit endlichem Gewicht sind. Die im folgenden erläuterten sequentiellen Baumoperatoren mit endlichem Gewicht stellen eine Verallgemeinerung der sequentiellen Wortfunktionen mit endlichem Gewicht dar und entsprechen in ihrem Abbildungsverhalten gewissermaßen den Baumautomaten mit Ausgabe. Die ersten zusammenfassenden Untersuchungen über sequentielle Baumoperatoren hat W. THATCHER in [21] dargelegt.
Kommen wir nun zur Definition des Begriffes der sequentiellen

Baumabbildung:

Es sei $U = \{u_1, u_2, \dots\}$ eine Menge von Variablen mit $U \cap \Sigma_0 = \emptyset$. Wir vereinigen die Menge Σ_0 mit der Menge U, lassen alle Σ_i mit $i \neq o$ unverändert und bilden über diesem erweiterten Rangalphabet gemäß 2.2 die Termmenge, die wir mit $T_{\Sigma,U}$ bezeichnen.

Auf der Menge $T_{\Sigma,U}$ definieren wir nun Substitutionsoperatoren.

D e f i n i t i o n 6.1:

Es seien $t, t_1, \dots, t_n \in T_{\Sigma,U}$. Dann bezeichnet $\left[t \right]_{t_i}^{u_i}\,{}_{i=1}^{n}$ denjenigen Term aus $T_{\Sigma,U}$, der aus t dadurch hervorgeht, daß alle in t vorhandenen Symbole u_i simultan durch die Terme t_i ersetzt werden $(i=1,\dots,n)$.

Betrachten wir ein Beispiel:

B e i s p i e l 6.2:

Es sei Σ gewählt wie in 2.3. Weiterhin sei $U = \{u_1, u_2\}$

Ist z.B. $t = g f a u_1 a u_2$

$t_1 = f u_2 a$

$t_2 = g a u_1$

so ergibt sich

$$\left[t \right]_{t_i}^{u_i}\,{}_{i=1}^{2} = g f a f u_2 a a g a u_1$$

Damit können wir sequentielle Baumoperatoren mit endlichem Gewicht definieren:

D e f i n i t i o n 6.3:

Es seien $\langle \Sigma, r \rangle$ und $\langle \Omega, s \rangle$ zwei Rang-Alphabete mit der Eigenschaft $\Sigma_0 \neq \emptyset$ und $\Omega_0 \neq \emptyset$, und es sei $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ eine beliebige Menge von Variablen, für die $\Sigma_0 \cap X = \emptyset$ und $\Omega_0 \cap X = \emptyset$ gilt.

(1) $\Phi = \langle Z, z_0, \varphi \rangle$ heißt s e q u e n t i e l l e r B a u m o p e r a t o r von T_Σ in $T_\Omega =_{Df}$

1. Z ist eine Menge
2. $z_0 \in Z$
3. φ ist eine Funktion von $\Sigma \times Z$ in $T_{\Omega; X \times Z}$ mit der Eigenschaft:

$$\varphi(f,z) \in T_{\Omega,\{x_1,\dots,x_n\}\times Z} \qquad \text{für } f \in \Sigma_n.$$

(2) Die Abbildung φ wird auf folgende Weise zu der Abbildung Φ' von $T_\Sigma \times Z$ in T_Ω erweitert:

$$\Phi'(ft_1\dots t_n, z) =_{Df} \begin{array}{c}[x_i, z_{j_i}] \\ \hline \boxed{\varphi(f,z)} \\ \hline \Phi'(t_i, z_{j_i})\end{array}{}^{n}_{i=1}$$

(3) Schließlich vereinbaren wir: $\Phi(t) =_{Df} \Phi'(t, z_o)$.

Diese Definition ist auf den ersten Blick etwas unübersichtlich und soll deshalb noch ein wenig erläutert werden.
Die Menge Z ist die Zustandsmenge des Operators Φ und z_o ist der Initialzustand. Die Abbildung φ vereinigt gewissermaßen die unmittelbare Überführungsfunktion und die Ausgabefunktion in sich.
Die Bilder der Funktion φ sind Bäume aus $T_{\Omega, X\times Z}$ d.h. Bäume, deren „Blätter" (das sind die nullstelligen Symbole) entweder Elemente aus Ω_0 oder Paare aus $X \times Z$ sind. Zur besseren Veranschaulichung wollen wir die Elemente aus $X \times Z$ „Ösen" nennen..
Die Bedingung „$\varphi(f,z) \in T_{\Omega,\{x_1,\dots,x_n\}\times Z}$ für $f \in \Sigma_n$" besagt nun, daß in den Bildbäumen eines n-stelligen Symbols nur solche Ösen auftreten können, in deren ersten Komponenten Elemente aus $\{x_1,\dots,x_n\}$ stehen.
Die Art der Fortsetzung der Abbildung φ zur Abbildung Φ' bestimmt den sequentiellen Charakter des Operators Φ. Bei der Berechnung von $\Phi'(ft_1 \dots t_n, z)$ bestimmt man zunächst $\varphi(f,z)$. Da f offensichtlich ein n-stelliges Symbol ist, können in den ersten Komponenten der Ösen von $\varphi(f,z)$ höchstens Elemente aus der Menge $\{x_1,\dots,x_n\}$ vorkommen. Ist nun $[x_\nu, z_j]$ eine Öse von $\varphi(f,z)$, dann wird anstelle von $[x_\nu, z_j]$ der Baum $\Phi'(t_\nu, z_j)$ eingesetzt.
Mit $Gw\,\Phi$ bezeichnen wir das Gewicht des Operators Φ, das gleich der Kardinalzahl seiner Zustandsmenge ist. Wir betrachten hier nur Operatoren mit endlichem Gewicht.
Am folgenden Beispiel lassen sich die vorangegangenen Darlegungen noch einmal verfolgen.

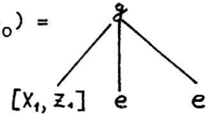
B e i s p i e l 6.4:

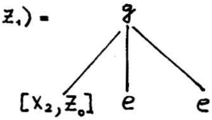
Es seien: $\Sigma_0 = \{a\}$, $\Sigma_2 = \{f\}$, $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_2$.

$\Omega_0 = \{d, e\}$, $\Omega_3 = \{g\}$, $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_3$.

$Z = \{z_0, z_1\}$

Die Abbildung φ sei auf folgende Weise gegeben:

$\varphi(a, z_0) = d$ $\varphi(f, z_0) =$ 

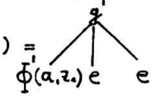
$\varphi(f, z_1) =$ 

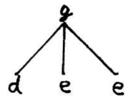
$\varphi(a, z_1) = d$

Dann gilt:

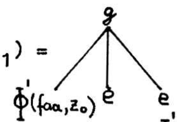
$\Phi'(a, z_0) = \varphi(a, z_0) = d$

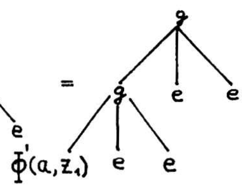
$\Phi'(a, z_1) = \varphi(a, z_1) = d$

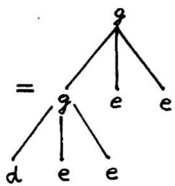
$\Phi'(faa, z_0) =$ 

$=$ 

oder

$(fafaa, z_1) =$ 

$=$ 

$=$ 

In seiner Arbeit [21] hat THATCHER derartige sequentielle Baumoperatoren mit endlichem Gewicht sowie Spezialfälle davon untersucht und einige interessante Resultate erhalten. In [12] konnte der folgende Satz über die eindeutige Fortsetzbarkeit von sequentiellen Baumoperatoren mit endlichem Gewicht bewiesen werden. Damit ist gleichzeitig ein Problem aus dem Komplex der Dechiffrierung gelöst.

S a t z 6.5:

Ein sequentieller Baum-Operator Φ , der auf T_Σ definiert ist und dessen Gewicht k nicht überschreitet, ist genau dann eindeutig fortsetzbar, wenn sein Verhalten auf der Menge $\{t \mid t \in T_\Sigma \wedge d(t) \leq 2k\}$ bekannt ist.

7. Schlußbemerkungen:

In den vorangegangenen Ausführungen wurden einige Resultate aus der Theorie der Baumautomaten vorgestellt. Vieles konnte nur angedeutet werden und auf viele Begriffsbildungen und Ergebnisse mußte auf Grund des zur Verfügung stehenden Platzes völlig verzichtet werden. So wurden z.B. nichtdeterministische Baumautomaten und Probleme, die sich aus der Abarbeitungsweise der Bäume (aufwärts oder abwärts) ergeben, völlig weggelassen. Es zeigen sich hier nämlich einige Abweichungen von den aus der Theorie der „üblichen" endlichen Automaten bekannten Resultaten, so daß eine sinnvolle Behandlung dieses Problemkreises Inhalt einer selbständigen Arbeit sein könnte. Aus der angegebenen Literatur (vgl. z.B. [15,16,20,21]) kann man sich jedoch auch darüber einen Überblick verschaffen. Ebenso unberücksichtigt blieben tiefergreifende algebraische Gesichtspunkte (vgl. z.B. [22]) sowie die Anwendung der Baumautomaten auf Entscheidungsprobleme der Logik ([3,20]) bzw. auf die Theorie der formalen Sprachen ([4,5,9,13,19]). Die angegebene Literatur ist jedoch relativ repräsentativ und vermittelt einen guten Überblick über dieses noch recht junge Wissensgebiet.

