

BIBLIOTHÈQUE
FEV 26 1986
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL

EPM/RT-86-6

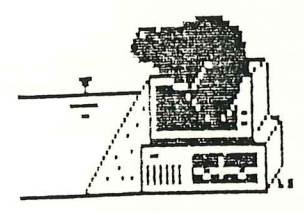
SCHEMA AUX ELEMENTS FINIS EN COORDONNEES POLAIRES
APPLIQUE A L'ÉCOULEMENT VISQUEUX DANS UNE TURBINE

don

Michel ST-GEORGES
André FORTIN
Ricardo CAMARERO

Département de Mathématiques appliquées

Ecole Polytechnique de Montréal
Février 1986



Tous droits réservés. On ne peut reproduire ni diffuser aucune partie du présent ouvrage, sous quelque forme que ce soit, sans avoir obtenu au préalable l'autorisation écrite de l'auteur.

Dépôt légal, 1^{er} trimestre 1986
Bibliothèque nationale du Québec
Bibliothèque nationale du Canada

Pour se procurer une copie de ce document, s'adresser au:

Service de l'édition
Ecole Polytechnique de Montréal
Case postale 6079, Succursale A
Montréal (Québec) H3C 3A7
(514) 344-4903

Compter 0,05 \$ par page (arrondir au dollar le plus près), plus 1,50 \$ (Canada) ou 2,50 \$ (étranger) pour la couverture, les frais de poste et la manutention. Régler en dollars canadiens par chèque ou mandat-poste au nom de l'Ecole Polytechnique de Montréal. Nous n'honorons que les commandes accompagnées d'un paiement, sauf s'il y a eu entente préalable, dans le cas d'établissements d'enseignement ou d'organismes canadiens.

RESUME

Ce travail présente un algorithme de solution des équations de Navier-Stokes en coordonnées polaires par un schéma aux éléments finis.

L'algorithme développé vise principalement la résolution d'écoulements bidimensionnels, stationnaires, laminaires, visqueux et incompressibles dans un canal formé des aubes directrices et avant-directrices d'une turbine hydraulique.

Un logiciel spécialisé permet la création d'un maillage adapté dans le canal interaube; un second logiciel permet l'affichage des résultats obtenus.

L'algorithme est d'abord testé à l'aide des solutions analytiques des écoulements de Couette et de Jefferey-Hamel, puis directement dans le canal interaube.

D'après les résultats obtenus, l'algorithme proposé représente fidèlement le comportement d'un fluide et peut prédire les points d'arrêt et les zones de recirculation; il résiste bien aux irrégularités du maillage et peut s'adapter automatiquement à la difficulté de chaque problème.

ABSTRACT

The objective of this work is to present an algorithm that solves the Navier-Stokes equations in polar coordinates using a finite element method.

The algorithm is developed for the simulation of the flow through a cascade made of the guiding and pre-guiding vanes of a hydraulic turbines. The code can simulate two-dimensional, laminar, steady-state, viscous and incompressible flows.

A curvilinear grid is generated by a specialized program and the results can be viewed via an interactive analysis and display software package.

The tests performed on the algorithm consist of comparisons of the results with the analytical solutions of Couette and Jefferey-Hamel flows, followed by experiments with the guiding vanes cascade.

The results obtained show very realistic flow predictions by the algorithm. The code can also predict recirculation zones and stagnation points. It has shown robust characteristics in irregular meshes and is self-adjustable to the difficulty of a given problem.

REMERCIEMENTS

Je désire remercier par la présente tous ceux qui ont rendu possible la rédaction de ce mémoire. Je pense en particulier à messieurs André Fortin et Ricardo Camarero pour le sujet de ce travail et pour leurs judicieux conseils tout au long de cette étude.

Je remercie également tous mes confrères du département de mathématiques appliquées pour leur aide dans certains aspects informatiques et pour leur soutien moral.

J'exprime ma reconnaissance au Conseil de Recherches en Sciences Naturelles et en Génie pour m'avoir accordé une bourse d'études pendant la durée de ce travail et à l'École Polytechnique et au département de mathématiques appliquées qui ont gracieusement fourni le matériel nécessaire.

Je tiens à remercier également madame Joanne Berthiaume pour l'écriture soignée et mouvementée de ce mémoire.

PLAN

Résumé	iii
Abstract	iv
Remerciements	v
Liste des symboles	3
Liste des figures	7
Introduction	10
Chapitre 1 - Présentation du problème	12
1.1 Equations de base	16
1.2 Géométrie	18
1.3 Conditions aux limites	19
1.4 Coordonnées polaires	20
Chapitre 2 - Méthodes d'éléments finis pour Navier-Stokes	22
2.1 Formulation variationnelle	22
2.2 Conditions aux limites naturelles	26
2.3 Discrétisation	28
Chapitre 3 - Méthode de résolution	38
3.1 Traitement de la non-linéarité	38
3.1.1 Méthode quasi Newton-Raphson	38
3.1.2 Méthode d'Usawa	42
3.1.3 Méthode combinée	44
3.2 Choix de l'élément	47
3.3 Elimination des degrés de liberté associés au centroïde	49
3.4 Imposition de la périodicité	54
3.5 Montée en Reynolds	57
Chapitre 4 - Aspects informatique	62
4.1 Génération du maillage	62
4.2 Affichage des résultats	72
4.3 Stockage de l'information	79
Chapitre 5 - Résultats	81
5.1 Ecoulement de Couette	81
5.2 Ecoulement de Jefferey-Hamel	83
5.3 Canal déformé	87

5.4	Aubes directrices et avant-directrices	88
5.5	Ajustement automatique de la montée en Reynolds	97
5.6	Evaluation du coût de calcul	99
	Conclusion	102
	Annexe A - Transformation de la formulation variationnelle des équations de Navier-Stokes en coordonnées polaires	103
	Références	107

LISTE DES SYMBOLES

$\{a_i\}_{i=1}^N$	point d'interpolation
$\{\hat{a}_i\}_{i=1}^N$	point d'interpolation sur l'élément de référence
c	nombre réel
\tilde{C}	contrainte de surface
D/D_t	dérivée particulaire
$D_{i,j}$	tenseur du taux de déformation
\tilde{e}_i	base du repère cartésien
\tilde{F}	forces massiques
f_r, f_θ	composantes des forces massiques
F_K	fonction de transformation géométrique
K_i	élément
\hat{K}	élément de référence
$L(y, q)$	opérateur de Lagrange
$L_r(y, q)$	opérateur de Lagrange augmenté
$L^2(\Omega)$	espace des fonctions de carré sommable ($Q \in L^2(\Omega)$)
M	sous-espace de Q de fonctions constantes par morceaux
N_e	nombre d'éléments
N_i	nombre de noeuds géométriques
\tilde{N}	fonctions de base géométriques
N_j	nombre de points d'interpolation
N	sous-espace de Q de fonctions orthogonales à M
N_h	sous-espace discret approximant N

\vec{n}	vecteur normal unitaire
p	pression
$\{p_i\}$	vecteur nodal des pressions
P_h	approximation de la pression
P_k	espace de polynômes de degré $\leq k$
\hat{P}	espace de fonctions polynômiales
p^n	approximation de la pression à l'étape n
δp^n	correction de la pression à l'étape n
Q	espace de solution de la pression
Q_h	approximation de dimension finie de Q
q	fonction de pondération
Q_k	espace de polynômes de degré $\leq k$ en chacune des variables
Re	nombre de Reynolds
r	rayon
\bar{r}	rayon du centroïde
$R(\vec{u}^n, p^n)$	résidu à l'étape n
\vec{s}_i	noeud géométrique
\vec{s}_1	noeud géométrique de l'élément de référence
S	contour ou surface du domaine
dS	élément de surface
\vec{u}	vecteur vitesse
u_r, u_θ	composantes de la vitesse dans le système r, θ

\tilde{u}_h	approximation de la vitesse
\tilde{u}^n	approximation de la vitesse à l'étape n
$\tilde{\delta u}^n$	correction de la vitesse à l'étape n
\tilde{u}_0	vitesse à l'entrée du canal
V	espace de solution des vitesses
V_h	approximation de dimension finie de V
\tilde{v}	fonction de pondération
V_0	sous-espace de V de fonctions à divergence nulle
$V_{0,N}$	sous-espace de V de fonctions à divergence quasi nulle

LETTRES GRECQUES

∇	gradient
Δ	Laplacien
(α_i)	vecteur nodal des vitesses
δ_{ij}	symbole de Kronecker
ε	critère de convergence
ξ, η	coordonnées sur l'élément de référence
Γ_h	partition du domaine en éléments
μ	viscosité
ν	viscosité cinématique
Ω	domaine
$d\Omega$	élément de volume
ρ	densité
σ_{ij}	tenseur de contraintes

σ_{nn}	contrainte normale
σ_{nt}	contrainte tangentielle
$\hat{\Sigma}$	ensemble de points d'interpolation sur l'élément de référence
θ	position angulaire
$\bar{\theta}$	position angulaire du centroïde
τ_0	cisaillement à la paroi ou pariétal
τ \sim	vecteur tangentiel unitaire

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Turbine Kaplan	13
Figure 1.2	Bâche spirale	14
Figure 1.3	Aubes directrices et avant-directrices	14
Figure 1.4	Canal interaube	18
Figure 1.5	Conditions aux limites	20
Figure 2.1	Contraintes de surface	26
Figure 2.2	Maillage typique	29
Figure 2.3	Règle de partition	30
Figure 2.4	Transformation géométrique	31
Figure 2.5	Transformation des noeuds d'interpolation	34
Figure 3.1	Elément $Q^{(9)} - P_1$	47
Figure 3.2	Elément géométrique	48
Figure 3.3	Choix des frontières	55
Figure 3.4	Bord typique d'un maillage	56
Figure 3.5	Séries typiques de nombres de Reynolds	58
Figure 3.6	Sévérité des maillages	60
Figure 4.1	Menu principal du générateur de maillages	63
Figure 4.2	Caractéristiques d'une cascade typique	65
Figure 4.3	Cascade typique	66
Figure 4.4	Maillage avec concentration	69
Figure 4.5	Géométrie des cascades	70
Figure 4.6	Menu principal du programme d'analyse des résultats	72
Figure 4.7	Graphique du coefficient de pression	73

Figure 4.8	Graphique du coefficient de vitesse	74
Figure 4.9	Graphique du taux de cisaillement à la paroi	75
Figure 4.10	Champ de vitesse autour de la pale	76
Figure 4.11	Choix de la fonction à afficher	77
Figure 4.12	Isobares statiques	77
Figure 4.13	Graphique de la perte de pression totale	78
Figure 4.14	Liste des tableaux imprimables	79
Figure 5.1	Champ de vitesse pour un écoulement de Couette	82
Figure 5.2	Isobares pour un écoulement de Couette	82
Figure 5.3	Champ de vitesse pour l'écoulement de Jefferey-Hamel à Reynolds 1	84
Figure 5.4	Comparaison des profils de vitesse à l'entrée et à la sortie à Reynolds 1	85
Figure 5.5	Champ de vitesse pour l'écoulement de Jefferey-Hamel à Reynolds 4000	86
Figure 5.6	Comparaison des profils de vitesse à l'entrée et à la sortie à Reynolds 4000	86
Figure 5.7	Maillage déformé	87
Figure 5.8	Champ de vitesse dans le maillage déformé	88
Figure 5.9	Caractéristiques du canal formé des aubes directrices et avant-directrices	89
Figure 5.10	Champ de vitesse à Reynolds 800	90
Figure 5.11	Isobares statiques à Reynolds 800	90
Figure 5.12	Coefficient de pression à Reynolds 800	91
Figure 5.13	Coefficient de vitesse à Reynolds 800	91
Figure 5.14	Coefficient de frottement à Reynolds 800	92
Figure 5.15	Champ de vitesse à Reynolds 3000	94

Figure 5.16	Isobares statiques à Reynolds 3000	94
Figure 5.17	Coefficient de pression à Reynolds 3000	95
Figure 5.18	Coefficient de vitesse à Reynolds 3000	95
Figure 5.19	Coefficient de frottement à Reynolds 3000	96
Figure 5.20	Champ de vitesse pour un écoulement désaligné	97
Figure 5.21	Ajustement de la sévérité d'un maillage	98
Figure 5.22	Série de nombres de Reynolds utilisée	98
Figure 5.23	Graphique du temps de calcul en fonction de la taille du maillage	100
Figure 5.24	Graphique de l'espace mémoire en fonction de la taille du maillage	100

INTRODUCTION

L'évolution technologique actuelle amène l'ingénieur à réaliser des projets de plus en plus complexes et coûteux dans les domaines de l'aéronautique, de l'aérospatiale et du nucléaire.

Dans ces domaines et dans bien d'autres, l'ingénieur a besoin de savoir le plus précisément possible l'influence de ses décisions lors de la conception: il a besoin de modèles pour simuler le comportement de systèmes physiques.

La mécanique des fluides et des solides permet de décrire le comportement de systèmes physiques au moyen d'équations aux dérivées partielles; la méthode des éléments finis est une méthode utilisée pour résoudre ces équations. Cette méthode fait appel aux sciences de l'ingénieur pour établir les équations, aux méthodes numériques pour les discrétiser et à l'informatique pour effectuer efficacement les calculs sur ordinateur.

