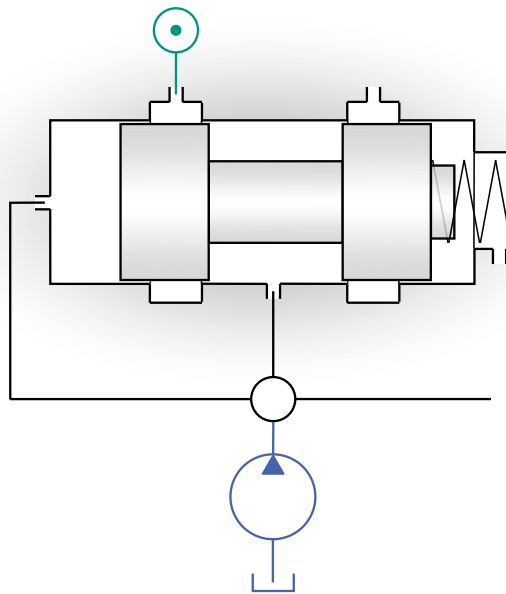


SIMON SCHRÖDERS

Ein Beitrag zur asymptotischen Analyse der hydraulischen Ventilsteuerungen



Simon Schröders

**Ein Beitrag zur asymptotischen Analyse der
hydraulischen Ventilsteuerungen**

Karlsruher Institut für Technologie
Schriftenreihe des Instituts für Technische Mechanik
Band 38

Eine Übersicht aller bisher in dieser Schriftenreihe erschienenen
Bände finden Sie am Ende des Buchs.

Ein Beitrag zur asymptotischen Analyse der hydraulischen Ventilsteuerungen

von
Simon Schröders

Karlsruher Institut für Technologie
KIT-Fakultät für Maschinenbau

Ein Beitrag zur asymptotischen Analyse der
hydraulischen Ventilsteuerungen

Zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der
Ingenieurwissenschaften von der KIT-Fakultät für Maschinenbau des
Karlsruher Instituts für Technologie (KIT) genehmigte Dissertation

von Simon Schröders, M.Sc.

Tag der mündlichen Prüfung: 14. April 2022
Hauptreferent: Prof. Dr.-Ing. habil. Alexander Fidlin
Korreferent: o.Univ.-Prof. DI Dr. Rudolf Scheidl

Impressum



Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
KIT Scientific Publishing
Straße am Forum 2
D-76131 Karlsruhe

KIT Scientific Publishing is a registered trademark
of Karlsruhe Institute of Technology.
Reprint using the book cover is not allowed.

www.ksp.kit.edu



*This document – excluding parts marked otherwise, the cover, pictures and graphs –
is licensed under a Creative Commons Attribution-Share Alike 4.0 International License
(CC BY-SA 4.0): <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.en>*



*The cover page is licensed under a Creative Commons
Attribution-No Derivatives 4.0 International License (CC BY-ND 4.0):
<https://creativecommons.org/licenses/by-nd/4.0/deed.en>*

Print on Demand 2022 – Gedruckt auf FSC-zertifiziertem Papier

ISSN 1614-3914

ISBN 978-3-7315-1221-9

DOI 10.5445/KSP/1000148781

Ein Beitrag zur asymptotischen Analyse der hydraulischen Ventilsteuerungen

Zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften

der

KIT - Fakultät für Maschinenbau
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

vorgelegte

Dissertation

von

Simon Schröders

aus Heinsberg

Tag der mündlichen Prüfung:

Hauptreferent:

Korreferent:

14. April 2022

Prof. Dr.-Ing. habil. Alexander Fidlin

o.Univ.-Prof. DI Dr. Rudolf Scheidl

Kurzfassung

Hydraulische Systeme finden aufgrund ihrer hohen Energiedichte und ihrer flexiblen Gestaltungsmöglichkeiten Anwendung in einer Vielzahl technischer Systeme. Insbesondere die Topologie der Ventilsteuerungen, bei denen der Energiefluss mittels variabler Strömungswiderstände gesteuert wird, erlaubt die Realisierung hochdynamischer Steuerungsaufgaben. Dabei ist ein wesentliches Funktionsprinzip, welches in vielen Standardventilen ausgenutzt wird, das Prinzip der Selbstregulierung, welches einen sehr robusten und kostengünstigen Betrieb der entsprechenden Systeme erlaubt, jedoch zu dem Preis möglicher Instabilitäten und damit verbundener Schwingungsprobleme. Um diese Schwingungsprobleme zu vermeiden ist es vorteilhaft, bereits im Entwicklungsprozess hydraulischer Steuerungen ein qualitatives Verständnis der nichtlinearen Systemdynamik zu erlangen. Dafür wird in dieser Arbeit eine analytische Methodik zur qualitativen Analyse der nichtlinearen Dynamik hydraulischer Ventilsteuerungen entwickelt. Die Methodik basiert auf der Formulierung des Systems als singular gestörtes Problem, was gleichbedeutend damit ist, die Dynamik in einen langsamen und einen schnellen Anteil aufzuteilen. Durch den Nachweis der global asymptotischen Stabilität der langsamen Mannigfaltigkeit wird gezeigt, dass der langsame Teil der Systemdynamik alle relevanten Informationen über die Ventildynamik enthält. Diese Argumentation erlaubt die Reduktion der schnellen Dynamik und die anschließende Anwendung eines Mittelwertbildungsverfahrens, mit dem ein transformiertes System in den Variablen der Amplitude und Phase periodischer Lösungen hergeleitet wird. Anhand des gemittelten Systems erfolgt die Analyse der Systemdynamik sowohl für den Fall selbsterregter als auch für den Fall erzwungener Schwingungen einschließlich der Berechnung instabiler periodischer Lösungen und parametrischer Resonanzen. Es werden weiterhin ausgewählte nicht-glatte Phänomene beschrieben, welche sich der Stabilitätsanalyse durch Standardmethoden auf Basis einer Linearisierung um die Gleichgewichtslage entziehen. Zuletzt werden reduzierte Modelle zur Beschreibung instationärer Bewegungen hergeleitet, welche eine teils signifikante Rechenzeiterparnis erzielen. Die reduzierten Modelle werden in der Ableitung nichtlinearer Regelungen auf Basis der Eingangs-Ausgangs-Linearisierung eingesetzt.

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung	I
Vorwort	VII
1 Einleitung	1
1.1 Motivation und Thema der Arbeit	1
1.2 Stand der Forschung	2
1.2.1 Instabilitätsmechanismen	3
1.2.2 Globale Stabilität und nichtlineare Dynamik	11
1.2.3 Asymptotische Methoden	15
1.3 Zielsetzung der Arbeit	21
1.4 Aufbau der Arbeit	23
2 Grundlagen der asymptotischen Analyse dynamischer Systeme	25
2.1 Regulär gestörte Systeme	26
2.2 Verfahren höherer Ordnung	29
2.3 Singulär gestörte Systeme	31
3 Hydraulische Ventilsteuerungen	35
3.1 Topologie hydraulischer Ventilsteuerungen	35
3.2 Modellierung hydraulischer Ventilsteuerungen	38
3.2.1 Fluiddynamik	39
3.2.2 Ventildynamik	43
3.2.3 Pumpendynamik	45
4 Verallgemeinerter Ventilkreislauf	49
4.1 Physikalisches Modell	50
4.2 Dimensionsloses Modell	54
4.3 Modellvarianten	61

5	Dynamik selbsterregter Schwingungen	67
5.1	Reduktion der schnellen Dynamik	67
5.2	Approximation der langsamen Dynamik	71
6	Dynamik erzwungener Schwingungen	79
6.1	Dimensionsloses Modell	81
6.2	Reduktion der schnellen Dynamik	86
6.3	Detektion der Resonanzstellen	88
6.4	Stabilität der Gleichgewichtslage unter parametrischer Erregung	92
6.5	Approximation der langsamen Dynamik in der Nähe der Resonanzstellen	95
7	Asymptotische Analyse ausgewählter Nichtlinearitäten	105
7.1	Trockene Reibung	106
7.2	Quadratische Dämpfung	123
7.3	Kritisch überdecktes Ventil	135
8	Nichtlineare Regelung mit reduzierten Modellen	145
8.1	Einfluss der reduzierten Ventilträgheit auf die instationäre Systemdynamik	146
8.2	SISO-Regelung des Ventilkreislaufs mit Druckregelventil und Konstantpumpe	153
8.3	Einfluss der reduzierten Druckdynamik auf die instationäre Systemdynamik	159
8.4	SISO-Regelung des Ventilkreislaufs mit quadratischer Dämpfung	163
8.5	MIMO-Regelung des Ventilkreislaufs mit quadratischer Dämpfung und Pumpendynamik	166
9	Zusammenfassung und Ausblick	173

Anhang

A Gemittelte Gleichungen des Ventils mit trockener Reibung	179
Abbildungsverzeichnis	183
Tabellenverzeichnis	187
Literaturverzeichnis	189
Eigene Publikationen	201

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Technische Mechanik, Bereich Dynamik/Mechatronik des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT).

Ich danke Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Alexander Fidlin für die Betreuung der Arbeit, die vielen hilfreichen Anregungen und die ehrliche Kritik. Die Freiheit, das Thema der Promotion nach meinen Vorstellungen auszugestalten, ist für meine persönliche Entwicklung sowie für die vorliegende Arbeit sehr wertvoll gewesen. Mein Dank gilt ebenso Herrn o.Univ.-Prof. DI Dr. Rudolf Scheidl vom Institut für Maschinenlehre und Hydraulische Antriebstechnik der Johannes Kepler Universität Linz für die Übernahme des Korreferats. Des Weiteren danke ich Frau Prof. Dr. Dr.-Ing. Dr. h. c. Jivka Ovtcharova vom Institut für Informationsmanagement im Ingenieurwesen des KIT für die Übernahme des Promotionsprüfungsvorsitzes.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Seemann und Herrn Prof. Dr.-Ing. Carsten Proppe danke ich dafür, dass Sie durch Ihre Vorlesungen mein Interesse an der Mechanik geweckt haben. Den emeritierten Professoren Prof. Dr.-Ing. h.c. Jörg Wauer, Prof. Dr.-Ing. Walter Wedig und Prof. Dr.-Ing. h.c. Jens Wittenburg danke ich für ihr fortwährendes Interesse an den Belangen der Doktoranden und des Instituts.

Der AVL List GmbH und der österreichischen FFG danke ich für die finanzielle Unterstützung des Projekts Gear-Control (Projekt-Nr. 850729). In diesem Zusammenhang möchte ich mich ganz besonders bei Clemens Maier bedanken, der mit viel Einsatz und Fleiß maßgeblich zum Gelingen des Projekts beigetragen hat. Mein herzlicher Dank gilt weiterhin Herrn Wolfgang Ebner von der AVL List GmbH sowie Herrn Associate Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Christoph Hametner und Herrn Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan Jakubek von der TU Wien.

Mein besonderer Dank gilt allen Kollegen und Kolleginnen am Institut für die kooperative und freundschaftliche Arbeitsatmosphäre und die vielen fachlichen und fachfremdem Gespräche. Besonders hervorheben möchte ich meinen langjährigen Bürokollegen Lukas Oestringer, mit dem ich viele spannende Diskussionen geführt habe und der es bei vielen Gelegenheiten geschafft hat, mir neue Blickwinkel auf mein Forschungsthema aber auch auf nicht-fachliche Themen zu eröffnen. Des weiteren bedanke ich mich bei Dr.-Ing. Marius Köster, der der Wegbereiter meines Promotionsthemas gewesen ist und der mich durch die Betreuung meiner Masterarbeit zu diesem Thema hingeführt hat.

Ich möchte meinen Freunden danken, die meine Studien- und Promotionszeit in Karlsruhe begleitet haben. Ich darf mich sehr glücklich schätzen, euch in meinem Leben zu haben. Zu guter Letzt gilt mein herzlicher Dank meiner Familie für ihre Unterstützung und den Rückhalt, den sie mir in der Vergangenheit gegeben hat und weiterhin gibt.

Karlsruhe, den 22. Juli 2022
Simon Schröders

1 Einleitung

Im ersten Kapitel dieser Arbeit wird das Thema derselben eingeführt und motiviert. Weiterhin wird ein Überblick über den Stand der Forschung gegeben und bestehende Forschungslücken identifiziert. Daraus werden die Ziele und die Struktur dieser Arbeit abgeleitet.

1.1 Motivation und Thema der Arbeit

Hydraulische Systeme werden in vielen Industriezweigen, z. B. in der Luft- und Raumfahrt, im Automobilbereich oder in Werkzeugmaschinen zur Energieübertragung und -steuerung eingesetzt. Die Vorteile hydraulischer Antriebe sind eine hohe Energiedichte, die räumliche Flexibilität in der Systemgestaltung sowie über große Bereiche stufenlos verstellbare Übersetzungen.

Die Kraftübertragung findet bei hydraulischen Steuerungen zumeist über das hydrostatische Prinzip statt, bei dem eine Kraft durch eine mit Druck beaufschlagte Kolbenfläche übertragen wird. Die Steuerung der Energie erfolgt entweder durch veränderliche hydraulische Widerstände (in diesem Fall spricht man von Widerstands- oder Ventilsteuerungen) oder durch die Veränderung der Leistungsbereitstellung. Letzteres wird als Verdrängersteuerung bezeichnet [125].

Besonders mit als Ventilsteuerung gestalteten Systemtopologien lassen sich hochdynamische und sehr präzise Steuerungen realisieren. Ein weiterer Vorteil der Ventilsteuerungen besteht darin, dass durch einfache Druckrückführungsschleifen Selbstregulierungsmechanismen entworfen werden können, was zu besonders robusten und kostengünstigen Systemen führt, weil kein aktiver Steuerungsaufwand zu betreiben ist. Das Prinzip der Selbstregulierung wird in sehr vielen Ventilen und Schaltungen standardmäßig ausgenutzt, wie z.B. in Druckregelventilen, druckgeregelten Verstellpumpen, Druckminderventilen und Load-Sensing-Systemen.

Wie in vielen technischen Bereichen führt auch in der Hydraulik das Streben nach immer schnelleren und präziseren Systemen zu einer Versteifung der Systeme. Damit gehen oftmals Schwingungsprobleme einher. Durch die Kompressibilität des Hydraulik-Öls

pflanzen sich die Schwingungen über die Wellenausbreitung in hydraulischen Leitungen über weite Strecken fort. Die Schwingungen führen zu Lärmbelästigung, Beeinträchtigung der Funktionalität, erhöhtem Verschleiß und im schlimmsten Fall zum kompletten Versagen des Systems. Als Verursacher von Schwingungen sind neben äußeren Anregungsmechanismen insbesondere Stabilitätsprobleme in den Ventilsteuerungen selbst zu nennen.

Um diesen Problemen bereits im Entwicklungsprozess zu begegnen, ist ein umfassendes Verständnis der Systemdynamik erforderlich. Die oftmals hohe Anzahl an Systemparametern, welche das Systemverhalten beeinflussen, sowie große Nichtlinearitäten, welche durch turbulente Strömungen sowie Schaltübergänge und Kolbenanschläge verursacht werden, erschweren jedoch die Suche nach einer optimalen Systemgestaltung. Insbesondere wird eine lokale Stabilitätsanalyse den Anforderungen realer Anwendungen nicht gerecht, weil Einzugsgebiete stabiler Betriebspunkte durch instabile Lösungen begrenzt werden können.

Um ein umfassendes Bild der dynamischen Systemstruktur zu zeichnen, ist ein Zusammenspiel aus numerischen, experimentellen und analytischen Studien zielführend. Im Bereich der numerischen Simulationen erlauben heutige Softwareprogramme auch die Berechnung der im Kontext der hydraulischen Systeme auftretenden numerisch steifen und nicht-glatte Differentialgleichungen. Experimentelle Studien sind aufgrund der hohen damit verbundenen Kosten nur in sehr begrenztem Maße durchzuführen. Dahingegen besteht im Bereich der analytischen Methoden zur qualitativen Beschreibung der Systemdynamik ein Forschungsbedarf und ein Potential, die vorhandenen Methoden auf hydraulische Ventilsteuerungen anzuwenden und gegebenenfalls zu erweitern.

Basierend auf diesem Forschungsbedarf besteht das Thema der Arbeit darin, mit Hilfe analytischer Methoden die Systemdynamik hydraulischer Ventilsteuerungen approximativ zu beschreiben. Dies schließt die Berechnung von stabilen und instabilen Grenzyklen ein, welche aufgrund eines Stabilitätsverlusts auftreten. Ebenso sollen periodische Lösungen, welche durch eine Fremd- oder Parametererregung verursacht werden, qualitativ beschrieben werden. Des Weiteren sollen die Einflüsse spezieller nichtlinearer Effekte diskutiert werden, welche typischerweise in hydraulischen Steuerungen zu finden sind. Der Fokus liegt dabei auf nicht-glatte Mechanismen, welche eine standardmäßige Stabilitätsanalyse verhindern. Zuletzt werden auch transiente Bewegungen im Zusammenhang mit der nichtlinearen Regelung hydraulischer Steuerungen adressiert.

1.2 Stand der Forschung

In diesem Abschnitt wird ein Überblick über Studien im Bereich der Stabilitätsanalyse, der Untersuchung der nichtlinearen Dynamik sowie der asymptotischen Analyse

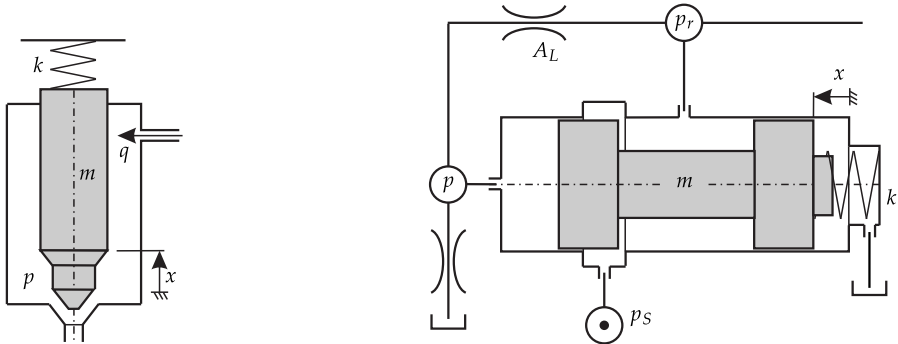
hydraulischer Steuerungen gegeben. Zunächst werden in Abschnitt 1.2.1 die wichtigsten Instabilitätsmechanismen vorgestellt, welche durch die Kopplung zwischen mechanischen und hydrodynamischen Teilsystemen im Zusammenhang mit hydraulischen Ventilen auftreten. Die Untersuchungen basieren ausschließlich auf der Annahme kleiner Störungen um die Gleichgewichtslage und sind somit als lokale Betrachtungen zu verstehen. Der zweite Abschnitt 1.2.2 konzentriert sich auf die globale dynamische Analyse der Systeme, welche aufgrund eines Stabilitätsverlusts selbsterregte Schwingungen ausführen. Die Analysen basieren neben wenigen analytischen Näherungen fast ausschließlich auf rein numerischen Studien. Im Abschnitt 1.2.3 werden Untersuchungen vorgestellt, in denen mit Hilfe asymptotischer Methoden analytische Näherungen periodischer Lösungen berechnet oder schnelle Dynamiken reduziert werden. Die Reduktion der schnellen Dynamik wird dabei entweder durch Rechenzeitersparnisse in der numerischen Zeitintegration oder durch die Entwicklung von Regelungsstrategien motiviert.

1.2.1 Instabilitätsmechanismen

In diesem Abschnitt werden Instabilitätsmechanismen in hydraulischen Steuerungen vorgestellt und klassifiziert, deren Ursache in der Struktur des hydraulischen Kreislaufs an sich zu finden ist. Der Fokus liegt also auf Instabilitäten, die bei offener Steuerkette auftreten. Instabilitäten im geschlossenen Regelkreis oder solche, die aufgrund von Wechselwirkungen mit Elementen außerhalb des hydraulischen Systems auftreten, werden hier – mit kleinen Ausnahmen – nicht behandelt. Es werden weiterhin die Einflüsse von Systemparametern, Kolben- oder Gehäusegeometrien sowie von verschiedenen physikalischen Effekten auf die Stabilität beleuchtet. Die Klassifizierung der Instabilitätsmechanismen erfolgt anhand der zwei möglichen Kopplungsmechanismen zwischen mechanischen und hydrodynamischen Teilsystemen. Diese bestehen entweder in einer statischen Druckkraft oder in einer hydrodynamischen Strömungskraft. In anderen Publikationen [14, 35, 99] finden sich oftmals auch andere Unterscheidungen.

Kopplung durch statische Druckkräfte

Eine der frühesten veröffentlichten Untersuchungen zur Stabilität hydraulischer Ventilsteuerungen oder strukturell ähnlicher Systeme gehen auf Lutz zurück, welcher bereits im Jahr 1933 Untersuchungen zum dynamischen Verhalten federbelasteter Einspritzdüsen von kompressorlosen Ölmaschinen vornahm [81]. Das von ihm untersuchte System ist strukturell identisch zu hydraulischen Druckregelventilen in Sitzventilbauweise, vgl. Abb. 1.1a. Die Kopplung zwischen mechanischen und hydrodynamischen Teilsystemen entsteht einerseits durch den verschiebungsabhängigen Volumenstrom durch den Düsenauslass und andererseits durch eine statische Druckkraft $F_p(p)$ auf



(a) Einspritzdüse, welche von LUTZ im Jahr 1933 untersucht wurde. Nach [81].

(b) Druckminderventil in Kolbenschieberbauweise mit Dämpfungswiderstand. Dieses System wurde von MA 1967 untersucht. Nach [82].

Abbildung 1.1: Gegenstände früher Stabilitätsuntersuchungen. Instabilität durch Druckrückführung.

die Düsenstirnfläche. Auch wenn der Fokus der Arbeit auf transienten Prozessen liegt, weist der Autor durch eine Betrachtung der linearisierten Systemdynamik nach, dass das System bei niedriger Dämpfung d zum Aufschwingen fähig ist. Die Systemdynamik wird durch eine Differentialgleichung dritter Ordnung mit der Grundstruktur

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = F_p(p) \quad (1.1)$$

$$+ \text{Druckdynamik} \quad (1.2)$$

beschrieben, in der m die Kolbenmasse, d den viskosen Dämpfungsparameter und k die Federsteifigkeit darstellt. Die Druckdynamik wird dabei durch eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung beschrieben und aufgrund des verschiebungabhängigen Steuerkanten-Volumenstroms von der Kolbenverschiebung x beeinflusst. Nach den Untersuchungen von LUTZ klafft eine große zeitliche Lücke, weil in den Sechziger und frühen Siebziger Jahren des 20. Jahrhunderts der Fokus auf der Untersuchung der Wechselwirkung zwischen Ventildynamik und Leitungsdynamik liegt. Für diese Untersuchungen sei auf den übernächsten Teilabschnitt **Kombination verschiedener Mechanismen** verwiesen. Untersuchungen zu Druckregelventilen in Sitzventilbauweise werden erst wieder von SINGH im Jahr 1982 durchgeführt [114]. Der Autor untersucht den Einflusses verschiedener Parameter auf das dynamische Verhalten und die Stabilität eines Druckbegrenzungsventils, welches für den Einsatz im Bereich hoher Drücke ausgelegt ist und postuliert, dass eine höhere Federsteifigkeit k destabilisierend wirkt. Dahingegen kann eine erhöhte Dämpfung d die Gleichgewichtslage stabilisieren. Der Fokus liegt des weiteren auf der Untersuchung des Einflusses unterschiedlicher Kolbengeometrien auf das dynamische Verhalten und die Stabilität des Ventils.

Eine weitere Einflussgröße auf die Stabilität von Druckbegrenzungsventilen in Sitzventilbauweise ist die Größe des Volumenstroms durch das Ventil [127], wobei die Ventile vor Allem bei kleinen Volumenströmen schwingungsanfällig sind. In [78] wird die destabilisierende Wirkung kleiner Volumenströme bei Druckbegrenzungsventilen bestätigt. Ebenso ist bei Druckminderventilen in Sitzventilbauweise, welche im Bereich der Wasserhydraulik eingesetzt werden, die Schwingungsanfälligkeit vor Allem bei kleinen Volumenströmen vorhanden [117]. Weil Druckminderventile auf dem selben Funktionsprinzip beruhen wie Druckregel- bzw. Druckbegrenzungsventile, wirkt hier der selbe Instabilitätsmechanismus.

Die selbe Gleichungsstruktur wie bei der Analyse von Druckregelventilen in Sitzventilbauweise (Gleichungen (1.1) und (1.2)) ergibt sich bei der Analyse von Druckminderventilen in Kolbenschieberbauweise [82] (vgl. Abb. 1.1b). Der Vorteil von Kolbenschieberventilen besteht jedoch darin, dass in der Druckrückführung eine Laminardrossel (Durchlassfläche A_L) platziert werden kann, wodurch die linear viskose Dämpfung im System maßgeblich erhöht wird. Dies kann die Gleichgewichtslage stabilisieren, dennoch ist ein Stabilitätsverlust möglich und dann ebenso wie bei den Sitzventilen der Kopplung durch statische Druckkräfte zuzuordnen. Als kritische Betriebspunkte hinsichtlich der Stabilität werden in [82] sehr kleine Volumenströme sowie der Fall genannt, dass der Systemdruck p_r ungefähr die Hälfte des Versorgungsdrucks p_s beträgt. Als Konstruktionsrichtlinien zur Stabilisierung werden eine möglichst kleine Kolbenmasse m und eine hohe Federsteifigkeit k vorgeschlagen. Die stabilisierenden Einflüsse einer kleinen Kolbenmasse und einer hohen Federsteifigkeit werden in [68] und [63] bestätigt.

Letztere Maßnahme steht in direktem Widerspruch zu der von SINGH [114] postulierten und oben genannten Aussage, dass eine höhere Federsteifigkeit destabilisierend wirkt. Hier wird sichtbar, dass generelle Aussagen bezüglich der Stabilisierung hydraulischer Ventile im Allgemeinen nicht möglich sind.

Die Kopplung zwischen mechanischen und hydrodynamischen Teilsystemen, welche den hydraulischen Ventilen in Abb. 1.1 innewohnt, kann als geschlossener Regelkreis interpretiert werden. Dies wird durch die physische Druckrückführung in Abb. 1.1b verdeutlicht. Da insbesondere im Bereich der Servohydraulik die Rückführung physikalischer Größen und damit die Gestaltung geschlossener Regelkreise notwendig ist, überrascht es nicht, dass die Gleichungsstruktur der Gleichungen (1.1) und (1.2) auch bei anderen hydraulischen Systemen zu beobachten ist, welche keine Druckrückführung beinhalten. Als ein für hydraulische Ventilsteuerungen repräsentatives Beispiel [25] sei hier das in Abb. 1.2 dargestellte hydraulische Positioniersystem genannt. Der geschlossene Regelkreis entsteht hier nicht durch eine Druckrückführung, sondern durch die direkte Positionsrückführung $x_v = K_p(x - x_d)$ (proportionale Verstärkung K_p , Sollvorgabe x_d). Die Gleichungsstruktur der Gleichungen (1.1) und (1.2) ergibt

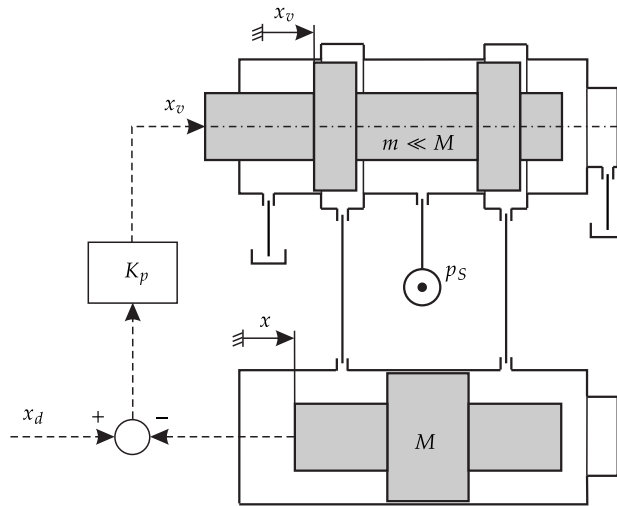


Abbildung 1.2: Hydraulisches Positioniersystem mit direkter Positionsrückführung. Nach [71]. Die Instabilität ist strukturell die gleiche wie die aufgrund der Druckrückführung.

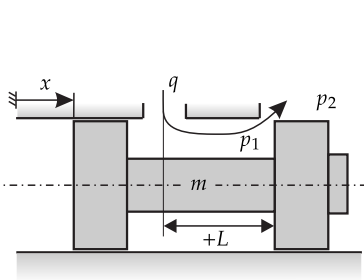
sich für den Fall, dass in der Modellierung die Kolbdynamik des 4-Wege-Ventils vernachlässigt wird [71], auch wenn den entsprechenden Variablen und Parametern eine teilweise andere Bedeutung zukommt.

Die Stabilität und die Dynamik des Systems wird von zahlreichen Autoren [20, 71, 72, 89, 99] untersucht, einschließlich verschiedener Systemvarianten, wie beispielsweise eine negative Ventilüberdeckung [49] oder eine Lastabstützung durch eine Feder-Dämpfer-Kombination [37]. Auf die entsprechenden Ergebnisse wird hier nicht detailliert eingegangen.

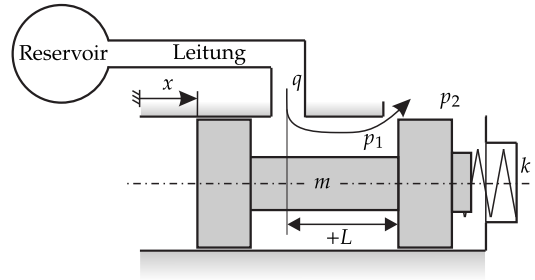
Kopplung durch hydrodynamische Strömungskräfte

Ein ähnlicher Kopplungsmechanismus zwischen mechanischen und hydrodynamischen Teilsystemen entsteht durch hydrodynamische Strömungskräfte anstatt statischer Druckkräfte. Im Gegensatz zu statischen Druckkräften, welche seit Jahrhunderten bekannt und verstanden sind, wurde erst im Jahr 1952 die Wirkung von hydrodynamischen Reaktionskräften an Steuerkanten von LEE und BLACKBURN physikalisch beschrieben [76]. Danach kann die hydrodynamische Strömungskraft an einer Ventilsteuerkante mit der Dichte ρ , der Strömungsgeschwindigkeit v , dem Volumenstrom q und der sogenannten „Dämpfungslänge“ L (vgl. Abb. 1.3a) durch

$$F_H = \rho q v + \rho L \dot{q} \quad (1.3)$$



(a) Ventilkolben unter dem Einfluss einer Strömungskraft. Dieses System wurde von LEE und BLACKBURN 1952 untersucht [76].



(b) Ventilkolben unter dem Einfluss einer Strömungskraft. Dieses System wurde gleichzeitig und unabhängig von AINSWORTH sowie von EZEKIEL untersucht [2, 28, 29].

Abbildung 1.3: Gegenstände früher Stabilitätsuntersuchungen. Instabilität durch hydrodynamische Strömungskräfte. Die hier betrachtete Strömungsrichtung bewirkt eine positive Dämpfungslänge $+L$ und damit einen positiven Dämpfungseffekt durch den transienten Anteil der Strömungskraft F_H . Nach [99].

dargestellt und somit in einen stationären und einen transienten Anteil zerlegt werden. Unter der Annahme eines turbulenten Volumenstroms q und einer rechteckigen Ventilsteuerkante folgt daraus

$$F_H = -K_1(\Delta p)x - K_2(\Delta p)\dot{x} \quad (1.4)$$

$$\Delta p = p_1 - p_2, \quad (1.5)$$

wobei x die Kolbenverschiebung und Δp die Druckdifferenz über die Ventilsteuerkante beschreiben, vgl. Abb. 1.3a. Die Größen K_1 und K_2 hängen von der Druckdifferenz sowie von Systemparametern ab. Dabei ist das Vorzeichen von K_2 abhängig von der Strömungsrichtung, weshalb hier im ungünstigen Fall $K_2 < 0$ eine negative Dämpfung auftreten kann. LEE und BLACKBURN argumentieren in [75] weiterhin, dass dies in Verbindung mit der Kolbendynamik

$$m\ddot{x} = F_H \quad (1.6)$$

basierend auf Abb. 1.3a einen möglichen Stabilitätsverlust verursachen kann, falls keine anderen dämpfenden Mechanismen im System vorhanden sind. Die Konstante K_1 wird in späteren Publikationen auch als „hydraulische Steifigkeit“ bezeichnet [28].

Experimentelle Untersuchungen der Autoren bestätigen das Vorhandensein von Instabilitäten, jedoch treten diese in den Experimenten zeitweise auch für $K_2 > 0$ auf, also dann, wenn die Richtung der Strömungskraft einen positiven Dämpfungsbeitrag leistet. Daraus wird die Schlussfolgerung gezogen, dass weitere Instabilitätsmechanismen vorhanden sein müssen.

Dies führt auf die Untersuchungen von AINSWORTH [2], welcher im Jahr 1956 zusätzlich die Leitungsdynamik unter Berücksichtigung der Fluidkompressibilität und der damit einhergehenden endlichen Wellenausbreitungsgeschwindigkeit von Druckwellen in seinem Modell berücksichtigt, vgl. Abb. 1.3b. Mit diesem Modell gelingt die Beschreibung der Instabilität, welche in den Experimenten von LEE und BLACKBURN auftritt. In den Untersuchungen bewirkt die Anordnung der Steuerkante zusammen mit der Strömungsrichtung durch das Ventil einen positiven Dämpfungseffekt ($K_2 > 0$). Somit ist der stationäre Anteil der hydrodynamischen Strömungskraft für den Stabilitätsverlust verantwortlich. Im instabilen Betriebszustand koppelt die Ventildynamik mit der niedrigsten Schwingungsmode der Leitung (diese entspricht einer stehenden Viertel-Welle). Damit sind möglichst kurze Leitungen eine geeignete konstruktive Maßnahme zur Vermeidung der Instabilität, weil dadurch die Frequenz der niedrigsten Leitungsmode weit über der Eigenfrequenz des Ventilkolbens liegt.

Zeitgleich zu und unabhängig von AINSWORTH arbeitet EZEKIEL den gleichen Instabilitätsmechanismus heraus, in dem auch er die Leitungsdynamik berücksichtigt [28, 29]. Ein wichtiges Ergebnis der Untersuchung besteht darin, dass die Instabilität durch eine Zuführleitung vom Druckreservoir zum Ventil mit nicht konstantem Querschnitt vermieden werden kann, da dies die Wellenausbreitung in der Leitung signifikant beeinflusst.

Die Gleichungsstruktur des von AINSWORTH und EZEKIEL untersuchten Systems kann durch

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = F_H(q, \dot{q}) \tag{1.7}$$

$$+ \text{Leitungsdynamik} \tag{1.8}$$

dargestellt werden, wobei die Leitungsdynamik im Allgemeinen durch die Wellengleichung, also eine lineare partielle Differentialgleichung, beschrieben wird. Weiterhin ist die Strömungskraft F_H nach Gl. (1.3) definiert.

Der von EZEKIEL und AINSWORTH beschriebene und untersuchte Instabilitätsmechanismus wird in weiteren Publikationen [6, 14, 33, 47, 48, 99, 105] aufgegriffen und weiter untersucht. SAITO analysiert, dass eine Instabilität nicht nur auftritt, wenn sich die Leitung zwischen dem Druckreservoir und dem Ventil befindet, sondern auch, wenn sie dem Ventil nachgeschaltet ist [105]. Als Empfehlungen für eine Stabilisierung werden ein niedriger Versorgungsdruck sowie in Übereinstimmung mit AINSWORTH möglichst kurze Leitungen und eine hohe viskose Dämpfung genannt.

In [47, 48] werden die bisherigen Ergebnisse weitestgehend bestätigt. Auch hier wird in Experimenten eine stehende Viertel-Welle in der Leitung beobachtet und kurze Leitungen sowie niedrige Versorgungsdrücke als stabilisierende Maßnahmen genannt.

OPITZ und BACKÉ schlagen in [76] entwickelte konstruktive Maßnahmen zum Abbau der stationären Strömungskräfte vor, welche zu einer Stabilisierung der entsprechenden Systeme führen sollen [99]. Beispielsweise kann der Ölstrahl durch eine spezielle Gestaltung der Kolben- und Gehäusegeometrie so umgelenkt werden, dass die stationären Anteile der Strömungskraft signifikant verringert werden.

Auch Untersuchungen zur Stabilität unter Last werden durchgeführt [6, 97]. Ein Beispiel dafür stellt das System in Abb. 1.2 als offene Steuerkette, also ohne die Positionsrückführung dar. Auch hier wird postuliert, dass bei Absenkung des Versorgungsdrucks die Stabilität erhöht wird.

Eine Absenkung des Versorgungsdrucks entspricht einem verringerten Volumenstrom. Die damit verbundene Erhöhung der Stabilität ist vermutlich dadurch begründet, dass die stationären Strömungskräfte und damit deren destabilisierende Wirkung mit abnehmendem Volumenstrom kleiner werden.

Somit ergibt sich in diesem Zusammenhang ein gegenteiliger Einfluss gegenüber der Instabilität aufgrund statischer Druckkräfte, welche vor Allem bei niedrigen Volumenströmen auftritt.

Kombination verschiedener Mechanismen

Motiviert durch die Untersuchungen von LEE und BLACKBURN, EZEKIEL SOWIE AINSWORTH werden ab den 1960er Jahren weitere Untersuchungen zum Einfluss der Leitungsdynamik auf die Stabilität verschiedener Ventile durchgeführt [34, 40, 53, 54, 120]. Ein besonderes Augenmerk gilt dabei den Druckregelventilen in Sitzventilbauweise. Da diese, wie die Untersuchungen von LUTZ [81] zeigen, auch ohne die Berücksichtigung der Leitungsdynamik zu Instabilitäten neigen können, beinhalten die entsprechenden Systeme im Allgemeinen eine Kombination der beiden bisher beschriebenen Instabilitätsmechanismen. Die Grundstruktur der untersuchten Systeme kann deshalb als

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = F_p(p) + F_H(q, \dot{q}) \quad (1.9)$$

$$+ \text{Druckdynamik} \quad (1.10)$$

$$+ \text{Leitungsdynamik} \quad (1.11)$$

dargestellt werden.

FUNK [34] konzentriert sich in seinen Untersuchungen auf die Wechselwirkung der Dynamik in einer hydraulischen Zuführleitung mit der Kolbenbewegung eines Druckbegrenzungsventils in Sitzventilbauweise. Neben der Leitungsdynamik werden die Druckaufbaudynamiken in zwei Kapazitäten zu beiden Seiten des Ventils modelliert. Durch die Berechnung einer analytischen Stabilitätsbedingung werden die Einflüsse der Systemparameter auf die Stabilität der Gleichgewichtslage abgeleitet. Kritische

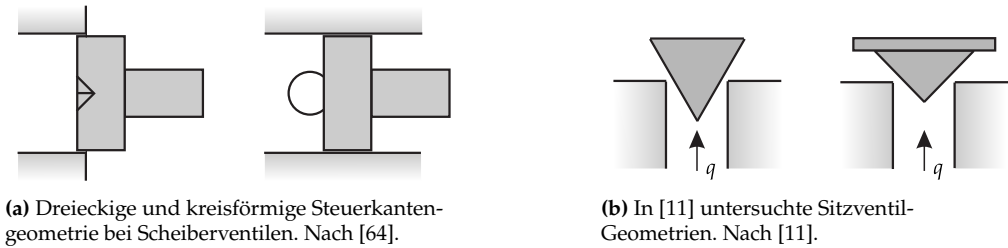


Abbildung 1.4: Unterschiedliche Ventilgeometrien zur Beeinflussung der Ventilcharakteristik.

Betriebspunkte entstehen dadurch, dass die Eigenfrequenz des Kolbens in der Nähe einer der Frequenzen der Schwingungsmoden der Zuführleitung liegt. Somit spielt auch hier die Leitungsgeometrie für die Stabilität des Gesamtsystems eine wesentliche Rolle. Aufbauend auf der Arbeit von FUNK untersucht KASAI ein Sitzventil unter Berücksichtigung der Leitungsdynamiken sowohl in der Zuführung zum Ventil als auch in einer dem Ventil nachgeschalteten Leitung [53, 54]. In Übereinstimmung mit den meisten Studien, welche keine Leitungsdynamik berücksichtigen [78, 82, 117, 127], wird eine höhere Federsteifigkeit und ein höherer Volumenstrom als stabilisierend identifiziert. Dahingegen steht die in [120] postulierte Aussage einer Stabilisierung durch eine erhöhte Kolbenmasse im Widerspruch zu diesen Studien. Dies bestätigt die Tatsache, dass allgemein gültige Aussagen zu Einflüssen von Parametern auf die Stabilität der Gleichgewichtslage nicht möglich sind.

Einfluss von Steuerkantengeometrie und Leckage

Die bis hierhin vorgestellten Untersuchungen zu Schieberventilen gehen zumeist von einer rechteckigen Steuerkantengeometrie aus, was eine lineare Ventilcharakteristik (Zusammenhang zwischen Kolbenverschiebung und Durchflussstrom) zur Folge hat. MANRING und JOHNSON untersuchen systematisch verschiedene Steuerkantengeometrien und deren Einfluss auf die Stabilität eines Druckminderventils [87]. Die Autoren postulieren, dass rechteckige und kreisförmige Geometrien eher zu instabilem Verhalten führen als dreieckige oder rautenförmige. Diese Untersuchungen werden im Hinblick auf dreieckige Steuerkantengeometrien von KREMER bestätigt [68]. Stabile Gleichgewichtslagen werden demnach durch möglichst flache Ventilcharakteristiken gewährleistet.

Eng zusammenhängend mit der Fragestellung nach der Steuerkantengeometrie ist das Leckageverhalten der Ventile. Modelle für das Durchflussverhalten unter Berücksichtigung von Leckage werden in [63] entwickelt und ein signifikanter Einfluss auf die Stabilität der Gleichgewichtslage festgestellt. In diesem Zusammenhang sei auch [64] erwähnt.

Die oben erwähnte Ventilcharakteristik kann auch bei Sitzventilen durch eine Variation der Kolben- bzw. Gehäusegeometrie beeinflusst werden. In [11] werden mittels CFD-Simulationen zwei unterschiedliche Geometrien (siehe Abb. 1.4b) miteinander verglichen und daraus Empfehlungen für die Ventilgestaltung abgeleitet. Die Autoren kommen zu dem Schluss, dass durch Geometrievariationen neben der Ventilcharakteristik auch die hydrodynamische Strömungskraft beeinflusst wird. Beide Größen beeinflussen die Stabilität in einem relevanten Maße.

1.2.2 Globale Stabilität und nichtlineare Dynamik

Hydraulische Ventile beinhalten im Allgemeinen signifikante Nichtlinearitäten, welche das dynamische Verhalten maßgeblich beeinflussen. Die wichtigsten sind turbulente Volumenströme sowie nicht-glatte Schaltübergänge und Ventilanschläge. Um das dynamische Verhalten in einem für die reale Anwendung ausreichenden Maße beschreiben zu können, ist im Allgemeinen eine lokale Betrachtung nicht genügend. In diesem Abschnitt werden deshalb Untersuchungen zur globalen Stabilität, zur Phasenraumstruktur und zur nichtlinearen Dynamik vorgestellt. Die Ergebnisse werden fast ausschließlich mittels numerischer Zeitintegrationen gewonnen. Die für die Praxis relevanten Fragestellungen beziehen sich auf Begrenzungen von Einzugsgebieten stabiler Lösungen und auf das Bifurkationsverhalten. Im Gegensatz zum vorherigen Abschnitt spielen die Ventilbauarten hier eine wesentliche Rolle.

Sitzventile

Ein Stabilitätsverlust bei Sitzventilen führt oft zu Stößen zwischen Ventilkolben und Ventilsitz, was mindestens zu einer erheblichen Lärmbelastung und in vielen Fällen auch zur Schädigung der Ventile führt. Dies ist vermutlich der Grund dafür, dass sich die meisten Publikationen zur nichtlinearen Dynamik von hydraulischen Ventilen auf Sitzventile beziehen. Sitzventile, welche durch die Gleichungen (1.1) und (1.2) beschrieben werden und damit einem einfachen System dritter Ordnung entsprechen, werden unter Einbeziehung einer Stoßabbildung in [9, 21, 43, 78] behandelt. Die Ventilgeometrie entspricht der in Abb. 1.4b links.

Durch Vernachlässigung der Federvorspannung lassen sich für dieses System analytische Stabilitätskriterien in sehr kompakter Form herleiten [78]. Weiterhin ist es möglich, durch eine Zentrumsmannigfaltigkeits-Reduktion das System in Normalform zu transformieren und damit die stationären periodischen Lösungen in der Nähe des Hopf-Bifurkationspunkts zu approximieren. An dieser Stelle enden die analytischen Untersuchungen zur Analyse der Sitzventile.

Alle weiteren Ergebnisse werden mittels numerischer Zeitintegrationen in Verbindung mit einer Event-Detektionsroutine berechnet. Stationäre Lösungen werden mittels

numerischer Pfadverfolgungsalgorithmen verfolgt und deren Stabilität entweder durch den größten Lyapunov-Exponenten [78] oder durch die Berechnung der Floquet-Multiplikatoren [43] berechnet. Dabei ist zu beachten, dass eventuelle Stöße in der linearisierten Abbildung durch eine entsprechende Sprungmatrix berücksichtigt werden müssen, vgl. [91].

Als Bifurkationsparameter dient der von der Pumpe geförderte und damit auch der das Ventil durchströmende Volumenstrom q . Die globale Dynamik kann folgendermaßen zusammengefasst werden: Wie bereits in Abschnitt 1.2.1 gezeigt, ist die Gleichgewichtslage für große Volumenströme stabil. Bei Verringerung des Volumenstroms findet der Stabilitätsverlust durch eine superkritische Hopf-Bifurkation statt [43, 78]. Hier wird also die Gleichgewichtslage instabil und gleichzeitig entsteht ein stabiler Grenzzyklus. Wird der Volumenstrom weiter verringert, wächst die Amplitude der Grenzzyklusschwingung an, bis die Schwingung den Ventilsitz „streift“. Dies entspricht einem Stoß zwischen Ventilkolben und Ventilsitz mit verschwindender Geschwindigkeit. Man spricht in diesem Fall auch von einer „streifenden“ Bifurkation (engl.: Grazing bifurcation). Dieser Bifurkation folgt bei weiter sinkendem Volumenstrom ein Abschnitt sehr komplexen dynamischen Verhaltens, der quasiperiodisches und chaotisches Verhalten einschließt. Nach einem Abschnitt, der von einperiodischen Stoßschwingungen dominiert wird, führen bei sehr kleinen Volumenströmen mehrere aufeinanderfolgende Periodenverdopplungen wieder zu chaotischem Verhalten und insbesondere, wie von den Autoren jedoch nur vermutet wird, zu dem beispielsweise in [13] beschriebenen Phänomen des „Chattering“, bei dem in endlicher Zeit unendlich viele Stöße stattfinden. In diesem Zusammenhang sei auch auf [21] verwiesen.

Für die praktische Anwendung ist vor Allem interessant, dass in der Analyse keine das Einzugsgebiet der stabilen Gleichgewichtslage begrenzenden instabilen Lösungen gefunden wurden, weil - zumindest in der betrachteten Parameterregion - der Stabilitätsverlust über eine superkritische, und nicht über eine subkritische Hopf-Bifurkation stattfindet.

Als Beispiel für einen Anwendungsfall für hydraulische Sitzventile kann das in [26] modellierte und in [27] analysierte System eines hydraulischen Dämpfers genannt werden. Auch in diesem System werden komplexe Schwingungsphänomene beschrieben. Bazsó und Hős liefern den experimentellen Nachweis für die reichhaltige Systemdynamik von Sitzventilen [9]. Das Bifurkationsverhalten (Stabilitätsverlust via Hopf-Bifurkation, komplexe Dynamik bei niedrigem Volumenstrom) kann im Experiment qualitativ bestätigt werden, obwohl in den Experimenten eine starke Kopplung mit der Leitungsdynamik beobachtet wird (diese findet in den Modellen in [43, 78] keine Berücksichtigung). Die Kopplung folgt aus der Beobachtung, dass nach dem Stabilitätsverlust die Schwingungsfrequenz über einen weiten Parameterbereich konstant bleibt

und diese außerdem der Frequenz der niedrigsten Leitungsmode (in diesem Fall etwa 220 Hz) entspricht.

Einfluss der Leitungsdynamik

In den ersten numerischen und experimentellen Analysen zur nichtlinearen Dynamik von Sitzventilen unter Berücksichtigung der Leitungsdynamik wird beobachtet, dass bei langen Zuführleitungen auch höhere Schwingungsmoden in der Leitung angeregt werden können [39–41]. Ein weiteres Ergebnis dieser Studien ist die bei bestimmten Parameterwerten mögliche Koexistenz einer stabilen Gleichgewichtslage und eines stabilen Grenzzyklus, bei dem Stöße zwischen Ventilkolben und Ventilsitz stattfinden. Ebenso werden chaotische Schwingungen beschrieben, welche aus einer Reihe von Periodenverdopplungen hervorgehen.

Obwohl auch höhere Moden angeregt werden können, ist im Allgemeinen die niedrigste Schwingungsmode der Leitung in der praktischen Anwendung als die kritische Mode anzusehen. Aus dieser Argumentation heraus kann unter der Annahme, dass die dominante Schwingungsmode in der Leitung eine stehende Viertel-Welle ist, mittels einer Kollokationsmethode ein reduziertes Modell der Leitung entwickelt werden [44]. Das System fünfter Ordnung, bestehend aus diesem reduzierten Leitungsmodell und der Ventildynamik, kann sehr rechenzeiteffizient untersucht werden [10]. In der Analyse dieses Systems zeigt sich, dass nun zwei unterschiedliche Instabilitätsmechanismen auftreten. Für kurze Leitungen überqueren die Realteile des gleichen komplex konjugierten Eigenwertpaares die Imaginärachse wie bei den Systemen ohne Leitungsdynamik. Die Autoren nennen dies die Ventilinstabilität (engl.: *valve-only instability*). Für längere Leitungen erfolgt der Stabilitätsverlust über ein anderes komplex konjugiertes Eigenwertpaar. Diese Art der Instabilität wird als Viertel-Wellen-Instabilität (engl.: *quarter-wave-instability*) bezeichnet.

Die Variation der Leitungslänge offenbart weitere interessante Phänomene. Während bei sehr kurzen und langen Leitungen der Stabilitätsverlust bei Verringerung des Volumenstroms an einer superkritischen Hopf-Bifurkation stattfindet, ändert sich bei mittleren Leitungslängen die Struktur des Bifurkationsdiagramms und die Hopf-Bifurkation wird subkritisch. Dies bedeutet, dass das Einzugsgebiet der stabilen Gleichgewichtslage von einem instabilen Grenzzyklus beschränkt wird. Der Bereich, in dem das Einzugsgebiet beschränkt wird, reicht teilweise bis zu Volumenströmen, die dreimal so groß sind wie der Volumenstrom, an dem die Hopf-Bifurkation stattfindet, was in der praktischen Anwendung zu nicht vernachlässigbaren Problemen führen kann, falls in der Ventilauslegung lediglich eine lokale Stabilitätsanalyse durchgeführt wird.

Im Zusammenhang mit der Modellbildung, Modellreduktion und dynamischen Analyse des Ventil-Leitungs-Systems sei auch [45] erwähnt.

Schieberventile

Die globale Analyse von Systemen, die Schieberventile beinhalten, findet bis heute sehr viel weniger Beachtung als die Analyse von Sitzventilen.

Um die Jahrtausendwende beschäftigen sich einige Publikationen mit der Frage nach der sogenannten robusten Stabilität. Der Terminus Robustheit bezieht sich dabei auf den Abstand zur Stabilitätsgrenze. Weil in hydraulischen Systemen der Stabilitätsverlust in den meisten Fällen über eine Hopf-Bifurkation stattfindet, kann die Robustheit durch die Berechnung des Abstands zum nächstgelegenen Hopf-Bifurkationspunkt im n -dimensionalen Parameterraum gemessen werden. Die Methode wird zunächst an einem hydraulischen Positioniersystems (siehe Abb. 1.2) erfolgreich getestet [71, 72] und findet daraufhin auch Anwendung bei anderen, teilweise sehr viel komplexeren hydraulischen Systemen [73, 74, 111–113]. Die Methode beruht streng genommen ausschließlich auf der Analyse der lokalen Stabilität, weil keine Einzugsgebiete in der Berechnung der Robustheit berücksichtigt werden. Weil jedoch in ausreichender Entfernung zur Stabilitätsgrenze das Einzugsgebiet in den meisten hydraulischen Anwendungen dem gesamten Phasenraum entspricht, ist die Erwähnung in diesem Abschnitt aus einer praktischen Perspektive heraus gerechtfertigt.

Globale Untersuchungen zur Stabilität und Dynamik von Kolbenschieberventilen mit Druckrückführung werden in vorhandenen Publikationen mittels numerischer Zeitsimulationen [46, 63] und mit dem Verfahren der harmonischen Balance durchgeführt [46, 68]. Mit letzterem gelingt die Approximation selbsterregter Schwingungsamplituden, sowohl bei rein viskoser Dämpfung [46] als auch unter Berücksichtigung quadratischer und Coulomb'scher Reibung [68]. Für den Fall nichtlinearer Reibung kann für bestimmte Parameterbereiche die Existenz mehrerer koexistierender stabiler Lösungen und damit eine Begrenzung des Einzugsgebiets der stabilen Gleichgewichtslage nachgewiesen werden. Die entsprechenden Untersuchungen berücksichtigen ausschließlich das Ventilverhalten bei offener Steuerkante und gelten deshalb sowohl für Sitz- als auch für Kolbenschieberventile. Der Einfluss von Stößen bei Sitzventilen oder einer Überschreitung der Steuerkante bei Schieberventilen wird jedoch nicht betrachtet, weshalb die Untersuchungen in einem gewissen Sinne einen lokalen Charakter behalten.

Im Gegensatz zu Sitzventilen treten komplexere Schwingungsphänomene wie Periodenverdopplungen oder chaotisches Verhalten bei Schieberventilen nur dann auf, wenn eine äußere Anregung auf den Ventilkolben wirkt [46, 63]. Insbesondere bei großen Anregungsamplituden wird hier komplexes dynamisches Verhalten beobachtet [46]. Das Bifurkationsverhalten wird dabei maßgeblich durch die Steuerkantengeometrie und das Leckageverhalten der Ventile beeinflusst [63]. Die praktische Relevanz dieser Untersuchungen besteht darin, dass Schieberventile oftmals mit einem hochfrequenten periodischen Signal angeregt werden, um unerwünschte Effekte Coulomb'scher Reibung

zu unterdrücken. Für weitere Analysen zum Bifurkationsverhalten und zur dynamischen Analyse von Schieberventilen sei auch [131, 132] erwähnt.

1.2.3 Asymptotische Methoden

Wie die vorgestellten Publikationen im vorigen Abschnitt zeigen, ist es mit heutigen Methoden der numerischen Zeitintegration, insbesondere unter Einbeziehung von Event-Detektionsalgorithmen, sowie mit Methoden der numerischen Pfadverfolgung möglich, umfassende dynamische Analysen hydraulischer Steuerungen vorzunehmen. Trotzdem ist es aufgrund einer ausgeprägten Anzahl von Systemparametern oft herausfordernd, ein fundiertes Systemverständnis zu erlangen. Hierzu sind analytische Approximationen, welche vor Allem auf qualitative Aussagen abzielen, oftmals geeigneter. Das dafür erforderliche Verständnis über verschiedene Zeitskalen und Größenordnungen kann außerdem bei Fragen der Modellreduktion und der Regelung dieser Systeme hilfreich sein.

Analytische Approximation und Analyse der nichtlinearen Dynamik

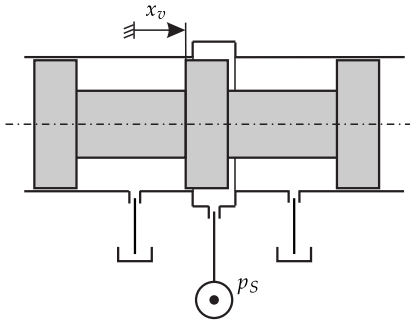
Im Zusammenhang mit der globalen Dynamik stellen Stöße bei Sitzventilen oder Schaltübergänge bei Schieberventilen im Allgemeinen große Nichtlinearitäten dar. Dies ist der Hauptgrund, weshalb die Anwendungsmöglichkeiten asymptotischer Methoden zur Approximation der nichtlinearen Dynamik solcher Systeme sehr beschränkt sind. Eine Anwendungsmöglichkeit, um die globale Dynamik des Systems in Abb. 1.5a zu untersuchen, welche aufgrund einer Instabilität durch hydrodynamische Strömungskräfte zu selbsterregten Schwingungen neigen, wird von FOSTER und KULKARNI gefunden [33].

Die Systemdynamik kann unter Annahme eines inkompressiblen Fluids mit der Strömungskraft aus Gl. (1.3) und mit der Relation $v \propto q/x$ (siehe z. B. [99]) strukturell durch

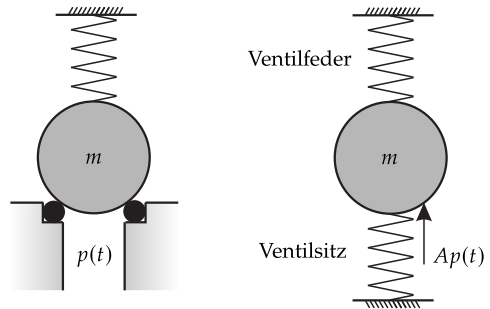
$$\ddot{x}_v + \frac{q^2}{x_v} = \varepsilon f_{nl}(x_v, \dot{x}_v, q, \dot{q}) \quad (1.12)$$

$$q = x_v \operatorname{sign}(x_v) + \varepsilon q_{nl}(x_v) \quad (1.13)$$

dargestellt werden. Dabei ist ε ein kleiner Parameter und die Vorzeichenfunktion $\operatorname{sign}(x)$ durch Gl. (4.8) definiert. Der Rückstellterm in Gl. (1.12) entspringt dem stationären Anteil der hydrodynamischen Strömungskraft F_H . Die nichtlinearen Kräfte f_{nl} und Volumenströme q_{nl} resultieren aus einer sehr detaillierten Modellierung des Strömungsverhaltens (verschiebungs- und volumenstrom-abhängige Durchflusskoeffizienten, welche durch experimentelle Untersuchungen motiviert sind) über die Steuerkanten. Da die Grund-



(a) Schieberventil, welches von FOSTER und KULKARNI untersucht wird. Nach [33].



(b) Sitzventil, welches durch eine Druckkraft zu Schwingungen angeregt wird. System (links) und Modell (rechts). Nach [52].

Abbildung 1.5: Gegenstände asymptotischer Untersuchungen.

lösung für $\varepsilon = 0$ eine ungedämpfte harmonische Schwingung ist, kann das System sehr einfach in ein System in Standardform (vgl. Abschnitt 2.1) transformiert und darauf das Mittelwertbildungsverfahren angewendet werden [33]. In den Ergebnissen wird das mögliche Vorhandensein mehrerer koexistierender stationärer Lösungen aufgezeigt. Die Approximationen der Schwingungsamplituden selbsterregter Schwingungen weisen eine sehr gute Übereinstimmung mit experimentellen Untersuchungen auf.

Im weiteren Verlauf der Untersuchungen gelingt es den Autoren, die Einflüsse eines kompressiblen Fluids, von Coulomb'scher Reibung und einer nicht-kritischen Überdeckung in das asymptotische Verfahren zu integrieren und die Auswirkungen auf die Phasenraumstruktur aufzuzeigen. Weil das Ventil pro Schwingungsperiode zweimal die Steuerkante öffnet, ist im kompressiblen Fall die Frequenz der selbsterregten Schwingungen nicht mit $1/4$, sondern mit $1/8$ der Wellenlänge der Leitung assoziiert. Im weiteren Verlauf der Untersuchungen wird zusätzlich die Stabilität unter Last untersucht (Entsprechend Abb. 1.2 ohne die Rückführschleife). Die Systemdynamik wird in diesem Fall durch die Gleichungsstruktur

$$\ddot{x}_v + \frac{q^2}{x_v} = \varepsilon f_{nl}(x_v, \dot{x}_v, q, \dot{q}) \quad (1.14)$$

$$q = x_v + \varepsilon q_{nl}(x_v) \quad (1.15)$$

$$\ddot{u} + \omega^2 u = q \quad (1.16)$$

abgebildet. Weil in der Grundlösung die Verbraucher- und die Ventildynamik entkoppelt sind, gelingt auch hier die Approximation der Dynamik mit Hilfe des Mittelwertbildungsverfahrens. Der Rückstellterm in der Verbraucherdynamik entspringt dabei keiner Feder, sondern der Berücksichtigung der Fluidkompressibilität. Die Variable

$u = \dot{x}$ entspricht der Kolbengeschwindigkeit des Verbrauchers, vgl. Abb. 1.2. Auch hier enthüllen die analytischen Näherungen abhängig von der Parameterkombination bis zu drei koexistierende stationäre Lösungen. Es werden gute Übereinstimmungen mit experimentellen und numerischen Untersuchungen erzielt.

Instabilitäten bei Druckbegrenzungsventilen treten ausschließlich bei geöffnetem Ventil auf, da nur hier eine beidseitige Kopplung zwischen Druck- und Ventildynamik besteht. Jedoch treten auch bei geschlossenem Ventil interessante dynamische Phänomene auf, wenn eine periodische Erregung auf den Ventilkolben wirkt, vgl. Abb. 1.5b Diese Phänomene werden in zahlreichen Studien untersucht [5, 22, 52, 83, 93, 94].

Motiviert werden diese Studien durch eine Untersuchung, in der festgestellt wird, dass bei periodischem Verlauf des Systemdrucks der tatsächliche Öffnungsdruck eines Druckbegrenzungsventils von der Anregungsfrequenz abhängig ist, falls die Ventilfeeder als Kontinuum modelliert wird [52]. Der gewünschte Öffnungsdruck kann somit sehr stark vom tatsächlichen abweichen. Das entsprechende System und das Modell sind in Abb. 1.5b abgebildet. Der O-Ring im Ventilsitz wird als lineare Feder modelliert.

Wird der O-Ring als Feder mit zusätzlicher kubischer Steifigkeit modelliert, führt dies zu koexistierenden stabilen Lösungen, welche in der praktischen Anwendung zusätzlich problematisch sein können. Erste Untersuchungen dazu erfolgen mit dem Verfahren der harmonischen Balance [22]. In der Folge adressieren NAYFEH und BOUGUERRA sowie NAYFEH, NAYFEH und MOOK dieses Problem, indem sie mit einem Multiple-Scales Ansatz die sich ergebenden sub- und superharmonischen Resonanzen beschreiben [93, 94]. Die schnelle Zeitskala wird durch die Anregungsfrequenz der Druckschwingungen eingeführt. In der Modellierung wird ein Abheben des Ventilkolbens vom Ventilsitz ausgeschlossen. Die Analysen beziehen sich somit ausschließlich auf den Fall eines geschlossenen Ventils. Eine Wechselwirkung mit der Druckdynamik wird ebenso nicht modelliert.

In darauf aufbauenden Untersuchungen werden zusätzlich interne Resonanzen detektiert [5] sowie das Bifurkationsverhalten der periodischen Lösungen weiter untersucht [83]. Auch der Vergleich mit numerischen Simulationsergebnissen findet statt [83].

Ein ähnliches unerwünschtes Phänomen wie der frequenzabhängige Öffnungsdruck von Druckbegrenzungsventilen wird bei Druckregelventilen beobachtet, die hochfrequent angeregt werden [69, 70]. Unter der Annahme, dass die Erregerfrequenz um eine Größenordnung über der Eigenfrequenz des Systems liegt, werden asymptotische Näherungen für die langsame Bewegung des Systems ermittelt. Hier ist zu beobachten, dass sich der zu regelnde Systemdruck durch die Anregung erhöht. Dies kann als Beispiel für ein System betrachtet werden, bei dem eine hochfrequente Anregung die langsame Systemdynamik in einer unerwarteten Art und Weise beeinflusst. In diesem Zusammenhang seien auch [31, 116] erwähnt.

Modellreduktion durch Elimination der schnellen Dynamik

Eine übliche Herausforderung bei der numerischen Simulation hydraulischer Systeme ist das Auftreten sehr hoher Frequenzen aufgrund von Druckaufbaudynamiken in kleinen Kapazitäten oder aufgrund sehr schneller Ventildynamiken, vor Allem im Zusammenhang mit Servoventilen. Dies führt zu numerisch steifen Systemen und damit zu einem hohen Rechenaufwand. Es gibt unterschiedliche Ansätze, dieser Herausforderung zu begegnen. Die einfachste Möglichkeit besteht darin, die entsprechende schnelle Druckaufbaudynamik [33, 97] oder die schnelle Kolbendynamik [69, 71, 104] zu vernachlässigen. Die Kolbendynamik wird vor Allem im Zusammenhang mit Regelungsaufgaben oftmals vernachlässigt [36, 38, 42, 51, 85, 90, 121]. Die Vernachlässigung der Druckaufbaudynamik entspricht der Modellierung eines inkompressiblen Fluids. Die Reduktionen sind vor Allem bei großen zu aktuiierenden Kräften, beispielsweise bei großen zu bewegendenden Massen, gerechtfertigt. Die algebraischen Gleichungen in den entstehenden Differential-algebraischen Gleichungssystemen (DAEs) werden in der Regel analytisch aufgelöst, wodurch nicht-steife Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen entstehen. Die analytische Auflösung ist jedoch nicht immer möglich und oftmals sehr aufwendig.

Eine sehr effiziente und nicht systemspezifische Vorgehensweise, die auftretenden DAEs zu lösen, wird in [15, 102, 103] vorgestellt. Die Autoren schlagen vor, steife Differentialgleichungen durch algebraische Nebenbedingungen mit zweiseitigen oder einseitigen Bindungen zu ersetzen. Letzteres führt auf lineare Komplementaritätsprobleme, welche durch etablierte Standard-Algorithmen (z. B. den LEMKE-Algorithmus [77]) gelöst werden können. Beispiele für einseitige Bindungen in der Hydraulik sind z. B. Rückschlagventile, Kolben-Anschläge von Zylindern oder Ventilen und der Druckaufbau in einem Volumen unter Berücksichtigung von im Öl gelöster Luft. Durch die Vorgehensweise kann eine signifikante Rechenzeiterparnis erzielt werden.

Ein alternatives Vorgehen zur Berechnung der durch eine inkompressible Modellierung entstehenden DAEs bei hydraulischen Systemen wird in [17] vorgestellt. Die Vorgehensweise beruht auf einer einfachen iterativen Berechnung der Drücke in den vernachlässigten Kapazitäten. Die Rechenzeiterparnisse sind jedoch nur moderat.

Die Vernachlässigung der schnellen Dynamik ist für die Simulation transienter Vorgänge sicher die effizienteste Methode, um Rechenzeit einzusparen. Im Hinblick auf die Analyse der Stabilität und des dynamischen Verhaltens muss jedoch beachtet werden, dass im Allgemeinen die schnelle Dynamik für Stabilitätsprobleme verantwortlich ist [84]. Im Zusammenhang mit diesen Fragestellungen ist somit ein anderer Ansatz erforderlich.

Aus der Sichtweise der nichtlinearen Dynamik können Systeme, in denen unterschiedliche Zeitskalen eine Rolle spielen, häufig als singular gestörte Systeme verstanden und

formuliert werden. Dies bringt den Vorteil mathematischer Werkzeuge, mit denen eine asymptotische Analyse und in vielen Fällen eine Modellreduktion durch Elimination der schnellen Dynamik möglich ist. Diese Werkzeuge schließen ebenso Fehlerabschätzungen und Aussagen zur Stabilität reduzierter Systeme mit ein [30]. Weiterhin können Effekte der schnellen, jedoch nicht explizit modellierten Dynamik in den reduzierten Modellen für die langsame Dynamik berücksichtigt werden [56].

Reduzierte Modelle für hydraulische Systeme werden mit Methoden der singulären Störungsrechnung in einer Reihe von Studien entwickelt [57, 80, 86, 100, 108, 109].

In [109] wird ein hydraulisches Positioniersystem ähnlich dem in Abb. 1.2, jedoch mit einem zweistufigen statt einem einstufigen Servoventil, untersucht. Die Systemdynamik wird durch ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem zehnter Ordnung beschrieben, welches mittels der singulären Störungsrechnung auf vier Zustände reduziert wird. Die kleinen Parameter sind die Kapazitäten, die Kolbenmasse des zweistufigen Servoventils und die Konstanten des zugehörigen Steuermotors. Die langsame Dynamik findet auf einer nicht-stetigen langsamen Mannigfaltigkeit statt (Die Unstetigkeit entsteht in der Mittelstellung des Servoventils). Die erforderlichen Anforderungen an die Differenzierbarkeit werden trotzdem gewährleistet. Dies gelingt durch eine abschnittsweise Betrachtung des Phasenraums. Mit einem Störungsansatz gelingt weiterhin die analytische Approximation des reduzierten Systems unter einer periodischen Referenztrajektorie. Weil die langsame Mannigfaltigkeit unstetig ist, wird die langsame Dynamik an dieser Stelle von schnellen transienten Vorgängen unterbrochen. Insgesamt wird durch die asymptotische Betrachtung ein sehr umfangreiches Verständnis für die Systemdynamik gewonnen.

Ähnliche Untersuchungen finden sich in [86, 108] für ein System vierter Ordnung, in dem die Servoventildynamik von vornherein vernachlässigt wird.

In [80] wird mittels der singulären Störungsrechnung ein reduziertes Modell einer hydraulischen Getriebebetätigung hergeleitet. Die schnelle Zeitskala wird durch ein Dither-Signal eingeführt, welches dem Servoventil aufgeprägt ist. Die schnellen Variablen sind der Druck in einer kleinen Kapazität sowie der Druck- und Volumenstromverlauf in einer hydraulischen Leitung. Weil die schnelle Dynamik lediglich durch die Grundlösung für $\varepsilon = 0$ approximiert wird, besteht formal kein Unterschied zur einfachen Vernachlässigung der schnellen Variablen. Allerdings wird durch die Methodik der singulären Störungsrechnung der notwendige Stabilitätsnachweis für die Reduktion erbracht, wodurch sicher gestellt werden kann, dass die Reduktion immer funktioniert. Dass die Reduktion kleiner Kapazitäten nicht immer möglich ist, wird in [100] gezeigt. Für ein Positioniersystem mit einem zusätzlichen hydraulischen Widerstand zwischen Servoventil und Verbraucher erfüllen nur eine von drei schnellen Variablen die Stabilitätsanforderungen, welche für eine Reduktion notwendig sind. Das Ziel der

Modellreduktion besteht darin, bei der numerischen Simulation größere Schrittweiten zu realisieren und damit eine Rechenzeiterparnis zu erzielen.

Die schnellen Variablen können auch mittels eines Multiple-Scales Ansatzes approximiert werden [57].

Mit Ausnahme der Untersuchungen in [57] wird in den in diesem Abschnitt vorgestellten Studien für die Approximation der schnellen Dynamik lediglich die Grundlösung ($\varepsilon = 0$) genutzt. Für viele Anwendungen ist dies ausreichend. An dieser Stelle sei jedoch angemerkt, dass das reduzierte System ($\varepsilon = 0$) strukturell instabil ist [119], weshalb im Allgemeinen eine Approximation der schnellen Variable mindestens bis zur Größenordnung $\mathcal{O}(\varepsilon)$ notwendig ist.

Singuläre Störungsrechnung in der Regelung

Methoden der singulären Störungsrechnung lassen sich auch in der Ableitung von Regelungsstrategien vorteilhaft ausnutzen, was umfassend in der Literatur beschrieben ist [59, 61, 62]. In diesem Zusammenhang gibt es prinzipiell zwei Möglichkeiten. Im einfachsten Fall ist die schnelle Dynamik global asymptotisch stabil und die Sollvorgaben der Systemausgänge befinden sich im Frequenzbereich der langsamen Dynamik. Dann ist es ausreichend, die schnelle Dynamik zu reduzieren und eine Regelung auf Basis der langsamen Dynamik zu entwerfen [18, 19, 25, 58, 122, 123].

Dies erfolgt z. B. in [25], wo eine nichtlineare Regelung für ein Positioniersystem nach Abb. 1.2 (Die direkte Positionsrückführung wird entsprechend durch das nichtlineare Regelungskonzept ersetzt) entworfen wird. Als kleine Parameter werden die Kapazitäten eingeführt. Die Regelungsstrategie stellt sich als sehr vorteilhaft in Bezug auf Robustheit und die Anzahl der benötigten Sensoren heraus.

Eine sehr ähnliche Reduktionsmethodik für das selbe System wird in [121] vorgenommen. Auch hier werden die Kapazitäten als kleine Parameter eingeführt und die schnelle Dynamik im Folgenden vernachlässigt, was mit dem Stabilitätsnachweis auf Basis der singulären Störungsrechnung argumentiert wird.

Ein ähnliches Regelungskonzept für ein Positioniersystem, welches als Pumpensteuerung (im Gegensatz zu einer Ventilsteuerung) ausgelegt ist, wird in [122, 123] hergeleitet. Die Studie orientiert sich stark an [25]. Auch hier dienen die Kapazitäten als kleine Parameter und die schnelle Dynamik wird nicht explizit im Regelgesetz berücksichtigt. In [58] wird die Ventildynamik eines Schieberventils in einem aktiven Dämpfersystem mittels der singulären Störungsrechnung reduziert. Durch die Reduktion wird die Entwicklung eines nichtlinearen adaptiven Reglers wesentlich vereinfacht. Die Modellierung des Systems bezieht sich auf [3]. Auch hier wird lediglich ein Regelgesetz anhand der langsamen Dynamik formuliert. Die selbe Strategie zur Reduktion der schnellen Ventildynamik wird in [18, 19] angewendet.

Im Zusammenhang mit den eingangs erwähnten zwei Möglichkeiten, die singuläre Störungsrechnung in der Entwicklung von Regelungskonzepten einzubinden, besteht die zweite Möglichkeit darin, die schnelle Dynamik explizit zu berücksichtigen. Dies geschieht durch Superposition eines schnellen und eines langsamen Regelgesetzes und ist zumeist dann notwendig, wenn die Bandbreite des gewünschten Systemausgangs über die der langsamen Dynamik hinausgeht, oder wenn die langsame Mannigfaltigkeit nicht stetig ist (vgl. [109]) und somit beim Übergang eine schnelle Grenzschicht entsteht, für die die Berücksichtigung der schnellen Dynamik notwendig ist. Auch wenn keine dieser beiden Fälle zutrifft, kann die Performanz der Regelung durch die Berücksichtigung der schnellen Dynamik in jedem Fall verbessert werden.

Letzteres ist in [84, 85] der Fall. Dort wird basierend auf den Untersuchungen in [108] ein nichtlineares Regelungskonzept für ein Positioniersystem abgeleitet. Die Systemdynamik wird durch ein Modell vier Zustände beschrieben. Die schnelle Dynamik entsteht durch kleine Kapazitäten. Das reduzierte System entspricht damit dem Fall eines inkompressiblen Fluids. In der Entwicklung der Regelung werden die langsame und die schnelle Dynamik separat betrachtet, was sich im Hinblick auf die Komplexität des Regelgesetzes als vorteilhaft erweist. Die Idee für diese Art der Regelung geht auf [60] zurück. Die langsame Dynamik enthält die wesentlichen Nichtlinearitäten, welche mittels der Eingangs-Ausgangs-Linearisierung kompensiert werden. Die schnelle Dynamik wird durch einen einfachen Proportionalregler geregelt.

Auch in [51] wird die Regelung eines hydraulischen Positioniersystems betrachtet, welches durch zwei langsame und zwei schnelle Zustandsvariablen beschrieben wird. Die Regelung der langsamen Dynamik beinhaltet eine aktive Störungsunterdrückung und ist eng an die Strategie in [121] angelehnt. Die Regelung der schnellen Dynamik erfolgt durch einen Proportionalregler.

1.3 Zielsetzung der Arbeit

Hydraulische Ventilsteuerungen werden bevorzugt in Systemen eingesetzt, in denen hochdynamische und präzise Vorgänge wichtig sind. Eine ausgeprägte Anzahl an Parametern sowie mögliche Stabilitätsprobleme und große systeminhärente Nichtlinearitäten erschweren den Entwicklungsprozess solcher Steuerungen. Um möglichst optimale Systeme zu entwickeln, ist ein umfassendes Verständnis für die dynamischen Prozesse erforderlich. Während numerische Lösungsverfahren auch für nicht-glatte Systeme längst in entsprechenden Simulationsprogrammen etabliert sind und helfen können, quantitative Berechnungen durchzuführen, besteht ein Defizit im Bereich der analytischen Näherungslösungen, welche besonders geeignet dafür sind, ein qualitatives Verständnis für die Systemdynamik zu erlangen.

Das Hauptziel dieser Arbeit besteht deshalb darin, eine Methodik für die Berechnung analytischer Näherungslösungen für die selbsterregten und erzwungenen Schwingungen der selbstregelnden hydraulischen Ventilsteuerungen zu entwickeln, welche Schieberventile beinhalten.