Literatur:

[1] BRAINERD, W.S.: The Minimalization of Tree-Automata Inf. and Control 13 (1968), 484-491

[2] BRAINERD, W.S.: Tree generating regular systems Inf. and Control 14 (1969), 217-231

[3] DONER, J.: Tree Acceptors and Some of Their Applications J. Comp. Syst. Sci. 4 (1970), 406-451

[4] JOSHI, A.K.: Remarks on Some Aspects of Language Structure and Their Relevance to Pattern Analysis Pattern Recognition 5 (1973), 365-381

[5] JOSHI, A.K.; LEVY, L.S.; TAKAHASHI, M.: Tree Adjunct Grammars, J. Comp. Syst. Sci. 10 (1975), 136-163

[6] KLEENE, S.C.: Representation of events in nerve nets and finite Automata. Automata Studies, Ann. Math. Studies 34 , Princeton 1956, 3-41

[7] KOCH, U.: Analyse und Synthese von Baumautomaten. Diplomarbeit an der Sektion Mathematik der FSU Jena. (1973)

[8] LEVY, L.S., JOSHI, A.K.: Some results in tree automata. Math. Systems Theorie 6 (1972)

[9] MAIBAUM, T.S.E.: A Generalized Approach to Formal Languages. J. Comp. Syst. Sci. 8 (1974) , 409-439

[10] MEIßNER, H.: Über eine Möglichkeit der Dechiffrierung von Baumautomaten mit beschränkter Zustandszahl. Kompliziertheit von Lern- und Erkennungsprozessen I. Wiss. Beiträge der FSU Jena 1975

[11] Майснер, Хюблер: О Расшифровке автоматов над термами с ограниченным числом состояний. Сб. работ по мат. кибернетике ВЦ АНСССР, Москва 1976, 13 - 34

[12] MEIßNER, H.: Über die Fortsetzbarkeit von sequentiellen Baum-Operatoren mit endlichem Gewicht. EIK 12 (1976), 403-414

[13] MEZEI, J., WRIGHT, J.B.: Algebraic Automata and Context-Free sets. Inf. and Control 11 (1967), 3-29

[14] NG.P., YEH, R.: Tree Transformations via finite recursive transistion machines. Proceedings of symposium and summer school MFCS 1973

[15] ROUNDS, W.C.: Mappings and Grammars on Trees Math. Syst. Th. 4 (1970), 257-287

[16] SCHÜTT, D.: Baumautomaten. Seminarberichte des Institutes für Theorie der Automaten und Schaltnetzwerke. Bericht Nr. 36 (1971)

[17] SCHÜTT, D.: Zu den Grundlagen einer Theorie Netzverarbeitender Automaten. Habilschrift

[18] SCHÜTT, D.: Automata with Ranked State Sets.
Technical Report 71-B4. University of Massachusetts at Amherst

[19] THATCHER, J.W.: Characterizing Derivation Trees of Context-Free Grammars through a Generalization of Finite Automata Theory.
J. Comp. Syst. Sci. 1 (1967), 317-322

[20] THATCHER, J.W.,WRIGHT, I.B.: Generalized Finite Automata Theory with an Application to a Decision Problem of Secoud-Order Logic
Math. Syst. Th. 2 (1968), 57-81
Russische Übersetzung in: Кибернетический Сборник 6(н.с.)

[21] THATCHER, J.W.: Genralized Sequential Machine Maps
J, Comp. Syst. Sci. 4 (1970), 336-367

[22] YEH, R.T.: Some Structural Properties of Generalized Automata and Algebras
Math. Syst. Th. 5 (1971), 306-318

eingegangen: 4. 11. 1976

Anschrift des Verfassers:

Dr. Hansgeorg Meißner
Sektion Mathematik der
Friedrich-Schiller-Universität Jena
69 Jena
Universitätshochhaus
DDR

Joachim Storm

Über ein Verhalten von Automaten in determinierter Umgebung

Seien $A = (X, Y, S, \delta, \lambda, s_0, S')$ und $U = (Y, X, Z, \varphi, \psi, z_0)$ vollständig bestimmte endliche determinierte initiale Moore-Automaten, von denen A im folgenden kurz Automat und U Umgebung genannt wird. Hierbei sind für den Automaten A: X – das Eingabealphabet, Y – das Ausgabealphabet, S – die Menge aller Zustände, δ und λ die Überführungs- bzw. Markierungsfunktion, s_0 – der Initialzustand und S' – eine nicht leere Menge von Zuständen aus S. Entsprechend ist für die Umgebung U: Y – das Eingabealphabet, X – das Ausgabealphabet, Z – die Zustandsmenge, φ und ψ die Überführungs- bzw. die Markierungsfunktion, z_0 – der Initialzustand. Automat und Umgebung arbeiten nach folgendem Prinzip in einer allgemeinen diskreten Zeitskala. Im Takt $t = 1$ erhalte A das Eingabesignal x, mit dem der Initialzustand z_0 von U markiert ist. Danach nimmt A im Takt $t = 2$ einen Zustand s an und gibt dementsprechend das Signal y aus. y ist im Takt $t = 2$ Eingabesignal für U. Die Umgebung geht durch die Eingabe von y im Takt $t = 3$ in einen Zustand z über und gibt das der Markierung von z entsprechende Signal x' aus, das wiederum Eingabesignal für A ist usw.

Wie wir sehen, arbeiten Automat und Umgebung in der allgemeinen Zeitskala im Wechsel und jeder von ihnen nur jeden zweiten Takt. Ein solches System von Automat und Umgebung wird im folgenden mit $\langle A,U \rangle$ bezeichnet. In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir die Frage, wie zu einem gegebenen Automaten A die Menge $\mathfrak{U}_A$ aller der Umgebungen U charakterisiert werden kann, unter Einwirkung derer A wenigstens einmal in einem Zustand s aus S' war. Wir nennen einen Automaten A, der bzgl. einer Umgebung U ein solches Verhalten zeigt, einen Automaten mit c_1-Verhalten, was durch Ac_1U ausgedrückt werden soll.

Für die wertvollen Anregungen zu dieser Arbeit und die Diskussionen ist der Verfasser Dr. V.B. Kudrjavcev (Moskau) und Prof. Dr. G. Burosch (Rostock) zu Dank verpflichtet.

1. Definitionen und Bezeichnungen

Die nachfolgenden Bezeichnungen und Definitionen sind in Anlehnung an die Arbeit /1/ aufgestellt. Im weiteren seien X, Y vorgegebene nicht leere Mengen.

Wir bezeichnen mit $V := W(X \times Y)$ die freie Worthalbgruppe über der Menge aller Paare xy mit dem Einselement (Leerwort) Λ. Sei $v = x^1y^1x^2y^2 \ldots x^ny^n \in V$, wobei die oberen Indizes nur die Reihenfolge der Elemente aus $X \times Y$ angeben sollen, so bezeichne $l(v)$ die Länge des Wortes v. Für $v = x^1y^1 \ldots x^{l(v)}y^{l(v)}$ und jede ganze Zahl i, $1 \leq i \leq l(v)$, gelte ferner

$$v^{i]} := x^1y^1 \ldots x^iy^i \;,\; v^i := x^iy^i \;,\; v^{0]} := v^0 := \Lambda \;.$$

Außerdem sei $v_X = x^1x^2 \ldots x^{l(v)}$, $v_Y = y^1y^2 \ldots y^{l(v)}$ und dementsprechend $v_X^{i]} = x^1x^2 \ldots x^i$, etc.. Für beliebige $v, w \in V$ schreiben wir $v \prec w :\Leftrightarrow \exists u(u \in V, vu = w)$.

Definition 1: Sei $A = (X,Y,S,\delta,\lambda,s_0,S')$ ein Automat. Ein Wort $v \in V$ heißt A - z u l ä s s i g , wenn für $\forall i(0 \leq i \leq l(v)-1)$ gilt: $v^{i+1} \in A(v^{i]})$, wobei

$$A(\Lambda) := \{ xy \mid x \in X,\; y = \lambda(s) \text{ und } s = \delta(x, s_0) \} \text{ und}$$

$$A(v) := \{ xy \mid x \in X,\; y = \lambda(s) \text{ und } s = \delta^*(v_Xx, s_0),\; v \text{ ist A-zulässig} \}.$$

Das leere Wort Λ ist A-zulässig.

Die Menge aller A-zulässigen Wörter wird mit V_A bezeichnet.

Definition 2: Sei $U = (Y,X,Z,\varphi,\psi,z_0)$ eine Umgebung. Ein Wort $v \in V$ heißt U - z u l ä s s i g , wenn für $\forall i(0 \leq i \leq l(v)-1)$ gilt: $v_X^{i+1} \in U(v^{i]})$, wobei

$$U(\Lambda) := \{ x \mid x = \psi(z_0) \} \text{ und}$$
$$U(v) := \{ x \mid x = \psi(z),\; z = \varphi^*(v_Yy, z_0) \text{ und } y \in Y \}.$$

Das leere Wort Λ ist U-zulässig.

Die Menge aller U-zulässigen Wörter wird mit V^U bezeichnet.

Definition 3: Seien v, $w \in V$ und $A = (X,Y,S,\delta,\lambda,s_o, S')$. Die Wörter v und w heißen A - ä q u i v a l e n t , $v \overset{A}{\equiv} w$, wenn $\delta^*(v_X,s_o) = \delta^*(w_X,s_o)$ ist.

2. Über die Wechselbezeihung Automat - Umgebung

Aus der oben geschilderten Arbeitsweise von Automat und Umgebung. der vollständigen Bestimmtheit und der Determiniertheit beider erkennt man sofort

Lemma 1. Es seien $A = (X,Y,S,\delta,\lambda, s_o\ S')$ ein beliebiger Automat und $U = (Y,X,Z,\varphi,\psi,z_o)$ eine beliebige Umgebung. Dann wird durch $\langle A,U\rangle$ eindeutig eine Folge $\sigma \in V^{\infty}$ bestimmt, die der folgenden Bedingung genügt: $\forall\, i(i \in \{0,1,2, \ldots\})$ ist

$$\sigma^{i+1} \in A(\sigma^{i]}) \quad \text{und}\ \sigma_X^{i+1} \in U(\sigma^{i]}).$$

Eine solche Folge werden wir auch Verhalten des Automaten A in der Umgebung U nennen.

Für die nachstehenden Betrachtungen sei $A = (X,Y,S,\delta,\lambda, s_o, S')$ ein beliebiger Automat und $U = (Y,X,Z,\varphi,\psi, z_o)$ eine beliebige Umgebung. Es gelte ferner $S\setminus S' \neq \emptyset$.

Definition 4: Das durch $\langle A,U\rangle$ bestimmte Verhalten σ heißt c_1 - V e r h a l t e n , wenn es ein $i \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ gibt, so daß $\delta^*(\sigma_X^{i]}, s_o) \in S'$ ist.

Definition 5: $A\ c_1\ U$: <=> σ ist c_1-Verhalten.
Wir definieren nun eine spezielle Teilmenge der Menge der ausgezeichneten Zustände S' des Automaten A.

Definition 6: Eine nichtleere Menge von Zuständen aus S' heißt R a n d $\varrho(S')$ von S', wenn es für jedes $s \in \varrho(S')$ wenigstens ein $\bar{s} \in S \setminus S'$ und ein $x \in X$ derart gibt, daß $s = \delta(x,\bar{s})$ ist.

Evident ist

Lemma 2. $A\ c_1\ U$ genau dann, wenn das durch $\langle A,U\rangle$ bestimmte Verhalten σ der Bedingung genügt, daß es eine kleinste Zahl $j \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ gibt, für die $\delta^*(\sigma_X^{j]}, s_o) \in \varrho(S')$ ist.