Le texte qui suit décrit un algorithme utilisant un schéma aux éléments finis en coordonnées polaires pour l'étude de l'écoulement laminaire dans un distributeur de turbine hydraulique. Les équations aux dérivées partielles régissant cet écoulement sont d'abord présentées; viennent ensuite quelques généralités sur les méthodes d'éléments finis suivies des particularités de l'algorithme. Les logiciels de génération de maillages et d'analyse des résultats sont décrits brièvement, puis les résultats de l'algorithme sont présentés et comparés à des solutions analytiques et aux résultats obtenus par d'autres méthodes.

CHAPITRE I

PRESENTATION DU PROBLEME

Lors de la conception d'une turbine hydraulique, l'ordinateur s'avère un outil d'analyse rapide et puissant permettant de prédire le comportement général de la machine. Avant même la réalisation d'un prototype, la simulation sur ordinateur prévoit assez précisément quels seront les vitesses, pressions, débits et puissances de la turbine projetée. Si la turbine est insatisfaisante, on peut rapidement la modifier et simuler le comportement de cette nouvelle turbine sur ordinateur en quelques heures, jusqu'à ce qu'on obtienne les caractéristiques désirées.

L'approche décrite plus haut est souvent appelée Conception Assistée par Ordinateur (CAO) appliquée aux turbines. La CAO permet d'accélérer le processus de design, de diminuer les coûts associés et de réduire les risques d'erreur.

L'algorithme décrit dans les pages qui suivent vient compléter la panoplie de codes existants et qui permettent la simulation de composantes de la turbine

telles le canal d'amenée, la bêche spirale, la turbine proprement dite et le diffuseur.

L'algorithme présenté est conçu pour simuler le comportement bidimensionnel de l'écoulement entre les aubes directrices d'une turbine. Une telle turbine est présentée à la figure 1.1. Les figures 1.2 et 1.3 montrent les aubes directrices et avant-directrices; ces aubes sont situées au centre de la bêche spirale et orientent l'écoulement sur les aubes de la roue. On remarquera le pivot des aubes directrices; elles sont orientables pour pouvoir contrôler le débit de la turbine.

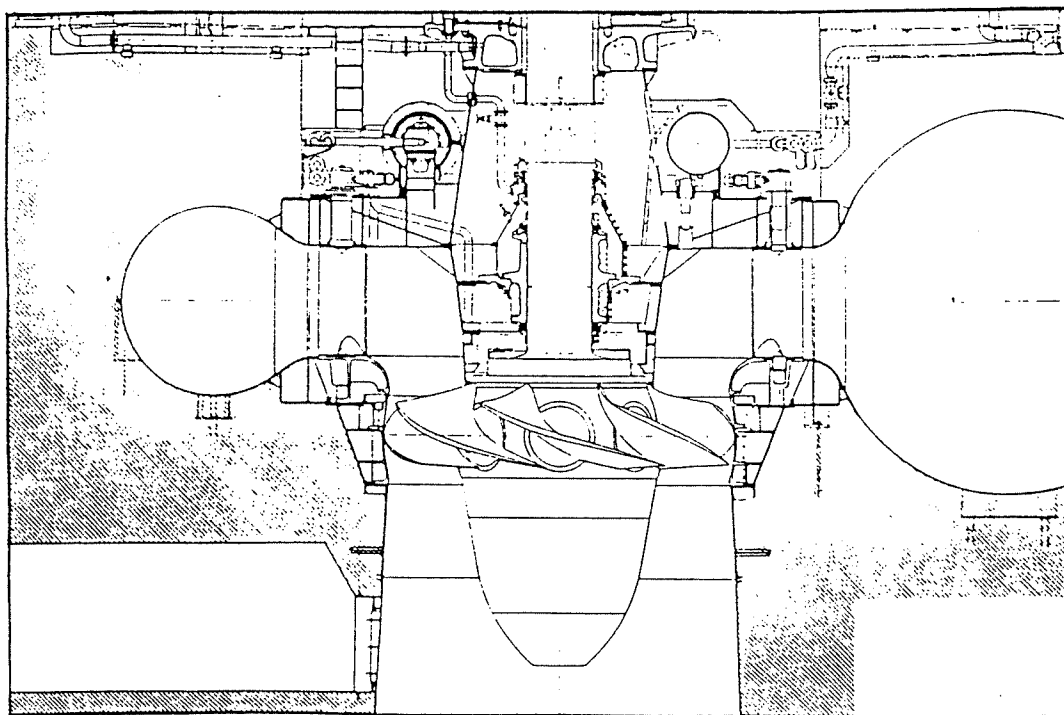


Figure 1.1 Turbine Kaplan

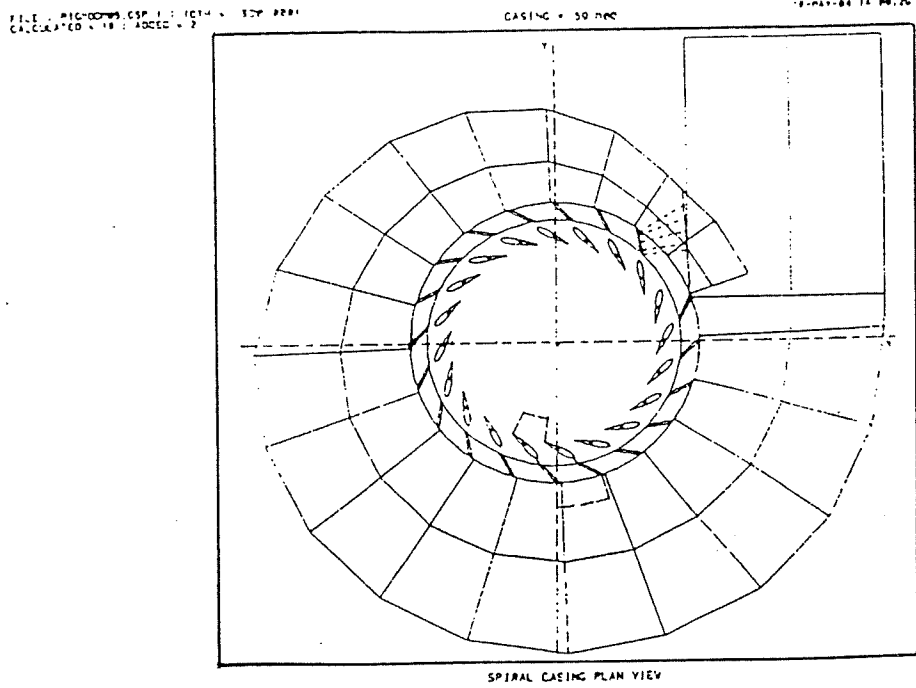


Figure 1.2 Bâche spirale

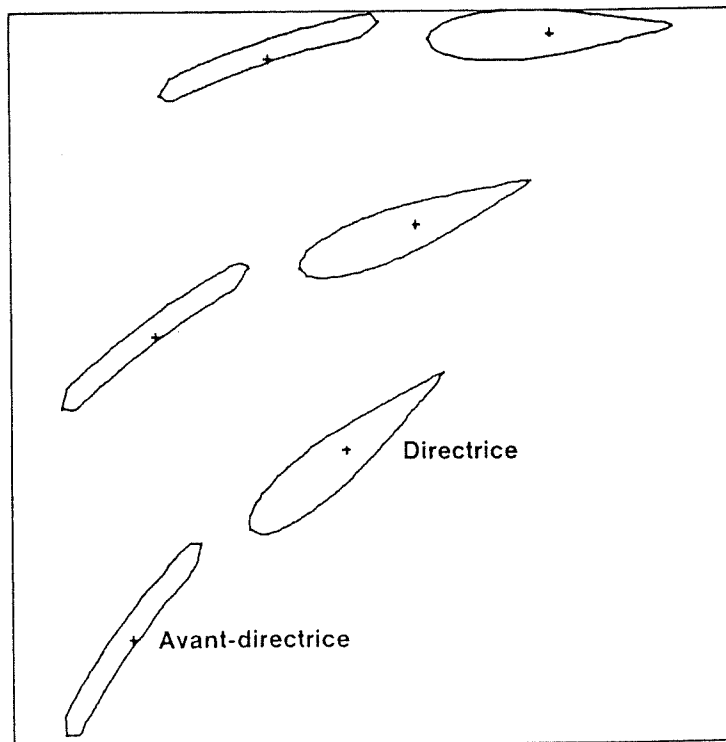


Figure 1.3 Aubes directrices et avant-directrices

Historiquement, la conception des turbines se faisait empiriquement. En se basant sur l'expérience antérieure, on savait à peu près quel type de turbine était préférable dans chaque cas; on connaissait les grandes lignes de leur comportement. La mise au point de la turbine se faisait directement sur des modèles réduits et des prototypes.

Avec le temps, l'augmentation des coûts de fabrication et l'amélioration des ordinateurs, la simulation numérique d'écoulements s'est grandement développée. Au début, une simplification courante était de négliger la viscosité du fluide et d'obtenir une solution potentielle en deux dimensions. Les modèles se raffinant, la viscosité, la compressibilité et finalement la turbulence ont été modélisées. De nos jours, les écoulements bidimensionnels peuvent être simulés par un nombre sans cesse croissant de méthodes et d'algorithmes de complexité et de précision variées selon les besoins et le cas à traiter. Il existe également plusieurs algorithmes tridimensionnels, mais bien du travail reste à faire dans ce domaine.

Une des premières phases de conception de l'algorithme est de choisir quelles seront les équations utilisées comme base.

1.1 Equations de base

Pour représenter le comportement des fluides, nous avons choisi d'utiliser les équations de Navier-Stokes.

Sous leur forme générale, ces équations s'écrivent sous forme adimensionnelle [1]:

Equation de Navier-Stokes:

$$\frac{D}{Dt} \underline{u} = \underline{F} - \underline{\nabla} p + \frac{1}{Re} \Delta \underline{u} \quad (1.1.1)$$

Equation de continuité (conservation de la masse):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0 \quad (1.1.2)$$

où Re est le nombre de Reynolds, le rapport adimensionnel entre les forces d'inertie et les forces de viscosité. Le terme D_u/D_t représente les termes de transport, \underline{F} les forces massiques, $\underline{\nabla} p$ les forces de pression et $(1/Re)\Delta \underline{u}$ les termes de diffusion.

Nous considérerons ici les écoulements bidimensionnels laminaires, permanents, incompressibles et

isothermes. En première approximation, on peut négliger les écoulements secondaires et considérer l'écoulement comme étant plan; une simulation en deux dimensions donnera quand même une bonne idée du comportement de l'écoulement. Pour de faibles nombres de Reynolds, un écoulement réel présente en général un comportement laminaire; nous pouvons considérer l'écoulement comme tel, la modélisation de la turbulence étant reportée à une étape ultérieure.

Pour simplifier le problème, nous avons choisi de négliger les variations temporelles: l'écoulement simulé est permanent. Pour une description détaillée d'un algorithme similaire pour des écoulements instationnaires, nous référons le lecteur à FORTIN [2]. Aux vitesses considérées, les gradients de pression étant faibles, les variations de densité peuvent être négligées et le fluide considéré incompressible; le transfert de chaleur est également négligé.

Après ces simplifications, les équations de Navier-Stokes se résument à

$$(\underline{u} \cdot \underline{\nabla})\underline{u} = \underline{F} - \underline{\nabla}p + \frac{1}{Re} \Delta \underline{u} \quad (1.1.3)$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0 \quad (1.1.4)$$

1.2 Géométrie

Le domaine de calcul est constitué des aubes directrices et avant-directrices présentées à la figure 3, d'une portion de l'espace devant les aubes appelée entrée et d'une portion après les aubes appelée sortie (figure 1.4).

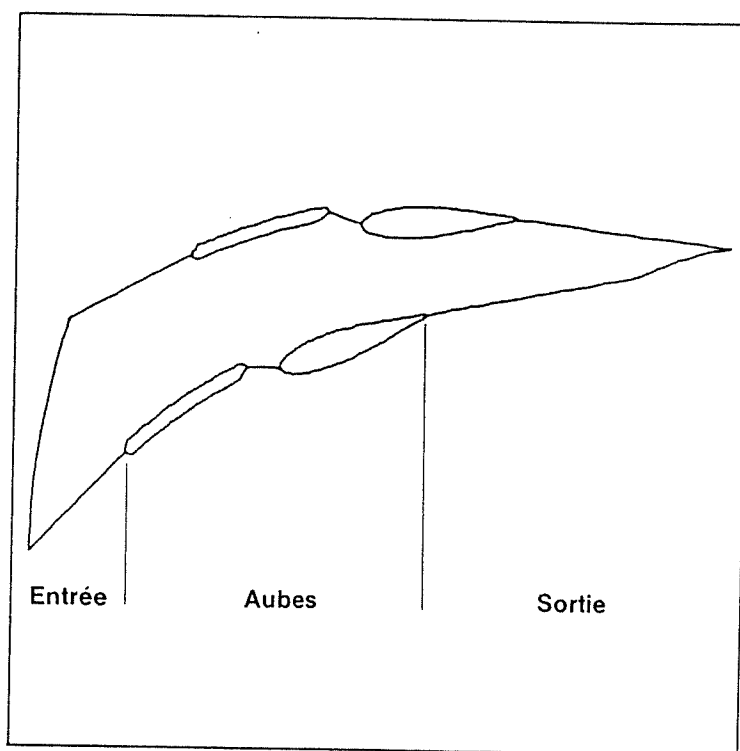


Figure 1.4 Canal interaube

Les dimensions et la forme de l'entrée et de la sortie sont choisies arbitrairement. En général, l'entrée et la sortie sont placés dans les axes du bord d'attaque et

du bord de fuite respectivement. L'entrée est choisie suffisamment longue pour que l'écoulement soit bien stable avant d'arriver sur les profils et la sortie assez longue pour simuler l'écoulement loin dans le sillage, là où l'interférence des profils est passablement amortie.