Dieses Ziel wird im Folgenden unter Berücksichtigung bestehender Forschungslücken und praktischer Relevanz weiter konkretisiert. Die Eingrenzung auf selbstregelnde Steuerungen ergibt sich aus einer besonderen Relevanz für diese Systeme: Selbstregulierungsmechanismen sind im Kontext hydraulischer Steuerungen Standard und in einer Vielzahl von Ventilen und Schaltungen enthalten, wie z. B. in Druckregelventilen, Stromregelventilen oder druckgeregelten Verstellpumpen. Damit ist in diesen Systemen der Instabilitätsmechanismus aufgrund einer Kopplung durch statische Druckkräfte in jedem Fall potentiell vorhanden. Im Gegensatz zu hydrodynamischen Strömungskräften sind die statischen Druckkräfte zur Funktionserfüllung erforderlich und können nicht kompensiert werden. Außerdem ist die Instabilität durch hydrodynamische Strömungskräfte auch deshalb von geringerer praktischer Relevanz, weil diese vor Allem bei großen Volumenströmen auftritt, welche jedoch in der Praxis aufgrund hoher Strömungsverluste möglichst vermieden werden.

Die Eingrenzung auf Schieberventile ergibt sich aus dem Literaturüberblick. Aus diesem wird offenbar, dass, während Sitzventile bereits sehr ausführlich untersucht worden sind, ein Defizit in der Analyse der globalen Dynamik von Schieberventilen besteht. Mit Hilfe der entwickelten Methodik zur analytischen Beschreibung der Ventilsteuerungen sollen sowohl die selbsterregten als auch die erzwungenen Schwingungen der Systeme untersucht werden. Der Fokus liegt dabei auf der Berechnung instabiler periodischer Lösungen, weil diese das Einzugsgebiet stabiler Betriebspunkte begrenzen können. Weiterhin sollen typische, in der Hydraulik auftretende nichtlineare Effekte untersucht werden. Diese sind eine quadratisch von der Geschwindigkeit abhängige Dämpfung, Coulomb'sche Reibung zwischen Ventilkolben und Ventilgehäuse sowie kritisch überdeckte Ventile. Die Relevanz für diese drei Effekte ergibt sich daraus, dass sie sich einer standardmäßigen Stabilitätsanalyse basierend auf der Linearisierung um die Gleichgewichtslage entziehen.

Während Selbstregulierungsmechanismen in der Lage sind, stationäre Betriebszustände zu regeln, erfordern viele praktische Anwendungen jedoch transiente, zeitlich veränderliche Sollvorgaben von Drücken und/oder Volumenströmen. Um dies zu realisieren, können Trajektorienfolgeregelungen dem Selbstregulierungsmechanismus der Ventilsteuerungen überlagert werden. Die Performanz dieser Regelungen wird einerseits durch die Gestaltung des Regelungsalgorithmus an sich und andererseits durch die zugrundeliegenden Modelle beeinflusst.

In der Entwicklung der zugrundeliegenden Modelle ist oft ein Zielkonflikt zwischen Modellgüte und Rechenzeiteffizienz aufzulösen. Dies entspricht einer klassischen Fra-

gestellung der Modellreduktion, bei der angestrebt wird, schnelle Frequenzen zu eliminieren, ohne die langsame Systemdynamik zu beeinflussen. In diesem Zusammenhang können die Erkenntnisse aus der asymptotischen Analyse und insbesondere die Kenntnis über die verschiedenen Zeitskalen und Größenordnungen hilfreich sein.

Ein weiteres Ziel dieser Arbeit besteht deshalb darin, durch die Elimination schneller Frequenzen reduzierte Modelle abzuleiten. Dies soll unter Berücksichtigung zeitabhängiger Systemeingänge erfolgen, damit die Modelle als Basis für nichtlineare Regelungen genutzt werden können. Auf der Grundlage dieser Modelle soll die Rechenzeiteffizienz bestehender nichtlinearer Regelungskonzepte verbessert werden.

1.4 Aufbau der Arbeit

Basierend auf den formulierten Zielen ergibt sich die folgende Gliederung der Arbeit: In **Kapitel 2** werden die Grundlagen der asymptotischen Analyse für dynamische Systeme umrissen. Das Kapitel umfasst Näherungen erster und höherer Ordnung sowohl für regulär als auch für singular gestörte Systeme.

Kapitel 3 beschreibt das Funktionsprinzip und die Topologie hydraulischer Ventilsteuerungen. Des Weiteren werden die notwendigen physikalischen Grundlagen zur Modellierung hydraulischer Steuerungen beschrieben und daraus die Differentialgleichungen zur Beschreibung der Fluid-, Ventil- und Pumpendynamik abgeleitet.

In **Kapitel 4** wird das Modell eines verallgemeinerten Ventilkreislaufs hergeleitet, welcher als repräsentatives Beispiel einer hydraulischen Ventilsteuerung dient. Nach der physikalischen Modellierung wird ein dimensionsloses Modell abgeleitet. Durch eine dimensionslose Notation mittels charakteristischer Größen ergibt sich die Struktur eines singular gestörten Systems. Des Weiteren werden Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen dem verallgemeinerten Ventilkreislauf und anderen Standardventilen und -schaltungen aufgezeigt.

In **Kapitel 5** wird die Methodik zur asymptotischen Analyse selbsterregter Schwingungen hergeleitet. Die Methodik basiert auf einer Reduktion der schnellen Dynamik mittels der singularen Störungsrechnung und der anschließenden Berücksichtigung der großen Nichtlinearität, welche durch die Ventilsteuerkante verursacht wird, in der Grundlösung. Die Approximation selbsterregter Schwingungen erfolgt mit dem Mittelwertbildungsverfahren.

In **Kapitel 6** wird das asymptotische Verfahren modifiziert, um die Dynamik erzwungener Schwingungen abbilden zu können. Das Anwendungsbeispiel einer pulsierende Druckquelle beinhaltet sowohl klassische nichtlineare als auch parametrische Resonanzen.

Kapitel 7 analysiert den Einfluss ausgewählter nichtlineare und nicht-glatte physikalischer Effekte, welche durch Standardmethoden der linearen Stabilitätsanalyse nicht beschrieben werden können. Diese sind Coulomb'sche Reibung zwischen Ventilkolben und Gehäuse, eine von der Geschwindigkeit quadratisch abhängige Dämpfung sowie Ventile mit kritischer Überdeckung.

Kapitel 8 befasst sich mit der Dynamik transienter Vorgänge und mit der Frage, ob die reduzierten Modelle vorteilhaft in der Entwicklung nichtlinearer Regelungskonzepte eingesetzt werden können.

Kapitel 9 fasst die Arbeit zusammen und gibt einen Ausblick auf offene Forschungsfragen.

2 Grundlagen der asymptotischen Analyse dynamischer Systeme

Aufgrund fehlender mathematischer Werkzeuge sind der analytischen Untersuchung nichtlinearer dynamischer Systeme enge Grenzen gesetzt. Die Lösung der die Systeme beschreibenden nichtlinearen Differentialgleichungssysteme ist im Allgemeinen nicht exakt möglich. Um näherungsweise analytische Lösungen zu erhalten, haben sich asymptotische Methoden als hilfreiche Werkzeuge erwiesen. Sie ermöglichen einen qualitativen Einblick in die Struktur dynamischer Systeme, welcher mit numerischen Lösungsmethoden und experimentellen Analysen oft nicht möglich ist.

Eine Voraussetzung für die Anwendung dieser Methoden sind Systeme, in denen verschiedene Größenordnungen unterschieden werden können. In diesem Zusammenhang spricht man auch von der Notwendigkeit kleiner Nichtlinearitäten. Hierbei muss auf die korrekte Entdimensionierung der abhängigen und unabhängigen Variablen geachtet werden [79, 95], was in vielen Fällen bereits eine gewisse Kenntnis der zu untersuchenden Lösungen bzw. ein gewisses Systemverständnis erfordert.

Die bekanntesten asymptotischen Methoden sind die Störungsrechnung (insbesondere die Methode nach Lindstedt-Poincaré, vgl. [95]), das Mittelwertbildungsverfahren und das Multiple-Scales Verfahren. Welche Methode zum Einsatz kommt, hängt vom Anwendungsfall und von der Kenntnis des Anwenders ab. Die Störungsrechnung ist die einfachste und am weitesten verbreitete Methode. Sie liefert als direktes Ergebnis Näherungsfunktionen für die Trajektorien der Zustandsvariablen. Im Gegensatz dazu werden mit dem Mittelwertbildungsverfahren und dem Multiple-Scales Verfahren zunächst Differentialgleichungssysteme in transformierten Koordinaten berechnet. Dies ist gegenüber der Störungsrechnung vorteilhaft, da stationäre (sowohl stabile als auch instabile) Lösungen und deren Stabilität wesentlich einfacher gefunden bzw. untersucht werden können. Näherungsfunktionen im Zeitbereich können bei Bedarf aus den transformierten Systemen berechnet werden. Eine sehr anschauliche Einführung in diese und weitere Methoden ist in [92] zu finden.

Im Hinblick auf schwingungsfähige Systeme ist ein Nachteil der asymptotischen Methoden, dass bereits im Ansatz die Art der zu untersuchenden Schwingungsproblematik

berücksichtigt werden muss. Bei freien, ungedämpften Schwingungen ist die Amplitude durch die Anfangsbedingung festgelegt. Es wird also lediglich die Frequenz gesucht. Bei erzwungenen Schwingungen ist die Frequenz durch die Anregung bestimmt und die Amplitude ist unbekannt. Bei selbsterregten Schwingungen sind beide Größen im Voraus unbekannt. Dies muss im jeweiligen Ansatz abgebildet bzw. während der Durchführung der asymptotischen Methode berücksichtigt werden.

Im Rahmen dieser Arbeit werden periodische Lösungen schwingungsfähiger Systeme approximiert. Dafür wird im Falle regulär gestörter Probleme das Mittelwertbildungsverfahren genutzt. Die notwendigen Grundlagen werden in den Abschnitten 2.1 und 2.2 umrissen. In Abschnitt 2.3 wird anschließend der Fall singular gestörter Systeme behandelt.

2.1 Regulär gestörte Systeme

Ausgangspunkt für die asymptotische Analyse regulär gestörter Systeme ist das gewöhnliche Differentialgleichungssystem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{L}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{N}(\mathbf{x}, t, \varepsilon), \quad (2.1)$$

in dem ε ein kleiner Parameter ist, das heißt es gilt $0 < \varepsilon \ll 1$. Der Vektor \mathbf{x} kennzeichnet die Zustandsgrößen des Systems, der Parameter t ist die unabhängige Variable (im Rahmen dieser Arbeit ist t immer die Zeit). Die Zeitabhängigkeit der Funktionen \mathbf{L} und \mathbf{N} stellt den allgemeinen Fall dar, es kann sich jedoch auch um zeitinvariante Funktionen handeln. Es gilt die Einschränkung $\mathbf{N}(\mathbf{x}, t, 0) = \mathbf{0}$. Nun muss vorausgesetzt werden, dass eine analytische Lösung des reduzierten Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{L}(\mathbf{x}, t) \quad (2.2)$$

berechnet werden kann. Aus diesem Grund ist $\mathbf{L}(\mathbf{x}, t)$ in fast allen Anwendungen eine lineare Funktion, jedoch ist dies keine unbedingte Voraussetzung. Ist die Lösbarkeit von Gl. (2.2) gegeben, so besteht der erste Schritt in der Berechnung dieser sogenannten Grundlösung. Im Falle der hier interessierenden periodischen Bewegungen ergibt sich mit der Periodendauer T die Lösung $\mathbf{x}_0(t)$ in der Form

$$\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{X}_0(t, \mathbf{C}), \quad \mathbf{X}_0(t, \mathbf{C}) = \mathbf{X}_0(t + T, \mathbf{C}), \quad (2.3)$$

in der der Vektor \mathbf{C} die Integrationskonstanten enthält.

Im Hinblick auf die Periodendauer T muss beachtet werden, dass diese sich nur im Falle selbsterregter und freier Schwingungen direkt aus der Grundlösung ergibt. Bei erzwungenen und parametererregten Schwingungen wird die Periodendauer immer

durch die Anregungsfrequenz bestimmt. Dies muss bei der Gestaltung der Grundlösung berücksichtigt werden.

Nun werden die Nichtlinearitäten in die Lösung integriert. Dafür werden die Integrationskonstanten variiert, sodass die Grundlösung als Variablentransformation

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}_0(t, \mathbf{C}(t)) \quad (2.4)$$

von den Zustandsgrößen $\mathbf{x}(t)$ auf die neuen Koordinaten $\mathbf{C}(t)$ genutzt werden kann. Diese haben im Falle periodischer Bewegungen häufig die physikalische Bedeutung von Amplitude und Phase. Der Übersichtlichkeit halber werden die Funktionsargumente von $\mathbf{C}(t)$ und $\mathbf{X}_0(t, \mathbf{C}(t))$ im Folgenden nicht immer explizit aufgeführt. Eingesetzt in Gl. (2.1) ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{X}_0(t, \mathbf{C}(t))) &= \dot{\mathbf{X}}_0 + \frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial \mathbf{C}} \dot{\mathbf{C}} \\ &= \mathbf{L}(\mathbf{X}_0, t) + \mathbf{N}(\mathbf{X}_0, t, \varepsilon) \\ &= \mathbf{L}(\mathbf{X}_0, t) + \varepsilon \left. \frac{\partial \mathbf{N}(\mathbf{X}_0, t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Im letzten Rechenschritt wurde die Funktion $\mathbf{N}(\mathbf{X}_0, t, \varepsilon)$ in eine Taylorreihe um $\varepsilon = 0$ entwickelt und $\mathbf{N}(\mathbf{X}_0, t, 0) = \mathbf{0}$ ausgenutzt. Da die Lösung $\mathbf{X}_0(t, \mathbf{C}(t))$ die Gl. (2.2) erfüllt, vereinfacht sich Gl. (2.5) zu

$$\mathbf{J}_{\mathbf{C}}(t, \mathbf{C}) \dot{\mathbf{C}} = \varepsilon \left. \frac{\partial \mathbf{N}(\mathbf{X}_0, t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (2.6)$$

wobei

$$\mathbf{J}_{\mathbf{C}}(t, \mathbf{C}) = \frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial \mathbf{C}} \quad (2.7)$$

die Jakobimatrix der Grundlösung ist. Gl. (2.6) ist ein inhomogenes Differentialgleichungssystem in den neuen Koordinaten $\mathbf{C}(t)$. Durch Multiplikation von links mit $\mathbf{J}_{\mathbf{C}}(t, \mathbf{C})^{-1}$ erhält man mit der Bezeichnung

$$\boldsymbol{\Xi}(t, \mathbf{C}) = \mathbf{J}_{\mathbf{C}}^{-1}(t, \mathbf{C}) \left. \frac{\partial \mathbf{N}(\mathbf{X}_0, t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \quad (2.8)$$

ein sogenanntes System in Standardform

$$\dot{\mathbf{C}} = \varepsilon \boldsymbol{\Xi}(t, \mathbf{C}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (2.9)$$

mit kleiner (Größenordnung $O(\varepsilon)$) rechter Seite. Aufgrund der vorausgesetzten Periodizität der Lösung $\mathbf{X}_0(t, \mathbf{C}(t))$ mit der Periodendauer T ist auch die Jakobimatrix $\mathbf{J}_{\mathbf{C}}(t, \mathbf{C}) = \mathbf{J}_{\mathbf{C}}(t + T, \mathbf{C})$ und damit die rechte Seite von Gl. (2.9) periodisch, das heißt $\mathbf{\Xi}(t, \mathbf{C}) = \mathbf{\Xi}(t + T, \mathbf{C})$.

Hier beginnt das eigentliche Mittelwertbildungsverfahren. Das formale Vorgehen besteht darin, über sogenannte Near-Identity-Transformationen das Differentialgleichungssystem (2.9) in ein autonomes System zu überführen. Dies wird in Abschnitt 2.2 genauer erläutert. Für Näherungen erster Ordnung kann man sich folgendes intuitiveres Vorgehen überlegen: Aufgrund der Periodizität der rechten Seite und weil diese in der Größenordnung ε ist, ist die Lösung für die Koordinaten $\mathbf{C}(t)$ eine Überlagerung von periodischen und langsam veränderlichen Bewegungen. In erster Näherung werden diese langsamen Bewegungen innerhalb einer Periode als konstant angenommen. Aus dieser Überlegung heraus wird beim Mittelwertbildungsverfahren erster Ordnung die rechte Seite durch deren Mittelwert ersetzt und alle Terme der Größenordnung $O(\varepsilon^2)$ und kleiner vernachlässigt, sodass sich mit

$$\zeta = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \mathbf{C} dt , \tag{2.10}$$

$$\mathbf{F}(\zeta) = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \mathbf{\Xi}(t, \zeta) dt \tag{2.11}$$

das autonome Differentialgleichungssystem

$$\dot{\zeta} = \frac{\varepsilon}{T} \mathbf{F}(\zeta) \tag{2.12}$$

in den gemittelten Koordinaten ζ ergibt. Die Vorteile dieser Vereinfachung werden schnell deutlich: Die Gleichgewichtslagen von Gl. (2.12) entsprechen stationären periodischen Lösungen des ursprünglichen Systems, Gl. (2.1). Können die Gleichgewichtslagen analytisch bestimmt werden, was der Lösung eines algebraischen Gleichungssystems entspricht, so entsprechen diese also analytischen Näherungen stationärer periodischer Lösungen. Durch das Mittelwertbildungsverfahren wird die Stabilität dieser Lösungen nicht verändert [106], was bedeutet, dass sich deren Stabilitätsuntersuchung auf eine einfache Eigenwertuntersuchung reduziert.

Für den durch die Approximation verursachten absoluten Fehler kann die Abschätzung

$$\|\zeta(t) - \mathbf{C}(t)\| = O(\varepsilon), \quad 0 \leq t < O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \tag{2.13}$$

gezeigt werden [106].

2.2 Verfahren höherer Ordnung

In vielen Fällen ist es ausreichend, eine asymptotische Analyse erster Ordnung bis zur Größenordnung $O(\varepsilon)$ vorzunehmen. Jedoch ist es in manchen Fällen unumgänglich, Näherungen höherer Ordnung zu berechnen. Beim Mittelwertbildungsverfahren ist dafür ein formalerer Zugang mit Hilfe der im vorigen Abschnitt bereits erwähnten Near-Identity-Transformationen nötig. Man betrachte das bis zur Größenordnung $O(\varepsilon^2)$ entwickelte System in Standardform

$$\dot{\mathbf{C}} = \varepsilon \mathbf{\Xi}_1(t, \mathbf{C}) + \varepsilon^2 \mathbf{\Xi}_2(t, \mathbf{C}) + O(\varepsilon^3) \quad (2.14)$$

mit den periodischen Funktionen $\mathbf{\Xi}_1(t, \mathbf{C}) = \mathbf{\Xi}_1(t + T, \mathbf{C})$ und $\mathbf{\Xi}_2(t, \mathbf{C}) = \mathbf{\Xi}_2(t + T, \mathbf{C})$. Ziel ist es, dieses System über eine Variablentransformation in ein autonomes System

$$\dot{\zeta} = \varepsilon \mathbf{F}_1(\zeta) + \varepsilon^2 \mathbf{F}_2(\zeta) \quad (2.15)$$

zu transformieren. Dafür wird die Transformation

$$\mathbf{C} = \zeta + \varepsilon \mathbf{u}_1(t, \zeta) + \varepsilon^2 \mathbf{u}_2(t, \zeta) \quad (2.16)$$

in Gl. (2.14) eingesetzt. Für eine bessere Lesbarkeit werden die Argumente der Funktionen $\mathbf{u}_1(t, \zeta)$ und $\mathbf{u}_2(t, \zeta)$ im Folgenden nicht explizit aufgeführt. Dies liefert

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \zeta} \dot{\zeta} + \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial \zeta} \dot{\zeta} \\ = \varepsilon \mathbf{\Xi}_1(t, \zeta + \varepsilon \mathbf{u}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{u}_2) + \varepsilon^2 \mathbf{\Xi}_2(t, \zeta + \varepsilon \mathbf{u}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{u}_2) + O(\varepsilon^3) \\ = \varepsilon \mathbf{\Xi}_1(t, \zeta) + \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{\Xi}_1(t, \zeta)}{\partial \zeta} \mathbf{u}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{\Xi}_2(t, \zeta) + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (2.17)$$

wobei für die Berechnung der letzten Zeile eine Taylorreihen-Entwicklung der vorletzten Zeile um $\varepsilon = 0$ vorgenommen wurde. Mit Gl. (2.15) folgt

$$\begin{aligned} \varepsilon \mathbf{F}_1(\zeta) + \varepsilon^2 \mathbf{F}_2(\zeta) + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \zeta} \mathbf{F}_1(\zeta) + \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} \\ = \varepsilon \mathbf{\Xi}_1(t, \zeta) + \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{\Xi}_1(t, \zeta)}{\partial \zeta} \mathbf{u}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{\Xi}_2(t, \zeta) + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Bilanziert man nach den Größenordnungen von ε , so folgt

$$\varepsilon^1 : \quad \mathbf{F}_1(\zeta) + \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = \mathbf{\Xi}_1(t, \zeta) \quad (2.19)$$

$$\varepsilon^2 : \mathbf{F}_2(\zeta) + \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \zeta} \mathbf{F}_1(\zeta) + \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{\Xi}_1(t, \zeta)}{\partial \zeta} \mathbf{u}_1 + \mathbf{\Xi}_2(t, \zeta). \quad (2.20)$$

Aus Gl. (2.19) wird die Funktion

$$\mathbf{u}_1(t, \zeta) = \int (\mathbf{\Xi}_1(t, \zeta) - \mathbf{F}_1(\zeta)) dt + \mathbf{u}_{10}(\zeta) \quad (2.21)$$

berechnet. Die Funktionen $\mathbf{u}_{10}(\zeta)$ und $\mathbf{F}_1(\zeta)$ können beliebig gewählt werden, jedoch unter der Nebenbedingung, dass die Transformation in Gl. (2.16) – und damit die Funktion $\mathbf{u}_1(t, \zeta)$ – in der Zeit beschränkt ist. Eine Möglichkeit, dies zu gewährleisten, ist

$$\mathbf{u}_{10}(\zeta) = \mathbf{0}, \quad (2.22)$$

$$\mathbf{F}_1(\zeta) = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \mathbf{\Xi}_1(t, \zeta) dt \quad (2.23)$$

zu setzen, was auf das Ergebnis aus Abschnitt 2.1 für die Mittelwertbildung erster Ordnung führt. Höhere Näherungen werden rekursiv bestimmt. Aus Gl. (2.20) wird eine Berechnungsvorschrift für

$$\mathbf{u}_2(t, \zeta) = \int \left(\mathbf{u}_1 \frac{\partial \mathbf{\Xi}_1(t, \zeta)}{\partial \zeta} + \mathbf{\Xi}_2(t, \zeta) - \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \zeta} \mathbf{F}_1(\zeta) - \mathbf{F}_2(\zeta) \right) dt + \mathbf{u}_{20}(\zeta) \quad (2.24)$$

gewonnen. Eine mögliche Lösung für die Gewährleistung der Beschränktheit ist durch

$$\mathbf{u}_{20}(\zeta) = \mathbf{0} \quad (2.25)$$

$$\mathbf{F}_2(\zeta) = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \left(\frac{\partial \mathbf{\Xi}_1(t, \zeta)}{\partial \zeta} \mathbf{u}_1 + \mathbf{\Xi}_2(t, \zeta) - \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \zeta} \mathbf{F}_1(\zeta) \right) dt \quad (2.26)$$

gegeben. Das gemittelte System ergibt sich nun nach Gl. (2.15) mit den Berechnungsvorschriften aus den Gleichungen (2.21) bis (2.23) sowie (2.25) und (2.26). Für die Lösungen des ursprünglichen und des gemittelten Systems gilt die Fehlerabschätzung [106]

$$\|\zeta(t) - \mathbf{C}(t)\| = \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right), \quad 0 \leq t < \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (2.27)$$

Die Funktion $\mathbf{u}_2(t, \zeta)$ muss für ein Verfahren zweiter Ordnung nicht explizit berechnet werden. Verfahren höherer Ordnung werden durch eine analoge Vorgehensweise hergeleitet, wobei entsprechende Taylorreihen-Entwicklungen und Bilanzen bis zur jeweiligen Größenordnung von ε vorgenommen werden.

Zur Interpretation der Methode und der daraus generierten Ergebnisse ist es wichtig hervorzuheben, dass aufgrund der Gleichungen (2.23) und (2.26) die Transformation von den Koordinaten \mathbf{C} auf die Koordinaten ζ mittelwertfrei ist. Dies bedeutet, dass die physikalische Bedeutung der Variablen nicht verändert wird und lediglich Schwankungen um den Mittelwert herausgefiltert werden. Beispielsweise haben die Variablen \mathbf{C} oftmals die physikalische Bedeutung von der Amplitude und Phase einer periodischen Lösung. Diese physikalische Bedeutung bleibt durch die hier vorgestellte Variante des Mittelwertbildungsverfahrens erhalten.

2.3 Singulär gestörte Systeme

In vielen Anwendungen taucht der kleine Parameter nicht nur auf der rechten Seite des Differentialgleichungssystems, sondern zusätzlich auf der linken Seite, also multipliziert mit den Ableitungen $\dot{\mathbf{x}}$ auf. Hier empfiehlt es sich, die Koordinaten in eine langsame Bewegung ξ und eine schnelle Bewegung η aufzuteilen. Es wird hier der autonome Fall betrachtet, die Vorgehensweise lässt sich jedoch sehr einfach auf nicht autonome Differentialgleichungssysteme übertragen. Gl. (2.1) hat nun die Form

$$\dot{\xi} = \mathbf{L}(\xi, \eta) + \mathbf{N}(\xi, \eta, \varepsilon) \quad (2.28)$$

$$\varepsilon \dot{\eta} = \mathbf{g}(\xi, \eta, \varepsilon), \quad (2.29)$$

wobei analog zu den bisherigen Abschnitten $\mathbf{N}(\xi, \eta, 0) = \mathbf{0}$ vorausgesetzt wird. Offensichtlich kann durch das bisher aufgezeigte Verfahren kein System in Standardform erzeugt werden, da sich durch das Nullsetzen des kleinen Parameter ε die Ordnung des Systems reduziert.

Das Lösungsverhalten des singulär gestörten Systems wird maßgeblich durch die Stabilitätseigenschaften einer Hyperfläche \mathcal{M} im Phasenraum bestimmt. Im Falle autonomer Systeme ist diese Hyperfläche eine Mannigfaltigkeit [119]. Befindet sich die Lösungstrajektorie auf der Mannigfaltigkeit, führt das System eine langsame Bewegung aus. Außerhalb der Mannigfaltigkeit entwickelt sich die Lösung in einer schnellen Bewegung, da die Trajektorie entweder sehr stark von der Mannigfaltigkeit angezogen oder abgestoßen wird, womit eine Stabilitätseigenschaft der Mannigfaltigkeit einhergeht. Durchläuft die Mannigfaltigkeit eine Bifurkation und wechselt dabei ihre Stabilität, so kann dies zu komplexen dynamischen Phänomenen führen, wie z. B. zu den bekannten Relaxationsschwingungen des Van-der-Pol Oszillators, welche sehr anschaulich z. B. in [98] und in [119] beschrieben werden.

Ist die langsame Mannigfaltigkeit jedoch im gesamten Phasenraum global asymptotisch stabil, so erreicht die Lösungstrajektorie diese unabhängig der Anfangsbedingungen nach sehr kurzer Zeit und bleibt für alle Zeiten auf ihr. In diesem Fall ist die schnelle

Bewegung für die praktische Anwendung sehr oft nicht von Interesse und es genügt, die langsame Bewegung zu untersuchen. Dieser Fall wird hier vorausgesetzt.

Die langsame Mannigfaltigkeit kann in impliziter Darstellung durch die Grundlösung

$$\mathbf{g}(\xi, \eta, 0) = \mathbf{0} \tag{2.30}$$

der schnellen Bewegung approximiert werden. Diese Näherung kann auch zur Stabilitätsuntersuchung der Mannigfaltigkeit herangezogen werden. Dafür wird die Stabilität der durch Gl. (2.30) definierten Gleichgewichtslage der Differentialgleichung

$$\frac{d\eta}{d\theta} = \mathbf{g}(\xi, \eta, 0) \tag{2.31}$$

untersucht, in der die Variable $\theta = \frac{t}{\varepsilon}$ die Zeitskala der schnellen Bewegung ist. In dieser schnellen Zeitskala ist die langsame Bewegung näherungsweise konstant, weshalb die Einträge des Vektors ξ in Gl. (2.31) als konstante Parameter und nicht als Variablen betrachtet werden [119].

Wird über diese Vorgehensweise globale asymptotische Stabilität nachgewiesen, ist auch die langsame Mannigfaltigkeit global asymptotisch stabil.

Für die Untersuchung der langsamen Bewegung ξ wird eine Approximation der schnellen Bewegung η benötigt, um diese in Gl. (2.28) einzusetzen. Eine solche Approximation kann über den Reihenansatz

$$\eta = \eta_0 + \varepsilon\eta_1 + \varepsilon^2\eta_2 + \dots \tag{2.32}$$

erfolgen. Eingesetzt in Gl. (2.29) folgt

$$\begin{aligned} \varepsilon\dot{\eta}_0 + \varepsilon^2\dot{\eta}_1 + \dots &= \mathbf{g}(\xi, \eta_0 + \varepsilon\eta_1 + \dots, \varepsilon) \\ &= \mathbf{g}(\xi, \eta_0, 0) + \varepsilon \left. \frac{\partial \mathbf{g}(\xi, \eta, \varepsilon)}{\partial \eta} \right|_{\varepsilon=0} \eta_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{2.33}$$

Hier wird nun analog zum Vorgehen bei der regulären Störungsrechnung nach verschiedenen Potenzen von ε bilanziert, wodurch ein rekursiv lösbares algebraisches Gleichungssystem

$$\varepsilon^0 : \mathbf{0} = \mathbf{g}(\xi, \eta_0, 0) \tag{2.34}$$

$$\varepsilon^1 : \dot{\eta}_0 = \left. \frac{\partial \mathbf{g}(\xi, \eta, \varepsilon)}{\partial \eta} \right|_{\varepsilon=0} \eta_1 \tag{2.35}$$

⋮

für die Reihenglieder η_i mit $i = 0, 1, 2, \dots$ entsteht. Voraussetzung für das Gelingen dieser Vorgehensweise ist die Lösbarkeit von Gl. (2.34). Für die höheren Ordnungen sind lediglich lineare Gleichungssysteme zu lösen. Beschränkt man das Vorgehen wieder auf Näherungen erster Ordnung, so hat die Näherungslösung der schnellen Variablen die Form

$$\begin{aligned} \eta &\approx \tilde{\eta} = \eta_0 + \varepsilon \eta_1 \\ &= \Phi_0(\xi) + \varepsilon \left(\left. \frac{\partial \mathbf{g}(\xi, \eta, \varepsilon)}{\partial \eta} \right|_{\varepsilon=0} \right)^{-1} \frac{\partial \Phi_0(\xi)}{\partial \xi} \dot{\xi} \\ &=: \Phi_0(\xi) + \varepsilon \Phi_1(\xi) \dot{\xi}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

wobei die Funktion $\Phi_0(\xi)$ eine Lösung von Gl. (2.34) ist. Mit Hilfe dieser Approximation wird das ursprüngliche singulär gestörte Differentialgleichungssystem einer Ordnungsreduktion unterworfen und in das regulär gestörte System

$$\dot{\xi} = \mathbf{L}(\xi, \Phi_0(\xi) + \varepsilon \Phi_1(\xi) \dot{\xi}) + \mathbf{N}(\xi, \Phi_0(\xi) + \varepsilon \Phi_1(\xi) \dot{\xi}, \varepsilon) \quad (2.37)$$

transformiert. Dieses kann durch eine Reihenentwicklung der rechten Seite und anschließendem Auflösen nach $\dot{\xi}$ in eine zu Gl. (2.1) identische Struktur gebracht werden.

Das weitere Vorgehen besteht entsprechend Abschnitt 2.1 darin, diese Struktur in ein System in Standardform zu transformieren und darauf ein Mittelwertbildungsverfahren erster oder höherer Ordnung anzuwenden. Für ein Mittelwertbildungsverfahren erster Ordnung gilt wegen der Vernachlässigung der schnellen Dynamik bzw. deren Einschwingverhaltens die Fehlerabschätzung (vgl. auch [31])

$$\|\zeta(t) - \mathbf{C}(t)\| = \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \|\tilde{\eta}(t) - \eta(t)\| = \mathcal{O}(\varepsilon), \quad 0 < L \leq t < \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (2.38)$$

Dabei wird die Konstante L vom Einschwingverhalten der schnellen Dynamik bestimmt. Das hier vorgestellte Verfahren für die Behandlung singulär gestörter Systeme ist eng verwandt mit dem Mittelwertbildungsverfahren für partiell stark gedämpfte Systeme, siehe [31, 32].

3 Hydraulische Ventilsteuerungen

In der Entwicklung hydraulischer Systeme gibt es eine Vielzahl an Möglichkeiten, Bauteile zur Steuerung des Energieflusses miteinander zu kombinieren, um ganz unterschiedliche Antriebs- und Schaltungsarten zu realisieren. Diese Arbeit befasst sich mit der Analyse von sogenannten Ventilsteuerungen, auch Widerstandssteuerungen genannt.

Unter dem Begriff der Ventilsteuerung werden alle Systeme zusammengefasst, bei denen die Ventile zur Leistungssteuerung im Hauptstrom zwischen Pumpe und Verbraucher angeordnet sind [8, 125]. Leistungssteuerung meint hierbei die Beeinflussung des zeitlichen Verlaufs von Druck und Volumenstrom. Da an den Steuerkanten der Ventile immer Energie dissipiert wird, sind die Ventilsteuerungen im Vergleich zu den Verdrängersteuerungen, bei denen die Steuerungsaufgabe von einer Verstellpumpe übernommen wird, weniger energieeffizient und finden deshalb vor Allem in Systemen kleiner und mittlerer Drücke Anwendung. Sie sind jedoch in ihrem dynamischen Verhalten und ihrer Präzision den Verdrängersteuerungen überlegen und werden eingesetzt, wenn hochdynamische und präzise Vorgänge zur Erfüllung der Antriebsfunktion erforderlich sind.

Hydraulische Ventilsteuerungen können mit unterschiedlichen Ventilarten realisiert werden. In Abschnitt 3.1 wird zunächst definiert, welche Systemtopologien in dieser Arbeit untersucht werden und wie deren grundsätzlicher Aufbau strukturiert ist. In Abschnitt 3.2 wird anschließend die physikalische Modellierung der einzelnen hydraulischen Komponenten diskutiert.

3.1 Topologie hydraulischer Ventilsteuerungen

Hydraulische Ventilsteuerungen sind zumeist modular strukturiert und können in verschiedene Teilkreisläufe unterteilt werden. In jedem Teilkreislauf wird ein bestimmter Druck (oder eine Druckdifferenz gegenüber einem benachbarten Teilkreislauf) bzw. Druckverlauf unabhängig von der aktuellen Last eingestellt. Dies wird über hydraulische

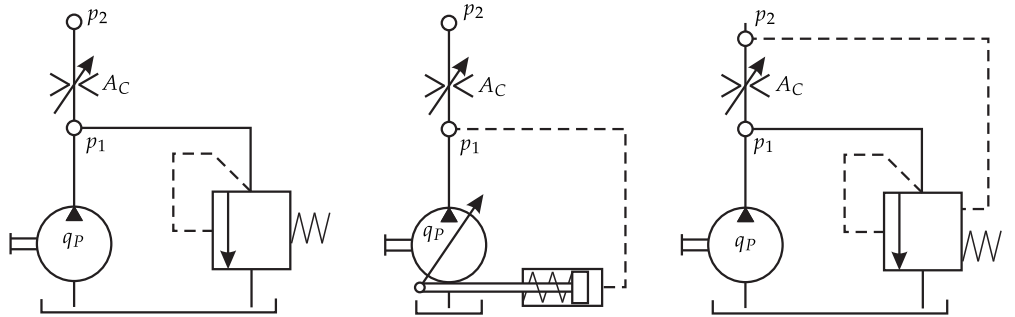
Widerstandselemente realisiert, deren Strömungswiderstand variabel eingestellt werden kann – hydraulische Ventile.

Ein wichtiges Unterscheidungsmerkmal der dabei eingesetzten Ventile ist deren Bauweise, wobei zwischen Sitzventilen und Kolbenschieberventilen unterschieden wird. Im Rahmen dieser Arbeit werden ausschließlich Kolbenschieberventile untersucht.

Weiterhin können Ventile anhand ihrer Funktion unterschieden werden, welche sie im hydraulischen Kreis erfüllen. Ein konstantes, lastunabhängiges Druckniveau wird mit Druckventilen realisiert. Diese regeln den Druck über das Gleichgewicht zwischen einer Federkraft und einer vom Systemdruck auf eine Kolbenfläche aufgeprägten Druckkraft. Diese Gleichgewichtsstellung des Kolbens beeinflusst wiederum die Größe des Volumenstroms, welcher in einen Teilkreislauf hinein oder hinaus fließt. Beispiele sind das Druckregelventil in Abb. 3.1a und das Druckminderventil in Abb. 3.2b, welche das stationäre Druckniveau des Systemdrucks p_1 nahezu unabhängig vom Lastdruck p_2 und vom Pumpenvolumenstrom q_P bzw. vom Versorgungsdruck p_Q einstellen. Die Entkopplung des stationären Systemdrucks von der Last und der Versorgung setzt eine geringe Federsteifigkeit voraus. Kommt eine Verstellpumpe zum Einsatz, übernimmt diese die Aufgabe der Volumenstromregulierung und das Druckregelventil in Abb. 3.1a kann durch einen einfachen Kolben ersetzt werden, welcher lediglich die Information des aktuellen Druckniveaus an die Pumpe übergibt und diese so ansteuert. Dies ist die Realisierung einer druckgeregelten Verstellpumpe, siehe Abb. 3.1b. Wird die Steuerkraft nicht über eine Federvorspannung realisiert sondern mit Hilfe eines Elektromagneten, spricht man von Proportionalventilen. Diese haben den Vorteil einer variablen Einstellmöglichkeit der Steuerkraft und erlauben so die sinnvolle Realisierung von Ventilen mit mehr als zwei Schaltstellungen. Ein Beispiel dafür ist das 3/3-Proportional-Wegeventil in Abb. 3.2a, mit welchem über eine Veränderung der Steuerkraft das Druckniveau über die Zeit variiert werden kann.

Das gemeinsame Element dieser Systeme ist die physische Rückführung des Systemdrucks auf eine Kolbenfläche. Diese in den Abbildungen 3.1 und 3.2 als gestrichelte Linien dargestellten Rückführungen bilden zusammen mit den Ventil- bzw. Steuerkolben einen geschlossenen Regelkreis. Die Regelungsaufgabe wird dabei vollständig autonom erfüllt, weshalb man in diesem Zusammenhang von selbstregelnden Systemen sprechen kann.

Druckrückführungen treten in der Hydraulik nicht nur bei der Druckregelung auf. Werden an zwei gegenüberliegenden Kolbenflächen eines Ventils die Drücke zweier Teilkreisläufe rückgeführt (Druckwaage), kann man die Druckdifferenz zwischen diesen Teilen regeln. Diese Topologie wird auch als Load-Sensing System bezeichnet (Abb. 3.1c). Liegt die geregelte Druckdifferenz an einem konstanten Widerstandselement an, ist sichergestellt, dass der Volumenstrom über dieses Widerstandselement konstant ist. Dies ist das Prinzip eines Stromregelventils (Abb. 3.2c).

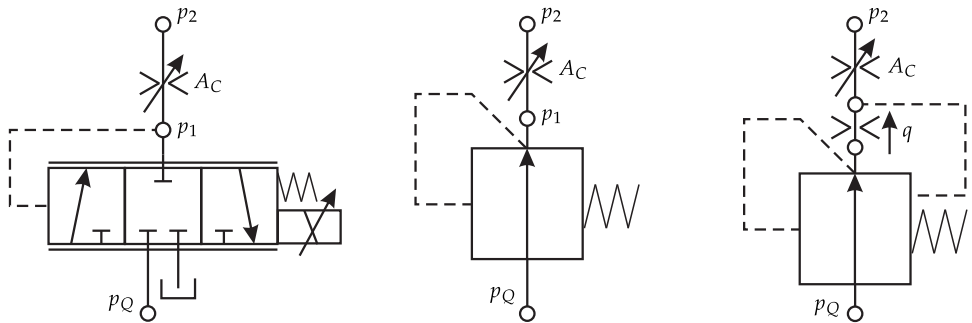


(a) Konstantdrucksystem mit Druckregelventil und Konstantpumpe. Das stationäre Niveau des Systemdrucks p_1 ist nahezu unabhängig vom Lastdruck p_2 und vom Pumpenvolumenstrom q_p .

(b) Konstantdrucksystem mit druckgeregelter Verstellpumpe. Das stationäre Niveau des Systemdrucks p_1 ist nahezu unabhängig vom Lastdruck p_2 .

(c) Load-Sensing System (Lastdruck-Meldesystem). Das stationäre Niveau der Druckdifferenz $p_2 - p_1$ ist nahezu unabhängig vom Pumpenvolumenstrom q_p .

Abbildung 3.1: Systeme mit Druckrückführungen und Pumpe.



(a) System mit 3/3-Proportional-Wegeventil und Druckquelle. Das stationäre Niveau des Drucks p_1 kann unabhängig vom Systemdruck p_Q und vom Lastdruck p_2 eingestellt werden.

(b) System mit Druckminderventil und Druckquelle. Das stationäre Niveau des Drucks p_1 ist nahezu unabhängig vom Versorgungsdruck p_Q und vom Lastdruck p_2 .

(c) System mit Stromregelventil und Druckquelle. Das stationäre Niveau des Volumenstroms q ist nahezu unabhängig vom Versorgungsdruck p_Q und vom Lastdruck p_2 .

Abbildung 3.2: Systeme mit Druckrückführungen und Druckquelle.

Das Prinzip der physischen Druckrückführung kommt also in einer Vielzahl unterschiedlicher Kreisläufe zum Einsatz und ist ein wichtiges Prinzip in der hydraulischen Leistungssteuerung. Systeme und Komponenten, welche dieses Prinzip beinhalten bilden den Rahmen der in dieser Arbeit untersuchten Topologien.

3.2 Modellierung hydraulischer Ventilsteuerungen

Wie bei allen Modellierungen entscheidet auch in der Hydraulik der Abstraktionsgrad sowohl über die Modellkomplexität als auch über die Modellgenauigkeit. Die asymptotischen Methoden, welche in dieser Arbeit zur Systemanalyse herangezogen werden, fokussieren sich naturgemäß auf das Generieren qualitativer Erkenntnisse über die dynamischen Systemstrukturen. Aus diesem Grund ist es sinnvoll, auch die Modellierung dieser Prämisse zu unterwerfen und sich auf die wesentlichen physikalischen Zusammenhänge zu beschränken, das heißt einen hohen Abstraktionsgrad anzusetzen. Die Entscheidung, welche physikalischen Einflüsse wesentlich sind und welche vernachlässigt werden können, ist stark an die zu untersuchenden Effekte gekoppelt. Beispielsweise beeinflusst die Masse eines Ventilkolbens kaum dessen transientes dynamisches Verhalten, wohingegen sie bei der Stabilität von Ventilen mit Druckrückführung eine entscheidende Rolle spielt.

Somit kann in diesem Zusammenhang auch ein Blick in die Literatur sinnvolle Anhaltspunkte liefern. In zahlreichen Untersuchungen [10, 21, 26, 27, 40, 41, 43, 53, 54, 63, 64, 68–71, 78, 80, 84, 85, 109] zur Stabilität und nichtlinearen Dynamik hydraulischer Systeme sind die übereinstimmenden Elemente der Modellierung die Starrkörperannahme für mechanische Komponenten und die eindimensionale Modellierung hydraulischer Strömungen. Diese Annahmen gelten uneingeschränkt auch innerhalb dieser Arbeit. Unterschiede gibt es insbesondere in der Modellierung von Reibungsphänomenen, in der Berücksichtigung von Wellenausbreitungsphänomenen und in der Modellierung der Pumpendynamik. Hydraulische Induktivitäten, Strömungskräfte an Ventilkolben und die Dynamik des elektromagnetischen Teils werden zumeist vernachlässigt.

Der Argumentation eines hohen Abstraktionsgrads folgend, werden innerhalb dieser Arbeit keine Wellenausbreitungsphänomene betrachtet. Dies ist äquivalent zu der Annahme kurzer Leitungen [12]. Weil der Fokus der Arbeit hauptsächlich auf der Untersuchung stationärer Betriebszustände liegt, wird weiterhin die Dynamik der elektromagnetischen Ansteuerung vernachlässigt, welche außerhalb des durch die Druckrückführung gebildeten Regelkreises liegt und deshalb dessen Stabilität und das stationäre dynamische Verhalten nicht beeinflusst. Reibungsphänomene werden in Form linear viskoser Dämpfung modelliert. In Abschnitt 7.1 wird zusätzlich der Einfluss von Coulomb'sche Reibung untersucht. Hydraulische Induktivitäten und hydrodynamische Strömungskräfte werden im Rahmen dieser Arbeit grundsätzlich vernachlässigt. Die entsprechenden Modellierungsgrundlagen werden in diesem Abschnitt trotzdem vorgestellt, weil diese beiden physikalischen Effekte bei einer Modellerweiterung am ehesten zu berücksichtigen wären. Im Hinblick auf die Pumpenmodellierung gilt grundsätzlich die Annahme einer idealen Pumpe, die einen konstanten, vom Systemdruck

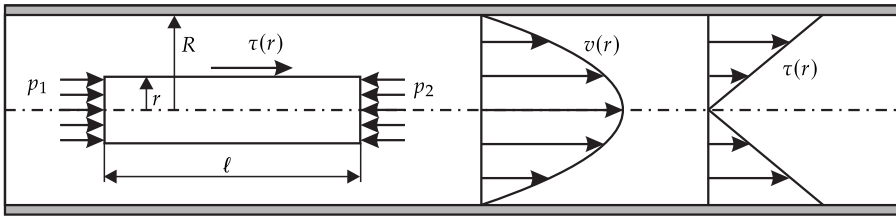


Abbildung 3.3: Kräftebilanz sowie Geschwindigkeits- und Schubspannungsprofil bei einer laminaren Rohrströmung. Nach [67].

unabhängigen Volumenstrom liefert. Detailliertere Modelle einer Konstantpumpe und einer druckgeregelten Verstellpumpe werden in Kap. 8 benötigt.

Die aus diesen Annahmen resultierende Modellierung der einzelnen Teilsysteme bestehend aus Fluidodynamik, Ventildynamik und Pumpendynamik und die dafür nötigen physikalischen Grundlagen werden im Folgenden vorgestellt.

3.2.1 Fluidodynamik

Im Rahmen der vorgeschlagenen Modellierung ist es ausreichend, die hydraulischen Flüssigkeiten anhand der physikalischen Größen Dichte ρ_F , dynamische Viskosität η_F und Kompressibilität (Kompressionsmodul E_F) zu charakterisieren, welche als druckunabhängig angenommen werden. Weiterhin gilt die Annahme eines Newton'schen Fluides.

Die dynamische Viskosität η_F ist dann für eindimensionale Strömungen durch die Gleichung

$$\tau(r) = \eta_F \frac{dv(r)}{dr} \quad (3.1)$$

definiert und stellt ein Maß für die Zähigkeit gegenüber einer Verschiebung benachbarter Fluidschichten dar. Dabei ist $\tau(r)$ die Schubspannung, $v(r)$ das Geschwindigkeitsprofil und r eine Koordinate senkrecht zur Geschwindigkeit.

Um den damit einhergehenden Strömungswiderstand in einer laminaren zylindrischen axial-symmetrischen Strömung (der Hagen-Poiseulle'schen Theorie entsprechend) zu berechnen, wird eine Kräftebilanz an einem zylindrischen Fluidelement mit dem Radius r und der Länge ℓ betrachtet, siehe Abb. 3.3. Unter der Voraussetzung einer stationären Strömung stehen die Reibungskräfte mit den Druckkräften an den Stirnflächen des Fluidelements im Gleichgewicht. Mit der Druckdifferenz $\Delta p = p_1 - p_2$ zwischen den beiden Stirnflächen folgt

$$r^2 \pi \Delta p + 2 r \pi \ell \tau = 0 \quad (3.2)$$

und zusammen mit Gl. (3.1) ergibt sich der Zusammenhang

$$\frac{dv(r)}{dr} = -\frac{r}{2\eta_F \ell} \Delta p. \quad (3.3)$$

Durch Integration über r erhält man mit der Bedingung $v(r = R) = 0$ das parabolische Geschwindigkeitsprofil

$$v(r) = \frac{R^2 - r^2}{4\eta_F \ell} \Delta p \quad (3.4)$$

innerhalb einer zylindrischen Rohrleitung mit dem Radius R . Über die gesamte Querschnittsfläche integriert ergibt sich daraus wiederum das Gesetz von Hagen-Poiseuille [50]

$$q_R = 2\pi \int_{r=0}^R v(r)r \, dr = \frac{\pi R^4}{8\eta_F \ell} \Delta p, \quad (3.5)$$

welches die lineare Widerstandscharakteristik eines stationären laminaren Volumenstroms q_R in einer Rohrleitung beschreibt.

Als zweite wichtige Größe ist die Kompressibilität über den Kompressionsmodul

$$E_F = -V \frac{dp}{dV} \quad (3.6)$$

definiert. Das negative Vorzeichen wird sinnvollerweise aufgrund der Tatsache eingeführt, dass eine Druckerhöhung zu einer Verringerung des Volumens V führt. Aus Gl. (3.6) folgt

$$q_C = \dot{V} = -\frac{V}{E_F} \dot{p}. \quad (3.7)$$

Die Größe $q_C = \dot{V}$ ist ein Volumenstrom proportional zur zeitlichen Änderung des Drucks. Der Proportionalitätsfaktor wird in Anlehnung an die Elektrotechnik auch als hydraulische Kapazität $C_h = \frac{V}{E_F}$ bezeichnet. Der Volumenstrom q_C hängt effektiv nicht nur von der Kompressibilität des Fluids, sondern ebenfalls von der Nachgiebigkeit der Rohrleitungen und von der eventuell im Fluid enthaltenen Luft ab. Dies kann im Parameter C_h berücksichtigt werden [50], macht diesen damit allerdings zu einem sehr unsicherheitsbehafteten Parameter des fluiddynamischen Teilsystems.

Mit Hilfe der Dichte

$$\rho_F = \frac{m}{V} \quad (3.8)$$

wird im Folgenden die letzte wichtige Größe zur Beschreibung eindimensionaler Strömungen – die hydraulische Induktivität – hergeleitet. Dazu wird ein zylindrisches Massenelement mit der Masse m , der Länge ℓ und dem Radius r innerhalb einer instationären Strömung betrachtet. Das Kräftegleichgewicht bestehend aus zwei Druckkräften und einer Trägheitskraft ergibt sich zu

$$r^2\pi\Delta p = m \frac{dv}{dt} . \quad (3.9)$$

Mit $\dot{q}_L = r^2\pi\dot{v}$ und Gl. (3.8) erhält man den Zusammenhang

$$\Delta p = \frac{\rho_F \ell}{r^2\pi} \dot{q}_L . \quad (3.10)$$

Der Proportionalitätsfaktor wird analog zur Elektrotechnik als hydraulische Induktivität $L_h = \frac{\rho_F \ell}{r^2\pi}$ bezeichnet.

Die bisher gezeigten Zusammenhänge können aufgrund des laminaren Strömungsverhaltens aus sehr einfachen eindimensionalen Betrachtungen hergeleitet werden. Bei turbulenten Strömungszuständen sind diese einfachen Betrachtungen nicht mehr möglich. Um aufwändige numerische Simulationen zu umgehen, kann man sich an dieser Stelle sehr gut mit empirischen Modellen behelfen. Im Kontext der in dieser Arbeit betrachteten hydraulischen Systeme treten turbulente Strömungen an scharfkantigen Querschnittübergängen auf. Diese finden sich entweder als Blenden innerhalb hydraulischer Leitungen oder in Form von Ventilsteuerkanten.

Die Volumenstrom-Druckbeziehung lässt sich für hinlänglich große Reynoldszahlen mit Hilfe der Bernoulli-Gleichung

$$\frac{\rho_F}{2} v^2 + p + \rho_F g z = \text{konst.} \quad (3.11)$$

herleiten, die mit ausreichender Genauigkeit stromaufwärts des engsten Querschnitts gilt. Darin ist p der Druck, g die Erdbeschleunigung und z die geodätische Höhe. Unter Vernachlässigung der Schwerepotentialdifferenz und mit der Annahme, dass die Geschwindigkeit im kleinsten Querschnitt der Blende sehr viel höher ist als außerhalb des Widerstands, gilt

$$\frac{\rho_F}{2} v^2 + \Delta p = 0 . \quad (3.12)$$

Daraus folgt der bekannte wurzelförmige Zusammenhang der Blendengleichung

$$q_B = A_0 v = \alpha_d \sqrt{\frac{2}{\rho_F}} A_B \text{sign}(\Delta p) \sqrt{|\Delta p|} , \quad (3.13)$$

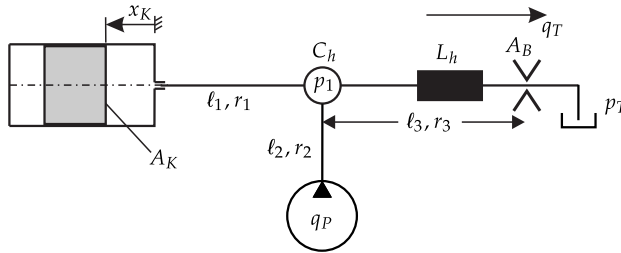


Abbildung 3.4: Positionierung von Induktivität und Kapazität am Beispiel einer Verzweigung von 3 Leitungen.

in der A_B die Querschnittsfläche der Blende ist. Der Parameter α_d beschreibt das Verhältnis zwischen Blendenfläche A_B und tatsächlicher (i.A. unbekannter) Strahlquerschnittsfläche A_0 und kann aus theoretischen Überlegungen hergeleitet (siehe z. B. [89]) oder experimentell bestimmt werden.

Im Kontext von realen Rohrleitungssystemen ist nun zu entscheiden, wie die diskreten Elemente zur Beschreibung der hydraulischen Widerstände, der Fluidkompressibilität und der Fluidträgheit sinnvoll angeordnet werden, sodass sie einerseits das reale Strömungsverhalten möglichst gut approximieren und andererseits die Modellkomplexität begrenzt wird. Wie oben erwähnt, werden Wellenausbreitungsphänomene vernachlässigt. Druckänderungen finden bei diesem Modellierungsansatz nur über hydraulische Widerstände hinweg statt. Eine naheliegende Variante wäre also, in den Bereichen identischer Drücke jeweils eine Kapazität, eine Induktivität und einen laminaren Rohrwiderstand zu platzieren. Dabei ist zu beachten, dass das Gesetz von Hagen-Poiseuille zur Beschreibung laminarer Rohrwiderstände streng genommen nur für stationäre Strömungen gilt. Die hier vorgeschlagene Modellierung stellt somit eine starke Vereinfachung dar, welche jedoch die einfache Möglichkeit bietet, den Effekt der Fluidträgheit im Modell zu berücksichtigen. Für komplexere Leitungsmodelle sei auf die entsprechende Literatur verwiesen [50, 89]. Für eine weitere Modellvereinfachung können die laminaren Widerstände vernachlässigt oder ersatzweise als linear viskose Dämpfung an den (Ventil-) Kolben modelliert werden. Für ein Minimalsystem bestehend aus einer Verzweigung, einem Kolben (Stirnfläche A_K), einem Blendenwiderstand (Blendenfläche A_B) und einer Pumpe, welche durch drei Leitungsabschnitte der Längen l_i und der Radien r_i , $i = 1, 2, 3$ verbunden sind, folgt daraus beispielhaft die Anordnung in Abb. 3.4. Diese Anordnung ist eine Vereinfachung des in [101] beschriebenen diskreten Leitungsmodells, siehe auch [50].

Für eine möglichst genaue Berechnung der Kapazitäten und Induktivitäten

$$C_h = \sum_{i=1}^3 \frac{\ell_i r_i^2 \pi}{E_F} + \frac{A_K x_K}{E_F} \quad (3.14)$$

$$L_h = \sum_{i=1}^3 \frac{\rho_F \ell_i}{r_i^2 \pi} + \frac{\rho_F x_K}{A_K} \quad (3.15)$$

ist es wichtig, die freien Volumina in den Ventilgehäusen an den Leitungsenden mit zu berücksichtigen. Die fluiddynamischen Bewegungsgleichungen

$$C_h \dot{p}_1 = q_p - A_K \dot{x} - q_T \quad (3.16)$$

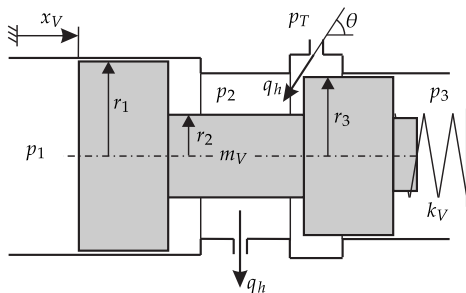
$$L_h \dot{q}_T + \frac{\rho_F}{2\alpha_a^2 A_B^2} q_T^2 = p_1 - p_T \quad (3.17)$$

werden mit Hilfe der Gleichungen (3.7), (3.10) und (3.13) aus der Volumenstrombilanz an der Leitungsverzweigung (Massenerhaltung) und der Druckbilanz (Impulserhaltung) an der Reihenschaltung von Induktivität und Blende hergeleitet.

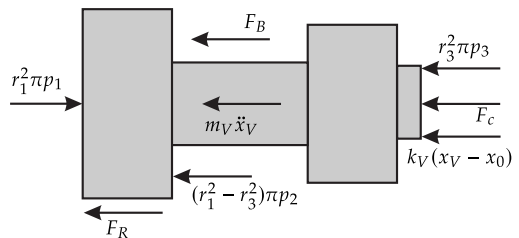
3.2.2 Ventildynamik

Die wesentlichen physikalischen Einflüsse auf die (Ventil-) Kolbenbewegungen in hydraulischen Systemen sind Druckkräfte, Trägheitskräfte, Rückstellkräfte, Strömungskräfte und Reibungskräfte. Abb. 3.5a zeigt eine beispielhafte Kolbengeometrie innerhalb eines Ventilgehäuses mit einem Zufluss und einer Steuerkante, über die der Volumenstrom q_h fließt. Die Parameter m_V und k_V sind die Kolbenmasse und die Federsteifigkeit. Die Radien der Kolbenabschnitte konstanten Querschnitts sind mit r_i , $i = 1, 2, 3$ bezeichnet. Am Ventileinlass und im Bereich der Steuerkante herrscht der Druck p_2 und an den Stirflächen des Kolbens die Drücke p_1 bzw. p_3 . Die durch die Koordinate x_V beschriebene Axialdynamik

$$m_V \ddot{x}_V + k_V (x_V - x_{V0}) = \left(r_1^2 p_1 - (r_1^2 - r_3^2) p_2 - r_3^2 p_3 \right) \pi - F_c - F_B - F_R \quad (3.18)$$



(a) Beispiel einer Kolbengeometrie innerhalb eines Ventilgehäuses.



(b) Freischnitt des Kolbens.

Abbildung 3.5: Modellierung eines Kolbenschieberventils.

ergibt sich aus dem in Abb. 3.5b abgebildeten Freischnitt. Für den Fall eines Proportionalventils ist F_c die Magnetkraft, ansonsten ist $F_c = 0$. Wie eingangs des Kapitels erwähnt werden in der Reibungskraft

$$F_R = f_R \operatorname{sign}(\dot{x}_V) + d_V \dot{x}_V \quad (3.19)$$

linear viskose Dämpfung und Coulomb'sche Reibung berücksichtigt. Der Coulomb'sche Anteil wird hauptsächlich durch die Reibung zwischen Ventilkolben und Gehäuse verursacht. Der linear viskose Dämpfungsanteil ist in der Hydraulik eng mit Leckageeffekten verknüpft, welche sich als laminare Strömungen in den engen Spalten zwischen Ventilkolben und Gehäuse ausbilden. Wie bereits erwähnt, bietet es sich hier an, auch die in Abschnitt 3.2.1 vernachlässigten laminaren Rohrleitungswiderstände in die entsprechende Dämpfungskonstante d_V mit einzubeziehen. Die viskose Dämpfung ist somit stark von der Ölviskosität η_F und damit von der Öltemperatur abhängig, weshalb die Größenordnung von d_V je nach Anwendung sehr unterschiedlich sein und sich auch während des Betriebs ändern kann.

Die Strömungskraft F_B , welche durch den Volumenstrom q_h über die Ventilsteuerkante auf den Kolben wirkt, kann mit Hilfe des Impulses des vorbeiströmenden Fluids berechnet werden. Der Impuls I des vorbeiströmenden Fluids mit der Masse m und der Strömungsgeschwindigkeit v hat die axiale Komponente

$$I_x = mv \cos \theta, \quad (3.20)$$

womit sich dessen Zeitableitung unter der Annahme $\dot{m}v \ll m\dot{v}$ zu

$$\begin{aligned} \dot{I}_x &= \frac{d}{dt}(mv) \cos \theta \\ &= (\dot{m}v + m\dot{v}) \cos \theta \\ &\approx \dot{m}v \cos \theta \\ &= \rho_F q_h v \cos \theta \end{aligned} \quad (3.21)$$

berechnet. Der Volumenstrom

$$q_h = \alpha_d \sqrt{\frac{2}{\rho_F}} A(x_V) \sqrt{p_2 - p_T} \quad (3.22)$$

wird entsprechend Gl. (3.13) als turbulenter Volumenstrom mit variabler (von der Kolbenposition x_V abhängiger) Querschnittsfläche $A_B = A(x_V)$ modelliert. Aus der

Impulsbilanz $\dot{I}_x = F_B$ folgt mit Gl. (3.21) und $A(x_V)v = q_h$ eine Berechnungsvorschrift für die Strömungskraft

$$\begin{aligned} F_B &= \rho_F q_h v \cos \theta \\ &= \rho_F \frac{q_h^2}{A(x_V)} \cos \theta \\ &= 2\alpha_d^2 A(x_V) |p_2 - p_T| \cos \theta \end{aligned} \quad (3.23)$$

in Abhängigkeit des Strömungswinkels θ . Dieser ist abhängig von der Ventilgeometrie und kann i.A. nur geschätzt oder experimentell bestimmt werden [12]. Wegen der quadratischen Abhängigkeit der Strömungskraft vom Volumenstrom q_h wirkt die Kraft unabhängig von der Strömungsrichtung meist in Schließrichtung des Kolbens [125].

3.2.3 Pumpendynamik

Es gibt verschiedene Arten von Hydropumpen, welche nach unterschiedlichen Funktionsprinzipien arbeiten und damit ein unterschiedliches dynamisches Verhalten aufweisen. Es ist nicht das Ziel dieser Arbeit, die Auswirkungen verschiedener Pumpenbauarten auf die Dynamik der Ventilsteuerungen zu untersuchen. Vielmehr sollen einfache empirische Modelle dazu dienen, grundsätzliche Effekte abzubilden und zu verstehen. Aus diesem Grund werden die Funktionsprinzipien der einzelnen Pumpenbauarten hier nicht ausführlich diskutiert. Es sei an dieser Stelle auf die zahlreichen Grundlagenbücher wie z. B. [8, 125] verwiesen, die dieses Thema sehr gut abdecken. In dieser Arbeit kommen mit der idealen Konstantpumpe, der realen Konstantpumpe und der Verstellpumpe drei verschiedene Pumpenmodelle zum Einsatz. Die ideale Konstantpumpe liefert einen konstanten Volumenstrom

$$q_{P,\text{ideal}} = q_P \quad (3.24)$$

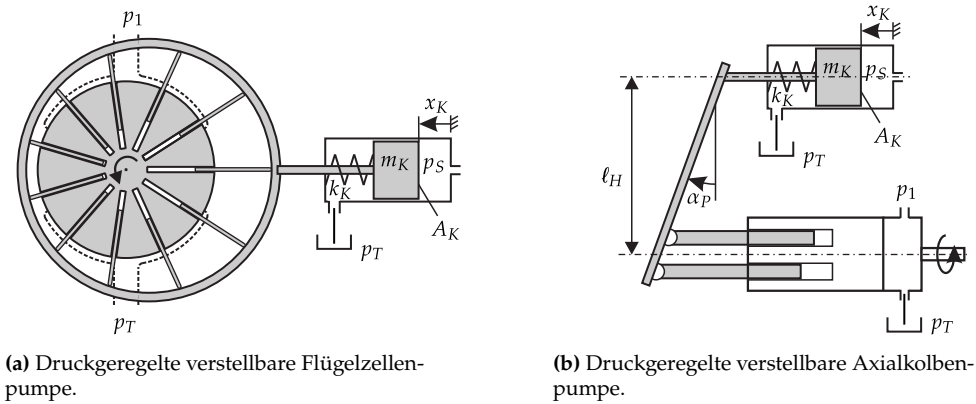
unabhängig des gegen sie wirkenden Drucks.

Nach [50] können die Dynamik und der geförderte Volumenstrom einer realen Konstantpumpe als lineares PT1-Glied in der Winkelgeschwindigkeit ω_P über die Gleichungen

$$J_P \dot{\omega}_P + d_P \omega_P = M_P - W_P p_1 \quad (3.25)$$

$$q_{P,\text{real}} = \hat{q}_P \omega_P \quad (3.26)$$

modelliert werden. Die Pumpe wird dabei mit dem Drehmoment M_P angetrieben. Die Parameter J_P und d_P sind die Drehträgheit und die Dämpfungskonstante. Der Widerstand aufgrund der Druckdifferenz zwischen Pumpeneinlass und Pumpenauslass wird mit dem Parameter W_P beschrieben. Während das Fördervolumen \hat{q}_P sowie die



(a) Druckgeregelt verstellbare Flügelzellenpumpe.

(b) Druckgeregelt verstellbare Axialkolbenpumpe.

Abbildung 3.6: Prinzipskizzen der im Bereich niedriger Drücke eingesetzten Verstellpumpen.

Parameter J_p und M_p relativ einfach aus der Pumpengeometrie und wenigen Materialparametern bestimmt werden können, müssen d_p und W_p zumeist experimentell bestimmt oder geschätzt werden.

Bei Verstellpumpen erfolgt eine Änderung des Volumenstroms nicht über eine Drehzahländerung, sondern über eine Änderung des Fördervolumens. Aus konstruktiven Gründen sind Verstellpumpen derzeit nur als Kolben- und Flügelzellenpumpen praktisch verfügbar [8]. Die Drehzahl bleibt üblicherweise konstant, weshalb die Rotationsdynamik hier nicht berücksichtigt werden muss. Bei druckgeregelt Verstellpumpen wird das Verdrängungsvolumen mit Hilfe eines Steuerkolbens eingestellt, auf dessen Stirnfläche ein Steuerdruck wirkt. Bei verstellbaren Flügelzellenpumpen bewirkt die Auslenkung des Steuerkolbens x_K eine Verschiebung der Rotorachse relativ zum Gehäuse, wodurch das Fördervolumen verändert wird, siehe Abb. 3.6a. Bei Axialkolbenpumpen wird das Verdrängungsvolumen über eine Anpassung des Winkels α_p zwischen einer sogenannten Schrägscheibe und der Pumpenachse verändert, siehe Abb. 3.6b. Radialkolbenpumpen werden vor Allem in Systemen mit hohen Drücken eingesetzt [125] und werden deshalb hier nicht berücksichtigt.

Die Pumpendynamik kann mit der Kolbenverschiebung x_K , dem Steuerdruck p_S und dem Arbeitsdruck p_1 pumpenunabhängig in der allgemeinen Form

$$m_K \ddot{x}_K + d_K \dot{x}_K + k_K (x_K - x_{K0}) = A_K p_S + f_p(x_K, p_1) \quad (3.27)$$

$$q_{p,var} = f_q(x_K) \quad (3.28)$$

dargestellt werden. Dabei ist m_K die kombinierte Masse von Pumpe und Steuerkolben, k_K die Steifigkeit, x_{K0} die Federvorspannung und A_K die Steuerkolbenfläche. Alle Reibungseinflüsse werden wie zuvor durch einen linear viskosen Dämpfungsterm mit

dem Dämpfungsparameter d_K modelliert. Die Funktion $f_P(x_K, p_1)$ ist abhängig von der Pumpenbauart.

Für verstellbare Flügelzellenpumpen wird in [65] gezeigt, dass die Funktionen in der Form

$$f_P(x_K, p_1) = f_{P0}(x_K) - a_{P1}(x_K)p_1 \approx f_{P0} - a_{P1}p_1 \quad (3.29)$$

$$f_q(x_K) = \tilde{q}_P(x_K - x_K^o) \quad (3.30)$$

dargestellt werden können. Für eine vertikal verschobene Rotorachse, was bei Flügelzellenpumpen aufgrund des leiseren Laufverhaltens eine übliche konstruktive Maßnahme ist [124], sind die Abhängigkeiten der Funktionen a_{P1} und f_{P2} von der Kolbenposition vernachlässigbar klein, siehe [65]. Für diesen Fall muss in der Berechnung des Volumenstroms jedoch ein Offset x_K^o berücksichtigt werden, da auch in der Nullstellung ein nicht verschwindender Volumenstrom gefördert wird.

Für verstellbare Axialkolbenpumpen gelten nach [50] die Zusammenhänge

$$f_P(x_K, p_1) = 0 \quad (3.31)$$

$$x_K = \ell_H \sin \alpha_P \quad (3.32)$$

$$f_q(x_K) = \tilde{q}_P \tan \alpha_P = \tilde{q}_P \frac{x_K}{\ell_H} \left(1 - \frac{x_K^2}{\ell_H^2} \right) \approx \tilde{q}_P \frac{x_K}{\ell_H} . \quad (3.33)$$

Der Parameter \tilde{q}_P ist jeweils abhängig von der Pumpengeometrie und der Pumpendrehzahl. Man sieht, dass die qualitativen Zusammenhänge beider Pumpenbauarten, welche die Pumpendynamik beschreiben, sehr ähnlich sind, bzw. dass die Beschreibung der Axialkolbenpumpe in der der Flügelzellenpumpe enthalten ist.

Der Transport des Fluids erfolgt in realen Pumpen niemals kontinuierlich sondern meist in n_P über den Umfang verteilten Kammern. Dies führt zu hochfrequent überlagerten Schwankungen des Volumenstroms, welche in erster Näherung als

$$q_t = A_P \cos(n_P \omega_P t) \quad (3.34)$$

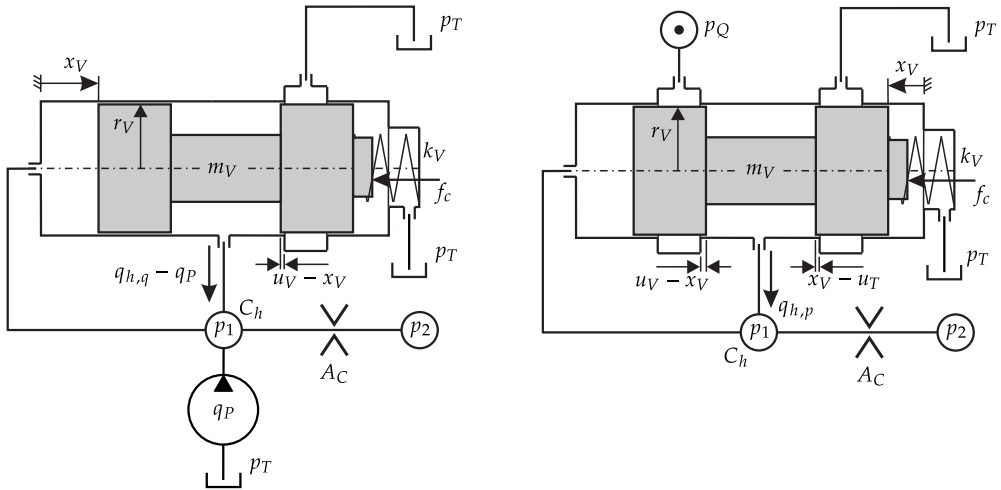
modelliert werden können.

4 Verallgemeinerter Ventilkreislauf

Die physische Druckrückführung ist das verbindende Element der in dieser Arbeit untersuchten Klasse hydraulischer Systeme. Einige Kreislaufrealisierungen, welche dieses Funktionsprinzip als zentrales Element beinhalten, sind in den Abbildungen 3.1 und 3.2 dargestellt. Dass die Realisierungen auf dem gleichen Funktionsprinzip basieren, spiegelt sich auch in ähnlichen Gleichungsstrukturen der beschreibenden Modelle wider. Dies legt den Schluss nahe, dass auch im Hinblick auf die Stabilität der Gleichgewichtslage und das dynamische Verhalten der Systeme Gemeinsamkeiten existieren.

Das Ziel dieses Kapitels ist es, ein Hilfsmodell abzuleiten, in dem diese gemeinsamen dynamischen Verhaltensweisen integriert sind und welches somit alle Elemente enthält, die die Stabilität und die Dynamik der Systeme wesentlich beeinflussen. Diese gemeinsamen Elemente sind eine Energiequelle, ein massebehafteter Kolben mit einer oder zwei Steuerkanten, eine Steuerkraft oder Federvorspannung, eine Druckrückführung und ein Verbraucher. Dieses Hilfsmodell wird im Folgenden als verallgemeinerter Ventilkreislauf bezeichnet und soll so konzipiert sein, dass an ihm eine möglichst allgemeine, modellübergreifende Analyse der Stabilität und nichtlinearen Dynamik dieser ganzen Systemklasse möglich ist.

Dieses Hilfsmodell wird in Abschnitt 4.1 vorgestellt. Es vereint die beiden Kreisläufe des Konstantdrucksystems mit Druckregelventil und des Systems mit Druckquelle und 3/3-Proportional-Wegeventil aus den Abbildungen 3.1a und 3.2a. In Abschnitt 4.2 wird ein dimensionsloses Modell des verallgemeinerten Ventilkreislaufs hergeleitet. Es wird weiterhin gezeigt, dass die zugrundeliegenden mathematischen Beschreibungen der beinhalteten Systeme strukturell nahezu identisch sind und dass deren stationäres Verhalten anhand der selben Differentialgleichung beschrieben werden kann. Wie andere Kreislaufvarianten aus dem verallgemeinerten Ventilkreislauf hervorgehen und welche Rückschlüsse auf deren Stabilität und nichtlineare Dynamik eine Analyse des verallgemeinerten Ventilkreislaufs zulässt, wird in Abschnitt 4.3 beispielhaft für die weiteren Kreislaufrealisierungen aus den Abbildungen 3.1 und 3.2 diskutiert.



(a) Konstantdrucksystem mit Druckregelventil und Konstantpumpe.

(b) Kreislauf mit 3/3-Proportional-Wegeventil und Druckquelle.

Abbildung 4.1: Detaillierte Darstellungen der Ventilkreisläufe, aus denen der verallgemeinerte Ventilkreislauf gebildet wird. Die Steuerkraft f_c setzt sich im Allgemeinen aus einer Federvorspannung und einer Magnetkraft zusammen.

4.1 Physikalisches Modell

Detaillierte Darstellungen des Konstantdrucksystems mit Druckregelventil und Konstantpumpe und des Systems mit 3/3-Proportional-Wegeventil und Druckquelle, aus denen der verallgemeinerte Ventilkreislauf gebildet wird, sind in Abb. 4.1 dargestellt. Die Energiebereitstellung erfolgt durch eine Pumpe (Volumenstrom q_P) bzw. eine Druckquelle (Versorgungsdruck p_Q). Die Druckrückführung des Systemdrucks p_1 erfolgt auf die Kolbenstirnfläche mit dem Radius r_V . Die Gegenkraft wird durch eine Feder mit der Steifigkeit k_V erzeugt. Die Federn bewirken eine Vorspannung der Ventilkolben jeweils an die Position $x_V = 0$ m. Somit ist beim Kreislauf mit Druckquelle eine zusätzliche Steuerkraft f_c zwingend erforderlich, die die Steuerkante zur Druckquelle hin öffnen kann. Beim Kreislauf mit Konstantpumpe wird diese Steuerkraft nur dann benötigt, wenn das stationäre Druckniveau des Systemdrucks variabel sein soll. Eine Verschiebung x_V des Ventilkolbens (Masse m_V) erzeugt eine Veränderung des Volumenstroms q_h , welcher über die Ventilsteuerkanten ($x_V = u_V$ und $x_V = u_T$) in das Volumen der Kapazität C_h fließt. Der Verbraucher wird hier als turbulenter Widerstand mit der Blendenfläche A_C modelliert.

Der Idee eines hohen Abstraktionsgrads folgend, werden zunächst gegenüber den in Abschnitt 3.2 eingeführten Gleichungen einige weitere Annahmen getroffen, um die Modellierung und spätere Analyse zu vereinfachen. Zunächst werden im fluid-

dynamischen Teilsystem die hydraulischen Induktivitäten sowie die Abhängigkeit der Kapazitäten von den Positionen benachbarter Kolben vernachlässigt. Somit folgt $C_h \neq f(x_V)$ und $L_h = 0$. Im mechanischen Teilsystem werden die Strömungskräfte sowie der Anteil der Coulomb'schen Reibung vernachlässigt. Die Pumpe und die Druckquelle werden als ideal modelliert, was bedeutet, dass der Pumpenvolumenstrom q_P und der Versorgungsdruck p_Q konstant und lastunabhängig sind. Der Druck im Verbraucher $p_2 = p_T$ ist konstant und wird dem Umgebungsdruck gleichgesetzt.