Wir wenden uns nun der Aufgabe zu, für einen gegebenen Automaten A alle diejenigen Umgebungen U zu beschreiben, in denen A c_1-Verhalten zeigt. Für einen beliebigen Automaten A = $(X,Y,S,\delta,\lambda,s_0,S')$ kann o.B.d.A. vorausgesetzt werden, daß $s_0 \notin S'$ ist, da andernfalls A in jeder Umgebung U c_1-Verhalten zeigt.

Definition 7: Sei $A = (X,Y,S,\delta,\lambda,s_0,S')$ ein Automat. Ein Wort $v \in V_A$ heißt c_1 - t e r m i n a l , wenn $\delta^*(v_X,s_0) \in \varrho(S')$ und für $\forall i$, $1 \leq i \leq l(v)-1$, $\delta^*(v_X^{i]}, s_0) \notin S'$ ist.

Auf der Menge aller Umgebungen U mit dem Eingabealphabet Y und dem Ausgabealphabet X führen wir folgende Relation ein.

Definition 8: Sei $A = (X,Y,S,\delta,\lambda,s_0,S')$ ein Automat und v ein A-zulässiges Wort. Die Umgebungen $U_1 = (Y,X,Z_1,\varphi_1,\psi_1,z_{01})$ und $U_2 = (Y,X,Z_2,\varphi_2,\psi_2,z_{02})$ heißen v - ä q u i v a l e n t, $U_1 \overset{v}{\sim} U_2$, wenn gilt $v \in V^{U_1} \cap V^{U_2}$.

Die v-Äquivalenz ist offensichtlich eine Äquivalenzrelation und induziert daher eine Zerlegung der Menge aller Umgebungen in Klassen v-äquivalenter Umgebungen bzgl. aller A-zulässigen Wörter v eines gegebenen Automaten A. Es sei

$U^v := \{U_i \mid U_i - \text{Umgebung},\ v \in V_A \text{ und } v \in V^{U_i}\}$.

Der folgende Satz gibt an, aus welchen Umgebungen U die Umgebungsmenge $\mathfrak{U}_A$ des Automaten A besteht.

Satz 1: Es sei $A = (X,Y,S,\delta,\lambda,s_0,S')$ ein Automat. Dann ist

$$\mathfrak{U}_A = \bigcup_{v \in C_1^A} U^v,$$

wobei C_1^A die Menge aller c_1-terminalen Wörter von A ist.

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß $\bigcup_{v \in C_1^A} U^v \subseteq \mathfrak{U}_A$. Sei v ein beliebiges c_1-terminales Wort aus V_A. Dann gilt nach Lemma 2 für jede Umgebung U, für die v U-zulässig ist, die Beziehung A c_1 U. Die Menge aller dieser Umgebungen ist gleich der Klasse U^v, also gilt $U^v \subseteq \mathfrak{U}_A$.

Daraus folgt das oben Behauptete. Um umgekehrt zu zeigen, daß $\mathfrak{U}_A \subseteq \bigcup_{v \in C_1^A} U^v$, nehmen wir an, U sei eine beliebige Umgebung aus $\mathfrak{U}_A$, d.h., es gilt $A\ c_1\ U$. Ist σ das durch $\langle A,U \rangle$ bestimmte Verhalten, so existiert nach Lemma 2 eine kleinste Zahl j, für die $\delta^*(\sigma \frac{j]}{X}, s_o) \in \varrho(S')$ ist. Es gibt also kein $i < j$, so daß $\delta^*(\sigma \frac{i]}{X}, s_o) \in \varrho(S')$ wäre. Nach der Definition von $\varrho(S')$ ist klar, daß dann für jedes positive $i < j$ $\delta^*(\sigma \frac{i]}{X}, s_o) \notin S'$ gilt. Das Wort $v = \sigma \frac{j]}{X}$ ist also c_1-terminal, d.h., $v \in C_1^A$. Wegen Lemma 1 ist $v \in V^U$ und damit ist $U \in U^v$. Damit ist der Satz bewiesen.

3. Über die Anzahl der v-Äquivalenzklassen in $\mathfrak{U}_A$

Wir werden nun die Frage untersuchen, für welche Automaten A die Umgebungsmenge $\mathfrak{U}_A$ aus endlich vielen bzw. aus unendlich vielen v-Äquivalenzklassen besteht.

Definition 9: Sei A ein Automat über X,Y. Ein Wort $v \in V_A$ heißt *z y k l i s c h*, wenn es ein $r \in R(A,v)$ gibt mit $r \neq \Lambda$, $vr \overset{A}{=} v$. Hierbei ist $R(A,v) := \{ r \mid r \in V,\ vr \in V_A \}$. Bezüglich eines solchen r wird v auch *r - z y k l i s c h* genannt. Evident ist folgender

Satz 2: Sei A ein Automat über X, Y. Die Umgebungsmenge enthält genau dann (abzählbar) unendlich viele v-Äquivalenzklassen, wenn V_A mindestens ein c_1-terminales Wort w enthält, für das gilt

a) es gibt ein $u \in V_A$ mit $u \prec w$, $u \neq w$ und
b) u ist zyklisch.

Korollar 1: Die Umgebungsmenge $\mathfrak{U}_A$ eines Automaten A enthält genau dann endlich viele v-Äquivalenzklassen, wenn V_A kein c_1-terminales Wort mit zyklischem Anfang enthält.

Wir setzen hier und im weiteren voraus, daß für ein beliebiges c_1-terminales Wort v mit einem zyklischen Anfang w, also $w \prec v$, gilt: Ist $r \in R(A,w)$ derart, daß $wr \overset{A}{=} w$, so gibt es kein i,

$0 < i < l(r)$, mit $\delta^*((wu)_X, s_o) \in S'$, wobei $u = r^{ij}$ ist.

4. Eine Charakterisierung von $\mathfrak{U}_A$ für unendlich viele v-Äquivalenzklassen

Wir suchen eine möglichst einfache Darstellung von $\mathfrak{U}_A$ als Vereinigung von nur endlich vielen Klassen von Umgebungen für den Fall, daß es abzählbar unendlich viele v-Äquivalenzklassen gibt.

Sei $A = (X, Y, S, \delta, \lambda, s_o, S')$ ein Automat und G_A sein Automatengraph (siehe /2/). In G_A betrachten wir den folgenden Teilgraphen G'. Es sei $s^0 x^1 s^1 x^2 s^2 \ldots x^n s^n$ eine elementare Bahn, wobei $s^0 := s_o, s^n := s'$ und $s' \in \varrho(S')$, $s^i \notin \varrho(S')$ für $i = 0, 1, \ldots, n-1$ ist.

G' soll außer dieser Bahn nur noch solche enthalten, die in einem Knotenpunkt s^i, $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, beginnen und zu diesem zurückführen, wobei für alle Knotenpunkte s, die einer derartigen Bahn angehören, die Bedingung $s \notin S'$ gelten soll. Da uns im folgenden nur solche Knotenpunkte s aus G' interessieren, die Start- und Zielpunkt von Zyklen sind, treffen wir die Vereinbarung, anstelle von G' den Graphen $\bar{G}'$ zu betrachten, der außer s_o und s' nur noch Knotenpunkte der genannten Art enthält. Sind s_i und s_j zwei derartige aufeinanderfolgende Knotenpunkte, die in G' durch eine Bahn $s^0 x^1 s^1 \ldots x^m s^m$, wobei $s^0 := s_i$ und $s^m := s_j$ ist, verbunden sind, so führt in $\bar{G}'$ von s_i nach s_j ein Bogen (s_i, s_j), der mit dem Wort $v = x^1 y^1 x^2 y^2 \ldots x^m y^m$ markiert ist, wobei $y^k = \lambda(s^k)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, ist. Jeder Graph $\bar{G}'$ besitzt also nur eine einzige elementare Bahn, die vom initialen Knotenpunkt s_o nach dem finalen Knotenpunkt $s' \in \varrho(S')$ führt. Es sei $s^0 v_1 s^1 v_2 s^2 \ldots v_k s^k$ mit $s^0 := s_o$ und $s^k := s' \in \varrho(S')$ eine solche Bahn, wobei das Wort $v_i \in V \setminus \{\Lambda\}$ das Gewicht des Bogens (s^{i-1}, s^i), $i=1, 2, \ldots, k$, ist. Das Wort $v = v_1 v_2 \ldots v_k$ nennen wir E l e m e n t a r w o r t und bezeichnen den Graphen mit $\bar{G}'(v)$. Wir definieren

$\mathcal{G}_A := \{\bar{G}'(v) \mid$ A ist Automat, v ist Elementarwort$\}$.

Gibt es in $\bar{G}'(v)$ eine Bahn $s^0u_1s^1u_2s^2 \ldots u_ms^m$, so sagen wir, daß $\bar{G}'(v)$ das Wort $u = u_1u_2 \ldots u_m$ akzeptiert. Im nächsten Satz geben wir einige Eigenschaften eines regulären Terms (siehe /3/) über dem Alphabet V an, der durch einen Graphen $\bar{G}'(v)$ repräsentiert wird. Wir vereinbaren, daß die durch einen Term T dargestellte Wortmenge ebenfalls mit T bezeichnet wird.

Satz 3: Es sei $A = (X, Y, S, \delta, \lambda, s_o, S')$ ein Automat und $G(v) \in \mathcal{G}_A$ mit $v = v_1v_2 \ldots v_n$ V_A. Dann gibt es genau einen regulären Term T(v) über V, der den folgenden Bedingungen genügt:

(1) G(v) akzeptiert genau die durch $T(\bar{v})$ beschriebene Wortmenge.

(2) $T(v) = \{T_1\}^* v_1 \{T_2\}^* v_2 \ldots \{T_n\}^* v_n$, wobei für jedes $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $T_i = \emptyset$ oder ein regulärer Term über V ist, der in der Form $T_i = \tau_{i_1} + \tau_{i_2} + \ldots + \tau_{i_{m_i}}$ dargestellt werden kann. Die τ_j, $j \in \{i_1, i_2, \ldots, i_{m_i}^i\}$, sind reguläre Terme über V.

a) für $h(\tau_j) > 0$, $j \in \{i_1, \ldots, i_{m_i}\}$, ist $\tau_j = t_1\bar{t}t_2$, wobei $\bar{t}$, t_1 und t_2 reguläre Terme sind mit $h(\bar{t}) > 0$, $h(t_1) = h(t_2) = 0$ und $\Lambda \notin t_1$, $\Lambda \notin t_2$.

b) Für jeden Term t, der in τ_j, $j \in \{i_1, \ldots, i_{m_i}\}$, zwischen zwei aufeinanderfolgenden rechten (linken) Iterationsklammern steht, gilt $\Lambda \notin t$.