1.3 Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont résumées à la figure 1.5.

A l'entrée du canal (1), la vitesse est connue et imposée; de chaque côté (2) la frontière est périodique. La périodicité signifie que l'écoulement du fluide est identique entre toutes les aubes directrices de la turbine par symétrie: l'écoulement dans un canal donné est identique à l'écoulement dans tout autre canal (voir figure 1.2).

Sur les aubes (3), une condition de non-glissement est imposée; le fluide étant visqueux, la vitesse doit être nulle le long d'une paroi solide. A la sortie du canal (4) des conditions de contraintes nulles sont imposées. Nous verrons plus loin que ces conditions découlent naturellement de la formulation variationnelle utilisée.

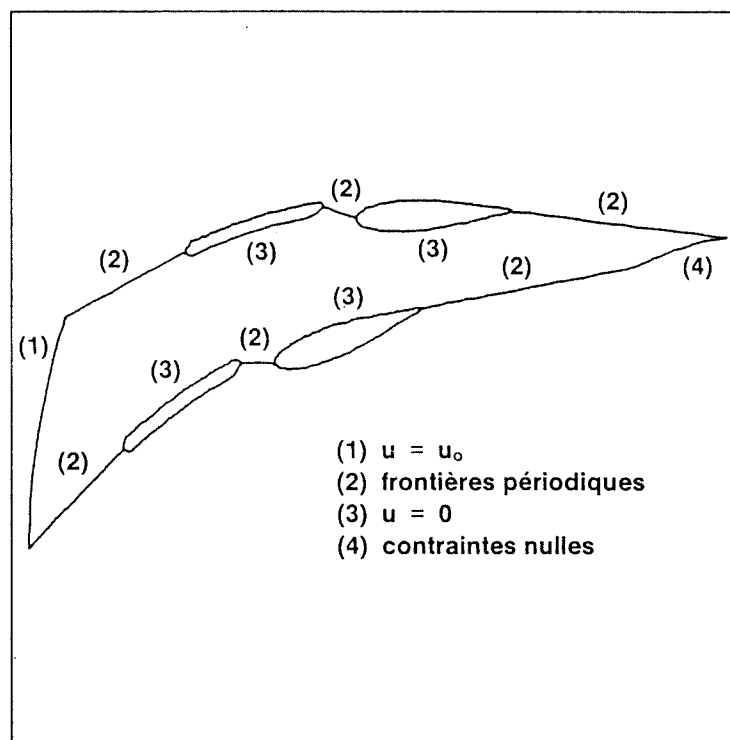


Figure 1.5 Conditions aux limites

1.4 Coordonnées polaires

Le canal interaube décrit précédemment, de par sa symétrie radiale, est facilement représenté en coordonnées polaires. De plus, dans le système r, θ la périodicité est très simple à imposer: u_r et u_θ doivent être identiques de chaque côté du canal.

La principale raison de l'utilisation des coordonnées polaires est la simplicité du traitement de la périodicité aux frontières.

En coordonnées polaires les équations de Navier-Stokes s'écrivent:

$$\frac{Du_r}{Dt} - \frac{u_\theta^2}{r} = f_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left\{ \Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right\} \quad (1.4.1)$$

$$\frac{Du_\theta}{Dt} + \frac{u_r u_\theta}{r} = f_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{Re} \left\{ \Delta u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \right\} \quad (1.4.2)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (1.4.3)$$

La suite du développement est en coordonnées cartésiennes par souci de simplicité; les équations en coordonnées polaires sont équivalentes et peuvent être dérivées à l'aide d'un changement de variables approprié.

CHAPITRE 2

METHODES D'ELEMENTS FINIS POUR NAVIER-STOKES

Le comportement du fluide est obtenu en calculant la vitesse et la pression par une méthode d'éléments finis. De nombreux ouvrages sont consacrés à ces méthodes et nous référons le lecteur aux ouvrages de ODEN [5], ZIENKIEWICZ [6] et STRANG-FIX [7] pour des considérations d'ordre général. Le développement théorique utilise en grande partie la notation de CIARLET [8].

2.1 Formulation variationnelle

Utilisant la convention de sommation sur les indices répétés, les équations de Navier-Stokes (1.1.3) - (1.1.4) s'écrivent sous la forme plus générale

$$(\tilde{u} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{u}_i - \frac{1}{\text{Re}} \tilde{\nabla} \cdot (\sigma_{ij} \tilde{e}_j) - F_i = 0 \quad 1 \leq i, j \leq 2 \quad (2.1.1)$$

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{u} = 0 \quad (2.1.2)$$

où le tenseur des contraintes est défini par

$$\sigma_{ij} = -p \delta_i^j + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.1.3)$$

et la base du repère est

$$\begin{aligned} \underline{e}_{\sim 1} &= (1, 0) \\ \underline{e}_{\sim 2} &= (0, 1) \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Multipliant l'équation (2.1.1) par $\underline{v}_i \in V$ et l'équation (2.1.2) par $q \in Q$ et intégrant sur le domaine, on obtient la formulation faible suivante:

$$\int_{\Omega} (\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) u_i v_i d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{\text{Re}} \underline{\nabla} \cdot (\sigma_{ij} \underline{e}_j) v_i d\Omega - \int_{\Omega} F_i v_i d\Omega = 0 \quad (2.1.5)$$

$$\forall \underline{v}_i \in V, 1 \leq i \leq 2$$

$$\int_{\Omega} \underline{\nabla} \cdot \underline{u} q d\Omega = 0 \quad \forall q \in Q \quad (2.1.6)$$

Intégrons par parties la divergence du tenseur de contraintes. On développe le terme

$$\underline{\nabla} \cdot (\sigma_{ij} \underline{e}_j v_i) = \underline{\nabla} \cdot (\sigma_{ij} \underline{e}_j) v_i + \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (2.1.7)$$

et d'après le théorème de Gauss (SPIEGEL [26], p. 123)

$$\int_{\Omega} \underline{\nabla} \cdot (\sigma_{ij} \underline{e}_j v_i) d\Omega = \int_S v_i \sigma_{ij} n_j dS \quad (2.1.8)$$

Combinant les relations (2.1.7) et (2.1.8) nous obtenons

$$\int_S v_i \sigma_{ij} n_j dS = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\sigma_{ij} e_j) v_i d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega \quad \forall \underline{v} \in V \quad (2.1.9)$$

Insérant (2.1.9) dans (2.1.5), la forme faible devient

$$\int_{\Omega} (\underline{u} \cdot \nabla) u_i v_i d\Omega + \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega - \frac{1}{\text{Re}} \int_S v_i \sigma_{ij} n_j dS - \int_{\Omega} F_i v_i d\Omega = 0$$

$$\forall \underline{v} \in V, 1 \leq i \leq 2 \quad (2.1.10)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \underline{u} q d\Omega = 0 \quad \forall q \in Q \quad (2.1.11)$$

où l'intégrale de surface représente les conditions aux limites sur la partie de la frontière où la vitesse n'est pas imposée.

De (2.1.10) et (2.1.11) on peut tirer une forme plus courante de la forme faible. Remplaçant dans (2.1.10) l'expression du tenseur de contraintes (2.1.3)

$$\frac{1}{\text{Re}} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} -p \delta_i^j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega + \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega \quad (2.1.12)$$

Remarquons que

$$-p \delta_i^j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = -p \nabla \cdot \underline{v} \quad (2.1.13)$$

et par symétrie

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \quad (2.1.14)$$

Posant le tenseur du taux de déformation

$$D_{ij}(\underline{w}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right) \quad (2.1.15)$$

on obtient

$$\frac{1}{\text{Re}} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega = - \int_{\Omega} p \underline{\nabla} \cdot \underline{v} d\Omega + \frac{2}{\text{Re}} \int_{\Omega} D_{ij}(\underline{u}) D_{ij}(\underline{v}) d\Omega \quad (2.1.16)$$

La formulation faible (2.1.10) - (2.1.11) s'écrit alors sous la forme plus courante

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\text{Re}} \int_{\Omega} D_{ij}(\underline{u}) D_{ij}(\underline{v}) d\Omega + \int_{\Omega} (\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) u_i v_i d\Omega - \int_{\Omega} p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} d\Omega \\ & = \int_{\Omega} F_i v_i d\Omega + \frac{1}{\text{Re}} \int_S v_i \sigma_{ij} n_j dS \quad \forall \underline{v} \in V, 1 \leq i \leq 2 \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

$$\int_{\Omega} \underline{\nabla} \cdot \underline{u} d\Omega = 0 \quad (2.1.18)$$

L'intégrale de surface du membre de droite n'apparaît généralement pas dans la forme faible; nous montrerons à la section suivante que l'imposition de contraintes nulles identifie l'intégrale à zéro.

2.2 Conditions aux limites naturelles

Dans le cas des équations de Navier-Stokes, la condition aux limites naturelles consiste à poser nulle l'intégrale de surface de l'équation 2.1.17, ce qui revient à imposer une contrainte nulle le long des parois où il n'y a pas de condition de Dirichlet. Soit le vecteur des contraintes de surface \underline{C} . On aura

$$\underline{C} = C_i \underline{e}_i \quad (2.2.1)$$

$$\text{et } C_i = \sigma_{ij} n_j = 0 \quad \forall i \quad (2.2.2)$$

ce qui implique

$$\sigma_{ij} \equiv 0 \text{ le long de } S. \quad (2.2.3)$$

L'intégrale de surface de (2.1.17) sera donc nulle. La condition (2.2.3) est strictement équivalente à dire que la contrainte normale et la contrainte tangentielle sont nulles.

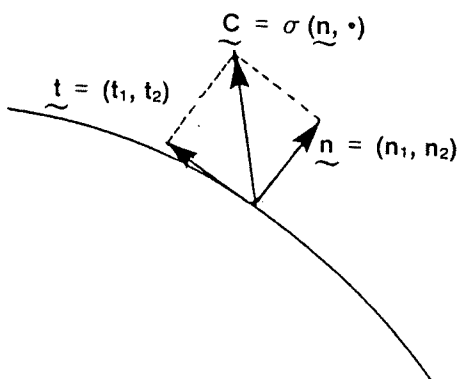


Figure 2.1 Contraintes de surface

Considérons la figure 2.1 où \underline{n} et $\underline{\tau}$ sont respectivement les vecteurs normal et tangentiel unitaires, et le tenseur σ est donné par

$$\sigma = \sigma_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (2.2.4)$$

La projection du tenseur de contraintes est définie par

$$\sigma(\underline{f}, \underline{g}) = \sigma_{ij} (\underline{f} \cdot \underline{e}_i) (\underline{g} \cdot \underline{e}_j) \quad (2.2.5)$$

$$\sigma(\underline{f}, \cdot) = \sigma_{ij} (\underline{f} \cdot \underline{e}_i) \underline{e}_j \quad (2.2.6)$$

où \underline{f} et \underline{g} sont deux vecteurs quelconques. La contrainte normale s'écrit alors

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} &= \sigma(\underline{n}, \underline{n}) \\ &= -P \delta_i^j n_j n_i + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j n_i \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

finalement

$$\sigma_{nn} = -P + 2\mu \frac{\partial}{\partial n} (\underline{u} \cdot \underline{n}) \quad (2.2.8)$$

De la même façon, la contrainte tangentielle s'écrit

$$\begin{aligned} \sigma_{n\tau} &= \sigma(\underline{n}, \underline{\tau}) \\ &= -P \delta_i^j n_j \tau_i + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \tau_i \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

$$\sigma_{n\tau} = \mu \left(\frac{\partial \underline{u} \cdot \underline{\tau}}{\partial n} + \frac{\partial \underline{u} \cdot \underline{n}}{\partial \tau} \right) \quad (2.2.10)$$

La contrainte à la paroi peut donc s'écrire comme

$$\tilde{c} = \sigma_{nn} \tilde{n} + \sigma_{n\tau} \tilde{\tau} \quad (2.2.11)$$

en faisant l'hypothèse que

$$\frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial \tilde{n}} = \frac{\partial \tilde{n}}{\partial \tilde{\tau}} = 0 \quad (2.2.12)$$

2.3 Discrétisation

Tels que décrits à la section précédente, les espaces de solution V et Q sont de dimension infinie, de telle sorte que les équations (2.1.17 - 2.1.18) ne peuvent être solutionnées directement.

La méthode de discrétisation est décrite en détail dans FORTIN A. [9] et consiste d'abord à construire des espaces de dimension finie V_h et Q_h approximant V et Q . Pour cela, on considère une partition du domaine Ω

$$\Gamma_h = \bigcup_{i=1}^{N_e} K_i, \quad (2.3.1)$$

en triangles ou quadrilatères en deux dimensions, en tétraèdres ou en hexaèdres en trois dimensions. Les K_i sont appelés éléments et N_e est le nombre d'éléments; l'ensemble des éléments ou sous-domaines est appelé maillage (voir figure 2.2).