Mit diesen Vereinfachungen können die Systemgleichungen in der kompakten Form

$$m_V \ddot{x}_V + d_V \dot{x}_V + k_V x_V = \pm(r_V^2 \pi p_1 - f_c) \quad (4.1)$$

$$C_h \dot{p}_1 = \mp r_V^2 \pi \dot{x}_V + q_h(x_V, p_1) + q_C(p_1) \quad (4.2)$$

dargestellt werden. Das obere Vorzeichen gehört dabei zum Kreislauf mit Konstantpumpe, das untere zum Kreislauf mit Druckquelle. Es wird nicht explizit zwischen Stetigventilen und Proportionalventilen unterschieden. Das heißt, die Kraft f_c beinhaltet im Allgemeinen sowohl Federvorspannungen als auch Magnetkräfte. Der elektromagnetische Teil ist dabei in Abb. 4.1 nicht explizit dargestellt, da die Quelle der bereitgestellten Steuerkraft für die Systemdynamik nicht relevant ist.

Der Volumenstrom $q_h(x_V, p_1)$ über die Steuerkanten der Ventile

$$q_h(x_V, p_1) = \begin{cases} q_{h,q}(x_V, p_1), & \text{Kreislauf mit Konstantpumpe} \\ q_{h,p}(x_V, p_1), & \text{Kreislauf mit Druckquelle} \end{cases} \quad (4.3)$$

ist abhängig von der Kreislaufvariante. Dabei werden die Funktionen

$$q_{h,q}(x_V, p_1) = -\gamma_F \sigma(x_V - u_V) 2r_V \pi (x_V - u_V) \Delta(p_1 - p_T) + q_P \quad (4.4)$$

$$q_{h,p}(x_V, p_1) = -\gamma_F \sigma(u_T - x_V) 2r_V \pi (u_T - x_V) \Delta(p_1 - p_T) \\ + \gamma_F \sigma(x_V - u_V) 2r_V \pi (x_V - u_V) \Delta(p_Q - p_1) \quad (4.5)$$

aus der Blendengleichung, Gl. (3.13), gebildet, wobei die Durchlassflächen linear von den Kolbenpositionen abhängen. Um eine kompakte Notation zu gewährleisten, werden die Funktionen

$$\Delta(p) = \text{sign}(p) \sqrt{|p|} \quad (4.6)$$

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\text{sign}(p) = \sigma(p) - \sigma(-p) \quad (4.8)$$

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
Masse des Ventilkolbens	m_V	0.018	kg
Viskoser Dämpfungskoeffizient	d_V	150	N s/m
Federsteifigkeit	k_V	800	N/m
Rückstellkraft/Steuerkraft	f_c	110	N
Radius des Ventilkolbens	r_V	0.0035	m
Ventilüberdeckung	u_V	0.002	m
Ventilüberdeckung	u_T	0.0015	m
Förderstrom der idealen Pumpe	q_P	5	l/min
Versorgungsdruck	p_Q	55	bar
Blendenfläche	A_C	$\pi/4 \cdot (10^{-3})^2$	m ²
Kapazität	C_h	$2.5 \cdot 10^{-13}$	m ³ /Pa
Turbulenter Strömungskoeffizient	γ_F	0.03	$\sqrt{\text{m}^3/\text{kg}}$

Tabelle 4.1: In den Simulationen standardmäßig verwendete Parameterwerte.

und die Abkürzung $\gamma_F = \alpha_d \sqrt{\frac{2}{\rho_F}}$ eingeführt. Für den Volumenstrom zum Verbraucher ergibt sich ebenfalls aus der Blendengleichung die Darstellung

$$q_C(p_1) = -\gamma_F A_C \Delta(p_1 - p_T) \quad (4.9)$$

mit der Blendenfläche A_C .

Die Abbildungen 4.2 und 4.3 zeigen einen Vergleich der transienten Systemdynamiken der beiden Kreisläufe. Die numerischen Simulationen sind – sofern nicht explizit anders angegeben – mit den Standardparametern in Tab. 4.1 berechnet. Die Parameterwerte orientieren sich an realen Ventilen, welche für niedrige Drücke ausgelegt sind. Durch die sehr kleine Blendenfläche A_C ist der Volumenstrom zum Verbraucher in der Größenordnung eines Leckagestroms. Durch diese Parameterwahl sind z. B. stationär verfahrenende Zylinder und die meisten Hydraulikmotoren, welche einen viel größeren Volumenstrom benötigen, als Verbraucher ausgeschlossen. Mechanische Verbraucher wie Kupplungen oder Bremsen, welche lediglich einen stationären Anpressdruck benötigen, bilden die Motivation für diese Parameterwahl.

Die Anfangswerte der Simulation $[x_V(0), \dot{x}_V(0), p_1(0)]^T = [0 \text{ m}, 0 \text{ m/s}, 0 \text{ bar}]^T$ entsprechen einer neutralen Kolbenposition (beim System mit Druckquelle ist hierfür ebenso $f_c = 0 \text{ N}$ vorauszusetzen) in einem drucklosen System.

Beim Konstantdrucksystem mit Konstantpumpe verbleibt der Kolben solange in seiner vorgespannten Anfangsposition am linken Ventilende, bis der Systemdruck sich soweit aufgebaut hat, dass er durch die Druckrückführung die Federvorspannung bzw. die Steuerkraft f_c überwindet. Beim System mit Druckquelle wird zum Zeitpunkt $t = 0 \text{ s}$ die Kraft f_c aktiv, wodurch sich der Kolben instantan bewegt. In beiden Kreislaufvarianten stellt sich nach wenigen Zehntelsekunden ein stationärer Betriebszustand mit jeweils

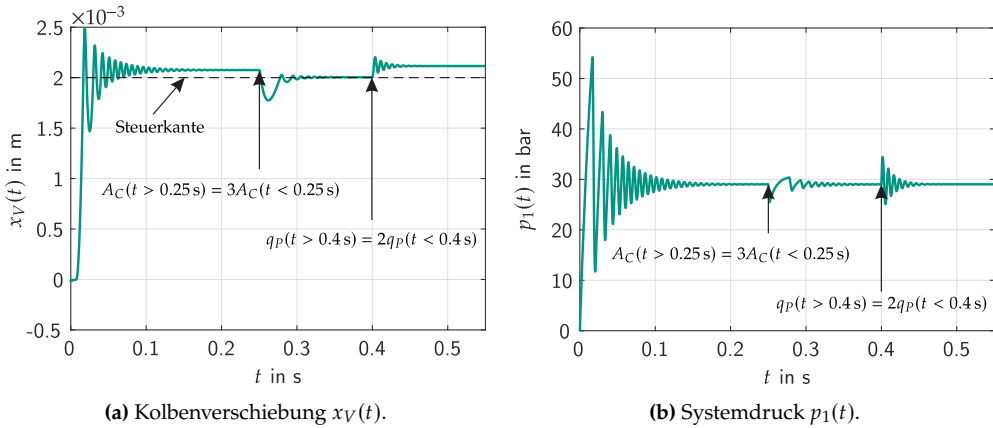


Abbildung 4.2: Systemdynamik des Konstantdrucksystems mit Druckregelventil und Konstantpumpe. Dämpfung $d_V = 240 \text{ N s/m}$, Blendenfläche $A_C(t < 0.25 \text{ s}) = \pi \cdot (10^{-3})^2 \text{ m}^2$, Volumenstrom $q_P(t < 0.4 \text{ s}) = 7.51/\text{min}$.

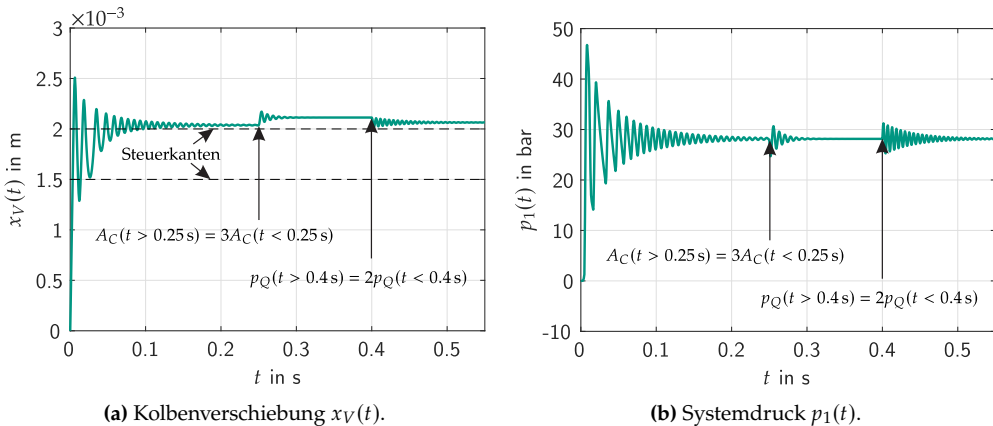


Abbildung 4.3: Systemdynamik des Systems mit 3/3-Proportional-Wegeventil und Druckquelle. Dämpfung $d_V = 240 \text{ N s/m}$, Blendenfläche $A_C(t < 0.25 \text{ s}) = \pi \cdot (10^{-3})^2 \text{ m}^2$, Versorgungsdruck $p_Q(t < 0.4 \text{ s}) = 55 \text{ bar}$.

leicht geöffneter Steuerkante ein. Die Öffnung der Steuerkante kompensiert dabei exakt den von der Konstantpumpe überschüssig geförderten Volumenstrom, bzw. ist so bemessen, dass aus der Druckquelle exakt der vom Verbraucher benötigte Volumenstrom entnommen wird. Die zweite Steuerkante des Kreislaufts mit Druckquelle ist ausschließlich zu Beginn des Einschwingvorgangs aktiv. Das stationäre Druckniveau ergibt sich mit den verwendeten Parametern zu einem Wert von knapp unter 30 bar. Die stationären Druckniveaus der beiden Kreisläufe sind dabei leicht unterschiedlich, da die Kraftdifferenz, welche von der Feder durch eine Kolbenverschiebung bis zur Öffnung der Steuerkante hervorgerufen wird, in unterschiedliche Richtungen wirkt.

Das Funktionsprinzip der Selbstregulierung ist durch einen Lastwechsel bei $t = 0.25$ s veranschaulicht. Hier wird die Blendenfläche A_C verdreifacht, wodurch der Verbraucher die dreifache Menge an Volumenstrom benötigt. Nach kurzen transienten Prozessen stellt sich näherungsweise das selbe Druckniveau wieder ein, wohingegen nun die Kolbenpositionen sichtbar verschoben sind. Auch eine Veränderung der Versorgungsleistung (Pumpenvolumenstrom q_P bzw. Versorgungsdruck p_Q) bei $t = 0.4$ s kompensieren die Ventile nach einem kurzen Einschwingvorgang nahezu vollständig. Die Kompensation erfolgt jeweils durch eine Anpassung der Kolbenposition x_V . Dadurch wird deutlich, dass eine geringe Federsteifigkeit notwendig ist, um die Druckniveaus nach einem Lastwechsel konstant zu halten.

4.2 Dimensionsloses Modell

Eine Voraussetzung für die Anwendbarkeit asymptotischer Methoden ist ein dimensionsloses Modell, dessen dimensionslose Variablen mit Hilfe charakteristischer Systemgrößen definiert werden. Wird eine beliebige Entdimensionierung gewählt, werden die Größenordnungen der einzelnen Terme i.A. verfälscht. In vielen dynamischen Systemen sind diese charakteristischen Größen seit Langem etabliert. Bei linearen Schwingern sind es beispielsweise die Eigenkreisfrequenzen des ungedämpften Systems, mit denen eine dimensionslose Zeit eingeführt werden kann. Ein andere Beispiel stellt die Sommerfeldzahl dar, welche eine dimensionslose Lagerlast von Gleitlagern beschreibt. Im Kontext der hydraulischen Ventilsteuerungen sind solche charakteristischen Größen bisher nicht etabliert. Zumeist wird zur Entdimensionierung der Zeit die oben erwähnte Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Ventilkolbens in Verbindung mit der Feder verwendet. Bei Servoventilen ohne Druckrückführung ist dies eine sinnvolle Entdimensionierung. Bei Ventilen mit Druckrückführung ist die Bewegung des Ventilkolbens jedoch stark an die Druckdynamik in der Systemkapazität gekoppelt. Deshalb ist die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Ventilkolbens i.A. keine charakteristische Systemfrequenz. Zur Entdimensionierung der Kolbenverschiebung x_V wird des Weiteren eine charakteristische Länge benötigt, dessen Wahl sich nicht intuitiv erschließt.

Die Frage nach geeigneten charakteristischen Größen ist nicht ausschließlich an das zu untersuchende System, sondern spezifischer an die zu untersuchenden Lösungen gekoppelt. Bei der Untersuchung transienter Vorgänge zwischen Lastwechseln wäre vermutlich das Kolbenspiel eine geeignete charakteristische Länge, da bei diesen Vorgängen oftmals weite Teile des möglichen Kolbenwegs ausgenutzt werden. In dieser Arbeit liegt der Fokus auf der Untersuchung stationärer periodischer – im Allgemeinen selbsterregter – Schwingungen. Auf der Suche nach charakteristischen Größen lohnt sich somit ein Blick auf die Ergebnisse numerischer Simulationen. In der in Abb. 4.4 dargestellten Simulation wird die Systemdämpfung d_V kontinuierlich reduziert.

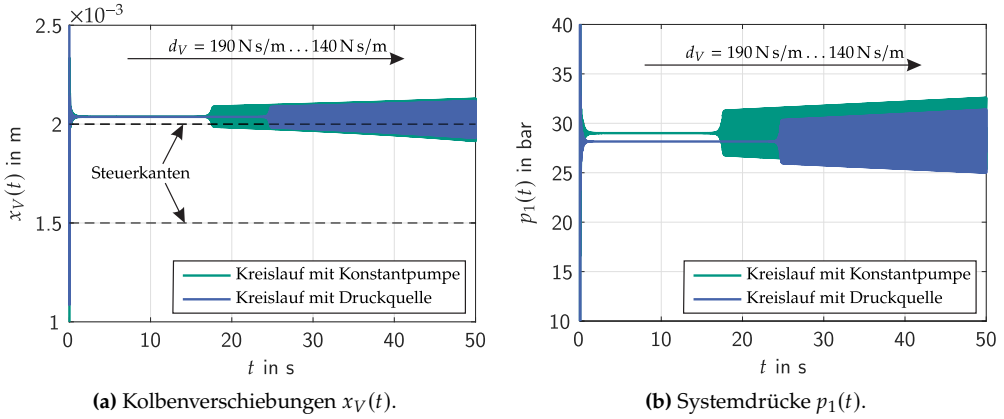


Abbildung 4.4: Stationäres Verhalten unter Variation der Systemdämpfung d_V .

Bei beiden Kreislaufvarianten wird dabei die Stabilitätsgrenze überschritten und es kommt zum Auftreten selbsterregter Schwingungen. Die Schwingungen erreichen sehr schnell nach dem Überschreiten der Stabilitätsgrenze die Ventilsteuerkante und werden offensichtlich durch diese gedämpft, da auch nach weiterer Reduktion der Dämpfung die Schwingungsamplituden nur langsam zunehmen. Da für praktische Anwendungen vor Allem der Bereich nahe der Stabilitätsgrenze interessant ist, ist daher der Abstand zwischen der Gleichgewichtslage $x_V = x_{V0}$ und der Steuerkante $x_V = u_V$ eine sinnvolle charakteristische Länge. Für die exakte Berechnung der Gleichgewichtslage x_{V0} muss eine kubische Gleichung gelöst werden, siehe [132]. Der resultierende analytische Ausdruck ist für den Zweck der Entdimensionierung zu komplex, weshalb im Folgenden eine Näherung der Gleichgewichtslage \tilde{x}_{V0} berechnet wird.

Die Gleichgewichtsbedingungen lauten

$$k_V x_{V0} = \pm(r_V^2 \pi p_{10} - f_c), \quad (4.10)$$

$$0 = q_h(x_{V0}, p_1) + q_C(p_{10}). \quad (4.11)$$

Aufgrund des geringen Kolbenspiels und der im Allgemeinen sehr weichen Federn gilt die Relation $k_V x_{V0} \ll f_c$. Damit ergibt sich eine näherungsweise Gleichgewichtslage

$$p_{10} \approx \tilde{p}_{10} = \frac{f_c}{r_V^2 \pi} \quad (4.12)$$

$$x_{V0} \approx \tilde{x}_{V0} = u_V + \begin{cases} \frac{q_P}{2r_V \pi \gamma_F} \sqrt{\frac{1}{\tilde{p}_{10}}} - \frac{A_C}{2r_V \pi}, & \text{Kreislauf mit Konstantpumpe} \\ \frac{A_C}{2r_V \pi} \sqrt{\frac{\tilde{p}_{10}}{p_Q - \tilde{p}_{10}}}, & \text{Kreislauf mit Druckquelle} \end{cases} \quad (4.13)$$

unter Vernachlässigung des Terms $k_V x_V$.

Um eine charakteristische Frequenz zur Entdimensionierung der Zeit zu finden, wird unter der Annahme eines sehr leichten Ventilkolbens die Trägheitskraft in Gl. (4.1) vernachlässigt. Dies ist für die vorliegenden Parameterwerte eine durchaus gute Approximation. Mit Hilfe von Gl. (4.1) kann der Systemdruck

$$p_1 = \frac{1}{r_V^2 \pi} (\pm (d_V \dot{x}_V + k_V x_V) + f_c) \quad (4.14)$$

nun als Funktion der Kolbenposition x_V und der Kolbengeschwindigkeit \dot{x}_V ausgedrückt werden. Wird dieser Ausdruck in (4.2) eingesetzt und eine Taylorreihen-Entwicklung um den Punkt $\{\tilde{x}_{V0}, \tilde{p}_{10}\}$ durchgeführt, führt dies auf die gedämpfte, lineare Schwingungsdifferentialgleichung

$$\begin{aligned} \pm \frac{C_h}{r_V^2 \pi} d_V \ddot{x}_V + \left(\pm \frac{C_h}{r_V^2 \pi} k_V \pm r_V^2 \pi \mp \left(\frac{\partial q_h}{\partial p_1} \Big|_{\tilde{x}_{V0}, \tilde{p}_{10}} + \frac{\partial q_C}{\partial p_1} \Big|_{\tilde{p}_{10}} \right) \frac{d_V}{r_V} \right) \dot{x}_V \\ + \left(\mp \left(\frac{\partial q_h}{\partial p_1} \Big|_{\tilde{x}_{V0}, \tilde{p}_{10}} + \frac{\partial q_C}{\partial p_1} \Big|_{\tilde{p}_{10}} \right) \frac{k_V}{r_V^2} - \frac{\partial q_h}{\partial x_V} \Big|_{\tilde{x}_{V0}, \tilde{p}_{10}} \right) x_V + \text{konst.} = 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Unter Vernachlässigung der partiellen Ableitungen nach p_1 kann die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems

$$\omega_0^2 = \frac{\partial q_h}{\partial x_V} \Big|_{\tilde{x}_{V0}, \tilde{p}_{10}} \left(\frac{C_h d_V}{r_V^2 \pi} \right)^{-1} = \frac{2 r_V \pi \gamma_F}{C_h d_V} \sqrt{r_V^2 \pi f_c}, \quad (4.16)$$

näherungsweise berechnet und als charakteristische Frequenz zur Entdimensionierung der Zeit herangezogen werden. Gl. (4.16) ist für beide Kreislaufvarianten identisch.

Für die Standardparameterwerte aus Tab. 4.1 ergibt sich $\omega_0 = 1070$ rad/s. In der Simulation treten unter Verwendung der selben Parameterwerte Schwingungskreisfrequenzen von 882 rad/s bzw. 891 rad/s für die Systeme mit Konstantpumpe und Druckquelle auf. Für den Zweck der Entdimensionierung ist das eine ausreichende Genauigkeit. Die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Ventilkolbens liegt bei $\sqrt{\frac{k_V}{m_V}} = 211$ rad/s und ist damit eine sehr viel schlechtere Näherung.

Mit den dimensionslosen Variablen und Parametern

$$\tau = \omega_0 t, \quad X_V = \frac{x_V - u_V}{\tilde{x}_{V0}}, \quad P_1 = \frac{(p_1 - p_T) r_V^2 \pi}{d_V \omega_0 (\tilde{x}_{V0} - u_V)}, \quad (4.17)$$

$$M_V = \frac{m_V \omega_0}{d_V}, \quad K_V = \frac{k_V}{d_V \omega_0}, \quad F_c = \frac{(k_V u_V + f_c)}{d_V \omega_0 (\tilde{x}_{V0} - u_V)}, \quad \alpha_V = \frac{(r_V^2 \pi)^2}{\omega_0 d_V C_h},$$

$$\beta_V = \sqrt{\frac{r_V^2 \pi (\tilde{x}_{V0} - u_V)}{\omega_0^3 d_V} \frac{2 r_V \pi \gamma_F}{C_h}}, \quad \alpha_C = \sqrt{\frac{r_V^2 \pi}{\omega_0^3 d_V (\tilde{x}_{V0} - u_V)} \frac{A_C \gamma_F}{C_h}},$$

$$Q_P = \frac{r_V^2 \pi q_P}{\omega_0^2 (\tilde{x}_{V0} - u_V) d_V C_h}, \quad P_Q = \frac{(p_Q - p_T) r_V^2 \pi}{d_V \omega_0 (\tilde{x}_{V0} - u_V)}, \quad \delta_U = \frac{u_V - u_T}{\tilde{x}_{V0}}$$

ergeben sich die dimensionslosen Systemgleichungen

$$M_V X_V'' + X_V' + K_V X_V = \pm(P_1 - F_c) \quad (4.18)$$

$$P_1' = \mp \alpha_V X_V' + Q_h(X_V, P_1) - Q_C(P_1) \quad (4.19)$$

mit den dimensionslosen Volumenströmen

$$Q_{h,q}(X_V, P_1) = Q_P - \begin{cases} \beta_V X_V \sqrt{P_1}, & X_V > 0 \\ 0, & X_V \leq 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

$$Q_{h,p}(X_V, P_1) = \begin{cases} \beta_V X_V \sqrt{P_Q - P_1}, & X_V > 0 \\ 0, & -\delta_U < X_V \leq 0 \\ \beta_V (X_V + \delta_U) \sqrt{P_1}, & X_V \leq -\delta_U \end{cases} \quad (4.21)$$

$$Q_C(P_1) = \alpha_C \sqrt{P_1}, \quad (4.22)$$

in denen die Annahmen $p_1 \geq p_T$ und $p_Q \geq p_1$ integriert sind. Für die dimensionslose Gleichgewichtslage ergibt sich mit den Gleichungen (4.12) und (4.13) näherungsweise

$$[\tilde{X}_{V0}, \tilde{X}'_{V0}, \tilde{P}_{10}]^T = [1, 0, F_c]^T. \quad (4.23)$$

Die mit Tab. 4.1 aus Gl. (4.17) resultierenden dimensionslosen Parameterwerte sind in Tab. 4.2 aufgeführt.

Im Folgenden wird die Koordinate $\xi_V = X_V - X_{V0}$ eingeführt, welche Abweichungen von der Gleichgewichtslage des Ventilkolbens X_{V0} beschreibt. Anhand von Gl. (4.18) kann der Druck

$$\begin{aligned} P_1 &= F_c \pm (M_V \xi_V'' + \xi_V' + K_V (\xi_V + X_{V0})) \\ &= P_{10} \pm (M_V \xi_V'' + \xi_V' + K_V \xi_V) \end{aligned} \quad (4.24)$$

nun in Abhängigkeit dieser verschobenen Kolbenposition ξ_V ausgedrückt werden. Durch Einsetzen von Gl. (4.24) in Gl. (4.19) ergibt sich eine Systemdarstellung

$$\begin{aligned}
 0 &= M_V \xi_V''' + \xi_V'' + K_V \xi_V' + \alpha_V \xi_V' \\
 &\mp Q_h(\xi_V + X_{V0}, P_{10} \pm (M_V \xi_V'' + \xi_V' + K_V \xi_V)) \\
 &\pm Q_C(P_{10} \pm (M_V \xi_V'' + \xi_V' + K_V \xi_V))
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

als Einzeldifferentialgleichung dritter Ordnung. Im Folgenden wird mit der dimensionslose Kolbenmasse ein kleiner Parameter $\varepsilon := M_V \ll 1$ definiert. Um die Größenordnungen der weiteren Terme in Gl. (4.25) abzuschätzen, müssen diese als Polynome in den abhängigen Variablen ξ_V , ξ_V' und ξ_V'' ausgedrückt werden. Aus diesem Grund werden im Folgenden die Beschreibungen beider Schaltzustände $\xi_V + X_{V0} > 0$ und $\xi_V + X_{V0} \leq 0$ als unabhängige Funktionen betrachtet und beide in eine Taylorreihe um die Gleichgewichtslage $[\xi_V, \xi_V', \xi_V'']^T = [0, 0, 0]^T$ entwickelt. Der dritte Schaltzustand $\xi_V + X_{V0} < -\delta_U$ wird ab hier nicht mehr betrachtet, da die zweite Steuerkante bei positiver Ventilüberdeckung für stationäre Prozesse nicht relevant ist, wie Abb. (4.4a) zeigt.

Die Taylorreihen-Entwicklung führt auf die Darstellung

$$\begin{aligned}
 0 &= M_V \xi_V''' + \xi_V'' + (K_V + \alpha_V) \xi_V' + \begin{cases} Q_P, & \text{Kreislauf mit Konstantpumpe} \\ 0, & \text{Kreislauf mit Druckquelle} \end{cases} \\
 &\mp \begin{cases} Q_h(X_{V0}, P_{10}) + \frac{\partial Q_h}{\partial \xi_V} \Big|_{X_{V0}, P_{10}} \xi_V + \frac{\partial Q_h}{\partial \xi_V'} \Big|_{X_{V0}, P_{10}} \xi_V', & \xi_V + X_{V0} > 0 \\ 0, & \xi_V + X_{V0} \leq 0 \end{cases} \\
 &\mp \begin{cases} \frac{\partial Q_h}{\partial \xi_V''} \Big|_{X_{V0}, P_{10}} \xi_V'' + \frac{\partial^2 Q_h}{\partial \xi_V \partial \xi_V'} \Big|_{X_{V0}, P_{10}} \xi_V \xi_V', & \xi_V + X_{V0} > 0 \\ 0, & \xi_V + X_{V0} \leq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Parameter	Symbol	Wert
Dimensionslose Masse des Ventilkolbens	M_V	0.13
Dimensionslose Federsteifigkeit	K_V	0.005
Dimensionslose Rückstellkraft/Steuerkraft	F_c	17.83
Dimensionslose Kolbenstirnfläche	α_V	0.037
Dimensionsloser Kolbenumfang	β_V	0.24
Dimensionslose Ventilüberdeckung	δ_U	13.46
Dimensionsloser Förderstrom der idealen Pumpe	Q_P	1.92
Dimensionsloser Versorgungsdruck	P_Q	35.50
Dimensionslose Blendenfläche	α_C	0.22

Tabelle 4.2: Dimensionslose Parameterwerte.

$$\pm Q_C(P_{10}) \pm \frac{\partial Q_C}{\partial \xi_V} \Big|_{P_{10}} \xi_V \pm \frac{\partial Q_C}{\partial \xi'_V} \Big|_{P_{10}} \xi'_V \pm \frac{\partial Q_C}{\partial \xi''_V} \Big|_{P_{10}} \xi''_V + R(\xi_V, \xi'_V, \xi''_V) \quad (4.26)$$

mit dem Restglied $R(\xi_V, \xi'_V, \xi''_V)$, welches Terme höherer Ordnung enthält.

Alle Koeffizienten von Monomen der Variablen ξ_V , ξ'_V und ξ''_V , welche in der Größenordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ oder kleiner sind, werden nun vernachlässigt und neue, auf die Größenordnung $\mathcal{O}(1)$ skalierte Parameter eingeführt. Dabei wird

$$1 + \frac{\partial Q_C}{\partial \xi''_V} \Big|_{P_{10}} + \frac{\partial Q_h}{\partial \xi''_V} \Big|_{X_{V0}, P_{10}} \approx 1 \quad (4.27)$$

angenommen, was mit den vorliegenden Parameterwerten eine sehr gute Näherung ist. Daraus folgt die für beide Kreislaufvarianten identische

$$0 = \varepsilon \xi'''_V + \xi''_V \begin{cases} \varepsilon K_s \xi'_V + \omega_s^2 \xi_V + \varepsilon N_s \xi'_V \xi_V, & \xi_V + X_{V0} > 0 \\ \varepsilon \bar{K}_s \xi'_V - \bar{Q}_s, & \xi_V + X_{V0} \leq 0 \end{cases} \quad (4.28)$$

abschnittsweise definierte Differentialgleichung. Der Schaltübergang bei $\xi_V = -X_{V0}$ markiert eine Nichtlinearität der Größenordnung $\mathcal{O}(1)$, da die Terme $\omega_s^2 \xi_V$ und \bar{Q}_s ebenfalls in der Größenordnung $\mathcal{O}(1)$ sind. Die Nichtlinearität $\varepsilon N_s \xi_V \xi'_V$ ist in der Größenordnung $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Für die skalierten Parameter gilt

$$\varepsilon K_s = K_V + \alpha_V + \kappa_T \quad (4.29)$$

$$\varepsilon \bar{K}_s = K_V + \alpha_V + \bar{\kappa}_T \quad (4.30)$$

$$\omega_s^2 = \kappa_T K_V + \begin{cases} \beta_V \sqrt{P_{10}}, & \text{Kreislauf mit Konstantpumpe} \\ \beta_V \sqrt{P_Q - P_{10}}, & \text{Kreislauf mit Druckquelle} \end{cases} \quad (4.31)$$

$$\bar{Q}_s = \begin{cases} Q_P - \alpha_C \sqrt{P_{10}}, & \text{Kreislauf mit Konstantpumpe} \\ \alpha_C \sqrt{P_{10}}, & \text{Kreislauf mit Druckquelle} \end{cases} \quad (4.32)$$

$$\varepsilon N_s = \begin{cases} -\frac{K_V \kappa_T}{2P_{10}} + \frac{\beta_V}{2\sqrt{P_{10}}}, & \text{Kreislauf mit Konstantpumpe} \\ -\frac{K_V \kappa_T}{2(P_Q - P_{10})} + \frac{\beta_V}{2\sqrt{P_Q - P_{10}}} + \frac{\alpha_C K_V P_Q}{4(P_Q - P_{10})P_{10}^{3/2}}, & \text{Kreislauf mit Druckquelle} \end{cases} \quad (4.33)$$

mit den Abkürzungen

$$\kappa_T = \frac{\alpha_C}{2\sqrt{P_{10}}} + \begin{cases} \frac{\beta_V X_{V0}}{2\sqrt{P_{10}}}, & \text{Kreislauf mit Konstantpumpe} \\ \frac{\beta_V X_{V0}}{2\sqrt{P_Q - P_{10}}}, & \text{Kreislauf mit Druckquelle} \end{cases} \quad (4.34)$$

Symbol	Wert (Kreislauf mit Konstantpumpe)	Wert (Kreislauf mit Druckquelle)
ε	0.13	0.13
K_s	0.74	0.75
\bar{K}_s	0.53	0.53
ω_s	1.00	0.98
\bar{Q}_s	0.99	0.95
N_s	0.22	0.22
X_{V0}	0.99	0.98

Tabelle 4.3: Werte der skalierten Parameter.

$$\bar{k}_T = \frac{\alpha_C}{2\sqrt{P_{10}}} . \quad (4.35)$$

Aus den Gleichungen (4.31) und (4.32) folgt mit Gl. (4.23), dass sich für beide Systemvarianten näherungsweise die selben skalierten Parameterwerte ergeben, falls

$$Q_P = 2\sqrt{F_c}\alpha_C \quad \text{und} \quad P_Q = 2F_c \quad (4.36)$$

gilt. Dies ist mit den dimensionslosen Parameterwerten aus Tab. 4.2 näherungsweise erfüllt (siehe auch Tab. 4.3), weshalb die im weiteren Verlauf der Arbeit präsentierten Ergebnisse sowohl für das Konstantdrucksystem mit Konstantpumpe als auch für das System mit Druckquelle gelten und nicht mehr explizit zwischen diesen beiden Systemen unterschieden wird. Die Standardparameter aus Tab. 4.1 erzeugen die in Tab. 4.3 dargestellten skalierten Parameterwerte.

Die Abbildung 4.5 zeigt einen Vergleich der stationären Grenzzyklusschwingungen zwischen dem Originalsystem, Gleichungen (4.18) und (4.19), und der Taylorreihen-Entwicklung, Gl. (4.28). Die Abweichungen zwischen den beiden Simulationsergebnissen resultieren aus der Vernachlässigung der Terme in der Größenordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Auffällig ist die Projektion in der $X'_V - X''_V$ -Ebene. Bei geschlossener Steuerkante besteht hier ein nahezu linearer Zusammenhang, während bei offener Steuerkante die Trajektorie nahezu kreisförmig verläuft, was auf einen trigonometrischen Zusammenhang schließen lässt.

Die Minima und Maxima der stationären Grenzzyklusschwingungen sowie deren Frequenz sind in Abb. 4.6 dargestellt. Eine Verringerung des kleinen Parameters $M_V = \varepsilon$ führt zur Stabilisierung der Gleichgewichtslage. Der Bifurkationspunkt wird durch die Taylorreihen-Entwicklung nicht sichtbar verschoben. Selbst für (aus einer asymptotischen Betrachtungsweise heraus) relativ große ε ist die Übereinstimmung zwischen Originalsystem und Taylorreihen-Entwicklung sehr gut.

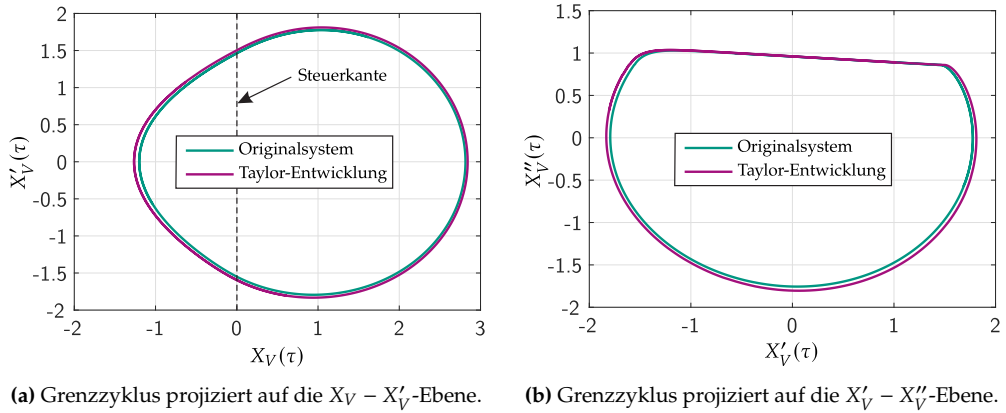


Abbildung 4.5: Vergleich der Grenzzyklusschwingungen des Originalsystems und der Taylorreihen-Entwicklung.

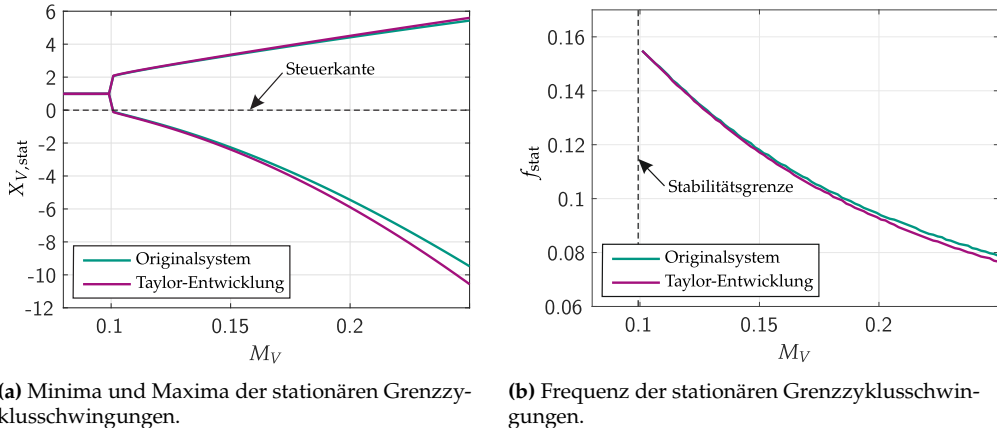
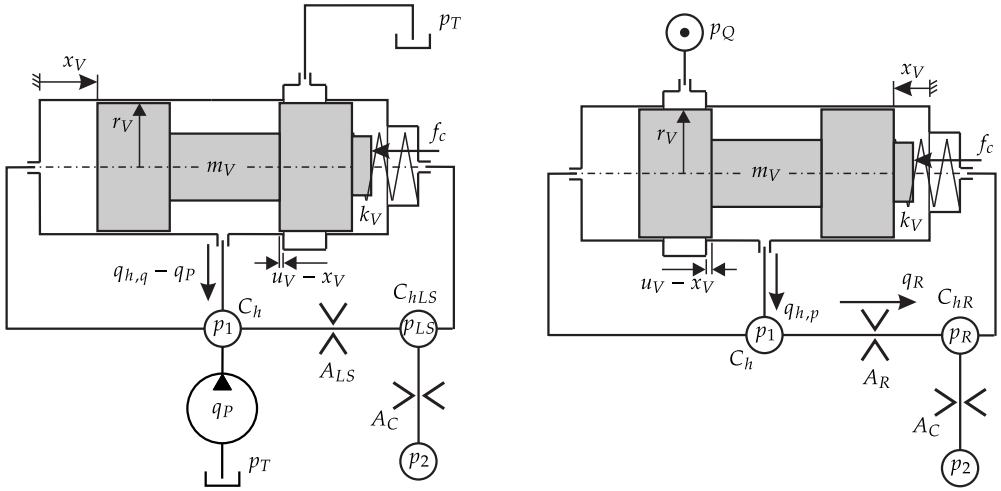


Abbildung 4.6: Vergleich der Grenzzyklusschwingungen des Originalsystems und der Taylorreihen-Entwicklung unter Variation des kleinen Parameters $M_V = \epsilon$.

4.3 Modellvarianten

Im Folgenden werden die Zusammenhänge zwischen dem verallgemeinerten Ventilkreislauf und den noch fehlenden vier Kreislaufvarianten aus den Abbildungen 3.1 und 3.2 diskutiert. Diese vier Systeme werden hier stellvertretend für eine viel größere Anzahl an möglichen Kreislaufvarianten diskutiert. Sie stellen eine Auswahl der einfachst möglichen Schaltungen dar.

Sowohl das Konstantdrucksystem mit druck geregelter Verstellpumpe als auch das System mit Druckminderventil und Druckquelle sind vollständig im verallgemeinerten Ventilkreislauf enthalten. Sie gehen aus den Systemen mit Konstantpumpe und Druck-



(a) Load-Sensing-System mit Konstantpumpe.

(b) Kreislauf mit Stromregelventil und Druckquelle.

Abbildung 4.8: Detaillierte Darstellung der Ventilkreisläufe mit zusätzlichen Druckrückführungen.

lediglich ohne die zweite Steuerkante. Da diese in der Herleitung von Gl. (4.28) ohnehin vernachlässigt wurde, gilt Gl. (4.28) ohne Einschränkung auch für das System mit Druckminderventil und Druckquelle.

Zur Beschreibung des Load-Sensing-Systems mit Konstantpumpe und des Systems mit Stromregelventil und Druckquelle müssen zusätzlich zum verallgemeinerten Ventilkreislauf eine Druckrückführung und eine Druckdynamik in der zusätzlichen Kapazität C_{hLS} bzw. C_{hR} modelliert werden. Diese beiden Systeme sind somit nicht vollständig im verallgemeinerten Ventilkreislauf enthalten. Für das Load-Sensing-System ergibt sich die Darstellung

$$m_V \ddot{x}_V + d_V \dot{x}_V + k_V x_V = r_V^2 \pi (p_1 - p_{LS}) - f_c \quad (4.39)$$

$$C_h \dot{p}_1 = -r_V^2 \pi \dot{x}_V - q_{LS}(p_1, p_{LS}) + q_{h,q}(x_V, p_1) \quad (4.40)$$

$$C_{hLS} \dot{p}_{LS} = r_V^2 \pi \dot{x}_V + q_{LS}(p_1, p_{LS}) - q_C(p_{LS}) \quad (4.41)$$

und für das Stromregelventil gilt

$$m_V \ddot{x}_V + d_V \dot{x}_V + k_V x_V = -r_V^2 \pi (p_1 - p_R) + f_c \quad (4.42)$$

$$C_h \dot{p}_1 = r_V^2 \pi \dot{x}_V - q_R(p_1, p_R) + q_{h,p}(x_V, p_1) \quad (4.43)$$

$$C_{hLS} \dot{p}_R = -r_V^2 \pi \dot{x}_V + q_R(p_1, p_R) - q_C(p_R) \quad (4.44)$$

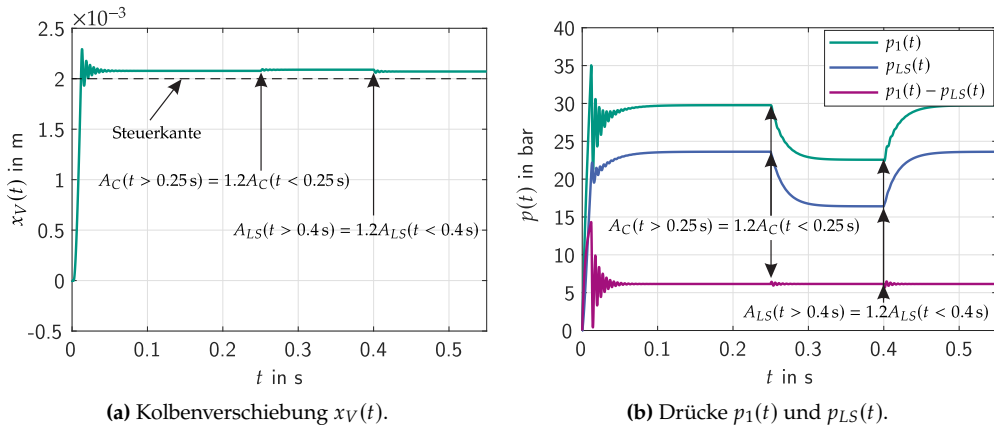


Abbildung 4.9: Systemdynamik des Load-Sensing-Systems mit Konstantpumpe. Dämpfung $d_V = 100 \text{ N s/m}$, Volumenstrom $q_P = 7.51/\text{min}$, Steuerkraft $f_c = 22 \text{ N}$, Blendenfläche $A_{LS} = 1.4 \cdot \pi \cdot (10^{-3})^2 \text{ m}^2$, Kapazität $C_{hLS} = 2.92 \cdot 10^{-13} \text{ m}^3/\text{Pa}$.

mit den Funktionen $q_{h,q}$, $q_{h,p}$ und q_C entsprechend den Gleichungen (4.4), (4.5) und (4.9) sowie mit den Volumenströmen

$$q_{LS} = \gamma_F A_{LS} \Delta(p_1 - p_{LS}) \quad (4.45)$$

$$q_R = \gamma_F A_R \Delta(p_1 - p_R) . \quad (4.46)$$

Die Gleichungsstruktur der beiden Systeme weist – ähnlich wie bei den im verallgemeinerten Ventilkreislauf enthaltenen Systemen – große Gemeinsamkeiten auf. Wie bereits in Kap. 3 erläutert, besteht das Funktionsprinzip beider Systeme darin, durch die Druckwaagen eine Druckdifferenz bzw. im Fall des Stromregelventils einen Volumenstrom zu regeln. Dieses Funktionsprinzip wird in den Abbildungen 4.9 und 4.10 verdeutlicht. Wie bei der Druckregelung auch ist die Steuerkante im stationären Betrieb leicht geöffnet, um den von der Konstantpumpe überschüssig geförderten Volumenstrom zu kompensieren bzw. von der Druckquelle einen definierten Volumenstrom zu erhalten. Eine Veränderung der Last (Blendenflächen A_C und A_{LS}) und der Versorgungsleistung (Druck p_Q) kompensieren die Systeme nach kurzen transienten Prozessen derart, dass zwar die stationären Drücke variieren, jedoch die stationären Druckdifferenzen bzw. beim Stromregelventil zusätzlich der stationäre Volumenstrom q_R näherungsweise konstant bleiben. Um ähnlich hohe Drücke wie bei den anderen Systemen zu erzeugen, ist eine sehr viel geringere Steuerkraft f_c nötig, da nun zur Unterstützung der Steuerkraft zusätzlich eine Druckkraft auf die entsprechende Kolbenfläche wirkt. Die verwendeten Parameterwerte sind, soweit sie von den Werten in Tab. 4.1 abweichen, den jeweiligen Abbildungen zu entnehmen.

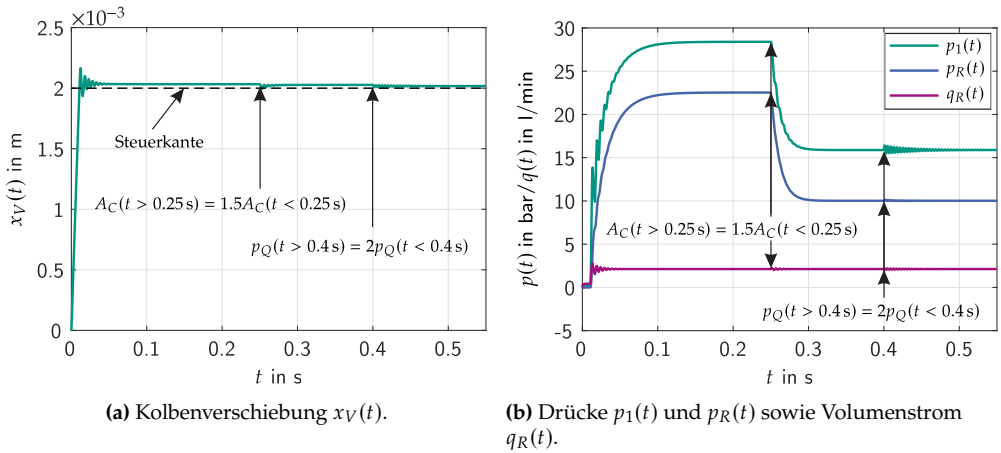


Abbildung 4.10: Systemdynamik des Systems mit Stromregelventil und Druckquelle. Dämpfung $d_V = 120 \text{ N s/m}$, Steuerkraft $f_c = 24.2 \text{ N}$, Blendenfläche $A_R = 1.4 \cdot \pi \cdot (10^{-3})^2 \text{ m}^2$, Kapazität $C_{hR} = 2.92 \cdot 10^{-13} \text{ m}^3/\text{Pa}$.

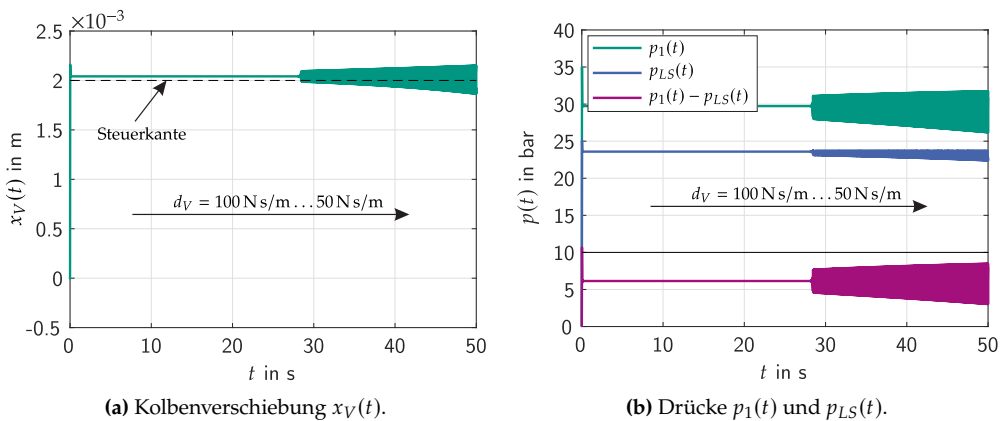


Abbildung 4.11: Stationäres Verhalten des Load-Sensing-Systems mit Konstantpumpe unter Variation der Systemdämpfung d_V . Steuerkraft $f_c = 22 \text{ N}$, Blendenfläche $A_{LS} = 1.4 \cdot \pi \cdot (10^{-3})^2 \text{ m}^2$, Kapazität $C_{hLS} = 2.92 \cdot 10^{-13} \text{ m}^3/\text{Pa}$.

Ein kontinuierliche Verringerung der Systemdämpfung d_V führt wie zuvor zum Stabilitätsverlust und zum Auftreten selbsterregter Schwingungen, welche die Steuerkante überschreiten, durch diese jedoch offensichtlich stark reduziert werden. Dies ist in den Abbildungen 4.11 und 4.12 dargestellt. Der Stabilitätsverlust tritt hier jedoch bei deutlich kleineren Dämpfungswerten auf. Für $d_V = 70 \text{ N s/m}$ ergibt sich eine Schwingungskreisfrequenz der selbsterregten Schwingungen von 1438 rad/s (Load-Sensing-System) bzw. 1442 rad/s (Stromregelventil). Die Schwingungsfrequenzen sind somit in der selben Größenordnung wie die des verallgemeinerten Ventilkreislaufs.

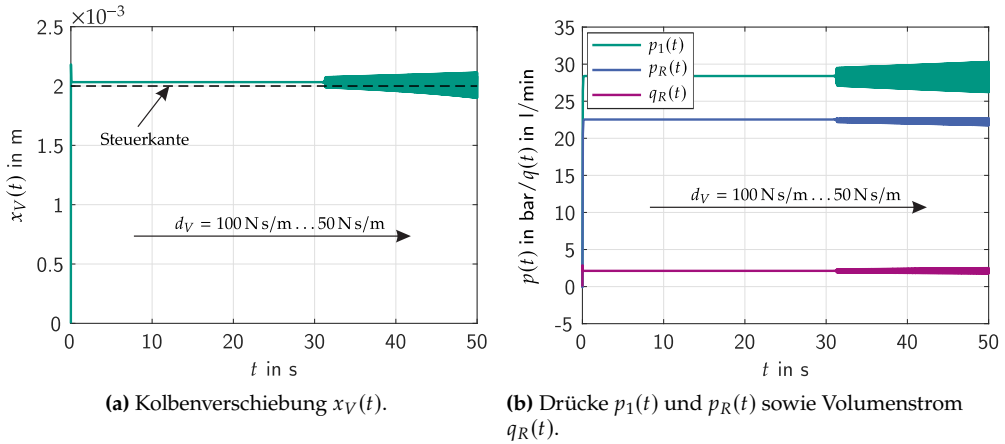


Abbildung 4.12: Stationäres Verhalten des Systems mit Stromregelventil und Druckquelle unter Variation der Systemdämpfung d_V . Steuerkraft $f_c = 24.2\text{ N}$, Blendenfläche $A_R = 1.4 \cdot \pi \cdot (10^{-3})^2\text{ m}^2$, Kapazität $C_{hR} = 2.92 \cdot 10^{-13}\text{ m}^3/\text{Pa}$.

Für eine Entdimensionierung der Systemgleichungen wären also vermutlich die charakteristischen Größen entsprechend den Gleichungen (4.13) und (4.16) nach wie vor geeignet. Weiterhin ist zu vermuten, dass die asymptotischen Analysen der selbst- und fremderregten Schwingungen aus den folgenden Kapiteln zumindest eingeschränkt auf das Load-Sensing-System und den Kreislauf mit Stromregelventil übertragbar sind. Zusammenfassend gilt die Aussage, dass die Untersuchung des verallgemeinerten Ventilkreislaufs nicht nur Erkenntnisse über die spezifischen in ihm enthaltenen Kreislaufvarianten liefern kann. Vielmehr können die Erkenntnisse, zumindest eingeschränkt, auch auf andere Kreisläufe mit Druckrückführungen übertragen werden und als Ausgangspunkt für weitere, spezifischere Untersuchungen dienen.

5 Dynamik selbsterregter Schwingungen

Die Dynamik des verallgemeinerten Ventilkreislaufs wird durch eine autonome, singular gestörte gewöhnliche Differentialgleichung, Gl. (4.25) beschrieben. Wie in Abschnitt 2.3 ausgeführt, wird die Phasenraumstruktur singular gestörter Systeme maßgeblich durch die langsame Mannigfaltigkeit geprägt. Deren Stabilitätseigenschaften beeinflussen grundlegend das dynamische Verhalten des Systems.

In Abschnitt 5.1 wird durch eine asymptotische Approximation der schnellen Dynamik eine Näherung der langsamen Mannigfaltigkeit des verallgemeinerten Ventilkreislaufs berechnet und deren global asymptotische Stabilität gezeigt. Dies lässt eine physikalisch motivierte Reduktion des Systems und eine damit verbundene Transformation auf ein regulär gestörtes System zu.

In diesem regulär gestörten System ist die Ventilsteuerkante weiterhin durch eine Nichtlinearität der Größenordnung $O(1)$ vertreten. Für die asymptotische Analyse mit Hilfe des Mittelwertbildungsverfahrens wird aus diesem Grund in Abschnitt 5.2 eine abschnittsweise definierte Grundlösung zur Transformation in ein nicht-glatte System in Standardform herangezogen. Da die Nichtlinearität der Steuerkante nun in der Größenordnung $O(\varepsilon)$ vorliegt, eignet sich dieses für die Anwendung eines Mittelwertbildungsverfahrens. Das asymptotische Verfahren wird zuletzt durch numerische Simulationen verifiziert.

5.1 Reduktion der schnellen Dynamik

Der Vorgehensweise in Abschnitt 2.3 entsprechend wird die Bewegung des verallgemeinerten Ventilkreislaufs in eine schnelle Dynamik und eine langsame Dynamik aufgeteilt. Mit den langsamen Variablen $\xi = [\xi_1, \xi_2]^T = [\xi_V, \xi'_V]^T$ und der schnellen Variablen $\eta = \xi''_V$ erhält man eingesetzt in Gl. (4.25)

$$\xi'_1 = \xi_2 \tag{5.1}$$

$$\xi'_2 = \eta \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \eta' &= -\eta + \begin{cases} -\varepsilon K_s \xi_2 - \omega_s^2 \xi_1 - \varepsilon N_s \xi_2 \xi_1, & \xi_1 + X_{V0} > 0 \\ -\varepsilon \bar{K}_s \xi_2 + \bar{Q}_s, & \xi_1 + X_{V0} \leq 0 \end{cases} \\ &=: g(\xi, \eta, \varepsilon), \end{aligned} \tag{5.3}$$

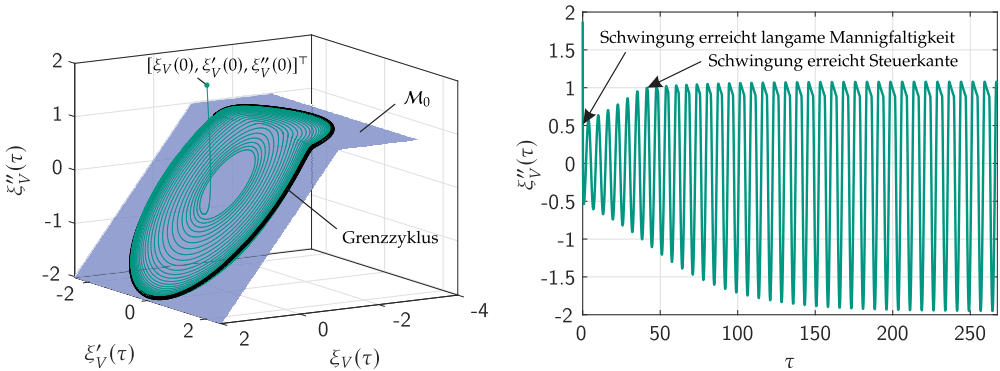
ein System in Zustandsraumdarstellung. Eine Näherung erster Ordnung

$$\mathcal{M}_0 = \left\{ [\xi_1, \xi_2, \eta]^\top \in \mathbb{R}^3 : \eta = \begin{cases} -\omega_s^2 \xi_1, & \xi_1 + X_{V0} > 0 \\ \bar{Q}_s, & \xi_1 + X_{V0} \leq 0 \end{cases} \right\} \tag{5.4}$$

der langsamen Mannigfaltigkeit \mathcal{M}_ε wird berechnet, indem in Gl. (5.3) der kleine Parameter $\varepsilon = 0$ eingesetzt wird. Diese Näherung ist stetig, jedoch an der Ventilsteuerkante $\xi_V + X_{V0} = 0$ nicht stetig differenzierbar, vgl. Abb. 5.1a. Die durch \mathcal{M}_0 beschriebene Hyperfläche ist eine global asymptotisch stabile (Eigenwert $\lambda = -1$) Gleichgewichtslage der Differentialgleichung

$$\frac{d\eta}{d\theta} = g(\xi, \eta, 0)$$

mit der schnellen Zeit $\theta = \frac{\tau}{\varepsilon}$, in der die Einträge des Vektors ξ als konstante Parameter betrachtet werden. Somit ist die langsame Mannigfaltigkeit ein Attraktor, welche aufgrund des globalen Stabilitätscharakters alle Lösungstrajektorien der Gleichungen (5.1) bis 5.3 unabhängig von den Anfangsbedingungen anzieht. Die Trajektorien verbleiben für alle Zeiten auf der langsamen Mannigfaltigkeit.



(a) Dreidimensionaler Phasenraum des verallgemeinerten Ventilkreislaufs.

(b) Zeitverlauf der schnellen Variable $\eta(\tau) = \xi_V''(\tau)$. Die Simulation entspricht $t = 0.3\text{ s}$ in der dimensionsbehafteten Zeitskala.

Abbildung 5.1: Schnelle und langsame Bewegung des Ventilkreislaufs.

Eine mögliche Lösungstrajektorie ist beispielhaft ebenfalls in Abb. 5.1a dargestellt. Der transiente Prozess bis zum Erreichen der langsamen Mannigfaltigkeit spielt sich innerhalb eines sehr kurzen Zeitfensters ab, weil der Eigenwert $\lambda = -1$ sich auf die schnelle Zeit θ bezieht und weil die Menge möglicher Anfangsbedingungen durch das Kolbenspiel eng begrenzt ist. Somit ist er für die praktische Anwendung in diesem Fall nicht relevant und es eröffnet sich die Möglichkeit, das singular gestörte Problem auf ein regulär gestörtes Problem zu reduzieren, ohne eine explizite Betrachtung in der schnellen Zeit θ vorzunehmen.

Das Vorhandensein zweier unterschiedlicher Zeitskalen wird in Abb. 5.1b verdeutlicht. Im dargestellten Zeitfenster, welches einer dimensionsbehafteten Zeitskala von $t = 0.3\text{s}$ entspricht, findet der Einschwingvorgang bis zum Erreichen der langsamen Mannigfaltigkeit fast instantan statt. Beim weiteren Einschwingvorgang bewegt sich die Lösungstrajektorie auf der langsamen Mannigfaltigkeit. Der Grenzyklus ist erst am Ende des dargestellten Zeitfensters ausgebildet.

Der deutlich sichtbare Knick bei $\tau \approx 70$ markiert das erstmalige Erreichen der Steuerkante. Hier wird das weitere Aufschwingen sichtbar abgebremst, was im Hinblick auf die Begrenzung der Schwingungsamplituden ein wichtiges Merkmal ist. Die hier betrachteten Kolbenschieberventile heben sich in diesem Punkt vorteilhaft von den Sitzventilen ab, bei denen eine entsprechende Energiedissipation stattdessen nur durch Stoßvorgänge erfolgen kann, welche in der praktischen Anwendung nicht akzeptabel sind.

Die Reduktion der schnellen Dynamik erfolgt analog zu der in Abschnitt 2.3 dargestellten Vorgehensweise. Zunächst wird die schnelle Variable η mittels des Reihenansatzes $\eta \approx \tilde{\eta} = \eta_0 + \varepsilon \eta_1$, der in Gl. (5.3) eingesetzt wird, bis zu Größenordnung $O(\varepsilon)$

$$\tilde{\eta} = \begin{cases} -\omega_s^2 \xi_1 + \varepsilon ((\omega_s^2 - K_s) \xi_2 - N_s \xi_2 \xi_1), & \xi_1 + X_{V0} > 0 \\ \bar{Q}_s - \varepsilon \bar{K}_s \xi_2, & \xi_1 + X_{V0} \leq 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

approximiert. Dies geschieht durch das Bilanzieren der Terme gleicher Größenordnungen. Die auftretenden Gleichungen sind im Gegensatz zur regulären Störungsrechnung algebraischer Natur und rekursiv zu lösen. Durch das Einsetzen der Approximation in die langsame Dynamik, welche durch die Gleichungen (5.1) und (5.2) repräsentiert werden, wird ein reduziertes, regulär gestörtes System

$$\xi_1' = \xi_2 \quad (5.6)$$

$$\xi_2' = \begin{cases} -\omega_s^2 \xi_1 + \varepsilon ((\omega_s^2 - K_s) \xi_2 - N_s \xi_2 \xi_1), & \xi_1 + X_{V0} > 0 \\ \bar{Q}_s - \varepsilon \bar{K}_s \xi_2, & \xi_1 + X_{V0} \leq 0 \end{cases} \quad (5.7)$$

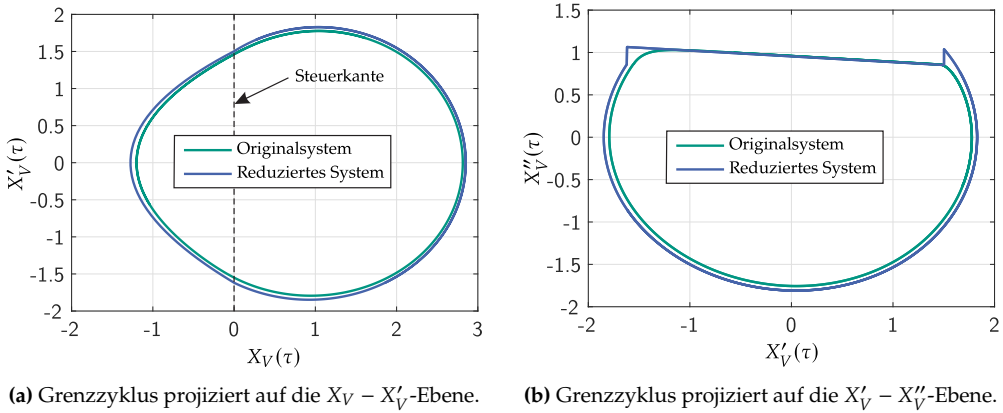
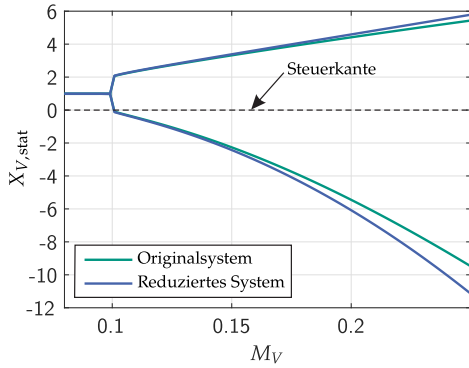


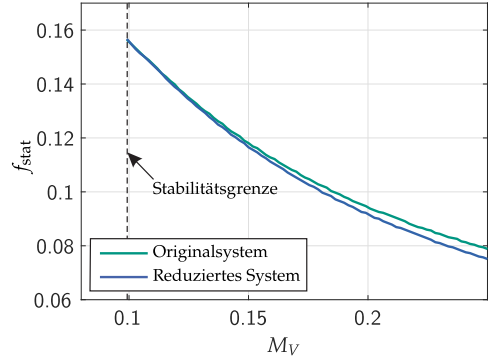
Abbildung 5.2: Vergleich der Grenzyklusschwingungen des Originalsystems und des reduzierten Systems.

gewonnen, welches die Dynamik auf der langsamen Mannigfaltigkeit näherungsweise beschreibt.

Die Abb. 5.2 zeigt einen Vergleich zwischen den stationären Lösungen des Originalsystems (Gleichungen (4.18) und (4.19)) und des reduzierten, regulär gestörten Systems. Projiziert auf die $X_V - X'_V$ -Ebene zeigen beide Lösungen eine gute Übereinstimmung, siehe Abb. 5.2a. Wird der Phasenraum mittels Gl. (5.5) künstlich auf die dritte Dimension erweitert, so wird erkennbar, dass die Approximation der schnellen Variable (und somit auch die rechte Seite von Gl. (5.7)) nicht stetig ist. Da der Sprung jedoch in der Größenordnung $O(\varepsilon)$ ist, sind hier in der weiteren Vorgehensweise keine Schwierigkeiten zu erwarten. Die Minima und Maxima der Grenzyklusschwingungen sowie deren Frequenz sind für veränderliche ε in Abb. 5.3 dargestellt. Wie zu erwarten ist, wird die Approximation mit steigendem $\varepsilon = M_V$ schlechter. Die Überschätzung der Amplitude und Unterschätzung der Frequenz der Grenzyklusschwingungen nimmt mit steigendem $\varepsilon = M_V$ zu. Dies liegt einerseits in der Natur aller asymptotischen Methoden, deren Fehlerabschätzung abhängig vom kleinen Parameter ist. Andererseits wird für große ε die Annahme von Amplituden der Größenordnung $O(1)$ verletzt, wie in Abb. 5.3a deutlich zu sehen ist. Hier würde eine modifizierte Entdimensionierung eventuell bessere Ergebnisse liefern. Dieser Parameterbereich ist jedoch für praktische Anwendungen weniger interessant, weshalb im Rahmen dieser Arbeit auf einen solchen Ansatz verzichtet wird.



(a) Minima und Maxima der stationären Grenzzyklusschwingungen.



(b) Frequenz der stationären Grenzzyklusschwingungen.

Abbildung 5.3: Vergleich der Grenzzyklusschwingungen des Originalsystems und des reduzierten Systems unter Variation des kleinen Parameters ε .

5.2 Approximation der langsamen Dynamik

Im Folgenden wird die langsame Dynamik durch ein Mittelwertbildungsverfahren approximiert. Dafür muss zunächst mit Hilfe der Grundlösung ein System in Standardform formuliert werden. Setzt man $\varepsilon = 0$ in Gl. (5.7) ein, so bleibt die durch die Steuercante hervorgerufene Nichtlinearität erhalten. Somit ergeben sich abschnittsweise definierte Grundlösungen

$$\tilde{\xi}_{10}(\tau) = \begin{cases} \xi_{10}(\tau) = A \cos(\omega_s \tau + \alpha), & \tau_0 < \tau \leq \tau_1 \\ \bar{\xi}_{10}(\tau) = c_1 + c_2 \tau + \frac{1}{2} \bar{Q}_s \tau^2, & \tau_1 < \tau \leq \tau_2 \end{cases} \quad (5.8)$$

$$\tilde{\xi}_{20}(\tau) = \begin{cases} \xi_{20}(\tau) = -A \omega_s \sin(\omega_s \tau + \alpha), & \tau_0 < \tau \leq \tau_1 \\ \bar{\xi}_{20}(\tau) = c_2 + \bar{Q}_s \tau, & \tau_1 < \tau \leq \tau_2 \end{cases} \quad (5.9)$$

der langsamen Variablen mit den Integrationskonstanten A , α , c_1 und c_2 . Die Zeitpunkte τ_0 , τ_1 und τ_2 , an denen die Grundlösung die Steuercante kreuzt, werden im Folgenden als Schaltzeiten bezeichnet und sind zunächst unbekannt. Die Periodizität sowie die Stetigkeit der Grundlösung muss nun durch geeignete Übergangsbedingungen

$$\xi_{10}(\tau_0) = -X_{V0} \quad (5.10)$$

$$\xi_{10}(\tau_1) = -X_{V0} \quad (5.11)$$

$$\xi_{20}(\tau_1) = \bar{\xi}_{20}(\tau_1) \quad (5.12)$$

$$\bar{\xi}_{10}(\tau_1) = -X_{V0} \quad (5.13)$$

$$\bar{\xi}_{10}(\tau_2) = -X_{V0} \quad (5.14)$$

erzwungen werden, vgl. Abb. 5.4a. Mit den Übergangsbedingungen werden die Integrationskonstanten c_1 und c_2 sowie die Schaltzeiten τ_0 , τ_1 und τ_2 in Abhängigkeit der Integrationskonstanten A und α ausgedrückt. Die Konstante A markiert den Maximalwert der Schwingung. Das entsprechende Minimum \bar{A} wird nicht durch den Wert $-A$, sondern durch das Minimum der Parabel $\bar{A} = \bar{\xi}_{10}(\frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2))$ beschrieben. Das Lösen der Übergangsbedingungen liefert die Ausdrücke

$$\tau_0 = \frac{-\alpha - \pi + C}{\omega_s} \quad (5.15)$$

$$\tau_1 = \frac{-\alpha + \pi - C}{\omega_s} \quad (5.16)$$

$$\tau_2 = \tau_1 + \frac{2\omega_s}{\bar{Q}_s} \sqrt{A^2 - X_{V0}^2} \quad (5.17)$$

$$c_1 = \frac{1}{2} \bar{Q}_s \tau_1^2 + \sqrt{A^2 - X_{V0}^2} \omega_s \tau_1 - X_{V0} \quad (5.18)$$

$$c_2 = -\bar{Q}_s \tau_1 - \sqrt{A^2 - X_{V0}^2} \omega_s \quad (5.19)$$

$$C = \arccos\left(\frac{X_{V0}}{A}\right), \quad (5.20)$$

welche nur noch von A und α sowie den Systemparametern abhängen. Die Grundlösung $\tilde{\xi}_{10}(\tau)$ ist auch bei $\tau = \tau_2$ stetig differenzierbar (das bedeutet, dass $\tilde{\xi}_{20}(\tau)$ an dieser Stelle stetig ist), obwohl diese Bedingung nicht explizit formuliert wird. Dies liegt daran, dass die Funktionen $\xi_{10}(\tau)$ und $\bar{\xi}_{10}(\tau)$, aus denen die Grundlösung gebildet wird, symmetrisch bezüglich der Zeitpunkte $\tau = \frac{1}{2}(\tau_0 + \tau_1)$ bzw. $\tau = \frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2)$ sind.

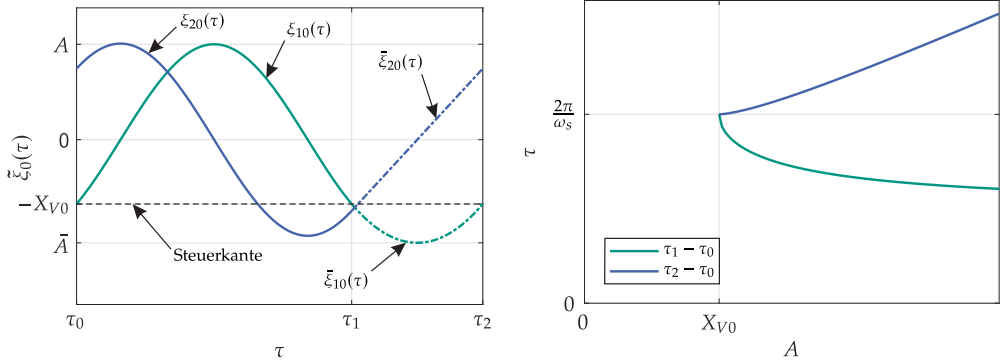
Die Schaltzeiten sind in Abb. 5.4b abhängig von der Amplitude A dargestellt. Während die Gesamtperiodendauer $\tau_2 - \tau_0$ mit steigender Amplitude zunimmt, nimmt die Dauer $\tau_1 - \tau_0$ des Teils der Schwingung, der bei geöffnetem Ventil stattfindet, sogar ab.

Durch Variation der Konstanten $A = A(\tau)$ und $\alpha = \alpha(\tau)$ und durch Verwendung der Gleichungen (5.8) und (5.9) als Variablentransformation mit $\xi_1 = \tilde{\xi}_{10}$ und $\xi_2 = \tilde{\xi}_{20}$ wird ein System in Standardform gebildet. Einsetzen der Transformation in die Gleichungen (5.6) und (5.7) liefert ein nicht-glatte Differentialgleichungssystem in der Form

$$A' = \varepsilon \begin{cases} f_A(\tau - i\Delta\tau), & \tau_0 + i\Delta\tau \leq \tau < \tau_1 + i\Delta\tau \\ \bar{f}_A(\tau - i\Delta\tau), & \tau_1 + i\Delta\tau \leq \tau < \tau_2 + i\Delta\tau \end{cases} \quad (5.21)$$

$$\alpha' = \varepsilon \begin{cases} f_\alpha(\tau - i\Delta\tau), & \tau_0 + i\Delta\tau \leq \tau < \tau_1 + i\Delta\tau \\ \bar{f}_\alpha(\tau - i\Delta\tau), & \tau_1 + i\Delta\tau \leq \tau < \tau_2 + i\Delta\tau \end{cases} \quad (5.22)$$

$$\Delta\tau = \tau_2 - \tau_0, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$



(a) Verlauf der Grundlösungen $\xi_{10}(\tau)$ und $\xi_{20}(\tau)$ innerhalb einer Periode für den Fall $A > X_{V0}$, bei dem die Schwingungen die Steuerkante $\xi_V = -X_{V0}$ überschreiten.

(b) Schaltzeiten in Abhängigkeit der Amplitude A . Für $A < X_{V0}$ wird die Steuerkante nicht überschritten, das Ventil ist hier also dauerhaft geöffnet. Für $A > X_{V0}$ nimmt die Periodendauer $\tau_2 - \tau_0$ mit steigender Amplitude A zu.

Abbildung 5.4: Darstellung der Grundlösung.

für die Variablen A und α . Die Funktionen f_A, \bar{f}_A, f_α und \bar{f}_α ergeben sich direkt durch das Auflösen der Gleichungen nach A' und α' und werden hier nicht explizit angegeben. Mittelwertbildung mit der Periodendauer $\tau_2 - \tau_0$ liefert das gemittelte System

$$\begin{aligned}
 A' &= \frac{\varepsilon}{\tau_2 - \tau_0} \left(\int_{\tau_0}^{\tau_1} f_A(\tau) d\tau + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \bar{f}_A(\tau) d\tau \right) \\
 &= -\varepsilon \left(6 \left(\omega_s^2 \sqrt{A^2 - X_{V0}^2} + \bar{Q}_s(\pi - C) \right) \right)^{-1} \left(\left(2 \left(N_s \bar{Q}_s + \bar{K}_s \omega_s^2 \right) \left(A^2 - X_{V0}^2 \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 3X_{V0} \bar{Q}_s \left(K_s - \omega_s^2 \right) \right) \sqrt{A^2 - X_{V0}^2} - 3A^2 \bar{Q}_s \left(\omega_s^2 - K_s \right) (\pi - C) \right). \quad (5.23)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha' &= \frac{\varepsilon}{\tau_2 - \tau_0} \left(\int_{\tau_0}^{\tau_1} f_\alpha(\tau) d\tau + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \bar{f}_\alpha(\tau) d\tau \right) \\
 &= -\varepsilon \left(3 \left(\omega_s^2 \sqrt{A^2 - X_{V0}^2} + \bar{Q}_s(\pi - C) \right) \right)^{-1} \frac{\bar{K}_s \omega_s^2}{A^2 \bar{Q}_s} \left(A^2 \omega_s^2 - \bar{Q}_s X_{V0} \right) \left(A^2 - X_{V0}^2 \right) \quad (5.24)
 \end{aligned}$$

für den Fall $A > X_{V0}$. Obwohl der Übergang auf die gemittelten Gleichungen streng genommen durch eine Variablentransformation vorgenommen wird, werden der besseren Lesbarkeit halber und weil die physikalische Bedeutung der Variablen sich nicht ändert beim Übergang zu den gemittelten Gleichungen keine neuen Variablenbezeich-

nungen für die Variablen A und α eingeführt. Die Minima der Grenzyklusschwingungen sind durch

$$\begin{aligned}\bar{A}(\tau) &= \bar{\xi}_{10} \left(\tau = \frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2) \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\omega_s^2}{\bar{Q}_s} \left(X_{V0}^2 - A^2 \right) - X_{V0}\end{aligned}\quad (5.25)$$

gegeben.