(3) a) Für jedes Wort $v' \in \{T_1\}^* v_1 \ldots \{T_i\}^* v_i$, $1 \leq i \leq n - 1$, und jedes Wort $w \in \{T_{i+1}\}^*$ ist v' w-zyklisch. Das Leerwort Λ ist bzgl. jedes $w \in \{T_1\}^*$ w-zyklisch.

b) Es sei T_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, ein beliebiger regulärer Term, und für den regulären Term τ_j, $j \in \{i_1, \ldots, i_{m_i}\}$, gelte $h(\tau_j) > 0$. Für jeden regulären Term t_k, der in τ_j enthalten und in Iterationsklammern eingeschlossen ist, d.h. $\tau_j = t_1 \{t_k\}^* t_2$, wobei $t_1 = t_{11}$ $\{t_{21}\{\ldots t_{k-1,1}$, $t_2 = t_{k-1,2}\}^* t_{k-2,2}\}^* \ldots\}^* t_{12}$ und die

t_{lm}, $l = 1,2, \ldots, k-1$, $m = 1, 2$, reguläre Terme sind, gilt: Sind $v' \in \{T_1\}^* v_1 \ldots \{T_{i-1}\}^* v_{i-1}$ und $r \in \bar{t}_1 = t_{11} t_{21} \ldots t_{k-1,1}$ beliebige Wörter, so ist das Wort $v'r$ bzgl. jedes $w \in \{t_k\}^*$ w-zyklisch.

(4) Es sei τ_j ein regulärer Term aus T_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, für den

a) $h(\tau_j) = 0$ ist. Dann gilt für jedes Wort $r \in \tau_j$

$$r^{1]}_X \neq (v_i)^{1]}_X .$$

b) $h(\tau_j) > 0$ ist. Sind $\bar{t}$, t_1 und t_2 in $\tau_j = t_1 \bar{t} t_2$ reguläre Terme mit $h(t_1) = h(t_2) = 0$, so ist für jedes Wort $r \in t_1$

$$r^{1]}_X \neq (v_i)^{1]}_X .$$

Es sei t_k ein beliebiger regulärer Term, der in τ_j in Iterationsklammern eingeschlossen ist, d.h., $\tau_j = t_1 \{t_k\}^* t_2$, und t_1, t_2 sind Ausdrücke, wie sie unter (3) b) beschrieben wurden. Dann gilt für beliebiges $r \in \{t_k\}^*$ und beliebiges $w \in \bar{t}_2 = t_{k-1,2}\, t_{k-2,2} \ldots t_{12}$

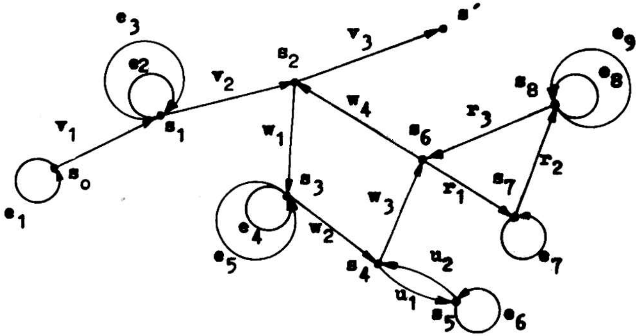
$$r^{1]}_X \neq w^{1]}_X .$$

Hierbei ist $h(t)$ die Sternentiefe des regulären Terms t.

Mit Hilfe der Theorie linearer Überführungsgraphen /4/ kann zu einem Graphen $G(v) \in \mathfrak{G}_A$ ein regulärer Term $T(v)$ der oben beschriebenen Art aufgestellt werden. Die angeführten Eigenschaften von $T(v)$ lassen sich leicht aus der Struktur des Graphen $G(v)$ ableiten. Das folgende Beispiel dient zur Illustration von Satz 3.

<u>Beispiel</u>: Gegeben sei der Graph $G(v) \in \mathfrak{G}_A$ (siehe Abbildung) eines Automaten A über $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$.

Die als Gewichte der Bögen auftretenden Wörter aus V sind wie folgt festgelegt:



$v=v_1v_2v_3$, wobei $v_1=x_1y_2x_3y_1$, $v_2=x_2y_1x_1y_1x_3y_2$, $v_3=x_1y_2x_3y_2$;
$e_1=x_2y_2$, $e_2=x_1y_2x_1y_1$, $e_3=x_3y_2x_1y_1$, $e_4=x_2y_1x_3y_2x_1y_1$,
$e_5=x_3y_2$, $e_6=x_1y_1x_2y_2$, $e_7=x_3y_1$, $e_8=x_1y_2x_2y_1$, $e_9=x_3y_2$;
$w_1=x_2y_1$, $w_2=x_1y_2x_1y_1$, $w_3=x_2y_2$, $w_4=x_1y_2$; $u_1=x_1y_2x_3y_1$,
$u_2=x_3y_2$; $r_1=x_2y_2$, $r_2=x_2y_2$, $r_3=x_2y_2x_3y_1$.

Wie man leicht überprüft, ist der gesuchte Term

$$T(v) = \{e_1\}^* v_1 \{e_2+e_3\}^* v_2\{w_1 \{e_4+e_5\}^* w_2\{u_1\{e_6\}^* u_2\}^* w_3\{r_1 \{e_7\}^* r_2 \{e_8+e_9\}^* r_3\}^* w_4\}^* v_3 ,$$

der allen Bedingungen von Satz 3 genügt.

Satz 4: Es sei $T(v)$ ein regulärer Term über V, der den Bedingungen (2) und (4) des Satzes 3 genüge. Dann kann ein Graph $G(v)$ angegeben werden, der genau die durch $T(v)$ dargestellte Wortmenge akzeptiert und für den es einen Automaten A gibt, so daß gilt

1) $G(v) \in \mathfrak{G}_A$ und
2) wenn $T(v)$ bzgl. A der Bedingung (3) von Satz 3 genügt, so ist $G(v)$ eindeutig bestimmt.

Beweis: $T(v) = \{T_1\}^* v_1 \{T_2\}^* v_2 \ldots \{T_n\}^* v_n$, wobei $v = v_1 v_2 \ldots v_n$ ist, sei ein regulärer Term, der den Voraussetzungen des Satzes entspreche. Wir synthesieren im folgenden einen Graphen $G(v)$ mit dem initialen Knotenpunkt s_o und dem finalen Knotenpunkt s'.

Diesem Graphen kann wegen Bedingung (4) aus Satz 3 leicht ein Graph G'_A zugeordnet werden, der Teilgraph eines Automatengraphen G_A ist. Dazu fordere man nur, daß für den entsprechenden Automaten A mit dem Initialzustand s_o jeder Zustand s, der in $G(v)$ bzw. G'_A als Knotenpunkt s auftritt, in seinem Zustandsalphabet S enthalten sei und daß jedes $v' \in T(v)$ von A akzeptiert werde.

Da $G(v)$ schrittweise konstruiert wird, können wir jeden dabei auftretenden Graphen G als Element der Menge $\mathcal{G}_A$ bzgl. eines Automaten A auffassen. Wir beginnen die Konstruktion mit der Untersuchung des Terms T_1. Für $T_1 = \emptyset$, also $\{T_1\}^* = \Lambda$, ist von $s^0 := s_o$ nach einem Knotenpunkt s^1 ein Bogen zu zeichnen, der das Gewicht v_1 trägt. Nach Voraussetzung sind alle T_i, $i = 2, 3, \ldots, n$, ungleich der leeren Menge, da sonst $v_{i-1}\{T_i\}^* v_i = v_{i-1} \Lambda v_i = v_{i-1} v_i$ wäre.

Angenommen, für den Term $\{T_1\}^* v_1 \ldots \{T_i\}^* v_i$, $1 \leq i \leq n$, sei bereits ein Graph G konstruiert, der den Bedingungen 1) und 2) des Satzes genügt. $s^0 v_1 s^1 v_2 s^2 \ldots v_i s^i$ sei elementare Bahn in G, die vom initialen Knotenpunkt s^0 nach dem finalen Knotenpunkt s^i führt. Wir zeigen, wie dieser Graph zu einem Graphen G' derart erweitert werden kann, daß G' bzgl. des Terms $\{T_1\}^* v_1 \ldots \{T_i\}^* v_i \{T_{i+1}\}^* v_{i+1}$ die Bedingungen des Satzes erfüllt. Wegen Bedingung (2) von Satz 3 ist $T_{i+1} = \tau_{i+1,1} + \ldots + \tau_{i+1,m_{i+1}}$. Es sei τ_j ein beliebiger Term aus dieser Summe. Ist $h(\tau_j) = 0$, also $\tau_j = r_1 + r_2 + \ldots + r_a$, wobei die $r_v \in V$ sind, so wird für jedes r_v ein Bogen (s^i, s) gezeichnet, der mit r_v gewichtet wird. Nach Bedingung (3) von Satz 3 muß jedoch jeder Bogen (s^i, s) mit dem Knotenpunkt s^i nach innen inzident sein, also ist jeder dieser Bögen eine Schlinge um s^i.

τ_j sei nun derart, daß $h(\tau_j) > 0$ ist. Dann kann geschrieben werden $\tau_j = t_1 t t_2$, wobei t_1, t_2 und t reguläre Terme sind mit $h(t_1) = h(t_2) = 0$ und $h(t) > 0$, d.h., $t_1 = r_{1_1} + r_{1_2} + \ldots r_{1_k}$, $t_2 = r_{2_1} + r_{2_2} + \ldots + r_{2_l}$ und die $r_{a_b} \in V \setminus \{\Lambda\}$. Da $h(t) > 0$ ist, gibt es einen regulären Term t_0', so daß $\tau_j = t_1 \{t_o'\}^* t_2'$, wobei t_2' ein regulärer Term ist. Für jedes $r_{1_v} \in t_1$ zeichnen wir einen Bogen (s^i, s), der mit r_{1_v} gewichtet wird. Wegen Bedingung (3) von Satz 3 ist klar, daß jeder Bogen mit ein und demselben Knotenpunkt s nach innen inzident ist. Da $\Lambda \notin t_1$ ist, gilt also $s^i \neq s$.