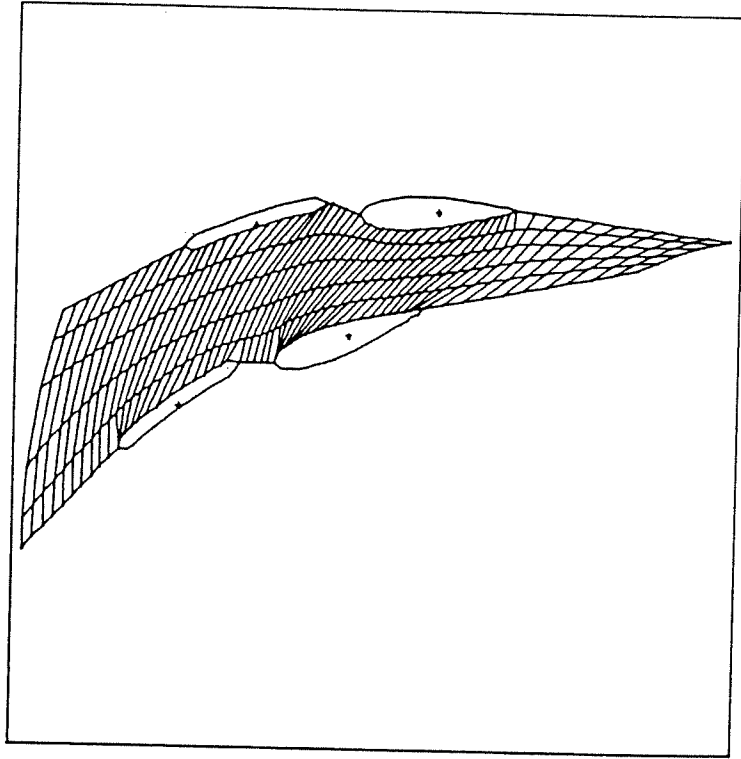


Figure 2.2 Maillage typique

La partition Γ_h du domaine est soumise à la règle suivante.

Deux éléments K_i et K_j sont soit disjoints, ont un seul sommet en commun, ou ont tout un côté en commun.

Quelques implications de cette règle sont illustrés à la figure 2.3. Il existe des moyens de contourner cette restriction comme celui décrit dans FORTIN M. - TANGUY [10].

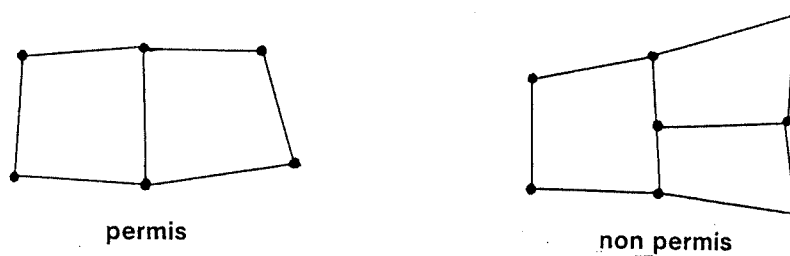


Figure 2.3 Règle de partition

Chaque élément K est uniquement déterminé par un ensemble de points $\{\tilde{S}_i\}_{i=1}^{N_1}$ appelés noeuds géométriques, et N_1 est le nombre de ces noeuds. Nous utiliserons la technique dite de l'élément de référence \hat{K} qui est un élément de forme géométrique simple pouvant se ramener à chacun des éléments réels K par une transformation géométrique F_K . Les noeuds géométriques de \hat{K} sont notés $\{\hat{S}_i\}_{i=1}^N$ et F_K est telle que

$$F_K \{\hat{S}_i\}_{i=1}^N = \tilde{S}_i \quad 1 \leq i \leq N_1 \quad (2.3.2)$$

Exemple 2.1 Considérons une partition du domaine en quadrilatères de côtés droits: \hat{K} est alors le carré $[-1,1]^2$. Cet élément peut être transformé en un quadrilatère quelconque par une transformation F_K de la forme

$$F_K = \langle N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \rangle \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix} = \langle \tilde{N} \rangle \{ \tilde{S} \} \quad (2.3.3)$$

où les $\{\tilde{S}_i\}_{i=1}^4$ sont les quatre sommets du quadrilatère et où

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1+\xi)(1+\eta) \\ N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1-\xi)(1+\eta) \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1-\xi)(1-\eta) \\ N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1+\xi)(1-\eta) \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

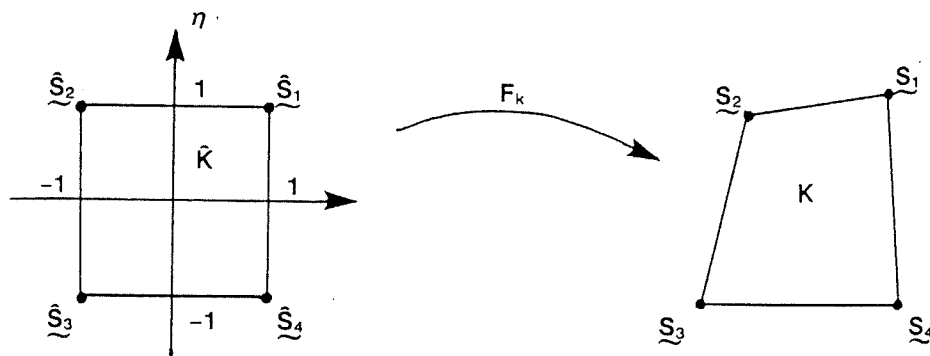


Figure 2.4 Transformation géométrique

Regroupant les termes (2.3.4) dans (2.3.3), on obtient la forme de la transformation F_K

$$F_K(\xi, \eta) = \langle \tilde{N}(\xi, \eta) \rangle \{ \tilde{S} \} \quad (2.3.5)$$

Nous nous limiterons ici aux éléments quadrilatéraux à côtés droits. Il est possible de construire des éléments triangulaires et ces deux types d'éléments peuvent avoir des côtés droits ou courbes. Pour des éléments à frontières courbes, nous référons à CIARLET-RAVIART [11]. Une description des divers types d'éléments se retrouve dans DHATT-TOUZOT [3].

La géométrie de l'élément étant clairement définie par F_k et par ses noeuds géométriques, on peut maintenant construire l'espace V_h élément par élément. L'espace $P_k(\hat{K})$ est d'abord défini comme un espace de polynômes de degré $\leq k$, et l'espace $Q_k(\hat{K})$ comme un espace de polynômes de degré $\leq k$ en chacune des variables ξ et η de \hat{K} .

Exemple 2.2 Les espaces $P_2(\hat{K})$ et $Q_2(\hat{K})$ sont engendrés par les ensembles

$$\{1, \xi, \eta, \xi^2, \eta^2, \xi\eta\} \quad (2.3.6)$$

et

$$\{1, \xi, \eta, \xi^2, \eta^2, \xi\eta, \xi^2\eta, \xi\eta^2, \xi^2\eta^2\}$$

respectivement.

On se donne maintenant un espace \hat{P} de fonctions polynômiales (en pratique $P_k(\hat{K})$ ou $Q_k(\hat{K})$, dépendant du type de partition) et on choisit sur \hat{K} un ensemble $\hat{\Sigma}$ de N points $\{\hat{a}_i\}_{i=1}^N$. Cet ensemble de points devra être

\hat{P} -unisolvant (c.f. CIARLET [8]) i.e. chaque fonction $p \in \hat{P}$ est uniquement déterminée par les valeurs $\{p(\hat{a}_i)\}_{i=1}^N$. On pose ensuite

$$\tilde{a}_i = F_K(\hat{a}_i), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.3.7)$$

et les $\{\tilde{a}_i\}_{i=1}^N$ sont appelés noeuds d'interpolation, coïncidant ou non avec les noeuds géométriques.

Aux noeuds d'interpolation sont associés les fonctions de base $\{\hat{p}_i\}_{i=1}^N$ définies par

$$\hat{p}_i(\hat{a}_j) = \delta_{ij} \quad (2.3.8)$$

Les $\{\hat{p}_i\}_{i=1}^N$ sont bien déterminés et forment une base de \hat{P} . On a alors

$$\hat{P} = \left\{ \sum_{i=1}^N \hat{\alpha}_i \hat{p}_i, \hat{\alpha}_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n \right\} \quad (2.3.9)$$

On se ramène à l'élément réel K en posant

$$P_K = \{p \mid p = \hat{p} \circ F_K^{-1}, \hat{p} \in \hat{P}\} \quad (2.3.10)$$

ou encore

$$P_K = \left\{ \sum_{i=1}^N \alpha_i p_i, \alpha_i \in \mathbb{R}, p_i = \hat{p}_i \circ F_K^{-1} \right\} \quad (2.3.11)$$

Les α_i sont appelés degrés de liberté associés aux noeuds \tilde{a}_i . On peut donc définir l'espace V_h par

$$V_h = \{v \mid v|_K \in P_K\} \quad (2.3.12)$$

Exemple 2.3 Considérons une partition du domaine Ω en quadrilatères et on choisit $\hat{P} = Q_2(\hat{K})$. $\hat{\Sigma}$ est alors constitué des sommets, des milieux des côtés et du centre de \hat{K} (voir figure 2.5).

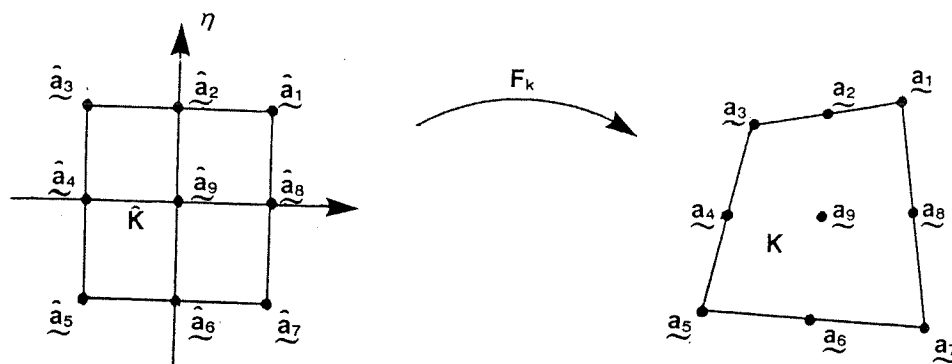


Figure 2.5 Transformation des noeuds d'interpolation

La transformation F_K est donnée par (2.2.3). Les fonctions de base \hat{p}_i sont posées comme étant (DHATT-TOUZOT [3], p. 122)

$$\begin{aligned}
 \hat{p}_1 &= \frac{1}{4} (1+\xi)(1+\eta)\xi\eta \\
 \hat{p}_2 &= \frac{1}{2} (1-\xi^2)(1+\eta)\eta \\
 \hat{p}_3 &= -\frac{1}{4} (1-\xi)(1+\eta)\xi\eta \\
 \hat{p}_4 &= -\frac{1}{2} (1-\xi)(1-\eta^2)\xi \\
 \hat{p}_5 &= \frac{1}{4} (1-\xi)(1-\eta)\xi\eta \\
 \hat{p}_6 &= -\frac{1}{2} (1-\xi^2)(1-\eta)\eta \\
 \hat{p}_7 &= -\frac{1}{4} (1+\xi)(1-\eta)\xi\eta
 \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

$$\hat{p}_s = \frac{1}{2} (1+\xi)(1-\eta^2)$$

$$\hat{p}_9 = (1-\xi^2)(1-\eta^2)$$

On peut finalement vérifier que les fonctions de base (2.3.13) satisfont (2.3.8). On remarque également que V_h est constitué de fonctions dont la restriction à chacun des éléments est la composition d'un polynôme de degré ≤ 2 avec la fonction F_k . Les fonctions constituant V_h ne sont pas polynômiales puisque la transformation F_k n'est pas affine.

Les propriétés de V_h sont déterminées par le choix de \hat{p} et $\hat{\Sigma}$. Dépendant de ce choix, on pourra avoir une approximation conforme ou non. Une discussion détaillée du type d'approximation selon le choix de \hat{p} et $\hat{\Sigma}$ est trouvée dans FORTIN [9] et CIARLET [8].

Utilisant les relations (2.3.6) et les fonctions de base définies par (2.3.8), la vitesse et la pression sont approximées sur le domaine entier par

$$u_h = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i(x) \quad (2.3.14)$$

$$p_h = \sum_{i=1}^M p_i \psi_i(x) \quad (2.3.15)$$

où N est le nombre de noeuds d'interpolation en vitesse et M le nombre de noeuds d'interpolation en pression.

Les fonctions φ_i et ψ_i sont des bases de V_h et Q_h respectivement, et sont définies par

$$\varphi_i(N_j), \psi_i(N_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (2.3.16)$$

De plus, lorsque restreintes sur un élément, on a

$$\begin{aligned} \varphi_i|_K &\in Q_k \\ \psi_i|_K &\in P_k \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

où P_k et Q_k sont tels que définis précédemment.

Remplaçant (2.3.14) et (2.3.15) dans (2.1.17) - (2.1.18), le problème discret consiste à trouver \underline{u}_h, p_h tels que

$$\frac{2}{\text{Re}} (D_{ij}(\underline{u}_h), D_{ij}(\underline{v}_h)) + ((\underline{u}_h \cdot \nabla) \underline{u}_h, \underline{v}_h) - (p_h, \nabla \cdot \underline{v}_h) = (\underline{f}, \underline{v}_h) \quad \forall \underline{v}_h \in V_h, \quad (2.3.18)$$

$$(q_h, \nabla \cdot \underline{u}_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h \quad (2.3.19)$$

que l'on peut réécrire sous forme matricielle

$$K \underline{u}_h + N(\underline{u}_h) \underline{u}_h + C p_h = \underline{f} \quad (2.3.20)$$

$$C^T \underline{u}_h = 0 \quad (2.3.21)$$

La non-linéarité de l'équation (2.3.20) nécessite un traitement spécial: la méthode de solution utilisée sera détaillée dans le prochain chapitre.