Für den Fall $A < X_{V0}$, bei dem die Schwingungen die Steuerkante nicht kreuzen, liefert die Mittelwertbildung mit der Periodendauer $\frac{2\pi}{\omega_s}$ die Ausdrücke

$$A' = \varepsilon \frac{\omega_s}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_s}} f_A(\tau) d\tau = -\varepsilon \frac{A}{2} \left(K_s - \omega_s^2 \right) \quad (5.26)$$

$$\alpha' = 0 \quad (5.27)$$

$$\bar{A}(\tau) = -A(\tau), \quad (5.28)$$

welche das exponentielle Einschwingverhalten eines linearen Systems beschreiben. Sie liefern außerdem als Nebenprodukt eine Näherung

$$K_s - \omega_s^2 > 0 \quad (5.29)$$

für die Stabilität der Gleichgewichtslage $[\xi_V, \xi'_V, \xi''_V]^T = [0, 0, 0]^T$, welche im gemittelten System durch die triviale Lösung $A = 0$ beschrieben wird. Mit den dimensionslosen Parametern aus Abschnitt 4.2 und mit den vereinfachenden Annahmen

$$P_{10} \approx \tilde{P}_{10} = F_c \quad (5.30)$$

$$X_{V0} \approx \tilde{X}_{V0} = 1 \quad (5.31)$$

$$P_Q \approx 2F_c \quad (5.32)$$

$$\frac{K_V}{2} + F_c \approx F_c \quad (5.33)$$

$$K_V M_V - 1 \approx -1 \quad (5.34)$$

führt dies auf die Stabilitätsbedingung

$$-(K_V + \alpha_V) \sqrt{F_c} + \beta_V \left(M_V F_c - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \alpha_C < 0 \quad (5.35)$$

in dimensionslosen Parametern. In dieser vereinfachten Form gilt diese sowohl für den Kreislauf mit Konstantpumpe als auch für den Kreislauf mit Druckquelle. Daraus kann

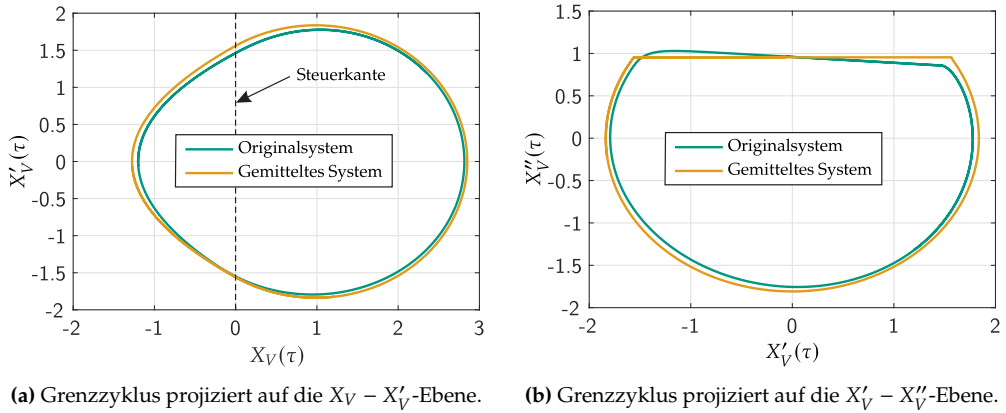


Abbildung 5.5: Vergleich der Grenzyklusschwingungen des Originalsystems und des gemitteltem System.

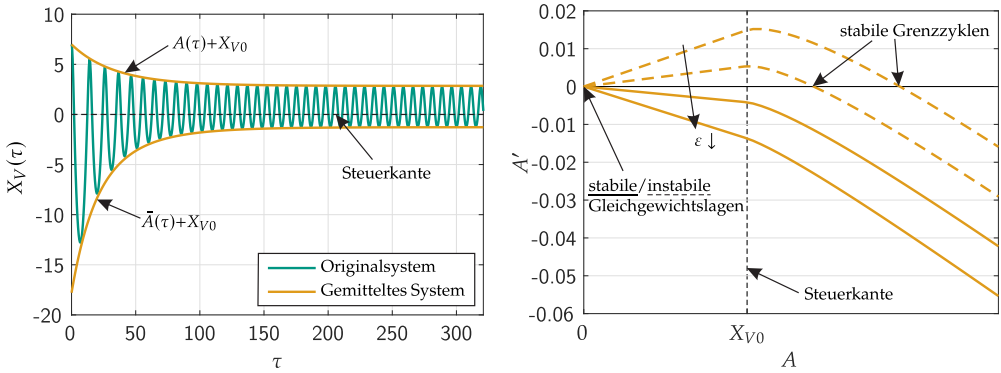
z. B. die stabilisierende Wirkung eines größeren Verbrauchervolumenstroms (dimensionsloser Parameter α_C) oder eines kleineren Kolbendurchmessers (dimensionsloser Parameter β_V) abgeleitet werden.

Zur Verifizierung des Mittelwertbildungsverfahrens werden dessen Ergebnisse mit numerischen Simulationsergebnissen des Originalsystems, Gleichungen (4.18) und (4.19) verglichen. In Abb. 5.5 sind die Grenzyklusschwingungen im Phasenraum des Originalsystems dargestellt. Der zweidimensionale Phasenraum des gemitteltem Systems wurde dabei mittels der Grundlösungen, Gleichungen (5.8) und (5.9) zurück transformiert sowie durch

$$X''_V = \xi''_V = \frac{d\tilde{\xi}_{20}(\tau)}{d\tau} = \begin{cases} -A\omega_s^2 \cos(\omega_s \tau + \alpha), & \tau_0 < \tau \leq \tau_1 \\ \bar{Q}_s, & \tau_1 < \tau \leq \tau_2 \end{cases} \quad (5.36)$$

künstlich auf die dritte Dimension erweitert. Durch die quadratische Ansatzfunktion für den Fall des geschlossenen Ventils $\xi_V + X_{V0} < 0$ ist die Kolbenbeschleunigung dort nun konstant. Weiterhin sieht es so aus, dass die Unstetigkeit der Beschleunigung X''_V , welche im reduzierten System, Gleichungen (5.6) und (5.7) auftritt, nahezu vollständig durch das Mittelwertbildungsverfahren eliminiert wird. Betrachtet man jedoch den entsprechenden Übergang an der Steuerkante

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\tilde{\xi}_{20}(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_1} - \left. \frac{d\bar{\xi}_{20}(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_1} &= \omega_s X_{V0} - \bar{Q}_s \\ &= \frac{K_V X_{V0}}{2\sqrt{P_{10}}} (\beta_V X_{V0} + \alpha_C) + \beta_V X_{V0} \sqrt{P_{10}} + \alpha_C \sqrt{P_{10}} - Q_P \\ &\approx \beta_V X_{V0} \sqrt{P_{10}} + \alpha_C \sqrt{P_{10}} - Q_P = 0, \end{aligned} \quad (5.37)$$



(a) Vergleich des Einschwingverhaltens des Originalsystems und des gemittelten Systems. Für die Anfangsbedingungen gilt $X_V(0) = A(0) + X_{V0}$ und $X'_V(0) = \alpha(0) = 0$.

(b) Rechte Seite der gemittelten Gleichungen (5.23) und (5.26) in Abhängigkeit der Amplitude für unterschiedliche Werte von ϵ . Nullstellen entsprechen stationären Lösungen. Die Steigung an den jeweiligen Nullstellen bestimmt die Stabilität der Lösung.

Abbildung 5.6: Stationäres und transientes Verhalten des gemittelten Systems.

so wird klar, dass die Unstetigkeit nur näherungsweise verschwindet. Bei der letzten Zeile (Gl. (5.37)) handelt es sich um die Volumenstrombilanz an der Hauptkapazität im stationären Zustand, weshalb sich hier null ergibt.

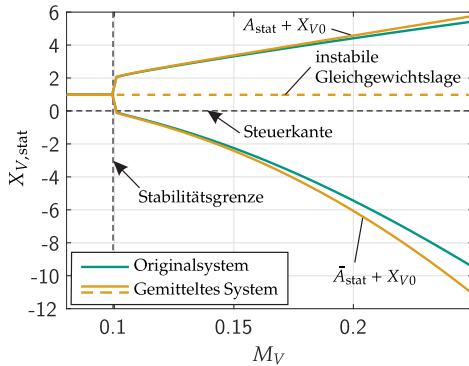
Auch das transiente Einschwingverhalten wird durch die gemittelten Gleichungen sehr gut abgebildet, wie Abb. 5.6a zeigt. Es ist allerdings zu erwarten, dass die Näherung mit betragsmäßig größeren Anfangswerten für die Amplitude $A(0)$ schlechter wird, da die Annahme von Amplituden in der Größenordnung $\mathcal{O}(1)$ immer mehr verletzt wird. Die Anfangsbedingungen müssen konsistenterweise den Bedingungen

$$X_V(0) = A(0) \cos(\alpha(0)) + X_{V0} \tag{5.38}$$

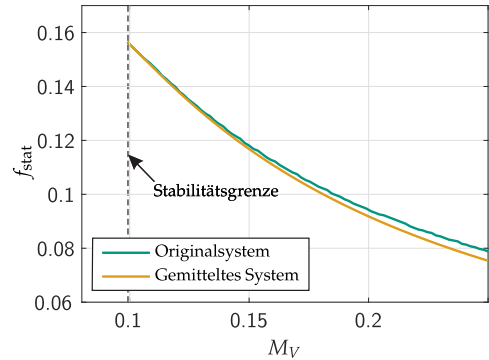
$$X'_V(0) = -A(0)\omega_s \sin(\alpha(0)) \tag{5.39}$$

genügen.

Da die gemittelten Gleichungen (5.23) und (5.24) bzw. (5.26) und (5.27) voneinander entkoppelt sind, lässt sich die komplette Phasenraumstruktur des verallgemeinerten Ventilkreislaufs durch die Darstellung der rechten Seite einer eindimensionalen, durch die Gleichungen (5.23) und (5.26) abschnittsweise definierten, nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichung beschreiben. Bei dieser Analyse müssen keine nichtlinearen Gleichungssysteme gelöst oder ein aufwändiges Schießverfahren implementiert werden, um stationäre Lösungen zu berechnen. Weiterhin kann auf die Berechnung von Eigenwerten oder Floquet-Multiplikatoren zur Bestimmung der Stabilität dieser stationären Lösungen verzichtet werden. Die rechte Seite der gemittelten Gleichungen (5.23) und



(a) Minima und Maxima der stationären Grenzyklusschwingungen.



(b) Frequenz der stationären Grenzyklusschwingungen.

Abbildung 5.7: Vergleich der Grenzyklusschwingungen des Originalsystems und des gemittelten Systems unter Variation des kleinen Parameters ε .

(5.26) ist in Abb. 5.6b für vier unterschiedliche Werte von ε dargestellt. Die Nullstellen markieren stationäre Lösungen. Die Steigung an den jeweiligen Nullstellen entspricht den Eigenwerten des um die jeweilige stationäre Lösung linearisierten Systems und bestimmt damit die Stabilität dieser Lösung. Anhand von Abb. 5.6b ist also erkennbar, dass außer der Gleichgewichtslage und einem Grenzyklus keine weiteren stationären Lösungen existieren.

In Abb. 5.7 sind die Extrema sowie die Frequenz der Grenzyklusschwingungen in Abhängigkeit des kleinen Parameters $\varepsilon = M_V$ dargestellt. Weiterhin ist die Gleichgewichtslage, welche unabhängig von ε ist, dargestellt und deren Stabilität durch durchgezogene bzw. gestrichelte Linien gekennzeichnet. Gegenüber Abb. 5.3 ist sowohl qualitativ als auch quantitativ keine große Veränderung sichtbar. Die Abweichungen zwischen dem Originalsystem und dem gemitteltem System sind selbst für relativ große Werte von ε sehr gering.

6 Dynamik erzwungener Schwingungen

Neben dem Mechanismus der Selbsterregung wirken in realen technischen Anwendungen auch äußere Anregungsmechanismen. Diese können viele verschiedene Ursachen haben. Wird die Fragestellung auf Anregungsmechanismen eingegrenzt, deren Ursprünge innerhalb des hydraulischen Kreislaufs liegen, können drei grundlegende Mechanismen unterschieden werden. Diese sind in Abb. 6.1 am Beispiel eines typischen Minimalkreislaufs bestehend aus einem Druckregelventil und einem 3/3-Proportional-Wegeventil dargestellt.

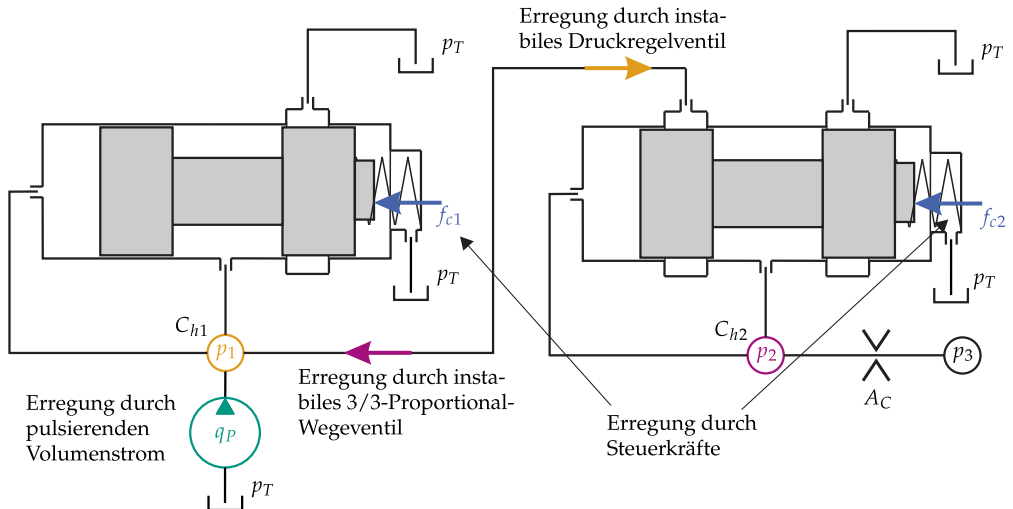


Abbildung 6.1: Minimaltopologie bestehend aus einem Druckregelventil mit Konstantpumpe (links) und einem 3/3-Proportional-Wegeventil (rechts). Die möglichen Erregermechanismen sind der Pumpenvolumenstrom q_P , die Steuerkräfte f_{c1} und f_{c2} sowie die Drücke p_1 und p_2 , welche im Falle einer vorhandenen Selbsterregung einen pulsierenden Volumenstrom bewirken, der als Erregung auf das jeweils benachbarte Ventil wirkt.

Eine erste Ursache liegt in der Geometrie der hydraulischen Pumpen, in welchen das Fluid durch diskrete Kammern transportiert wird und welche dadurch periodische Schwankungen des Volumenstroms q_P verursachen, welche in erster Näherung durch Gl. (3.34) beschrieben werden können. Dieses Szenario wird bereits in [134] diskutiert und mit Hilfe asymptotischer Methoden beschrieben. Im Rahmen dieser Arbeit wird dieser Anregungsmechanismus deshalb nicht weiter betrachtet.

Eine weitere Ursache ist eine hochfrequente periodische Krafterregung, welche absichtlich den Steuerkräften f_{c1} bzw. f_{c2} überlagert wird, um die Haftreibung zwischen Ventilkolben und Ventilgehäuse im Betrieb permanent zu überwinden und so ein besseres Ansprechverhalten der Ventile auf Druckänderungen zu gewährleisten. Dazu genügen jedoch meist sehr kleine Erregeramplituden und bei auftretenden Schwingungsproblemen kann die Erregerfrequenz sehr einfach verändert werden, weshalb dieser Anregungsmechanismus in der Praxis keine großen Herausforderungen bereithält. Er wird deshalb in dieser Arbeit ebenso nicht diskutiert.

Eine dritte Ursache sind Druckschwingungen, welche durch ein benachbartes instabiles Ventil im selben hydraulischen Kreislauf hervorgerufen werden. Die Zuordnung einer Instabilitätsquelle zu einem von zwei gekoppelten Ventilen ist dabei im Allgemeinen unpräzise, da genau genommen nur die Gleichgewichtslage des Gesamtsystems stabil oder instabil sein kann. Außerdem beeinflusst die Umgebung, in der ein Ventil eingebaut wird, dessen Stabilität. Dies bedeutet, dass durch die Kopplung zweier stabiler Ventile das Gesamtsystem instabil sein kann. Der umgekehrte Fall ist ebenso möglich. Zahlreiche numerische Simulationen haben jedoch gezeigt, dass dies nur passiert, wenn sich die Ventile bereits vor der Kopplung sehr nahe an der Stabilitätsgrenze befinden. Somit gilt im Folgenden die Annahme, dass die Instabilitätsquelle einem bestimmten Ventil zugeordnet werden kann.

Dies bedeutet, dass entweder die Gleichgewichtslage des Druckregelventils, welches den Systemdruck p_1 steuert oder die des 3/3-Proportional-Wegeventils, welches den Verbraucherdruck p_2 steuert, instabil sein kann. Der Fall, dass beide Gleichgewichtslagen instabil werden, beinhaltet komplexe dynamische Vorgänge wie quasiperiodische und chaotische Schwingungen, siehe [131]. Diese sind mit Hilfe asymptotischer Methoden nur sehr schwierig zu untersuchen und werden in dieser Arbeit ausgeschlossen.

Der Fall einer instabilen Gleichgewichtslage des 3/3-Proportional-Wegeventils ist nahezu identisch mit dem einer pulsierenden Pumpe, da in beiden Fällen periodisch schwingende Volumenströme als Erregung direkt auf die Hauptkapazität C_{h1} wirken. Dahingegen wird bei einer instabilen Gleichgewichtslage des Druckregelventils der pulsierende Volumenstrom zuerst über die Steuerkante des 3/3-Proportional-Wegeventils geleitet, bevor er dessen Kapazität C_{h2} erreicht. Da dieser Volumenstrom nach Gl. (4.5) linear von der Kolbenposition abhängt, bewirkt dessen Schwingung eine parametrische






	Anregungsmechanismus	Bemerkung
	pulsierende Pumpe	bereits in [134] untersucht
	Anregung durch Steuerkraft	Anregungsfrequenz einfach veränderbar
	instabiles Proportionalventil	Ähnlich zu pulsierender Pumpe
	instabiles Druckregelventil	parametrische Erregung
	zwei instabile Ventile	komplexe Schwingungsphänomene

Tabelle 6.1: Anregungsmechanismen.

Erregung. Dieser Anregungsmechanismus wurde bisher noch nicht untersucht und soll deshalb Gegenstand der Analysen dieses Kapitels sein.

Eine Übersicht über die möglichen Anregungsmechanismen gibt Tab. 6.1.

In Abschnitt 6.1 wird zunächst das dimensionslose Modell des zu untersuchenden Kreislaufs aufgestellt. Mit Hilfe der singulären Störungsrechnung wird dieses Modell in Abschnitt 6.2 reduziert. Durch die Anwendung des Mittelwertbildungsverfahrens werden in Abschnitt 6.3 mögliche Resonanzstellen identifiziert. Da durch die Art des Anregungsmechanismus hier auch parametrische Resonanzen möglich sind, wird in Abschnitt 6.4 zunächst eine Stabilitätsuntersuchung in der Nähe der parametrischen Resonanzstellen durchgeführt, bevor in Abschnitt 6.5 die langsame Dynamik approximiert und analysiert wird.

6.1 Dimensionsloses Modell

Das Szenario eines instabilen Druckregelventils in Verbindung mit einem stabilen 3/3-Proportional-Wegeventil wird vereinfacht als ein 3/3-Proportional-Wegeventil mit pulsierender Druckquelle modelliert. Die Druckquelle stellt dabei ein Ersatzmodell des instabilen Teilkreislaufs bestehend aus Druckregelventil und Konstantpumpe dar. Das Modell kann fast vollständig aus Abb. 4.1b übernommen werden. Lediglich die ideale Druckquelle wird durch eine pulsierende ersetzt, siehe Abb. 6.2. Die Druckschwingungen werden dabei in erster Näherung durch eine harmonische Schwingung modelliert. Dieses System wird bereits in [132] durch numerische Berechnungen untersucht. Analytische Betrachtungen sind jedoch bisher ausstehend. Werden die Amplitude p_Q^* und die Kreisfrequenz ω_Q durch

$$P_Q^* = \frac{p_Q^* r_V^2 \pi}{d_V \omega_0 \tilde{x}_{V0}} \quad (6.1)$$

$$\Omega_Q = \frac{\omega_Q}{\omega_0} \quad (6.2)$$

mit den skalierten Parametern

$$D_s(\tau) = 1 + \frac{\varepsilon X_{V0} \beta_V}{2\sqrt{\Delta P(\tau)}} + \frac{\varepsilon \alpha_C}{2\sqrt{P_{10}}} \approx 1 \quad (6.8)$$

$$\bar{D}_s = 1 + \frac{\varepsilon \alpha_C}{2\sqrt{P_{10}}} \approx 1 \quad (6.9)$$

$$\varepsilon K_s(\tau) = K_V + \alpha_V + \kappa_T(\tau) \quad (6.10)$$

$$\omega_s(\tau)^2 = \kappa_T(\tau) K_V + \beta_V \sqrt{\Delta P(\tau)} \quad (6.11)$$

$$\varepsilon N_s(\tau) = -\frac{K_V \kappa_T(\tau)}{2\Delta P(\tau)} + \frac{\beta_V}{2\sqrt{\Delta P(\tau)}} + \frac{\alpha_C K_V P_Q}{4\Delta P(\tau) P_{10}^{3/2}} \quad (6.12)$$

$$\varepsilon Q_s(\tau) = \alpha_C \sqrt{P_{10}} - \beta_V X_{V0} \sqrt{\Delta P(\tau)} \quad (6.13)$$

und den Abkürzungen

$$\Delta P(\tau) = P_Q + P_Q^* \cos(\Omega_Q \tau) - P_{10} \quad (6.14)$$

$$\kappa_T(\tau) = \frac{\beta_V X_{V0}}{2\sqrt{\Delta P(\tau)}} \quad (6.15)$$

hergeleitet. Die skalierten Parameter \bar{K}_s und \bar{Q}_s sind gegenüber dem autonomen System unverändert und den Gleichungen (4.30) und (4.32) zu entnehmen. Der Fall $X_V \leq -\delta_U$ ist bei der Berechnung stationärer Lösungen für Ventile mit positiver Überdeckung nicht relevant und wird deshalb nicht betrachtet. Für den Fall $\xi_V + X_{V0} > 0$ ergeben sich nun entsprechend den Gleichungen (6.8) bis (6.15) zeitvariante Koeffizienten, in denen die Ausdrücke

$$\left(\sqrt{P_Q + P_Q^* \cos(\Omega_Q \tau) - P_{10}} \right)^n, \quad n = -2, \dots, 1 \quad (6.16)$$

enthalten sind. Um das System einer asymptotischen Analyse zugänglich zu machen, werden die zeitvarianten Koeffizienten einer weiteren Taylorreihen-Entwicklung um $P_Q^* = 0$ unterworfen. Damit wird eine Struktur der Koeffizienten erzeugt, welche linear in den enthaltenen trigonometrischen Funktionen ist.

Für die spätere Stabilitätsanalyse wird eine asymptotische Näherung zweiter Ordnung benötigt, weshalb im Folgenden alle Terme bis zur Größenordnung $O(\varepsilon^2)$ berücksichtigt werden. Daraus geht die stückweise definierte Einzeldifferentialgleichung

$$0 = \varepsilon \xi_V''' + \xi_V'' + \begin{cases} \omega_s^2 \xi_V, & \xi_V + X_{V0} > 0 \\ -\bar{Q}_s, & \xi_V + X_{V0} \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& + \varepsilon \begin{cases} K_s \xi'_V + (\delta_s \xi_V + P_s^*) \cos \Omega_Q \tau + N_s \xi_V \xi'_V, & \xi_V + X_{V0} > 0 \\ \bar{K}_s \xi'_V, & \xi_V + X_{V0} \leq 0 \end{cases} \\
& + \varepsilon^2 \begin{cases} (\delta_{s2} + \delta_{s3} \xi_V) \xi'_V \cos \Omega_Q \tau + N_s \xi_V \xi''_V, & \xi_V + X_{V0} > 0 \\ 0, & \xi_V + X_{V0} \leq 0 \end{cases} \quad (6.17)
\end{aligned}$$

dritter Ordnung mit kombinierter Fremd- und Parametererregung hervor. Beide Anregungsmechanismen sind in der Größenordnung $\mathcal{O}(\varepsilon)$ und nur bei geöffnetem Ventil $\xi_V + X_{V0} > 0$ aktiv. Die skalierten Koeffizienten sind durch

$$\varepsilon P_s^* = \frac{P_Q^* \beta_V X_{V0}}{2\sqrt{P_Q - P_{10}}} \quad (6.18)$$

$$\varepsilon \delta_s = -\frac{P_Q^* \beta_V}{4\sqrt{P_Q - P_{10}}} \left(\frac{K_V X_{V0}}{P_Q - P_{10}} - 2 \right) \quad (6.19)$$

$$\varepsilon^2 \delta_{s2} = -\frac{\beta_V X_{V0} P_Q^*}{4(P_Q - P_{10})^{3/2}} \quad (6.20)$$

$$\varepsilon^2 \delta_{s3} = \frac{P_Q^* \beta_V}{8(P_Q - P_{10})^{3/2}} \left(\frac{3K_V X_{V0}}{P_Q - P_{10}} - 2 \right) \quad (6.21)$$

definiert. Die skalierten Parameter K_s , ω_s und N_s sind den Gleichungen (4.29), (4.31) und (4.33) zu entnehmen.

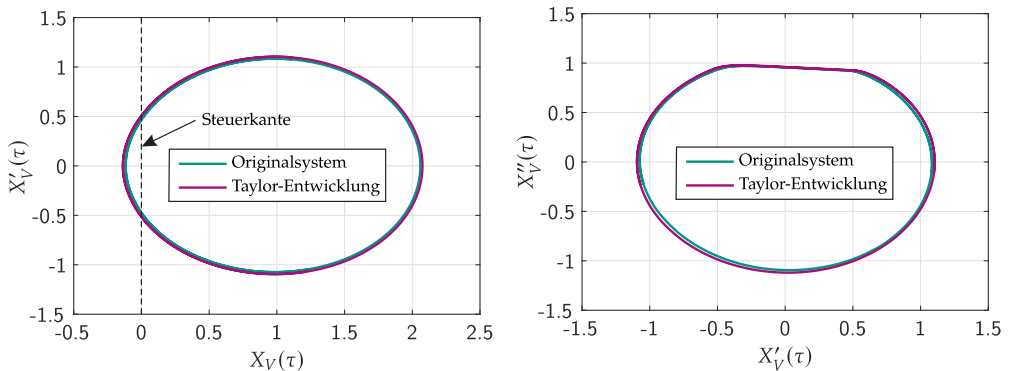
Für die numerischen Simulationen werden die Parameterwerte aus Tab. 4.1 verwendet, jedoch mit einer erhöhten viskosen Dämpfung von $d_V = 190 \text{ N s/m}$, um die Stabilität der Gleichgewichtslage des autonomen Systems entsprechend der Ungleichung (5.35) zu gewährleisten. Die sich daraus ergebenden dimensionslosen und skalierten Parameterwerte sind in den Tabellen 6.2a und 6.2b aufgelistet.

Abb. 6.3 zeigt einen Vergleich der stationären periodischen Lösungen des Originalsystems und der Taylorreihen-Entwicklung, Gl. (6.17). Um eine bessere Vergleichbarkeit mit den Ergebnissen aus Abschnitt 4.2 herzustellen und weil die Approximation der stationären periodischen Lösungen in Abschnitt 6.5 mit einem Mittelwertbildungsverfahren erster Ordnung berechnet werden, werden in der Taylorreihen-Entwicklung jedoch nur die Terme bis zur Größenordnung $\mathcal{O}(\varepsilon)$ berücksichtigt. Das Originalsystem wird durch die Gleichungen (6.3) und (6.4) repräsentiert. Die Anregung ist wegen $P_Q^* = 1$ in der Größenordnung $\mathcal{O}(\varepsilon)$ und es wird der Resonanzfall $\Omega_Q = \omega_s$ betrachtet. Es ist wie bereits beim Fall selbsterregter Schwingungen auch hier der klare Übergang zwischen den beiden Schaltzuständen zu erkennen. Bei geschlossenem Ventil $X_V < 0$ besteht wie zuvor eine nahezu lineare Abhängigkeit zwischen der Kolbengeschwindigkeit X'_V und der Kolbenbeschleunigung X''_V . Dieser Zusammenhang ist also unabhängig

Parameter	Symbol	Wert	Symbol	Wert
Dimensionslose Masse des Ventilkolbens	M_V	0.09	ε	0.09
Dimensionslose Federsteifigkeit	K_V	0.004	K_s	1.09
Dimensionslose Rückstellkraft/Steuerkraft	F_c	16.16	\tilde{K}_s	0.74
Dimensionslose Kolbenstirnfläche	α_V	0.033	ω_s	0.98
Dimensionsloser Kolbenumfang	β_V	0.25	\tilde{Q}_s	0.95
Dimensionslose Ventilüberdeckung	δ_U	13.46	N_s	0.35
Dimensionsloser Versorgungsdruck	P_Q	31.55	δ_s	0.35
Dimensionslose Blendenfläche	α_C	0.24	δ_{s2}	-0.12
Dimensionslose Erregeramplitude	P_Q^*	1	δ_{s3}	-0.13
Dimensionslose Erregerkreisfrequenz	Ω_Q	0.98	P_s^*	0.34
			X_{V0}	0.98

(a) Werte der dimensionslosen Parameter.

(b) Werte der skalierten Parameter.

Tabelle 6.2: Parameterwerte mit erhöhter Dämpfung zur Gewährleistung einer stabilen Gleichgewichtslage des autonomen Systems.(a) Stationäre periodische Lösung projiziert auf die $X_V - X'_V$ -Ebene.(b) Stationäre periodische Lösung projiziert auf die $X'_V - X''_V$ -Ebene.**Abbildung 6.3:** Vergleich der stationären Lösungen des Originalsystems und der Taylorreihen-Entwicklung bis zur Größenordnung $\mathcal{O}(\varepsilon)$ in der Hauptresonanz $\Omega_Q = \omega_s$.

davon, ob die Schwingungen von einer Selbsterregung oder einer Fremderregung hervorgerufen werden. Die Schwingungsamplituden der erzwungenen Schwingungen liegen in der selben Größenordnung $\mathcal{O}(1)$ wie die der Grenzyklusschwingungen. Dies rechtfertigt auch die Nutzung der selben dimensionslosen Variablen und Parameter. Die Abweichungen zwischen dem Originalsystem und der Taylorreihen-Entwicklung liegen in einer akzeptablen Größenordnung.

6.2 Reduktion der schnellen Dynamik

Das weitere Vorgehen ist analog zu dem in Abschnitt 5.1. Allerdings wird, wie bereits zuvor erwähnt, für die spätere Stabilitätsanalyse ein asymptotisches Verfahren zweiter Ordnung benötigt, weshalb im Folgenden über den Reihenansatz $\eta \approx \tilde{\eta} = \eta_0 + \varepsilon\eta_1 + \varepsilon^2\eta_2$ eine Näherung zweiter Ordnung der schnellen Variable $\xi''_V = \eta$ berechnet wird. Das Einsetzen des Reihenansatzes in Gl. (6.17) liefert die Bilanzen

$$0 = \eta_0 + \begin{cases} \omega_s^2 \xi_V, & \xi_V + X_{V0} > 0 \\ -\bar{Q}_s, & \xi_V + X_{V0} \leq 0 \end{cases} \quad (6.22)$$

$$0 = \eta'_0 + \eta_1 + \begin{cases} K_s \xi'_V + (\delta_s \xi_V + P_s^*) \cos \Omega_Q \tau + N_s \xi_V \xi'_V, & \xi_V + X_{V0} > 0 \\ \bar{K}_s \xi'_V, & \xi_V + X_{V0} \leq 0 \end{cases} \quad (6.23)$$

$$0 = \eta'_1 + \eta_2 + \begin{cases} (\delta_{s2} + \delta_{s3} \xi_V) \xi'_V \cos \Omega_Q \tau + N_s \xi_V \eta_0, & \xi_V + X_{V0} > 0 \\ 0, & \xi_V + X_{V0} \leq 0 \end{cases} \quad (6.24)$$

bis zur Größenordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Aus diesen werden mit den langsamen Variablen $[\xi_V, \xi'_V]^\top = [\xi_1, \xi_2]^\top$ die einzelnen Reihenglieder

$$\eta_0 = \begin{cases} -\omega_s^2 \xi_1, & \xi_1 + X_{V0} > 0 \\ \bar{Q}_s, & \xi_1 + X_{V0} \leq 0 \end{cases} \quad (6.25)$$

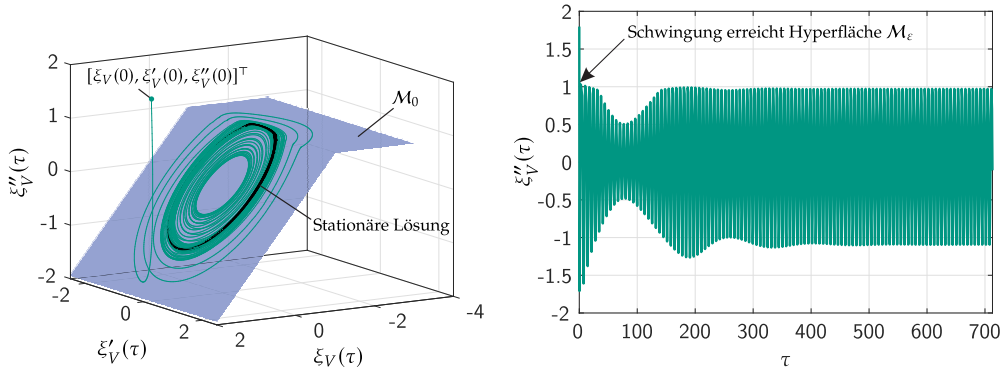
$$\eta_1 = \begin{cases} (\omega_s^2 - K_s) \xi_2 - (\delta_s \xi_1 + P_s^*) \cos \Omega_Q \tau - N_s \xi_2 \xi_1, & \xi_1 + X_{V0} > 0 \\ -\bar{K}_s \xi_2, & \xi_1 + X_{V0} \leq 0 \end{cases} \quad (6.26)$$

$$\eta_2 = \begin{cases} (\omega_s^2 - K_s) \omega_s^2 \xi_1 - (\delta_s \xi_1 + P_s^*) \Omega_Q \sin \Omega_Q \tau \\ \quad + (\delta_s - \delta_{s2} - \delta_{s3} \xi_1) \xi_2 \cos \Omega_Q \tau + N_s \xi_2^2, & \xi_1 + X_{V0} > 0 \\ \bar{K}_s \bar{Q}_s, & \xi_1 + X_{V0} \leq 0 \end{cases} \quad (6.27)$$

berechnet. Bei der Berechnung von η_2 wird dabei die Approximation $\xi''_V = \xi'_2 = \eta \approx \eta_0$ eingesetzt. Die Grundlösung η_0 impliziert, dass sich die langsame Dynamik in erster Näherung

$$\mathcal{M}_0 = \left\{ [\xi_1, \xi_2, \eta]^\top = \mathbb{R}^3 : \eta = \begin{cases} -\omega_s^2 \xi_1, & \xi_1 + X_{V0} > 0 \\ \bar{Q}_s, & \xi_1 + X_{V0} \leq 0 \end{cases} \right\} \quad (6.28)$$

in der Nähe der gleichen Hyperfläche \mathcal{M}_ε abspielt wie im Fall selbsterregter Schwingungen. Aus diesem Grund sind die Gleichungen (5.4) und (6.28) identisch.



(a) Dreidimensionaler Phasenraum des Ventilkreislaufs mit 3/3-Proportional-Wegeventil und pulsierender Druckquelle.

(b) Zeitverlauf der schnellen Variable $\eta(\tau) = \xi_V''(\tau)$. Die Simulation entspricht $t = 0.3$ s in der dimensionsbehafteten Zeitskala.

Abbildung 6.4: Schnelle und langsame Bewegung des Ventilkreislaufs mit Fremderregung in der Hauptresonanz $\Omega_Q = \omega_s$.

Dies wird durch die Simulationsergebnisse in Abb. 6.4a veranschaulicht. Nachdem die Nähe der Hyperfläche M_0 erreicht wird, verlässt die Trajektorie diese nicht mehr und der weitere Einschwingvorgang bis zum Erreichen der periodischen stationären Lösung findet nahe der Hyperfläche statt. In Abb. 6.4b sind wiederum zwei Zeitskalen klar unterscheidbar, da die Trajektorie aus der Anfangslage fast instantan die Hyperfläche M_ε erreicht und erst nach einem deutlich längeren Einschwingvorgang in die stationäre periodische Lösung mündet.

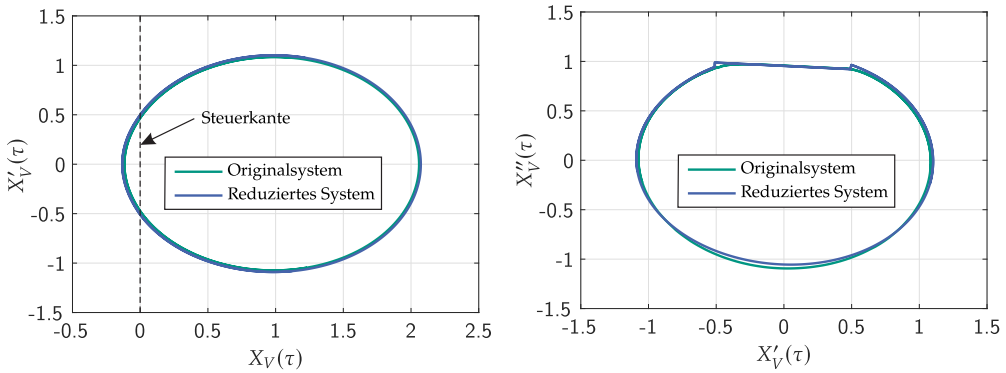
Transformiert man die Einzeldifferentialgleichung dritter Ordnung in Gl. (6.17) in ein System in Zustandsform, so folgt daraus mit den Gleichungen. (6.25), (6.26) und (6.27) das regulär gestörte reduzierte System

$$\xi_1' = \xi_2 \quad (6.29)$$

$$\xi_2' = \begin{cases} -\omega_s^2 \xi_1, & \xi_1 + X_{V0} > 0 \\ \bar{Q}_s, & \xi_1 + X_{V0} \leq 0 \end{cases}$$

$$+ \varepsilon \begin{cases} (\omega_s^2 - K_s) \xi_2 - (\delta_s \xi_1 + P_s^*) \cos \Omega_Q \tau - N_s \xi_2 \xi_1, & \xi_1 + X_{V0} > 0 \\ -\bar{K}_s \xi_2, & \xi_1 + X_{V0} \leq 0 \end{cases}$$

$$+ \varepsilon^2 \begin{cases} (\omega_s^2 - K_s) \omega_s^2 \xi_1 - (\delta_s \xi_1 + P_s^*) \Omega_Q \sin \Omega_Q \tau \\ + (\delta_s - \delta_{s2} - \delta_{s3} \xi_1) \xi_2 \cos \Omega_Q \tau + N_s \xi_2^2, & \xi_1 + X_{V0} > 0 \\ \bar{K}_s \bar{Q}_s, & \xi_1 + X_{V0} \leq 0 \end{cases} \quad (6.30)$$



(a) Stationäre periodische Lösung projiziert auf die $X_V - X'_V$ -Ebene. (b) Stationäre periodische Lösung projiziert auf die $X'_V - X''_V$ -Ebene.

Abbildung 6.5: Vergleich der stationären Lösungen des Originalsystems und des reduzierten Systems in der Hauptresonanz $\Omega_Q = \omega_s$.

zweiter Ordnung, in dem die beiden Anregungsmechanismen der Fremd- und Parametererregung weiterhin vorhanden sind.

Dessen rechte Seite ist unstetig, wie die Simulationsergebnisse in Abb. 6.5b verdeutlichen. Hier wird der Phasenraum mittels der Gleichung $\xi''_V = \eta_0 + \varepsilon\eta_1$ künstlich auf die dritte Dimension erweitert, um eine bessere Vergleichbarkeit mit dem Originalsystem herzustellen. Weiterhin werden in der Simulation wie zuvor die Ausdrücke in der Größenordnung $O(\varepsilon^2)$ vernachlässigt, um eine Vergleichbarkeit mit den Ergebnissen aus Abschnitt 5.1 zu gewährleisten. Es ergeben sich auch hier insgesamt sehr gute Übereinstimmungen mit dem Originalsystem.

6.3 Detektion der Resonanzstellen

Das reduzierte System bestehend aus den Gleichungen (6.29) und (6.30) ist ein nicht-lineares und nicht-glattes Differentialgleichungssystem mit kombinierter Fremd- und Parametererregung. Weil die Parameter P_s^* und δ_s auf die Größenordnung $O(1)$ skaliert sind, sind die Amplituden beider Anregungsmechanismen in der Größenordnung $O(\varepsilon)$. Neben der klassischen Resonanz aufgrund der Fremderregung bei $\Omega_Q = \omega_s$ sind parametrische Resonanzen zu erwarten. Um diese systematisch zu finden, kann das Mittelwertbildungsverfahren ein hilfreiches Instrument sein. Da parametrische Resonanzen Instabilitäten sind, wird dazu eine lokale Analyse in der Nähe der Gleichgewichtslage vorgenommen. Somit wird im Folgenden die reduzierte Dynamik (Gleichungen (6.29)

und (6.30)) ausschließlich für den Fall $\xi_1 + X_{V0} > 0$ analysiert. Um ein System in Standardform abzuleiten, wird die Grundlösung

$$\xi_{10}(\tau) = A \cos(\omega_s \tau + \alpha) \quad (6.31)$$

$$\xi_{20}(\tau) = -A \omega_s \sin(\omega_s \tau + \alpha) \quad (6.32)$$

als Lösung des ungestörten Systems ($\varepsilon = 0$) berechnet. Das Einsetzen der Grundlösung in die Gleichungen (6.29) und (6.30) liefert nach dem Auflösen nach A' und α' das System

$$A' = \varepsilon \Xi_{A1}(\tau, A, \alpha) + \varepsilon^2 \Xi_{A2}(\tau, A, \alpha) \quad (6.33)$$

$$\alpha' = \varepsilon \Xi_{\alpha 1}(\tau, A, \alpha) + \varepsilon^2 \Xi_{\alpha 2}(\tau, A, \alpha) \quad (6.34)$$

in Standardform mit den Funktionen

$$\begin{aligned} \Xi_{A1} = & \frac{1}{2} A (\omega_s^2 - K_s) + \frac{P_s^*}{2 \omega_s} \sin(\varphi \pm \Omega_Q \tau) + \frac{A \delta_s}{4 \omega_s} \sin(2\varphi \pm \Omega_Q \tau) \\ & - \frac{N_s A^2}{4} (\cos(\varphi) - \cos(3\varphi)) + \frac{A (K_s - \omega_s^2)}{2} \cos(2\varphi) \end{aligned} \quad (6.35)$$

$$\begin{aligned} \Xi_{A2} = & \mp \frac{P_s^* \Omega_Q}{2 \omega_s} \cos(\varphi \pm \Omega_Q \tau) + \frac{A \delta_s}{4} \left(2 \cos \Omega_Q \tau - \frac{\omega_s \mp \Omega_Q}{2 \omega_s} \cos(2\varphi \pm \Omega_Q \tau) \right) \\ & - \frac{N_s \omega_s A^2}{4} (3 \sin(\varphi) - \sin(3\varphi)) - \frac{A \omega_s (\omega_s^2 - K_s)}{2} \sin(2\varphi) \\ & + \frac{\delta_{s2} A}{4} (-2 \cos \Omega_Q \tau + \cos(2\varphi \pm \Omega_Q \tau)) - \frac{\delta_{s3} A^2}{8} (\cos(\varphi \pm \Omega_Q \tau) \\ & - \cos(3\varphi \pm \Omega_Q \tau)) \end{aligned} \quad (6.36)$$

$$\begin{aligned} \Xi_{\alpha 1} = & \frac{\delta_s}{2 \omega_s} \cos(\Omega_Q \tau) + \frac{P_s^*}{2 A \omega_s} \cos(\varphi \pm \Omega_Q \tau) + \frac{\delta_s}{4 \omega_s} \cos(2\varphi \pm \Omega_Q \tau) \\ & - \frac{N_s A}{4} (\sin(\varphi) + \sin(3\varphi)) + \frac{\omega_s^2 - K_s}{2} \sin(2\varphi) \end{aligned} \quad (6.37)$$

$$\begin{aligned} \Xi_{\alpha 2} = & \pm \frac{P_s^* \Omega_Q}{2 A \omega_s} \sin(\varphi \pm \Omega_Q \tau) + \frac{\delta_s}{4 \omega_s} \left(2 \Omega_Q \sin \Omega_Q \tau + \frac{\omega_s \pm \Omega_Q}{2} \sin(2\varphi \pm \Omega_Q \tau) \right) \\ & - \frac{N_s \omega_s A}{4} (\cos(\varphi) - \cos(3\varphi)) - \frac{\omega_s (\omega_s^2 - K_s)}{2} \\ & - \frac{\delta_{s2}}{4} (\sin(2\varphi \pm \Omega_Q \tau)) - \frac{\delta_{s3} A}{8} (\cos(\varphi \pm \Omega_Q \tau) + \cos(3\varphi \pm \Omega_Q \tau)) \end{aligned} \quad (6.38)$$

$$\varphi = \omega_s \tau + \alpha \quad (6.39)$$

und der abkürzenden Schreibweise

$$\mp f(i\varphi \pm \Omega_Q \tau) := -f(i\varphi + \Omega_Q \tau) + f(i\varphi - \Omega_Q \tau), \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.40)$$

Die Variable φ wird zum Zweck einer kompakteren Notation eingeführt. Zur Detektion weiterer Resonanzstellen werden die einzelnen Ausdrücke der rechten Seite von Gl. (6.33) genauer betrachtet. Zunächst werden nur die Terme bis zur Größenordnung $O(\varepsilon)$ berücksichtigt, das heißt ausschließlich die Funktion $\Xi_{A1}(\tau, A, \alpha)$ entsprechend Gl. (6.35). Resonanzstellen treten bei den Erregerfrequenzen Ω_Q auf, bei denen die Mittelwerte einzelner Terme nicht verschwinden, weil dies nicht verschwindende Amplituden A hervorruft. Der zeitunabhängige Term in Gl. (6.35) bestimmt die Stabilität der Gleichgewichtslage des autonomen Systems ($P_s^* = 0, \delta_s = 0$). Laut der geltenden Voraussetzung in der Ungleichung (5.29) ist dieser negativ und der entsprechende transiente Vorgang klingt exponentiell ab, das heißt die Gleichgewichtslage $A_{\text{stat}} = 0$ ist asymptotisch stabil. Die Terme, welche $\cos(i\varphi)$, $i = 1, 2, 3$ enthalten, sind mittelwertfrei. Mittelwerte ungleich null ergeben sich für die Ausdrücke

$$\frac{P_s^*}{2\omega_s} \sin(\varphi - \Omega_Q \tau) \quad (6.41)$$

$$\frac{A\delta_s}{4\omega_s} \sin(2\varphi - \Omega_Q \tau) \quad (6.42)$$

jeweils mit $\Omega_Q = \omega_s$ bzw. $\Omega_Q = 2\omega_s$. Ersteres ist die klassische Resonanz aufgrund der Fremderregung. Zweiteres ist eine parametrische Resonanz, also eine Instabilität. Dies sind die Resonanzstellen, welche sich aus der Näherung erster Ordnung ergeben.

In Bezug auf asymptotische Methoden gilt im Allgemeinen, dass höhere parametrische Resonanzen nur durch Verfahren höherer Ordnung gefunden werden können. Bei vorhandener Dämpfung bewirken diese zwar im Allgemeinen nur bei großen Anregungsamplituden eine Destabilisierung der Gleichgewichtslage, jedoch soll hier zumindest mit Hilfe eines Verfahrens zweiter Ordnung überprüft werden, ob es im interessierenden Parameterbereich zu weiteren Instabilitäten kommen kann. Klassische nichtlineare Nebenresonanzen aufgrund einer Fremderregung sind nicht zu erwarten, da dafür Anregungsamplituden der Größenordnung $O(1)$ benötigt werden, welche im vorliegenden Anwendungsfall außerhalb des für die Praxis relevanten Parameterbereichs liegen.

Für die Detektion höherer parametrischer Resonanzen wird das in Abschnitt 2.2 vorgestellte Mittelwertbildungsverfahren zweiter Ordnung herangezogen. Resonanzen treten bei den Erregerfrequenzen Ω_Q auf, bei denen der Mittelwert des Integranden,

aus dem die Funktion $\mathbf{F}_2(\zeta)$ entsprechend Gl. (2.26) berechnet wird, nicht verschwindet. Dazu wird zunächst festgestellt, dass Gl. (6.33) in der Form von Gl. (2.14) vorliegt mit

$$t = \tau \quad (6.43)$$

$$\mathbf{C} = [A, \alpha]^\top \quad (6.44)$$

$$\mathbf{\Xi}_1(t, \mathbf{C}) = [\Xi_{A1}(\tau, A, \alpha), \Xi_{\alpha 1}(\tau, A, \alpha)]^\top \quad (6.45)$$

$$\mathbf{\Xi}_2(t, \mathbf{C}) = [\Xi_{A2}(\tau, A, \alpha), \Xi_{\alpha 2}(\tau, A, \alpha)]^\top. \quad (6.46)$$

Es wird wie bereits in Abschnitt 5.2 nicht explizit zwischen den ursprünglichen Größen $\mathbf{C} = [A, \alpha]^\top$ und den gemittelten Größen $\zeta = [A, \alpha]^\top$ unterschieden, weil die Mittelwertbildung die physikalische Bedeutung der Variablen nicht verändert. Daraus folgt

$$\mathbf{F}_2(\zeta) = \frac{1}{T} \int_{\tau=0}^T \left(\frac{\partial \mathbf{\Xi}_1(\tau, \zeta)}{\partial \zeta} \mathbf{u}_1(\tau, \zeta) + \mathbf{\Xi}_2(\tau, \zeta) - \frac{\partial \mathbf{u}_1(\tau, \zeta)}{\partial \zeta} \mathbf{F}_1(\zeta) \right) d\tau \quad (6.47)$$

mit

$$\mathbf{F}_1(\zeta) = \frac{1}{T} \int_{\tau=0}^T [\Xi_{A1}(\tau, A, \alpha), \Xi_{\alpha 1}(\tau, A, \alpha)]^\top d\tau \quad (6.48)$$

$$\mathbf{u}_1(\tau, \zeta) = \int [\Xi_{A1}(\tau, A, \alpha), \Xi_{\alpha 1}(\tau, A, \alpha)]^\top d\tau - \tau \mathbf{F}_1(\zeta) \quad (6.49)$$

entsprechend den Gleichungen (2.23) und (2.21) und mit der Periodendauer T . Für eine ähnliche Analyse wie beim System erster Näherung müssen also die einzelnen Terme der ersten Vektorkomponenten der Vektoren \mathbf{u}_1 ($\frac{\partial \mathbf{\Xi}_1(t, \zeta)}{\partial \zeta}$, $\mathbf{\Xi}_2(\tau, \zeta)$) und $\mathbf{F}_1(\zeta)$ ($\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \zeta}$) betrachtet werden. Neben den bereits gefundenen Resonanzfrequenzen liefert der mittlere Ausdruck entsprechend Gl. (6.36) keine neuen Frequenzen, bei denen Resonanzen auftreten können. Der Mittelwert des Ausdruck

$$-\frac{\delta_{s3} A^2}{8} \cos(\varphi - \Omega_Q \tau) \quad (6.50)$$

verschwindet zwar für $\Omega_Q = \omega_s$, jedoch ist er quadratisch in A und kann aufgrund vorhandener Dämpfung die Gleichgewichtslage nicht destabilisieren. Die beiden anderen Ausdrücke sind aufgrund ihrer Komplexität handschriftlich nur sehr aufwendig zu untersuchen. Mit der Nutzung eines Computer-Algebra-Programms kann jedoch neben dem Term in Gl. (6.42) ein weiterer Term

$$-\frac{A \delta_s^2}{8 \Omega_Q \omega_s^2} \sin(2\varphi - 2\Omega_Q \tau) \quad (6.51)$$

gefunden werden, der von der parametrischen Erregung verursacht wird und dessen Mittelwert für eine bestimmte Anregungsfrequenz, in diesem Fall bei $\Omega_Q = \omega_s$, nicht verschwindet. Somit wird neben der bereits bekannten ersten parametrischen Resonanz bei $\Omega_Q = 2\omega_s$ hier in der Näherung zweiter Ordnung eine zweite parametrische Resonanz bei $\Omega_Q = \omega_s$ gefunden, welche sich mit der klassischen Hauptresonanz aufgrund der Fremderregung überschneidet.

6.4 Stabilität der Gleichgewichtslage unter parametrischer Erregung

Bevor Näherungslösungen der periodischen Lösungen berechnet werden, wird zunächst an den im vorherigen Abschnitt gefundenen kritischen Stellen die Stabilität der Gleichgewichtslage unter parametrischer Erregung näher untersucht. Hier ist insbesondere die Fragestellung interessant, wie groß die Anregungsamplituden sein müssen, um eine Instabilität hervorzurufen. Aufgrund vorhandener Dämpfung ist es möglich, dass eine der beiden oder beide parametrischen Resonanzen für den praktischen Betrieb nicht relevant sind, da die Anregungsamplituden P_Q^* für eine Destabilisierung der Gleichgewichtslage nicht ausreichen.

Die Stabilität der Gleichgewichtslage kann im Falle von Systemen mit periodischen Koeffizienten durch die Eigenwerte der Monodromie-Matrix bestimmt werden, welche im Allgemeinen numerisch berechnet werden muss. Die Vorgehensweise zur numerischen Berechnung der Monodromie-Matrix findet sich in zahlreichen Lehrbüchern (z. B. [88, 96]) und wird hier als bekannt vorausgesetzt. Statt dessen wird im Folgenden demonstriert, wie die Stabilitätsgrenze in der Nähe der Resonanzstellen mit dem Mittelwertbildungsverfahren näherungsweise bestimmt werden kann. Dafür wird das System ohne Fremderregung, $P_s^* = 0$ betrachtet. Für die erste parametrische Resonanz genügt ein Mittelwertbildungsverfahren erster Ordnung, bei der zweiten parametrischen Resonanz ist ein Verfahren zweiter Ordnung nötig.

Zunächst wird die Umgebung der ersten parametrischen Resonanz bei $\Omega_Q = 2\omega_s$ untersucht. Um die Anregungsfrequenz und damit die asymptotische Analyse auf die Umgebung dieses Bereichs zu beschränken, wird eine neue Phasenvariable ψ mit

$$2\psi = 2\varphi - \Omega_Q\tau \quad (6.52)$$

sowie die Annahme

$$|\Omega_Q - 2\omega_s| \ll 1 \quad (6.53)$$

eingeführt.

Damit ergibt sich das gemittelte System

$$A' = \varepsilon \frac{A}{2} \left(\frac{\delta_s}{\Omega_Q} \sin 2\psi + \omega_s^2 - K_s \right) \quad (6.54)$$

$$\psi' = \varepsilon \frac{\delta_s}{2\Omega_Q} \cos 2\psi + \frac{4\omega_s^2 - \Omega_Q^2}{4\Omega_Q} \quad (6.55)$$

nach kurzer Rechnung durch das Einsetzen von Gl. (6.52) in die Gleichungen (6.33) und (6.34) mit $P_s^* = 0$. Wegen der geltenden Annahme in Gl. (6.53) ist auch die rechte Seite von Gl. (6.55) in der Größenordnung $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Das gemittelte System ist ein autonomes System mit einer Gleichgewichtslage, dessen Stabilität nun durch einfache Eigenwertberechnung bestimmt werden kann. Die sehr viel aufwändigere Anwendung der Floquet-Theorie ist nicht nötig. Die Gleichgewichtslage lautet $[0, \psi_0]^\top$ mit

$$\cos(2\psi_0) = \frac{\Omega_Q^2 - 4\omega_s^2}{2\varepsilon\delta_s}. \quad (6.56)$$

Da Gl. (6.54) linear in A ist, kann der die Stabilität bestimmende Eigenwert und die daraus resultierende Stabilitätsbedingung

$$\begin{aligned} 0 > \lambda &= \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\delta_s}{\Omega_Q} \sin 2\psi_0 + \omega_s^2 - K_s \right) \\ &= \frac{\sqrt{4\varepsilon^2\delta_s^2 - (\Omega_Q^2 - 4\omega_s^2)^2}}{4\Omega_Q} + \frac{(\omega_s^2 - K_s)\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (6.57)$$

direkt abgelesen werden. Die Stabilität wird durch zwei Summanden unterschiedlicher physikalischer Bedeutung beeinflusst, welche konträr zueinander wirken. Der erste Summand wird von der Parametererregung verursacht, ist positiv und hat deshalb eine destabilisierende Wirkung. Der zweite Summand ist wegen der Annahme einer stabilen Gleichgewichtslage des autonomen Systems negativ und stabilisiert aus diesem Grund die Gleichgewichtslage.

Als nächstes wird die zweite parametrische Resonanz bei $\Omega_Q \approx \omega_s$ untersucht. Hierfür wird die Transformation

$$\psi = \varphi - \Omega_Q \tau \quad (6.58)$$

mit der Annahme

$$|\Omega_Q - \omega_s| \ll 1 \quad (6.59)$$

eingeführt. Mit den Berechnungsvorschriften aus Abschnitt 2.2 für die Mittelwertbildung zweiter Ordnung folgt für das gemittelte Differentialgleichungssystem in der Nähe der zweiten parametrische Resonanz bei $\Omega_Q = \omega_s$ die Darstellung

$$A' = \varepsilon \frac{A}{2} (\omega_s^2 - K_s) + \varepsilon^2 \left(\left(\frac{\delta_s N_s}{6\Omega_Q^2} - \frac{\delta_{s3}}{8} \right) A^2 \cos(\psi) - \frac{A\delta_s^2}{8\Omega_Q^3} \sin(2\psi) \right) \quad (6.60)$$

$$\begin{aligned} \psi' = & \frac{\omega_s^2 - \Omega_Q^2}{2\Omega_Q} - \frac{(\omega_s^2 - \Omega_Q^2)^2}{8\Omega_Q^3} - \varepsilon^2 \left(\frac{N_s^2 A^2}{24\Omega_Q} + \frac{\omega_s^2 (\omega_s^2 - K_s)}{2\Omega_Q} + \frac{(\omega_s^2 - K_s)^2}{8\Omega_Q} \right. \\ & \left. + \frac{\delta_s^2 (3 \cos(2\psi) + 2)}{24\Omega_Q^3} + \frac{\delta_{s3} A}{8} \sin(\psi) \right). \end{aligned} \quad (6.61)$$

Die Stabilität der stationären Lösung $[0, \psi_0]^\top$ mit

$$\cos(2\psi_0) = \left(\frac{\omega_s^2 - \Omega_Q^2}{\varepsilon^2} - \frac{(\omega_s^2 - \Omega_Q^2)^2}{4\Omega_Q^2 \varepsilon^2} - \frac{(\omega_s^2 - K_s)^2}{4} - \omega_s^2 (\omega_s^2 - K_s) \right) \frac{4\Omega_Q^2}{\delta_s^2} - \frac{2}{3} \quad (6.62)$$

wird mit Hilfe der um die Gleichgewichtslage $[0, \psi_0]^\top$ linearisierten Gl. (6.60) geprüft. Der entsprechende (reelle) Eigenwert liefert die Stabilitätsbedingung

$$0 > \lambda = \varepsilon \frac{1}{2} (\omega_s^2 - K_s) - \varepsilon^2 \frac{\delta_s^2}{8\Omega_Q^3} \sin(2\psi_0) \quad (6.63)$$

mit ψ_0 entsprechend Gl. (6.62). Hier gibt es wieder einen stabilisierenden Term, welcher aus der Stabilität des autonomen Systems folgt und einen destabilisierenden Term aufgrund der Parametererregung. Da letzterer in der Größenordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ ist, sind hier im Vergleich zur parametrischen Hauptresonanz wesentlich größere Anregungsamplituden δ_s nötig, um die Gleichgewichtslage zu destabilisieren.

Die Stabilitätsgrenzen an den beiden Resonanzstellen sind in Abb. 6.6 visualisiert und werden mit den numerisch berechneten Stabilitätsgrenzen verglichen. Diese stammen nicht aus dem Originalsystem, sondern aus der Taylorreihen-Entwicklung Gl. (6.17), da nur dort die Fremderregung unabhängig von der Parametererregung betrachtet werden kann. Für die Berechnung der Floquet-Multiplikatoren wird entsprechend das System ohne Fremderregung, $P_s^* = 0$ betrachtet. Zwischen den Ergebnissen besteht eine gute Übereinstimmung. Aufgrund der im reduzierten System vorhandenen Dämpfung muss die Amplitude der Erregung P_Q^* einen gewissen Schwellenwert überschreiten, damit Instabilitäten möglich sind. Dieser Schwellenwert liegt bei der ersten parametrischen

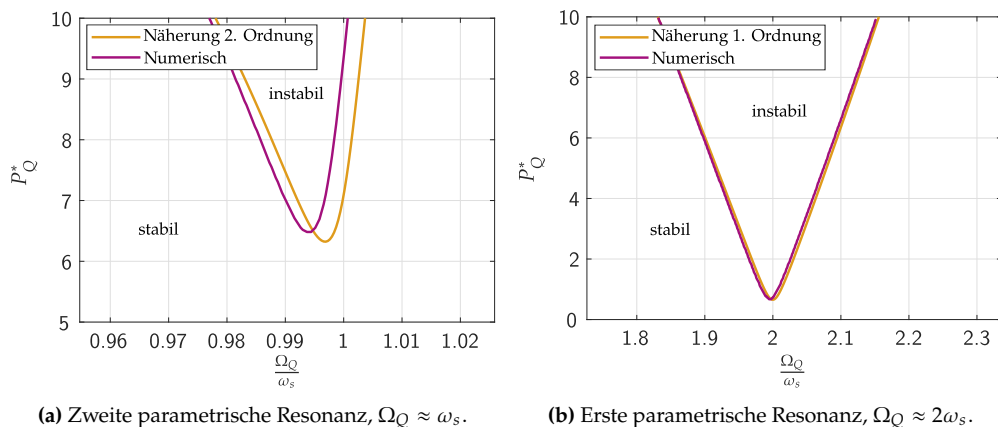


Abbildung 6.6: Stabilität der Gleichgewichtslage in der Nähe der ersten und zweiten parametrischen Resonanz. Vergleich der numerisch anhand der Taylorreihen-Entwicklung und der näherungsweise berechneten Stabilitätsgrenzen. Man beachte die unterschiedliche Achsenskalierung.

Resonanz bei ungefähr $P_Q^* \approx 0.8$, also in einem für die technische Anwendung relevanten Parameterbereich. Bei der zweiten parametrischen Resonanz sind bereits relativ große Amplituden von $P_Q^* \approx 6.5$ notwendig, um eine Instabilität zu erzeugen. Dies legt den Schluss nahe, dass auf die Detektion weiterer Resonanzstellen verzichtet werden kann, da bei diesen noch größere Anregungsamplituden notwendig sind, um die Gleichgewichtslage zu destabilisieren. Diese liegen damit weit außerhalb des für die Praxis relevanten Parameterbereichs.

6.5 Approximation der langsamen Dynamik in der Nähe der Resonanzstellen

Die Grundlösung der langsamen Dynamik ergäbe sich durch einfaches Nullsetzen von ε in den Gleichungen (6.29) und (6.30) identisch zu der für den autonomen Fall in Abschnitt 5.2, weil die Anregungsmechanismen in der Größenordnung $O(\varepsilon)$ sind. Jedoch wird die Frequenz der Systemantwort durch die Anregungsfrequenz Ω_Q bestimmt. Dies muss in der Grundlösung berücksichtigt werden.

Wird die Grundlösung ausschließlich aus trigonometrischen Funktionen gebildet, wie beispielsweise in Abschnitt 6.3 (Gleichungen (6.31) und (6.32)), kann an dieser Stelle eine kleine Frequenzkorrektur

$$\alpha = \psi + \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \Omega_Q - \omega_s \right) \tau, \quad (6.64)$$

eingesetzt werden, wobei je nach Resonanzstelle $\mathcal{R} = 1$ (klassische Hauptresonanz) oder $\mathcal{R} = 2$ (erste parametrische Resonanz) gilt. In der Nähe der Resonanzstellen gilt dabei $\Omega_Q - \mathcal{R}\omega_s = \mathcal{O}(\varepsilon)$. Mit dieser Frequenzkorrektur, welche genau den Gleichungen (6.52) und (6.58) entspricht, wird die Frequenz der Systemantwort der Anregung angeglichen, ohne die Amplitude zu verändern.

Unter diesen Bedingungen soll im Folgenden auch die durch die Gleichungen (5.8) und (5.9) definierte stückweise stetige Grundlösung modifiziert werden. Dazu werden zwei Korrekturfaktoren κ_c und $\bar{\kappa}_c$

$$\tilde{\xi}_{10}(\tau) = \begin{cases} \xi_{10}(\tau) = A \cos(\omega_s \kappa_c \tau + \psi), & \tau_0 < \tau \leq \tau_1 \\ \bar{\xi}_{10}(\tau) = c_1 + c_2 \tau + \frac{1}{2} \bar{\kappa}_c \bar{Q}_s \tau^2, & \tau_1 < \tau \leq \tau_2 \end{cases} \quad (6.65)$$

$$\tilde{\xi}_{20}(\tau) = \begin{cases} \xi_{20}(\tau) = -A \omega_s \kappa_c \sin(\omega_s \kappa_c \tau + \psi), & \tau_0 < \tau \leq \tau_1 \\ \bar{\xi}_{20}(\tau) = c_2 + \bar{\kappa}_c \bar{Q}_s \tau, & \tau_1 < \tau \leq \tau_2 \end{cases} \quad (6.66)$$

$$\tau_2 = \tau_0 + \mathcal{R} \frac{2\pi}{\Omega_Q} \quad (6.67)$$

in die Grundlösung eingebracht. Für den Fall $\mathcal{R} = 2$ antwortet das System also in der halben Anregungsfrequenz, was eine übliche Charakteristik parametrisch erregter Systeme ist. Die Stetigkeit und Periodizität der Grundlösung wird durch zu Abschnitt 5.2 identische Bedingungen, Gleichungen (5.10) bis (5.14) gefordert, wodurch die Größen

$$\tau_0 = \frac{-\psi - \pi + C}{\omega_s \kappa_c} \quad (6.68)$$

$$\tau_1 = \frac{-\psi + \pi - C}{\omega_s \kappa_c} \quad (6.69)$$

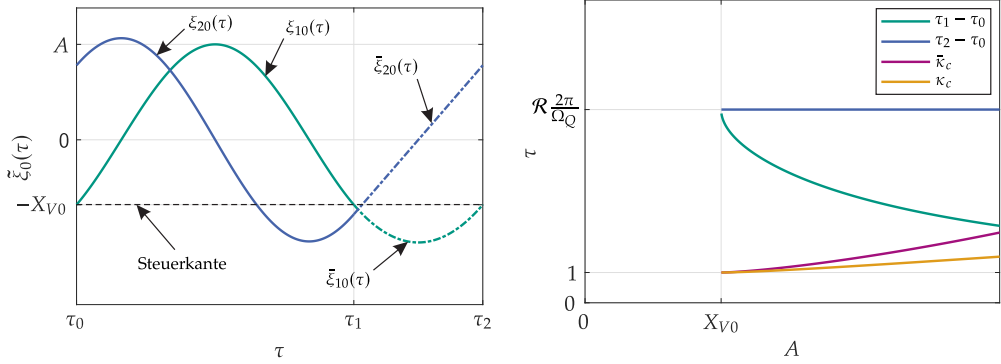
$$c_1 = \frac{1}{2} \bar{\kappa}_c \bar{Q}_s \tau_1^2 + \omega_s \kappa_c \tau_1 \sqrt{A^2 - X_{V0}^2} - X_{V0} \quad (6.70)$$

$$c_2 = -\frac{\bar{Q}_s \bar{\kappa}_c}{\omega_s \kappa_c} \tau_1 - \omega_s \kappa_c \sqrt{A^2 - X_{V0}^2} \quad (6.71)$$

$$\bar{\kappa}_c = -\frac{\Omega_Q \omega_s^2 \kappa_c^2 \sqrt{A^2 - X_{V0}^2}}{(-\Omega_Q C + \pi (\Omega_Q - \mathcal{R} \omega_s \kappa_c)) \bar{Q}_s} \quad (6.72)$$

$$C = \arccos\left(\frac{X_{V0}}{A}\right) \quad (6.73)$$

in Abhängigkeit von A , ψ und κ_c ausgedrückt werden. Die Bestimmung der letzten verbliebenen Unbekannten κ_c erfolgt anhand der Bedingung, dass sich die Schwingungsamplitude durch die Frequenzkorrektur nicht ändert. Dies ist für die Schwin-



(a) Verlauf der Grundlösungen $\xi_{10}(\tau)$ und $\xi_{20}(\tau)$ innerhalb einer Periode für den Fall $A > X_{V0}$, bei dem die Schwingungen die Steuercante $\xi_V = -X_{V0}$ überschreiten.

(b) Korrekturfaktoren und Schaltzeiten in Abhängigkeit von A . Für $A < X_{V0}$ wird die Steuercante nicht überschritten, das Ventil ist hier also dauerhaft geöffnet. Die Periodendauer $\tau_2 - \tau_0$ wird durch die Anregung bestimmt und ist unabhängig von A .

Abbildung 6.7: Darstellung der Grundlösung.

gungsmaxima automatisch erfüllt. Aus der Unveränderlichkeit der Schwingungsminima ergibt sich mit Gl. (5.25) die zusätzliche Bedingung

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \bar{\xi}_{10} \left(\tau = \frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\pi \left(1 - \mathcal{R} \frac{\omega_s \kappa_c}{\Omega_Q} \right) - C \right) \sqrt{A^2 - X_{V0}^2} - X_{V0} \end{aligned} \quad (6.74)$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \frac{\omega_s^2}{\bar{Q}_s} \left(X_{V0}^2 - A^2 \right) - X_{V0}, \quad (6.75)$$

aus der die letzte Unbekannte

$$\kappa_c = \frac{\Omega_Q}{\mathcal{R}} \left(\frac{\pi - C}{\pi \omega_s} + \frac{\omega_s}{\pi \bar{Q}_s} \sqrt{A^2 - X_{V0}^2} \right) \quad (6.76)$$

berechnet wird.

Der Verlauf der Grundlösung ist in Abb. 6.7a innerhalb einer Periode dargestellt. Hier sieht man zunächst keinen Unterschied gegenüber dem autonomen Fall (Abb. 5.4a). Die Unterschiede werden erst in Abb. 6.7b deutlich, da sich die gesamte Periodendauer $\tau_2 - \tau_0$ mit zunehmender Schwingungsamplitude A nicht verändert. Dafür verändern sich die Korrekturfaktoren in Abhängigkeit von A , um genau diese Unveränderlichkeit der Periodendauer sicherzustellen.

Die Variation von A und ψ liefert mit der Grundlösung in den Gleichungen (6.65) und (6.66) eine Variablentransformation, mit welcher wie im autonomen Fall ein nicht-glatte System in Standardform

$$A' = \varepsilon \begin{cases} f_A^{(\mathcal{R})}(\tau - i\Delta\tau), & \tau_0 + i\Delta\tau \leq \tau < \tau_1 + i\Delta\tau \\ \bar{f}_A^{(\mathcal{R})}(\tau - i\Delta\tau), & \tau_1 + i\Delta\tau \leq \tau < \tau_0 + (i+1)\Delta\tau \end{cases} \quad (6.77)$$

$$\psi' = \varepsilon \begin{cases} f_\psi^{(\mathcal{R})}(\tau - i\Delta\tau), & \tau_0 + i\Delta\tau \leq \tau < \tau_1 + i\Delta\tau \\ \bar{f}_\psi^{(\mathcal{R})}(\tau - i\Delta\tau), & \tau_1 + i\Delta\tau \leq \tau < \tau_0 + (i+1)\Delta\tau \end{cases} \quad (6.78)$$

$$\Delta\tau = \mathcal{R} \frac{2\pi}{\Omega_Q}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

formuliert wird. Die Funktionen $f_A^{(\mathcal{R})}$, $\bar{f}_A^{(\mathcal{R})}$, $f_\psi^{(\mathcal{R})}$ und $\bar{f}_\psi^{(\mathcal{R})}$, $\mathcal{R} = 1, 2$ werden hier nicht explizit angegeben. Die Mittelwertbildung wird für die Hauptresonanz $\mathcal{R} = 1$ entsprechend den Gleichungen

$$A' = \varepsilon \frac{\Omega_Q}{2\pi} \left(\int_{\tau_0}^{\tau_1} f_A^{(1)}(\tau) d\tau + \int_{\tau_1}^{\tau_0 + \frac{2\pi}{\Omega_Q}} \bar{f}_A^{(1)}(\tau) d\tau \right) \quad (6.79)$$

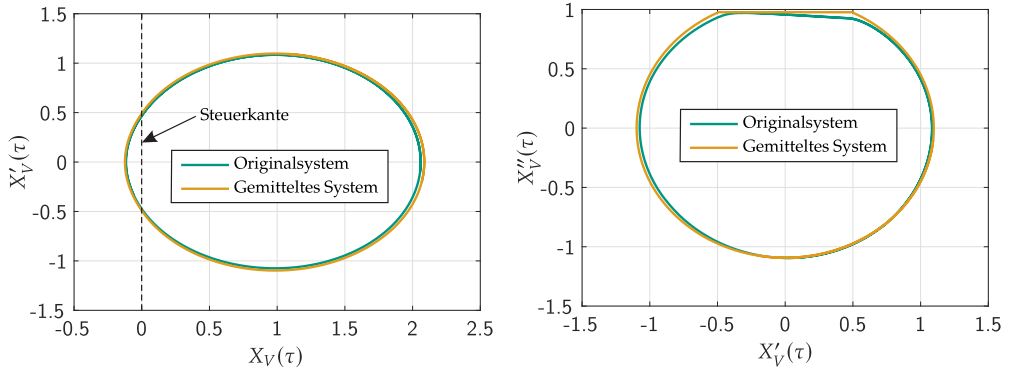
$$\psi' = \varepsilon \frac{\Omega_Q}{2\pi} \left(\int_{\tau_0}^{\tau_1} f_\psi^{(1)}(\tau) d\tau + \int_{\tau_1}^{\tau_0 + \frac{2\pi}{\Omega_Q}} \bar{f}_\psi^{(1)}(\tau) d\tau \right) \quad (6.80)$$

und für die erste parametrische Resonanz $\mathcal{R} = 2$ entsprechend

$$A' = \varepsilon \frac{\Omega_Q}{4\pi} \left(\int_{\tau_0}^{\tau_1} f_A^{(2)}(\tau) d\tau + \int_{\tau_1}^{\tau_0 + \frac{4\pi}{\Omega_Q}} \bar{f}_A^{(2)}(\tau) d\tau \right) \quad (6.81)$$

$$\psi' = \varepsilon \frac{\Omega_Q}{4\pi} \left(\int_{\tau_0}^{\tau_1} f_\psi^{(2)}(\tau) d\tau + \int_{\tau_1}^{\tau_0 + \frac{4\pi}{\Omega_Q}} \bar{f}_\psi^{(2)}(\tau) d\tau \right). \quad (6.82)$$

berechnet. Für die Integrale konnten keine analytischen Lösungen gefunden werden, weshalb die Mittelwertbildung hier durch numerische Integration mit Hilfe des Trapezverfahrens erfolgt. Somit können zwar keine analytischen Ausdrücke für die gemittelten Gleichungen angegeben werden. Da diese jedoch vermutlich sehr komplex wären, würde die Auswertung trotzdem durch das Einsetzen numerischer Zahlenwerte erfolgen. Auch die Erhöhung der Rechenzeit ist nicht signifikant, da die Integrationen lediglich über eine Schwingungsperiode erfolgen und die Anzahl der Stützstellen sehr gering gewählt werden kann. Die in den folgenden Abbildungen dargestellten Simulationsergebnisse werden mit 25 äquidistanten Stützstellen erzeugt. Die Minima der Schwingungen ergeben sich für beide Resonanzstellen entsprechend Gl. (6.74).



(a) Stationäre periodische Lösung projiziert auf die $X_V - X'_V$ -Ebene.

(b) Stationäre periodische Lösung projiziert auf die $X'_V - X''_V$ -Ebene.

Abbildung 6.8: Vergleich der stationären Lösungen des Originalsystems und des gemittelten Systems in der Hauptresonanz $\Omega_Q = \omega_s$. Anregungsamplitude $P_s^* = 1$.

Für den Fall $A \leq X_{V0}$, bei dem die Schwingungen die Steuercante nicht kreuzen, liefert die Mittelwertbildung bei $\Omega_Q \approx \omega_s$ bzw. $\mathcal{R} = 1$ die Gleichungen

$$A' = \varepsilon \frac{\Omega_Q}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega_Q} f_A^{(1)}(\tau) d\tau = -\varepsilon \frac{A}{2} \left(K_s - \omega_s^2 - \frac{P_s^*}{A\Omega_Q} \sin \psi \right) \quad (6.83)$$

$$\psi' = \varepsilon \frac{\Omega_Q}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega_Q} f_\psi^{(1)}(\tau) d\tau = \frac{\omega_s^2 - \Omega_Q^2}{2\Omega_Q} + \varepsilon \frac{P_s^*}{2A\Omega_Q} \cos \psi. \quad (6.84)$$

Bei $\Omega_Q \approx 2\omega_s$ ergeben sich die Gleichungen (6.54) und (6.55). Für beide Resonanzstellen gilt $\bar{A}(\tau) = -A$. Weil Gl. (6.55) unabhängig von A ist, ist es sinnvoll, die Variable ψ als neue unabhängige Variable zu definieren und damit die Gleichungen (6.54) und (6.55) als Einzeldifferentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dA}{d\psi} = -2\varepsilon A \frac{-\delta_s \sin(2\psi) + \Omega_Q (-\omega_s^2 + K_s)}{2\varepsilon \delta_s \cos(2\psi) - \Omega_Q^2 + 4\omega_s^2} \quad (6.85)$$

zu formulieren.