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

a) $h(t_o') = 0$. Dann ist t_o' gleich einer Summe von Wörtern $r \in V \setminus \{\Lambda\}$,und für jedes r ist um den Knotenpunkt s eine Schlinge zu zeichnen, deren Gewicht r ist.

b) $h(t_o') > 0$. Nach Bedingung (2) von Satz 3 gilt $t_o' = t_{1_1} \{t_1'\}^* t_{2_1}'$, wobei t_{1_1}, t_1', t_{2_1}' reguläre Terme mit $h(t_{1_1}) = 0$, $h(t_1') \geq 0$ und $h(t_{2_1}') \geq 0$ sind. Da t_{1_1} eine Summe von Wörtern $r \in V \setminus \{\Lambda\}$ist, wird für jedes r ein Bogen(s, s_1') gezeichnet, der mit dem entsprechenden r gewichtet wird. Wegen Bedingung (3) von Satz 3 endet ebenfalls jeder dieser Bögen in ein und demselben Knotenpunkt s_i', der von allen anderen Knotenpunkten des konstruierten Graphen verschieden ist.

Dieser Prozeß wird auf analoge Weise fortgesetzt, d.h., ist $h(t_1') = 0$, so verfahren wir wie im Fall a), ist hingegen $h(t_1') > 0$, so wird die Konstruktion, wie sie unter b) beschrieben wurde, solange fortgesetzt, bis wir zu einem Term t_k' gelangen, für den $h(t_k') = 0$ ist. Auf diesen wenden wir Fall a) an. Jeder Term t_i', $i = 1, 2, \ldots, k$, ist nun in einem Term t_{i-1}' wie folgt enthalten: $t_{i-1}' = t_{1_i} \{t_i'\}^* t_{2_i}'$, wobei $h(t_{2_i}') \geq 0$ ist. Ausgehend von dem entsprechenden Knotenpunkt s_i', $i = 1, 2, \ldots, k$, setzen wir die Konstruktion des Graphen in folgender Weise fort. Ist $h(t_{2_i}') = 0$, so zeichnen wir für jedes Wort $r \in V \setminus \{\Lambda\}$, das in t_{2_i}' enthalten ist, einen Bogen

(s'_i, s), der das Gewicht r trägt. Es ist klar, daß wegen Bedingung (3) von Satz 3 jeder dieser Bögen mit ein und demselben Knotenpunkt $s = s'_{i-1}$ nach innen inzident ist. Wenn hingegen $h(t'_{2_i}) > 0$ ist, so wenden wir auf den Term t'_{2_i} den unter b) beschriebenen Konstruktionsalgorithmus solange an, bis wir zu einem Term der Sternentiefe Null gelangen.

Dieser Prozeß bricht ab, wenn wir bis zum Term t_2 gelangt sind und für diesen entsprechende Bögen gezeichnet haben, die sämtlich mit dem Knotenpunkt s^i nach innen inzident sind. Die eben beschriebene Konstruktion eines Graphen für den Term τ_j, welcher als initialen und finalen Knotenpunkt s^i hat, wird auf jeden Term $\tau_{i+1,v}$, $v = 1, 2, \ldots, m$, aus T_{i+1} angewendet. Abschließend zeichnen wir den Bogen (s^i, s^{i+1}) mit dem Gewicht v_{i+1}. Der auf diese Weise konstruierte Graph G' akzeptiert genau die durch $\{T_1\}^* \; v_1 \ldots \{T_{i+1}\}^* \; v_{i+1}$ dargestellte Wortmenge und ist eindeutig bestimmt. Damit ist der Satz bewiesen.

Sei $A = (X, Y, S, \delta, \lambda, s_0, S')$ ein Automat, dessen Menge C_1^A aus unendlich vielen c_1-terminalen Wörtern bestehe. Wegen der Endlichkeit von A gibt es offensichtlich nur endlich viele Elementarwörter. Die Menge aller Elementarwörter sei mit $B_A = \{v^1, v^2, \ldots, v^n\}$ bezeichnet. Nach Satz 2 gibt es dann wenigstens ein Elementarwort v^i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, für das es ein zyklisches Wort $u \in V_A$ mit $u \prec v^i$ und $u \neq v^i$ gibt. Aus dem Automatengraphen G_A kann leicht der Graph $G(v^i) \in \mathcal{G}_A$ gewonnen werden, für den es entsprechend Satz 3 einen regulären Term $T(v^i)$ gibt, der genau alle die Wörter beschreibt, welche durch $G(v^i)$ akzeptiert werden.

<u>Lema 3:</u> Die Menge C_1^A aller c_1-terminalen Wörter eines gegebenen Automaten A läßt sich in der Form

$$C_1^A = T(v^1) \cup T(v^2) \cup \ldots \cup T(v^n)$$

darstellen, wobei $B_A = \{v^1, v^2, \ldots, v^n\}$ ist.

Aus Satz 3 und Lemma 3 ergibt sich sofort das

<u>Korollar 2:</u> Sei A ein Automat und $B_A = \{v^1, v^2, \ldots, v^n\}$ die Menge der Elementarwörter von A. Dann ist

$$\mathfrak{U}_A = \bigcup_{v^i \in B_A} U^{T(v^i)} ,$$

wobei $U^{T(v^i)} := \{ U^v \mid v \in T(v^i) \}$.

5. c_1-Äquivalenz von Automaten

Im folgenden werden Automaten $A_i = (X,Y,S_i, \delta_i, \lambda_i, s_{o_i}, S'_i)$ mit gleichem Eingabe- bzw. Ausgabealphabet betrachtet.

Definition 10: Die Automaten A_1 und A_2 heißen c_1 - ä q u i v a - l e n t, $A_1 \overset{c_1}{\sim} A_2$, wenn die zugehörigen Umgebungsmengen $\mathfrak{U}_{A_1}$ und $\mathfrak{U}_{A_2}$ gleich sind.

Der nächste Satz charakterisiert c_1-äquivalente Automaten.

Satz 5: Die Automaten $A_1 = (X,Y,S_1, \delta_1, \lambda_1, s_{o_1}, S'_1)$ und $A_2 = (X,Y,S_2, \delta_2, \lambda_2, s_{o_2}, S'_2)$ sind genau dann c_1-äquivalent, wenn $C_1^{A_1} = C_1^{A_2}$ ist.

Beweis: Sei $C_1^{A_1} = T(v^1) \cup \dots \cup T(v^m)$, wobei $B_{A_1} = \{v^1, \dots, v^m\}$ ist. Wegen $C_1^{A_1} = C_1^{A_2}$ muß offensichtlich $C_1^{A_2} = T(v^1) \cup \dots \cup T(v^m)$ sein. Aus Korollar 2 folgt sofort, daß A_1 und A_2 c_1-äquivalent sind.

Die umgekehrte Richtung beweisen wir, indem gezeigt wird, daß aus $C_1^{A_1} \neq C_1^{A_2}$ stets $\mathfrak{U}_{A_1} \neq \mathfrak{U}_{A_2}$ folgt. Sei $C_1^{A_1} = T(v^1) \cup \dots \cup T(v^m)$, $C_1^{A_2} = T(w^1) \cup \dots \cup T(w^n)$ und o.B.d.A. seien die $T(v^i)$ von den $T(w^j)$ verschieden. Angenommen, es gelte $\mathfrak{U}_{A_1} = \mathfrak{U}_{A_2}$. Nach Korollar 2 ist $\mathfrak{U}_{A_1} = \bigcup_{v^i \in B_{A_1}} U^{T(v^i)}$,

$B_{A_1} = \{ v^1, \dots, v^m \}$. Damit ist offensichtlich eine Zerlegung von $\mathfrak{U}_{A_1}$ in paarweise disjunkte Klassen $U^{T(v^i)}$ gegeben. Wegen $C_1^{A_1} \neq C_1^{A_2}$ und der Annahme $\mathfrak{U}_{A_1} = \mathfrak{U}_{A_2}$ liefert $\mathfrak{U}_{A_2} = \bigcup_{w^j \in B_{A_2}} U^{T(w^j)}$

mit $B_{A_2} = \{w^1, \ldots, w^n\}$ eine andere Zerlegung der Menge $\mathfrak{U}_{A_1}$, was jedoch, wie nachfolgend gezeigt wird, nicht möglich ist. Dazu betrachten wir eine beliebige Klasse $U^{T(v^i)}$. Diese sei vollständig durch die Klassen $U^{T(v^j)}$, $j \in J = \{l_1, l_2, \ldots, l_k\}$, $J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ überdeckt. Für jedes $j \in J$ besteht die Menge $U^{T(v^i)} \cap U^{T(w^j)}$ aus den v-Äquivalenzklassen

$$U^{\bar{v}+\bar{w}} := \{ U \mid \bar{v} \in T(v^i),\ \bar{w} \in T(w^j),\ \bar{v} \text{ und } \bar{w} \text{ sind } A_1\text{- bzw. } A_2\text{-zulässig und } \bar{v}, \bar{w} \in V^U \}.$$

Die Äquivalenzklasse $U^{\bar{\bar{v}}}$, $\bar{v} \in T(v^i)$, liege in der Klasse $U^{T(w^j)}$, d.h., es gibt ein $\bar{w} \in T(w^j)$, so daß $U^{\bar{\bar{v}}} = U^{\bar{\bar{v}}+\bar{\bar{w}}}$ ist. Für jede Umgebung $U \in U^{\bar{\bar{v}}}$ ist folglich sowohl $\bar{v}$ als auch $\bar{w}$ stets U-zulässig. Das aber widerspricht der Voraussetzung, daß es in $U^{\bar{\bar{v}}}$ unter anderem auch solche Umgebungen U gibt, für die $V^U = \{ r \mid r \in V,\ r < \bar{v} \text{ oder } \bar{v} < r \}$ ist. Damit ist gezeigt, daß $\mathfrak{U}_{A_1} \neq \mathfrak{U}_{A_2}$ sein muß.

Da nach Lemma 3 die Menge C_1^A eines Automaten A durch reguläre Terme $T(v^i)$ beschrieben werden und jedem dieser Terme entsprechend Satz 4 ein Graph $G(v^i) \in \mathfrak{G}_A$ zugeordnet werden kann, macht Satz 5 eine strukturelle Aussage über c_1-äquivalente Automaten.

Literatur:

/1/ Menzel, W. Theorie der Lernsysteme
Berlin-Heidelberg-New-York, Springer 1970

/2/ Trachtenbrot, B.A., Barsdin, J.M.
Endliche Automaten, Verhalten und Synthese
Moskau, 1970 (russ.)