CHAPITRE 3

METHODE DE RESOLUTION

La mise en oeuvre de la programmation est inspirée du livre de DHATT-TOUZOT [3]. Le calcul et les résultats sont en variables primitives u_r , u_θ et p soit respectivement les deux composantes en vitesse et la pression.

3.1 Traitement de la non-linéarité

Lorsqu'on doit résoudre une équation ayant des termes non-linéaires telles les équations de Navier-Stokes, la recherche de la solution se fait de manière itérative (DHATT-TOUZOT [3], p. 334). La méthode utilisée est une combinaison de la méthode dite quasi Newton-Raphson et de l'algorithme d'USAWA [13] développée par FORTIN M. et FORTIN A. [14]. Décrivons d'abord les deux méthodes précitées.

3.1.1 Méthode quasi Newton-Raphson

La méthode quasi Newton-Raphson est dérivée de la méthode de Newton-Raphson, décrite ci-dessous.

Supposons qu'à une étape n , nous ayons une approximation (\underline{u}^n, p^n) de la solution (\underline{u}, p) telle que

$$\nabla \cdot \underline{u}^n = 0 \quad (3.1.1)$$

$$R(\underline{u}^n, p^n) = -\frac{1}{\text{Re}} \Delta \underline{u}^n + (\underline{u}^n \cdot \nabla) \underline{u}^n + \nabla p^n \neq 0 \quad (3.1.2)$$

$R(\underline{u}^n, p^n)$ est le résidu à l'étape n . On voit que (\underline{u}^n, p^n) seront la solution cherchée lorsqu'on aura $R(\underline{u}^n, p^n) = 0$. La méthode de Newton-Raphson consiste à chercher des corrections $(\delta \underline{u}^n, \delta p^n)$ satisfaisant $\nabla \cdot \delta \underline{u}^n = 0$ et telles que

$$R(\underline{u}^n + \delta \underline{u}^n, p^n + \delta p^n) = 0 \quad (3.1.3)$$

Le résidu est développé en série de Taylor en négligeant les termes du 2^e ordre et (3.1.3) devient

$$R(\underline{u}^n, p^n) + \frac{\partial R}{\partial \underline{u}^n} \delta \underline{u}^n + \frac{\partial R}{\partial p^n} \delta p^n = 0 \quad (3.1.4)$$

Les corrections $(\delta \underline{u}^n, \delta p^n)$ doivent donc satisfaire

$$\frac{\partial R}{\partial \underline{u}^n} \delta \underline{u}^n + \frac{\partial R}{\partial p^n} \delta p^n = -R(\underline{u}^n, p^n) \quad (3.1.5)$$

Evaluant les dérivées au sens de Gâteaux (voir YOSIDA [21]) et remplaçant dans (3.1.5) on obtient finalement

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{\text{Re}} \Delta \underline{\underline{u}}^n + (\underline{\underline{u}}^n \cdot \underline{\underline{\nabla}}) \delta \underline{\underline{u}}^n + (\delta \underline{\underline{u}}^n \cdot \underline{\underline{\nabla}}) \underline{\underline{u}}^n + \underline{\underline{\nabla}} \delta p^n &= -R(\underline{\underline{u}}^n, p^n) \\
 \underline{\underline{\nabla}} \cdot \delta \underline{\underline{u}}^n &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.1.6}$$

L'algorithme correspondant s'écrit :

1 étant donné $\underline{\underline{u}}^n, p^n$ tel que $\underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{u}}^n = 0$,

2 on factorise la matrice associée à l'opérateur

$$A(\underline{\underline{u}}^n) = -\frac{1}{\text{Re}} \Delta * + (\underline{\underline{u}}^n \cdot \underline{\underline{\nabla}}) * + (* \cdot \underline{\underline{\nabla}}) \underline{\underline{u}}^n$$

3 on calcule

$$R(\underline{\underline{u}}^n, p^n) = \frac{1}{\text{Re}} \Delta \underline{\underline{u}}^n - (\underline{\underline{u}}^n \cdot \underline{\underline{\nabla}}) \underline{\underline{u}}^n - \underline{\underline{\nabla}} p^n$$

4 on résout

(3.1.7)

$$A(\underline{\underline{u}}^n) \delta \underline{\underline{u}}^n + \underline{\underline{\nabla}} \delta p^n = -R(\underline{\underline{u}}^n, p^n)$$

$$\underline{\underline{\nabla}} \cdot \delta \underline{\underline{u}}^n = 0$$

5 et on pose

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{u}}^{n+1} &= \underline{\underline{u}}^n + \delta \underline{\underline{u}}^n \\
 p^{n+1} &= p^n + \delta p^n
 \end{aligned}$$

6 si $|\delta \underline{\underline{u}}^n| < \varepsilon$ STOP

sinon retour à 1

Le principal inconvénient de cette méthode est que l'on doit factoriser la matrice $A(\underline{u}^n)$ à chaque itération, et comme elle peut être de très grande dimension, cela représente un temps de calcul considérable. La méthode dite quasi Newton-Raphson pallie à cet inconvénient: il s'agit toujours d'annuler le résidu $R(\underline{u}^n, p^n)$ mais sans factoriser la matrice $A(\underline{u}^n)$ à chaque itération.

On se rapellera l'équivalent de cette méthode dans le cas d'une équation non-linéaire en une variable, qui consiste à évaluer le zéro d'une fonction en évaluant la tangente, puis en conservant la pente constante lors des itérations suivantes (GERALD-WHEATLEY [22], p. 15).

L'algorithme (3.1.7) s'écrit alors:

1 étant donné \underline{u}^n, p^n tel que $\underline{\nabla} \cdot \underline{u}^n = 0$,

2 on pose $\underline{v} = \underline{u}^n$

3 on factorise la matrice associée à l'opérateur

$$A(\underline{v}) = -\frac{1}{\text{Re}} \Delta^* + (\underline{v} \cdot \underline{\nabla})^* + (* \cdot \underline{\nabla}) \underline{v}$$

4 on initialise le compteur, $N = 1$

5 on calcule

$$R(\underline{u}^n, p^n) = \frac{1}{Re} \Delta \underline{u}^n - (\underline{u}^n \cdot \nabla) \underline{u}^n - \nabla p^n \quad (3.1.8)$$

6 on résout

$$A(\underline{v}) \delta \underline{u}^n + \nabla \delta p^n = -R(\underline{u}^n, p^n)$$

$$\nabla \cdot \delta \underline{u}^n = 0$$

7 et on pose

$$\underline{u}^{n+1} = \underline{u}^n + \delta \underline{u}^n$$

$$p^{n+1} = p^n + \delta p^n$$

8 si $|\delta \underline{u}^n| < \epsilon$ STOP

9 si $N > NMAX$ on retourne à 1,
sinon on retourne à 5

3.1.2 Méthode d'Usawa

La méthode d'USAWA [13] a été développée pour résoudre les équations de Stokes:

$$-\frac{1}{Re} \Delta \underline{u} + \nabla p = \underline{F} \quad (3.1.9)$$

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0 \quad (3.1.10)$$

La solution des équations (3.1.9) et (3.1.10) est équivalente à la recherche du point-selle du Lagrangien

$$L(\underline{v}, q) = \frac{1}{\text{Re}} (D_{ij}(\underline{v}), D_{ij}(\underline{v})) - (q, \underline{\nabla} \cdot \underline{v}) - (f, \underline{v}) \quad (3.1.11)$$

$$\underline{v} \in V, q \in Q$$

où D_{ij} est tel que défini au chapitre 2 et les parenthèses signifient le produit scalaire de $L^2(\Omega)$:

$$(x, y) = \int_{\Omega} xy \, d\Omega \quad (3.1.12)$$

et $L^2(\Omega)$ est l'espace des fonctions de carré sommable défini par

$$L^2(\Omega) = \{f \mid \int_{\Omega} |f|^2 \, d\Omega < \infty\} \quad (3.1.13)$$

Suivant FORTIN-GLOWINSKI [16], considérons le Lagrangien augmenté

$$L_r(\underline{v}, q) = L(\underline{v}, q) + c(\underline{\nabla} \cdot \underline{v}, \underline{\nabla} \cdot \underline{v}) \quad \underline{v} \in V, q \in Q \quad (3.1.14)$$

$$c \in \mathbb{R}$$

Les points-selles de L_r sont alors caractérisés par

$$-\frac{1}{\text{Re}} \Delta \underline{u} + c \underline{\nabla}(\underline{\nabla} \cdot \underline{u}) + \underline{\nabla} p = \underline{F} \quad (3.1.15)$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0 \quad (3.1.16)$$

Le système d'équations (3.1.15) - (3.1.16) est de façon évidente équivalent au système (3.1.9) - (3.1.10). Le terme additionnel $c \underline{\nabla}(\underline{\nabla} \cdot \underline{u})$ est un terme de pénalisation qui accélère la convergence de la méthode.

L'algorithme d'Usawa permet de résoudre (3.1.15)-(3.1.16):

1 étant donné p^n arbitraire

2 on solutionne, pour $n \geq 0$

$$-\frac{1}{\text{Re}} \Delta \tilde{u}^n + c \tilde{\nabla}(\tilde{\nabla} \cdot \tilde{u}^n) = \tilde{F} - \tilde{\nabla} p^n \quad (3.1.17)$$

3 $p^{n+1} = p^n + r \tilde{\nabla} \cdot \tilde{u}^n$

4 si $|\tilde{\nabla} \cdot \tilde{u}^n| < \epsilon$ STOP

sinon retour à 2

Bien que la méthode converge pour tout c positif, c est choisi très grand en pratique ($c = 10^4$).

La méthode d'Usawa telle que décrite en (3.1.17) ne s'applique que pour les problèmes linéaires et est un cas particulier de la méthode du gradient pour les problèmes de minimisation (voir FORTIN-GLOWINSKI [16]).

3.1.3 Méthode combinée

Il s'agit d'utiliser la méthode d'Usawa pour tenir compte de la contrainte $\tilde{\nabla} \cdot \tilde{u} = 0$ et de la méthode de

Newton-Raphson pour traiter la non-linéarité dans un seul algorithme combiné.

Remarquant que l'étape 6 de l'algorithme quasi Newton-Raphson (3.1.8) consiste à résoudre un problème linéaire similaire au problème de Stokes, l'algorithme d'Usawa peut être appliqué. La contrainte d'incompressibilité de l'étape 6 est pénalisée en écrivant

$$\delta p^n = c \nabla \cdot (\underline{u}^n + \delta \underline{u}^n) \quad (3.1.18)$$

ou encore

$$p^{n+1} = p^n + c \nabla \cdot \underline{u}^{n+1} \quad (3.1.19)$$

Insérant (3.1.18) et (3.1.19) dans (3.1.8), on obtient l'algorithme suivant.

- 1 étant donné \underline{u}^n, p^n
- 2 on pose $\underline{v} = \underline{u}^n$
- 3 on factorise la matrice associée à l'opérateur

$$A(\underline{v}) = -\frac{1}{\text{Re}} \Delta \star + (\underline{v} \cdot \nabla) \star + (\star \cdot \nabla) \underline{v} + c \nabla (\nabla \cdot \star)$$

- 4 on initialise le compteur, $N = 1$

5 on calcule

$$\tilde{f}^n = \frac{1}{\text{Re}} \Delta \tilde{u}^n - (\tilde{u}^n \cdot \nabla) \tilde{u}^n - c \nabla (\nabla \cdot \tilde{u}^n) - \nabla p^n \quad (3.1.20)$$

6 on résout

$$A(\tilde{v}) \delta \tilde{u}^n = \tilde{f}^n$$

7 on pose

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{n+1} &= \tilde{u}^n + \delta \tilde{u}^n \\ p^{n+1} &= p^n + c \nabla \cdot \tilde{u}^{n+1} \end{aligned}$$

8 si $|\delta \tilde{u}^n| < \varepsilon$ STOP

9 si $N > \text{NMAX}$ on retourne à 1,
sinon on retourne à 5

Cet algorithme correspond à l'algorithme d'Usawa en posant simplement $\tilde{v}^n = 0$ à l'étape 1.

On remarquera qu'à la première étape il n'y a plus de contrainte sur le choix de la solution initiale u^0 , ce qui simplifie grandement l'application de l'algorithme.

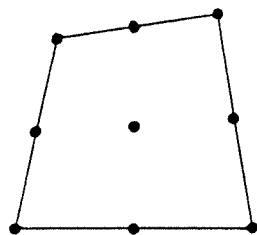
On doit prendre c suffisamment grand pour garder la convergence, car la méthode de pénalisation définie par l'équation (3.1.18) ne s'applique que pour c grand. En

effet, plus c augmente, plus la méthode s'approche de la méthode de Newton où $\nabla \cdot \underline{u} = 0$ est imposée directement.

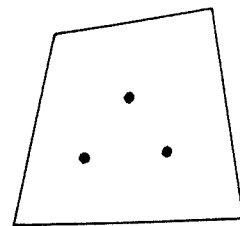
L'effet de la valeur de c sur la rapidité de convergence est étudié en détail par FORTIN M. et FORTIN A. [15]; nous utiliserons de manière générale $c = 10^7$.