In Abb. 6.8 werden die stationären Lösungen des gemittelten Systems und des Originalsystems in der Hauptresonanz $\Omega_Q = \omega_s$ miteinander verglichen. Der zweidimensionale Phasenraum des gemittelten Systems wird mit Hilfe der Grundlösung, Gleichun-

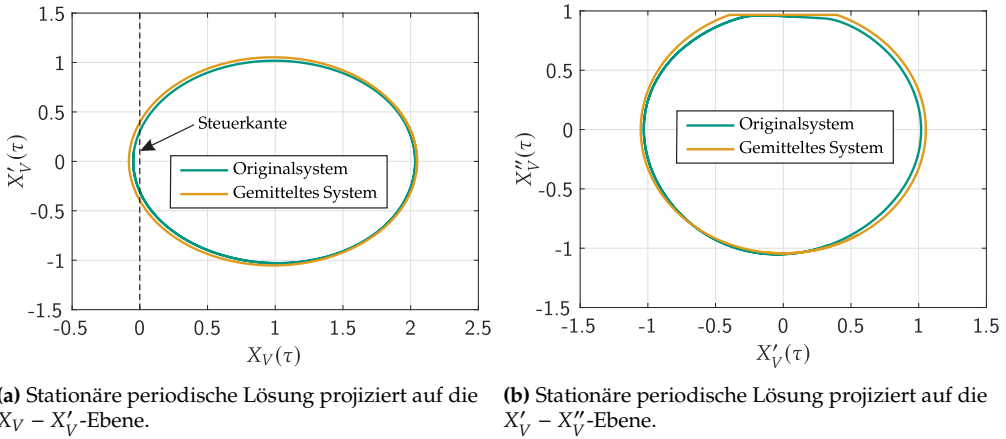


Abbildung 6.9: Vergleich der stationären Lösungen des Originalsystems und des gemittelten Systems in der ersten parametrischen Resonanz $\Omega_Q = 2\omega_s$. Anregungsamplitude $P_s^* = 1$.

gen (6.65) und (6.66) auf die dimensionslose Kolbenposition bzw. -geschwindigkeit zurück transformiert und mittels

$$X''_V = \frac{d\tilde{\xi}_{20}(\tau)}{d\tau} = \begin{cases} -A\omega_s^2\kappa_c^2 \cos(\omega_s\kappa_c\tau + \psi), & \tau_0 < \tau \leq \tau_1 \\ \bar{\kappa}_c\bar{Q}_s, & \tau_1 < \tau \leq \tau_2 \end{cases} \quad (6.86)$$

auf die dritte Dimension erweitert. Beim Übergang an der Steuercante wird die Unstetigkeit der Kolbenbeschleunigung weiterhin durch das Mittelwertbildungsverfahren näherungsweise eliminiert, wie es beim autonomen System ebenso der Fall war (vgl. Abb. 5.5). Auch insgesamt sind die Abweichungen zwischen den beiden Lösungen sehr gering. Dies gilt auch für die stationären Lösungen in der ersten parametrischen Resonanz, siehe Abb. 6.9. Hier sind die Schwingungsamplituden gegenüber der Hauptresonanz etwas geringer, da die Stabilitätsgrenze mit $P_Q^* = 1$ nur minimal überschritten wird. Qualitativ sind zwischen den stationären Lösungen an den beiden Resonanzstellen keine Unterschiede zu erkennen.

Bei der Betrachtung des Einschwingverhaltens fällt auf, dass die Abweichungen zwischen dem Originalsystem und dem gemittelten System deutlich größer sind, insbesondere gegenüber dem Einschwingverhalten im autonomen System, vgl. Abb. 5.6a. Trotzdem liegen die Abweichungen in einer akzeptablen Größenordnung.

Die Detektion und Visualisierung stationärer Lösungen gestaltet sich im fremderregten Fall etwas aufwendiger als im autonomen Fall, bei der dies durch die Berechnung der Nullstellen einer eindimensionalen Funktion erfolgt. Einzig bei der ersten parametrischen Resonanz wird die langsame Dynamik für den Fall $A \leq X_{V0}$ durch eine

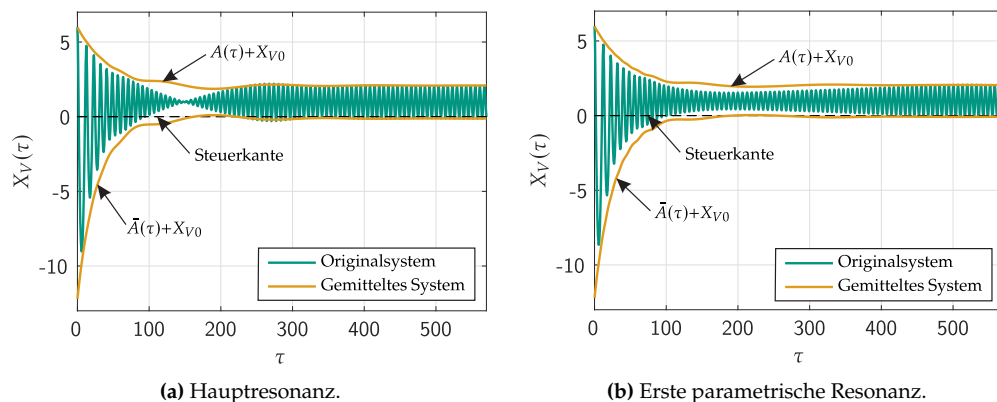


Abbildung 6.10: Vergleich des Einschwingverhaltens des Originalsystems und des gemittelten Systems. Für die Anfangsbedingungen gilt $X_V(0) = A(0) + X_{V0}$ und $X'_V(0) = \psi(0) = 0$.

Einzeldifferentialgleichung erster Ordnung, Gl. (6.85) beschrieben. Aus dieser lässt sich eine erste stationäre Lösung $A_{\text{stat}} = 0$ direkt ablesen.

In der Nähe der Hauptresonanz sowie bei der parametrischen Resonanz für den Fall $A > X_{V0}$ bestehen die gemittelten Systeme zur Beschreibung der langsamen Dynamik jedoch aus zwei gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung. Die stationären Lösungen werden also durch die Nullstellen einer zweidimensionalen Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ bestimmt. Zur grafischen Veranschaulichung im zweidimensionalen Phasenraum werden in Abb. 6.11 die Nullstellen der einzelnen Vektorkomponenten der zweidimensionalen Funktion dargestellt, also die Linien, für die $A' = 0$ bzw. $\psi' = 0$ gilt. Die Schnittpunkte dieser Linien markieren die stationären Lösungen.

Im Bereich der Hauptresonanz wird die Anregungsfrequenz von $\Omega_Q = 0.9 \dots 1.01$ variiert und die entsprechenden stationären Lösungen bestimmt, siehe Abb. 6.11a. Die rechten Seiten der Gleichungen (6.80) und (6.83), welche die Bedingung $A' = 0$ markieren, werden dabei kaum von der Variation von Ω_Q beeinflusst und beschreiben einen Bogen vom Punkt $[A, \psi]^T = [0, 0]^T$ über die Steuerkante bis zum Punkt $[A, \psi]^T = [0, \pi]^T$. Die Linien, welche $\psi' = 0$ markieren, werden dagegen sehr stark von einer Veränderung der Erregerfrequenz beeinflusst. Für $\Omega_Q = 0.9$ existiert lediglich ein einziger Schnittpunkt zwischen den beiden Kurven bei $A \leq X_{V0}$. Dies bedeutet, dass es bei dieser Erregerfrequenz eine einzige stationäre periodische Lösung mit vergleichsweise geringer Schwingungsamplitude gibt. Für $\Omega_Q = 0.9275$ und $\Omega_Q = 0.955$ existieren zusätzlich zwei weitere Schnittpunkte für $A > X_{V0}$. Dies entspricht zwei stationären periodischen Lösungen, welche die Steuerkante kreuzen, also mit wesentlich größerer Amplitude. Bei weiterer Vergrößerung der Erregerfrequenz verschwinden die Kreuzungspunkte auf dem oberen Bogenabschnitt, wodurch die Anzahl der stationären Lösungen nun wieder von drei auf eine reduziert wird.

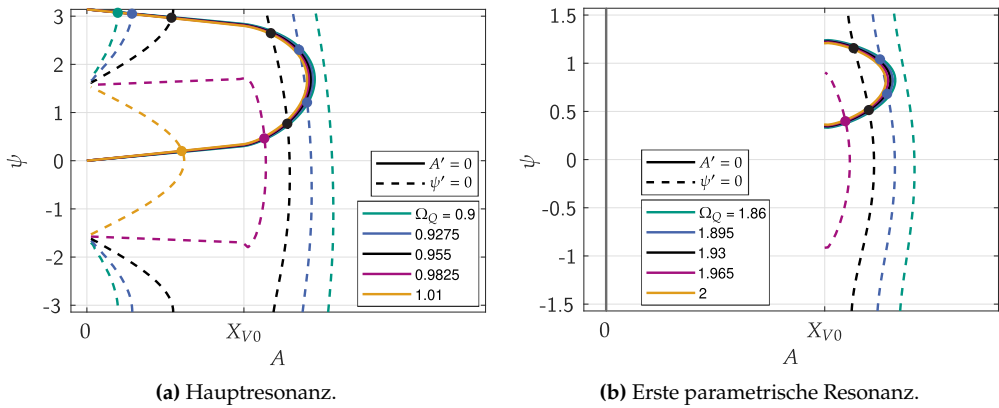
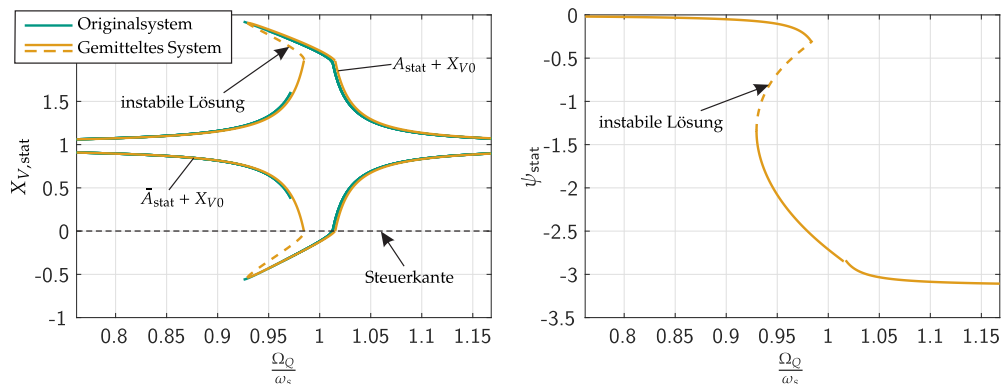


Abbildung 6.11: Phasenraumstruktur der gemittelten Gleichungen. Durchgezogene Linien markieren $A' = 0$, gestrichelte Linien kennzeichnen $\psi' = 0$. Die Schnittpunkte sind die stationären Lösungen. Je nach Erregerfrequenz existieren eine, zwei oder drei verschiedene stationäre Lösungen. Im Bereich der ersten parametrischen Resonanz wird durch die graue Linie eine weitere stationäre Lösung $A_{\text{stat}} = 0$ angedeutet, welche durch die Betrachtung von Gl. (6.85) gefunden wird.

Im Bereich der ersten parametrischen Resonanz (Abb. 6.11b) existiert für $A < X_{V0}$ lediglich die stationäre Lösung $A_{\text{stat}} = 0$, und zwar unabhängig von Ω_Q . Für $\Omega_Q = 1.86$ gibt es keine Schnittpunkte zwischen den Linien, welche durch $A' = 0$ und $\psi' = 0$ definiert sind. Weiterhin kann für $\Omega_Q = 2$ die Gl. 6.82 nicht null werden. In diesen Bereichen existieren also neben $A_{\text{stat}} = 0$ keine weiteren stationären Lösungen. Für $\Omega_Q = 1.895$ und $\Omega_Q = 1.93$ gibt es zwei Schnittpunkte bei $A > X_{V0}$ und damit insgesamt drei stationäre Lösungen. Bei $\Omega_Q = 1.965$ existiert nur noch eine weitere stationäre Lösung.

Um ein genaueres Bild der stationären Lösungen im gemittelten System zu erhalten, sind diese unter Variation der Anregungsfrequenz Ω_Q in den Abbildungen 6.12 und 6.13 als nichtlineare Amplitudengänge dargestellt. Instabile Lösungen sind durch gestrichelte, stabile Lösungen durch durchgezogene Linien gekennzeichnet. Die Amplituden der stabilen stationären Lösungen werden durch den Vergleich mit Lösungen des Originalsystems verifiziert. Die stationären Lösungen des gemittelten Systems werden durch das numerische Lösen der durch $A' = 0$ und $\psi' = 0$ definierten nichtlinearen algebraischen Gleichungssysteme berechnet. Dadurch werden auch instabile Lösungen gefunden. Die Ergebnisse des Originalsystems stammen aus numerischen Zeitintegrationen, weshalb hier nur stabile Lösungen gefunden werden.

In der Nähe der Hauptresonanz (Abb. 6.12) sind im Bereich der Schwingungsamplituden, welche die Steuerkante nicht kreuzen, keine nichtlinearen Phänomene zu erkennen. Erst die Nichtlinearität der Steuerkante bewirkt ein deutliches Abknicken der Kurve. Ohne dieses Abknicken wären die Amplituden bei $\Omega_Q = \omega_s$ deutlich größer.



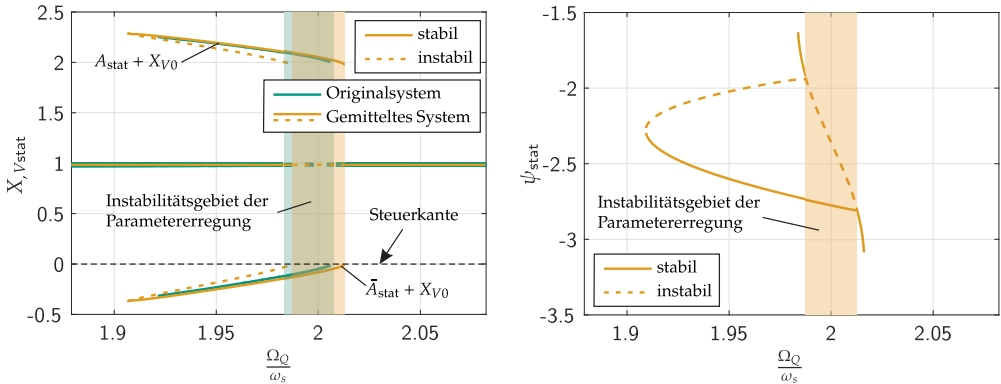
(a) Minima \bar{A}_{stat} und Maxima A_{stat} der stationären Lösungen.

(b) Phasenverschiebungen ψ_{stat} der stationären Lösungen.

Abbildung 6.12: Vergleich der stationären Lösungen des Originalsystems und des gemittelten Systems in der Nähe der Hauptresonanz, $\Omega_Q - \omega_s = \mathcal{O}(\varepsilon)$. Instabile periodische Lösungen treten auch im Originalsystem auf. Sie sind hier nicht dargestellt, weil sie nicht ohne besondere numerische Methoden gefunden werden können.

Die Steuerkante hat hier also einen dämpfenden Effekt. Allerdings wird dafür der Preis einer Verbreiterung des Resonanzbereichs gezahlt. Bei $\Omega_Q \approx 0.95\omega_s$ existieren stabile periodische Lösungen mit großer Amplitude $A > X_{V0}$, welche ohne die Steuerkante nicht vorhanden wären. Die koexistierenden stationären Lösungen mit kleinen Amplituden $A < X_{V0}$ werden im realen Betrieb nicht immer erreicht, da deren Einzugsgebiet von der instabilen Lösung begrenzt wird.

Im Bereich der parametrischen Resonanz (Abb. 6.13) ist zusätzlich gekennzeichnet, für welche Erregerfrequenzen die Gleichgewichtslage parametrisch destabilisiert wird. Auch hier werden die Amplituden durch die Steuerkante offensichtlich stark reduziert. Jedoch ist der Bereich, in dem stationäre Lösungen mit nicht verschwindender Amplitude existieren, deutlich größer als der Bereich instabiler Gleichgewichtslagen. Somit wird auch hier die Reduktion der Schwingungsamplituden durch die Steuerkante mit einer Verbreiterung des Resonanzbereichs bezahlt. Einzugsbereiche stabiler Lösungen werden durch die instabilen Lösungen getrennt. Die zu $A_{stat} = 0$ gehörende Lösung des Originalsystems ist aufgrund der immer noch vorhandenen Fremderregung keine Gleichgewichtslage, sondern eine periodische Lösung mit sehr kleiner Amplitude. Aufgrund der großen Entfernung zur klassischen Hauptresonanz sind die Amplituden jedoch so klein, dass sie in Abb. 6.13a lediglich als etwas breitere Linie erscheinen. Wie bereits in Abb. 6.6b zu sehen war, ist das durch die Mittelwertbildung vorhergesagte Instabilitätsgebiet gegenüber dem im Originalsystem vorhandenen leicht verschoben. Die Abweichungen sind jedoch in einer akzeptablen Größenordnung.



(a) Minima \bar{A}_{stat} und Maxima A_{stat} der stationären Lösungen.

(b) Phasenverschiebungen ψ_{stat} der stationären Lösungen.

Abbildung 6.13: Vergleich der stationären Lösungen des Originalsystems und des gemittelten Systems in der Nähe der ersten parametrischen Resonanz, $\Omega_Q - 2\omega_s = O(\varepsilon)$. Die farbig hinterlegten Flächen kennzeichnen die Gebiete, in denen die Gleichgewichtslage durch die Parametererregung destabilisiert wird. Instabile periodische Lösungen treten auch im Originalsystem auf. Sie sind hier nicht dargestellt, weil sie nicht ohne besondere numerische Methoden gefunden werden können.

7 Asymptotische Analyse ausgewählter Nichtlinearitäten

Das vorgestellte asymptotische Verfahren zur qualitativen Beschreibung der nichtlinearen Ventildynamik basiert auf Modellen mit einem hohen Abstraktionsgrad. Es gibt daher eine Vielzahl bisher unberücksichtigter physikalischer Einflüsse, welche das dynamische Verhalten in der Realität beeinflussen können. Solange die zugehörigen Kräfte und Volumenströme in der Größenordnung $\mathcal{O}(\varepsilon)$ sind, können diese Einflüsse im Allgemeinen in das asymptotische Verfahren integriert werden.

In diesem Kapitel werden drei ausgewählte nichtlineare Effekte in das Verfahren eingebunden und deren Auswirkungen auf die globale Stabilität und die Phasenraumstruktur der Ventile diskutiert. Alle drei Effekte zeichnen sich dadurch aus, dass eine Stabilitätsanalyse, welche auf einer Linearisierung um die Gleichgewichtslage basiert, nicht möglich oder nicht sinnvoll ist.

Der erste Effekt ist die Erweiterung des linear viskosen Reibmodells um einen Anteil Coulomb'scher Reibung und wird in Abschnitt 7.1 diskutiert. In diesem Fall ist eine Linearisierung um die (indefinite) Gleichgewichtslage zwar möglich, aber die entsprechende Stabilitätsanalyse für die reale Anwendung nicht aussagekräftig. Dies liegt daran, dass es große Parameterbereiche gibt, in denen das Einzugsgebiet der stabilen Gleichgewichtslage verschwindend klein ist und die Gleichgewichtslage demnach fast nie erreicht wird. Für die praktische Anwendung relevante Aussagen erfordern also eine globale Analyse der Dynamik und Stabilität stationärer Lösungen.

Abschnitt 7.2 widmet sich mit der quadratischen Dämpfung dem zweiten Effekt. Dieser ist das Resultat einer Dämpfungsblende, welche in der Druckrückführung platziert wird. Wird der entsprechende turbulente Volumenstrom mit der Blendengleichung modelliert, ergibt sich eine zusätzliche wurzelförmige Nichtlinearität $q_c \propto \sqrt{\Delta p}$ zwischen dem Volumenstrom durch die Blende q_c und der entsprechenden Druckdifferenz Δp . Weil im stationären Betrieb $\Delta p = 0$ gilt und die Wurzelfunktion an diesem Punkt nicht Lipschitz-stetig ist, ist eine Linearisierung um die Gleichgewichtslage und eine darauf basierende Stabilitätsuntersuchung nicht möglich.

Das Gleiche gilt für den dritten Effekt eines Ventils mit kritischer Überdeckung, welcher in Abschnitt 7.3 diskutiert wird. Dieser Fall erfordert keine Erweiterung, sondern lediglich eine kleine Modifikation des asymptotischen Verfahrens. Er beinhaltet die Möglichkeit, dass die Gleichgewichtslage genau auf der Steuerkante liegt, was ebenfalls eine Linearisierung und somit eine Stabilitätsanalyse basierend auf den Eigenwerten des linearisierten Systems verhindert.

7.1 Trockene Reibung

In den bisher untersuchten Modellen wurden Reibungseffekte in Form einer linear viskosen Dämpfung modelliert, welche am Ventilkolben angreift. Dies ist für viele reale Anwendungen eine gute Näherung. In manchen Fällen sind jedoch nichtlineare Reibungsmechanismen so dominant, dass sie die Dynamik des Gesamtsystems wesentlich beeinflussen, wie verschiedene Publikationen zeigen [118, 126]. In diesem Abschnitt wird das linear viskose Reibungsmodell erweitert und werden die Auswirkungen auf das dynamische Verhalten des Ventilkreislaufs untersucht. Die Modellerweiterung soll sowohl Haften als auch Gleiten abbilden können. Weitere nichtlineare Effekte, wie ein geschwindigkeitsabhängiger Reibwert, werden hier nicht betrachtet.

Den formulierten Anforderungen wird das Coulomb'sche Reibungsmodell gerecht, welches einen geschwindigkeitsunabhängigen Reibwert μ voraussetzt. Mit dem Reibwert wird die zur Normalkraft f_N proportionale Gleitreibungskraft $f_R = \mu f_N$ berechnet. Im Haftfall gilt für die Haftkraft die Bedingung $f_H \leq f_{H,\max}$, in der die maximale Haftkraft hier als $f_{H,\max} = f_R$ modelliert wird.

Der Einfluss auf das dynamische Verhalten wird am Beispiel des Konstantdrucksystems mit Druckregelventil und idealer Pumpe analysiert. Es ergeben sich jedoch identische Bewegungsgleichungen, wenn der Ventilkreislauf mit 3/3-Proportional-Wegeventil und Druckquelle untersucht wird.

Die Herleitung der Bewegungsgleichungen erfordert eine Fallunterscheidung zwischen Gleiten und Haften. Im Haftfall gilt $\dot{x}_V = 0$. Haften tritt jedoch nur dann auf, wenn die Summe der äußeren Kräfte, welche auf den Ventilkolben wirken, kleiner als die maximale Haftkraft ist. Dies liefert die Haftbedingung

$$\dot{x}_V = 0 \wedge |p_1 - f_c - k_V x_V| \leq f_R, \quad (7.1)$$

in der das Symbol „ \wedge “ das logische „und“-Zeichen darstellt. Da der Kolben im Fall des Haftens still steht, ergibt sich die entsprechende Haftdynamik

$$C_h \dot{p}_1 = q_{h,q}(x_V, p_1) + q_C(p_1) \quad (7.2)$$

aus der Druckaufbaugleichung in der Hauptkapazität mit $\dot{x}_V = 0$. Die Funktionen $q_{h,q}(x_V, p_1)$ und $q_C(p_1)$ sind gegenüber Abschnitt 4.1 unverändert und den Gleichungen (4.4) und (4.9) zu entnehmen.

Ausgehend von den Gleichungen (4.1) und (4.2) liefert die Hinzunahme der richtungsabhängigen Reibkraft die Bewegungsgleichungen

$$m_V \ddot{x}_V + d_V \dot{x}_V + f_R \text{sign}(\dot{x}_V) + k_V x_V = r_V^2 \pi p_1 - f_c \quad (7.3)$$

$$C_h \dot{p}_1 = -r_V^2 \pi \dot{x}_V + q_{h,q}(x_V, p_1) + q_C(p_1) \quad (7.4)$$

für den Fall des Gleitens, der auftritt, wenn die Gleitbedingung

$$\dot{x}_V \neq 0 \vee (\dot{x}_V = 0 \wedge |p_1 - f_c - k_V x_V| > f_R) \quad (7.5)$$

erfüllt ist. Das Symbol „ \vee “ bezeichnet das logische „oder“-Zeichen.

Mit der dimensionslosen Reibkraft

$$F_R = \frac{f_R}{d \omega_0 \tilde{x}_0} \quad (7.6)$$

und der dimensionslosen Notation aus Gl. (4.17) folgt die dimensionslose Darstellung der Bewegungsgleichungen

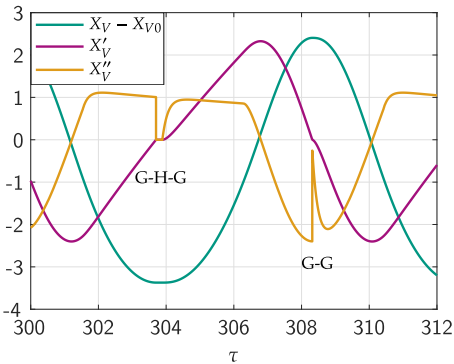
$$\left. \begin{aligned} M_V X_V'' + X_V' + F_R \text{sign}(X_V') + K_V X_V &= P_1 - F_c \\ P_1' &= -\alpha_V X_V' + Q_h(X_V, P_1) - Q_C(P_1) \end{aligned} \right\}, X_V' \neq 0 \vee (X_V' = 0 \wedge |F_H| > F_R)$$

$$\left. \begin{aligned} X_V' &= 0 \\ P_1' &= Q_{h,q}(X_V, P_1) - Q_C(P_1) \end{aligned} \right\}, |F_H| \leq F_R \quad (7.7)$$

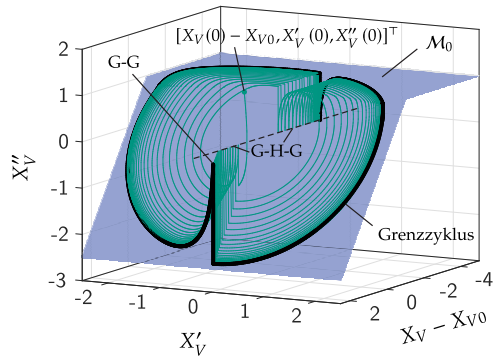
mit der dimensionslosen Haftkraft $F_H = P_1 - F_c - K_V X_V$ und den Funktionen $Q_{h,q}(X_V, P_1)$ und $Q_C(P_1)$ entsprechend den Gleichungen (4.20) und (4.22).

Abb. 7.1 zeigt den Einfluss der Coulomb'schen Reibung auf das dynamische Verhalten des Ventilkreislaufs. Die dimensionslosen Parameter, welche für die Simulation verwendet werden, basieren auf den physikalischen Parameterwerten aus Tab. 4.1, jedoch mit einem verringerten viskosen Dämpfungsparameter $d_V = 130 \text{ N s/m}$. Für die Reibkraft wird ein Wert von $f_R = 1 \text{ N}$ verwendet.

In Abb. 7.1a sind die Verläufe der Kolbenposition, -geschwindigkeit und -beschleunigung im Zeitbereich dargestellt. Beim Schwingungsminimum der Kolbenposition greift die Haftbedingung und kommt es zu einer Haftphase. An der durch $X_V' = 0$ definierten Hyperfläche wird dort ein Gleit-Haft und ein Haft-Gleit-Übergang (G-H-G) durchlaufen. Im weiteren Verlauf wird beim Schwingungsmaximum die Haftbedingung am



(a) Grenzzyklusschwingung im Zeitbereich.



(b) Einschwingverhalten und Grenzzzyklus im dreidimensionalen Phasenraum.

Abbildung 7.1: Einfluss der trockenen Reibung auf die Dynamik des Ventilkreislaufs. Dämpfungsparameter $d_V = 130 \text{ N s/m}$, Reibkraft $f_R = 1 \text{ N}$. Nulldurchgänge der Kolbengeschwindigkeit X'_V werden sowohl mittels Gleit-Haft-Gleit-Übergängen (G-H-G) als auch mittels Gleit-Gleit-Übergängen (G-G) durchlaufen.

Nulldurchgang der Geschwindigkeit nicht erfüllt und es kommt zu einem Gleit-Gleit-Übergang (G-G). In beiden Fällen ist der Verlauf der Beschleunigung X''_V unstetig. Die Abbildung 7.1b zeigt das Einschwingverhalten und den resultierenden Grenzzzyklus im dreidimensionalen Phasenraum. Die blaue Hyperfläche ist die durch Gl. (5.4) definierte Näherung M_0 der langsamen Mannigfaltigkeit M_ε , welche die Dynamik des Systems offensichtlich weiterhin maßgeblich beeinflusst. Die Sprünge im Verlauf der Beschleunigung führen jedoch dazu, dass die Trajektorie den Bereich um die Mannigfaltigkeit im Verlauf einer Schwingungsperiode zweimal verlässt. Dies passiert sowohl bei Gleit-Haft-Gleit- als auch bei Gleit-Gleit-Übergängen. Eine Reduktion der schnellen Dynamik ist somit streng genommen nicht zulässig. Weil die Sprünge jedoch in der Größenordnung $O(1)$ sind, sind die sich anschließenden Phasen der schnellen Dynamik, in denen die Trajektorie in die Nähe der Mannigfaltigkeit zurückkehrt, in der Größenordnung $O(\varepsilon)$. Deshalb ist zu vermuten, dass die durch eine Reduktion der schnellen Dynamik gewonnene Approximation trotzdem eine gute Übereinstimmung mit dem Originalsystem bietet.

Dafür werden die Bewegungsgleichungen für den Gleitfall in eine Einzeldifferentialgleichung dritter Ordnung überführt und anschließend mit den neuen Koordinaten

$\xi_V = X_V - X_{V0}$, $\xi'_V = X'_V$, $\xi''_V = X''_V$ und $\Pi_1 = P_1 - P_{10}$ die Gleichungen in den Abweichungen von der Gleichgewichtslage des Systems ohne Coulomb'sche Reibung

$$\left. \begin{aligned} 0 &= M_V \xi''_V + \xi''_V + K_V \xi'_V + \alpha_V \xi'_V + F_R \delta(\xi'_V) \\ &\quad - Q_h(\xi_V + X_{V0}, P_{10} + M_V \xi''_V + \xi'_V + F_R + K_V \xi_V) \\ &\quad + Q_C(P_{10} + M_V \xi''_V + \xi'_V + F_R + K_V \xi_V) \\ \Pi_1 &= M_V \xi''_V + \xi'_V + F_R + K_V \xi_V \end{aligned} \right\}, \xi_G \in \Sigma_G^+ \quad (7.8)$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= M_V \xi''_V + \xi''_V + K_V \xi'_V + \alpha_V \xi'_V + F_R \delta(\xi'_V) \\ &\quad - Q_h(\xi_V + X_{V0}, P_{10} + M_V \xi''_V + \xi'_V - F_R + K_V \xi_V) \\ &\quad + Q_C(P_{10} + M_V \xi''_V + \xi'_V - F_R + K_V \xi_V) \\ \Pi_1 &= M_V \xi''_V + \xi'_V - F_R + K_V \xi_V \end{aligned} \right\}, \xi_G \in \Sigma_G^- \quad (7.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi'_V &= 0 \\ \xi''_V &= 0 \\ \Pi_1 &= Q_h(\xi_V + X_{V0}, \Pi_1 + P_{10}) - Q_C(\Pi_1 + P_{10}) \end{aligned} \right\}, \xi_H \in \Sigma_H \quad (7.10)$$

formuliert (Die Gleichgewichtslage mit Berücksichtigung der Coulomb'schen Reibung ist indefinit und deshalb für eine Variablentransformation nicht geeignet).

Die hochgestellten Plus- bzw. Minuszeichen beziehen sich auf die Richtung der Geschwindigkeit in der jeweiligen Gleitphase. Weil der Übergang auf die Koordinaten $[\xi_V, \xi'_V, \xi''_V]^T$ in den Haftphasen nicht möglich ist, ergeben sich unterschiedliche Zustandsvektoren $\xi_G = [\xi_V, \xi'_V, \xi''_V]^T$ und $\xi_H = [\xi_V, \xi'_V, \Pi_1]^T$ für die Gleit- bzw. Haftphasen. Die Umrechnung erfolgt anhand der untersten Zeilen der Gleichungen (7.8) und (7.9). Der Sprung im Verlauf der Kolbenbeschleunigung bei den Gleit-Gleit-Übergängen wird nun durch den Dirac-Impuls $\delta(\xi'_V)$ abgebildet. Die Sprünge, welche bei den Gleit-Haft-Gleit-Übergängen auftreten, werden durch entsprechende Übergangsbedingungen abgebildet. Diese bestehen in der Stetigkeit des Druckverlaufs sowie in der Bedingung $\xi''_V = 0$ bei jedem Haft-Gleit-Übergang. Tab. 7.1 gibt eine Übersicht der Übergangsbedingungen an den Gleit-Haft-, Gleit-Gleit- und Haft-Gleit-Übergängen.

Gleit-Gleit (G-G)	Haft-Gleit (H-G)	Gleit-Haft (G-H)
$\xi_{V+} = \xi_{V-}$	$\xi_{V+} = \xi_{V-}$	$\xi_{V+} = \xi_{V-}$
$\xi'_{V+} = \xi'_{V-} = 0$	$\xi'_{V+} = \xi'_{V-} = 0$	$\xi'_{V+} = \xi'_{V-} = 0$
$\xi''_{V+} = \xi''_{V-} \pm \frac{2F_R}{M_V}$	$\xi''_{V+} = 0$	$\Pi_{1+} = \Pi_{1-} = M_V \xi''_{V-} \pm F_R + K_V \xi_{V-}$

Tabelle 7.1: Übergangsbedingungen an den Gleit-Haft-, Gleit-Gleit- und Haft-Gleit-Übergängen. Die Vorzeichen in der letzten Zeile sind von der Richtung der Geschwindigkeit $\text{sign}(\xi'_{V-})$ in der vorigen Gleitphase abhängig.

Die Größen mit einem Minuszeichen im Index beziehen sich darin auf den Zustand vor dem jeweiligen Übergang, ein Pluszeichen markiert den Zustand nach dem Übergang. Für die Formulierung der Haftbedingung Σ_H und der beiden Gleitbedingungen Σ_G^+ und Σ_G^- in Gleichungen (7.8), (7.9) und (7.10) wird die Haftkraft

$$\begin{aligned}
 F_H &= P_1 - F_c - K_V X_V \\
 &= \begin{cases} M_V \xi_V'' + \xi_V' + F_R, & \xi_G \in \Sigma_G^+ \\ M_V \xi_V'' + \xi_V' - F_R, & \xi_G \in \Sigma_G^- \\ \Pi_1 - K_V \xi_V + \underbrace{P_{10} - F_c - K_V X_{V0}}_{=0}, & \xi_H \in \Sigma_H \end{cases} \quad (7.11)
 \end{aligned}$$

in Abhängigkeit der neuen Variablen ausgedrückt. Aus den Gleit- und Haftbedingungen aus Gl. (7.7) können die Gleit- und Haftbereiche

$$\Sigma_G^+ = \{ \xi_G | \xi_G \in \mathbb{R}^3 \wedge \xi_V' > 0 \} \cup \{ \xi_G | \xi_G \in \mathbb{R}^3 \wedge \xi_V' = 0 \wedge |M_V \xi_V'' + F_R| > F_R \} \quad (7.12)$$

$$\Sigma_G^- = \{ \xi_G | \xi_G \in \mathbb{R}^3 \wedge \xi_V' < 0 \} \cup \{ \xi_G | \xi_G \in \mathbb{R}^3 \wedge \xi_V' = 0 \wedge |M_V \xi_V'' - F_R| > F_R \} \quad (7.13)$$

$$\Sigma_H = \{ \xi_H | \xi_H \in \mathbb{R}^3 \wedge \xi_V' = 0 \wedge |\Pi_1 - K_V \xi_V| \leq F_R \} . \quad (7.14)$$

abgeleitet werden.

Für eine Abschätzung der Größenordnungen wird der kleine Parameter $\varepsilon = M_V$ eingeführt und die einzelnen Schaltzustände werden in eine Taylorreihe entwickelt. Dabei ist nun eine Fallunterscheidung zwischen sechs Schaltzuständen erforderlich, weil die durch die Mengen Σ_G^+ , Σ_G^- und Σ_H repräsentierten Gleit- und Haftbereiche durch die Steuerkante nochmal in jeweils zwei Bereiche unterteilt werden.

Die Vernachlässigung der Größenordnungen $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ und kleiner führt auf die Systemdarstellung

$$\begin{cases} 0 = \varepsilon \xi_V''' + \xi_V'' + \varepsilon K_s^+ \xi_V' + (\omega_s^+)^2 \xi_V - \varepsilon Q_s^+ + \varepsilon N_s^+ \xi_V' \xi_V + F_R \delta(\xi_V'), & \xi_G \in \Sigma_G^+ \\ 0 = \varepsilon \xi_V''' + \xi_V'' + \varepsilon K_s^- \xi_V' + (\omega_s^-)^2 \xi_V - \varepsilon Q_s^- + \varepsilon N_s^- \xi_V' \xi_V + F_R \delta(\xi_V'), & \xi_G \in \Sigma_G^- \\ 0 = \varepsilon \xi_V''' + \xi_V'' + \varepsilon \bar{K}_s^+ \xi_V' - \bar{Q}_s^+ + F_R \delta(\xi_V'), & \xi_G \in \bar{\Sigma}_G^+ \\ 0 = \varepsilon \xi_V''' + \xi_V'' + \varepsilon \bar{K}_s^- \xi_V' - \bar{Q}_s^- + F_R \delta(\xi_V'), & \xi_G \in \bar{\Sigma}_G^- \\ \Pi_1' = K_s^H \xi_V + \varepsilon (A_s^H \Pi_1 + N_s^H \xi_V \Pi_1), & \xi_H \in \Sigma_H \\ \Pi_1' = \bar{Q}_s^H + \varepsilon \bar{A}_s^H \Pi_1, & \xi_H \in \bar{\Sigma}_H \end{cases} \quad (7.15)$$

mit den Haft- und Gleitbedingungen

$$\begin{aligned} \Sigma_G^\pm &= \{ \xi_G | \xi_G \in \mathbb{R}^3 \wedge \xi_V + X_{V0} > 0 \wedge \pm \xi'_V > 0 \} \\ &\cup \{ \xi_G | \xi_G \in \mathbb{R}^3 \wedge \xi_V + X_{V0} > 0 \wedge \xi'_V = 0 \wedge |\varepsilon \xi''_V \pm F_R| > F_R \} \end{aligned} \quad (7.16)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}_G^\pm &= \{ \xi_G | \xi_G \in \mathbb{R}^3 \wedge \xi_V + X_{V0} \leq 0 \wedge \pm \xi'_V > 0 \} \\ &\cup \{ \xi_G | \xi_G \in \mathbb{R}^3 \wedge \xi_V + X_{V0} \leq 0 \wedge \xi'_V = 0 \wedge |\varepsilon \xi''_V \pm F_R| > F_R \} \end{aligned} \quad (7.17)$$

$$\Sigma_H = \{ \xi_H | \xi_H \in \mathbb{R}^3 \wedge \xi_V + X_{V0} > 0 \wedge \xi'_V = 0 \wedge |\Pi_1 - K_V \xi_V| \leq F_R \} \quad (7.18)$$

$$\bar{\Sigma}_H = \{ \xi_H | \xi_H \in \mathbb{R}^3 \wedge \xi_V + X_{V0} \leq 0 \wedge \xi'_V = 0 \wedge |\Pi_1 - K_V \xi_V| \leq F_R \} . \quad (7.19)$$

Für die skalierten Parameter gelten die Berechnungsformeln

$$\varepsilon K_s^\pm = K_V + \alpha_V + \kappa_T^\pm \quad (7.20)$$

$$\varepsilon \bar{K}_s^\pm = K_V + \alpha_V + \bar{\kappa}_T^\pm \quad (7.21)$$

$$K_s^H = -\beta_V \sqrt{P_{10}} \quad (7.22)$$

$$(\omega_s^\pm)^2 = \kappa_T^\pm K_V + \beta_V \sqrt{P_{10} \pm F_R} \quad (7.23)$$

$$\varepsilon Q_s^\pm = Q_P - (\beta_V X_{V0} + \alpha_C) \sqrt{P_{10} \pm F_R} \quad (7.24)$$

$$\bar{Q}_s^\pm = Q_P - \alpha_C \sqrt{P_{10} \pm F_R} \quad (7.25)$$

$$\bar{Q}_s^H = Q_P - \alpha_C \sqrt{P_{10}} \quad (7.26)$$

$$\varepsilon A_s^H = -\frac{\beta_V X_{V0} + \alpha_C}{2\sqrt{P_{10}}} \quad (7.27)$$

$$\varepsilon \bar{A}_s^H = -\frac{\alpha_C}{2\sqrt{P_{10}}} \quad (7.28)$$

$$\varepsilon N_s^\pm = -\frac{K_V \kappa_T^\pm}{2(P_{10} \pm F_R)} + \frac{\beta_V}{2\sqrt{P_{10} \pm F_R}} \quad (7.29)$$

$$\varepsilon N_s^H = -\frac{\beta_V}{2\sqrt{P_{10}}} \quad (7.30)$$

mit den Abkürzungen

$$\kappa_T^\pm = \frac{\alpha_C}{2\sqrt{P_{10}}} + \frac{\beta_V X_{V0}}{2\sqrt{P_{10} \pm F_R}} \quad (7.31)$$

$$\bar{\kappa}_T^\pm = \frac{\alpha_C}{2\sqrt{P_{10} \pm F_R}} . \quad (7.32)$$

Die Werte der skalierten Parameter, welche sich aus den physikalischen Parameterwerten in Tab. 4.1 sowie aus einer Reibkraft von $f_R = 1$ N ergeben, sind in Tab. 7.2 aufgeführt. Die Parametrierung für die Simulationsergebnisse basiert teilweise auf leicht abwei-

Symbol	Wert	Symbol	Wert	Symbol	Wert
K_s^+	0.743	K_s^-	0.747	ε	0.13
\bar{K}_s^+	0.527	\bar{K}_s^-	0.529	K_s^H	-1.007
ω_s^+	1.006	ω_s^-	1.002	\bar{Q}_s^H	0.993
Q_s^+	-0.067	Q_s^-	0.067	A_s^H	-0.418
\bar{Q}_s^+	0.989	\bar{Q}_s^-	0.997	\bar{A}_s^H	-0.201
N_s^+	0.219	N_s^-	0.221	N_s^H	0.220

Tabelle 7.2: Skalierte Parameterwerte basierend auf der Standardparametrierung in Tab. 4.1 sowie auf einer Reibkraft von $f_R = 1$ N.

chenden Dämpfungsparametern zwischen $d_V = 130$ N s/m und $d_V = 160$ N s/m. Die Größenordnungen der skalierten Parameter ändern sich dadurch jedoch nicht.

Die skalierten Parameter Q_s^+ und Q_s^- sind in der Größenordnung ε und könnten demnach eigentlich vernachlässigt werden, weil die entsprechenden Ausdrücke εQ_s^+ und εQ_s^- in Gl. (7.15) in der Größenordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ sind. Jedoch zeigen Simulationsergebnisse, dass durch die Vernachlässigung ein relevanter Fehler entsteht, der die Größenordnung dieser Ausdrücke übersteigt. Aus diesem Grund werden sie weiterhin berücksichtigt. Die Dynamik in den vier Gleitbereichen wird durch singular gestörte Differentialgleichungen beschrieben. Eine Reduktion der schnellen Dynamik ist jedoch nur unter Vernachlässigung des Dirac-Impulses möglich. Dies entspricht einer Vernachlässigung der in der schnellen Zeitskala stattfindenden Einschwingphasen im Anschluss an die Haft-Gleit-Haft bzw. Gleit-Gleit-Übergänge. Die Druckdynamik während der Haftphasen wird durch regulär gestörte Differentialgleichungen beschrieben und muss deshalb nicht reduziert werden.

Die schnelle Dynamik während der Gleitphasen $\eta = \xi_V''$ wird analog zum Vorgehen in den vorherigen Kapiteln durch einen Reihenansatz $\eta \approx \tilde{\eta} = \eta_0 + \varepsilon \eta_1$ approximiert. Durch Einsetzen in die Gl. (7.15), Vernachlässigung des Dirac-Impulses und Bilanzieren nach verschiedenen Potenzen von ε ergibt sich die Näherung

$$\tilde{\eta} = \begin{cases} -(\omega_s^+)^2 \xi_V + \varepsilon ((\omega_s^+)^2 - K_s^+) \xi_V' + Q_s^+ - N_s^+ \xi_V' \xi_V, & \xi_G^r \in \Sigma_G^{r+} \\ -(\omega_s^-)^2 \xi_V + \varepsilon ((\omega_s^-)^2 - K_s^-) \xi_V' + Q_s^- - N_s^- \xi_V' \xi_V, & \xi_G^r \in \Sigma_G^{r-} \\ \bar{Q}_s^+ - \varepsilon \bar{K}_s^+ \xi_V', & \xi_G^r \in \bar{\Sigma}_G^{r+} \\ \bar{Q}_s^- - \varepsilon \bar{K}_s^- \xi_V', & \xi_G^r \in \bar{\Sigma}_G^{r-} \end{cases} \quad (7.33)$$

mit dem reduzierten Zustandsvektor $\xi_G^r = [\xi_V, \xi_V']^\top$ und den vier verschiedenen Gleitbereichen

$$\Sigma_G^{r\pm} = \{ \xi_G | \xi_G \in \mathbb{R}^2 \wedge \xi_V + X_{V0} > 0 \wedge \pm \xi_V' > 0 \}$$

$$\cup \{ \xi_G | \xi_G \in \mathbb{R}^2 \wedge \xi_V + X_{V0} > 0 \wedge \xi'_V = 0 \wedge |P_{10} + \varepsilon(\varepsilon Q_s^\pm - (\omega_s^\pm)^2 \xi_V)| > F_R \} \quad (7.34)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}_G^{r\pm} &= \{ \xi_G | \xi_G \in \mathbb{R}^2 \wedge \xi_V + X_{V0} \leq 0 \wedge \pm \xi'_V > 0 \} \\ \cup \{ \xi_G | \xi_G \in \mathbb{R}^2 \wedge \xi_V + X_{V0} \leq 0 \wedge \xi'_V = 0 \wedge |P_{10} + \varepsilon \bar{Q}_s^\pm| > F_R \} . \end{aligned} \quad (7.35)$$

Daraus leitet sich die reduzierte, regulär gestörte Dynamik

$$\left\{ \begin{array}{ll} \xi_V'' = -(\omega_s^+)^2 \xi_V + \varepsilon \left(((\omega_s^+)^2 - K_s^+) \xi'_V + Q_s^+ - N_s^+ \xi'_V \xi_V \right), & \xi_G^r \in \Sigma_G^{r+} \\ \xi_V'' = -(\omega_s^-)^2 \xi_V + \varepsilon \left(((\omega_s^-)^2 - K_s^-) \xi'_V + Q_s^- - N_s^- \xi'_V \xi_V \right), & \xi_G^r \in \Sigma_G^{r-} \\ \xi_V'' = \bar{Q}_s^+ - \varepsilon \bar{K}_s^+ \xi'_V, & \xi_G^r \in \bar{\Sigma}_G^{r+} \\ \xi_V'' = \bar{Q}_s^- - \varepsilon \bar{K}_s^- \xi'_V, & \xi_G^r \in \bar{\Sigma}_G^{r-} \\ \Pi_1' = K_s^H \xi_V + \varepsilon (A_s^H \Pi_1 + N_s^H \xi_V \Pi_1), & \xi_H \in \Sigma_H \\ \Pi_1' = \bar{Q}_s^H + \varepsilon \bar{A}_s^H \Pi_1, & \xi_H \in \bar{\Sigma}_H \end{array} \right. \quad (7.36)$$

ab.

Weil die Kolbenbeschleunigung ξ_V'' im reduzierten Zustandsvektor ξ_G^r nicht mehr enthalten ist, können die in Tab. 7.1 aufgeführten Übergangsbedingungen an den Haft-Gleit- bzw. Gleit-Gleit-Übergängen auf Beschleunigungsebene nicht mehr formuliert werden. Der Verlauf der Beschleunigung ist zwar weiterhin unstetig, jedoch werden die Sprünge nun nicht mehr durch die Übergangsbedingungen, sondern durch die rechte Seite von Gl. (7.33) bestimmt.

Weiterhin wird die Forderung nach der Stetigkeit des Druckverlaufs an den Gleit-Haft-Übergängen nun mit der Näherung $\xi_V'' \approx \tilde{\eta}$ entsprechend Gl. (7.33) modifiziert und im Folgenden mit der Gleichung

$$\Pi_{1+} = \Pi_{1-} = \varepsilon \tilde{\eta} (\xi_V = \xi_{V-}, \xi'_V = 0) \pm F_R + K_V \xi_{V-} \quad (7.37)$$

beschrieben, wobei sich das Vorzeichen der dimensionslosen Reibkraft nach der Richtung der Geschwindigkeit $\text{sign}(\xi'_{V-})$ in der vorigen Gleitphase richtet.

Der Verlauf der Zustandsgrößen des reduzierten Systems sowie die durch Gl. (7.33) bestimmte Näherung der Kolbenbeschleunigung $X_V'' \approx \tilde{\eta}$ sind im eingeschwungenen Zustand in Abb. 7.2 dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Phasen schneller Dynamik zu Beginn der Gleitphasen durch die Reduktion eliminiert wurden. Dadurch werden die Gleit-Gleit-Übergänge weitestgehend geglättet. Haftphasen können weiterhin dargestellt werden.

Um ein System in Standardform zu formulieren, wird die Grundlösung als abschnittsweise definierte Lösung der ungestörten ($\varepsilon = 0$) Gl. (7.36) berechnet. Da die Zustandsgrößen der Gleitdynamik während der Haftphasen konstant ist, besteht die Vorgehensweise

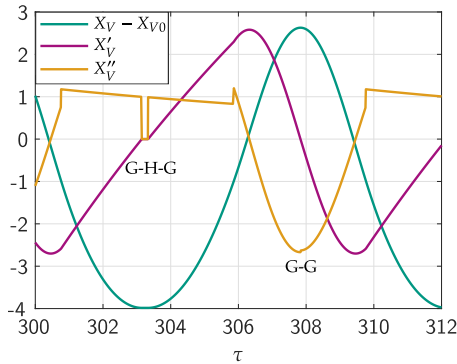


Abbildung 7.2: Grenzyklussschwingungen des reduzierten Systems mit Coulomb'scher Reibung. Dämpfungsparameter $d_V = 130 \text{ N s/m}$, Reibkraft $f_R = 1 \text{ N}$. Das Modell kann weiterhin zwischen Haft- und Gleitphasen unterscheiden und die qualitative Dynamik abbilden.

darin, die Grundlösung zunächst nur aus der Gleitdynamik abzuleiten. Die Haftphasen werden nachträglich in die Grundlösung integriert. Hierbei ergibt sich jedoch die Problematik, dass aus den einzelnen Abschnitten keine periodische und gleichzeitig stetige Funktion erzeugt werden kann, wie das zuvor durch entsprechende Übergangsbedingungen an den Schaltübergängen möglich war. Aus diesem Grund werden die in der Grundlösung enthaltenen Parameter ω_s^\pm und \bar{Q}_s^\pm über die Schaltzustände positiver und negativer Kolbengeschwindigkeiten gemittelt

$$\omega_s = \frac{1}{2}(\omega_s^+ + \omega_s^-) \tag{7.38}$$

$$\bar{Q}_s = \frac{1}{2}(\bar{Q}_s^+ + \bar{Q}_s^-) \tag{7.39}$$

und mit den Näherungen

$$\omega_s^+ = \omega_s^- = \omega_s \tag{7.40}$$

$$\bar{Q}_s^+ = \bar{Q}_s^- = \bar{Q}_s \tag{7.41}$$

eine Grundlösung für das Mittelwertbildungsverfahren konstruiert, welche das ungestörte Problem nicht exakt löst. Wegen $\omega_s^+ \approx \omega_s^-$ und $\bar{Q}_s^+ \approx \bar{Q}_s^-$ ist das jedoch eine gute Näherung, vgl. Tab. 7.2. Die Grundlösung

$$\tilde{\xi}_{10}(\tau) = \begin{cases} \xi_{10}(\tau), & \tau_0 < \tau \leq \tau^H \\ A, & \tau^H < \tau \leq \tau^H + \Delta\tau^H \\ \xi_{10}(\tau - \Delta\tau^H), & \tau^H + \Delta\tau^H < \tau \leq \tau_1 + \Delta\tau^H \\ \bar{\xi}_{10}(\tau - \Delta\tau^H), & \tau_1 + \Delta\tau^H < \tau \leq \bar{\tau}^H \\ \bar{A}, & \bar{\tau}^H < \tau \leq \bar{\tau}^H + \Delta\bar{\tau}^H \\ \bar{\xi}_{10}(\tau - \Delta\tau^H - \Delta\bar{\tau}^H), & \bar{\tau}^H + \Delta\bar{\tau}^H < \tau \leq \tau_2 + \Delta\tau^H + \Delta\bar{\tau}^H \end{cases} \quad (7.42)$$

$$\tilde{\xi}_{20}(\tau) = \begin{cases} \xi_{20}(\tau), & \tau_0 < \tau \leq \tau^H \\ 0, & \tau^H < \tau \leq \tau^H + \Delta\tau^H \\ \xi_{20}(\tau - \Delta\tau^H), & \tau^H + \Delta\tau^H < \tau \leq \tau_1 + \Delta\tau^H \\ \bar{\xi}_{20}(\tau - \Delta\tau^H), & \tau_1 + \Delta\tau^H < \tau \leq \bar{\tau}^H \\ 0, & \bar{\tau}^H < \tau \leq \bar{\tau}^H + \Delta\bar{\tau}^H \\ \bar{\xi}_{20}(\tau - \Delta\tau^H - \Delta\bar{\tau}^H), & \bar{\tau}^H + \Delta\bar{\tau}^H < \tau \leq \tau_2 + \Delta\tau^H + \Delta\bar{\tau}^H \end{cases} \quad (7.43)$$

mit den Zeiten

$$\tau^H = \frac{1}{2}(\tau_0 + \tau_1) \quad (7.44)$$

$$\bar{\tau}^H = \frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2) + \Delta\tau^H \quad (7.45)$$

setzt sich aus vier Gleit- und zwei Haftbereichen zusammen, vgl. Abb. 7.3a. Jedoch können auch Gleit-Gleit-Übergänge durch das Nullsetzen der entsprechenden Haftdauern $\Delta\tau^H$ oder $\Delta\bar{\tau}^H$ abgebildet werden. Es gelten die Gleichungen (5.8), (5.9) und (5.15) bis (5.20) sowie (5.25), aus denen die Funktionen $\xi_{10}(\tau)$, $\bar{\xi}_{10}(\tau)$, $\xi_{20}(\tau)$, $\bar{\xi}_{20}(\tau)$ und die Schaltzeiten τ_0 , τ_1 , τ_2 sowie das Schwingungsminimum \bar{A} zu entnehmen sind. Die Haftdauern $\Delta\tau^H$ und $\Delta\bar{\tau}^H$ sind zu diesem Zeitpunkt noch unbekannt und werden später aus der Haftdynamik bestimmt.

Zunächst wird jedoch der Fall $A \leq X_{V0}$ betrachtet, bei dem die Schwingungen die Steuerkante nicht kreuzen. Auch hier sind Haftphasen möglich, weshalb die Grundlösung

$$\tilde{\xi}_{10}(\tau) = \begin{cases} \xi_{10}^+(\tau) = A \cos(\omega_s^+ \tau + \alpha), & T_0 < \tau \leq T_1 \\ A, & T_1 < \tau \leq T_1 + \Delta T_1^H \\ \xi_{10}^-(\tau) = A^- \cos(\omega_s^- \tau + \alpha^-), & T_1 + \Delta T_1^H < \tau \leq T_2 \\ -A^-, & T_2 < \tau \leq T_2 + \Delta T_2^H \end{cases} \quad (7.46)$$

$$\tilde{\xi}_{20}(\tau) = \begin{cases} \xi_{20}^+(\tau) = -A\omega_s^+ \sin(\omega_s^+ \tau + \alpha), & T_0 < \tau \leq T_1 \\ 0, & T_1 < \tau \leq T_1 + \Delta T_1^H \\ \xi_{20}^-(\tau) = -A^-\omega_s^- \sin(\omega_s^- \tau + \alpha^-), & T_1 + \Delta T_1^H < \tau \leq T_2 \\ 0, & T_2 < \tau \leq T_2 + \Delta T_2^H \end{cases} \quad (7.47)$$

für diesen Fall ebenfalls abschnittsweise definiert wird, vgl. Abb. 7.3b. Im Gegensatz zum Fall $A > X_{V0}$ lässt sich jedoch hier mit Hilfe der Bedingungen

$$\xi_{20}^+(T_0) = 0 \quad (7.48)$$

$$\xi_{20}^+(T_1) = 0 \quad (7.49)$$

$$\xi_{20}^-(T_1 + \Delta T_1^H) = 0 \quad (7.50)$$

$$\xi_{20}^-(T_2) = 0 \quad (7.51)$$

$$\xi_{10}^+(T_1) = \xi_{10}^-(T_1 + \Delta T_1^H) \quad (7.52)$$

auch ohne Mittelung der skalierten Parameter eine periodische und stetige Grundlösung erzeugen. Das Lösen dieser Bedingungen liefert Ausdrücke für die Unbekannten

$$T_0 = -\frac{\alpha + \pi}{\omega_s^+} \quad (7.53)$$

$$T_1 = -\frac{\alpha}{\omega_s^+} \quad (7.54)$$

$$T_2 = \frac{\Delta T_1^H \omega_s^+ - \alpha}{\omega_s^+} + \frac{\pi}{\omega_s^-} \quad (7.55)$$

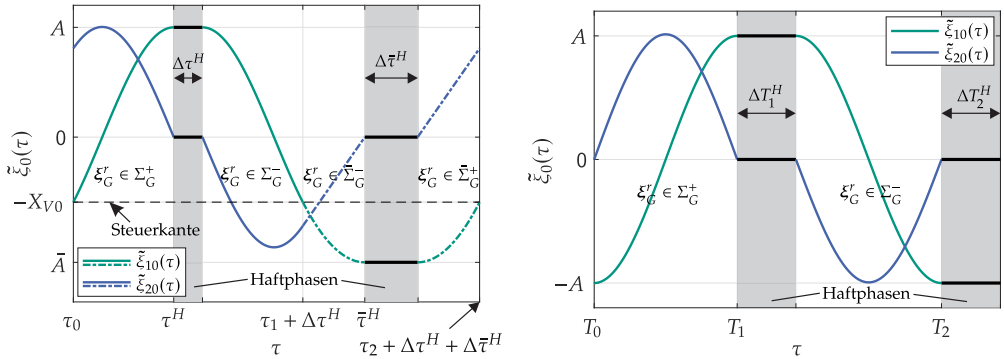
$$A^- = A \quad (7.56)$$

$$\alpha^- = -\frac{(\Delta T_1^H \omega_s^+ - \alpha)\omega_s^-}{\omega_s^+} \quad (7.57)$$

in Abhängigkeit von A und α .

Die Verläufe der Grundlösungen für die beiden Fälle $A > X_{V0}$ und $A \leq X_{V0}$ sind in Abb. 7.3 dargestellt. Der Verläufe entsprechen prinzipiell denen des Systems ohne Coulomb'sche Reibung. Lediglich an den Nulldurchgängen der Geschwindigkeit werden Haftphasen noch bisher unbekannter Dauer eingefügt.

Diese Haftdauern werden mit $\Delta\tau^H$ und $\Delta\bar{\tau}^H$ bzw. ΔT_1^H und ΔT_2^H bezeichnet und im Folgenden bestimmt. Dazu wird die Druckdynamik während der Haftphasen mit entsprechenden Anfangsbedingungen aus der vorigen Gleitphase solange integriert, bis die Haftgrenze erreicht bzw. die Haftbedingung verletzt wird. Dabei hängen sowohl die Druckdynamik, die Anfangsbedingung und die Haftgrenze von der Kolbenposition, der Richtung der Geschwindigkeit in der vorigen Gleitphase und vom entsprechenden



(a) $A > X_{V0}$: Schwingungen überschreiten die Steuerkante.

(b) $A \leq X_{V0}$: Schwingungen überschreiten die Steuerkante nicht.

Abbildung 7.3: Verlauf der Grundlösungen $\tilde{\xi}_{10}(\tau)$ und $\tilde{\xi}_{20}(\tau)$ innerhalb einer Periode.

Haftdauer	Kolbenposition	Richtung der Geschwindigkeit in der vorigen Gleitphase	Schaltzustand
$\Delta\tau^H$	$\xi_V = A$	$\text{sign}(\xi'_V) = 1$	$\xi_H \in \Sigma_H$
$\Delta\bar{\tau}^H$	$\xi_V = \bar{A}$	$\text{sign}(\xi'_V) = -1$	$\xi_H \in \bar{\Sigma}_H$
ΔT_1^H	$\xi_V = A$	$\text{sign}(\xi'_V) = 1$	$\xi_H \in \Sigma_H$
ΔT_2^H	$\xi_V = -A$	$\text{sign}(\xi'_V) = -1$	$\xi_H \in \Sigma_H$

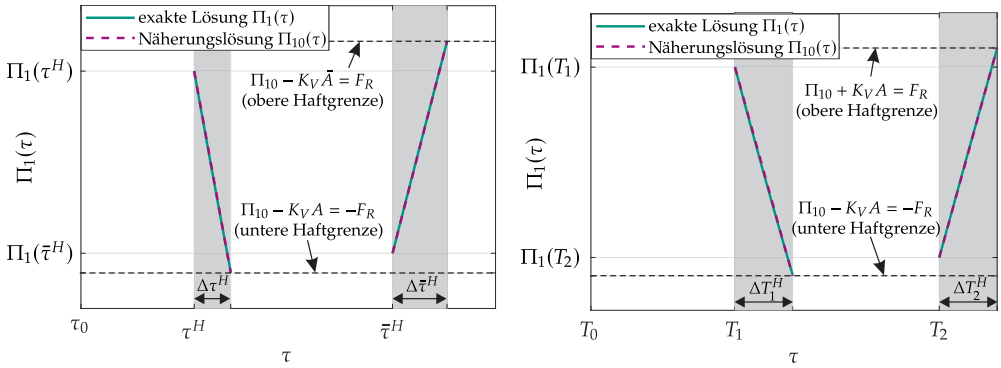
Tabelle 7.3: Zustände während der Haftphasen.

Schaltzustand ab. Die entsprechenden Größen können aus Abb. 7.3 abgeleitet werden und sind in Tab. 7.3 aufgeführt.

Durch Einsetzen der unterschiedlichen Kombinationen in Gl. (7.36) ergeben sich die entsprechenden Differentialgleichungen, welche die Druckdynamik während der unterschiedlichen Haftphasen beschreiben. Aus Gl. (7.37) können die jeweiligen Anfangsbedingungen für die Integration abgeleitet werden. Tab. 7.4 zeigt eine Zuordnung der unterschiedlichen Druckaufbaugleichungen mit den jeweiligen Anfangsbedingungen zu den einzelnen Haftdauern.

Haftdauer	Druckdynamik	Anfangsbedingung
$\Delta\tau^H$	$\Pi'_1 = \varepsilon\Pi_1(A_s^H + N_s^H A) + K_s^H A$	$\Pi_1(\tau^H) = F_R + (K_V - \varepsilon(\omega_s^+)^2)A + \varepsilon^2 Q_s^+$
$\Delta\bar{\tau}^H$	$\Pi'_1 = \varepsilon\Pi_1(A_s^H - N_s^H A) - K_s^H A$	$\Pi_1(\bar{\tau}^H) = -F_R + \varepsilon\bar{Q}_s^- + K_V \left(c_1 - \frac{c_2}{Q_s^-} \right)$
ΔT_1^H	$\Pi'_1 = \varepsilon\Pi_1(A_s^H + N_s^H A) + K_s^H A$	$\Pi_1(T_1) = F_R + (K_V - \varepsilon(\omega_s^+)^2)A + \varepsilon^2 Q_s^+$
ΔT_2^H	$\Pi'_1 = \bar{Q}_s^H + \varepsilon\bar{A}_s^H \Pi_1$	$\Pi_1(T_2) = -F_R - (K_V - \varepsilon(\omega_s^-)^2)A + \varepsilon^2 Q_s^-$

Tabelle 7.4: Druckdynamik während der verschiedenen Haftphasen.



(a) $A > X_{V0}$: Schwingungen überschreiten die Steuerkante. (b) $A \leq X_{V0}$: Schwingungen überschreiten die Steuerkante nicht.

Abbildung 7.4: Druckverlauf während der Haftphasen. Vergleich von exaktem Verlauf $\Pi_1(\tau)$ und Näherungslösung $\Pi_{10}(\tau)$.

Haftdauer	Näherungslösung	Haftbedingung	Haftgrenze
$\Delta\tau^H$	$\Pi_{10}(\tau) = K_s^H A\tau + \Pi_1(\tau^H)$	$ \Pi_1 - K_V A \leq F_R$	$\Pi_{10} - K_V A = -F_R$
$\Delta\bar{\tau}^H$	$\Pi_{10}(\tau) = \bar{Q}_s^H \tau + \Pi_1(\bar{\tau}^H)$	$ \Pi_1 - K_V \bar{A} \leq F_R$	$\Pi_{10} - K_V \bar{A} = F_R$
ΔT_1^H	$\Pi_{10}(\tau) = K_s^H A\tau + \Pi_1(T_1)$	$ \Pi_1 - K_V A \leq F_R$	$\Pi_{10} - K_V A = -F_R$
ΔT_2^H	$\Pi_{10}(\tau) = -K_s^H A\tau + \Pi_1(T_2)$	$ \Pi_1 + K_V A \leq F_R$	$\Pi_{10} + K_V A = F_R$

Tabelle 7.5: Näherungslösungen der Druckdynamik während der verschiedenen Haftphasen.

Weil die Kolbenposition während der Haftphasen konstant ist, sind die Differentialgleichungen der Haftdynamik linear und können analytisch gelöst werden. Jedoch ergeben sich die Druckverläufe in Form von Exponentialfunktionen und damit Haftdauern, welche durch den natürlichen Logarithmus beschrieben werden. Dies führt im späteren Mittelwertbildungsverfahren zu sehr komplexen Ausdrücken bei der analytischen Integration. Aus diesem Grund wird eine Näherungslösung mit Hilfe eines Störungsansatz $\Pi_1 \approx \Pi_{10} + \varepsilon\Pi_{11}$ berechnet, der die Druckdynamik während der Haftphasen approximiert. Die verschiedenen Grundlösungen $\Pi_{10}(\tau)$ ergeben sich durch das Einsetzen des Störungsansatzes in die Differentialgleichungen der Druckdynamik in Tab. 7.4, wobei $\varepsilon = 0$ gesetzt wird. Da die Grundlösungen bereits eine sehr gute Näherung an die exakte Lösung sind (vgl. Abb. 7.4), wird auf die Berechnung der höheren Näherungen $\Pi_{11}(\tau)$ verzichtet. Die Näherungslösungen des Druckverlaufs, welche bereits an die jeweiligen Anfangsbedingungen angepasst sind, sind in Tab. 7.5 aufgeführt. Die entsprechenden Haftbedingungen ergeben sich aus den Gleichungen (7.18) und (7.19) und sind ebenfalls in Tab. 7.5 aufgeführt und den Haftphasen zugeordnet. In welche Richtung die Haftbereiche verlassen werden, hängt davon ab, ob der Druck während der Haftphase steigt oder fällt. In den den Schwingungsmaxima zugeordneten

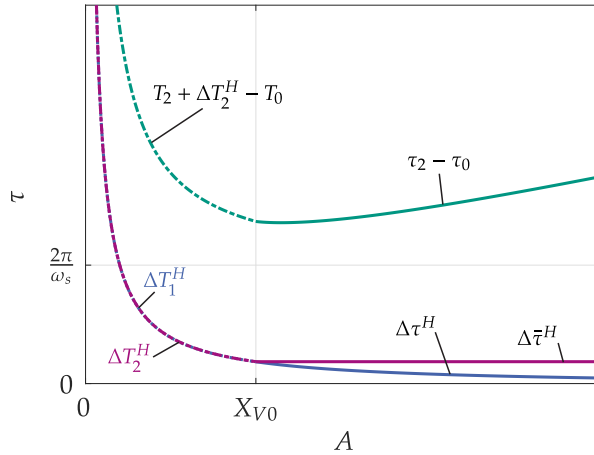


Abbildung 7.5: Periodendauer der Schwingung und Haftdauern in Abhängigkeit der Schwingungsamplitude A .

Haftphasen sinkt der Druck, da hier das Ventil und somit die Öffnung der Steuerkante maximal geöffnet ist. Somit wird der Haftbereich am unteren Ende (im Bereich kleiner Drücke) verlassen. In den Haftbereichen, bei welchen die Schwingung ihr Minimum erreicht, ist das Ventil vollständig oder fast geschlossen. Damit steigt in diesen Phasen der Druck und die Haftbedingung wird an der oberen Grenze (im Bereich hoher Drücke) verletzt.

Aus diesen Überlegungen heraus können die jeweiligen Haftgrenzen abgeleitet werden. Diese sind ebenfalls in Tab. 7.5 aufgeführt. Daraus ergeben sich die Haftdauern

$$\Delta\tau^H = \Delta T_1^H = \frac{\varepsilon(\omega_s^+)^2}{K_s^H} - \frac{2F_R + \varepsilon^2 Q_s^+}{AK_s^H} \quad (7.58)$$

$$\Delta\bar{\tau}^H = \frac{2F_R - \varepsilon\bar{Q}_s^-}{\bar{Q}_s^H} \quad (7.59)$$

$$\Delta T_2^H = \frac{\varepsilon(\omega_s^-)^2}{K_s^H} - \frac{2F_R - \varepsilon^2 Q_s^-}{AK_s^H}, \quad (7.60)$$

deren Verläufe in Abhängigkeit der Schwingungsamplitude A in Abb. 7.5 dargestellt sind. Wegen $\omega_s^+ \approx \omega_s^-$ und $Q_s^+ \approx Q_s^-$ sind die Verläufe von ΔT_1^H und ΔT_2^H in dieser Skalierung nicht voneinander zu unterscheiden und es gilt $\Delta T_1^H \approx \Delta T_2^H$. Beide Haftdauern werden für $A \rightarrow 0$ außerdem unendlich groß. Die Haftdynamik bei geschlossenem Ventil, das heißt $\xi_H \in \bar{\Sigma}_H$, ist in erster Näherung unabhängig von der Schwingungsamplitude A , weshalb auch $\Delta\bar{\tau}^H$ unabhängig von A ist. Für $A \gg 1$ wird $\Delta\tau^H$ immer kleiner und kann je nach Parameterkombination auch negativ werden

(nicht in der Abbildung dargestellt). Der Nulldurchgang trennt dabei die Bereiche, in denen es pro Schwingungsperiode eine bzw. zwei Haftphasen gibt. Eine negative Haftdauer ist physikalisch nicht sinnvoll und ist durch die Annahme verursacht, dass bei jedem Nulldurchgang der Geschwindigkeit eine Haftphase existiert. Der dadurch verursachte Fehler ist jedoch vernachlässigbar klein und wird hier nicht korrigiert.

Mit den Grundlösungen, welche durch die Gleichungen (7.42), (7.43), (7.46) und (7.47) repräsentiert werden, wird eine Variablentransformation auf die Variablen A und α durchgeführt und damit ein System in Standardform formuliert. Im Fall $A > X_{V0}$

$$A' = \begin{cases} f_A^+(\tau - i\Delta\tau), & \tau_0 < \tau - i\Delta\tau \leq \tau^H \\ 0, & \tau^H < \tau - i\Delta\tau \leq \tau^H + \Delta\tau^H \\ f_A^-(\tau - i\Delta\tau), & \tau^H + \Delta\tau^H < \tau - i\Delta\tau \leq \tau_1 + \Delta\tau^H \\ \bar{f}_A^-(\tau - i\Delta\tau), & \tau_1 + \Delta\tau^H < \tau - i\Delta\tau \leq \bar{\tau}^H \\ 0, & \bar{\tau}^H < \tau - i\Delta\tau \leq \bar{\tau}^H + \Delta\bar{\tau}^H \\ \bar{f}_A^+(\tau - i\Delta\tau), & \bar{\tau}^H + \Delta\bar{\tau}^H < \tau - i\Delta\tau \leq \tau_2 + \Delta\tau^H + \Delta\bar{\tau}^H \end{cases} \quad (7.61)$$

$$\alpha' = \begin{cases} f_\alpha^+(\tau - i\Delta\tau), & \tau_0 < \tau - i\Delta\tau \leq \tau^H \\ 0, & \tau^H < \tau - i\Delta\tau \leq \tau^H + \Delta\tau^H \\ f_\alpha^-(\tau - i\Delta\tau), & \tau^H + \Delta\tau^H < \tau - i\Delta\tau \leq \tau_1 + \Delta\tau^H \\ \bar{f}_\alpha^-(\tau - i\Delta\tau), & \tau_1 + \Delta\tau^H < \tau - i\Delta\tau \leq \bar{\tau}^H \\ 0, & \bar{\tau}^H < \tau - i\Delta\tau \leq \bar{\tau}^H + \Delta\bar{\tau}^H \\ \bar{f}_\alpha^+(\tau - i\Delta\tau), & \bar{\tau}^H + \Delta\bar{\tau}^H < \tau - i\Delta\tau \leq \tau_2 + \Delta\tau^H + \Delta\bar{\tau}^H \end{cases} \quad (7.62)$$

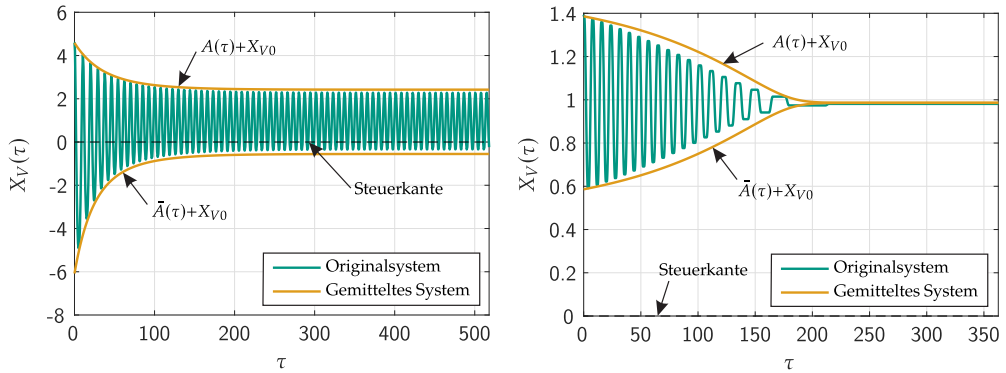
$$\Delta\tau = \tau_2 - \tau_0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (7.63)$$

wird zwischen sechs Schaltzuständen unterschieden. Weil die Grundlösung das ungestörte Problem nicht exakt löst, ist der kleine Parameter als Faktor auf der rechten Seite nicht enthalten. Trotzdem ist die rechte Seite in der Größenordnung ε . Für den Fall $A < X_{V0}$ ergibt sich die Darstellung

$$A' = \varepsilon \begin{cases} F_A^+(\tau - i\Delta\tau), & T_0 < \tau - i\Delta\tau \leq T_1 \\ 0, & T_1 < \tau - i\Delta\tau \leq T_1 + \Delta T_1^H \\ F_A^-(\tau - i\Delta\tau), & T_1 + \Delta T_1^H < \tau - i\Delta\tau \leq T_2 \\ 0, & T_2 < \tau - i\Delta\tau \leq T_2 + \Delta T_2^H \end{cases} \quad (7.64)$$

$$\alpha' = \varepsilon \begin{cases} F_\alpha^+(\tau - i\Delta\tau), & T_0 < \tau - i\Delta\tau \leq T_1 \\ 0, & T_1 < \tau - i\Delta\tau \leq T_1 + \Delta T_1^H \\ F_\alpha^-(\tau - i\Delta\tau), & T_1 + \Delta T_1^H < \tau - i\Delta\tau \leq T_2 \\ 0, & T_2 < \tau - i\Delta\tau \leq T_2 + \Delta T_2^H \end{cases} \quad (7.65)$$

$$\Delta\tau = T_2 + \Delta T_2^H - T_0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (7.66)$$



(a) Anfangsbedingungen $X_V(0) = A(0) + X_{V0} = 3.6 + X_{V0}$ und $X'_V(0) = \psi(0) = 0$.

(b) Anfangsbedingungen $X_V(0) = A(0) + X_{V0} = 0.4 + X_{V0}$ und $X'_V(0) = \psi(0) = 0$.

Abbildung 7.6: Vergleich des Einschwingverhaltens des Originalsystems und des gemittelten Systems. Dämpfungsparameter $d_V = 160 \text{ N s/m}$, Reibkraft $f_R = 1 \text{ N}$.

Die Funktionen f_A^\pm , f_α^\pm , \tilde{f}_A^\pm , \tilde{f}_α^\pm , F_A^\pm und F_α^\pm werden hier nicht explizit angegeben. Mittelwertbildung liefert ein autonomes System

$$A' = F_A(A) = \begin{cases} \hat{F}_A(A), & A > X_{V0} \\ \check{F}_A(A), & A \leq X_{V0} \end{cases} \quad (7.67)$$

$$\alpha' = F_\alpha(A) = \begin{cases} \hat{F}_\alpha(A), & A > X_{V0} \\ \check{F}_\alpha(A), & A \leq X_{V0} \end{cases} \quad (7.68)$$

mit den Funktionen $\hat{F}_A(A)$, $\check{F}_A(A)$, $\hat{F}_\alpha(A)$ und $\check{F}_\alpha(A)$, deren Berechnung in Anhang A ausgeführt wird.