/3/ Ginzburg, A. Algebraic Theory of Automata
New York - London, 1968

/4/ Melichow, A.N. Orientierte Graphen und endliche Automaten
Moskau, 1971 (russ.)

eingegangen: 21. 9. 1976

Anschrift des Verfassers:

Dipl.-Math. Joachim Storm
Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
DDR-25 Rostock
Universitätsplatz 1

S. V. Alešin

Über ein Vollständigkeitskriterium für Automatenabbildungen bezüglich der Superposition

Zusammenfassung:

Es werden mehrstellige Funktionen betrachtet, die durch endliche Automaten berechenbar sind. In der Arbeit sind für spezielle Funktionensysteme notwendige und hinreichende Bedingungen für die Vollständigkeit bezüglich der Superpositionsoperationen angegeben. Die Besonderheit dieser Funktionensysteme besteht darin, daß jedes dieser Systeme sämtliche Funktionen enthält, die auf I-Automaten berechenbar sind. Ein I-Automat ist ein solcher, in dem in jedem Zustand eine Funktion realisiert wird, die von höchstens einer Variablen wesentlich abhängt.

Об одном критерии полноты для суперпозиций автоматных отображений

Пусть $E_2=\{0,1\}$, E_2^n - множество наборов из 0 и I длины n. Под инициальным автоматом с n входами понимается объект $\mathfrak{A}^n=(Q,\varphi,\psi,q_0)$, где Q - конечное множество внутренних состояний, $\varphi: E_2^n \times Q \to Q$ - функция переходов, $\psi: E_2^n \times Q \to E_2$ - функция выходов, и $q_0 \in Q$ - начальное состояние автомата $\mathfrak{A}^n$. Автомат $\mathfrak{A}^n$ вычисляет частичную функцию $F:(E_2^*)^n \to E_2^*$, где E_2^* множество всех слов в алфавите E_2.

Функция F называется ограниченно-детерминированной и определяется следующим образом. Распространим действие функций

φ и ψ на множество $(E_2^n)^* \times Q$:

$$\varphi(\Lambda, q) = q \; ; \; \varphi(\alpha a, q) = \varphi(a, \varphi(\alpha, q))$$
$$\psi(\Lambda, q) = \lambda \; ; \; \psi(\alpha a, q) = \psi(a, \varphi(\alpha, q))$$

где Λ, λ – пустые слова из $(E_2^n)^*$, E_2^* ; $\alpha \in (E_2^n)^*$, $a \in E_2^n$, $q \in Q$. Пусть теперь $\alpha = a_1 a_2 \dots a_s$. Определим функцию $\bar{\psi}$ следующим образом: $\bar{\psi}(\alpha, q) = \psi(a_1, q)\psi(a_1 a_2, q) \dots \psi(a_1 a_2 \dots a_s, q)$. Функция $\bar{\psi}$ принимает значение из множества E_2^*. Сопоставим слову $\alpha \in (E_2^n)^*$ набор из n слов $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n$, $\alpha^i \in E_2^*$. Если $\alpha = a_1 a_2 \dots a_s$, $a_i \in E_2^n$, $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, $i = 1 \dots s$, то $\alpha^k = a_{1k} a_{2k} \dots a_{sk}$, где $k = 1, \dots, n$.

Автомат $\mathfrak{A}^n$ вычисляет частичную функцию $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенную только на таких наборах $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n$ значений своих переменных, что длины слов $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n$ совпадают. При этом, если слово $\alpha \in (E_2^n)^*$ соответствует набору $(\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n)$, то

$$F(\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n) = \bar{\psi}(\alpha, q_0)$$

Пусть $q \in Q$ – некоторое состояние автомата $\mathfrak{A}^n$. Рассмотрим функцию алгебры логики $\psi_q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от n переменных, такую, что $\psi_q(a_1, a_2, \dots, a_n) = \psi((a_1, a_2, \dots, a_n), q)$ для любого набора $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in E_2^n$. Будем говорить, что ψ_q реализуется автоматом $\mathfrak{A}$ в состоянии q.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество всех функций, вычисляемых автоматами. Обычным образом [1] определяются операции суперпозиции над функциями из $\mathfrak{M}$, понятие замыкания множества функций относительно суперпозиции, замкнутого множества функций. Операциям над функциями соответствуют операции над автоматами, вычисляющими эти функции – переименование и склеивание входов, соединение выхода одного автомата с одним из выходов другого автомата (подстановка). Будем говорить, что суперпозиции функций соответствует композиция автоматов. Множество $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}$ называется полным, если его замыкание $[\mathfrak{M}']$ совпадает с $\mathfrak{M}$; то есть если любая функция из $\mathfrak{M}$ может быть представлена в виде суперпозиции функций из $\mathfrak{M}'$.

Автомат $\mathfrak{A}$ называется I-автоматом, если в каждом состоянии реализуется функция, существенно зависящая не более чем от одного переменного. Обозначим через $\mathfrak{M}_1$ множество всех функций, вычисляемых I-автоматами.

Через $H(x_1, x_2)$ обозначим функцию, которая вычисляется автоматом с одним состоянием $Q=\{q_0\}$ и двумя входами, причем $\psi_{q_0}(x_1,x_2)=\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$ – функция Шеффера.

<u>ЛЕММА I</u>. Система $\{\mathfrak{M}_1 \cup H(x_1,x_2)\}$ полна в $\mathfrak{M}$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $G(x_1,x_2,\dots,x_m)$ – произвольная функция из $\mathfrak{M}$, вычисляемая автоматом $\mathfrak{A}^m$ с m входами,

$$\mathfrak{A}^m=(Q,\varphi,\psi,q_0)\ ,\ Q=\{q_0,q_1,\dots,q_{r-1}\}$$

Возьмем в $\mathfrak{M}_1$ функцию, $G_1(x_1,\dots,x_m,t_0,t_1,\dots,t_{r-1})$, вычисляемую автоматом $\mathfrak{A}_1^{m+r}$ с $m+r$ входами $\mathfrak{A}_1=(Q,\varphi,\psi^1,q_0)$, где $\psi^1_{q_i}(x_1,\dots,x_m,t_0,\dots,t_{r-1})=t_i$, $i=0,\dots,r-1$. Автоматы $\mathfrak{A}^m$ и $\mathfrak{A}^1$ отличаются один от другого числом входов и функцией выходов. Функция переходов автомата $\mathfrak{A}_1$ зависит существенно только от значений входов $x_1,\dots,x_m$ и совпадает с функцией переходов автомата $\mathfrak{A}$. Для каждого $i=0,\dots,r-1$ рассмотрим функцию $U_i(x_1,\dots,x_m)$, вычисляемую автоматом $\mathfrak{B}_i$ с одним состоянием, в котором реализуется функция $\psi_{q_i}(x_1,\dots,x_m)$. Ясно, что $U_i(x_1,\dots,x_m)$ может быть получена суперпозициями из $H(x_1,x_2)$. Нужная для этого композиция автоматов, вычисляющих U_i , соответствует суперпозиции, с помощью которой в алгебре логики из функции Шеффера получается функция $\psi_{q_i}(x_1,\dots,x_m)$. Так как функция переходов автомата $\mathfrak{A}_1$ не зависит от значений входных переменных $t_0,\dots,t_{r-1}$, то композиция автоматов, полученная соединением выхода автомата $\mathfrak{B}_i$ с входом t_i автомата $\mathfrak{A}_1$, имеет снова функцию переходов, совпадающую с функцией переходов автомата $\mathfrak{A}$. Рассмотрим композицию автоматов, соответствующую суперпозиции $G_1(x_1,\dots,x_m,U_0(x_1,\dots,x_m),\dots,U_{r-1}(x_1,\dots,x_m))$. Нетрудно видеть, что эта композиция есть автомат с r состояниями $\mathfrak{B}=(Q,\varphi,\psi^2,q_0)$, причем $\psi^2_{q_i}(x_1,\dots,x_m)=U_i=\psi_{q_i}(x_1,\dots,x_m)$. Автоматы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, таким образом, эквивалентны, следовательно

$G(x_1,\ldots,x_m)=G_1(x_1,\ldots,x_m,U_0(x_1\ldots),\ldots,U_{r-1})$. Лемма доказана.

Из доказанной леммы следует существование конечных систем функций из $\mathfrak{M}$, добавление которых к $\mathfrak{M}_1$ дает полные системы.

Наша задача - получить необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять система $H_1,\ldots,H_k$ функций из $\mathfrak{M}$, чтобы система $\{\mathfrak{M}_1\cup\{H_1,\ldots,H_k\}\}$ была полна в $\mathfrak{M}$. Будем называть в этом случае систему $\{H_1,\ldots,H_k\}$ I-полной.

Пусть $\mathfrak{A}^n=(Q,\varphi,\psi,q_0)$ - автомат с n входами, $a=(a_1,\ldots,a_n)$ - набор значений входных переменных (входная буква), q -некоторое состояние. Будем говорить, что q - a- возвратное состояние, если существует слово $\alpha\in(E_2)$, такое что $\varphi(a\alpha,q)=q$. Для некоторого подмножества букв $A\subseteq E_2^n$ состояние q называется A-возвратным, если q является a-возвратным для каждого a из A.

Назовем J_n^m-оператором набор из n функций алгебры логики $V=(v_1(x_1,\ldots,x_m),\ldots,v_n(x_1,\ldots,x_m))$, каждая из которых существенно зависит не более чем от одной переменной. Будем говорить, что набор $(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in E_2^n$ реализуется J_n^m - оператором V, если существует набор $(\beta_1,\ldots,\beta_m)\in E_2^m$, такой что $V_i(\beta_1,\ldots,\beta_m)=a_i$, $i=1,\ldots,n$. Через $N(V)$ обозначим множество всех наборов, реализуемых оператором V. Не всякое подмножество E_2^n может быть реализовано некоторым оператором. Например, при $n=2$ не может быть реализовано множество $(00,01,10)$.

Пусть q - A-возвратное состояние автомата $\mathfrak{A}$, и в состоянии q реализуется функция $f(x_1,\ldots,x_n)$.

Таким образом, с каждым состояниемавтомата можно связать пару

(f, A) где A может быть пустым множеством. Пусть $\mathcal{J}_n^m$-оператор $V=(V_1, \dots, V_n)$ таков, что $N(V) \subseteq A$. Рассмотрим пару $(f(V), E_2^m)$ где $f(V)=f(v_1(x_1,\dots,x_m),\dots,v_n(x_1,\dots,x_m))$.
Если мы рассмотрим композицию автомата $\mathfrak{A}$ и оператора $\mathcal{J}_n^m$, такую что i-ый выход $\mathcal{J}_n^m$ соединен с i-ым входом $\mathfrak{A}$, то у этой композиции состояние q может оказаться α-возвратным для любой $\alpha \in E_2^m$.