3.2 Choix de l'élément

Il est maintenant bien connu que les espaces V_h et Q_h ne peuvent pas être choisis indépendamment: il faut respecter une condition théorique dite condition de BABUSKA-BREZZI [17] pour que le problème soit bien posé. L'élément choisi satisfait la condition précitée et est un des meilleurs en deux dimensions: l'élément $Q_2^{(9)}-P_1$ (voir figure 3.1).



Élément des vitesses



Élément de la pression

Figure 3.1 Élément $Q_2^{(9)}-P_1$

La vitesse est biquadratique sur chaque élément et continue d'un élément à l'autre tandis que la pression est linéaire et discontinue.

Avec cet élément, on définit la vitesse comme étant de la forme

$$a + br + c\theta + dr\theta + er^2 + fr^2\theta + gr^2\theta^2 + hr\theta^2 + i\theta^2 \quad (3.2.1)$$

et la pression de la forme

$$a + b(r-\bar{r}) + c(\theta-\bar{\theta}) \quad (3.2.2)$$

où \bar{r} et $\bar{\theta}$ dénotent la position du centroïde. Les fonctions de base pour les vitesses sont données à l'exemple 2.3, équations (2.2.13).

La géométrie de l'élément est définie par la position de ses quatre sommets (figure 3.2). Les fonctions de base et la fonction de transformation géométrique se retrouvent à l'exemple 2.1.

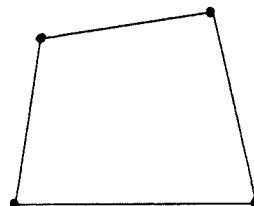


Figure 3.2 Élément géométrique

3.3 Elimination des noeuds au centroide

L'élimination des noeuds au centroide a comme principal objectif de réduire l'espace mémoire et le temps de calcul.

Nous allons montrer comment les noeuds au centroide et les termes non-linéaires de la pression peuvent être éliminés par simple modification des fonctions de base (FORTIN A. - FORTIN M. [18]).

Par souci de simplicité, voyons comment la méthode s'applique sur le problème de Stokes. Le problème consiste à trouver $\underline{u} \in V$ et $p \in Q$ tels que

$$\int_{\Omega} D_{ij}(\underline{u}) D_{ij}(\underline{v}) d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \underline{v} d\Omega = \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{v} d\Omega \quad (3.3.1)$$

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot \underline{u} d\Omega = 0 \quad \forall \underline{v} \in V, \forall q \in Q \quad (3.3.2)$$

L'espace V est choisi en accord avec les conditions limites du problème considéré. Considérons le sous-espace V_0 de fonctions à divergence nulle; les équations (3.3.1) et (3.3.2) s'écrivent sous la forme équivalente

$$\int_{\Omega} D_{ij}(\underline{u}) D_{ij}(\underline{v}) d\Omega = \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{v} d\Omega, \forall \underline{v} \in V_0 \quad (3.3.3)$$

où la pression est complètement éliminée. Malheureusement, la construction d'une base de l'espace V_0 est assez complexe et nous référons le lecteur à GRIFFITHS [19] et HECHT [20] pour les détails de cette méthode. Nous avons utilisé une méthode légèrement différente, dérivée de celle-ci.

Notons M un sous-espace de Q de fonctions constantes par morceaux et N un sous-espace orthogonal à M . On définit

$$V_{0,N} = \{ \underline{v} \mid \underline{v} \in V, \int_{\Omega} \underline{q} \cdot \underline{\nabla} \cdot \underline{v} \, d\Omega = 0, \forall \underline{q} \in N \} \quad (3.3.4)$$

où $V_{0,N}$ est un sous-espace de V . Les équations (3.3.1) - (3.3.2) s'écrivent alors

$$\int_{\Omega} D_{ij}(\underline{u}) D_{ij}(\underline{v}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \bar{p} \underline{\nabla} \cdot \underline{v} \, d\Omega = \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{v} \, d\Omega \quad (3.3.5)$$

$$\int_{\Omega} \bar{q} \underline{\nabla} \cdot \underline{u} \, d\Omega = 0 \quad \underline{u} \in V_{0,N}, \quad \bar{p} \in M, \quad (3.3.6)$$

$$\forall \underline{v} \in V_{0,N}, \quad \forall \bar{q} \in M$$

Le problème est maintenant réduit au calcul de \underline{u} et de \bar{p} , une pression constante par morceaux. La construction d'une base de $V_{0,N}$ est très simple et sera décrite plus loin. Une fois \underline{u} et \bar{p} connus, les termes non constants de p peuvent être obtenus à l'aide de (3.3.1). Noter qu'à aucune étape du calcul il n'est nécessaire d'avoir tous les termes de pression: les

calculs peuvent être effectués en utilisant (3.3.5) - (3.3.6) et \bar{p} suffit.

Voyons comment ce procédé s'applique au cas discret. Rappelant Q_h l'espace discret d'approximation de la pression, on peut écrire

$$Q_h = M + N_h \quad (3.3.7)$$

où N_h représente les termes non-constants de la pression; N_h est une approximation de dimension finie de N . On définit

$$V_{0,N_h} = \{v_h | v_h \in V_h, \int_{\Omega} q_h \nabla \cdot v_h \, d\Omega = 0, \forall q_h \in N_h\} \quad (3.3.8)$$

Le développement qui suit est basé sur l'élément $Q_2^{(9)}-P_1$ mais la méthode est parfaitement générale et peut s'appliquer à tout autre élément ayant des noeuds internes (FORTIN A. - FORTIN M. [18]).

Soit une partition du domaine en quadrilatères Γ_h définie à la section 2.2. Pour chaque élément $K \in \Gamma_h$, on tire de (2.2.11)

$$u_h(r,\theta)|_K = \sum_{i=1}^{18} \alpha_i p_i(r,\theta) \quad (3.3.9)$$

où les α_i sont les degrés de liberté et les p_i les fonctions de base associés à l'élément K , et les fonctions p_{17} et p_{18} appartiennent au noeud central.

Remarque 3.1

Une notation plus courante est

$$u_h(r, \theta)|_K = \left(\sum_{i=1}^9 u_{r_i} \phi_i(r, \theta), \sum_{i=1}^9 u_{\theta_i} \phi_i(r, \theta) \right) \quad (3.3.10)$$

où ϕ_i est la fonction de base standard p_i associée au i^{e} noeud. (3.3.9) et (3.3.10) sont équivalentes si

$$\begin{aligned} p_1 &= (\phi_1, 0), \quad p_2 = (0, \phi_1), \quad p_3 = (\phi_2, 0), \text{ etc.} \\ \alpha_1 &= u_{r_1}, \quad \alpha_2 = u_{\theta_2}, \quad \alpha_3 = u_{r_3}, \text{ etc.} \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

La notation (3.3.9) est beaucoup plus compacte car elle permet de noter les deux composantes en une seule équation. De plus, la présente méthode d'élimination revient à modifier les deux composantes de p_i , ce qui est plus simple avec la notation (3.3.9).

Utilisant (3.2.2), la condition de divergence nulle (3.3.2) s'écrit, sous forme discrète

$$\sum_{i=1}^{18} \alpha_i \int_K (a_{0K} + a_{1K}(r-\bar{r}) + a_{2K}(\theta-\bar{\theta})) \nabla \cdot \tilde{p}_i \, d\Omega = 0 \quad (3.3.12)$$

$$\forall K \in \Gamma_h$$

L'équation (3.3.12) sera satisfaite si on a simultanément

$$\sum_{i=1}^{18} \alpha_i \int_K \tilde{\nabla} \cdot \underline{p}_i \, d\Omega = 0 \quad \forall K \in \Gamma_h \quad (3.3.13)$$

$$\sum_{i=1}^{18} \alpha_i \int_K (r-\bar{r}) \tilde{\nabla} \cdot \underline{p}_i \, d\Omega = 0 \quad \forall K \in \Gamma_h \quad (3.3.14)$$

$$\sum_{i=1}^{18} \alpha_i \int_K (\theta-\bar{\theta}) \tilde{\nabla} \cdot \underline{p}_i \, d\Omega = 0 \quad \forall K \in \Gamma_h \quad (3.3.15)$$

La condition (3.3.13) correspond à la condition de divergence nulle pour la pression constante par morceaux, soit l'équation (3.3.6) sous forme discrète. Les conditions (3.3.14) et (3.3.15) sont donc les conditions nécessaires et suffisantes pour que v_h soit élément de V_{0,N_h} . Déterminons α_{17} et α_{18} tels que ces conditions soient satisfaites.

Posant

$$X_i = \int_{\Omega} (r-\bar{r}) \tilde{\nabla} \cdot \underline{p}_i \, d\Omega \quad (3.3.16)$$

$$Y_i = \int_{\Omega} (\theta-\bar{\theta}) \tilde{\nabla} \cdot \underline{p}_i \, d\Omega \quad (3.3.17)$$

et intégrant par parties, on obtient finalement

$$X_{18} = Y_{17} = 0, \quad X_{17} = Y_{18} \quad \forall K \in \Gamma_h \quad (3.3.18)$$

Les équations (3.3.14) et (3.3.15) peuvent s'écrire

$$\alpha_{17} = -\frac{1}{X_{17}} \sum_{i=1}^{16} \alpha_i X_i, \quad \alpha_{18} = -\frac{1}{X_{18}} \sum_{i=1}^{16} \alpha_i Y_i \quad (3.3.19)$$

Utilisant (3.3.19), (3.3.9) se réduit finalement à

$$u_h|_K = \sum_{i=1}^{16} \alpha_i \left(p_i - \frac{X_i}{X_{17}} p_{17} - \frac{Y_i}{X_{18}} p_{18} \right) = \sum_{i=1}^{16} \alpha_i p_i' \quad (3.3.20)$$

Noter que la sommation ne porte plus que sur 8 noeuds; le noeud interne est éliminé. Les nouvelles fonctions de base $\{p_i'\}_{i=1}^{16}$ appartiennent à V_{0, N_h} et le système (3.3.5) - (3.3.6) peut être solutionné.

Les nouvelles fonctions de base p_i' n'ont pas à être calculées explicitement puisqu'un traitement équivalent peut être appliqué à la matrice élémentaire après construction selon la méthode classique. Une description plus complète est donnée dans FORTIN A. - FORTIN M. [18].

3.4 Imposition de la périodicité

Les frontières périodiques sont imposées en donnant simplement les mêmes numéros de degrés de liberté aux noeuds de la frontière inférieure et de la frontière supérieure.

L'écoulement réel se fait simultanément autour de toutes les aubes directrices de la turbine (voir figures 1.2 et 1.3). Pour des raisons évidentes d'espace et de temps le calcul n'est fait que sur un seul canal dont les frontières sont fixées (voir figure 3.3).

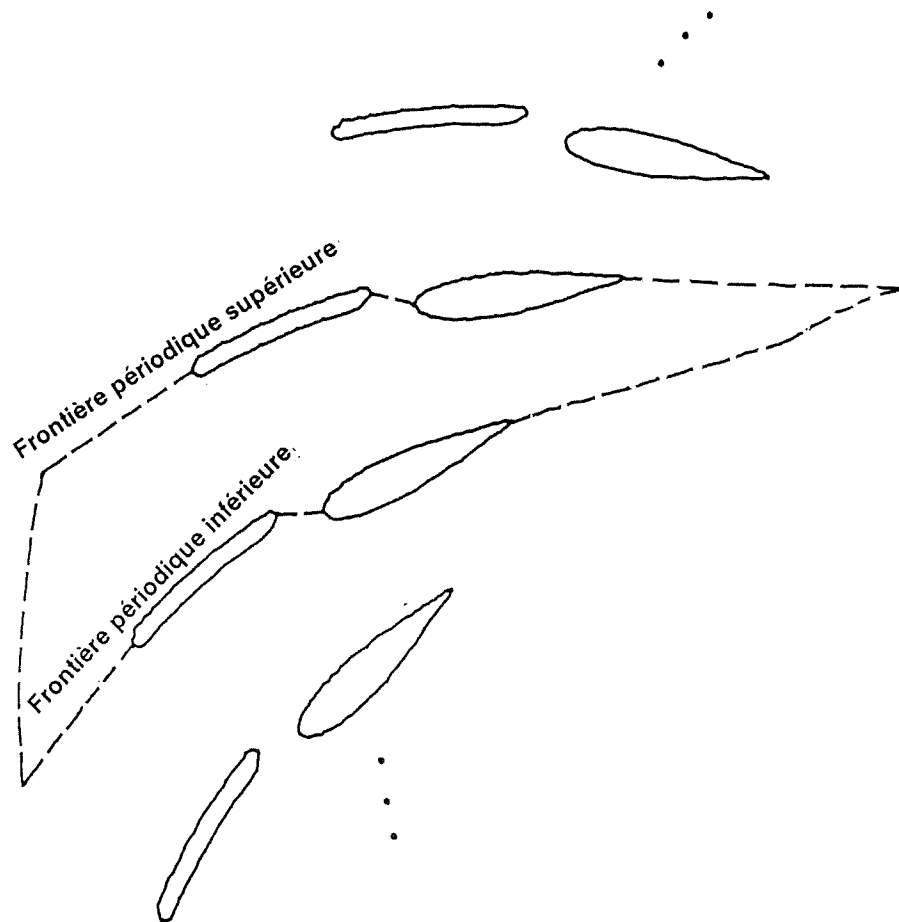


Figure 3.3 Choix des frontières

En général, une des frontières est choisie arbitrairement et l'autre est obtenue par rotation ou translation de la première, en conservant la forme et la

géométrie par rapport aux aubes: le domaine doit être modélisé en entier, mais sans recouvrement.