In Abb. (7.6) ist das transiente Einschwingverhalten sowohl des Originalsystems als auch des gemittelten Systems für unterschiedliche Anfangsbedingungen dargestellt. Offensichtlich koexistieren mit einer Gleichgewichtslage und einem Grenzzyklus mindestens zwei stabile stationäre Lösungen mit unterschiedlichen Einzugsgebieten. In beiden Fällen ergibt sich eine gute Übereinstimmung zwischen dem Originalsystem und dem gemittelten System.

Die Koexistenz verschiedener stationärer Lösungen wird in Abb. 7.7 verdeutlicht. Da die Differentialgleichungen des gemittelten Systems entkoppelt sind, können analog zu der Diskussion der Ergebnisse in Abschnitt 5.2 die stationären Lösungen durch die Nullstellen der rechten Seite des gemittelten Systems dargestellt werden. Die Steigung an den jeweiligen Nullstellen ist mit dem Eigenwert in der Gleichgewichtslage assoziiert und bestimmt somit die Stabilität der stationären Lösung. Für kleine ε existiert lediglich eine Nullstelle bei $A = 0$, welche zu einer asymptotisch stabilen Gleichgewichtslage

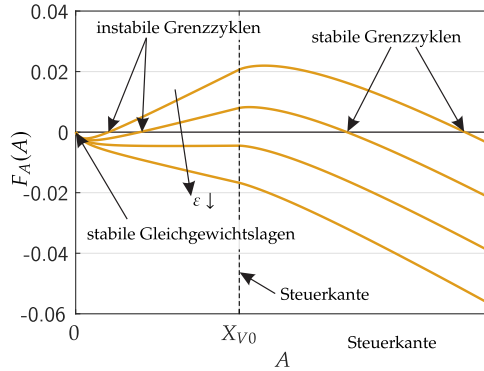
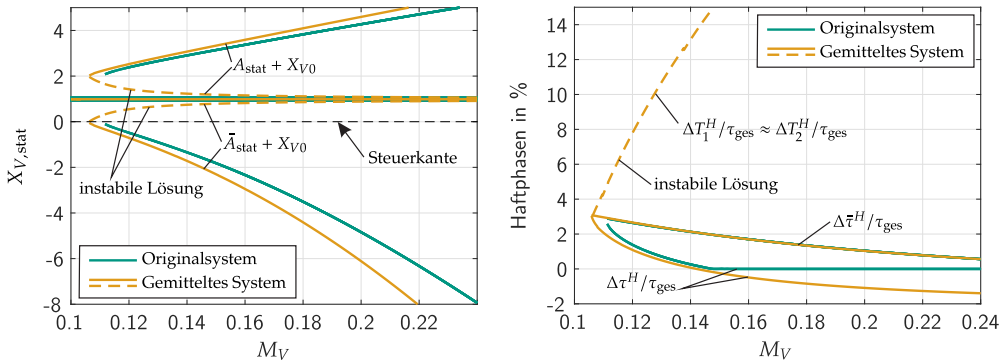


Abbildung 7.7: Rechte Seite der gemittelten Gl. (7.67) in Abhängigkeit der Amplitude für unterschiedliche ε . Nullstellen entsprechen stationären Lösungen. Die Steigung an den jeweiligen Nullstellen bestimmt die Stabilität der Lösung.



(a) Minima und Maxima der stationären Grenzzykklusschwingungen.

(b) Anteil der Haftphasen in % der Gesamtperiodendauer τ_{ges} .

Abbildung 7.8: Vergleich der Grenzzykklusschwingungen des Originalsystems und des gemittelten Systems unter Variation des kleinen Parameters $\varepsilon = M_V$. Für $\varepsilon > 0.145$ wird die Haftdauer $\Delta\tau^H$ im gemittelten System negativ, das heißt, dass im Originalsystem hier ein Gleit-Gleit-Übergang stattfindet. Im Bereich $\varepsilon < 0.145$ existieren 2 Gleit-Haft-Gleit-Übergänge pro Schwingungsperiode. Instabile Grenzzykklusschwingungen treten auch im Originalsystem auf. Sie sind hier nicht dargestellt, weil sie nicht ohne besondere numerische Methoden gefunden werden können.

gehört. Mit steigendem ε entstehen zwei weitere Nullstellen, welche einem instabilen und einem stabilen Grenzzyklus entsprechen. Die Gleichgewichtslage bleibt für alle ε stabil, jedoch wird der Einzugsbereich, der durch den instabilen Grenzzyklus bestimmt wird, immer kleiner.

In Abb. 7.8a ist das Bifurkationsdiagramm mit dem Bifurkationsparameter $\varepsilon = M_V$ dargestellt. Der Einzugsbereich wird bereits kurz nach der Entstehung der Grenzzyklen so klein, dass im realen Betrieb die stabile Gleichgewichtslage vermutlich zumeist nicht

erreicht wird. Zwischen dem Originalsystem und dem gemittelten System besteht eine gute Übereinstimmung, selbst für relativ große Werte von ε . Die indefinite Gleichgewichtslage des Originalsystems, welche durch eine etwas dickere Linie dargestellt ist, kann im gemittelten System nicht abgebildet werden. Die den stationären Lösungen zugehörigen Dauern der Haftphasen in % der Gesamtschwingungsdauer sind in Abb. 7.8b dargestellt. Die Haftphasen besitzen insgesamt nur einen geringen Anteil an der Gesamtschwingungsdauer und werden mit zunehmendem ε und damit zunehmender Schwingungsamplitude kürzer. Die Haftphase im Bereich der Schwingungsmaxima verschwindet bei $\varepsilon \approx 0.145$, womit es hier zu Gleit-Gleit-Übergängen kommt. Im gemittelten System wird das durch eine negative Haftdauer ausgedrückt, was, wie bereits zuvor diskutiert, zwar nicht physikalisch ist, jedoch keinen großen Fehler verursacht.

Zusammenfassend können mit der Berücksichtigung Coulomb'scher Reibung bisher nicht betrachtete Effekte beschrieben werden. Dazu gehören eine indefinite Gleichgewichtslage sowie die Unterscheidung zwischen Haft- und Gleitbereichen. Dabei lässt die Systemdynamik sowohl Gleit-Haft-Gleit- als auch Gleit-Gleit-Übergänge zu. Die Gleichgewichtslage wird durch die Coulomb'sche Reibung zwar stabilisiert, jedoch ist in weiten Parameterbereichen das Einzugsgebiet so klein, dass in der realen Anwendung die Gleichgewichtslage nicht erreicht wird.

7.2 Quadratische Dämpfung

Um Stabilitätsproblemen in Ventilkreisläufen zu begegnen, gibt es neben der Variation physikalischer Parameter noch die Möglichkeit, durch konstruktive Veränderungen eine Stabilisierung der Gleichgewichtslage herbeizuführen.

Eine weit verbreitete konstruktive Maßnahme zur Stabilisierung von Ventilkreisläufen ist das gezielte Einbringen von Dämpfung in den durch Ventilkolben und Druckrückführung gebildeten Regelkreis. Dieser Dämpfungsmechanismus kann durch einen hydraulischen Widerstand in der Druckrückführung realisiert werden. Dabei sind sowohl laminare [80] als auch turbulente [68] Widerstände denkbar. In diesem Abschnitt wird der Fall einer Dämpfungsblende untersucht, durch die ein turbulenter Volumenstrom fließt. Diese Variante bringt zwar eine zusätzliche Nichtlinearität ins System, hat jedoch den Vorteil, einen viskositäts- und damit temperaturunabhängigen Widerstand bereitzustellen [7]. Die Analyse beschränkt sich auf das Konstantdrucksystem mit Druckregelventil in Abb. 7.9, jedoch ergeben sich identische Ergebnisse für den Kreislauf mit 3/3-Proportional-Wegeventil und Druckquelle. Mit der Blendenfläche A_c wird ausgehend von den Gleichungen (4.1) und (4.2) die Systemdynamik

$$m_V \ddot{x}_V + d_V \dot{x}_V + k_V x_V = r_V^2 \pi p_c - f_c \quad (7.69)$$

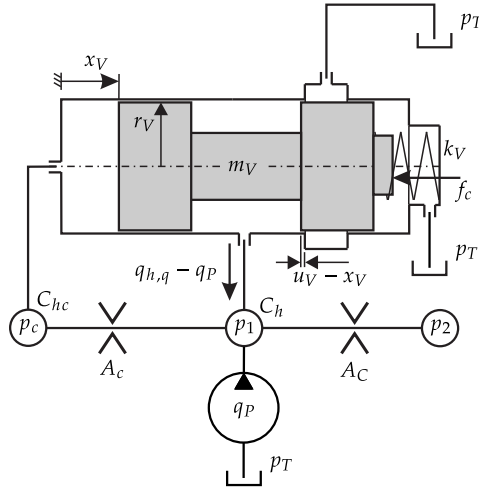


Abbildung 7.9: Konstantdrucksystem mit Druckregelventil und Dämpfungsblende.

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
Blendenfläche	A_c	$\pi/4 \cdot (1.41 \cdot 10^{-3})^2$	m^2
Hauptkapazität	\tilde{C}_h	$2.354 \cdot 10^{-13}$	m^3/Pa
Nebenkapazität	C_{hc}	$1.458 \cdot 10^{-14}$	m^3/Pa

Tabelle 7.6: Standardparametrierung des Ventilkreislaufs mit Dämpfungsblende. Die nicht aufgeführten Parameterwerte sind Tab. 4.1 zu entnehmen.

$$C_h \dot{p}_1 = -q_c(p_1, p_c) + q_{h,q}(x_V, p_1) + q_C(p_1) \quad (7.70)$$

$$C_{hc} \dot{p}_c = q_c(p_1, p_c) - r_V^2 \pi \dot{x}_V \quad (7.71)$$

durch Hinzunahme der Druckaufbaugleichung in der durch die Blende geschaffenen Kammer (Kapazität C_{hc}) mit dem Druck p_c gebildet. Für die Funktionen $q_h(x_V, p_1)$ und $q_C(p_1)$ gelten die Gleichungen (4.4) und (4.9). Der Volumenstrom durch die Dämpfungsblende

$$q_c(p_1, p_c) = \gamma_F A_c \text{sign}(p_1 - p_c) \sqrt{|p_1 - p_c|} \quad (7.72)$$

wird entsprechend Gl. (3.13) modelliert.

Für die neu eingeführten Parameter gelten die Werte in Tab. 7.6.

Die Werte der Kapazitäten \tilde{C}_h und C_{hc} sind so gewählt, dass ihre Summe gemäß der Standardparametrierung aus Kap. 4 der Kapazität von $C_h = 2.5 \cdot 10^{-13} \text{ m}^3/\text{Pa}$ entspricht. Für die Simulationen werden teilweise leicht abweichende Dämpfungsparameter von $d_V = 170 \text{ N s/m}$ und $d_V = 190 \text{ N s/m}$ verwendet.

Die Systemerweiterung beinhaltet im Sinne der nichtlinearen Dynamik interessante Phänomene, welche durch die fehlende Lipschitz-Stetigkeit der Wurzelfunktion in ihrem Ursprung hervorgerufen werden. So ist sofort ersichtlich, dass im stationären Betrieb kein Volumenstrom durch die Dämpfungsblende fließt, weshalb in der Gleichgewichtslage $p_c = p_1$ gilt. Eine Linearisierung um die Gleichgewichtslage und somit eine Stabilitätsuntersuchung mittels der Eigenwerte des linearisierten Systems ist also wegen $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{d}{dx} \sqrt{x} \rightarrow \infty$ nicht möglich. Dies motiviert die asymptotische Analyse dieser Systemtopologie, welche im Folgenden vorgestellt wird.

Zunächst erfolgt die Entdimensionierung der Systemdynamik mit den dimensionslosen Größen $\tau, X_V, P_1, M_V, K_V, \alpha_V, \beta_V, \alpha_C, F_c$ und Q_P aus Gl. (4.17) sowie

$$P_c = \frac{p_c r_V^2 \pi}{d_V \omega_0 \tilde{x}_{V0}} \quad (7.73)$$

$$\Gamma_{hc} = \frac{C_{hc}}{\tilde{C}_h} \quad (7.74)$$

$$\alpha_c = \sqrt{\frac{r_V^2 \pi}{d_V \tilde{x}_{V0} \omega_0^3} \frac{A_c \gamma_F}{\tilde{C}_h}}. \quad (7.75)$$

Dabei ist die charakteristische Kreisfrequenz

$$\omega_0^2 = \frac{2r_V \pi \gamma_F}{(\tilde{C}_h + C_{hc}) d_V} \sqrt{r_V^2 \pi f_c} \quad (7.76)$$

abweichend zu Gl. (4.16) definiert. Die charakteristische Länge \tilde{x}_{V0} berechnet sich nach Gl. (4.13). Dies führt auf die dimensionslosen Systemgleichungen

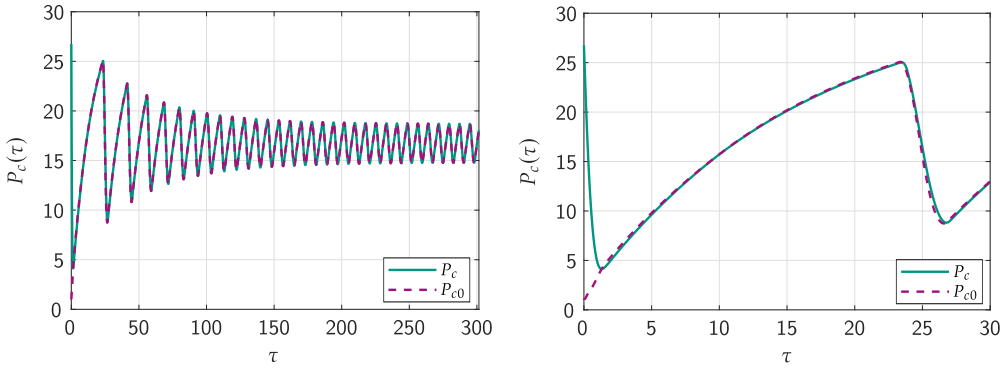
$$M_V X_V'' + X_V' + K_V X_V = P_c - F_c \quad (7.77)$$

$$P_1' = -\alpha_c \text{sign}(P_1 - P_c) \sqrt{|P_1 - P_c|} + Q_h(X_V, P_1) - Q_C(P_1) \quad (7.78)$$

$$\Gamma_{hc} P_c' = \alpha_c \text{sign}(P_1 - P_c) \sqrt{|P_1 - P_c|} - \alpha_V X_V' \quad (7.79)$$

mit den Funktionen $Q_h(X_V, P_1)$ und $Q_C(P_1)$ entsprechend den Gleichungen (4.20) und (4.22).

Da eine Reihenentwicklung von $\text{sign}(P_1 - P_c) \sqrt{|P_1 - P_c|}$ um die Gleichgewichtslage $P_1 = P_c$ nicht möglich ist, erfolgt die Abschätzung der Größenordnungen aus physikalischen Überlegungen heraus. Die durch die Dämpfungsblende geschaffene Kapazität C_{hc} ist sehr klein im Vergleich zur Hauptkapazität \tilde{C}_h , weshalb der Druckaufbau innerhalb der Kapazität C_{hc} sehr schnell vonstatten geht. Dieser Argumentation folgend ist Gl. (7.79) eine singular gestörte Gleichung mit dem kleinen Parameter $\mu = \Gamma_{hc}$ und der schnellen Variablen P_c , welche nachfolgend im Sinne der singularen Störungsrechnung



(a) Transientes Verhalten bis zum eingeschwungenen Zustand.

(b) Ausschnitt $\tau \leq 30$.

Abbildung 7.10: Zeitverlauf der schnellen Druckvariable $P_c(\tau)$ und Näherung $P_{c0}(\tau)$. Dämpfungsparameter $d_V = 170 \text{ N s/m}$

reduziert wird. Diese Vorgehensweise wird bereits in [80] für ein ähnliches System umgesetzt, welches einen linearen Widerstand in Form einer Laminardrossel statt der Dämpfungsblende beinhaltet. Für $\Gamma_{hc} \rightarrow 0$ geht das Modell in das Ventil ohne zusätzliche Blende aus Kapitel 4 über. Mit den hier verwendeten Parameterwerten ergibt sich $\mu = 0.062$.

Zunächst wird durch das Nullsetzen des kleinen Parameters μ in Gl. (7.79) eine Näherung erster Ordnung

$$\mathcal{M}_{c0} = \left\{ [X_V, X'_V, P_1, P_{c0}]^T \in \mathbb{R}^4 : \alpha_c \text{sign}(P_1 - P_{c0}) \sqrt{|P_1 - P_{c0}|} - \alpha_V X'_V = 0 \right\} \quad (7.80)$$

der mit der schnellen Variable P_c assoziierten langsamen Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_{c\mu}$ berechnet. Dabei ist der Ausdruck $-\alpha_V X'_V$ eigentlich in der Größenordnung $\mathcal{O}(\mu)$. Es ist jedoch aus strukturellen Gründen sinnvoll, diesen Term mit in die Grundlösung zu integrieren, da nur dies eine spätere Reihenentwicklung der Bewegungsgleichungen um die Gleichgewichtslage ermöglicht.

Die durch Gl. (7.80) implizit formulierte Hyperfläche kann explizit nach P_{c0}

$$P_{c0} = P_1 - \text{sign}(X'_V) \left(\frac{\alpha_V X'_V}{\tilde{\alpha}_c} \right)^2 \quad (7.81)$$

aufgelöst werden, woraus eine Näherung für die schnelle Variable P_{c0} folgt. Diese Näherung zeigt bereits sehr gute Übereinstimmungen mit dem exakten Verlauf des Drucks P_c , vgl. Abb. 7.10. Durch die Näherung P_{c0} wird eine Gleichgewichtslage der

Gleichung

$$\frac{dP_c}{d\theta} = \alpha_c \operatorname{sign}(P_1 - P_c) \sqrt{|P_1 - P_c|} - \alpha_V X'_V, \quad \theta = \tau/\varepsilon \quad (7.82)$$

definiert, in welcher die Variablen P_1 und X'_V als konstante Parameter betrachtet werden. Die Stabilität dieser Gleichgewichtslage bestimmt die Stabilität der langsamen Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_{c\mu}$, weshalb als nächster Schritt mit $\Pi_c = P_c - P_{c0}$ die Gleichungen in den Abweichungen

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi_c}{d\theta} &= \alpha_c \operatorname{sign}(P_1 - (\Pi_c + P_{c0})) \sqrt{|P_1 - (\Pi_c + P_{c0})|} - \alpha_V X'_V \\ &= \alpha_c \operatorname{sign} \left(\operatorname{sign}(X'_V) \left(\frac{\alpha_V X'_V}{\alpha_c} \right)^2 - \Pi_c \right) \sqrt{\left| \operatorname{sign}(X'_V) \left(\frac{\alpha_V X'_V}{\alpha_c} \right)^2 - \Pi_c \right|} - \alpha_V X'_V \end{aligned} \quad (7.83)$$

formuliert werden. Ob eine Reduktion der schnellen Dynamik möglich ist, hängt von globalen Stabilitätseigenschaften der langsamen Mannigfaltigkeit ab. Aus diesem Grund wird die Stabilitätsanalyse nicht mit Hilfe einer Linearisierung um die Gleichgewichtslage vorgenommen, sondern mittels der direkten Methode nach Lyapunov. Dazu wird die Lyapunov-Funktion

$$V(\Pi_c) = \frac{1}{2} \Pi_c^2 \quad (7.84)$$

angesetzt, womit für die Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\theta} &= \Pi_c \frac{d\Pi_c}{d\theta} \\ &= \Pi_c \left(\alpha_c \operatorname{sign}(-\Pi_c + K) \sqrt{|-\Pi_c + K|} - \alpha_V X'_V \right) \end{aligned} \quad (7.85)$$

mit der Abkürzung

$$K = \operatorname{sign}(X'_V) \left(\alpha_V \frac{X'_V}{\tilde{\alpha}_c} \right)^2 \quad (7.86)$$

folgt. Asymptotische Stabilität kann nun durch den Nachweis der negativen Definitheit von $\frac{dV}{d\theta}$ gezeigt werden. Es gelten die Beziehungen

$$\operatorname{sign}(K) = \operatorname{sign}(X'_V) \quad (7.87)$$

$$\frac{\alpha_V X'_V}{\tilde{\alpha}_c} = \operatorname{sign}(K) \sqrt{|K|}, \quad (7.88)$$

womit für die negative Definitheit die Ungleichung

$$\Pi_c \left(\text{sign}(K - \Pi_c) \sqrt{|K - \Pi_c|} - \text{sign}(K) \sqrt{|K|} \right) < 0 \quad (7.89)$$

gezeigt werden muss. Für diesen Nachweis wird zwischen sechs verschiedenen Fällen

$$K \geq \Pi_c > 0: \quad \underbrace{\Pi_c}_{>0} \underbrace{\left(\sqrt{K - \Pi_c} - \sqrt{K} \right)}_{<0} < 0 \quad (7.90)$$

$$K \geq 0 > \Pi_c: \quad \underbrace{\Pi_c}_{<0} \underbrace{\left(\sqrt{K + |\Pi_c|} - \sqrt{K} \right)}_{>0} < 0 \quad (7.91)$$

$$0 > K \geq \Pi_c: \quad \underbrace{\Pi_c}_{<0} \underbrace{\left(\sqrt{-|K| + |\Pi_c|} + \sqrt{|K|} \right)}_{>0} < 0 \quad (7.92)$$

$$\Pi_c \geq K > 0: \quad \underbrace{\Pi_c}_{>0} \underbrace{\left(-\sqrt{\Pi_c - K} - \sqrt{K} \right)}_{<0} < 0 \quad (7.93)$$

$$\Pi_c > 0 \geq K: \quad \underbrace{\Pi_c}_{>0} \underbrace{\left(-\sqrt{\Pi_c + |K|} + \sqrt{|K|} \right)}_{<0} < 0 \quad (7.94)$$

$$0 > \Pi_c \geq K: \quad \underbrace{\Pi_c}_{<0} \underbrace{\left(-\sqrt{-|\Pi_c| + |K|} + \sqrt{|K|} \right)}_{>0} < 0 \quad (7.95)$$

unterschieden. Der Nachweis kann für alle Fälle und sogar ohne Einschränkungen für den Wertebereich von Π_c erbracht werden, womit die globale asymptotische Stabilität der langsamen Mannigfaltigkeit $M_{c\mu}$ bewiesen ist. Dies rechtfertigt, wie bereits in den vorherigen Kapiteln, die Reduktion der schnellen Dynamik entsprechend der in Abschnitt 2.3 beschriebenen Vorgehensweise.

Mittels der Reihenentwicklung

$$P_c \approx \tilde{P}_c = P_{c0} + \mu P_{c1} \quad (7.96)$$

kann nun die Funktion

$$\text{sign}(P_1 - P_c) \sqrt{|P_1 - P_c|} \approx \text{sign}(P_1 - P_{c0} - \mu P_{c1}) \sqrt{|P_1 - P_{c0} - \mu P_{c1}|} \quad (7.97)$$

$$\approx \text{sign}(P_1 - P_{c0}) \sqrt{|P_1 - P_{c0}|} - \frac{\mu P_{c1}}{2\sqrt{|P_1 - P_{c0}|}} \quad (7.98)$$

in eine Reihe entwickelt und nach Einsetzen in Gl. (7.79) diese nach verschiedenen Potenzen von μ

$$\mu^0 : 0 = \alpha_c \operatorname{sign}(P_1 - P_{c0}) \sqrt{|P_1 - P_{c0}|} - \alpha_V X'_V \quad (7.99)$$

$$\mu^1 : P'_{c0} = -\frac{\alpha_c P_{c1}}{2\sqrt{|P_1 - P_{c0}|}} \quad (7.100)$$

bilanziert werden. Aus Gl. (7.99) folgt wegen $\alpha_c > 0$ die Vorzeichenbeziehung $\operatorname{sign}(X'_V) = \operatorname{sign}(P_1 - P_{c0})$. Damit können die Reihenglieder

$$P_{c0} = P_1 - \operatorname{sign}(X'_V) \left(\frac{\alpha_V X'_V}{\alpha_c} \right)^2 \quad (7.101)$$

$$P_{c1} = \frac{4\alpha_V^3}{\alpha_c^4} (X'_V)^2 X''_V - \frac{2\alpha_V}{\alpha_c^2} \operatorname{sign}(X'_V) X'_V P'_1 \quad (7.102)$$

berechnet werden. Das ordnungsreduzierte System ergibt sich dann aus den Gleichungen (7.77) und (7.78) mit $P_c = P_{c0} + \mu P_{c1}$. Das Grundglied P_{c0} bringt einen quadratischen Dämpfungsterm in das System ein. Dies ist eine für turbulente Strömungen typische Nichtlinearität, welche beispielsweise auch zur Modellierung von Luftwiderständen üblich ist. Das Glied erster Ordnung P_{c1} bringt weitere Nichtlinearitäten ein, deren Besonderheiten darin bestehen, dass sie die höchsten Ableitungen betreffen. Zur Klärung der Größenordnungen dieser Nichtlinearitäten wird das Differentialgleichungssystem nun analog zu Abschnitt 4.2 als Einzeldifferentialgleichung dritter Ordnung in den Abweichungen $\xi_V = X_V - X_{V0}$ von der Gleichgewichtslage dargestellt und die Nichtlinearitäten über eine Taylorreihen-Entwicklung um die Gleichgewichtslage in polynomiale Form transformiert. Es ergibt sich die abschnittsweise definierte Einzeldifferentialgleichung

$$0 = \varepsilon \xi_V''' + \begin{cases} \xi_V'' + \varepsilon K_s \xi'_V + \omega_s^2 \xi_V + \varepsilon N_{s1} \xi_V \xi'_V + \varepsilon N_{v2} \operatorname{sign}(\xi'_V) \xi_V \xi_V'' \\ \xi_V'' + \varepsilon \bar{K}_s \xi'_V - \bar{Q}_s \end{cases} + \begin{cases} \varepsilon N_{v3} \operatorname{sign}(\xi'_V) (\xi'_V)^2 + \varepsilon N_{v4} \operatorname{sign}(\xi'_V) \xi'_V \xi_V'', & \xi_V + X_{V0} > 0 \\ \varepsilon \bar{N}_{v4} \operatorname{sign}(\xi'_V) \xi'_V \xi_V'', & \xi_V + X_{V0} \leq 0 \end{cases} \quad (7.103)$$

dritter Ordnung mit den skalierten Parametern

$$\varepsilon K_s = K_V + \kappa_c (\alpha_V + \kappa_T) \quad (7.104)$$

$$\varepsilon \bar{K}_s = K_V + \kappa_c (\alpha_V + \bar{\kappa}_T) \quad (7.105)$$

$$\omega_s^2 = \kappa_c \left(K_V \kappa_T + \beta_V \sqrt{P_{10}} \right) \quad (7.106)$$

Symbol	Wert	Symbol	Wert
ε	0.13	N_{s1}	0.22
K_s	0.74	N_{v2}	-0.18
\bar{K}_s	0.53	N_{v3}	-0.18
ω_s	1.00	N_{v4}	0.07
\bar{Q}_s	0.99	\bar{N}_{v4}	0.08

Tabelle 7.7: Skalierte Parameterwerte basierend auf der Standardparametrierung in den Tabellen 4.1 und 7.6.

$$\bar{Q}_s = \kappa_c \left(Q_P - \alpha_C \sqrt{P_{10}} \right) \quad (7.107)$$

$$\varepsilon N_{s1} = \kappa_c \left(\frac{\beta_V}{2\sqrt{P_{10}}} - \frac{K_V \kappa_T}{2P_{10}} \right) \quad (7.108)$$

$$\varepsilon N_{v2} = -\frac{2\kappa_c \alpha_V \mu}{\alpha_c^2} \left(K_V \kappa_T + \beta_V \sqrt{P_{10}} \right) \quad (7.109)$$

$$\varepsilon N_{v3} = -\frac{\alpha_V \kappa_c}{\alpha_c^2} \left(\frac{\kappa_T \kappa_c}{P_{10}} ((\alpha_V P_{10} + Q_P) \mu - \alpha_V P_{10}) + 2\mu \left(K_V \kappa_T + \beta_V \sqrt{P_{10}} \right) \right) \quad (7.110)$$

$$\varepsilon N_{v4} = -\frac{\alpha_V \kappa_c}{\alpha_c^2} \left(\alpha_V \kappa_c (4\mu^2 + 2\mu - 2) + \frac{\varepsilon \kappa_c \kappa_T \mu Q_P}{P_{10}} + 4\kappa_T \mu \right) \quad (7.111)$$

$$\varepsilon \bar{N}_{v4} = -\frac{\alpha_V \kappa_c}{\alpha_c^2} \left(\alpha_V \kappa_c (4\mu^2 + 2\mu - 2) + \frac{\varepsilon \kappa_c \bar{\kappa}_T \mu Q_P}{P_{10}} + 4\bar{\kappa}_T \mu \right) \quad (7.112)$$

und den Abkürzungen κ_T und $\bar{\kappa}_T$ entsprechend den Gleichungen (4.34) und (4.35) sowie

$$\kappa_c = \frac{1}{1 + \mu} . \quad (7.113)$$

Die Werte der skalierten Parameter, welche sich aus den physikalischen Parameterwerten in den Tabellen 4.1 und 7.6 ergeben, sind in Tab. 7.7 aufgeführt.

Die skalierten Parameter N_{v4} und \bar{N}_{v4} sind in der ausgewählten Parameterkombination etwas kleiner als ε und könnten demnach vernachlässigt werden. Diese Beziehung gilt jedoch nicht für alle relevanten Parameterkombinationen, weshalb sie in der weiteren Berechnung berücksichtigt werden.

Nach der Aufteilung in langsame $\xi = [\xi_1, \xi_2]^\top = [\xi_V, \xi'_V]^\top$ und schnelle Variablen $\eta = \xi''_V$ ergibt sich eine zu Gl. (5.4) identische Näherung \mathcal{M}_0 für die langsame Mannigfaltigkeit \mathcal{M}_ε . Dies liegt daran, dass alle durch die zusätzliche Blende hervorgerufenen Nichtlinearitäten in der Größenordnung $\mathcal{O}(\varepsilon)$ sind. Somit gelten weiterhin die Stabilitätsaussagen aus Abschnitt 5.1, was eine Reduktion der schnellen Dynamik $\eta = \xi''_V$ rechtfertigt. Das Einsetzen der Reihenentwicklung

$$\eta \approx \tilde{\eta} = \eta_0 + \varepsilon \eta_1 \quad (7.114)$$

in Gl. (7.103) und das anschließende Bilanzieren der Potenzen von ε führt auf die Näherungen

$$\eta_0 = \begin{cases} -\omega_s^2 \xi_1, & \xi_1 + X_{V0} > 0 \\ \bar{Q}_s, & \xi_1 + X_{V0} \leq 0 \end{cases} \quad (7.115)$$

$$\eta_1 = \begin{cases} (\omega_s^2 - K_s) \xi_2 - N_{s1} \xi_1 \xi_2 + N_{v2} \text{sign}(\xi_2) \omega_s^2 \xi_1^2, & \xi_1 + X_{V0} > 0 \\ -(\bar{K}_s + N_{v4} \bar{Q}_s \text{sign}(\xi_2)) \xi_2, & \xi_1 + X_{V0} \leq 0 \\ + \begin{cases} -N_{v3} \text{sign}(\xi_2) \xi_2^2 + N_{v4} \omega_s^2 \text{sign}(\xi_2) \xi_1 \xi_2, & \xi_1 + X_{V0} > 0 \\ 0, & \xi_1 + X_{V0} \leq 0 \end{cases} \end{cases} \quad (7.116)$$

welche das ordnungsreduzierte regulär gestörte System

$$\xi_1' = \xi_2 \quad (7.117)$$

$$\xi_2' = \eta_0 + \varepsilon \eta_1 \quad (7.118)$$

bilden.

Weil alle durch die Dämpfungsblende eingebrachten Nichtlinearitäten in der Größenordnung $\mathcal{O}(\varepsilon)$ sind, ist die Grundlösung gegenüber dem Ventilkreislauf ohne Dämpfungsblende unverändert und kann den Gleichungen (5.8), (5.9) und (5.15) bis (5.20) entnommen werden. Das daraus abgeleitete System in Standardform hat die gleiche Struktur wie die Gleichungen (5.21) und (5.22). Mittelwertbildung liefert entkoppelte autonome Differentialgleichungen in der Form

$$A' = F_A(A) = \varepsilon \begin{cases} \hat{F}_A(A), & A > X_{V0} \\ \check{F}_A(A), & A \leq X_{V0} \end{cases} \quad (7.119)$$

$$\alpha' = F_\alpha(A) = \varepsilon \begin{cases} \hat{F}_\alpha(A), & A > X_{V0} \\ \check{F}_\alpha(A), & A \leq X_{V0} \end{cases} \quad (7.120)$$

mit den Funktionen

$$\begin{aligned} \hat{F}_A = & \left(\bar{Q}_s (\pi - C) + \omega_s^2 \sqrt{A^2 - X_{V0}^2} \right)^{-1} \left[\frac{A^2}{3} \bar{Q}_s \omega_s (N_{v2} - 2N_{v3}) \right. \\ & - \frac{A}{2} \left(\frac{2}{3} \sqrt{A^2 - X_{V0}^2} (\bar{K}_s \omega_s^2 + N_{s1} \bar{Q}_s) + \bar{Q}_s ((\pi - C) (K_s - \omega_s^2) - 2X_{V0} N_{v3} \omega_s) \right) \\ & \left. - \frac{X_{V0}}{2A} \left(\left((K_s - \omega_s^2 - \frac{2}{3} N_{s1} X_{V0}) \bar{Q}_s - \frac{2}{3} \bar{K}_s \omega_s^2 X_{V0} \right) \sqrt{A^2 - X_{V0}^2} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\left. -\frac{2}{3}\bar{Q}_s X_{V0}^2 \omega_s (N_{v2} + N_{v3}) \right) \Bigg] \quad (7.121)$$

$$\begin{aligned} \hat{F}_\alpha = & \left(A^2 \bar{Q}_s \left(\bar{Q}_s (\pi - C) + \omega_s^2 \sqrt{A^2 - X_{V0}^2} \right) \right)^{-1} \left[\frac{A^2}{3} \omega_s^4 \bar{K}_s (A^2 - X_{V0}^2) \right. \\ & + \omega_s^2 (A^2 - X_{V0}^2) \left(\frac{A^2}{2} \omega_s^2 \bar{N}_{v4} - \frac{X_{V0}}{3} \bar{K}_s \right) \\ & \left. + \omega_s^2 \frac{N_{v4}}{3} (A + X_{V0}) (A^2 - AX_{V0} + X_{V0}^2) \right] \quad (7.122) \end{aligned}$$

$$\check{F}_A = -\frac{A}{2} (K_s - \omega_s^2) + \varepsilon \frac{2\omega_s A^2}{3\pi} (N_{v2} - 2N_{v3}) \quad (7.123)$$

$$\check{F}_\alpha = -A \frac{2\omega_s^2 N_{v4}}{3\pi} . \quad (7.124)$$

Aus Gl. (7.123) erhält man zwei stationären Lösungen

$$A_{\text{stat},1} = 0 \quad (7.125)$$

$$A_{\text{stat},2} = \frac{3\pi(K_s - \omega_s^2)}{4\omega_s(N_{v2} - 2N_{v3})} \quad (7.126)$$

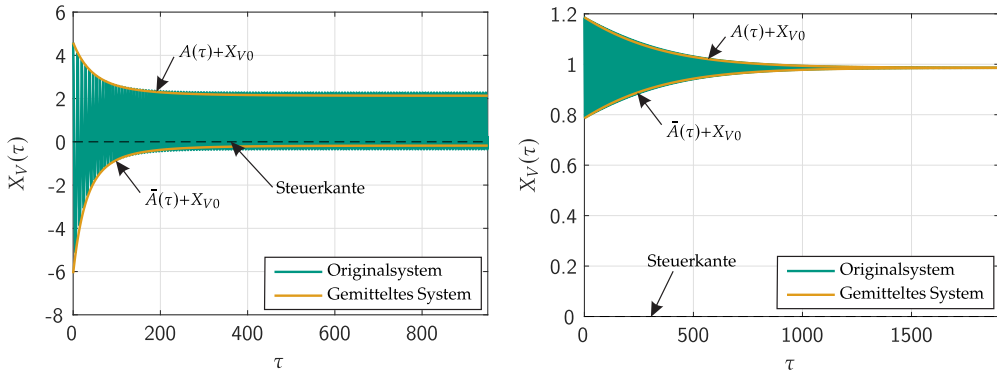
in geschlossen analytischer Form, für die $A < X_{V0}$ gilt. Deren Stabilität kann durch die Formulierung der Gleichungen in den Abweichungen und die anschließende Linearisierung sehr einfach untersucht werden. Mit $\Delta A_i = A - A_{\text{stat},i}$, $i = 1, 2$ ergeben sich die linearisierten Differentialgleichungen

$$\Delta A'_1 = -\varepsilon \frac{\Delta A_1}{2} (K_s - \omega_s^2) \quad (7.127)$$

$$\Delta A'_2 = \varepsilon \frac{\Delta A_2}{2} (K_s - \omega_s^2) . \quad (7.128)$$

Gl. (7.127) ist identisch zu Gl. (5.26). Die Stabilität der Gleichgewichtslage ändert sich durch die Einführung der zusätzlichen Blende in erster Näherung also nicht. Die Stabilität der stationären Lösung $A_{\text{stat},2}$, welche im ursprünglichen System einem Grenzyklus entspricht, ist immer gegensätzlich zur Stabilität der Gleichgewichtslage $A_{\text{stat},1}$. Eine dritte stationäre Lösung $A_{\text{stat},3}$ erhält man mittels numerischer Berechnungen aus der Differentialgleichung (7.121) für $A > X_{V0}$.

In Abb. (7.11) ist das transiente Einschwingverhalten sowohl des Originalsystems als auch des gemittelten Systems für unterschiedliche Anfangsbedingungen dargestellt. Für diese Parameterkombination koexistieren mit einer Gleichgewichtslage $A_{\text{stat},1}$ und einem Grenzyklus $A_{\text{stat},3}$ zwei stabile stationäre Lösungen mit unterschiedlichen



(a) Anfangsbedingungen $X_V(0) = A(0) + X_{V0} = 3.6 + X_{V0}$ und $X'_V(0) = \psi(0) = 0$.

(b) Anfangsbedingungen $X_V(0) = A(0) + X_{V0} = 0.2 + X_{V0}$ und $X'_V(0) = \psi(0) = 0$.

Abbildung 7.11: Vergleich des Einschwingverhaltens des Originalsystems und des gemittelten Systems. Dämpfungsparameter $d_V = 190 \text{ N s/m}$, Öffnungsfläche der Dämpfungsblende $A_c = \pi/4 \cdot (1.41 \cdot 10^{-3})^2 \text{ m}^2$.

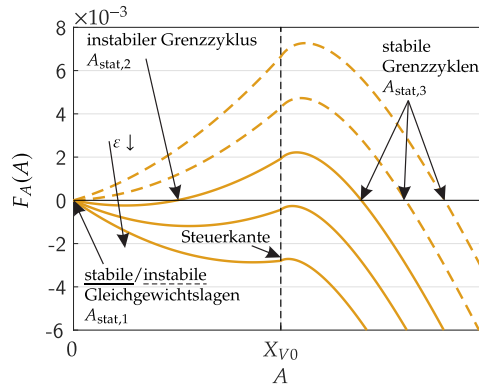


Abbildung 7.12: Rechte Seite der gemittelten Gl. (5.23) in Abhängigkeit der Amplitude für unterschiedliche ε . Nullstellen entsprechen stationären Lösungen. Die Steigung an den jeweiligen Nullstellen bestimmt die Stabilität der Lösung.

Einzugsgebieten. In beiden Fällen ergibt sich eine gute Übereinstimmung zwischen dem Originalsystem und dem gemittelten System.

Weil die gemittelten Gleichungen für die Amplitude A und die Phase α entkoppelt sind, lässt sich die Phasenraumstruktur durch die Betrachtung der rechten Seite der Differentialgleichung in A' , also der Funktion $F_A(A)$ analysieren, siehe Abb. 7.12. Die stabile Gleichgewichtslage $A_{\text{stat},1}$ wird mit zunehmendem ε instabil. Kurz vor dem Erreichen der Stabilitätsgrenze entstehen der instabile Grenzzyklus $A_{\text{stat},2}$ und gleichzeitig der stabile Grenzzyklus $A_{\text{stat},3}$. An der Stabilitätsgrenze der Gleichgewichtslage endet das Existenzgebiet des instabilen Grenzzyklus.

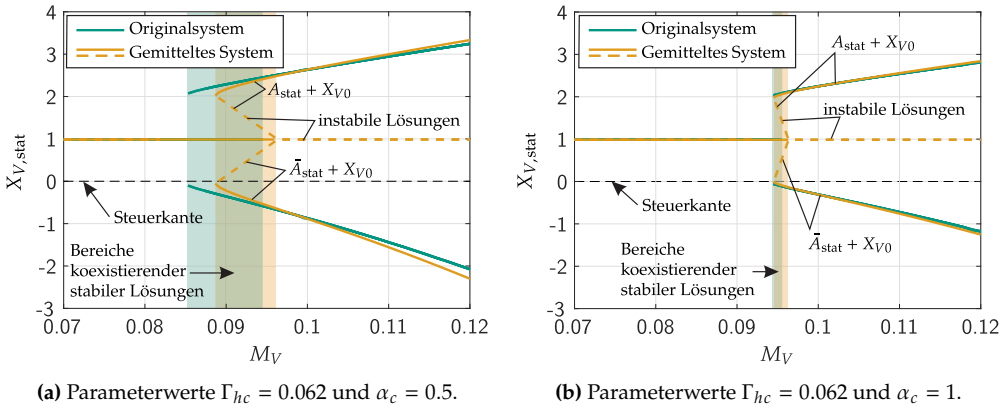


Abbildung 7.13: Vergleich der Grenzzyklusschwingungen des Originalsystems und des gemittelten Systems unter Variation des kleinen Parameters $\varepsilon = M_V$. Instabile Grenzzyklusschwingungen treten auch im Originalsystem auf. Sie sind hier nicht dargestellt, weil sie nicht ohne besondere numerische Methoden gefunden werden können.

Das zugehörige Bifurkationsdiagramm mit dem Bifurkationsparameter ε ist in Abb. 7.13a dargestellt. Es besteht insgesamt eine gute Übereinstimmung mit den Simulationsergebnissen des Originalsystems. Etwas größere Abweichungen ergeben sich im Hinblick auf die Positionen der Bifurkationspunkte, also der Stabilitäts- und Existenzgrenzen der stationären Lösungen.

Abb. 7.13b zeigt das gleiche Diagramm mit einer verdoppelten Blendenfläche A_c (dimensionsloser Parameter α_c). Hier sind die Abweichungen zwischen dem gemitteltem und dem Originalsystem sehr viel geringer. Die Güte der Approximation wird also nicht ausschließlich durch die Werte der kleinen Parameter μ und ε beeinflusst. Durch die Vergrößerung von α_c schrumpft der Bereich koexistierender stabiler Lösungen deutlich. Das ist durch die Proportionalität der Parameter N_{v2} , N_{v3} , N_{v4} und \bar{N}_{v4} und damit der entsprechenden Nichtlinearitäten zu $1/\alpha_c^2$ zu erklären, vgl. Gleichungen (7.109) bis (7.112).

Eine Vergrößerung des kleinen Parameters $\mu = \Gamma_{hc} = 0.1$ führt dazu, dass das Gebiet koexistierender stabiler Lösungen wieder größer wird, siehe Abb. 7.14. Weiterhin werden die Abweichungen zwischen den Ergebnissen des gemittelten und des Originalsystems deutlich größer. Dies betrifft insbesondere die Positionen der Bifurkationspunkte. Die qualitative Phasenraumstruktur wird jedoch weiterhin sehr gut abgebildet.

Zusammenfassend hat die Stabilitätsanalyse in Gl. (7.127) gezeigt, dass die Stabilität der Gleichgewichtslage durch das Einbringen der Dämpfungsblende nicht beeinflusst wird. Gleichzeitig vergrößert sich das Existenzgebiet stabile Grenzzyklusschwingungen. Daraus ist die Schlussfolgerung abzuleiten, dass zumindest in der Nähe der Stabilitätsgrenze die Amplituden der Grenzzyklusschwingungen durch die Dämpfungsblende nicht ver-

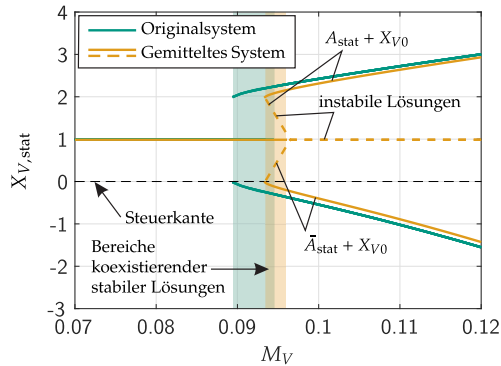


Abbildung 7.14: Vergleich der Grenzyklusschwingungen des Originalsystems und des gemittelten Systems unter Variation des kleinen Parameters $\varepsilon = M_V$. Parameterwerte $\Gamma_{hc} = 0.1$ und $\alpha_c = 1$. Instabile Grenzyklusschwingungen treten auch im Originalsystem auf. Sie sind hier nicht dargestellt, weil sie nicht ohne besondere numerische Methoden gefunden werden können.

ringert werden. Für die praktische Anwendung sind dies ausschließlich unerwünschte Einflüsse. Diese unerwünschten Effekte werden mit zunehmender Dämpfungswirkung und damit abnehmender Blendenfläche sogar größer, weil die Nichtlinearitäten und damit das Existenzgebiet des instabilen Grenzyklus mit kleiner werdender Blendenfläche (proportional zu $1/A_c$) zunehmen.

7.3 Kritisch überdecktes Ventil

Bezüglich der Analyse des Ventilkreislaufs mit Druckquelle und 3/3-Proportional-Wegeventil verbleiben nach der Untersuchung des verallgemeinerten Ventilkreislaufs in Kap. 5 noch offene Fragestellungen.

Nachdem bislang ausschließlich Verbraucher modelliert wurden, welche im stationären Betrieb einen nicht verschwindenden Volumenstrom $q_C > 0$ konsumieren, bezieht sich die erste Fragestellung auf den Grenzfall $q_C \rightarrow 0$. Während bei positivem Verbrauchervolumenstrom $q_C > 0$ die Steuercante zur Druckquelle hin im stationären Betrieb geöffnet ist ($x_{V,stat} > u_V$), ist das Ventil im Grenzfall $q_C = 0$ im stationären Betrieb geschlossen ($u_T < x_{V,stat} < u_V$). Die Gleichgewichtslage wird in diesem Fall indefinit. Die möglichen Gleichgewichtslagen entsprechen dabei genau dem Überdeckungsbereich und sind alle stabil. Dieser Fall wird bereits in [63] beschrieben.

Die zweite Fragestellung bezieht sich auf den Grenzfall von Ventilen mit kritischer Überdeckung $u_T - u_V \rightarrow 0$. In diesem Fall wird die Position und die Stabilität der Gleichgewichtslage gegenüber Ventilen mit positiver Überdeckung nicht verändert. Weil jedoch beide Steuercanten genau gegensätzlich öffnen und schließen, existiert ein

mit den dimensionslosen Variablen und Parametern nach Gl. (4.17). Die Gleichungen in den Abweichungen

$$0 = \varepsilon \xi_V''' + \xi_V'' + \begin{cases} \varepsilon K_s \xi_V' + \omega_s^2 \xi_V + \varepsilon N_s \xi_V' \xi_V, & \xi_V + X_{V0} > 0 \\ \varepsilon \bar{K}_s \xi_V' + \bar{\omega}_s^2 \xi_V + \varepsilon \bar{N}_s \xi_V' \xi_V + \bar{Q}_s, & \xi_V + X_{V0} \leq 0 \end{cases}, \quad (7.131)$$

werden mit $\xi_V = X_V - X_{V0}$ und mittels einer Reihenentwicklung um die Gleichgewichtslage gebildet. Die skalierten Parameter K_s , ω_s , N_s und κ_T werden entsprechend den Gleichungen (4.29) bis (4.34) berechnet. Außerdem gelten die Berechnungsformeln

$$\bar{\kappa}_T = \frac{\alpha_C - \beta_V X_{V0}}{2\sqrt{P_{10}}} \quad (7.132)$$

$$\varepsilon \bar{K}_s = K_V + \alpha_V + \bar{\kappa}_T \quad (7.133)$$

$$\bar{\omega}_s^2 = \bar{\kappa}_T K_V + \beta_V \sqrt{P_{10}} \quad (7.134)$$

$$\bar{Q}_s = -2\bar{\kappa}_T P_{10} \quad (7.135)$$

$$\varepsilon \bar{N}_s = \frac{K_V \bar{\kappa}_T}{2P_{10}} - \frac{\beta_V}{2\sqrt{P_{10}}}. \quad (7.136)$$

Durch Nullsetzen von ε in Gl. (7.131) erhält man eine Näherung

$$\mathcal{M}_0 = \left\{ [\xi_1, \xi_2, \eta]^T = \mathbb{R}^3 : \eta = \begin{cases} -\omega_s^2 \xi_1, & \xi_1 + X_{V0} > 0 \\ -\bar{\omega}_s^2 \xi_1 - \bar{Q}_s, & \xi_1 + X_{V0} \leq 0 \end{cases} \right\} \quad (7.137)$$

der langsamen Mannigfaltigkeit \mathcal{M}_ε . Dabei sind wie zuvor $[\xi_1, \xi_2]^T = [\xi_V, \xi_V']^T$ die langsamen Variablen und $\eta = \xi_V''$ ist die schnelle Variable. Der Nachweis der global asymptotischen Stabilität dieser Mannigfaltigkeit ist identisch zu dem in Abschnitt 5.1 ausgeführten Stabilitätsnachweis und wird hier nicht explizit ausgeführt. Eine Reihenentwicklung der schnellen Variable $\eta \approx \tilde{\eta} = \eta_0 + \varepsilon \eta_1$ liefert mit der Gl. (7.131) die Näherungen

$$\eta_0 = \begin{cases} -\omega_s^2 \xi_1, & \xi_1 + X_{V0} > 0 \\ -\bar{\omega}_s^2 \xi_1 - \bar{Q}_s, & \xi_1 + X_{V0} \leq 0 \end{cases} \quad (7.138)$$

$$\eta_1 = \begin{cases} (\omega_s^2 - K_s) \xi_2 - N_s \xi_1 \xi_2, & \xi_1 + X_{V0} > 0 \\ (\bar{\omega}_s^2 - \bar{K}_s) \xi_2 - \bar{N}_s \xi_1 \xi_2, & \xi_1 + X_{V0} \leq 0 \end{cases} \quad (7.139)$$

bis zur ersten Ordnung, aus denen das ordnungsreduzierte regulär gestörte System

$$\xi_1' = \xi_2 \quad (7.140)$$

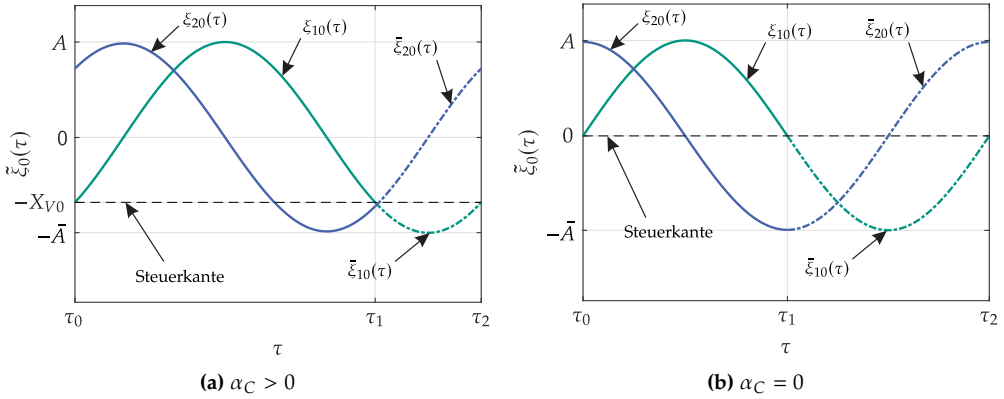


Abbildung 7.16: Verlauf der Grundlösungen $\tilde{\xi}_{10}(\tau)$ und $\tilde{\xi}_{20}(\tau)$ innerhalb einer Periode für den Fall $A > X_{V0}$, bei dem die Schwingungen die Steuerkante $\xi_V = -X_{V0}$ überschreiten.

$$\xi_2' = \eta_0 + \varepsilon \eta_1 \quad (7.141)$$

gebildet wird. Die abschnittsweise definierte Grundlösung wird nun nicht mehr aus einer trigonometrischen und einer quadratischen, sondern aus zwei trigonometrischen Funktionen

$$\tilde{\xi}_{10}(\tau) = \begin{cases} \xi_{10}(\tau) = A \cos(\omega_s \tau + \alpha), & \tau_0 < \tau \leq \tau_1 \\ \bar{\xi}_{10}(\tau) = \bar{A} \cos(\bar{\omega}_s \tau + \bar{\alpha}) - \frac{\bar{Q}_s}{\bar{\omega}_s^2}, & \tau_1 < \tau \leq \tau_2 \end{cases} \quad (7.142)$$

unterschiedlicher Amplitude und Kreisfrequenz gebildet, vgl. Abb. 7.16a. Die unbekanntenen Schaltzeiten und Konstanten

$$\tau_0 = \frac{-\alpha - \pi + C}{\omega_s} \quad (7.143)$$

$$\tau_1 = \frac{-\alpha + \pi - C}{\omega_s} \quad (7.144)$$

$$\tau_2 = \tau_1 + \frac{2}{\bar{\omega}_s} \left(\pi - \arccos \left(\frac{-X_{V0}^2 \bar{\omega}_s + \bar{Q}_s}{S} \right) \right) \quad (7.145)$$

$$\bar{A} = \frac{S}{\bar{\omega}_s^2} \quad (7.146)$$

$$\bar{\alpha} = \arccos \left(\frac{-X_{V0}^2 \bar{\omega}_s^2 + \bar{Q}_s}{S} \right) - \frac{\bar{\omega}_s}{\omega_s} (\pi - \alpha - C) \quad (7.147)$$

werden mit den Abkürzungen

$$C = \arccos\left(\frac{X_{V0}}{A}\right) \quad (7.148)$$

$$S = \sqrt{X_{V0}^2 \bar{\omega}_s^4 + (\omega_s^2(A^2 - X_{V0}^2) - 2\bar{Q}_s X_{V0}) \bar{\omega}_s^2 + \bar{Q}_s^2} \quad (7.149)$$

und mittels der Übergangsbedingungen an den Schaltzeiten

$$\xi_{10}(\tau_0) = -X_{V0} \quad (7.150)$$

$$\xi_{10}(\tau_1) = -X_{V0} \quad (7.151)$$

$$\bar{\xi}_{20}(\tau_1) = \bar{\xi}_{20}(\tau_1) \quad (7.152)$$

$$\bar{\xi}_{10}(\tau_1) = -X_{V0} \quad (7.153)$$

$$\bar{\xi}_{10}(\tau_2) = -X_{V0}, \quad (7.154)$$

formuliert. Damit wird ein System in Standardform und daraus die gemittelten Gleichungen in der Form

$$A' = F_A(A) = \varepsilon \begin{cases} \hat{F}_A(A), & A > X_{V0} \\ \check{F}_A(A), & A \leq X_{V0} \end{cases} \quad (7.155)$$

$$\alpha' = F_\alpha(A) = \varepsilon \begin{cases} \hat{F}_\alpha(A), & A > X_{V0} \\ \check{F}_\alpha(A), & A \leq X_{V0} \end{cases} \quad (7.156)$$

mit den Funktionen

$$\begin{aligned} \hat{F}_A = \varepsilon & \left(3A\omega_s^2 \bar{\omega}_s^4 \left(\arccos\left(\frac{\bar{Q}_s - X_{V0}\bar{\omega}_s^2}{S}\right) + (C - \pi)\frac{\bar{\omega}_s}{\omega_s} - \pi \right) \right)^{-1} \left[\frac{3}{2} (\bar{\omega}_s^4 - \bar{K}_s \bar{\omega}_s^2 \right. \\ & + \bar{N}_s \bar{Q}_s) S^2 \arccos\left(\frac{\bar{Q}_s - X_{V0}\bar{\omega}_s^2}{S}\right) + \bar{\omega}_s \omega_s \sqrt{A^2 - X_{V0}^2} \left[\frac{3}{2} (X_{V0} \bar{\omega}_s^6 - \bar{N}_s \bar{Q}_s^2) \right. \\ & - \left(\frac{3}{2} X_{V0} (\omega_s^2 + K_s - \bar{K}_s) - N_s (A^2 - X_{V0}^2) + \frac{3}{2} \bar{Q}_s \right) \bar{\omega}_s^4 - \left(\bar{N}_s (A^2 - X_{V0}^2) \omega_s^2 \right. \\ & - \left. \frac{3}{2} \bar{Q}_s (X_{V0} \bar{N}_s + \bar{K}_s) \right) \bar{\omega}_s^2 \left. - \frac{3}{2} \pi (X_{V0}^2 \bar{\omega}_s^8 + \bar{N}_s \bar{Q}_s^3) - \frac{3}{2} \pi \bar{\omega}_s^6 ((A^2 - X_{V0}^2) \omega_s^2 \right. \\ & - X_{V0}^2 \bar{K}_s - 2\bar{Q}_s X_{V0}) + \frac{3}{2} A^2 \omega_s (\omega_s^2 - K_s) (C - \pi) \bar{\omega}_s^5 + \frac{3}{2} \pi ((A^2 - X_{V0}^2) \bar{K}_s \omega_s^2 \\ & - \bar{Q}_s (\bar{N}_s X_{V0}^2 + 2X_{V0} \bar{K}_s + \bar{Q}_s)) \bar{\omega}_s^4 - \left. \frac{3}{2} \pi \bar{Q}_s \bar{\omega}_s^2 (\bar{N}_s (A^2 - X_{V0}^2) \omega_s^2 \right. \\ & \left. \left. - \bar{Q}_s (2X_{V0} \bar{N}_s + \bar{K}_s) \right) \right] \quad (7.157) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{F}_\alpha = \varepsilon & \left(6A^2 \omega_s^2 \bar{\omega}_s^4 \left(\arccos \left(\frac{\bar{Q}_s - X_{V0} \bar{\omega}_s^2}{S} \right) + (C - \pi) \frac{\bar{\omega}_s}{\omega_s} - \pi \right) (A^2 - X_{V0}^2) S^2 \right)^{-1} \\
 & \times 2 \left(A^2 \omega_s^2 (\bar{Q}_s - X_{V0} \bar{\omega}_s^2) + X_{V0} S^2 \right) \left[\frac{3}{2} \sqrt{A^2 - X_{V0}^2} S^2 (\bar{K}_s \bar{\omega}_s^2 - \bar{\omega}_s^4 - \bar{N}_s \bar{Q}_s) \right. \\
 & \times \left(\arccos \left(\frac{\bar{Q}_s - X_{V0} \bar{\omega}_s^2}{S} \right) - \pi \right) + (A^2 - X_{V0}^2) \bar{\omega}_s \omega_s \left(-\frac{3}{2} X_{V0} \bar{\omega}_s^6 + \frac{3}{2} \bar{Q}_s^2 \bar{N}_s \right. \\
 & \left. \left. + \frac{3}{2} (X_{V0} \bar{K}_s + \bar{Q}_s) \bar{\omega}_s^4 + (A^2 - X_{V0}^2) \bar{N}_s \bar{\omega}_s^2 \omega_s^2 - \frac{3}{2} \bar{Q}_s (X_{V0} \bar{N}_s + \bar{K}_s) \bar{\omega}_s^2 \right) \right]
 \end{aligned} \tag{7.158}$$

$$\check{F}_A = -\varepsilon \frac{A}{2} (K_s - \omega_s^2) \tag{7.159}$$

$$\check{F}_\alpha = 0 \tag{7.160}$$

berechnet. Dabei sind die Funktionen $\check{F}_A(A)$ und $\check{F}_\alpha(A)$ gegenüber dem Ventil mit positiver Überdeckung unverändert und entsprechen den rechten Seiten der Gleichungen (5.26) und (5.27).

Die Analyse der gemittelten Gleichungen deckt auf, dass die Phasenraumstruktur vom Verhältnis zwischen dem Versorgungsdruck P_Q und dem stationären Systemdruck P_{10} bzw. der dimensionslosen Steuerkraft F_c abhängt, vgl. Abb. 7.16. Für $P_Q \gtrsim 2F_c$ ergibt sich qualitativ die selbe Phasenraumstruktur wie beim positiv überdeckten Ventil. Der Fall $P_Q \lesssim 2F_c$ beinhaltet eine komplexere Dynamik, die auch instabile Grenzzyklen bzw. verschiedene koexistierende stabile Lösungen beinhaltet. Die Abbildungen 7.17a und

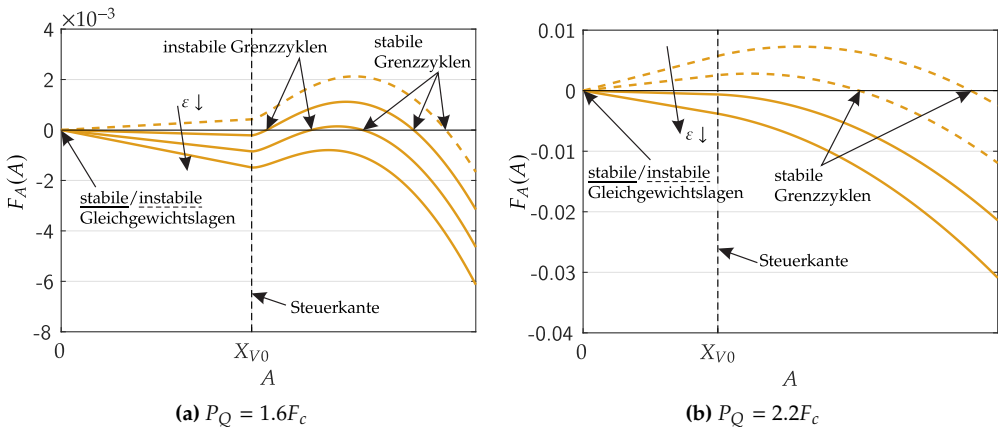
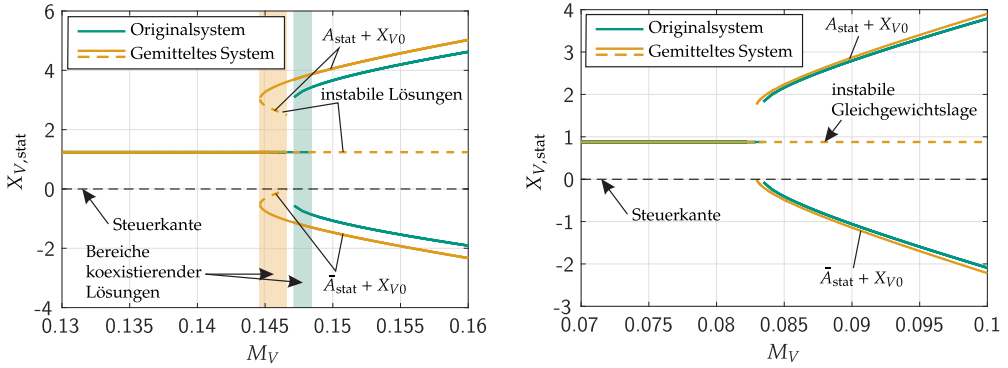


Abbildung 7.17: Rechte Seite der gemittelten Gleichungen (5.26) und (7.157) in Abhängigkeit der Amplitude für unterschiedliche ε . Nullstellen entsprechen stationären Lösungen. Die Steigung an den jeweiligen Nullstellen bestimmt die Stabilität der Lösung.



(a) Minima und Maxima der stationären Grenzzyklusschwingungen, $P_Q = 1.6F_c$

(b) Minima und Maxima der stationären Grenzzyklusschwingungen, $P_Q = 2.2F_c$.

Abbildung 7.18: Vergleich der Grenzzyklusschwingungen des Originalsystems und des gemittelten Systems unter Variation des kleinen Parameters $\varepsilon = M_V$. Instabile Grenzzyklusschwingungen treten auch im Originalsystem auf. Sie sind hier nicht dargestellt, weil sie nicht ohne besondere numerische Methoden gefunden werden können.

7.17b illustrieren diese beiden Fälle mittels der Parameterkombinationen $P_Q = 1.6F_c$ und $P_Q = 2.2F_c$, wobei die Nullstellen der rechten Seite der gemittelten Gleichungen die stationären Lösungen repräsentieren.

In der Abb. 7.18 sind die Bifurkationsdiagramme für die selben beiden Parameterkombinationen mit dem Bifurkationsparameter ε dargestellt. Die Verifizierung des asymptotischen Verfahrens erfolgt durch einen Vergleich mit den stabilen Lösungen des Originalsystems. Weil das Verhältnis P_Q/F_c die Stabilitätsgrenze der Gleichgewichtslage stark beeinflusst und weil jeweils nur der Bereich um die Stabilitätsgrenzen von Interesse ist, werden die Bifurkationsdiagramme mit unterschiedlichen Wertebereichen von $M_V \in [0.13, 0.16]$ bzw. $M_V \in [0.07, 0.1]$ dargestellt. Dies erklärt, warum sich im Fall $P_Q = 2.2F_c$ eine deutlich bessere Übereinstimmung zwischen dem gemittelten und dem Originalsystem ergibt.

Aus den bisherigen Ergebnissen wird nun der Grenzfall $q_C = 0$ abgeleitet, welcher mittels $\alpha_C = 0$ modelliert wird. Für diesen Fall liegt die Gleichgewichtslage auf der Steuerkante, es gilt also $X_{V0} = 0$, woraus $P_{10} = F_c$ folgt. Für die skalierten Parameter ergibt sich $\kappa_T = \bar{\kappa}_T = 0$, was auf $\bar{K}_s = K_s$ und $\bar{Q}_s = 0$ führt. Dementsprechend vereinfacht sich die reduzierte Dynamik

$$0 = \xi_V'' + \begin{cases} (K_s - \omega_s^2)\xi_V' + \omega_s^2\xi_V + N_s\xi_V\xi_V', & \xi_V > 0 \\ (K_s - \bar{\omega}_s^2)\xi_V' + \bar{\omega}_s^2\xi_V + \bar{N}_s\xi_V\xi_V', & \xi_V \leq 0 \end{cases} \quad (7.161)$$

zu einer strukturell symmetrischen Darstellung. Die abschnittsweise definierte Grundlösung

$$\tilde{\xi}_{10}(\tau) = \begin{cases} \xi_{10}(\tau) = A \cos(\omega_s \tau + \alpha), & \tau_0 < \tau \leq \tau_1 \\ \bar{\xi}_{10}(\tau) = \bar{A} \cos(\bar{\omega}_s \tau + \bar{\alpha}), & \tau_1 < \tau \leq \tau_2 \end{cases} \quad (7.162)$$

ist in Abb. 7.16b dargestellt. Durch entsprechende Periodizitäts- und Stetigkeitsbedingungen an den Schaltübergängen werden die Unbekannten

$$\tau_0 = \frac{-2\alpha - \pi}{2\omega_s} \quad (7.163)$$

$$\tau_1 = \frac{-2\alpha + \pi}{2\omega_s} \quad (7.164)$$

$$\tau_2 = \tau_1 + \frac{\pi}{\bar{\omega}_s} \quad (7.165)$$

$$\bar{A} = A \frac{\omega_s}{\bar{\omega}_s^2} \quad (7.166)$$

$$\bar{\alpha} = \frac{\pi}{2} - \frac{\bar{\omega}_s}{2\omega_s}(\pi - 2\alpha) \quad (7.167)$$

berechnet. Damit wird ein System in Standardform formuliert, aus dem die gemittelten Gleichungen

$$A' = -\varepsilon A^2 \frac{2(N_s \bar{\omega}_s^2 - \bar{N}_s \omega_s^2)}{3\bar{\omega}_s \pi (\omega_s + \bar{\omega}_s)} - \varepsilon A \frac{K_s - \omega_s \bar{\omega}_s}{2} =: F_{A0}(A) \quad (7.168)$$

$$\alpha' = 0 \quad (7.169)$$

berechnet werden, welche eine quadratische Nichtlinearität beinhalten. Wegen $X_{V0} = 0$ ist eine Fallunterscheidung zwischen $A > X_{V0}$ und $A \leq X_{V0}$ hier nicht erforderlich. Anhand des linearen Terms der gemittelten Gleichung kann die Stabilitätsbedingung

$$K_s - \omega_s \bar{\omega}_s > 0 \quad (7.170)$$

für die Stabilität der Gleichgewichtslage direkt abgelesen werden. Vergleicht man diese Bedingung mit den Stabilitätsbedingungen

$$K_s - \omega_s^2 > 0 \quad (7.171)$$

$$K_s - \bar{\omega}_s^2 > 0, \quad (7.172)$$

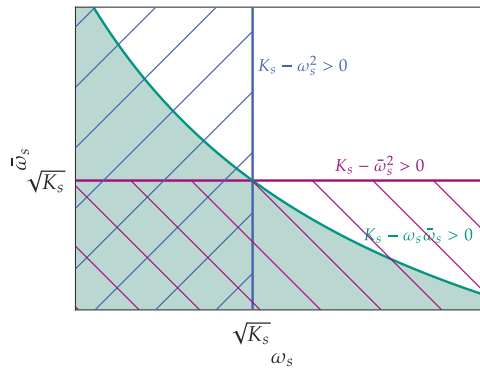


Abbildung 7.19: Stabilitätskarte des Ventils mit kritischer Überdeckung und $A_C = 0$ in der ω_s - $\bar{\omega}_s$ -Ebene.

welche sich aus der separaten Betrachtung der einzelnen Schaltzustände ergeben würden (diese können direkt aus Gl. (7.161) abgelesen werden), erhält man die Beziehungen

$$|K_s - \omega_s^2| \geq |K_s - \omega_s \bar{\omega}_s| \geq |K_s - \bar{\omega}_s^2| \quad (7.173)$$

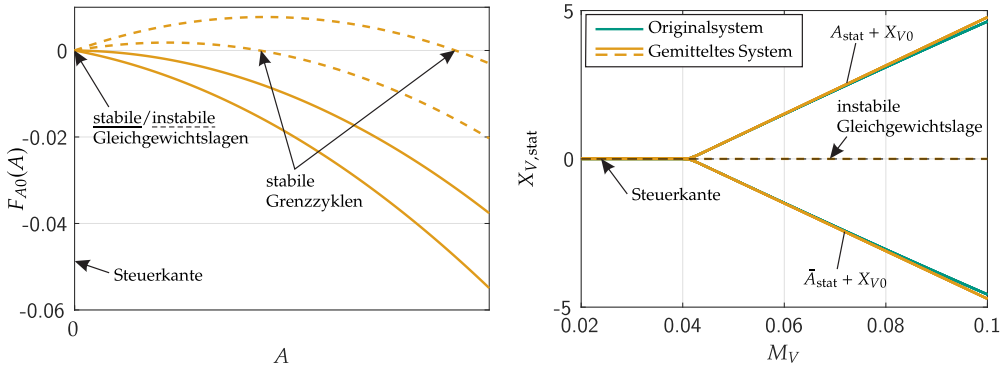
oder

$$|K_s - \omega_s^2| \leq |K_s - \omega_s \bar{\omega}_s| \leq |K_s - \bar{\omega}_s^2|. \quad (7.174)$$

Die Stabilitätsgrenze des kritisch überdeckten Ventils liegt also immer zwischen den Grenzen, welche sich aus den einzelnen Schaltzuständen ergeben würden. Dieser Sachverhalt ist in Abb. 7.19 als Stabilitätskarte in der ω_s - $\bar{\omega}_s$ -Ebene dargestellt.

Die Phasenraumstruktur, welche durch die rechte Seite der gemittelten Gleichung (7.168), also durch die Funktion $F_{A0}(A)$ repräsentiert wird, ist in Abb. 7.20a dargestellt. Es ergibt sich qualitativ das gleiche Bild wie für den Fall $\alpha_C > 0$ und $P_Q > 2F_C$. Die Übereinstimmungen mit den Ergebnissen des Originalsystems sind sehr gut, vgl. Abb. 7.20b. Dies liegt jedoch vor Allem daran, dass ausschließlich der Bereich um die Stabilitätsgrenze dargestellt ist, welche sich bei sehr kleinen Werten des kleinen Parameters ε befindet.

Bezüglich der Erkenntnisse für die reale Anwendung kann abschließend festgestellt werden, dass sich beim Übergang vom positiv überdeckten zum kritisch überdeckten Ventil bei nicht verschwindendem Verbrauchervolumenstrom die Position und die Stabilität der Gleichgewichtslage nicht ändert. Für einen verschwindendem Verbrauchervolumenstrom verschiebt sich die Gleichgewichtslage auf die Steuerkante. Die Stabilität kann für diesen Fall nicht mehr mit Standardmethoden der Stabilitätsanalyse untersucht werden. Aus den Gleichungen (7.173) und (7.174) folgt jedoch, dass durch die separate Betrachtung der beiden Schaltzustände eine obere und untere Schranke und damit eine



(a) Rechte Seite der gemittelten Gl. (7.168) in Abhängigkeit der Amplitude für unterschiedliche ε . Nullstellen entsprechen stationären Lösungen. Die Steigung an den jeweiligen Nullstellen bestimmt die Stabilität der Lösung.

(b) Vergleich der Grenzzyklusschwingungen des Originalsystems und des gemittelten Systems unter Variation des kleinen Parameters $\varepsilon = M_V$.

Abbildung 7.20: Phasenraumstruktur des kritisch überdeckten Ventils für den Fall $\alpha_C = 0$.

Abschätzung für die Stabilitätsgrenze berechnet werden kann. Bezüglich stationärer periodischer Lösungen ist für die praktische Anwendung ein Betrieb vorteilhaft, bei dem der Versorgungsdruck mindestens doppelt so groß ist wie der zu regelnde Systemdruck. Dem liegt zugrunde, dass das Stabilitätsgebiet bei steigendem Versorgungsdruck vergrößert wird und dass in diesem Fall keine instabilen Grenzzyklen existieren, welche das Einzugsgebiet stabiler Gleichgewichtslagen begrenzen.

8 Nichtlineare Regelung mit reduzierten Modellen

Das Funktionsprinzip der in dieser Arbeit untersuchten Ventilkreisläufe beruht auf einer physischen Druckrückführung und einem damit verbundenen Selbstregelungsmechanismus. Als Sollvorgabe für den Systemausgang sind in dieser Art der Regelung jedoch nur stationäre Zustände vorgesehen. Komplexere Regelungsaufgaben wie die Vorgabe zeitabhängiger Solltrajektorien oder die Beeinflussung des Einschwingverhaltens zwischen verschiedenen stationären Zuständen sind nur eingeschränkt möglich. Für diese komplexeren Regelungsaufgaben werden im Allgemeinen Servoventile eingesetzt, weil sie aufgrund einer kritischen Überdeckung einen nahezu linearen Zusammenhang zwischen Kolbenverschiebung und Volumenstrom über die Steuerkante bedingen und dadurch einen einfacheren Zugang vor Allem für lineare Regelungsalgorithmen bieten. Sie sind jedoch wesentlich teurer in der Herstellung und benötigen kontrollierte Betriebsbedingungen, weil sie anfälliger für Verschmutzungen sind.

Mittels nichtlinearer Regelungskonzepte ist es möglich, komplexere Regelungsaufgaben auch mit Proportionalventilen zu realisieren. In diesem Zusammenhang hat sich das Verfahren der Eingangs-Ausgangs-Linearisierung als geeignet für die Regelung hydraulischer Systeme im Allgemeinen [36, 42, 66, 84] und die hier untersuchten Ventilkreisläufe im Speziellen [133] erwiesen. Das Verfahren erlaubt die Vorgabe zeitvarianter Solltrajektorien. Es hat sich insbesondere gezeigt, dass das Umschaltverhalten von Ventilen problemlos in die Regelung integriert werden kann und keine Probleme im Hinblick auf die Stabilität oder die Robustheit der Regelung verursacht [64, 66].

Das Verfahren der Eingangs-Ausgangs-Linearisierung beruht auf einer globalen Kompensation aller im System enthaltenen Nichtlinearitäten. Dies wird mittels einer Variablentransformation auf die Ausgangsgrößen sowie der Etablierung eines neuen synthetischen Eingangs realisiert. Durch die Variablentransformation wird zwischen dem synthetischen Eingang und dem Systemausgang ein lineares Übertragungsverhalten hergestellt.

Die Funktionalität und Güte der Regelung wird naturgemäß stark von dem zugrundeliegenden Modell beeinflusst, weshalb in diesem Zusammenhang ein niedriger Abstrak-

tionsgrad zielführend ist. Gleichzeitig sind in vielen realen Anwendungen aufgrund beschränkter Rechenkapazitäten möglichst rechenzeiteffiziente Modelle wünschenswert. Hier ist oftmals ein Zielkonflikt zwischen Modellgüte und Rechenzeiteffizienz des zugrundeliegenden Modells aufzulösen. Oft ist es sinnvoll, in einem ersten Schritt ein komplexes Modell zu entwickeln und im zweiten Schritt dieses zu reduzieren. Es handelt sich hier also um eine klassische Fragestellung der Modellreduktion mit dem Ziel, die höchsten Systemfrequenzen im Modell zu eliminieren und dabei stationäre und langsame dynamische Prozesse möglichst wenig zu beeinflussen.