Сформулируем теперь некоторое необходимое условие I-полноты. Пусть $Q^t \subseteq Q$ – множество всех состояний автомата $\mathfrak{A}$, достижимых из начального состояния словами длины t,

$$Q^t=\{q \mid \exists \alpha\ (\alpha \in (E_2^n)^t \ \&\ \varphi(\alpha, q_0)=q)\},\ t=0,1,\dots$$

Рассмотрим множество пар $\Pi_t=\{(\psi_q, A_q) \mid q \in Q^t\}$. Пусть $\mathcal{V}_n=\{V_1, V_2, \dots, V_s\}$ – такое множество операторов, что любое подмножество E_2^n, реализуемое $\mathcal{J}_n^m$-оператором при некотором m, реализуется $\mathcal{J}_n^{m'}$-оператором из системы $\mathcal{V}_n$. Ясно, что для любого n существует конечная система операторов $\mathcal{V}_n$. Для каждой пары $(\psi_q, A), A \neq \varnothing$ с помощью операторов из $\mathcal{V}_n$ можно образовать конечное множество пар вида $(\psi_q(V), E_2^m)$. Пусть

$$P_t=\{\Pi \mid \Pi=(\psi_q(V), E_2^{m_\Pi}), N(V) \subseteq A_q, q \in Q^t, V \in \mathcal{V}_n\}$$

Выберем из P_t множество всех пар (f, E_2^m), таких что f зависит существенно по крайней мере от двух переменных. Обозначим это множество через $\tilde{P}_t$.

<u>ЛЕММА 2</u>. Если $\{H_1, \dots, H_k\}$ – I-полная система функций, $(Q_i, \varphi^i, \psi^i, q_0^i)=\mathfrak{A}_i$ – автомат, вычисляющий $H_i(x_1, \dots, x_{m_i})$, то

I) для любого $t=0,1,\dots$ существует i, такое что в некотором состоянии $q \in Q_i^t$ реализуется функция, существенно зависящая по крайней мере от двух переменных,

2) существует t_0, такое что для любого $t \geq t_0$ имеет место $\bigcup_{i=1}^{k} \tilde{P}_t^i \neq \varnothing$, где множество пар $\tilde{P}_t^i$ строится для автомата $\mathfrak{A}_i$.

Доказательство. Условие I), очевидно, необходимо. В противном случае при некотором t каждый автомат $\mathfrak{A}_i$ реализует в состояниях из Q_i^t функции, зависящие не более чем от одного аргумента. Поэтому любая композиция автоматов $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k$ и автоматов из $\mathfrak{M}_1$ будет обладать этим свойством, что противоречит I-полноте – например, мы никогда не получим "функцию Шеффера".

Предположим теперь, что не выполнено условие 2). Это значит, что существует бесконечная последовательность $t_1 < t_2 < \ldots$, такая что $\bigcup_{i=1}^{k} \tilde{P}_{t_j}^i = \varnothing$, $j = 1, 2, \ldots$

Пусть K – произвольная композиция автоматов $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k$ и I-автоматов. Для каждого входного слова δ рассмотрим число $R(\delta)$, равное числу состояний композиции K, достижимых из начального состояния входными словами вида $\delta\delta'$, где δ' – непустое слово. Пусть в композиции K участвуют m экземпляров автоматов из множества $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k$, а именно $\mathfrak{A}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{i_m}$. Обозначим $M = \{\mathfrak{A}_{i_1}, \mathfrak{A}_{i_2}, \ldots, \mathfrak{A}_{i_m}\}$. Подадим на K произвольную входную последовательность γ_1 длины t_1. Рассмотрим работу композиции в момент $t_1 + 1$. Каждый автомат из множества M находится в состоянии, которое обладает свойством: или а) не существует $\mathcal{J}_n^m$-оператора V, который делает это состояние возвратным, то есть a-возвратным для любого входного сигнала, или б) функция $\phi_q(V)$ существенно зависит не более чем от одной переменной. Пусть $M_1 = \{\mathfrak{A}^1, \ldots, \mathfrak{A}^{m_1}\}$ – автоматы из М, у которых каждый вход соединен либо со входом всей композиции, либо с выходом подкомпозиции композиции K, содержащей только I-автоматы.

Если множество M_1 пусто, то композиция реализует в момент t_1+1 некоторую функцию одной переменной, что противоречит I-полноте в силу произвольности выбора композиции K. Пусть композиция K такова, что множество M_1 не пусто. В момент t_1+1 на входы каждого автомата из M_1 поступают значения выходов некоторых $\mathcal{J}_n^m$-операторов. Если для некоторого автомата из M_1 имеет место случай а), то можно подать на вход композиции такую букву b_1, что этот автомат перейдет в состояние, из которого он не сможет вернуться в состояние, в котором он находился в момент t_1+1. В результате мы получим, что $R(\gamma_1 b_1) < R(\gamma_1)$. Если для всех автоматов из M_1 имеет место случай б), то рассмотрим множество $M_2 = \{\mathfrak{A}^{11}, \dots, \mathfrak{A}^{m_2}\}$ автоматов из M, таких что каждый вход автомата из M_2 соединен либо с входом всей композиции, либо с выходом подкомпозиции, содержащей только I-автоматы из M_1. Снова имеем, что либо множество M_2 пусто, тогда рассуждаем, как в случае, когда M_1 пусто, либо множество M_2 не пусто. В силу свойства б) на входы автоматов из M_2 поступают в момент t_1+1 значения выходов некоторых $\mathcal{J}_n^m$-операторов. Снова имеем, в случае а) для некоторого автомата из M_2, $R(\gamma_1 b_1) < R(\gamma_1)$, и в случае б) рассмотрим множество M_3. Вообще, если для некоторого i множество M_i не пусто, и для всех автоматов из M_i имеет место случай б), то рассматриваем множество M_{i+1} автоматов из M, каждый вход у которых соединен либо с входом всей композиции, либо с выходом подкомпозиции, содержащей только I-автоматы и автоматы из M_i.

В силу конечности множества M получим в итоге, что либо для некоторого i множество M_i пусто, либо найдется буква b_1 такая что $R(\gamma_1 b_1) < R(\gamma_1)$. В первом случае ясно, что данная композиция не вычисляет, например, "функцию Шеффера". Во втором случае подадим на вход композиции произвольное следующее слово γ_2 / γ_2 приписывается справа к слову $\gamma_1 b_1$ /, и рассмотрим работу композиции в момент t_2+1. Снова имеем, что либо для некоторого i соответствующее множество M_i пусто, либо найдется буква b_2, такая что $R(\gamma_1 b_1 \gamma_2 b_2) < R(\gamma_1 b_1)$. В этом случае подадим слово γ_3 длины $t_3-t_2-t_1$ и т.д. Всилу конечности числа состояний композиции K этот процесс оборвется за конечное число шагов, при этом будем иметь, что в некоторый момент времени композиция K реализует функцию одного переменного, что противоречит I-полноте системы $H_1, H_2, \dots, H_k$. Лемма доказана.

Покажем теперь, что если условия I) и 2) леммы 2 выполнены, то из функций множества $\mathfrak{M}_1 \cup \{H_1, \dots, H_k\}$ можно с помощью суперпозиций получить произвольный линейный оператор, то есть набор из n линейных функций алгебры логики $(l_1(x_1,\dots,x_m),\dots$ $\dots, l_n(x_1,\dots,x_m))$ для любых n и m.

<u>ЛЕММА 3</u>. Если условия I) и 2) леммы 2 выполнены, то для любой линейной функции алгебры логики $l(x_1,\dots,x_m)$ замыкание $[\mathfrak{M}_1 \cup \{H_1,\dots,H_k\}]$ содержит функцию, вычисляемую автоматом с одним состоянием, в котором реализуется $l(x_1,\dots,x_m)$.

Доказательство. Пусть t_0 – число, определенное условием 2) леммы 2, и пусть $\mathfrak{A}^1$ – автомат, такой что $\tilde{P}^1_{t_0} \neq \varnothing$. Предположим, что пара $\Pi = (\psi_q(V), E_2^{m_n}) \in \tilde{P}^1_{t_0}$. Это значит, что q – состояние автомата $\mathfrak{A}^1$, которое достижимо словом длины t_0, A-возвратно для некоторого множества A, существует $\mathcal{J}^m_n$-опе-

ратор V, $N(V)\subseteq A$ и $\psi_q(v_1(x_1,\dots,x_m),\dots,v_n(x_1,\dots,x_m))$ существенно зависит по крайней мере от двух переменных. Поэтому для любого набора $a=(a_1,\dots,a_m)$ существует слово $\gamma^a\in(E_2^n)^*$, зависящее от a, такое что $\varphi(v\gamma^a,q)=q$, где $v=(v_1(a_1\dots a_m),\dots,v_n(a_1,\dots,a_m))$.
Пусть длина слова $v\gamma^a$ равна r_a. Возьмем $r=\prod\limits_{a\in E_2^m} r_a$, и для каждого a возьмем слово $\tilde\gamma^a=\gamma^a v\gamma^a v\dots\gamma^a$ длины $r-1$. Очевидно, что $\varphi(v\tilde\gamma^a,q)=q$. Таким образом, для каждого a $a\in E_2^m$ существует слово $\tilde\gamma^a$ длины $r-1$, возвращающее автомат $\mathfrak{A}^1$ в состояние q. Пусть слову $\tilde\gamma^a$ соответствует набор слов $(\tilde\gamma_1^a,\dots,\tilde\gamma_n^a)$, $\tilde\gamma_i^a\in E_2^{r-1}$, $\tilde\gamma_i^a=\gamma_{i_1}^a\gamma_{i_2}^a\dots\gamma_{i_{r-1}}^a$
Пусть состояние q достижимо из начального словом δ, и слову δ соответствует набор слов $(\delta_1,\dots,\delta_n)$, $\delta_i=\delta_{i_1}\delta_{i_2}\dots\delta_{i_{t_0}}$
Рассмотрим автомат $\mathfrak{B}_i=(Q_i,\varphi_i,\psi_i,q_0^i)$ с $t_0+r\cdot 2^m$ состояниями $Q_i=\{q_0^i,\dots q_{t_0}^i,q_a^s,a\in E_2^m,s=1,\dots,r-1\}$, входами, а функции φ_i и ψ_i определены следующим образом:

$$\varphi_i(a,q_j)=q_{j+1};\ \psi_i(a,q_j)=\delta_{ij},\quad j=0,1,\dots,t_0-1$$
$$\varphi_i(a,q_{t_0})=q_a^1;\ \psi_i(a,q_{t_0})=v_i(a),\ a\in E_2^m$$
$$\varphi_i(a,q_a^s)=q_a^{s+1};\ \psi_i(b,q_a^s)=\gamma_{is}^a,\ s=1,\dots,r-1;\ q_a^r=q_{t_0}$$

Таким образом, на выходе автомата $\mathfrak{B}_i$ сначала появляется i-е слово из набора $(\delta_1,\dots,\delta_n)$, а затем, после подачи буквы a (на выходе при этом имеем $v(a)$), на выходе появляется i-е слово из набора $(\tilde\gamma_1^a,\dots,\tilde\gamma_n^a)$, соответствующего слову $\tilde\gamma_a^a$. Можно видеть теперь, что соединяя выход автомата $\mathfrak{B}_i$ с i-ым входом автомата $\mathfrak{A}^1$ одновременно для всех $i=1,\dots,n$, мы получим композицию, которая в моменты $t_0+1,t_0+r+1,\dots,t_0+k\cdot r+1$, $k=0,1,\dots$ реализует некоторую функцию $f(x_1,\dots,x_m)$ алгебры логики, существенно зависящую от двух переменных, причем это не зависит от входных последовательностей.