La frontière pourrait être de forme différente à celle de la figure 3.3 sans affecter les résultats comme on le verra au chapitre 5; l'algorithme est peu influencé par la forme du maillage.

Pour bien comprendre comment la périodicité est imposée, considérons le bord d'un maillage dont les éléments sont des quadrilatères bilinéaires dont les noeuds sont numérotés comme à la figure 3.4.

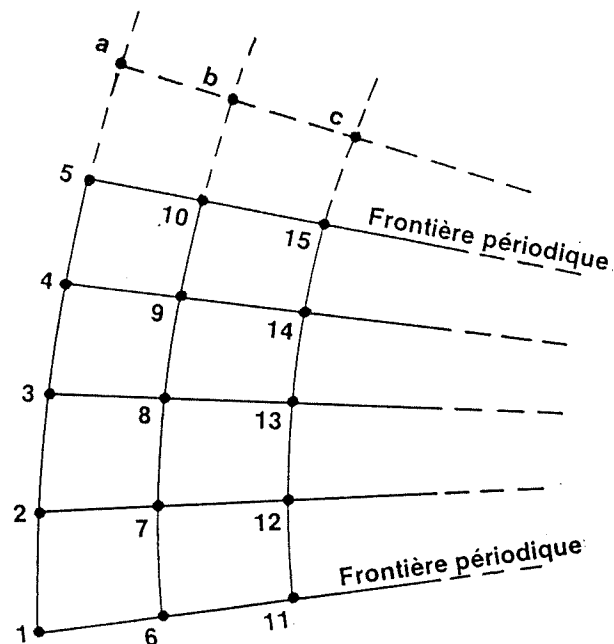


Figure 3.4 Bord typique d'un maillage

L'écoulement en un noeud donné est conditionné par l'écoulement aux noeuds adjacents: par exemple, le noeud 9 est affecté par les noeuds 3, 4, 5, 8, 10, 13, 14 et 15. Un noeud situé sur la frontière tel le noeud 10 sera affecté par le noeud 6, or l'écoulement au noeud 6 est identique à l'écoulement au noeud 7 par symétrie, de même que l'écoulement aux noeuds 6 et 10 est identique. On associe donc aux degrés de liberté du noeud 10 les mêmes numéros qu'à ceux du noeud 6; le noeud 6 est alors affecté par le noeud 9 et vice-versa. La solution de l'écoulement au noeud 6 donnera également la solution au noeud 10.

La même technique est appliquée à tous les noeuds situés le long de la frontière périodique.

Au point de vue informatique, les termes des matrices élémentaires associés au noeud 10 seront ajoutés aux termes du noeud 6 lors de l'assemblage dans la matrice globale. Cette méthode a pour effet de diminuer le nombre d'inconnues et d'augmenter la largeur de bande de la matrice globale particulièrement lorsque le maillage comporte plusieurs rangées.

3.5 Montée en Reynolds

Etant donné le caractère itératif de la solution,

on ne peut obtenir directement le comportement du fluide pour la valeur du nombre de Reynolds désirée. On doit d'abord calculer une première solution à Reynolds = 1 puis on augmente graduellement jusqu'à la valeur désirée. Par exemple, après la première étape de calcul à $Re = 1$, la deuxième étape serait le calcul de la solution à $Re = 50$, puis à $Re = 200$ à la troisième étape, etc... Quelques séries expérimentales de nombres de Reynolds sont illustrées à la figure 3.5.

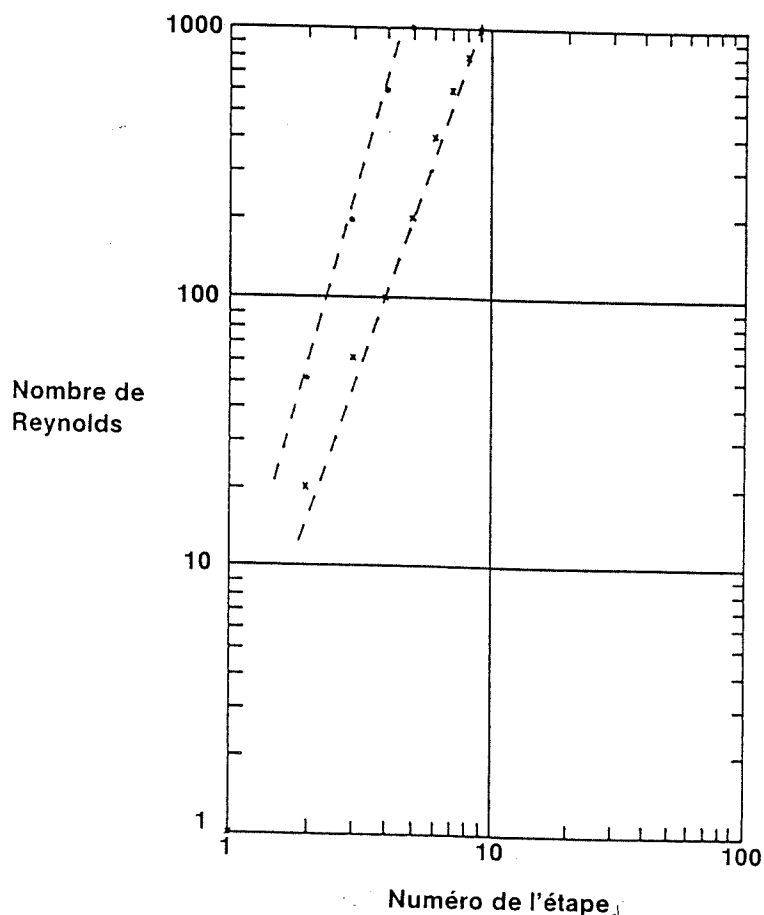


Figure 3.5 Séries typiques de nombres de Reynolds

La série des nombres de Reynolds utilisée dépend d'une caractéristique du maillage que nous avons convenu d'appeler sévérité; un maillage peu sévère permet une montée rapide alors qu'un maillage sévère requiert une montée plus prudente. De plus nous avons remarqué que l'algorithme d'éléments finis est borné en Reynolds, c'est-à-dire que pour un maillage donné, il existe une valeur maximale du nombre de Reynolds au-delà de laquelle l'algorithme n'obtient plus de solution stable et diverge. Cette limite peut varier de Reynolds = 800 ou moins à 3000 et plus selon que le maillage est très sévère ou peu sévère: un maillage peu sévère est plus stable.

Par expérience, nous observons qu'un maillage sévère est en général un maillage où les aubes obstruent beaucoup l'écoulement ou un maillage qui a des angles très prononcés (voir figure 3.6). Pour un canal polaire, il semble que la convergence du canal diminue considérablement la sévérité; un canal divergent serait donc plus sévère.

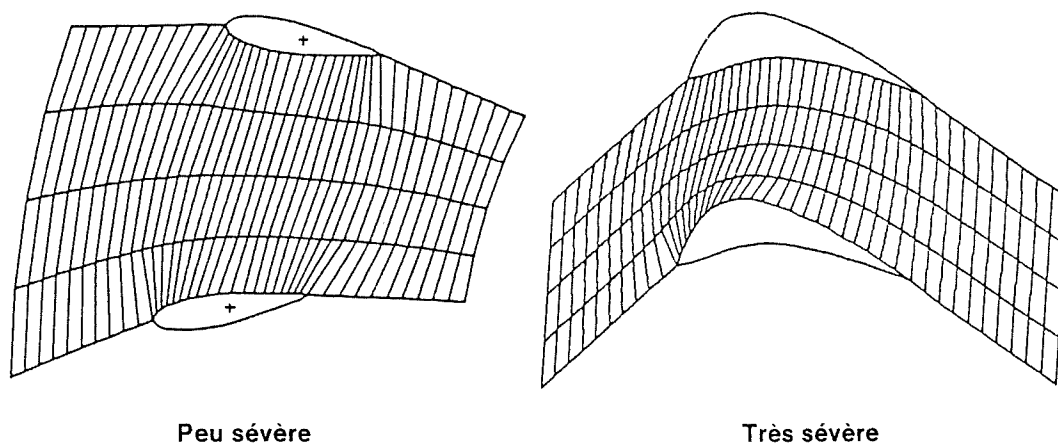


Figure 3.6 Sévérité des maillages

La montée en Reynolds doit être le plus rapide possible pour minimiser le temps de calcul, mais doit conserver les solutions intermédiaires stables. Etant donné la délicatesse requise pour choisir la meilleure montée, nous avons tenté d'optimiser de façon automatique le choix des nombres de Reynolds intermédiaires.

Premièrement, nous avons remarqué que les séries de nombres de Reynolds utilisées empiriquement donnent une progression à peu près linéaire sur papier logarithmique, d'où une relation du type

$$Re = i^a \quad (3.5.1)$$

où i est le numéro de l'étape et a un exposant à déterminer. On remarque que seul a varie entre un maillage sévère et un maillage peu sévère.

En deuxième lieu, nous avons convenu d'appeler facteur de sévérité un facteur compris entre 1 et 10 et qui tient compte de la sévérité du maillage; l'exposant a est calculé en fonction de ce facteur. Le facteur de sévérité et l'exposant a de la relation 3.5.1 sont liés par une relation linéaire qui fait correspondre un facteur de 1 à un exposant de 6.5 et un facteur de 10 à un exposant de 1. Le facteur de sévérité est ajusté à chaque étape intermédiaire en tenant compte de la facilité avec laquelle l'algorithme obtient une solution stable, c'est-à-dire le nombre d'itérations à un Reynolds donné. Le nombre optimum d'itérations par étape de calcul a été fixé entre 7 et 8. Si le nombre d'itérations à une étape donnée excède 8 la sévérité est augmentée et s'il est inférieur à 7, la sévérité est diminuée. Plus l'écart entre le nombre d'itérations effectuées et le nombre optimum est grand, plus l'ajustement est rapide.

Nous obtenons finalement un algorithme capable de s'ajuster au comportement particulier de chaque maillage en essayant constamment d'optimiser la montée en Reynolds, donc en diminuant le temps de calcul.

CHAPITRE 4

ASPECTS INFORMATIQUES

Le but du présent chapitre est de donner une brève description de quelques logiciels, développés conjointement avec les Ingénieries Dominion; ils sont utilisés avec l'algorithme de solution ou processeur pour faciliter la conception du canal et la visualisation des résultats. Le premier logiciel appelé générateur de maillages ou préprocesseur vise exclusivement la création du maillage utilisé pour solutionner l'écoulement, avec la géométrie, les pales et le nombre de mailles désirés. Le deuxième est un programme d'affichage et d'analyse des résultats (postprocesseur) et permet de voir rapidement les résultats obtenus par l'algorithme de solution. Nous verrons séparément les possibilités de ces deux logiciels.

4.1 Génération du maillage

Le générateur de maillages permet de placer toute aube connue dans une cascade dont les dimensions de l'entrée et de la sortie sont choisies par l'utilisateur. Lorsque le maillage nous satisfait pleinement, les coordonnées sont transférées au processeur.

Le menu de la figure 4.1 illustre les possibilités du générateur.

```

MENU PRINCIPAL
-> " (FIN) PROGICIEL GEOMETRIQUE "
-> " (FIC)HIER "
-> " (LEC)TURE "
-> " (CON)STRUCTION "
-> " (MAI)LLAGE ADAPTE "
-> " (GEO)METRIE DES CASCADES "
-> " (GRA)PHIQUE "
-> " (ECR)IRE LES DONNEES POUR D.F. "
-> " (CFM) ECRIRE LES DONNEES POUR E.F. "
( ) = ABREVIATION
ENTRER UNE OPTION, ...

```

Figure 4.1 Menu principal du générateur de maillages

Noter que le générateur de maillages permet de créer une cascade ou canal interaube avec une seule pale ou avec deux pales, soit une aube directrice et une aube avant-directrice (voir figure 1.3) au choix.

Voyons séparément chacune des fonctions.

FICHER

Cette fonction permet d'afficher le nom des fichiers de données lus par la fonction LECTURE.

LECTURE

Lecture de fichiers de données. Ces données peuvent être la géométrie d'un ou de deux profils, ou la géométrie d'une cascade en entier. Lorsque le canal interaube contient deux profils, le premier lu est placé en amont.

CONSTRUCTION

C'est ici que toutes les caractéristiques géométriques de la cascade sont inscrites et modifiées au besoin. La figure 4.2 montre une liste des caractéristiques d'une cascade à un seul profil (figure 4.3).