Im Kontext der in dieser Arbeit untersuchten Ventilkreisläufe wurde in den Abschnitten 5.2 und 7.2 gezeigt, dass schnelle dynamische Prozesse mit Trägheiten kleiner Ventilmassen sowie dem Druckaufbau in kleinen Kapazitäten assoziiert ist. Die Approximation der entsprechenden schnellen Variablen mittels der singulären Störungsrechnung entspricht also genau dem oben formulierten Anforderungsprofil der Modellreduktion. Dieses Kapitel widmet sich der Fragestellung, in wie weit sich die bereits entwickelten reduzierten Modelle als Grundlage für die Ableitung eines modellbasierten Regelungskonzepts auf Basis der Eingangs-Ausgangs-Linearisierung eignen.

Dafür wird in Abschnitt 8.1 zunächst analysiert, ob das Modell mit reduzierter Ventilträglichkeit aus Abschnitt 5.2, welches eigentlich für die asymptotische Analyse stationärer Lösungen entwickelt worden ist, auch instationäres Systemverhalten gut approximieren kann. Anschließend wird in Abschnitt 8.2 eine SISO-Regelung des Ventilkreislaufs mit Konstantpumpe und Druckregelventil basierend auf unterschiedlichen Modellvarianten implementiert und die Ergebnisse miteinander verglichen. In Abschnitt 8.3 wird die Fragestellung aus Abschnitt 8.1 für das Modell mit reduzierter Druckdynamik wiederholt. Die Abschnitte 8.4 und 8.5 widmen sich der Diskussion von Singularitäten, welche bei der Ableitung des Regelgesetzes von Ventilkreisläufen mit Dämpfungsbende auftreten.

8.1 Einfluss der reduzierten Ventilträglichkeit auf die instationäre Systemdynamik

Basierend auf dem Ventilkreislauf mit Konstantpumpe und Druckregelventil werden in diesem Abschnitt zwei reduzierte Modelle abgeleitet, um mit diesen die Auswirkungen verschiedener Modellreduktionsvarianten auf die Rechenzeit und das instationäre Systemverhalten systematisch zu untersuchen. Dabei wird in beiden Reduktionsvarianten die Ventilträglichkeit reduziert. Das erste Modell basiert auf der Reduktion der Ventilträglichkeit mittels singulärer Störungsrechnung. Der zweiten Reduktionsvariante liegt die Vernachlässigung der Trägheitskraft in den Systemgleichungen ohne die Anwendung einer formalen Reduktionsstrategie zugrunde.

Die Reduktion der schnellen Dynamik in Abschnitt 5.1 basiert auf der Annahme eines konstanten Steuereingangs f_c . Für die Realisierung komplexerer Regelungsaufgaben

muss diese Annahme revidiert und die Zeitabhängigkeit in der Entwicklung des reduzierten Modells berücksichtigt werden. Deshalb wird gegenüber den Systemgleichungen (4.1) und (4.2) der konstante Steuereingang f_c mit einem zeitabhängigen Teil $u_c(t)$ überlagert. Damit wird die Systemdynamik mittels der Gleichungen

$$m_V \ddot{x}_V + d_V \dot{x}_V + k_V x_V = r_V^2 \pi p_1 - f_c - u_c \quad (8.1)$$

$$C_h \dot{p}_1 = -r_V^2 \pi \dot{x}_V + q_h(x_V, p_1) + q_C(p_1) \quad (8.2)$$

$$y = p_1 \quad (8.3)$$

beschrieben. Als zu regelnde Ausgangsgröße y wird der Systemdruck p_1 definiert. Dieses Modell wird als Modell A_1 bezeichnet und bildet die Grundlage der folgenden Modellreduktionen.

Die erste Reduktionsvariante entspricht weitestgehend dem reduzierten Modell aus Abschnitt 5.1. Jedoch muss für die Anwendung in der Regelung die Zeitabhängigkeit des Steuereingangs in das reduzierte Modell integriert werden. Mit den dimensionslosen Größen aus Gl. (4.17) sowie

$$U_c = \frac{u_c}{d_V \omega_0 \tilde{x}_{V0}} \quad (8.4)$$

werden die dimensionslosen Systemgleichungen

$$M_V X_V'' + X_V' + K_V X_V = P_1 - F_c - U_c \quad (8.5)$$

$$P_1' = -\alpha_V X_V' + Q_{h,q}(X_V, P_1) - Q_C(P_1) \quad (8.6)$$

$$Y = P_1 \quad (8.7)$$

formuliert. Darin ist Y die dimensionslose Ausgangsgröße. Die dimensionslosen Volumenströme $Q_{h,q}(X_V, P_1)$ und $Q_C(P_1)$ werden anhand der Gleichungen (4.20) und (4.22) berechnet. Mit der Transformation in die Gleichgewichtslage $\xi_V = X_V - X_{V0}$ ergibt sich der Ausdruck

$$\begin{aligned} P_1 &= F_c + U_c + M_V \xi_V'' + \xi_V' + K_V(\xi_V + X_{V0}) \\ &= P_{10} + U_c + M_V \xi_V'' + \xi_V' + K_V \xi_V \end{aligned} \quad (8.8)$$

für den Systemdruck P_1 . Damit kann durch das Einsetzen in die Gl. (8.6) eine Einzeldifferentialgleichung dritter Ordnung formuliert werden, in der nun auch die Zeitableitung

U'_c des zeitabhängigen Steuereingangs U_c enthalten ist. Eine Taylorreihen-Entwicklung um die Gleichgewichtslage und eine Skalierung der Koeffizienten liefert mit $M_V = \varepsilon$

$$0 = \varepsilon \xi_V''' + \xi_V'' + U'_c + \begin{cases} \varepsilon K_s \xi_V' + \omega_s^2 \xi_V + \varepsilon N_s (\xi_V' + U_c) \xi_V + \varepsilon f_s U_c, & \xi_V + X_{V0} > 0 \\ \varepsilon \bar{K}_s \xi_V' - \bar{Q}_s + \varepsilon \bar{f}_s U_c, & \xi_V + X_{V0} \leq 0 \end{cases} \quad (8.9)$$

$$Y = P_{10} + U_c + \varepsilon \xi_V'' + \xi_V' + K_V \xi_V \quad (8.10)$$

eine abschnittsweise definierte Differentialgleichung. In dieser sind nur Terme bis zur Größenordnung $O(\varepsilon)$ berücksichtigt. Gl. (8.9) basiert auf den Annahmen $U_c = O(1)$ und $U'_c = O(1)$. Die Formulierung des Systemausgangs Y folgt direkt aus Gl. (8.8) und ist explizit vom Steuereingang U_c abhängig.

Auffallend ist, dass der Steuereingang U_c nun mit der Größenordnung $O(\varepsilon)$ enthalten ist, wohingegen die Zeitableitung U'_c in der Größenordnung $O(1)$ vorkommt. Die Berechnungsvorschriften für die neu eingeführten skalierten Parameter

$$\varepsilon f_s = \kappa_T \quad (8.11)$$

$$\varepsilon \bar{f}_s = \bar{\kappa}_T \quad (8.12)$$

ergeben sich direkt aus der Taylorreihen-Entwicklung. Eine Reihenentwicklung der schnellen Variable $\xi_V'' = \eta \approx \tilde{\eta} = \eta_0 + \varepsilon \eta_1$ führt mit den entsprechenden Größenordnungsbilanzen

$$\varepsilon^0: \quad \eta_0 + U'_c + \begin{cases} \omega_s^2 \xi_1, & \xi_1 + X_{V0} > 0 \\ -\bar{Q}_s, & \xi_1 + X_{V0} \leq 0 \end{cases} \quad (8.13)$$

$$\varepsilon^1: \quad \eta_0' + \eta_1 + \begin{cases} K_s \xi_2 + N_s (\xi_2 + U_c) \xi_1 + f_s U_c, & \xi_1 + X_{V0} > 0 \\ \bar{K}_s \xi_2 + \bar{f}_s U_c, & \xi_1 + X_{V0} \leq 0 \end{cases} \quad (8.14)$$

und mit den langsamen Variablen $[\xi_V, \xi_V']^T = [\xi_1, \xi_2]^T$ auf die Näherung

$$\tilde{\eta} = -U'_c + \begin{cases} -\omega_s^2 \xi_1 + \varepsilon ((\omega_s^2 - K_s) \xi_2 - N_s (\xi_2 + U_c) \xi_1 - f_s U_c + U_c''), & \xi_1 + X_{V0} > 0 \\ \bar{Q}_s + \varepsilon (-\bar{K}_s \xi_2 - \bar{f}_s U_c + U_c''), & \xi_1 + X_{V0} \leq 0 \end{cases} \quad (8.15)$$

erster Ordnung für die schnelle Variable. Weil die Grundlösung η_0 die Zeitableitung U'_c enthält, beinhaltet die Näherung erster Ordnung nun sogar die zweite Zeitableitung U''_c . Damit ergibt sich über eine Transformation in Zustandsform

$$\xi'_1 = \xi_2 \quad (8.16)$$

$$\xi'_2 = -U'_c$$

$$+ \begin{cases} -\omega_s^2 \xi_1 + \varepsilon ((\omega_s^2 - K_s) \xi_2 - N_s (\xi_2 + U_c) \xi_1 - f_s U_c + U''_c), & \xi_1 + X_{V0} > 0 \\ \bar{Q}_s + \varepsilon (-\bar{K}_s \xi_2 - \bar{f}_s U_c + U''_c), & \xi_1 + X_{V0} \leq 0 \end{cases} \quad (8.17)$$

$$Y = P_{10} + U_c + \xi_2 + K_V \xi_1 - \varepsilon U'_c$$

$$+ \varepsilon \begin{cases} -\omega_s^2 \xi_1 + \varepsilon ((\omega_s^2 - K_s) \xi_2 - N_s (\xi_2 + U_c) \xi_1 - f_s U_c + U''_c), & \xi_1 + X_{V0} > 0 \\ \bar{Q}_s + \varepsilon (-\bar{K}_s \xi_2 - \bar{f}_s U_c + U''_c), & \xi_1 + X_{V0} \leq 0 \end{cases} \quad (8.18)$$

das reduzierte, regulär gestörte System zweiter Ordnung. In der Formulierung des Ausgangs wurde die dimensionslose Kolbenbeschleunigung ξ''_V durch die entsprechende Näherung $\tilde{\eta}$ ersetzt.

Eine Rücktransformation auf dimensionsbehaftete Größen liefert eine zu den Gleichungen (8.16) bis (8.18) strukturell identische Differentialgleichung

$$\ddot{x}_V + \begin{cases} d_V^* \dot{x}_V + k_V^* x_V + n_V^* \left(\dot{x}_V + \frac{1}{d_V} u_c \right) x_V, & x_V > u_V \\ \bar{d}_V^* \dot{x}_V, & x_V \leq u_V \end{cases} = \frac{m_V}{d_V^2} \ddot{u}_c - \frac{1}{d_V} \dot{u}_c + \begin{cases} -f_V^* u_c - f_c^*, & x_V > u_V \\ -\bar{f}_V^* u_c - \bar{f}_c^*, & x_V \leq u_V \end{cases} \quad (8.19)$$

$$y = \frac{1}{r_V^2 \pi} (m_V \ddot{x}_V + d_V \dot{x}_V + k_V x_V + f_c + u_c) = \begin{cases} \frac{d_V - d_V^* m_V}{r_V^2 \pi} \dot{x}_V + \frac{k_V - k_V^* m_V}{r_V^2 \pi} x_V - \frac{n_V^* m_V}{r_V^2 \pi} \left(\dot{x}_V + \frac{1}{d_V} u_c \right) x_V, & x_V > u_V \\ \frac{d_V - d_V^* m_V}{r_V^2 \pi} \dot{x}_V + \frac{k_V}{r_V^2 \pi} x_V, & x_V \leq u_V \end{cases} + \frac{1}{r_V^2 \pi} \left(\frac{m_V^2}{d_V^2} \ddot{u}_c - \frac{m_V}{d_V} \dot{u}_c + f_c + u_c \right) + \frac{m_V}{r_V^2 \pi} \begin{cases} -f_V^* u_c - f_c^*, & x_V > u_V \\ -\bar{f}_V^* u_c - \bar{f}_c^*, & x_V \leq u_V \end{cases} \quad (8.20)$$

Modell	Beschreibung	Zustandsgrößen
A_1	Originalsystem	$[x_V, \dot{x}_V, p_1]^T$
A_2	Modellreduktion mittels singulärer Störungsrechnung	$[x_V, \dot{x}_V]^T$
A_3	Modellreduktion durch Vernachlässigung der Kolbenträgheit $m_V \ddot{x}_V$	$[x_V, p_1]^T$

Tabelle 8.1: Übersicht der Modelle. Die Modellkomplexität nimmt mit steigendem Index ab.

in den Variablen $x_V(t)$ und $\dot{x}_V(t)$. Dieses Modell wird im Folgenden als Modell A_2 bezeichnet. Die neu eingeführten Parameter sind Abkürzungen für die Ausdrücke

$$d_V^* = \left((K_s - \omega_s^2 - X_{V0}N_s) \tilde{x}_{V0} + u_V N_s \right) \frac{m_V \omega_0^2}{d_V \tilde{x}_{V0}} \quad (8.21)$$

$$\bar{d}_V^* = \bar{K}_s \frac{m_V \omega_0^2}{d_V} \quad (8.22)$$

$$k_V^* = \omega_s^2 \omega_0^2 \quad (8.23)$$

$$n_V^* = N_s \frac{m_V \tilde{\omega}_0^2}{d_V \tilde{x}_{V0}} \quad (8.24)$$

$$f_V^* = ((f_s - N_s X_{V0}) \tilde{x}_{V0} - u_V N_s) \frac{m_V \omega_0^2}{d_V^2 \tilde{x}_{V0}} \quad (8.25)$$

$$\bar{f}_V^* = \bar{f}_s \frac{m_V \omega_0^2}{d_V^2} \quad (8.26)$$

$$f_c^* = (-X_{V0} \tilde{x}_{V0} - u_V) \omega_s^2 \omega_0^2 \quad (8.27)$$

$$\bar{f}_c^* = -\bar{Q}_s \omega_0^2 \tilde{x}_{V0} . \quad (8.28)$$

Durch die Vernachlässigung der Ventilträgheit werden die Systemgleichungen

$$d_V \dot{x}_V + k_V x_V = r_V^2 \pi p_1 - f_c - u_c \quad (8.29)$$

$$C_h \dot{p}_1 = -r_V^2 \pi \dot{x}_V + q_h(x_V, p_1) + q_C(p_1) \quad (8.30)$$

$$y = p_1 \quad (8.31)$$

des dritten Modells abgeleitet. Dieses wird im Folgenden als Modell A_3 bezeichnet. Eine Übersicht über die Bezeichnung, die Art der Reduktion und die Zustandsgrößen der eingeführten Modelle ist in Tab. 8.1 gegeben.

Im Folgenden wird untersucht, in wie weit sich die reduzierten Modelle für die Approximation der instationären Systemdynamik eignen. Dies gibt einen ersten Hinweis darauf, ob diese Modelle als Basis für die Entwicklung eines modellbasierten Regelungskonzepts geeignet sind. Dafür wird einerseits das Einschwingverhalten der Modelle

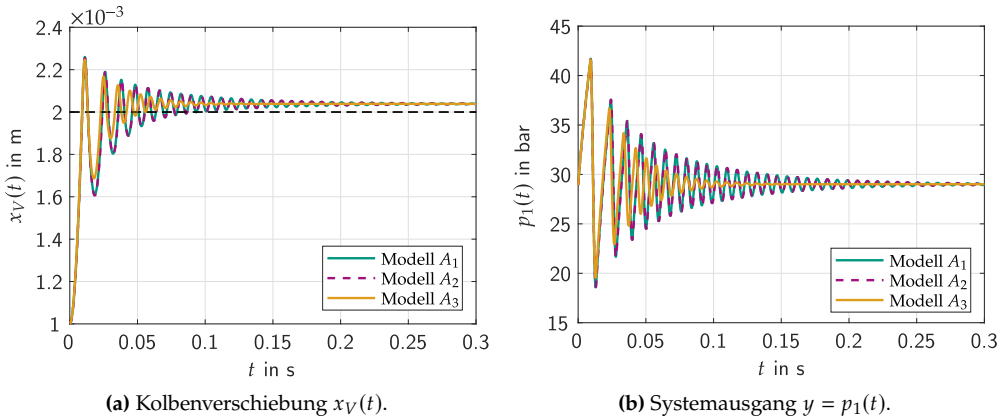


Abbildung 8.1: Vergleich der reduzierten Modelle A_2 und A_3 mit dem Originalsystem A_1 . Steuereingang $u_c(t) = 0\text{ N}$.

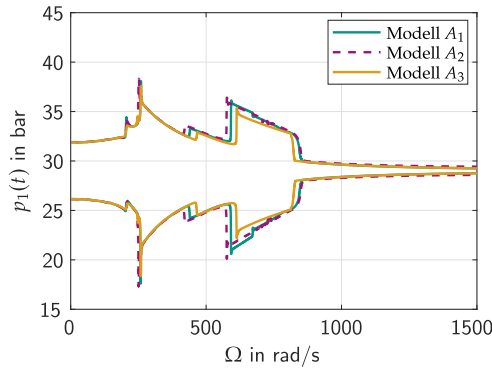


Abbildung 8.2: Vergleich der reduzierten Modelle A_2 und A_3 mit dem Originalsystem A_1 . Steuereingang $u_c(t) = \frac{f_c}{10} \sin(50 \text{ rad/s}^2 \cdot t^2)$.

verglichen und andererseits die Modellantwort auf ein Sweep-Eingangssignal (ein harmonisches Signal mit linear ansteigender Kreisfrequenz). Letzteres gibt Aufschluss über die Frequenzbereiche, in denen die Näherungen das dynamische Verhalten des Originalsystems abbilden können.

In Abb. 8.1 ist das Einschwingverhalten der Modelle für den Fall eines verschwindenden zeitvarianten Steueranteils $u_c(t) = 0$ abgebildet. Zwischen dem Originalsystem (Modell A_1) und dem durch singuläre Störungsrechnung reduzierten System (Modell A_2) sind mit bloßem Auge keine Unterschiede zu erkennen. Im Gegensatz dazu klingt die transiente Schwingung des Modells A_3 wesentlich schneller ab. Es gelten die Parameterwerte aus Tab. 4.1 mit einer erhöhten Dämpfung von 240 N s/m .

Modell	Simulation	Integrator	Integrationsschritte	%
A_1	$u_c(t) = 0 \text{ N}$	ode45	6048	100 %
A_2	$u_c(t) = 0 \text{ N}$	ode45	2580	43 %
A_3	$u_c(t) = 0 \text{ N}$	ode45	1243	21 %
A_1	$u_c(t) = 0 \text{ N}$	ode15s	1982	100 %
A_2	$u_c(t) = 0 \text{ N}$	ode15s	1675	85 %
A_3	$u_c(t) = 0 \text{ N}$	ode15s	922	47 %
A_1	Sweep	ode45	2 365 362	100 %
A_2	Sweep	ode45	398 916	17 %
A_3	Sweep	ode45	292 986	12 %
A_1	Sweep	ode15s	436 597	100 %
A_2	Sweep	ode15s	416 866	95 %
A_3	Sweep	ode15s	244 742	56 %

Tabelle 8.2: Einfluss der Modelle und der Integratoren auf die Anzahl der Integrationsschritte als ein indirektes Maß für die Rechengeschwindigkeit.

In Abb. 8.2 wird als zeitvarianter Teil das Sweep-Signal $u_c(t) = \frac{f_c}{10} \sin(50 \text{ rad/s}^2 \cdot t^2)$ auf den Konstantanteil des Steuereingangs addiert. Die Simulation wird bis zum Zeitpunkt $t = 30 \text{ s}$ ausgeführt, was auf eine maximale Anregungs-Kreisfrequenz von $\Omega = 1500 \text{ rad/s}$ führt. Für eine klare Darstellung der Ergebnisse sind nicht die Zeitsignale, sondern die Amplituden der Systemantworten in Abhängigkeit der Anregungsfrequenz abgebildet. Insgesamt ergibt sich über den gesamten Frequenzbereich eine gute Übereinstimmung zwischen den Modellen. Dabei ist im mittleren Bereich zwischen $\Omega = 550 \dots 850 \text{ rad/s}$ die Näherung des Modells A_2 etwas besser, wohingegen bei höheren Frequenzen $\Omega > 850 \text{ rad/s}$ das Modell A_3 eine bessere Approximation der Amplituden bietet.

Als Indikator für die Rechengeschwindigkeit der drei Modelle ist in Tab. 8.2 die Anzahl der für die Simulationen benötigten Integrationsschritte aufgelistet. Alle Simulationen werden mit der kommerziellen Software *Matlab* durchgeführt. Die Integration erfolgt mittels der Integratoren ode45 und ode15s sowie der Nutzung von Event-functions zur Detektion von Umschalt ereignissen. Der ode45-Integrator ist der Standard-Integrator von *Matlab* und basiert auf einem expliziten Runge-Kutte-Verfahren [115]. Er eignet sich für die Integration nicht-steifer Differentialgleichungen. Der ode15s-Integrator ist ein lineares Mehrschrittverfahren variabler Ordnung und speziell für die Integration steifer Differentialgleichungssysteme sowie differential-algebraischer Gleichungssysteme entwickelt worden [110]. Beide Integratoren beinhalten eine Schrittweitensteuerung. Alle Simulationen werden mit einer relativen Toleranz von 10^{-6} und einer absoluten Toleranz von 10^{-7} durchgeführt.

Die erzielten relativen Einsparungen bezüglich der Anzahl der Integrationsschritte sind naturgemäß sehr stark von dem verwendeten Integrator sowie vom jeweiligen

Eingangssignal u_c abhängig. Die in Tab. 8.2 dargestellten Zahlen können deshalb lediglich einen ersten Hinweis über die möglichen Rechenzeiterparnissen geben, welche sich je nach Anwendungsfall stark unterscheiden werden. Gegenüber dem Modell A_1 werden beim Modell A_2 Einsparungen zwischen 5% und 83% erzielt, wohingegen die Reduktionen beim Modell A_3 sogar zwischen 44% und 88% liegen.

Insgesamt bieten beide Reduktionsvarianten sehr gute Näherungen an das instationäre dynamische Verhalten des Originalsystem bei teils erheblichen Rechenzeiteinsparungen.

8.2 SISO-Regelung des Ventilkreislaufs mit Druckregelventil und Konstantpumpe

Dieser Abschnitt widmet sich der Ableitung verschiedener Regelungsalgorithmen für die Regelung des Modells A_1 auf Basis der Eingangs-Ausgangs-Linearisierung. Dabei wird gezeigt, dass die Ableitung eines Regelgesetzes basierend auf dem reduzierten Modell A_2 nicht möglich ist. Die Regelungsalgorithmen basierend auf den Modellen A_1 und A_3 werden hergeleitet und die Ergebnisse anhand von zwei unterschiedlichen Trajektorienvorgaben miteinander verglichen.

Die Vorgehensweise der Eingangs-Ausgangs-Linearisierung wird zunächst anhand des Modells A_1 demonstriert. Ausführlichere Beschreibungen dieses Regelungskonzepts finden sich z. B. in [1, 55, 107]. Das System bestehend aus den Gleichungen (8.1), (8.2) und (8.3) ist eingangslinär bezüglich des zeitvarianten Systemeingangs u_c und kann durch eine Transformation in Zustandsraumdarstellung in der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}u_c(\mathbf{x}) \quad (8.32)$$

$$y = h(\mathbf{x}) \quad (8.33)$$

mit

$$\mathbf{x} = [x_V, \dot{x}_V, p_1]^\top \quad (8.34)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left[\dot{x}_V, -\frac{1}{m_V} \left(d_V \dot{x}_V + k_V x_V - r_V^2 \pi p_1 + f_c \right), \frac{1}{C_h} \left(-r_V^2 \pi \dot{x}_V + q_{h,q}(x_V, p_1) + q_C(p_1) \right) \right]^\top \quad (8.35)$$

$$\mathbf{g} = \left[0, -\frac{1}{m_V}, 0 \right]^\top \quad (8.36)$$

$$h(\mathbf{x}) = p_1 \quad (8.37)$$

dargestellt werden.

Das Ziel der Regelung ist es, mittels der Eingangs-Ausgangs-Linearisierung eine Berechnungsvorschrift für den Systemeingang u_c zu finden, welche das System in eine lineare Differentialgleichung dritter Ordnung

$$(\ddot{y} - \ddot{y}_d) + a_{32}(\dot{y} - \dot{y}_d) + a_{31}(y - y_d) + a_{30}(y - y_d) = 0 \quad (8.38)$$

überführt, wobei durch y_d eine Solltrajektorie für den Ausgang y vorgegeben werden kann. Gl. (8.38) entspricht einer linearen Fehlerdynamik zwischen dem Ausgang y und der Solltrajektorie y_d , welche durch Vorgabe der Konstanten a_{30} , a_{31} und a_{32} beeinflusst werden kann.

Um diese lineare Form zu erreichen, ist eine Variablentransformation $[z_1, z_2, z_3]^T = [y, \dot{y}, \ddot{y}]^T = \Phi(x_V, \dot{x}_V, p_1)$ auf den Systemausgang y und dessen Zeitableitungen erforderlich. Die ersten beiden Zeitableitungen

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{p}_1 \\ &= \frac{1}{C_h} \left(-r_V^2 \pi \dot{x}_V + q_{h,q}(x_V, p_1) + q_C(p_1) \right) \end{aligned} \quad (8.39)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \ddot{p}_1 \\ &= \frac{1}{C_h} \left(-r_V^2 \pi \ddot{x}_V + \frac{d}{dt} (q_{h,q}(x_V, p_1) + q_C(p_1)) \right) \\ &= -\frac{r_V^2 \pi}{C_h m_V} \left(-d_V \dot{x}_V - k_V x_V + r_V^2 \pi p_1 - f_c - u_c \right) + \frac{1}{C_h} \frac{\partial q_{h,q}(x_V, p_1)}{\partial x_V} \dot{x}_V \\ &\quad + \frac{1}{C_h^2} \left(\frac{\partial q_{h,q}(x_V, p_1)}{\partial p_1} + \frac{\partial q_C(p_1)}{\partial p_1} \right) \left(-r_V^2 \pi \dot{x}_V + q_{h,q}(x_V, p_1) + q_C(p_1) \right) \\ &= \ddot{y}(x_V, \dot{x}_V, p_1, u_c). \end{aligned} \quad (8.40)$$

werden durch das Einsetzen der rechten Seiten der Systemdarstellung, Gl. (8.32) in Abhängigkeit der Zustandsgrößen formuliert. Die Berechnungsvorschrift für \ddot{y} ist explizit vom Systemeingang u_c abhängig. Mit einer wie oben vorgeschlagenen Variablentransformation $[z_1, z_2, z_3]^T = [y, \dot{y}, \ddot{y}]^T$ würde deshalb die transformierte Systemdarstellung explizit die Zeitableitung \dot{u}_c des Systemeingangs beinhalten. Dies impliziert einen relativen Grad von $\delta = 2$ und damit ein nicht-flaches System bezüglich des Systemausgangs y . In diesem Fall ist es sinnvoll, die Zielvorgabe zu modifizieren und eine lineare externen Dynamik zweiter Ordnung in Kombination mit einer eindimensionalen internen Dynamik

$$(\ddot{y} - \ddot{y}_d) + a_{21}(\dot{y} - \dot{y}_d) + a_{20}(y - y_d) = 0 \quad (8.41)$$

$$\dot{z}_3 = \dot{\Phi}_3(\mathbf{x}) \quad (8.42)$$

vorzugeben, in der die Funktion $\Phi_3(x_V, \dot{x}_V, p_1)$ nicht durch Gl. (8.40) gegeben ist, sondern auf anderem Weg bestimmt werden kann. Dabei muss lediglich die Existenz der inversen Abbildung $\Phi^{-1}(\mathbf{z})$ sichergestellt werden. In diesem Fall kann z. B.

$$\Phi_3(\mathbf{x}) = x_V \quad (8.43)$$

gesetzt werden, womit sich die gesamte Zustandstransformation zu

$$\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} p_1 \\ \frac{1}{C_h} (-r_V^2 \pi \dot{x}_V + q_{h,q}(x_V, p_1) + q_C(p_1)) \\ x_V \end{pmatrix} \quad (8.44)$$

$$\mathbf{x} = \Phi^{-1}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} z_3 \\ \frac{1}{r_V^2 \pi} (q_{h,q}(z_3, z_1) + q_C(z_1) - z_2 C_h) \\ z_1 \end{pmatrix} \quad (8.45)$$

ergibt. Weil die interne Dynamik die externe Dynamik nicht beeinflusst, ist die Transformation auf die Darstellung in den Gleichungen (8.41) und (8.42) zielführend, solange die interne Dynamik beschränkt ist [1, 55]. Die durchgeführten numerischen Simulationen haben in diesem Kontext keine Stabilitätsprobleme aufgezeigt. Eine systematische Stabilitätsuntersuchung wird im Rahmen dieser Arbeit nicht behandelt.

In transformierten Koordinaten ergibt sich

$$\dot{z}_1 = z_2 \quad (8.46)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= \frac{1}{C_h} \left(\frac{d_V}{m_V} + \frac{\partial q_{h,q}(z_3, z_1)}{\partial z_3} \frac{1}{r_V^2 \pi} \right) (q_{h,q}(z_3, z_1) + q_C(z_1) - C_h z_2) \\ &\quad + \frac{1}{C_h} \left(\frac{\partial q_{h,q}(z_3, z_1)}{\partial z_1} + \frac{\partial q_C(z_1)}{\partial z_1} \right) z_2 + \frac{r_V^2 \pi}{C_h m_V} (k_V z_3 - r_V^2 \pi z_1 + f_c) + \frac{r_V^2 \pi}{C_h m_V} u_c \\ &=: \alpha(\mathbf{z}) + \beta u_c \end{aligned} \quad (8.47)$$

$$\dot{z}_3 = \frac{1}{r_V^2 \pi} (q_{h,q}(z_3, z_1) + q_C(z_1) - z_2 C_h) \quad (8.48)$$

die sogenannte Nichtlineare Regelungsnormalform. Weil das ursprüngliche System eingangslinear ist, ist auch die transformierte Darstellung linear in u_c . Aus der Forderung

$$\dot{z}_2 = \ddot{y} \stackrel{!}{=} \ddot{y}_d - a_{21}(\dot{y} - \dot{y}_d) - a_{20}(y - y_d) \quad (8.49)$$

entsprechend Gl. (8.41) ergibt sich mit Gl. (8.47) das Regelgesetz

$$u_c^{A_1}(\mathbf{x}) = -\frac{\alpha(\Phi(\mathbf{x})) - \nu(\Phi(\mathbf{x}))}{\beta} \quad (8.50)$$

$$\nu(\mathbf{z}) = \ddot{y}_d - a_{21}(z_2 - \dot{y}_d) - a_{20}(z_1 - y_d) \quad (8.51)$$

basierend auf dem Modell A_1 , mit welchem die Nichtlinearitäten in der externen Dynamik exakt kompensiert werden.

Das gleiche Verfahren soll nun mit dem reduzierten Modell A_2 durchgeführt werden. Dieses liegt nicht als eingangslines System vor, weil die reduzierte Systemdynamik auch die Zeitableitungen des Steuereingangs enthält. Der Systemausgang ist ebenfalls explizit vom Eingangssignal und dessen Ableitungen abhängig, weshalb der relative Grad in diesem Fall $\delta = 0$ ist. Dies bedeutet, dass keine Fehlerdynamik, sondern über die Forderung $y \stackrel{!}{=} y_d$ direkt die Ausgangstrajektorie vorgegeben werden kann. Mit Gl. (8.20) folgt daraus

$$y \stackrel{!}{=} y_d = \begin{cases} \frac{d_V - d_V^* m_V}{r_V^2 \pi} \dot{x}_V + \frac{k_V - k_V^* m_V}{r_V^2 \pi} x_V - \frac{n_V^* m_V}{r_V^2 \pi} \left(\dot{x}_V + \frac{1}{d_V} u_c \right) x_V, & x_V > u_V \\ \frac{d_V - d_V^* m_V}{r_V^2 \pi} \dot{x}_V + \frac{k_V}{r_V^2 \pi} x_V, & x_V \leq u_V \end{cases} \\ + \frac{1}{r_V^2 \pi} \left(\frac{m_V^2}{d_V^2} \ddot{u}_c - \frac{m_V}{d_V} \dot{u}_c + f_c + u_c \right) + \frac{m_V}{r_V^2 \pi} \begin{cases} -f_V^* u_c - f_c^*, & x_V > u_V \\ -\bar{f}_V^* u_c - \bar{f}_c^*, & x_V \leq u_V \end{cases} \quad (8.52)$$

eine abschnittsweise lineare Differentialgleichung in u_c . Zur Berechnung eines Steuereingangs, welcher den Ausgang auf der Solltrajektorie führt, wird diesmal also nicht die Lösung einer linearen algebraischen Gleichung, sondern die Lösung einer Differentialgleichung benötigt. Offensichtlich besitzen die Koeffizienten der zweiten und ersten Zeitableitung jedoch unterschiedliche Vorzeichen, weshalb die triviale Lösung der homogenen Differentialgleichung $u_c = 0$ instabil ist. Das resultierende Regelgesetz wäre deshalb unbeschränkt. Dies verhindert eine auf dem reduzierten Modell A_2 basierende Regelung.

Das Modell A_3 wiederum liegt in einer eingangslinen Form entsprechend den Gleichungen (8.32) und (8.33) mit

$$\mathbf{x} = [x_V, p_1]^\top \quad (8.53)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{d_V} (k_V x_V - r_V^2 \pi p_1 + f_c), \\ \frac{1}{C_h} \left(\frac{r_V^2 \pi}{d_V} (k_V x_V - r_V^2 \pi p_1 + f_c) + q_{h,q}(x_V, p_1) + q_C(p_1) \right) \end{bmatrix}^\top \quad (8.54)$$

$$\mathbf{g} = \left[-\frac{1}{d_V}, \frac{r_V^2 \pi}{d_V C_h} \right]^T \quad (8.55)$$

$$h(\mathbf{x}) = p_1 \quad (8.56)$$

vor. In der ersten Zeitableitung des Ausgangs

$$\dot{y} = \dot{p}_1 = \frac{1}{C_h} \left(\frac{r_V^2 \pi}{d_V} (k_V x_V - r_V^2 \pi + f_c) + q_{h,q}(x_V, p_1) + q_C(p_1) \right) + \frac{r_V^2 \pi}{d_V C_h} u_c \quad (8.57)$$

ist nun bereits das Eingangssignal u_c enthalten, was auf einen relativen Grad von $\delta = 1$ führt. Dies lässt eine lineare Fehlerdynamik

$$(\dot{y} - \dot{y}_d) + a_{10}(y - y_d) \quad (8.58)$$

$$\dot{z}_2 = \dot{\Phi}_2(\mathbf{x}) \quad (8.59)$$

erster Ordnung, ergänzt durch eine interne Dynamik erster Ordnung zu. Das entsprechende Regelgesetz

$$u_c^{A_3}(x_V, p_1) = -k_V x_V + r_V^2 \pi - f_c - \frac{d_V}{r_V^2 \pi} (q_{h,q}(x_V, p_1) + q_C(p_1)) + \frac{d_V C_h}{r_V^2 \pi} v(\mathbf{x}) \quad (8.60)$$

$$v(\mathbf{x}) = \dot{y}_d - a_{10}(p_1 - y_d) \quad (8.61)$$

kann auch ohne explizite Formulierung der Variablentransformation $\Phi(\mathbf{x})$ direkt durch das Einsetzen von Gl. (8.57) in Gl. (8.58) berechnet werden.

Die Grundstruktur der Regelungsstrategie inklusive der zugrundeliegenden Modelle ist in Abb. 8.3 dargestellt. Für die Berechnung des Steuereingangs $u_c(\mathbf{x})$ ist eine Zustandsrückführung erforderlich. Diese wird ebenfalls für die Bestimmung des synthetischen Eingangs $v(\mathbf{x})$ benötigt. Je nach relativem Grad wird dieser entweder anhand von Gl. (8.51) oder anhand von Gl. (8.61) berechnet. Es werden zwei Regelgesetze, basierend auf den Modellen A_1 und A_3 angewendet. Die Regelung basierend auf dem Modell A_2 ist nicht möglich. Der hydraulische Kreislauf wird durch das Modell A_1 repräsentiert. Abb. 8.4 zeigt das Ergebnis der beiden Regelungsvarianten für eine Trajektorienvorgabe, bei der unterschiedliche stationäre Systemdrücke nacheinander angesteuert werden. Zwar genügt die Solltrajektorie den durch die Gleichungen (8.51) bzw. (8.61) implizierten Stetigkeitsanforderungen nicht, trotzdem ist eine Regelung möglich und kann maßgeblich die transienten Einschwingvorgänge zwischen stationären Zuständen beeinflussen. In Abb. 8.4a sind die Ausgangstrajektorien y sowie die Solltrajektorie y_d dargestellt. Die entsprechenden Steuereingänge sind in Abb. 8.4b zu sehen. Mit beiden Regelungsvarianten wird das transiente Einschwingverhalten zwischen zwei stationären

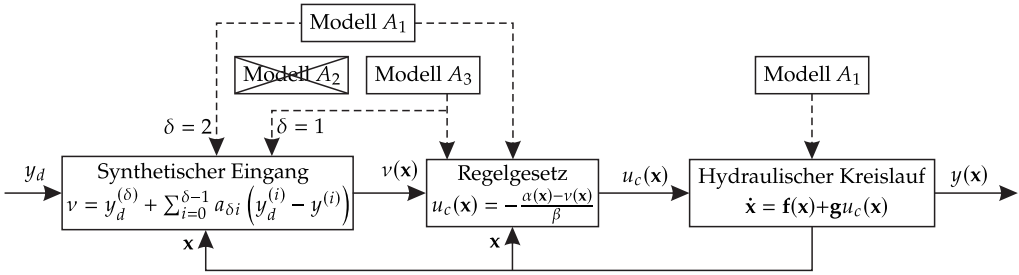


Abbildung 8.3: Regelungsstrategie.

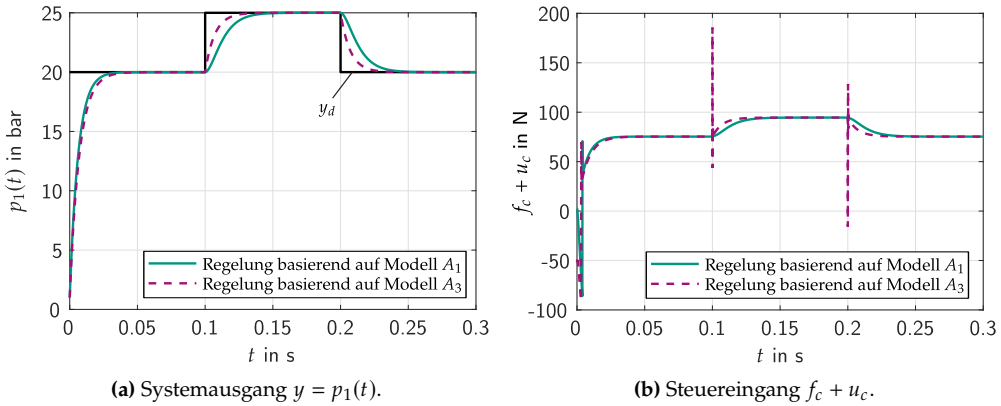


Abbildung 8.4: Regelungen basierend auf den Modellen A_1 und A_3 angewendet auf Modell A_1 . Parameter $a_{20} = 20\,000$, $a_{21} = 2\sqrt{a_{20}}$, $a_{10} = \sqrt{a_{20}}$.

Zuständen gegenüber der reinen Steuerung (vgl. Abb. 8.1) stark verkürzt und geglättet. Die Konstanten $a_{20} = 20\,000$, $a_{21} = 2\sqrt{a_{20}}$ und $a_{10} = \sqrt{a_{20}}$ werden so gewählt, dass sich für die linearen Dynamiken erster und zweiter Ordnung die gleichen Eigenwerte von $\lambda = -\sqrt{a_{20}}$ ergeben. Naturgemäß kann das Einschwingverhalten durch Vorgabe anderer Konstanten verändert werden.

Im Folgenden werden die Regelungsvarianten in Abhängigkeit der Trajektorienfrequenz bewertet. Dazu wird eine zweite Solltrajektorie $y_d = 25 \text{ bar} + 1 \text{ bar} \cdot \sin(50 \text{ rad/s}^2 \cdot t^2)$ für den Systemausgang vorgegeben. Der absolute Fehler zwischen der Ausgangsgröße y und der Trajektorienvorgabe y_d ist in Abb. 8.5a dargestellt. Weil die Trajektorie den Stetigkeitsanforderungen der Regelgesetze genügt, ist der Fehler zwischen der Trajektorienvorgabe und des auf der Basis des Modells A_1 geregelten Systemausgangs in dieser Skalierung nicht sichtbar, da kein Modellfehler existiert und die Nichtlinearitäten exakt kompensiert werden. Auch die Regelung basierend auf dem reduzierten Modell A_3 produziert eine für die meisten Anwendungen ausreichende Übereinstimmung zwischen Solltrajektorie und Systemausgang. Der Knick bei $\Omega \approx 950 \text{ rad/s}$ markiert

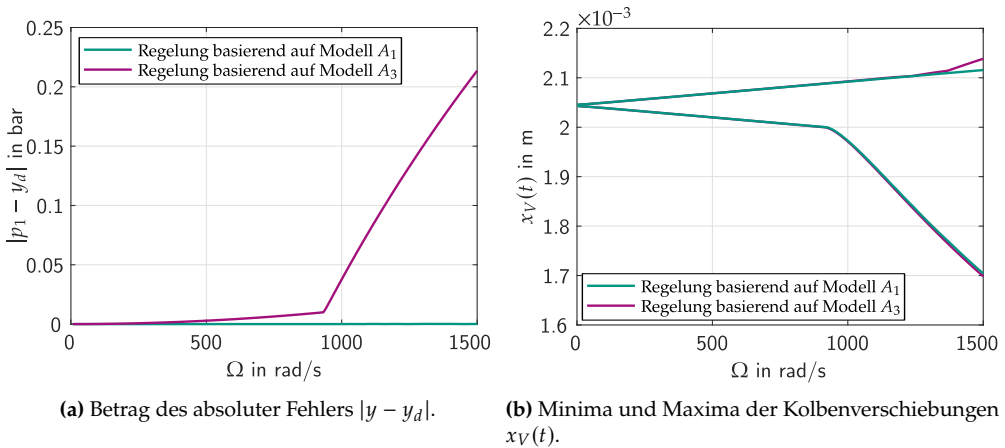


Abbildung 8.5: Regelungen basierend auf den Modellen A_1 und A_3 angewendet auf das Modell A_1 . Solltrajektorie $y_d = 25 \text{ bar} + 1 \text{ bar} \cdot \sin(50 \text{ rad/s}^2 \cdot t^2)$.

die Stelle, an der die Kolbenauslenkung $x_V(t)$ so groß wird, dass die Schwingungen die Steuerkante kreuzen, vgl. Abb. 8.5b. Erst in diesem Bereich entsteht ein relevanter Fehler.

Zusammenfassend ist eine Regelung basierend auf dem reduzierten Modell A_2 nicht möglich, weil durch die Reduktion die Eingangsaffinität verloren geht. Jedoch können auch auf der Basis des reduzierten Modells A_3 , welches sogar noch rechenzeiteffizienter ist, sehr gute Regelungsergebnisse erzielt werden.

8.3 Einfluss der reduzierten Druckdynamik auf die instationäre Systemdynamik

Die eingangs dieses Kapitels formulierte Forschungsfrage, in wie weit sich die mittels singulärer Störungsrechnung reduzierten Modelle als Grundlage für die Ableitung eines modellbasierten Regelungskonzepts eignen, konnte bisher nicht beantwortet werden, weil das hier gewählte Konzept der Eingangs-Ausgangs-Linearisierung mit dem Modell A_2 ein unbeschränktes Regelgesetz hervorbringt.

Der in Abschnitt 7.2 untersuchte Ventilkreislauf mit Dämpfungsblende beinhaltet eine weitere schnelle Variable, welche mittels singulärer Störungsrechnung reduziert werden kann. Anhand dieses Modells soll die Forschungsfrage im Folgenden weiter untersucht werden. Dazu werden basierend auf dem Ventilkreislauf mit quadratischer Dämpfung zwei reduzierte Modelle abgeleitet, wobei äquivalent zu Abschnitt 8.1 eine Reduktionsvariante auf der singulären Störungsrechnung und die zweite Variante auf

der Vernachlässigung der Dämpfungsblende basiert. Die zweite Variante führt auf das Modell A_1 aus Abschnitt 8.1.

Basierend auf den Gleichungen (7.69) bis (7.71) führt eine Aufteilung des Steuereingangs in einen konstanten und einen zeitabhängigen Anteil auf das eingangslinere System

$$m_V \ddot{x}_V + d_V \dot{x}_V + k_V x_V = r_V^2 \pi p_c - f_c - u_c \quad (8.62)$$

$$C_h \dot{p}_1 = -q_c(p_1, p_c) + q_{h,q}(x_V, p_1) + q_C(p_1) \quad (8.63)$$

$$C_{hc} \dot{p}_c = q_c(p_1, p_c) - r_V^2 \pi \dot{x}_V \quad (8.64)$$

$$y = p_1 \quad (8.65)$$

mit den Volumenströmen entsprechend den Gleichungen (4.4), (4.9) und (7.72). Dieses Modell wird im Folgenden als Modell B_1 bezeichnet.

Für das mittels singulärer Störungsrechnung reduzierte Modell erhält man aus den Gleichungen (7.101) und (7.102) nach Rücktransformation auf dimensionsbehaftete Variablen und Parameter eine Approximation der schnellen Variablen

$$\begin{aligned} p_c &\approx p_{c0} + C_{hc} p_{c1} \\ &= p_1 - \text{sign}(\dot{x}_V) \left(\frac{r_V^2 \pi}{A_c \gamma_F} \right)^2 \dot{x}_V^2 + \frac{4C_{hc} (r_V^2 \pi)^3}{(A_c \gamma_F)^4} \dot{x}_V^2 \ddot{x}_V - 2 \text{sign}(\dot{x}_V) \frac{C_{hc} r_V^2 \pi}{(A_c \gamma_F)^2} \dot{x}_V \dot{p}_1 \end{aligned} \quad (8.66)$$

in dimensionsbehafteter Form. Die dimensionsbehaftete Entsprechung des kleinen Parameter ist die Kapazität C_{hc} . Das Einsetzen in die Gleichungen (8.62) und (8.63) liefert mit

$$\begin{aligned} q_c(p_1, p_c) &= C_{hc} \dot{p}_c + r_V^2 \pi \dot{x}_V \\ &\approx C_{hc} (\dot{p}_{c0} + C_{hc} \dot{p}_{c1}) + r_V^2 \pi \dot{x}_V \\ &\approx C_{hc} \dot{p}_{c0} + r_V^2 \pi \dot{x}_V \\ &= C_{hc} \dot{p}_1 - 2C_{hc} \text{sign}(\dot{x}_V) \left(\frac{r_V^2 \pi}{A_c \gamma_F} \right)^2 \dot{x}_V \ddot{x}_V + r_V^2 \pi \dot{x}_V \end{aligned} \quad (8.67)$$

das reduzierte System

$$\begin{aligned} m_V \ddot{x}_V + d_V \dot{x}_V + k_V x_V &= r_V^2 \pi p_1 - \text{sign}(\dot{x}_V) \frac{(r_V^2 \pi)^3}{(A_c \gamma_F)^2} \dot{x}_V^2 + 4C_{hc} \left(\frac{r_V^2 \pi}{A_c \gamma_F} \right)^4 \dot{x}_V^2 \ddot{x}_V \\ &\quad - 2C_{hc} \text{sign}(\dot{x}_V) \left(\frac{r_V^2 \pi}{A_c \gamma_F} \right)^2 \dot{x}_V \dot{p}_1 - f_c - u_c \end{aligned} \quad (8.68)$$

$$(C_h + C_{hc})\dot{p}_1 = -r_V^2 \pi \dot{x}_V + q_{h,q}(x_V, p_1) + q_C(p_1) + 2C_{hc} \operatorname{sign}(\dot{x}_V) \left(\frac{r_V^2 \pi}{A_c \gamma_F} \right)^2 \dot{x}_V \ddot{x}_V$$

$$\approx -r_V^2 \pi \dot{x}_V + q_{h,q}(x_V, p_1) + q_C(p_1) \quad (8.69)$$

$$y = p_1 \quad (8.70)$$

dritter Ordnung, welches im Folgenden als Modell B_2 bezeichnet wird. Die Vereinfachung der rechten Seite von Gl. (8.69) ist dadurch motiviert, dass der vernachlässigte Ausdruck in der späteren Herleitung des Regelgesetzes im stationären Zustand $\dot{x}_V = 0$ eine Singularität hervorruft. Legitimiert wird diese Vereinfachung durch die in Abschnitt 7.2 geführten Größenordnungsanalysen, weil sie gleichbedeutend mit der Approximation $p_{c0} \approx p_1$ ist.

Eine Modellübersicht der Modelle mit quadratischer Dämpfung findet sich in Tab. 8.3.

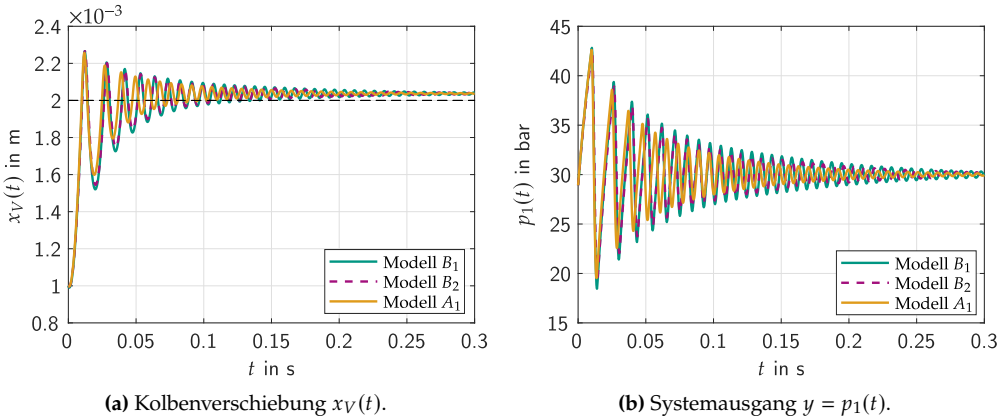


Abbildung 8.6: Vergleich der Modelle B_1 , B_2 und $B_3 = A_1$. Steuereingang $u_c(t) = 0 \text{ N}$.

In Abb. 8.6 wird der Einfluss der Reduktionsvarianten auf das Einschwingverhalten der Ventilkreisläufe untersucht. Es gilt die Parametrierung aus den Tabellen 4.1 und 7.6 mit einer erhöhten Dämpfung von 240 N s/m . Wie bereits bei der Reduktion der Ventilträgheit sind zwischen den Ergebnissen des Originalsystems und des mittels

Modell	Beschreibung	Zustandsgrößen
B_1	Originalsystem mit quadratischer Dämpfung	$[x_V, \dot{x}_V, p_1, p_c]^T$
B_2	Modellreduktion mittels singulärer Störungsrechnung	$[x_V, \dot{x}_V, p_1]^T$
B_3	Modellreduktion durch Vernachlässigung der Dämpfungsblende. Entspricht dem Modell A_1 .	$[x_V, \dot{x}_V, p_1]^T$

Tabelle 8.3: Übersicht der Modelle mit quadratischer Dämpfung. Die Modellkomplexität nimmt mit steigendem Index ab.

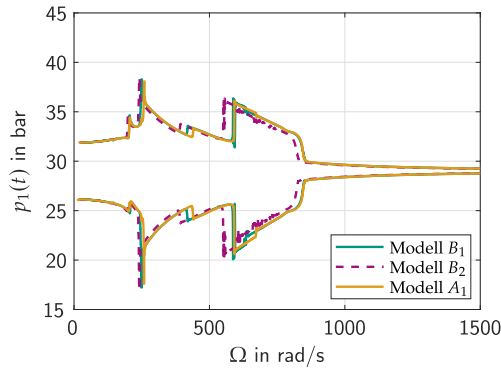


Abbildung 8.7: Vergleich der Modelle B_1 , B_2 und $B_3 = A_1$ bei zeitvariantem Steuereingang $u_c(t) = \frac{f_c}{10} \sin(50 \text{ rad/s}^2 \cdot t^2)$.

Modell	Simulation	Integrator	Integrationsschritte	%
B_1	$u_c(t) = 0 \text{ N}$	ode45	64 714	100 %
B_2	$u_c(t) = 0 \text{ N}$	ode45	8 726	13 %
A_1	$u_c(t) = 0 \text{ N}$	ode45	6 048	9 %
B_1	$u_c(t) = 0 \text{ N}$	ode15s	4 961	100 %
B_2	$u_c(t) = 0 \text{ N}$	ode15s	3 460	70 %
A_1	$u_c(t) = 0 \text{ N}$	ode15s	1 982	40 %
B_1	Sweep	ode45	5 746 452	100 %
B_2	Sweep	ode45	2 408 978	42 %
A_1	Sweep	ode45	2 365 362	41 %
B_1	Sweep	ode15s	921 626	100 %
B_2	Sweep	ode15s	741 874	81 %
A_1	Sweep	ode15s	436 597	47 %

Tabelle 8.4: Einfluss der Modelle und der Integratoren auf die Anzahl der Integrationsschritte als ein indirektes Maß für die Rechengeschwindigkeit.

singulärer Störungsrechnung reduzierten Systems mit bloßem Auge keine Unterschiede zu erkennen. Dahingegen hat die einfache Vernachlässigung der Dämpfungsblende einen sichtbaren Einfluss, welcher sich durch eine schnellere Abnahme der Amplitude bemerkbar macht.

Bezüglich der Systemantworten auf das Sweep-Signal $u_c(t) = \frac{f_c}{10} \sin(50 \text{ rad/s}^2 \cdot t^2)$ zeigt das reduzierte Modell $B_3 = A_1$ dahingegen eine etwas bessere Übereinstimmung mit dem Originalsystem B_1 als das Modell B_2 , insbesondere im mittleren Teil des abgebildeten Frequenzbereichs. Die entsprechenden Simulationsergebnisse sind in Form der Minima und Maxima der Druckverläufe in Abb. 8.7 abgebildet.

Als Indikator für die Rechenzeit ist die Anzahl der für die Simulationen benötigten Integrationsschritte in Tab. 8.4 aufgelistet. Auch hier werden durch die Modellreduktionen

teils erhebliche Rechenzeiteinsparungen erzielt. Diese liegen beim reduzierten Modell B_2 zwischen 19 % und 87 %, während das Modell A_1 sogar Ersparnisse zwischen 53 % und 91 % erzielt.

Auffallend sind die extrem hohen benötigten Rechenschritte in der ersten Zeile von Tab. 8.4. Dies hängt mit dem Volumenstrom $q_c \propto \text{sign}(p_1 - p_c) \sqrt{|p_1 - p_c|}$ zusammen, für den im stationären Zustand $\lim_{p_1 \rightarrow p_c} \frac{d}{dt} q_c \rightarrow \infty$ gilt. In der Nähe der Gleichgewichtslage führt diese Eigenschaft zu einem numerisch steifen Systemverhalten (siehe dazu auch [17]) und damit bei Nutzung des ode45-Integrators, welcher für nicht-steife Systeme ausgelegt ist, zu einer sehr hohen Rechenzeit.

8.4 SISO-Regelung des Ventilkreislaufs mit quadratischer Dämpfung

In diesem Abschnitt werden Regelungskonzepte für die Regelung des Modells B_1 abgeleitet. Als Grundlage für die Eingangs-Ausgangs-Linearisierung werden die drei im vorigen Abschnitt betrachteten Modelle herangezogen. Dabei wird gezeigt, dass das Regelungskonzept, welches auf Basis des Originalsystems B_1 abgeleitet wird, eine Singularität enthält. Die Ableitung von Regelgesetzen auf Grundlage der reduzierten Modelle B_2 und A_1 wird hier also nicht allein durch eine Rechenzeiterparnis motiviert. Bezüglich des Modells B_1 beinhalten die für eine Eingangs-Ausgangs-Linearisierung notwendigen Zeitableitungen des Ausgangs

$$\dot{y} = \frac{1}{C_h} (-q_c(p_1, p_c) + q_{h,q}(x_V, p_1) + q_C(p_1)) \quad (8.71)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \frac{1}{C_h} \left(\frac{d}{dt} (-q_c(p_1, p_c) + q_{h,q}(x_V, p_1) + q_C(p_1)) \right) \\ &= \frac{1}{C_h} \frac{\partial q_{h,q}(x_V, p_1)}{\partial x_V} \dot{x}_V - \frac{1}{C_h C_{hc}} \frac{\partial q_c(p_1, p_c)}{\partial p_c} (q_c(p_1, p_c) - r_V^2 \pi \dot{x}_V) \\ &\quad + \frac{1}{C_h} \left(-\frac{\partial q_c(p_1, p_c)}{\partial p_1} + \frac{\partial q_{h,q}(x_V, p_1)}{\partial p_1} + \frac{\partial q_C(p_1)}{\partial p_1} \right) \dot{p}_1 \end{aligned} \quad (8.72)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \left(\frac{1}{C_h} \frac{\partial q_{h,q}}{\partial x_V} + \frac{1}{C_h C_{hc}} \frac{\partial q_c}{\partial p_c} r_V^2 \pi \right) \ddot{x}_V + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{C_h} \frac{\partial q_{h,q}}{\partial x_V} + \frac{1}{C_h C_{hc}} \frac{\partial q_c}{\partial p_c} r_V^2 \pi \right) \dot{x}_V \\ &\quad + \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{C_h C_{hc}} \frac{\partial q_c}{\partial p_c} q_c + \frac{1}{C_h} \left(-\frac{\partial q_c}{\partial p_1} + \frac{\partial q_{h,q}}{\partial p_1} + \frac{\partial q_C}{\partial p_1} \right) \dot{p}_1 \right) \\ &=: \left(\frac{1}{C_h} \frac{\partial q_{h,q}}{\partial x_V} + \frac{1}{C_h C_{hc}} \frac{\partial q_c}{\partial p_c} r_V^2 \pi \right) \frac{1}{m_V} (-d_V \dot{x}_V - k_V x_V + r_V^2 \pi p_c - f_c - u_c) \\ &\quad + R(x_V, \dot{x}_V, p_1, p_c) \end{aligned} \quad (8.73)$$

erst in der dritten Ableitung den Steuereingang u_c . Damit ist der relative Grad $\delta = 3$, womit die lineare Fehlerdynamik dritter Ordnung

$$(\ddot{y} - \ddot{y}_d) + a_{32}(\dot{y} - \dot{y}_d) + a_{31}(y - y_d) + a_{30}(y - y_d) = 0 \quad (8.74)$$

$$\dot{z}_4 = \dot{\Phi}_4(\mathbf{x}) \quad (8.75)$$

angestrebt wird, welche durch eine interne Dynamik erster Ordnung ergänzt wird. Unabhängig vom Grad der Fehlerdynamik ergibt sich jedoch aus den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial q_c}{\partial p_1} = \frac{\gamma_F A_c}{2\sqrt{|p_1 - p_c|}} \quad (8.76)$$

$$\frac{\partial q_c}{\partial p_c} = -\frac{\gamma_F A_c}{2\sqrt{|p_1 - p_c|}} \quad (8.77)$$

in Gl. (8.73) die Problematik einer Singularität, welche für $p_1 = p_c$ auftritt, also in jedem stationären Betriebszustand. Diese Singularität ist zwangsläufig auch in u_c enthalten, falls die Berechnungsvorschrift im Sinne der Eingangs-Ausgangs-Linearisierung formuliert wird. Dadurch ist die Regelung basierend auf dem Modell B_1 nicht möglich. Im Folgenden wird eine Regelung auf Grundlage des reduzierten Modells B_2 abgeleitet. Die Zeitableitungen

$$\dot{y} = \frac{1}{C_h + C_{hc}} \left(-r_V^2 \pi \dot{x}_V + q_{h,q}(x_V, p_1) + q_C(p_1) \right) \quad (8.78)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \frac{1}{C_h + C_{hc}} \left(-r_V^2 \pi \ddot{x}_V + \frac{d}{dt} (q_{h,q}(x_V, p_1) + q_C(p_1)) \right) \\ &= \frac{(A_c \gamma_F)^2}{m_V (A_c \gamma_F)^4 - 4C_{hc} (r_V^2 \pi)^4 \dot{x}_V^2} \left[\left((r_V^2 \pi)^3 \dot{x}_V^2 + 2 (r_V^2 \pi)^2 C_{hc} \dot{x}_V \dot{y} \right) \text{sign}(\dot{x}_V) \right. \\ &\quad \left. - (\gamma_F A_c)^2 (r_V^2 \pi p_1 - d_V \dot{x}_V - k_V x_V - u_c - f_c) \right] \frac{r_V^2 \pi}{C_h + C_{hc}} \\ &\quad + \frac{1}{C_h + C_{hc}} \frac{d}{dt} (q_{h,q}(x_V, p_1) + q_C(p_1)) \\ &= \ddot{y}(u_c) \end{aligned} \quad (8.79)$$

des Ausgangs führen auf einen relativen Grad von $\delta = 2$. Das Regelgesetz für eine lineare Fehlerdynamik 2. Ordnung

$$(\dot{y} - \dot{y}_d) + a_{21}(y - y_d) + a_{20}(y - y_d) \quad (8.80)$$

$$\dot{z}_3 = \dot{\Phi}_3(\mathbf{x}) \quad (8.81)$$

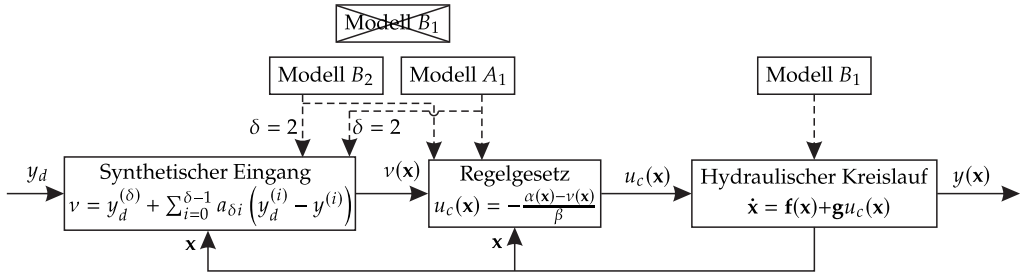
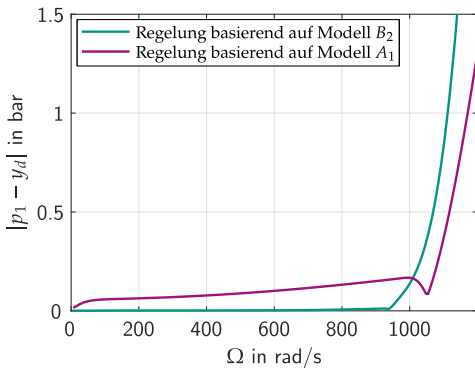
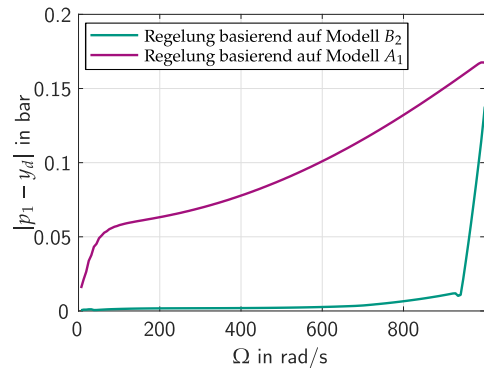


Abbildung 8.8: Regelungsstrategie.



(a) Regelung angewendet auf Modell B_1 .



(b) Regelung angewendet auf Modell B_1 . Ausschnitt $\Omega \leq 1000 \text{ rad s}^{-1}$.

Abbildung 8.9: Regelungen basierend auf den Modellen A_1 und B_2 . Parameter $a_{20} = 20\,000$, $a_{21} = 2\sqrt{a_{20}}$, $a_{10} = \sqrt{a_{20}}$. Solltrajektorie $y_d = 25 \text{ bar} + 1 \text{ bar} \cdot \sin(50 \text{ rad/s}^2 \cdot t^2)$.

wird durch das Einsetzen der Gleichungen (8.78) und (8.79) in die Gl. (8.80) berechnet. Die Regelung basierend auf dem Modell A_1 kann aus Abschnitt 8.2 entnommen werden. Das gesamte Regelungskonzept inklusive der zugrundeliegenden Modelle ist in Abb. 8.8 schematisch dargestellt. Der Hydraulische Kreislauf wird durch das Originalsystem mit Dämpfungsblende, Modell B_1 abgebildet. Weil die Regelung basierend auf dem Modell B_1 nicht möglich ist, kompensiert keines der Regelgesetze die Nichtlinearitäten exakt. Die beiden verbleibenden Regelungen basierend auf den Modellen B_2 und $B_3 = A_1$ führen beide auf eine externe Fehlerdynamik zweiter Ordnung, was jeweils einem relativen Grad von $\delta = 2$ entspricht.

Der Vergleich zwischen den beiden Regelungsstrategien erfolgt anhand der bereits in Abschnitt 8.2 eingeführten Solltrajektorie $y_d = 25 \text{ bar} + 1 \text{ bar} \cdot \sin(50 \text{ rad/s}^2 \cdot t^2)$. Dadurch ist eine Bewertung der Regelungskonzepte für unterschiedliche Frequenzbereiche möglich. Die Ergebnisse der Regelung in Form des absoluten Fehlers $|p_1 - y_d|$ sind für den Frequenzbereich bis $\Omega = 1200 \text{ rad/s}$ in Abb. 8.9a dargestellt. In Abb. 8.9b ist der Bereich

bis $\Omega = 1000$ rad/s abgebildet. Die Regelung basierend auf dem Modell B_2 zeigt im Bereich bis $\Omega = 950$ rad/s eine wesentlich bessere Übereinstimmung zwischen dem Ausgang $p_1 = y$ und der Trajektorienvorgabe y_d . Im Bereich $\Omega > 950$ rad/s beginnt der absolute Fehler der Regelung basierend auf dem Modell B_2 stark zu steigen und wächst sehr schnell in einen für die reale Anwendung inakzeptablen Bereich. Ab $\Omega > 1050$ rad/s betrifft dies auch die Regelung basierend auf A_1 .

Zusammenfassend zeigt sich hier erstmals der große Vorteil eines auf Basis der singulären Störungsrechnung reduzierten Modells. Mit diesem kann eine Singularität umgangen werden, welche eine Regelung auf der Grundlage des Originalsystems ausschließt. Weiterhin kann im Bereich niedriger und mittlerer Frequenzen eine hervorragende Genauigkeit erzielt werden, insbesondere im Vergleich mit der Regelung auf Basis des reduzierten Modells A_1 ohne Dämpfungsblende.

Zuletzt sei noch erwähnt, dass die Singularität auch durch eine modifizierte Modellierung der Blendengleichung nicht umgangen werden kann, wie sie z. B. in [23, 24] oder [4] vorgeschlagen werden. Dort wird für kleine Druckdifferenzen die Wurzelabhängigkeit durch eine polynomielle Abhängigkeit zwischen Durchfluss und Druckdifferenz ersetzt. Lediglich eine lineare Modellierung z. B. nach [16] würde die Singularität umgehen. In dieser Modellierung besteht jedoch die Problematik darin festzulegen, bei welcher Druckdifferenz die Grenze zwischen den beiden Abschnitten in der Modellierung gezogen wird.

8.5 MIMO-Regelung des Ventilkreislaufs mit quadratischer Dämpfung und Pumpendynamik

Das Regelungskonzept der Eingangs-Ausgangs-Linearisierung findet auch in Bezug auf Mehrgrößenregelungen, auch als Multiple-Input/Multiple-Output (MIMO)-Regelungen bezeichnet, Anwendung. Im Kontext der in dieser Arbeit untersuchten hydraulischen Ventilkreisläufe kann eine Mehrgrößenregelung beispielsweise durch die gleichzeitige Vorgabe der Eingangsleistung (Pumpenvolumenstrom oder Versorgungsdruck) und des Systemdrucks vorteilhaft sein. So kann in Phasen niedriger Leistungsnachfrage des Verbrauchers auch die Eingangsleistung reduziert und so eine Energieeinsparung erzielt werden.

Dieses Prinzip wird innerhalb des vorliegenden Abschnitts am Beispiel des Ventilkreislaufs mit Dämpfungsblende und realer Pumpe demonstriert, siehe Abb. 8.10. Diese Kreislaufvariante wird gewählt, weil auch hier bei der Regelung basierend auf dem Originalsystem eine Singularität auftritt, wie im Folgenden gezeigt wird. Ähnlich wie im vorigen Abschnitt kann zur Vermeidung dieser Singularität das auf Basis der singulären Störungsrechnung reduzierte Modell zur Ableitung eines Regelgesetzes herangezogen werden.

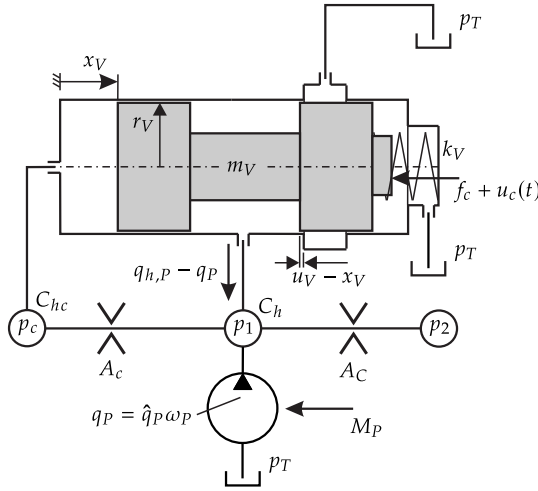


Abbildung 8.10: Ventilkreislauf mit Druckregelventil, Dämpfungsblende und realer Konstantpumpe.

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
Pumpenträgheit	J_P	0.0075	$\text{kg m}^2/\text{rad}$
Pumpendämpfung	d_P	7.5	$\text{N s m}/\text{rad}$
Widerstandsfaktor	W_P	$1.2 \cdot 10^{-5}$	m^3/Pa
Verdrängungsvolumen	\hat{q}_P	$7.5 \cdot 10^{-5}$	m^3

Tabelle 8.5: Standardparametrierung des Ventilkreislaufs mit Dämpfungsblende und realer Pumpe. Die nicht aufgeführten Parameterwerte sind Tab. 4.1 zu entnehmen.

Die Systemdynamik

$$m_V \ddot{x}_V + d_V \dot{x}_V + k_V x_V = r_V^2 \pi p_c - f_c - u_c \quad (8.82)$$

$$C_h \dot{p}_1 = -q_c(p_1, p_c) + q_{h,P}(x_V, p_1, \omega_P) + q_C(p_1) \quad (8.83)$$

$$C_{hc} \dot{p}_c = q_c(p_1, p_c) - r_V^2 \pi \dot{x}_V \quad (8.84)$$

$$J_P \dot{\omega}_P + d_P \omega_P = M_P - W_P p_1 \quad (8.85)$$

$$[y_1, y_2]^T = [p_1, \hat{q}_P \omega_P]^T \quad (8.86)$$

mit dem Volumenstrom

$$q_{h,P}(x_V, p_1, \omega_P) = -\gamma_F \sigma(x_V - u_V) 2r_V \pi (x_V - u_V) \Delta(p_1 - p_T) + \hat{q}_P \omega_P \quad (8.87)$$

wird mit Hilfe des realen Pumpenmodells in den Gleichungen (3.25) und (3.26) abgeleitet. Für die neu eingeführten Parameter gelten die Werte in Tab. 8.5. Neben dem

Steuereingang u_c wird als zusätzlicher Systemeingang das Antriebsmoment der Pumpe M_P definiert. Damit liegt das System in einer eingangslinearen Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_1 u_c(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_2 M_P(\mathbf{x}) \quad (8.88)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (8.89)$$

mit zwei Eingängen und zwei Ausgängen vor. In der Systembeschreibung sind die Vektoren durch

$$\mathbf{x} = [x_V, \dot{x}_V, p_1, p_c, \omega_P]^\top \quad (8.90)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left[\dot{x}_V, -\frac{1}{m_V} \left(d_V \dot{x}_V + k_V x_V - r_V^2 \pi p_c + f_c \right), \right. \\ \left. \frac{1}{C_h} \left(-q_c(p_1, p_c) + q_{h,P}(x_V, p_1, \omega_P) + q_C(p_1) \right), \frac{1}{C_{hc}} \left(q_c(p_1, p_c) - r_V^2 \pi \dot{x}_V \right), \right. \\ \left. \frac{1}{J_P} \left(-d_P \omega_P - W_P p_1 \right) \right]^\top \quad (8.91)$$

$$\mathbf{g}_1 = \left[0, -\frac{1}{m_V}, 0, 0, 0 \right]^\top \quad (8.92)$$

$$\mathbf{g}_2 = \left[0, 0, 0, 0, \frac{1}{J_P} \right]^\top \quad (8.93)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = [p_1, \hat{q} \omega_P]^\top \quad (8.94)$$

gegeben. Das Modell wird im Folgenden als Modell C_1 bezeichnet.

Im Kontext der Eingangs-Ausgangs-Linearisierung ist der relative Grad nun eine vektorielle Größe und muss bezüglich beider Ausgangsgrößen berechnet werden. Die Ableitungen der Ausgangsgrößen

$$\dot{y}_1 = \frac{1}{C_h} \left(-q_c(p_1, p_c) + q_{h,P}(x_V, p_1, \omega_P) + q_C(p_1) \right) \quad (8.95)$$

$$\ddot{y}_1 = \frac{1}{C_h} \left(\left(-\frac{\partial q_c(p_1, p_c)}{\partial p_1} + \frac{\partial q_{h,P}(x_V, p_1, \omega_P)}{\partial p_1} + \frac{\partial q_C(p_1)}{\partial p_1} \right) \dot{y} - \frac{\partial q_c(p_1, p_c)}{\partial p_c} \dot{p}_c + \right. \\ \left. \frac{\partial q_{h,P}(x_V, p_1, \omega_P)}{\partial x_V} \dot{x}_V + \frac{\partial q_{h,P}(x_V, p_1, \omega_P)}{\partial \omega_P} \frac{1}{J_P} \left(-d_P \omega_P + M_P - W_P p_1 \right) \right) \\ =: \alpha_1(\mathbf{x}) + \beta_{12} M_P \quad (8.96)$$

$$\dot{y}_2 = \frac{\hat{q} P}{J_P} \left(-d_P \omega_P + M_P - W_P p_1 \right) \\ =: \alpha_2(\mathbf{x}) + \beta_{22} M_P \quad (8.97)$$

führen auf einen relativen Grad von $[\delta_1, \delta_2]^\top = [2, 1]^\top$, weil mit dem Steuereingang M_P in der zweiten Zeitableitung von y_1 und in der ersten Ableitung von y_2 einer der Steuereingänge enthalten ist. Zur Ableitung der Regelgesetze muss im Fall einer Mehrgrößenregelung nun das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{D}(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}(\mathbf{x})) \quad (8.98)$$

gelöst werden, in dem sich die Größen

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & \beta_{12} \\ 0 & \beta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial q_{h,p}(x_V, p_1, \omega_P)}{\partial \omega_P} \frac{1}{J_P} \\ 0 & \frac{\dot{q}_P}{J_P} \end{bmatrix} \quad (8.99)$$

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = [\alpha_1(\mathbf{x}), \alpha_2(\mathbf{x})]^\top \quad (8.100)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \ddot{y}_{d1} - a_{21}(\dot{y}_1 - \dot{y}_{d1}) - a_{20}(y_1 - y_{d1}) \\ \dot{y}_{d2} - a_{10}(y_2 - y_{d2}) \end{bmatrix}, \quad (8.101)$$

aus der Systemdynamik und der linearen Fehlerdynamiken entsprechend dem vektoriellen relativen Grad ergeben. Weil die Entkopplungsmatrix \mathbf{D} singular ist, kann das Gleichungssystem nicht eindeutig nach den Eingängen aufgelöst werden, was eine Regelung basierend auf dem Modell C_1 verhindert. Hier tritt also eine weitere Art der Singularität auf, die abermals von der Dämpfungsblende verursacht wird.

Um diese Singularität zu umgehen, kann wiederum ein Modell verwendet werden, in dem die schnelle Variable p_c mittels singularer Störungsrechnung reduziert wird. Das reduzierte System vierter Ordnung

$$\begin{aligned} m_V \ddot{x}_V + d_V \dot{x}_V + k_V x_V &= r_V^2 \pi p_1 - \text{sign}(\dot{x}_V) \frac{(r_V^2 \pi)^3}{(A_c \gamma_F)^2} \dot{x}_V^2 + \frac{4C_{hc} (r_V^2 \pi)^4}{(A_c \gamma_F)^4} \dot{x}_V^2 \ddot{x}_V \\ &- 2 \text{sign}(\dot{x}_V) \frac{C_{hc} (r_V^2 \pi)^2}{(A_c \gamma_F)^2} \dot{x}_V \dot{p}_1 - f_c - u_c \end{aligned} \quad (8.102)$$

$$(C_h + C_{hc}) \dot{p}_1 = -r_V^2 \pi \dot{x}_V + q_{h,p}(x_V, p_1, \omega_P) + q_C(p_1) \quad (8.103)$$

$$J_P \dot{\omega}_P + d_P \omega_P = M_P - W_P p_1 \quad (8.104)$$

$$[y_1, y_2]^\top = [p_1, \hat{q}_P \omega_P]^\top \quad (8.105)$$

kann durch Hinzunahme der Pumpendynamik direkt aus den Gleichungen (8.68) und (8.69) abgeleitet werden. Es wird im Folgenden als Modell C_2 bezeichnet.