Заметим, что класс линейных функций алгебры логики порождается набором функций $\{f, 0, \bar{x}\}$. Поэтому, строя нужным образом композиции I-автоматов и только что полученного автомата, мы получим на месте f любую линейную функцию.

Расмотрим теперь $t=t_0+s, s>1$. Рассуждая аналогично, построим композицию, которая в моменты $t_0+s, t_0+r_s+s, \dots, t_0+k\cdot r_s+s$, $k=0,1,\dots$ реализует функцию f. В силу конечности автоматов, вычисляющих $H_1, H_2, \dots, H_k$, среди чисел $r_1, r_2, \dots$ лишь конечное число d различных $r_{s_1}, r_{s_2}, \dots, r_{s_d}$. Пусть $r=\prod_{v=1}^{d} r_{s_v}$. Тогда для каждого $i=1,2,\dots$ среди построенных композиций найдется композиция K_i, которая в моменты $t_0+k\cdot r+i$, $k=0,1,\dots$ вычисляет функцию f. Рассмотрим автомат C с t_0+r входами, вычисляющий функцию $T(x_1, x_2, \dots, x_{t_0}, y_1, \dots y_d)$, на выходе которого в момент $t_0+k\cdot r+i$ реализуется значение входной переменной y_i, $i=1,\dots,r$, $k=0,1,\dots$, а в момент $t\le t_0$ значение переменной x_t. Соединяя y_i-ый вход автомата C с выходом композиции K_i, $i=1,2,\dots,r$, получим автомат $\tilde{C}$, реализующий при $t\ge t_0+1$ функцию f.

Воспользуемся теперь условием I) леммы. Пусть слово α длины t выделяет в автомате $\mathfrak{A}_i$, вычисляющем функцию H_i, состояние, в котором реализуется функция, существенно зависящая от двух переменных. Если m – число входов автомата $\mathfrak{A}_i$, и набор слов $(\delta^1, \dots, \delta^m)$ соответствует слову α, то для каждого $i=1, \dots, m$ возьмем автомат с одним входом, у которого на выходе сначала появляется i-ое слово из набора $(\delta^1, \dots, \delta^m)$, а затем реализуется значение входной переменной, и все это независимо от входных последовательностей. Ясно, что он является I-автоматом. Соединяя выход j-го автомата с j-ым входом автомата $\mathfrak{A}$, получим композицию, которая в момент t_0+1 реализует функцию, существенно зависящую от двух переменных. Без ограничений общности, мы можем считать, что эта композиция реализует в момент $t+1$ нужную нам линейную функцию f.

Теперь нам осталось подать выход t-ой композиции, K_t на вход x_t автомата $\tilde{C}$. Мы получим автомат, который в каждый момент времени реализует одну и ту же нужную нам линейную функцию, существенно зависящую по крайней мере от двух переменных.

Лемма доказана.

Таким образом, выполнение условий I) и 2) леммы 2 гарантирует нам получение любой "линейной функции", а следовательно, любого автомата, у которого в каждом состоянии реализуется некоторая, в зависимости от состояния, линейная функция. Как будет показано ниже, для I-полноты потребуется выполнение еще одного условия, независимо от условий I) и 2).

Аналогично тому как это было сделано для $\mathcal{J}_n^m$-операторов, введем понятие L_n^m-оператора $W=(w_1(x_1,\dots,x_m),\dots,w_n(x_1\dots x_m))$ то есть набора из n линейных функций алгебры логики, не обязательно существенно зависящих от всех переменных $x_1,\dots,x_m$. Через $N(W)$ обозначим множество наборов, порождаемых оператором W.

Если q – A-возвратное состояние автомата $\mathfrak{A}^n$ для некоторого подмножества A букв входного алфавита E_2^n, и W – линейный оператор, такой что $N(W) \leq A$, то как и в случае $\mathcal{T}_p^m$-операторов, мы можем рассматривать пару (ψ_q, A) и пару (f, E_2^m), где $f = \psi_q(w_1(x_1, \dots, x_m), \dots, w_n(x_1, \dots, x_m))$.

Можно показать, что для любого W_1 -оператора с n выходами существует W_2 -оператор с n выходами и не более чем 2^n входами, такой что $N(W_1) = N(W_2)$. Поэтому для каждого n существует конечная система L -операторов $\mathcal{L} = \{W_1, W_2, \dots, W_k\}$ что для любого L-оператора с n выходами найдется оператор из $\mathcal{L}$, порождающий то же множество наборов.

Пусть $Q^t = \{q \mid \exists \alpha (\alpha \in (E_2^n)^t \,\&\, \varphi(\alpha, q_0) = q)\}$ – множество состояний автомата $\mathfrak{A}$, достижимых из начального словами длины t. С помощью множества пар $\Pi_t = \{(\psi_q, A_q) \mid q \in Q^t\}$, где q – A_q-возвратное состояние, и системы L-операторов $\mathcal{L}$ можно образовать конечное множество пар

$$\mathcal{D}_t = \{(\psi_q(W), E_2^m) \mid N(W) \leq A_q, W \in \mathcal{L}, q \in Q^t, m \leq 2^n\}$$

Выберем в $\mathcal{D}_t$ подмножество пар с нелинейными результирующими функциями: $\tilde{\mathcal{D}}_t = \{(\psi_q(W), E_2^m) \in \mathcal{D}_t \mid \psi_q(W) \text{ - нелинейна}\}$

ЛЕММА 4. Если $\{H_1, \dots, H_k\}$ – полная система, $\mathfrak{A}_i$ – автомат, вычисляющий H_i, $i = 1, \dots, k$, то

1) для любого $t = 0, 1, \dots$ существует i, такое что в некотором состоянии $q \in Q_i^t$ реализуется нелинейная функция алгебры логики,

2) существует t_0, что для любого $t \geq t_0$ $\bigcup_{i=1}^{k} \tilde{\mathcal{D}}_t^i \neq \varnothing$, где множество пар $\tilde{\mathcal{D}}_t^i$ строится для автомата $\mathfrak{A}_i$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 2. Всюду, где это необходимо, заменяем слова "функция, зависящая от двух переменных" на слова нелинейная функция", и слова "J_n^m-оператор" на слова "L_n^m-оператор".

Нетрудно видеть, что из условия I) леммы 4 следует условие I) леммы 2. Однако из условия 2) леммы 4 не следует условие 2) леммы 2, что показывает следующий пример. Пусть в состоянии q автомата $\mathfrak{A}$ реализуется функция $\psi(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee x_2 \vee x_3$, и q – A-возвратное состояние, где $A = \{000; 011; 101; 110\}$. Пусть $W = (x_1; x_2; x_1 + x_2)$ – линейный оператор. Тогда $N(W) = A$, и результирующая функция $\psi(W) = x_1 \vee x_2 \vee x_1 + x_2 = x_1 \vee x_2$ – нелинейна. Вместе с тем, пусть $V = (v_1, v_2, v_3)$ – I-оператор. Если $v_i \neq const$, $i = 1, 2, 3$ то $N(V)$ вместе с каждым набором содержит противоположный набор, и следовательно $N(V) \nsubseteq A$. Если же хотя бы одна $v_i = const.$, и выполнено условие $N(V) \subseteq A$, то результирующая функция существенно зависит не более чем от одной переменной.

<u>ТЕОРЕМА I</u>. Чтобы система $\{H_1, H_2, \ldots, H_k\}$ была I-полна, необходимо и достаточно выполнение условий:

I) для любого $t = 0, 1, \ldots$ существует i, такое что в некотором состоянии $q \in Q_i^t$ реализуется нелинейная функция,

2) существует t_0, такое что для любого $t \geqslant t_0$ $\bigcup\limits_{i=1}^{k} \tilde{P}_t^i \neq \varnothing$; $\bigcup\limits_{i=1}^{k} \tilde{\mathfrak{S}}_t^i \neq \varnothing$, где множества пар $\tilde{P}_t^i$ и $\mathfrak{S}_t^i$ строятся для автомата $\mathfrak{A}_i$.

Доказательство. Необходимость условий I) и 2) доказана в леммах 2. и 4. Из леммы 3 следует, что $[\mathfrak{M}_1 \cup \{H_1, \ldots, H_k\}]$ содержит все функции, вычисляемые автоматами, у которых в каждом состоянии реализуется некоторая линейная функция алгебры логики. Теперь с помощью приема, примененного в лемме 3, мы можем построить для некоторых t_0 и r композиции автоматов K_i, $1 \le i \le t_0 + r$ такие что K_i при $i \le t_0$ реализует в момент i нужную нам нелинейную функцию f, и K_i при $i = t_0 + j$, $j = 1, \dots, r$ реализует функцию f в моменты $t = t_0 + s \cdot r + j$, $s = 0, 1, \dots$. Так же как и в лемме 3, с помощью этих автоматов и автомата из $\mathfrak{M}_1$ строим автомат, который в каждый момент времени реализует одну и ту же нелинейную функцию f. Теперь I-полнота системы $\{H_1, \dots, H_k\}$ будет следовать из леммы I. Теорема доказана.

Можно показать, что для любой конечной системы автоматов условия I) и 2) эффективно проверяются. Если n - число состояний автомата, то для проверки выполнения условий I) и 2) достаточно проследить работу автомата в моменты времени не более, чем 2^n.

ЛИТЕРАТУРА:

I. В.Б.Кудрявцев, О мощностях предполных множеств некоторых функциональных систем, связанных с автоматами, ДАН СССР, I5I, № 3, I963.

2. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, под ред. С.В.Яблонского и О.Б.Лупанова, том I, I974.

3. С.В.Алешин, О суперпозициях автоматных отображений, ж.Кибернетика, № I, I975.

eingegangen: 14. 1. 1977

Anschrift des Verfassers:

Dr. Stanislav V. Alešin
Gastdozent an der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock
Sektion Mathematik
DDR-25 Rostock, Universitätsplatz 1