Eine Modellübersicht der Modelle mit quadratischer Dämpfung und Pumpendynamik findet sich in Tab. 8.6.

Modell	Beschreibung	Zustandsgrößen
C ₁	Originalsystem mit quadratischer Dämpfung und realer Konstantpumpe	$[x_V, \dot{x}_V, p_1, p_c, \omega_P]^T$
C ₂	Modellreduktion mittels singulärer Störungsrechnung	$[x_V, \dot{x}_V, p_1, \omega_P]^T$

Tabelle 8.6: Übersicht der Modelle mit quadratischer Dämpfung und Pumpendynamik.

Die für die Eingangs-Ausgangs-Linearisierung benötigten Zeitableitungen

$$\dot{y}_1 = \frac{1}{C_h + C_{hc}} \left(-r_V^2 \pi \dot{x}_V + q_{h,P}(x_V, p_1, \omega_P) + q_C(p_1) \right) \quad (8.106)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \frac{1}{C_h + C_{hc}} \left[-r_V^2 \pi \ddot{x}_V + \left(\frac{\partial q_{h,P}(x_V, p_1, \omega_P)}{\partial p_1} + \frac{\partial q_C(p_1)}{\partial p_1} \right) \dot{p}_1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial q_{h,P}(x_V, p_1, \omega_P)}{\partial \omega_P} \dot{\omega}_P + \frac{\partial q_{h,P}(x_V, p_1, \omega_P)}{\partial x_V} \dot{x}_V \right] \\ &=: \alpha_1(\mathbf{x}) + \beta_{11} u_c + \beta_{12} M_P \end{aligned} \quad (8.107)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_2 &= \frac{\hat{q}_P}{J_P} (-d_P \omega_P + M_P - W_P p_1) \\ &=: \alpha_2(\mathbf{x}) + \beta_{22} M_P \end{aligned} \quad (8.108)$$

ergeben einen vektoriellen relativen Grad von $[\delta_1, \delta_2]^T = [2, 1]^T$. Dies erlaubt eine lineare externe Dynamik, welche aus zwei entkoppelten linearen Differentialgleichungen in Verbindung mit einer eindimensionalen nichtlinearen internen Dynamik

$$(\ddot{y}_1 - \ddot{y}_{d1}) + a_{21}(\dot{y}_1 - \dot{y}_{d1}) + a_{20}(y_1 - y_{d1}) = 0 \quad (8.109)$$

$$(\dot{y}_2 - \dot{y}_{d2}) + a_{10}(y_2 - y_{d2}) = 0 \quad (8.110)$$

$$\dot{z}_4 = \dot{\Phi}_4(\mathbf{x}) \quad (8.111)$$

besteht. Die entsprechenden Regelgesetze $u_c(\mathbf{x})$ und $M_P(\mathbf{x})$ ergeben sich durch das Auflösen des linearen Gleichungssystems, welches aus den Gleichungen (8.109) und (8.110) gebildet wird, wenn die Gleichungen (8.106) bis (8.108) dort eingesetzt werden. Wegen $\beta_{11} \neq 0$ ist die Entkopplungsmatrix regulär und ein Auflösen des Gleichungssystems nach den Eingängen möglich.

Die Ergebnisse der Regelung sind für die Trajektorienvorgaben

$$y_{d1} = 25 \text{ bar} + 1 \text{ bar} \cdot \sin(50 \text{ rad/s}^2 \cdot t^2) \quad (8.112)$$

$$y_{d2} = 51/\text{min} + 11/\text{min} \cdot \sin(50 \text{ rad/s}^2 \cdot t^2) \quad (8.113)$$

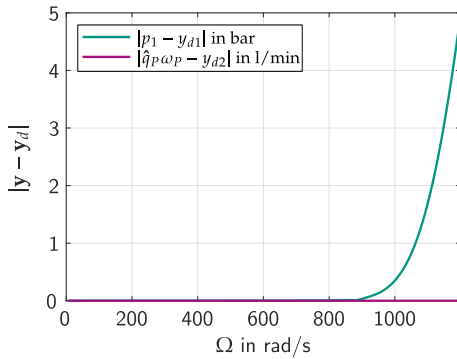
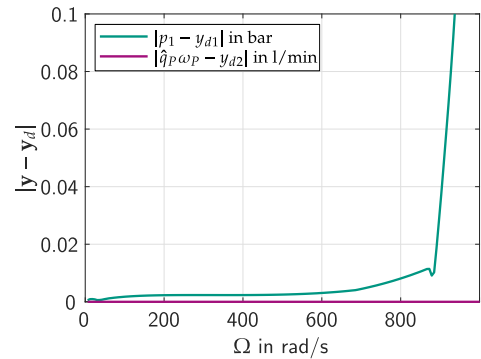
(a) Regelung angewendet auf Modell C_1 .(b) Regelung angewendet auf Modell C_1 . Ausschnitt $\Omega \leq 1000 \text{ rad s}^{-1}$.

Abbildung 8.11: Regelungen basierend auf dem Modell C_2 angewendet auf das Modell C_1 . Parameter $a_{20} = 20000$, $a_{21} = 2\sqrt{a_{20}}$, $a_{10} = \sqrt{a_{20}}$.

in Abb. 8.11 dargestellt. Weil die Modellreduktion nicht auf die Pumpendynamik wirkt, ergibt sich zwischen dem Systemausgang q_P und der entsprechenden Solltrajektorie y_{d2} kein relevanter Fehler. Bezüglich dem ersten Systemausgang ist der absolute Fehler in den unterschiedlichen Frequenzbereichen in der gleichen Größenordnung wie bei der SISO-Regelung im vorigen Abschnitt.

Zusammenfassend zeigt sich auch hier ein großer Vorteil eines durch die singuläre Störungsrechnung reduzierten Modells. Durch die Reduktion wird die Struktur der Gleichungen verändert, wodurch eine singuläre Entkopplungsmatrix vermieden werden kann.

9 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wird eine Methodik zur asymptotischen Analyse der nichtlinearen Dynamik selbstregelnder hydraulischer Ventilsteuerungen vorgestellt. Das asymptotische Verfahren basiert auf der Formulierung der Systemdynamik als singular gestörtes Problem, wobei die Kolbenbeschleunigung die schnelle Variable bildet. Diese Struktur ergibt sich mittels einer geeigneten dimensionslosen Notation auf Basis systemcharakteristischer Größen. Das singular gestörte Differentialgleichungssystem dritter Ordnung kann durch eine Reduktion der schnellen Variable um eine Ordnung reduziert werden. Dies wird durch den Nachweis der global asymptotischen Stabilität der langsamen Mannigfaltigkeit ermöglicht.

Die langsame Mannigfaltigkeit ist an der Steuerkante nicht differenzierbar. Dies führt zu einer großen Nichtlinearität im reduzierten System, welche jedoch in die Grundlösung integriert werden kann, indem diese abschnittsweise definiert wird. Mit Hilfe dieser Grundlösung, welche als Variablentransformation dient, wird ein nicht-glatte System in Standardform formuliert. Das Mittelwertbildungsverfahren liefert damit ein autonomes System in den transformierten Variablen der Amplitude und Phase. Durch die Betrachtung des gemittelten Systems ist eine sehr einfache dynamische Analyse einschließlich der näherungsweisen Bestimmung stabiler und instabiler Grenzyklusschwingungen des ursprünglichen Systems möglich. Die Methodik wird durch den Vergleich mit numerischen Simulationsergebnissen des vollständigen Systems verifiziert.

Das asymptotische Verfahren wird im Folgenden erweitert, sodass auch die Beschreibung erzwungener Schwingungen möglich wird. Dazu ist eine Anpassung der Grundlösung notwendig, um die Schwingungsfrequenz auf die Anregungsfrequenz abzustimmen. Damit werden sowohl klassische nichtlineare als auch parametrische Resonanzen detektiert und das dynamische Verhalten in diesen Bereichen approximiert.

Weiterhin findet die Berücksichtigung ausgewählter nichtlinearer Phänomene Eingang in die Methodik. Diese sind die quadratische Dämpfung, die Coulomb'sche Reibung und die kritische Ventilüberdeckung. Die quadratische Dämpfung wird von einem turbulenten Widerstand in der Druckrückführung verursacht, welcher außerdem eine zusätzliche schnelle Variable in das System einbringt. Durch die Reduktion dieser Variable entstehen

die nichtlinearen Dämpfungsterme. Die Berücksichtigung Coulomb'scher Reibung erfordert eine Modifikation der Grundlösung und die Modellierung von Haftphasen in derselben. Dabei wird die Annahme getroffen, dass in jeder Schwingungsperiode zwei Haftphasen auftreten. Für die Analyse eines kritisch überdeckten Ventils muss ebenso die Grundlösung modifiziert werden. Es werden die zwei Fälle eines positiven und eines verschwindenden Verbrauchervolumenstroms betrachtet. Letzterer Fall beinhaltet die Besonderheit einer Gleichgewichtslage, welche exakt auf der Steuerkante liegt. Zuletzt werden unter Berücksichtigung zeitvariabler Steuereingänge reduzierte Modelle abgeleitet. Diese bilden die Grundlage für die rechenzeiteffiziente Approximation instationärer Bewegungen sowie für die Ableitung von Regelungsalgorithmen auf Basis der Eingangs-Ausgangs-Linearisierung.

Der Gültigkeitsbereich des asymptotischen Verfahrens beschränkt sich auf den Parameterbereich kleiner Volumenströme, großer Dämpfungen sowie großer Kapazitäten. In diesem Parameterbereich liefert die Analyse der gemittelten Gleichungen die folgenden Erkenntnisse über die globale Systemdynamik der Ventilsteuerungen:

Für den Fall einer linear viskosen Dämpfung erfolgt der Stabilitätsverlust bei Variation der Kolbenmasse an einer superkritischen Hopf-Bifurkation. Weitere Verzweigungen der nach dem Stabilitätsverlust auftretenden Grenzzyklusschwingungen werden nicht detektiert. Die Steuerkante wirkt in diesem Zusammenhang als dämpfendes Element, weil der Amplitudenanstieg nach dem Stabilitätsverlust stark gebremst wird.

Auch im Falle einer äußeren Anregung bewirkt die Steuerkante eine Art der Dämpfung. Dies bewirkt niedrigere Schwingungsamplituden periodischer Lösungen, jedoch zu dem Preis verbreiteter Resonanzbereiche. Im betrachteten Parameterbereich sind sowohl die klassische Hauptresonanz als auch die erste parametrische Resonanz von praktischer Relevanz. Höhere parametrische Resonanzen liegen außerhalb des für die reale Anwendung relevanten Parameterbereichs.

Sowohl bei Berücksichtigung Coulomb'scher Reibung zwischen Ventilkolben und Gehäuse, als auch bei quadratischer Dämpfung, welche durch die Platzierung einer Dämpfungsblende in der Druckrückführung entsteht, verkompliziert sich das Bifurkationsverhalten der selbsterregten Schwingungen. In beiden Fällen wird das Einzugsgebiet der stabilen Gleichgewichtslage in der Nähe der Stabilitätsgrenze von einem instabilen Grenzzyklus begrenzt. Auch der Fall eines kritisch überdeckten Ventils beinhaltet dieses Phänomen, falls der Systemdruck mehr als die Hälfte des Versorgungsdrucks entspricht. Die Reduktion der schnellen Dynamik mittels der singulären Störungsrechnung entspricht einer klassischen Modellreduktion. Es wird gezeigt, dass diese reduzierten Modelle auch transiente Bewegungen sehr gut approximieren können. Dabei ergeben sich abhängig vom Eingangssignal und dem verwendeten numerischen Integrator teils erhebliche Rechenzeiterparnisse. Auf Basis der um die Druckdynamik reduzierten

Modelle können Regelungen entworfen werden, mit welchen Singularitäten umgangen werden können, welche sich bei der Regelung auf Basis der ursprünglichen Modelle ergeben. Dahingegen geht bei einer Reduktion der Kolbdynamik die Eingangsaflinität des Systems verloren, weshalb eine Regelung auf Basis der Eingangs-Ausgangs-Linearisierung in diesem Fall nicht möglich ist.

Im Zusammenhang mit der Anwendung asymptotischer Methoden liefert die Arbeit die Erkenntnis, dass anstatt einer klassischen Van-der-Pol Transformation eine abschnittsweise definierte Grundlösung als Variablentransformation genutzt werden kann, um für ein System mit großen strukturvariablen Nichtlinearitäten ein System in Standardform herzuleiten. Die Voraussetzung ist, dass das ungestörte Problem stückweise linear ist und dass die entsprechenden Übergangsbedingungen an den Schaltübergängen analytisch aufgelöst werden können. Die in dieser Arbeit erfolgreich umgesetzten Kombinationen für die stückweise definierte Grundlösung sind die Zusammensetzung derselben einerseits aus einer harmonischen Funktion und einer Parabel und zum Anderen aus zwei harmonischen Funktionen mit unterschiedlicher Kreisfrequenz.

Die Ergebnissen der Arbeit lassen Fragen für die zukünftige Forschung offen.

Um die Anwendungsgrenzen des asymptotischen Verfahrens genauer zu bestimmen, sind umfangreichere Studien unter Variation der Systemparameter nötig. Des Weiteren beschränkt sich die Methodik weitestgehend auf wenige wesentliche physikalische Effekte. Um den Anwendungsbereich der Methodik auszuweiten, kann in zukünftigen Studien untersucht werden, ob sich weitere physikalische Effekte in das Verfahren integrieren lassen. Als Beispiele seien hier hydraulische Induktivitäten, hydrodynamische Strömungskräfte sowie komplexere Leitungsmodelle genannt.

In der Entwicklung der Regelungen wurde in dieser Arbeit ausschließlich die langsame Dynamik berücksichtigt. Die zusätzliche Berücksichtigung der schnellen Dynamik bietet das Potential, die hier vorgeschlagenen Regelungen zu verbessern.

In Bezug auf die Anwendung asymptotischer Methoden besteht eine offene Frage darin, ob sich abschnittsweise lineare Grundlösungen auch bei der Analyse anderer strukturvariabler Systeme einsetzen lassen, in denen periodische Lösungen Schaltübergängen unterworfen sind. Hier seien beispielhaft Systeme mit Reibung genannt.

Anhang

A Gemittelte Gleichungen des Ventils mit trockener Reibung

Das gemittelte System für den Ventilkreislauf unter Berücksichtigung trockener Reibung ergibt sich in allgemeiner Form entsprechend den Gleichungen (7.67) und (7.68). Die Funktionen werden durch Mittelwertbildung des Systems in Standardform berechnet und können in der Form

$$\begin{aligned}\hat{F}_A(A) &= \frac{1}{\tau_2 - \tau_0} \left(\int_{\tau_0}^{\tau^H} f_A^+(\tau) d\tau + \int_{\tau^H + \Delta\tau^H}^{\tau_1 + \Delta\tau^H} f_A^-(\tau) d\tau + \int_{\tau_1 + \Delta\tau^H}^{\bar{\tau}^H} \bar{f}_A^-(\tau) d\tau \right. \\ &\quad \left. + \int_{\bar{\tau}^H + \Delta\bar{\tau}^H}^{\tau_2 + \Delta\tau^H + \Delta\bar{\tau}^H} \bar{f}_A^+(\tau) d\tau \right) \\ &= \frac{F_{A3}(A)A^3 + F_{A2}(A)A^2 + F_{A1}(A)A + F_{A0}(A)}{N_A(A)}\end{aligned}\quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned}\hat{F}_\alpha(A) &= \frac{1}{\tau_2 - \tau_0} \left(\int_{\tau_0}^{\tau^H} f_\alpha^+(\tau) d\tau + \int_{\tau^H + \Delta\tau^H}^{\tau_1 + \Delta\tau^H} f_\alpha^-(\tau) d\tau + \int_{\tau_1 + \Delta\tau^H}^{\bar{\tau}^H} \bar{f}_\alpha^-(\tau) d\tau \right. \\ &\quad \left. + \int_{\bar{\tau}^H + \Delta\bar{\tau}^H}^{\tau_2 + \Delta\tau^H + \Delta\bar{\tau}^H} \bar{f}_\alpha^+(\tau) d\tau \right) \\ &= \frac{F_{\alpha5}(A)A^5 + F_{\alpha4}(A)A^4 + F_{\alpha3}(A)A^3 + F_{\alpha2}(A)A^2 + F_{\alpha1}(A)A + F_{\alpha0}(A)}{N_A(A)A^2\bar{Q}_s}\end{aligned}\quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned}\check{F}_A(A) &= \frac{\varepsilon}{T_2 + \Delta T_2^H - T_0} \left(\int_{T_0}^{T_1} F_A^+(\tau) d\tau + \int_{T_1 + \Delta T_1^H}^{T_2} F_A^-(\tau) d\tau \right) \\ &= \frac{G_A(A)}{\omega_s^+ M_A(A)}\end{aligned}\quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned}\check{F}_\alpha(A) &= \frac{\varepsilon}{T_2 + \Delta T_2^H - T_0} \left(\int_{T_0}^{T_1} F_\alpha^+(\tau) d\tau + \int_{T_1 + \Delta T_1^H}^{T_2} F_\alpha^-(\tau) d\tau \right) \\ &= \frac{G_\alpha(A)}{3AM_A(A)}\end{aligned}\quad (\text{A.4})$$

dargestellt werden. Die bildenden Funktionen sind durch

$$N_A = -24\omega_s^3 \sqrt{A^2 - X_{V0}^2} K_s^H \bar{Q}_s^H A - 12\omega_s \bar{Q}_s \left[\left(A\varepsilon(\omega_s^+)^2 - \varepsilon^2 Q_s^+ - 2F_R \right) \omega_s \bar{Q}_s^H \right. \\ \left. - 2AK_s^H \bar{Q}_s^H (C - \pi) - AK_s^H \omega_s (\varepsilon \bar{Q}_s^- - 2F_R) \right] \quad (\text{A.5})$$

$$F_{A3} = -\bar{Q}_s^H K_s^H N_s^- \bar{Q}_s \omega_s \sin(3C)\varepsilon \quad (\text{A.6})$$

$$F_{A2} = -3K_s^H \bar{Q}_s^H \left[\bar{Q}_s \left(\omega_s^2 - (\omega_s^-)^2 \right) \cos(2C) + \bar{Q}_s \left(\omega_s^2 + (\omega_s^-)^2 - 2(\omega_s^+)^2 \right) \right. \\ \left. - 2\omega_s^2 (\bar{Q}_s^- - \bar{Q}_s^+) \right] + 4\varepsilon K_s^H \bar{Q}_s^H \omega_s \left[\sqrt{A^2 - X_{V0}^2} \left(\left(N_s^+ + \frac{3}{4} N_s^- \right) \bar{Q}_s \right. \right. \\ \left. \left. + \omega_s^2 (\bar{K}_s^- + \bar{K}_s^+) \right) - \frac{3}{4} \bar{Q}_s \left((\omega_s^-)^2 - K_s^- \right) \sin(2C) \right. \\ \left. - 2 \left((\omega_s^-)^2 + (\omega_s^+)^2 - K_s^- - K_s^+ \right) (C - \pi) \right] \quad (\text{A.7})$$

$$F_{A1} = -12\varepsilon \bar{Q}_s \bar{Q}_s^H K_s^H (Q_s^+ - Q_s^-) \quad (\text{A.8})$$

$$F_{A0} = -4\varepsilon K_s^H X_{V0} \bar{Q}_s^H \left[\omega_s \sqrt{A^2 - X_{V0}^2} \left(\bar{Q}_s \left(N_s^+ X_{V0} - \frac{3}{2} \left((\omega_s^+)^2 - K_s^+ \right) \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \omega_s^2 X_{V0} (\bar{K}_s^- + \bar{K}_s^+) \right) \right] - 6X_{V0}^2 \bar{Q}_s^H K_s^H \left(\omega_s^2 (\bar{Q}_s^- - \bar{Q}_s^+) + \bar{Q}_s \left((\omega_s^+)^2 - \omega_s^2 \right) \right) \quad (\text{A.9})$$

$$F_{\alpha 5} = -2\varepsilon \omega_s^5 K_s^H \bar{Q}_s^H (\bar{K}_s^- - 5\bar{K}_s^+) \quad (\text{A.10})$$

$$F_{\alpha 4} = \varepsilon \bar{Q}_s^H K_s^H \bar{Q}_s^2 \omega_s (N_s^- \cos(3C) + 4(N_s^- - N_s^+)) \quad (\text{A.11})$$

$$F_{\alpha 3} = K_s^H \bar{Q}_s^H \left[-3\bar{Q}_s^2 \left(\sin(2C) \left(\omega_s^2 - (\omega_s^-)^2 \right) + 2(C - \pi) \left(2\omega_s^2 - (\omega_s^-)^2 - (\omega_s^+)^2 \right) \right) \right. \\ \left. + 6\omega_s^4 \sqrt{A^2 - X_{V0}^2} (4\bar{Q}_s - \bar{Q}_s^- - 3\bar{Q}_s^+) \right] - \bar{Q}_s^H N_s^- \bar{Q}_s^2 Q_s^+ \omega_s^2 \varepsilon^3 \sin(3C) \\ + 2\omega_s \bar{Q}_s^H \varepsilon \left[\frac{3}{2} K_s^H \bar{Q}_s^2 \left((\omega_s^-)^2 - K_s^- \right) \cos(2C) - N_s^- \bar{Q}_s^2 \omega_s F_R \sin(3C) \right. \\ \left. + K_s^H \left(\frac{3}{2} \left(-(\omega_s^-)^2 + 2(\omega_s^+)^2 + N_s^- X_{V0} + K_s^- - 2K_s^+ \right) \bar{Q}_s^2 \right. \right. \\ \left. \left. - 2\omega_s^2 X_{V0} (\bar{K}_s^- + \bar{K}_s^+) \bar{Q}_s + \omega_s^4 X_{V0}^2 (\bar{K}_s^- - 5\bar{K}_s^+) \right) \right] \quad (\text{A.12})$$

$$F_{\alpha 2} = 3\bar{Q}_s \bar{Q}_s^H \omega_s \left(2F_R + \varepsilon^2 Q_s^+ \right) \left(\left(\omega_s^2 - (\omega_s^-)^2 \right) \bar{Q}_s (1 - \cos(2C)) + 2\omega_s^2 (\bar{Q}_s^- - \bar{Q}_s^+) \right) \\ + 4\bar{Q}_s \bar{Q}_s^H \omega_s \varepsilon \left(2F_R + \varepsilon^2 Q_s^+ \right) \left[\sqrt{A^2 - X_{V0}^2} \left(\frac{3}{4} N_s^- \bar{Q}_s + \omega_s^2 (\bar{K}_s^- + \bar{K}_s^+) \right) \right. \\ \left. - \frac{3}{4} \bar{Q}_s \left((\omega_s^-)^2 - K_s^- \right) (\sin(2C) - 2C + 2\pi) \right] \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned}
F_{a1} = & -6\sqrt{A^2 - X_{V0}^2} K_s^H \bar{Q}_s X_{V0} \bar{Q}_s^H \left((\omega_s^2 - (\omega_s^+)^2) \bar{Q}_s + \omega_s^2 (\bar{Q}_s^- - \bar{Q}_s^+) \right) \\
& + 12\varepsilon \bar{Q}_s \bar{Q}_s^H \left[\omega_s \bar{Q}_s \left(-\frac{1}{3} K_s^H X_{V0}^2 \left(N_s^+ X_{V0} + \frac{3}{2} (\omega_s^+)^2 - \frac{3}{2} K_s^+ \right) + 2F_R Q_s^- \right) \right. \\
& \left. + \sqrt{A^2 - X_{V0}^2} (Q_s^- + Q_s^+) K_s^H \bar{Q}_s + \frac{1}{3} K_s^H X_{V0}^3 \omega_s^3 (\bar{K}_s^- + \bar{K}_s^+) + Q_s^- Q_s^+ \bar{Q}_s \omega_s \varepsilon^2 \right]
\end{aligned} \tag{A.14}$$

$$\begin{aligned}
F_{a0} = & -4X_{V0} \bar{Q}_s \bar{Q}_s^H \omega_s \varepsilon \left(2F_R + \varepsilon^2 Q_s^+ \right) \left(-3\bar{Q}_s Q_s^- + X_{V0} \omega_s^3 (\bar{K}_s^- + \bar{K}_s^+) \sqrt{A^2 - X_{V0}^2} \right) \\
& 6\bar{Q}_s X_{V0}^2 \omega_s^3 \bar{Q}_s^H \left(2F_R + \varepsilon^2 Q_s^+ \right) (\bar{Q}_s^+ - \bar{Q}_s^-)
\end{aligned} \tag{A.15}$$

$$\begin{aligned}
G_A = & \varepsilon A K_s^H \bar{Q}_s^H \left[\left(A\pi \left((\omega_s^+)^3 - K_s^+ \omega_s^+ \right) + 4Q_s^+ \right) (\omega_s^-)^2 \right. \\
& \left. + \left(A\pi \left((\omega_s^-)^3 - K_s^- \omega_s^- \right) - 4Q_s^- \right) (\omega_s^+)^2 \right]
\end{aligned} \tag{A.16}$$

$$\begin{aligned}
G_\alpha = & 4\varepsilon \bar{Q}_s^H \left[K_s^H A^3 \left(N_s^+ (\omega_s^-)^2 - N_s^- (\omega_s^+)^2 \right) - 3Q_s^- (\omega_s^+)^2 \left(Q_s^+ \varepsilon^2 + 2F_R \right) \right. \\
& \left. + \frac{3}{4} A (\omega_s^+)^2 \omega_s^- \pi \left((\omega_s^-)^2 - K_s^- \right) \left(Q_s^+ \varepsilon^2 + 2F_R \right) \right]
\end{aligned} \tag{A.17}$$

$$\begin{aligned}
M_A = & 2\omega_s^- \bar{Q}_s^H \left(\omega_s^- \left(\varepsilon A (\omega_s^+)^3 - \left(\varepsilon^2 Q_s^+ + 2F_R \right) \omega_s^+ + A\pi K_s^H \right) \right) \\
& - 2A (\omega_s^-)^2 \omega_s^+ K_s^H (\bar{Q}_s^- \varepsilon - 2F_R)
\end{aligned} \tag{A.18}$$

gegeben.

Abbildungsverzeichnis

Abb. 1.1:	Gegenstände früher Stabilitätsuntersuchungen. Instabilität durch Druckrückführung.	4
Abb. 1.2:	Hydraulisches Positioniersystem mit direkter Positionsrückführung. .	6
Abb. 1.3:	Gegenstände früher Stabilitätsuntersuchungen. Instabilität durch hydrodynamische Strömungskräfte.	7
Abb. 1.4:	Unterschiedliche Ventilgeometrien zur Beeinflussung der Ventilcharakteristik.	10
Abb. 1.5:	Gegenstände asymptotischer Untersuchungen.	16
Abb. 3.1:	Systeme mit Druckrückführungen und Pumpe.	37
Abb. 3.2:	Systeme mit Druckrückführungen und Druckquelle.	37
Abb. 3.3:	Kräftebilanz sowie Geschwindigkeits- und Schubspannungsprofil bei einer laminaren Rohrströmung.	39
Abb. 3.4:	Positionierung von Induktivität und Kapazität am Beispiel einer Verzweigung von 3 Leitungen.	42
Abb. 3.5:	Modellierung eines Kolbenschieberventils.	43
Abb. 3.6:	Prinzipskizzen der im Bereich niedriger Drücke eingesetzten Verstellpumpen.	46
Abb. 4.1:	Detaillierte Darstellungen der Ventilkreisläufe, aus denen der verallgemeinerte Ventilkreislauf gebildet wird.	50
Abb. 4.2:	Systemdynamik des Konstantdrucksystems mit Druckregelventil und Konstantpumpe.	53
Abb. 4.3:	Systemdynamik des Systems mit 3/3-Proportional-Wegeventil und Druckquelle.	53
Abb. 4.4:	Stationäres Verhalten unter Variation der Systemdämpfung.	55
Abb. 4.5:	Vergleich der Grenzzyklusschwingungen des Originalsystems und der Taylorreihen-Entwicklung.	61

Abb. 4.6:	Vergleich der Grenzyklusschwingungen des Originalsystems und der Taylorreihen-Entwicklung unter Variation des kleinen Parameters. . .	61
Abb. 4.7:	Detaillierte Darstellung der Ventilkreisläufe mit Verstellpumpe und Druckminderventil.	62
Abb. 4.8:	Detaillierte Darstellung der Ventilkreisläufe mit zusätzlichen Druckrückführungen.	63
Abb. 4.9:	Systemdynamik des Load-Sensing-Systems mit Konstantpumpe. . . .	64
Abb. 4.10:	Systemdynamik des Systems mit Stromregelventil und Druckquelle. .	65
Abb. 4.11:	Stationäres Verhalten des Load-Sensing-Systems mit Konstantpumpe unter Variation der Systemdämpfung.	65
Abb. 4.12:	Stationäres Verhalten des Systems mit Stromregelventil und Druckquelle unter Variation der Systemdämpfung	66
Abb. 5.1:	Schnelle und langsame Bewegung des Ventilkreislaufs.	68
Abb. 5.2:	Vergleich der Grenzyklusschwingungen des Originalsystems und des reduzierten Systems.	70
Abb. 5.3:	Vergleich der Grenzyklusschwingungen des Originalsystems und des reduzierten Systems unter Variation des kleinen Parameters	71
Abb. 5.4:	Darstellung der Grundlösung.	73
Abb. 5.5:	Vergleich der Grenzyklusschwingungen des Originalsystems und des gemitteltem System.	75
Abb. 5.6:	Stationäres und transientes Verhalten des gemittelten Systems. . . .	76
Abb. 5.7:	Vergleich der Grenzyklusschwingungen des Originalsystems und des gemittelten Systems unter Variation des kleinen Parameters	77
Abb. 6.1:	Minimaltopologie zur Illustration möglicher Erregermechanismen. . .	79
Abb. 6.2:	Ventilkreislauf mit 3/3-Proportional-Wegeventil und pulsierender Druckquelle.	82
Abb. 6.3:	Vergleich der stationären Lösungen des Originalsystems und der Taylorreihen-Entwicklung in der Hauptresonanz.	85
Abb. 6.4:	Schnelle und langsame Bewegung des Ventilkreislaufs mit Fremderregung in der Hauptresonanz.	87
Abb. 6.5:	Vergleich der stationären Lösungen des Originalsystems und des reduzierten Systems in der Hauptresonanz $\Omega_Q = \omega_s$	88
Abb. 6.6:	Stabilität der Gleichgewichtslage in der Nähe der ersten und zweiten parametrischen Resonanz.	95
Abb. 6.7:	Darstellung der Grundlösung.	97
Abb. 6.8:	Vergleich der stationären Lösungen des Originalsystems und des gemittelten Systems in der Hauptresonanz.	99

Abb. 6.9:	Vergleich der stationären Lösungen des Originalsystems und des gemittelten Systems in der ersten parametrischen Resonanz.	100
Abb. 6.10:	Vergleich des Einschwingverhaltens des Originalsystems und des gemittelten Systems.	101
Abb. 6.11:	Phasenraumstruktur der gemittelten Gleichungen.	102
Abb. 6.12:	Vergleich der stationären Lösungen des Originalsystems und des gemittelten Systems in der Nähe der Hauptresonanz.	103
Abb. 6.13:	Vergleich der stationären Lösungen des Originalsystems und des gemittelten Systems in der Nähe der ersten parametrischen Resonanz.	104
Abb. 7.1:	Einfluss der Coulomb'schen Reibung auf die Dynamik des Ventilkreislaufs.	108
Abb. 7.2:	Grenzyklusschwingungen des reduzierten Systems mit Coulomb'scher Reibung.	114
Abb. 7.3:	Verlauf der Grundlösungen innerhalb einer Periode.	117
Abb. 7.4:	Druckverlauf während der Haftphasen.	118
Abb. 7.5:	Periodendauer der Schwingung und Haftdauern in Abhängigkeit der Schwingungsamplitude.	119
Abb. 7.6:	Vergleich des Einschwingverhaltens des Originalsystems und des gemittelten Systems.	121
Abb. 7.7:	Rechte Seite der gemittelten Gleichung in Abhängigkeit der Amplitude.	122
Abb. 7.8:	Vergleich der Grenzyklusschwingungen des Originalsystems und des gemittelten Systems unter Variation des kleinen Parameters.	122
Abb. 7.9:	Konstantdrucksystem mit Druckregelventil und Dämpfungsblende.	124
Abb. 7.10:	Zeitverlauf der schnellen Druckvariable.	126
Abb. 7.11:	Vergleich des Einschwingverhaltens des Originalsystems und des gemittelten Systems.	133
Abb. 7.12:	Rechte Seite der gemittelten Gleichung in Abhängigkeit der Amplitude.	133
Abb. 7.13:	Vergleich der Grenzyklusschwingungen des Originalsystems und des gemittelten Systems unter Variation des kleinen Parameters.	134
Abb. 7.14:	Vergleich der Grenzyklusschwingungen des Originalsystems und des gemittelten Systems unter Variation des kleinen Parameters; $\Gamma_{hc} = 0.1$	135
Abb. 7.15:	Ventilkreislauf mit kritisch überdecktem 3/3-Proportional-Wegeventil und Druckquelle.	136
Abb. 7.16:	Verlauf der Grundlösung innerhalb einer Periode für den Fall, dass die Schwingungen die Steuerkante überschreiten.	138
Abb. 7.17:	Rechte Seite der gemittelten Gleichungen in Abhängigkeit der Amplitude.	140
Abb. 7.18:	Vergleich der Grenzyklusschwingungen des Originalsystems und des gemittelten Systems unter Variation des kleinen Parameters.	141

Abb. 7.19: Stabilitätskarte des Ventils mit kritischer Überdeckung und $A_C = 0$. . . 143

Abb. 7.20: Phasenraumstruktur des kritisch überdeckten Ventils für den Fall $\alpha_C = 0$.144

Abb. 8.1: Vergleich der reduzierten Modelle A_2 und A_3 mit dem Originalsystem A_1 151

Abb. 8.2: Vergleich der reduzierten Modelle A_2 und A_3 mit dem Originalsystem A_1 bei zeitvariantem Steuereingang. 151

Abb. 8.3: Regelungsstrategie. 158

Abb. 8.4: Regelungen basierend auf den Modellen A_1 und A_3 angewendet auf Modell A_1 158

Abb. 8.5: Regelungen basierend auf den Modellen A_1 und A_3 angewendet auf das Modell A_1 bei zeitvarianter Solltrajektorie. 159

Abb. 8.6: Vergleich der Modelle B_1, B_2 und $B_3 = A_1$ 161

Abb. 8.7: Vergleich der Modelle B_1, B_2 und $B_3 = A_1$ bei zeitvariantem Steuereingang. 162

Abb. 8.8: Regelungsstrategie. 165

Abb. 8.9: Regelungen basierend auf den Modellen A_1 und B_2 165

Abb. 8.10: Ventilkreislauf mit Druckregelventil, Dämpfungsblende und realer Konstantpumpe. 167

Abb. 8.11: Regelungen basierend auf dem Modell C_2 angewendet auf das Modell C_1 171

Tabellenverzeichnis

Tab. 4.1: In den Simulationen standardmäßig verwendete Parameterwerte.	52
Tab. 4.2: Dimensionslose Parameterwerte.	58
Tab. 4.3: Werte der skalierten Parameter.	60
Tab. 6.1: Anregungsmechanismen.	81
Tab. 6.2: Parameterwerte mit erhöhter Dämpfung zur Gewährleistung einer stabilen Gleichgewichtslage des autonomen Systems.	85
Tab. 7.1: Übergangsbedingungen an den Gleit-Haft-, Gleit-Gleit- und Haft-Gleit-Übergängen.	109
Tab. 7.2: Skalierte Parameterwerte für das Modell mit Coulomb'scher Reibung. . .	112
Tab. 7.3: Zustände während der Haftphasen.	117
Tab. 7.4: Druckdynamik während der verschiedenen Haftphasen.	117
Tab. 7.5: Näherungslösungen der Druckdynamik während der verschiedenen Haftphasen.	118
Tab. 7.6: Standardparametrierung des Ventilkreislaufs mit Dämpfungsblende. . .	124
Tab. 7.7: Skalierte Parameterwerte für das Modell mit quadratischer Dämpfung. .	130
Tab. 8.1: Übersicht der Modelle.	150
Tab. 8.2: Einfluss der Modelle und der Integratoren auf die Anzahl der Integrations-schritte als ein indirektes Maß für die Rechengeschwindigkeit. . . .	152
Tab. 8.3: Übersicht der Modelle mit quadratischer Dämpfung.	161
Tab. 8.4: Einfluss der Modelle und der Integratoren auf die Anzahl der Integrations-schritte.	162
Tab. 8.5: Standardparametrierung des Ventilkreislaufs mit Dämpfungsblende und realer Pumpe.	167
Tab. 8.6: Übersicht der Modelle mit quadratischer Dämpfung und Pumpendynamik. .	170

Literaturverzeichnis

- [1] ADAMY, J. (2018): *Nichtlineare Systeme und Regelungen*. 3. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer. DOI: 10.1007/978-3-662-55685-6.
- [2] AINSWORTH, F.W. (1956): The Effect of Oil-Column Acoustic Resonance on Hydraulic Valve Squeal. *Transactions of the ASME* **78**(4), S. 773–778.
- [3] ALLEYNE, A. und J.K. HEDRICK (1995): Nonlinear adaptive control of active suspensions. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **3**(1), S. 94–101. DOI: 10.1109/87.370714.
- [4] ÅMAN, R., H. HANDROOS und T. ESKOLA (2008): Computationally efficient two-regime flow orifice model for real-time simulation. *Simulation Modelling Practice and Theory* **16**(8), S. 945–961. DOI: 10.1016/j.simpat.2008.05.010.
- [5] ANLAS, G. (1999): Effect of Two-to-One Internal Resonances in a Nonlinearly Restrained Fluid Valve. *Journal of Vibration and Acoustics* **121**(1), S. 59–63. DOI: 10.1115/1.2893948.
- [6] BACKÉ, W. (1962): Ein Beitrag zur Untersuchung der dynamischen Stabilität hydraulischer Steuerungen. *Industrie-Anzeiger* **11**(2), S. 157–162.
- [7] BACKÉ, W. (1974): *Systematik der hydraulischen Widerstandsschaltungen in Ventilen und Regelkreisen*. Bd. 15. Ölhydraulik und Pneumatik. Mainz: Krausskopf-Verlag.
- [8] BAUER, G. (2011): *Ölhydraulik: Grundlagen, Bauelemente, Anwendungen*. 10. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.
- [9] BAZSÓ, C. und C.J. HÓS (2013): An experimental study on the stability of a direct spring loaded poppet relief valve. *Journal of Fluids and Structures* **42**, S. 456–465. DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2013.08.008.
- [10] BAZSÓ, C., A.R. CHAMPNEYS und C.J. HÓS (2014): Bifurcation Analysis of a Simplified Model of a Pressure Relief Valve Attached to a Pipe. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* **13**(2), S. 704–721. DOI: 10.1137/130922598.
- [11] BAZSÓ, C. und C.J. HÓS (2015): On the Static Instability of Liquid Poppet Valves. *Periodica Polytechnica Mechanical Engineering* **59**(1), S. 1–7. DOI: 10.3311/PPme.7049.

- [12] BEATER, P. (1999): *Entwurf hydraulischer Maschinen: Modellbildung, Stabilitätsanalyse und Simulation hydrostatischer Antriebe und Steuerungen*. VDI-Buch. Berlin, Heidelberg: Springer. DOI: 10.1007/978-3-642-58395-7.
- [13] BERNARDO, M., C. BUDD, A. R. CHAMPNEYS und P. KOWALCZYK (2008): *Piecewise-smooth dynamical systems: Theory and applications*. Bd. 163. Applied Mathematical Sciences Ser. London: Springer.
- [14] BLACKBURN, J. F., G. REETHOF und J. L. SHEARER (1962): *Fluid Power Control: Regelung durch Strömungsenergie. 2. Band Regel- und Steuerelemente*. Deutsche Ausgabe. Wiesbaden: Krausskopf-Verlag.
- [15] BORCHSENIUS, F. (2003): *Simulation ölhydraulischer Systeme*. (Dissertation). Bd. 1005. Fortschritt-Berichte VDI Reihe 8, Meß-, Steuerungs- und Regelungstechnik. Düsseldorf: VDI-Verlag.
- [16] BOWNS, D. E., S. P. TOMLINSON und R. E. DOREY (1986): Computer simulation techniques for the dynamic performance assessment of fluid power systems. In: *BHRA Seventh International Symposium on Fluid power, University of Bath*, S. 81–88.
- [17] BOWNS, D. E. und L. M. WANG (1990): The Digital Computation of Pressures in Hydraulic Pipes with Small Volume using an Iterative Technique. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Mechanical Engineering Science* 204(1), S. 29–36. DOI: 10.1243/PIME_PROC_1990_204_072_02.
- [18] CHEN, P.-C. und A.-C. HUANG (2005): Adaptive Multiple-surface Sliding Control of Hydraulic Active Suspension Systems Based on the Function Approximation Technique. *Journal of Vibration and Control* 11(5), S. 685–706. DOI: 10.1177/1077546305052788.
- [19] CHEN, P.-C. und A.-C. HUANG (2006): Adaptive sliding control of active suspension systems with uncertain hydraulic actuator dynamics. *Vehicle System Dynamics* 44(5), S. 357–368. DOI: 10.1080/00423110600621664.
- [20] COX, C. S. und I. G. FRENCH (1986): Limit Cycle Prediction Conditions for a Class of Hydraulic Control System. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 108, S. 17–23.
- [21] DANKOWICZ, H. und E. FOTSCH (2017): On the Analysis of Chatter in Mechanical Systems with Impacts. *Procedia IUTAM* 20, S. 18–25. DOI: 10.1016/j.piutam.2017.03.004.
- [22] DOKAINISH, M. A. und M. M. ELMADANY (1978): On the Nonlinear Response of a Relief Valve. *Journal of Mechanical Design* 100(4), S. 675–680. DOI: 10.1115/1.3453991.
- [23] ELLMAN, A. und R. PICHE ´ (1996): A Modified Orifice Flow Formula for Numerical Simulation of Fluid Power Systems. *Fluid Power Systems and Technology* 3, S. 59–62.

- [24] ELLMAN, A. und R. PICHE' (1999): A Two Regime Orifice Flow Formula for Numerical Simulation. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* **121**(4), S. 721–724. DOI: 10.1115/1.2802541.
- [25] ERYILMAZ, B. und B. H. WILSON (2001): Improved Tracking Control of Hydraulic Systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* **123**(3), S. 457–462. DOI: 10.1115/1.1386394.
- [26] EYRES, R. D., A. R. CHAMPNEYS und N. A. J. LIEVEN (2005): Modelling and Dynamic Response of a Damper with Relief Valve. *Nonlinear Dynamics* **40**, S. 119–147. DOI: 10.1007/s11071-005-4144-6.
- [27] EYRES, R. D., P. T. PIROINEN, A. R. CHAMPNEYS und N. A. J. LIEVEN (2005): Grazing Bifurcations and Chaos in the Dynamics of a Hydraulic Damper with Relief Valves. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* **4**(4), S. 1076–1106. DOI: 10.1137/040619697.
- [28] EZEKIEL, F. D. (1955): *Effect of a hydraulic conduit with distributed parameters on control-valve stability*. Dissertation. Cambridge, Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology.
- [29] EZEKIEL, F. D. (1958): The Effect of Conduit Dynamics on Control-Valve Stability. *Transactions of the ASME* **80**, S. 904–908.
- [30] FENICHEL, N. (1979): Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations. *Journal of Differential Equations* **31**(1), S. 53–98. DOI: 10.1016/0022-0396(79)90152-9.
- [31] FIDLIN, A. und J. J. THOMSEN (2008): Non-trivial effects of high-frequency excitation for strongly damped mechanical systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics* **43**(7), S. 569–578. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2008.02.002.
- [32] FIDLIN, A. und O. DROZDETSKAYA (2016): On the Averaging in Strongly Damped Systems: The General Approach and its Application to Asymptotic Analysis of the Sommerfeld Effect. *Procedia IUTAM* **19**, S. 43–52. DOI: 10.1016/j.piutam.2016.03.008.
- [33] FOSTER, K. und M. M. KULKARNI (1968): Steady-Amplitude, Self-Excited Oscillations of Hydraulic Spool Valves. *Journal of Mechanical Engineering Science* **10**(4), S. 306–318. DOI: 10.1243/JMES_JOUR_1968_010_049_02.
- [34] FUNK, J. E. (1964): Poppet Valve Stability. *Journal of Basic Engineering* **86**(2), S. 207–212. DOI: 10.1115/1.3653036.
- [35] GREEN, W. L. und G. D. WOODS (1973): Some Causes of 'Chatter' in Direct Acting Spring Loaded Poppet Valve. In: *3rd International Fluid Power Symposium*, S. C 2–29.
- [36] HAHN, H., A. PIEPENBRINK und K.-D. LEIMBACH (1994): Input/output linearization control of an electro servo-hydraulic actuator. In: *Proceedings of IEEE International Conference on Control and Applications CCA-94*. IEEE, S. 995–1000. DOI: 10.1109/cca.1994.381197.

- [37] HALANAY, A., C. A. SAFTA, I. URSU und F. URSU (2004): Stability of Equilibria in a Four-dimensional Nonlinear Model of a Hydraulic Servomechanism. *Journal of Engineering Mathematics* **49**(4), S. 391–405. DOI: 10.1023/B:ENGI.0000032810.53387.d9.
- [38] HATHOUT, J.-P., J. AHMED und A. KOJIĆ (2004): Reduced Order Modeling and Control of an Electrohydraulic Valve System. *IFAC Proceedings Volumes* **37**(22), S. 167–172. DOI: 10.1016/S1474-6670(17)30339-7.
- [39] HAYASHI, S. und T. MOCHIZUKI (1989): CHAOTIC OSCILLATIONS OCCURRING IN A HYDRAULIC CIRCUIT. In: *Proceedings of the IFPS International Symposium on Fluid Power*, S. 475–482. DOI: 10.5739/isfp.1989.475.
- [40] HAYASHI, S. (1995): Instability of Poppet Valve Circuit. *JSME international journal. Ser. C, Dynamics, control, robotics, design and manufacturing* **38**(3), S. 357–366. DOI: 10.1299/jsmec1993.38.357.
- [41] HAYASHI, S., T. HAYASE und T. KURAHASHI (1997): CHAOS IN A HYDRAULIC CONTROL VALVE. *Journal of Fluids and Structures* **11**(6), S. 693–716. DOI: 10.1006/jfls.1997.0096.
- [42] HORN, J., J. BAMBERGER, P. MICHAU und S. PINDL (2003): Flatness-based clutch control for automated manual transmissions. *Control Engineering Practice* **11**(12), S. 1353–1359. DOI: 10.1016/S0967-0661(03)00099-6.
- [43] HŐS, C. J. und A. R. CHAMPNEYS (2012): Grazing bifurcations and chatter in a pressure relief valve model. *Physica D: Nonlinear Phenomena* **241**(22), S. 2068–2076. DOI: 10.1016/j.physd.2011.05.013.
- [44] HŐS, C. J., C. BAZSÓ und A. R. CHAMPNEYS (2015): Model reduction of a direct spring-loaded pressure relief valve with upstream pipe. *IMA Journal of Applied Mathematics* **80**(4), S. 1009–1024. DOI: 10.1093/imamat/hxu034.
- [45] HŐS, C. J., A. R. CHAMPNEYS, K. PAUL und M. McNEELY (2016): Dynamic behaviour of direct spring loaded pressure relief valves: III valves in liquid service. *Journal of Loss Prevention in the Process Industries* **43**, S. 1–9. DOI: 10.1016/j.jlp.2016.03.030.
- [46] INEICHEN, L. (2013): *Konzeptvergleich zur Bekämpfung der Torsionsschwingungen im Antriebsstrang eines Kraftfahrzeugs*. (Dissertation). Karlsruhe: KIT Scientific Publishing. DOI: 10.5445/KSP/1000034947.
- [47] ITO, T., T. MUTO, K. SUZUKI und K. TSUKAHARA (1967): Study on the Self-Sustained Oscillation of a Piston-Type Valving System: 1st Report, Analysis of a Simple Valving System and Some Experiments. *Bulletin of JSME* **10**(41), S. 793–807. DOI: 10.1299/jsme1958.10.793.
- [48] ITO, T., T. MUTO und T. SHINODA (1968): Study on the Self-Sustained Oscillation of a Piston-Type Valving System: 2nd Report, Analysis of a Valving System

- with a Capacity and Some Experiments. *Bulletin of JSME* **11**(45), S. 487–495. DOI: 10.1299/jsme1958.11.487.
- [49] ITO, T., T. MUTO, S. KANO und M. HATTORI (1970): Study on the Instability in a Loaded Hydraulic Servo-Mechanism: 1st Report, Effects of Compressibility of Oil and Sustained Oscillations. *Bulletin of JSME* **13**(63), S. 1066–1075. DOI: 10.1299/jsme1958.13.1066.
- [50] JELALI, M. und A. KROLL (2003): *Hydraulic Servo-systems*. London: Springer. DOI: 10.1007/978-1-4471-0099-7.
- [51] JING, C., H. XU und J. JIANG (2020): Practical torque tracking control of electro-hydraulic load simulator using singular perturbation theory. *ISA transactions* **102**, S. 304–313. DOI: 10.1016/j.isatra.2020.02.035.
- [52] JOHNSON, B. L. und D. E. WANDLING (1969): Actual Popping Pressure of a Relief Valve With a Real Helical Spring Under Dynamic Load. *Journal of Engineering for Industry* **91**(4), S. 1142–1146. DOI: 10.1115/1.3591762.
- [53] KASAI, K. (1968): On the Stability of a Poppet Valve with an Elastic Support : 1st Report, Considering the Effect of the Inlet Piping System. *Bulletin of JSME* **11**(48), S. 1068–1083. DOI: 10.1299/jsme1958.11.1068.
- [54] KASAI, K. (1969): On the Stability of a Poppet Valve with an Elastic Support : 2nd Report, Considering the Effect of both the Inlet and the Outlet Piping System. *Bulletin of JSME* **12**(53), S. 1091–1098. DOI: 10.1299/jsme1958.12.1091.
- [55] KHALIL, H. K. (2002): *Nonlinear systems*. 3. Aufl. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.
- [56] KHORASANI, K. (1989): A slow manifold approach to linear equivalents of nonlinear singularly perturbed systems. *Automatica* **25**(2), S. 301–306. DOI: 10.1016/0005-1098(89)90085-X.
- [57] KIANI-OSHTORJANI, M., S. USTINOV, H. HANDROOS, P. JALALI und A. MIKKOLA (2020): Real-Time Simulation of Fluid Power Systems Containing Small Oil Volumes, Using the Method of Multiple Scales. *IEEE Access* **8**, S. 196940–196950. DOI: 10.1109/access.2020.3034698.
- [58] KIM, E.-S. (1996): Nonlinear indirect adaptive control of a quarter car active suspension. In: *Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on Control Applications*. Piscataway, NJ: IEEE Service Center, S. 61–66. DOI: 10.1109/CCA.1996.558605.
- [59] KOKOTOVIĆ, P. V., R. E. O'MALLEY und P. SANNUTI (1976): Singular perturbations and order reduction in control theory — An overview. *Automatica* **12**(2), S. 123–132. DOI: 10.1016/0005-1098(76)90076-5.
- [60] KOKOTOVIĆ, P. V., H. K. KHALIL und J. O'REILLY (1986): *Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and design*. London: Academic Press.

- [61] KOKOTOVIĆ, P. V. (1987): Singular perturbation techniques in control theory. In: *Singular Perturbations and Asymptotic Analysis in Control Systems*. P. V. Kokotović, A. Bensoussan und G. L. Blankenship (Hrsg.). Bd. 90. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Berlin/Heidelberg: Springer, S. 1–55. DOI: 10.1007/BFb0007176.
- [62] KOKOTOVIĆ, P. V., H. K. KHALIL und J. O'REILLY (1999): *Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design*. London: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM). DOI: 10.1137/1.9781611971118.
- [63] KÖSTER, M. und A. FIDLIN (2013): Nonlinear Dynamics of a Hydraulic Pressure Control Valve. In: *Proceedings of the 11th International Conference on Vibration Problems*. Lisbon. URL: https://icoev.org/proceedings2013/570_paper0.pdf.
- [64] KÖSTER, M. (2017): *On Modeling, Analysis and Nonlinear Control of Hydraulic Systems*. Dissertation. Karlsruhe: Karlsruher Institut für Technologie. DOI: 10.5445/IR/1000070929.
- [65] KÖSTER, M. und A. FIDLIN (2017): Variable displacement vane pump, part I: a minimal nonlinear model. *Nonlinear Dynamics* 90(2), S. 1077–1089. DOI: 10.1007/s11071-017-3711-y.
- [66] KÖSTER, M. und A. FIDLIN (2017): Variable displacement vane pump, part II: nonlinear volume flow control. *Nonlinear Dynamics* 90(2), S. 1091–1103. DOI: 10.1007/s11071-017-3717-5.
- [67] KRAUME, M. (2020): *Transportvorgänge in der Verfahrenstechnik*. Berlin, Heidelberg: Springer. DOI: 10.1007/978-3-662-60012-2.
- [68] KREMER, E. (2008): About absolute stability of control valves. In: *6th EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2008)*. Saint Petersburg. URL: <http://lib.physcon.ru/doc?id=d354de706a04>.
- [69] KREMER, E. (2016): Slow motions in systems with fast modulated excitation. *Journal of Sound and Vibration* 383, S. 295–308. DOI: 10.1016/j.jsv.2016.07.006.
- [70] KREMER, E. (2017): Low-frequency response of controlled systems on a high-frequency parametric excitation. In: *9th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2017)*. Budapest. URL: <https://congressline.hu/enoc2017/abstracts/525.pdf>.
- [71] KREMER, G. G. und D. F. THOMPSON (1998): A bifurcation-based procedure for designing and analysing robustly stable non-linear hydraulic servo systems. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering* 212(5), S. 383–394. DOI: 10.1243/0959651981539550.
- [72] KREMER, G. G. und D. F. THOMPSON (1998): Robust stability of nonlinear hydraulic servo systems using closest Hopf bifurcation techniques. In: *Proceedings of the 1998 American Control Conference*. Bd. 5. Piscataway, NJ: IEEE Customer Service, S. 2912–2916. DOI: 10.1109/ACC.1998.688390.

- [73] KREMER, G. G. (1999): Robust stability analysis of large-scale hydraulic control systems. In: *Proceedings of the 1999 American Control Conference (Cat. No. 99CH36251)*. San Diego: IEEE, S. 749–753. DOI: 10.1109/acc.1999.783140.
- [74] KREMER, G. G. (2001): Enhanced robust stability analysis of large hydraulic control systems via a bifurcation-based procedure. *Journal of the Franklin Institute* 338(7), S. 781–809. DOI: 10.1016/S0016-0032(01)00031-X.
- [75] LEE, S. Y. und J. F. BLACKBURN (1952): Contributions to Hydraulic Control: 1 Steady state axial forces on control valve pistons. *Transactions of the ASME* 76, S. 1005–1011.
- [76] LEE, S. Y. und J. F. BLACKBURN (1952): Contributions to Hydraulic Control: 2 Transient Flow-Forces and Valve Instability. *Transactions of the ASME* 76, S. 1013–1016.
- [77] LEMKE, C. E. (1978): Some pivot schemes for the linear complementarity problem. In: *Complementarity and Fixed Point Problems*. R. W. Cottle und M. Balinski (Hrsg.). Bd. 7. Springer eBook Collection Mathematics and Statistics. Berlin, Heidelberg: Springer, S. 15–35. DOI: 10.1007/BFb0120779.
- [78] LICSKÓ, G., A. R. CHAMPNEYS und C. J. HÓs (2009): Nonlinear Analysis of a Single Stage Pressure Relief Valve. *IAENG International Journal of Applied Mathematics* 39(4), S. 286–299.
- [79] LIN, C.-C. und L. A. SEGEL (1988): *Mathematics applied to deterministic problems in the natural sciences*. New York: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM).
- [80] LUCENTE, G., M. MONTANARI und C. ROSSI (2007): Modelling of an automated manual transmission system. *Mechatronics* 17(2-3), S. 73–91. DOI: 10.1016/j.mechatronics.2006.11.002.
- [81] LUTZ, O. (1933): Die Vorgänge in federbelasteten Einspritzdüsen von kompressorlosen Ölmaschinen. *Ingenieur-Archiv* 4(2), S. 153–168. DOI: 10.1007/BF02079855.
- [82] MA, C. Y. (1967): The Analysis and Design of Hydraulic Pressure-Reducing Valves. *Journal of Engineering for Industry* 89(2), S. 301–308. DOI: 10.1115/1.3610044.
- [83] MACCARI, A. (2000): Saddle-Node Bifurcations of Cycles in a Relief Valve. *Nonlinear Dynamics* 22, S. 225–247. DOI: 10.1023/A:1008349500673.
- [84] MANHARTSGRUBER, B. und R. SCHEIDL (1998): Nonlinear Control of Hydraulic Servo Drives Based on a Singular Perturbation Approach. In: *Proceedings of Bath Workshop on Power Transmission and Motion Control*. London: Professional Engineering Publishing, S. 301–313. DOI: 10.13140/RG.2.1.3048.2000.
- [85] MANHARTSGRUBER, B. (2000): Application of singular perturbation theory to hydraulic servo drives-system analysis and control design. In: *Proceedings of the 1st FPNI PhD Symposium Hamburg*, S. 339–352.

- [86] MANHARTSGRUBER, B. (2003): Stability analysis of the servohydraulic equations with linear state feedback and harmonic reference signal. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics (PAMM)* 3(1), S. 92–95. DOI: 10.1002/pamm.200310324.
- [87] MANRING, N. D. und R. E. JOHNSON (1997): Optimal Orifice Geometry for a Hydraulic Pressure-Reducing Valve. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 119(3), S. 467–473. DOI: 10.1115/1.2801280.
- [88] MARX, B. und W. VOGT (2011): *Dynamische Systeme: Theorie und Numerik*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag. DOI: 10.1007/978-3-8274-2448-8.
- [89] MERRITT, H. E. (1967): *Hydraulic Control Systems*. New York, London, Sydney: John Wiley & Sons.
- [90] MONTANARI, M., F. RONCHI, C. ROSSI, A. TILLI und A. TONIELLI (2004): Control and performance evaluation of a clutch servo system with hydraulic actuation. *Control Engineering Practice* 12(11), S. 1369–1379. DOI: 10.1016/j.conengprac.2003.09.004.
- [91] MÜLLER, P. C. (1995): Calculation of Lyapunov exponents for dynamic systems with discontinuities. *Chaos, Solitons & Fractals* 5(9), S. 1671–1681. DOI: 10.1016/0960-0779(94)00170-u.
- [92] NAYFEH, A. H. (1973): *Perturbation methods*. New York: John Wiley & Sons.
- [93] NAYFEH, A. H. und H. BOUGUERRA (1990): Non-Linear Response of A Fluid Valve. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 25(4), S. 433–449. DOI: 10.1016/0020-7462(90)90031-4.
- [94] NAYFEH, A. H., J. F. NAYFEH und D. T. MOOK (1992): On methods for continuous systems with quadratic and cubic nonlinearities. *Nonlinear Dynamics* 3(2), S. 145–162. DOI: 10.1007/BF00118990.
- [95] NAYFEH, A. H. (1993): *Introduction to Perturbation Techniques*. New York: John Wiley & Sons.
- [96] NAYFEH, A. H. und B. BALACHANDRAN (2004): *Applied nonlinear dynamics: Analytical, computational and experimental methods*. Wiley series in nonlinear science. Weinheim: Wiley-VCH. DOI: 10.1002/9783527617548.
- [97] NOTON, G. J. und D. E. TURNBULL (1958): Some Factors Influencing the Stability of Piston-Type Control Valves. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* 172(1), S. 1065–1081. DOI: 10.1243/PIME_PROC_1958_172_081_02.
- [98] O'MALLEY, R. E. (1991): *Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations*. Bd. 89. New York: Springer. DOI: 10.1007/978-1-4612-0977-5.
- [99] OPITZ, H. und W. BACKÉ (1964): *Über Die Dynamische Stabilität Hydraulischer Steuerungen Unter Berücksichtigung der Strömungskräfte*. Bd. 1246. Forschungsberichte des Landes Nordrhein-Westfalen Ser. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften GmbH.

- [100] OSHTORJANI, M. K., A. MIKKOLA und P. JALALI (2019): Numerical Treatment of Singularity in Hydraulic Circuits Using Singular Perturbation Theory. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* **24**(1), S. 144–153. DOI: 10.1109/tmech.2018.2876157.
- [101] PAWLIK, M. (1994): *Zur Auslegung von Druckregelkreisen unter Einbeziehung der Leitungsdynamik*. (Dissertation). Bd. 382. Fortschritt-Berichte VDI Reihe 8, Meß-, Steuerungs- und Regelungstechnik. Düsseldorf: VDI-Verlag.
- [102] PFEIFFER, F. und F. BORCHSENIUS (2004): New Hydraulic System Modelling. *Journal of Vibration and Control* **10**(10), S. 1493–1515. DOI: 10.1177/1077546304042063.
- [103] PFEIFFER, F. (2007): Deregularization of a smooth system – example hydraulics. *Nonlinear Dynamics* **47**, S. 219–233. DOI: 10.1007/s11071-006-9069-1.
- [104] RUDERMAN, M. (2017): Full- and reduced-order model of hydraulic cylinder for motion control. In: *Proceedings IECON 2017 - 43rd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*. Piscataway, NJ: IEEE, S. 7275–7280. DOI: 10.1109/IECON.2017.8217274.
- [105] SAITO, T. (1962): Self-excited Vibrations of Hydraulic Control-valve Pipe-lines. *Bulletin of JSME* **5**(19), S. 437–443. DOI: 10.1299/j sme1958.5.437.
- [106] SANDERS, J. A., J. MURDOCK und F. VERHULST (2007): *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*. Bd. 59. Applied Mathematical Sciences. New York: Springer. DOI: 10.1007/978-0-387-48918-6.
- [107] SASTRY, S. (1999): *Nonlinear Systems: Analysis, Stability, and Control*. 1. Aufl. Bd. 10. Interdisciplinary Applied Mathematics Ser. New York: Springer.
- [108] SCHEIDL, R., B. MANHARTSGRUBER und G. RIHA (1997): Modern Hydrostatic Drive Systems In The Light Of Dynamical Systems Theory. In: *4th Conference on Dynamical Systems - Theory and Applications*. Lodz. URL: https://www.researchgate.net/publication/251844427_MODERN_HYDROSTATIC_DRIVE_SYSTEMS_IN_THE_LIGHT_OF_DYNAMICAL_SYSTEMS_THEORY.
- [109] SCHEIDL, R. und B. MANHARTSGRUBER (1998): On the Dynamic Behavior of Servo-Hydraulic Drives. *Nonlinear Dynamics* **17**, S. 247–268. DOI: 10.1023/A:1008348714791.
- [110] SHAMPINE, L. F., M. W. REICHELT und J. A. KIERZENKA (1999): Solving Index-1 DAEs in MATLAB and Simulink. *SIAM Review* **41**(3), S. 538–552. DOI: 10.1137/S003614459933425X.
- [111] SHUKLA, A. und D. F. THOMPSON (2001): Bifurcation Stability of Servo-Hydraulic Systems. In: *Proceedings of the 2001 American Control Conference*. (Cat. No. 01CH37148). Bd. 5, S. 3943–3948. DOI: 10.1109/ACC.2001.946274.
- [112] SHUKLA, A. und D. F. THOMPSON (2002): Control of bifurcations in multidimensional parameter space for servo-hydraulic systems. In: *Proceedings of the 2002 American Control Conference (IEEE Cat. No.CH37301)*. IEEE, S. 4813–4818. DOI: 10.1109/acc.2002.1025420.

- [113] SHUKLA, A. und D. F. THOMPSON (2005): An Investigation of the Effect of Feedback Control on the Bifurcation Stability of a Nonlinear Servohydraulic System. *International Journal of Fluid Power* 6(2), S. 37–46. DOI: 10.1080/14399776.2005.10781218.
- [114] SINGH, A. (1982): An analytical study of the dynamics and stability of a spring loaded safety valve. *Nuclear Engineering and Design* 72(2), S. 197–204. DOI: 10.1016/0029-5493(82)90215-1.
- [115] STREHMEL, K. (2012): *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen: Nichtsteife, steife und differential-algebraische Gleichungen*. 2. Aufl. Springer eBook Collection. Wiesbaden: Vieweg+Teubner. DOI: 10.1007/978-3-8348-2263-5.
- [116] THOMSEN, J. J. (2002): Some general effects of strong high-frequency excitation: Stiffening, biasing and smoothing. *Journal of Sound and Vibration* 253(4), S. 807–831. DOI: 10.1006/jsvi.2001.4036.
- [117] ULANICKI, B. und P. SKWORCOW (2014): Why PRVs Tends to Oscillate at Low Flows. *Procedia Engineering* 89, S. 378–385. DOI: 10.1016/j.proeng.2014.11.202.
- [118] VAUGHAN, N. D. und J. B. GAMBLE (1996): The Modeling and Simulation of a Proportional Solenoid Valve. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 118(1), S. 120–125. DOI: 10.1115/1.2801131.
- [119] VERHULST, F. (2007): Singular perturbation methods for slow–fast dynamics. *Nonlinear Dynamics* 50(4), S. 747–753. DOI: 10.1007/s11071-007-9236-z.
- [120] WANDLING, D. E. und B. L. JOHNSON (1972): Hydraulic Poppet Valve Stability. In: *SAE Technical Paper Series*. Bd. 81. SAE International, S. 2358–2368. DOI: 10.4271/720792.
- [121] WANG, C., L. QUAN, S. ZHANG, H. MENG und Y. LAN (2017): Reduced-order model based active disturbance rejection control of hydraulic servo system with singular value perturbation theory. *ISA transactions* 67, S. 455–465. DOI: 10.1016/j.isatra.2017.01.009.
- [122] WANG, L., W. J. BOOK und J. D. HUGGINS (2009): A control approach with application to variable displacement pumps. In: *2009 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*. Singapore: IEEE, S. 1862–1867. DOI: 10.1109/aim.2009.5229794.
- [123] WANG, L., W. J. BOOK und J. D. HUGGINS (2012): Application of Singular Perturbation Theory to Hydraulic Pump Controlled Systems. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 17(2), S. 251–259. DOI: 10.1109/TMECH.2010.2096230.
- [124] WIDMANN, R. (1985): *Geräuschminderung bei druckgeregelten Flügelzellenpumpen: Der Fördervorgang, Schallerregungsmechanismen und konstruktive Maßnahmen zur Lärminderung*. Dissertation. Stuttgart: Universität Stuttgart.
- [125] WILL, D. und N. GEBHARDT (2011): *Hydraulik*. Berlin, Heidelberg: Springer. DOI: 10.1007/978-3-642-17243-4.

- [126] YAO, J., W. DENG und Z. JIAO (2015): Adaptive Control of Hydraulic Actuators With LuGre Model-Based Friction Compensation. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **62**(10), S. 6469–6477. DOI: [10.1109/TIE.2015.2423660](https://doi.org/10.1109/TIE.2015.2423660).
- [127] ZIEGLER, B., P. COPPOLANI und J. L. GARCIA (1990): Dynamic behavior of check valves and safety valves with fluid interaction. *Nuclear Engineering and Design* **124**(3), S. 391–401. DOI: [10.1016/0029-5493\(90\)90303-F](https://doi.org/10.1016/0029-5493(90)90303-F).

Eigene Publikationen

- [128] BAUM, C., H. HETZLER, S. SCHRÖDERS, T. LEISTER und W. SEEMANN (2021): A computationally efficient nonlinear foil air bearing model for fully coupled, transient rotor dynamic investigations. *Tribology International* **153**, S. 106434. DOI: 10.1016/j.triboint.2020.106434.
- [129] MAIER, C. C., S. SCHRÖDERS, W. EBNER, M. KÖSTER, A. FIDLIN und C. HAMETNER (2019): Modeling and nonlinear parameter identification for hydraulic servo-systems with switching properties. *Mechatronics* **61**, S. 83–95. DOI: 10.1016/j.mechatronics.2019.05.005.
- [130] SCHRÖDERS, S. und A. FIDLIN (2017): Nonlinear Pressure Control of a Switched Hydraulic System. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics (PAMM)* **17**(1), S. 817–818. DOI: 10.1002/pamm.201710376.
- [131] SCHRÖDERS, S. und A. FIDLIN (2019): Oscillations in a system of two coupled self-regulating spool valves with switching properties. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics (PAMM)* **19**(1), e201900340. DOI: 10.1002/pamm.201900340.
- [132] SCHRÖDERS, S. und A. FIDLIN (2020): Analyse des dynamischen Verhaltens zweier gekoppelter Druckregelventile. *Forschung im Ingenieurwesen* **84**(2), S. 205–213. DOI: 10.1007/s10010-020-00401-6.
- [133] SCHRÖDERS, S., C. C. MAIER, W. EBNER, A. FIDLIN und C. HAMETNER (2020): Two-degree-of-freedom MIMO control for hydraulic servo-systems with switching properties. *Control Engineering Practice* **95**, S. 104246. DOI: 10.1016/j.conengprac.2019.104246.
- [134] SCHRÖDERS, S. und A. FIDLIN (2021): Asymptotic analysis of self-excited and forced vibrations of a self-regulating pressure control valve. *Nonlinear Dynamics* **103**(3), S. 2315–2327. DOI: 10.1007/s11071-021-06241-5.

- Band 1** **Marcus Simon**
Zur Stabilität dynamischer Systeme mit stochastischer
Anregung.
ISBN 3-937300-13-9
- Band 2** **Clemens Reitze**
Closed Loop, Entwicklungsplattform für mechatronische
Fahr-dynamikregelsysteme.
ISBN 3-937300-19-8
- Band 3** **Martin Georg Cichon**
Zum Einfluß stochastischer Anregungen auf mechanische
Systeme.
ISBN 3-86644-003-0
- Band 4** **Rainer Keppler**
Zur Modellierung und Simulation von Mehrkörpersystemen
unter Berücksichtigung von Greifkontakt bei Robotern.
ISBN 978-3-86644-092-0
- Band 5** **Bernd Waltersberger**
Struktur-dynamik mit ein- und zweiseitigen Bindungen
aufgrund reibungsbehafteter Kontakte.
ISBN 978-3-86644-153-8
- Band 6** **Rüdiger Benz**
Fahrzeugsimulation zur Zuverlässigkeitsabsicherung
von karosseriefesten Kfz-Komponenten.
ISBN 978-3-86644-197-2
- Band 7** **Pierre Barthels**
Zur Modellierung, dynamischen Simulation und Schwingungsunter-
drückung bei nichtglatten, zeitvarianten Balkensystemen.
ISBN 978-3-86644-217-7

- Band 8** **Hartmut Hetzler**
Zur Stabilität von Systemen bewegter Kontinua mit Reibkontakten am Beispiel des Bremsenquietschens.
ISBN 978-3-86644-229-0
- Band 9** **Frank Dienerowitz**
Der Helixaktor – Zum Konzept eines vorverwundenen Biegeaktors.
ISBN 978-3-86644-232-0
- Band 10** **Christian Rudolf**
Piezoelektrische Self-sensing-Aktoren zur Korrektur statischer Verlagerungen.
ISBN 978-3-86644-267-2
- Band 11** **Günther Stelzner**
Zur Modellierung und Simulation biomechanischer Mehrkörpersysteme.
ISBN 978-3-86644-340-2
- Band 12** **Christian Wetzel**
Zur probabilistischen Betrachtung von Schienen- und Kraftfahrzeugsystemen unter zufälliger Windanregung.
ISBN 978-3-86644-444-7
- Band 13** **Wolfgang Stamm**
Modellierung und Simulation von Mehrkörpersystemen mit flächigen Reibkontakten.
ISBN 978-3-86644-605-2
- Band 14** **Felix Fritz**
Modellierung von Wälzlagern als generische Maschinenelemente einer Mehrkörpersimulation.
ISBN 978-3-86644-667-0
- Band 15** **Aydin Boyaci**
Zum Stabilitäts- und Bifurkationsverhalten hochtouriger Rotoren in Gleitlagern.
ISBN 978-3-86644-780-6

- Band 16** **Ruggeri Toni Liong**
Application of the cohesive zone model to the analysis
of rotors with a transverse crack.
ISBN 978-3-86644-791-2
- Band 17** **Ulrich Bittner**
Strukturakustische Optimierung von Axialkolbeneinheiten.
Modellbildung, Validierung und Topologieoptimierung.
ISBN 978-3-86644-938-1
- Band 18** **Alexander Karmazin**
Time-efficient Simulation of Surface-excited Guided
Lamb Wave Propagation in Composites.
ISBN 978-3-86644-935-0
- Band 19** **Heike Vogt**
Zum Einfluss von Fahrzeug- und Straßenparametern
auf die Ausbildung von Straßenunebenheiten.
ISBN 978-3-7315-0023-0
- Band 20** **Laurent Ineichen**
Konzeptvergleich zur Bekämpfung der Torsionsschwingungen
im Antriebsstrang eines Kraftfahrzeugs.
ISBN 978-3-7315-0030-8
- Band 21** **Sietze van Buuren**
Modeling and simulation of porous journal bearings in
multibody systems.
ISBN 978-3-7315-0084-1
- Band 22** **Dominik Kern**
Neuartige Drehgelenke für reibungsarme Mechanismen.
ISBN 978-3-7315-0103-9
- Band 23** **Nicole Gaus**
Zur Ermittlung eines stochastischen Reibwerts und dessen Einfluss
auf reibungserregte Schwingungen.
ISBN 978-3-7315-0118-3
- Band 24** **Fabian Bauer**
Optimierung der Energieeffizienz zweibeiniger
Roboter durch elastische Kopplungen.
ISBN 978-3-7315-0256-2

- Band 25** **Benedikt Wiegert**
Nichtlineare Schwingungen von Systemen
mit elastohydrodynamischen Linienkontakten.
ISBN 978-3-7315-0350-7
- Band 26** **Arsenty Tikhomolov**
Analytische, numerische und messtechnische
Untersuchung der Dynamik von Fahrzeugkupplungen
am Beispiel des Trennproblems.
ISBN 978-3-7315-0362-0
- Band 27** **Daniel Maier**
On the Use of Model Order Reduction Techniques
for the Elastohydrodynamic Contact Problem.
ISBN 978-3-7315-0369-9
- Band 28** **Xiaoyu Zhang**
Crosswind stability of vehicles under nonstationary
wind excitation.
ISBN 978-3-7315-0376-7
- Band 29** **Jens Deppler**
Ein Beitrag zur viskoelastischen Modellierung nichtholonomer
Bindungsgleichungen.
ISBN 978-3-7315-0548-8
- Band 30** **Georg Jehle**
Zur Modellbildung und Simulation reibungserregter
Schwingungen in Pkw-Schaltgetrieben.
ISBN 978-3-7315-0668-3
- Band 31** **Joachim Klima**
Lubricant transport towards tribocontact in capillary
surface structures.
ISBN 978-3-7315-0814-4
- Band 32** **Gábor Kenderi**
Nonparametric identification of nonlinear dynamic systems.
ISBN 978-3-7315-0834-2

- Band 33** **Jan Henrik Schmidt**
An efficient solution procedure for elasto-hydrodynamic contact problems considering structural dynamics.
ISBN 978-3-7315-0872-4
- Band 34** **Ulrich Johannes Römer**
Über den Einfluss der Fußgeometrie auf die Energieeffizienz beim zweibeinigen Gehen.
ISBN 978-3-7315-0887-8
- Band 35** **Simon Kapelke**
Zur Beeinflussung reibungsbehafteter Systeme mithilfe überlagerter Schwingungen.
ISBN 978-3-7315-0905-9
- Band 36** **Jens Burgert**
On direct and inverse problems related to longitudinal impact of non-uniform elastic rods.
ISBN 978-3-7315-1087-1
- Band 37** **Tim Leister**
Dynamics of Rotors on Refrigerant-Lubricated Gas Foil Bearings.
ISBN 978-3-7315-1112-0
- Band 38** **Simon Schröders**
Ein Beitrag zur asymptotischen Analyse der hydraulischen Ventilsteuerungen.
ISBN 978-3-7315-1221-9

In hydraulischen Ventilsteuerungen erlaubt das Funktionsprinzip der Selbstregulierung einen sehr robusten und kostengünstigen Betrieb, jedoch zu dem Preis möglicher Instabilitäten und damit verbundener Schwingungsprobleme.

Für die Analyse dieser Schwingungsprobleme wird in dieser Arbeit eine analytische Methodik basierend auf der singulären Störungsrechnung und einem Mittelwertbildungsverfahren entwickelt. Die Methodik erlaubt eine sehr einfache Berechnung stabiler und instabiler periodischer Lösungen sowie die Analyse der Stabilität unter dem Einfluss nicht-glatte Phänomene.

Die Erkenntnisse aus der dynamischen Analyse fließen zuletzt in die Entwicklung reduzierter Modelle ein, mit denen eine teils signifikante Rechenzeiterparnis in der Simulation instationärer Bewegungen und in der nichtlinearen Regelung erzielt wird.