CARACTERISTIQUES DE LA CASCADE

CASCADE	=		
NOMBRE DE RANGEE	=	5	
NO.TOTAL COLONNE	=	40	
RAYON DE GORGE	=	100.0	(1.00)
ANGLE PERIODIQUE	=	20.00	(DEG)
LOC.RAD. DU PIVOT	=	100.0	(1.00)
PROFIL2	=	ASPS2	
LOC.RAD.BORD ATTAQ	=	109.7	(1.10)
LOC.RAD.BORD FUITE	=	90.38	(0.90)
CORDE	=	20.00	(0.20)
ANGLE PROFIL 2	=	75.00	(DEG)
NOMBRE DE PTS	=	20	
LONG. ENTREE	=	20.00	(0.20)
ANGLE ENTREE	=	65.00	(DEG)
LONG. SORTIE	=	20.00	(0.20)
ANGLE SORTIE	=	85.00	(DEG)
NO. COL. ENTREE	=	10	
NO. COL. SORTIE	=	10	
CONC. RANGEES	=	0.00	
CONC. COL. ENTREE	=	0.00	
CONC. COL. SORTIE	=	0.00	

Figure 4.2 Caractéristiques d'une cascade typique

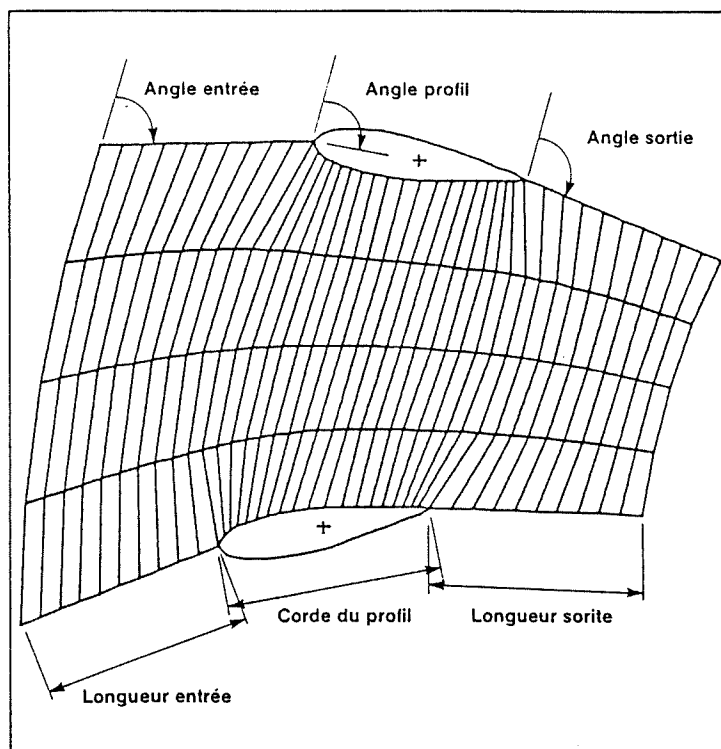


Figure 4.3 Cascade typique

Le RAYON DE GORGE est la longueur caractéristique servant à l'adimensionnalisation de la cascade; toutes les dimensions sont divisées par le rayon de gorge. Les longueurs adimensionnelles sont présentées entre parenthèses à la figure 4.2.

L'ANGLE PERIODIQUE est l'angle entre les aubes vu du centre de la turbine. Par exemple, une turbine avec 18 aubes directrices aura un angle périodique de 20 degrés (360 degrés/18 aubes).

Le pivot des aubes est représenté graphiquement par une petite croix (+) et sa position par rapport au centre de la turbine est appelée LOCATION RADIALE DU PIVOT.

La longueur du profil ou CORDE représente la longueur de la pale: les coordonnées du profil lu sont mises à l'échelle en tenant compte de cette corde. De la corde et de la location radiale du pivot, le logiciel déduit la LOCATION RADIALE DU BORD D'ATTAQUE et la LOCATION RADIALE DU BORD DE FUITE. Le NOMBRE DE POINTS sur le profil est fixé par le fichier de données.

L'ANGLE DU PROFIL est l'angle en degrés entre le rayon issu de l'origine passant par le bord d'attaque et la corde du profil mesuré dans le sens horaire (voir figure 4.3).

La LONGUEUR DE L'ENTREE et la LONGUEUR DE LA SORTIE représentent respectivement la portion de l'espace qui sera modélisée devant et derrière la pale (voir figure 4.3).

L'ANGLE DE L'ENTREE et l'ANGLE DE LA SORTIE sont les angles entre un rayon issu de l'origine et le maillage, mesurés au début du maillage et au bord de fuite respectivement.

Les colonnes du maillage sont les lignes de haut en bas à la figure 4.3; leur nombre est donnée par le NOMBRE DE COLONNES A L'ENTREE, le NOMBRE DE COLONNES A LA SORTIE et le nombre de points sur le profil, la somme étant le NOMBRE TOTAL DE COLONNES.

Les rangées sont les lignes de gauche à droite (figure 4.3) et leur nombre est contenu dans la variable NOMBRE DE RANGEES.

Le nombre total d'éléments pour un maillage donné est obtenu directement du nombre de rangées et de colonnes. En général, plus il y a d'éléments meilleure sera la solution de l'écoulement.

La CONCENTRATION DES RANGEES est un facteur qui permet de répartir non-uniformément les rangées en les concentrant près des aubes. Les facteurs de CONCENTRATION DES COLONNES A L'ENTREE et de CONCENTRATION DES COLONNES A LA SORTIE agissent de façon similaire en concentrant les colonnes près des bords d'attaque et de fuite. Un maillage très concentré est présenté à la figure 4.4.

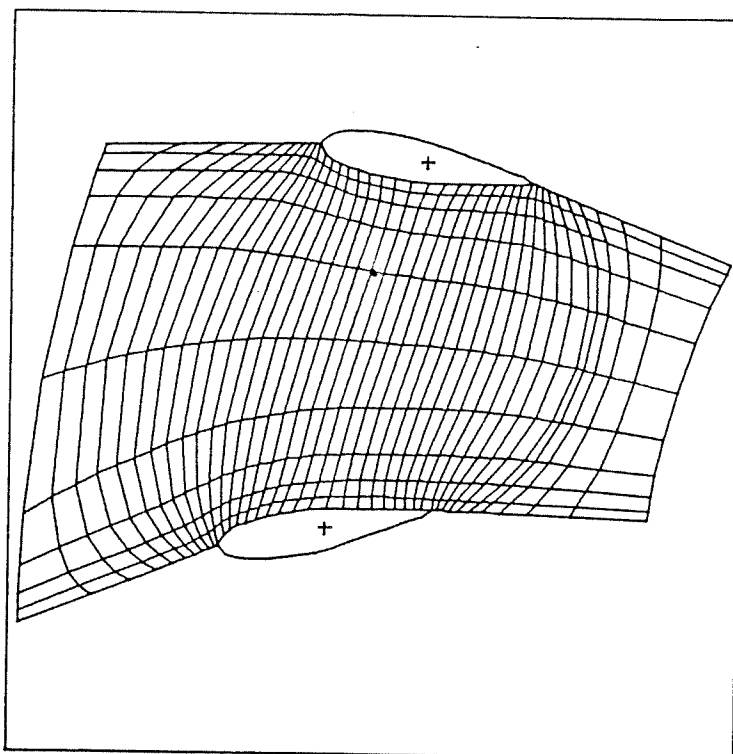


Figure 4.4 Maillage avec concentration

La construction d'un maillage contenant plusieurs aubes se fait de façon très similaire à la construction d'un maillage à une seule aube: il suffit d'inclure la description de la géométrie de la deuxième aube.

MAILLAGE ADAPTE

Lors de la construction du maillage, les coordonnées des noeuds intérieurs sont obtenues par interpolation. Pour obtenir un maillage adapté, on doit

de maille (GARON-CAMARERO [23]). Ce sont des équations elliptiques avec termes forcés qui doivent être solutionnées itérativement. L'utilisateur choisit le nombre d'itérations désirées et le facteur de relaxation (sous ou surrelaxation selon le cas).

GEOMETRIE DES CASCADES

Cette fonction permet de voir la géométrie des pales, comme à la figure 4.5.

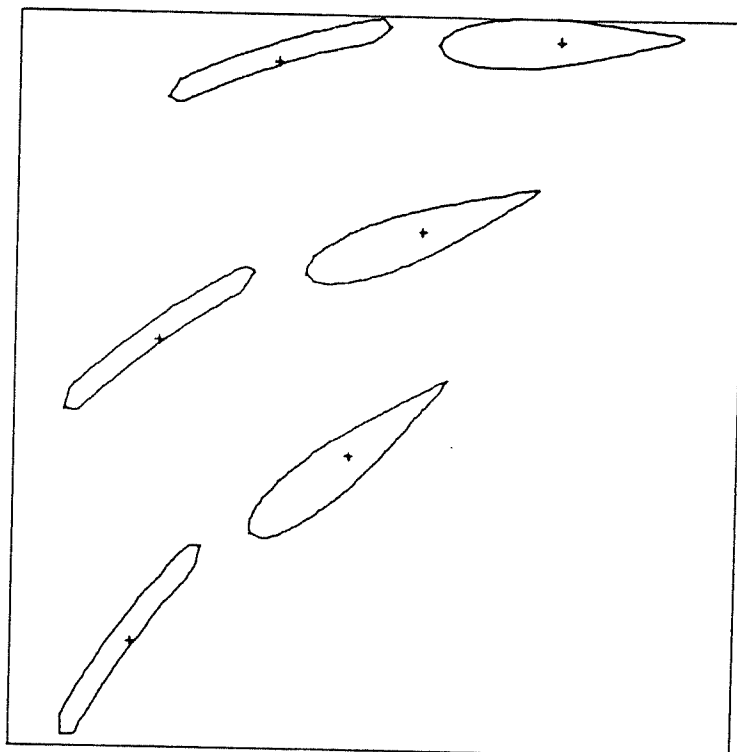


Figure 4.5 Géométrie des cascades

GRAPHIQUE

Cette fonction affiche à l'écran le maillage généré. Les figures 4.3 et 4.4 sont issues de cette fonction. Les caractéristiques de la cascade (figure 4.2) sont affichées simultanément.

ECRIRE LES DONNEES POUR DIFFERENCES FINIES

Le maillage créé peut être archivé dans un fichier de données et rechargé dans le logiciel par la fonction LECTURE.

ECRIRE LES DONNEES POUR ELEMENTS FINIS

La fonction précédente écrit dans le fichier un grand nombre de termes tels les coefficients géométriques largement utilisés par le générateur de maillages et beaucoup d'algorithmes de différences finies, mais non nécessaires pour le présent algorithme d'éléments finis. Cette fonction crée un fichier ne contenant que le maillage, ses dimensions et quelques autres informations requises par l'algorithme.

4.2 Affichage des résultats

Le logiciel d'analyse ou d'affichage des résultats permet de visualiser les résultats obtenus par l'algorithme d'éléments finis: vitesses, pression, isobares, etc.. Les différentes options sont énumérées à la figure 4.6. Voyons en détail chaque fonction.

```

LOGICIEL ANALYSE DE L ECOULEMENT
-->(FIN) LOGICIEL
-->(FIC)HIER
-->(LEC)TURE
-->(CS) COEF. S
-->(CP) COEF. CP
-->(CFW) COEF. CF
-->(VIT)ESSE
-->(ISO)VALEUR
-->(PER)TE DE PRESSION TOTALE
-->(HIS)TORIQUE DU CALCUL
-->(IMP)RIMER DES TABLEAUX
-->( )=ABREVIATION
ENTRER UNE OPTION,...
.~

```

Figure 4.6 Menu principal du programme d'analyse des résultats

FICHER

Cette fonction est identique à celle du générateur de maillages. Elle inclut le nom du fichier contenant la solution.

LECTURE

La lecture des fichiers contenant la solution de l'écoulement et la géométrie du maillage est effectuée après entrée du nom de ces fichiers.

VITESSE

Cette fonction permet d'afficher le champ de vitesse tel que calculé par le programme d'éléments finis. Un exemple d'affichage est présenté à la figure 4.7.

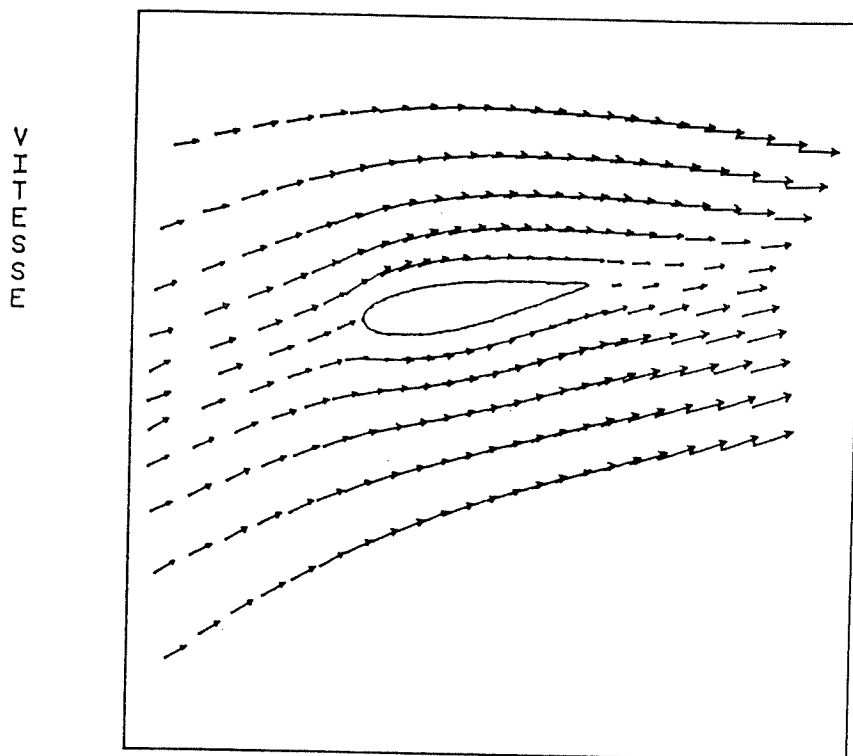


Figure 4.7 Champ de vitesse autour de la pale

COEFFICIENT CP

Le coefficient de pression c_p est défini par (STREETER-WYLIE [24], p. 169):

$$C_p = \frac{\Delta P}{\left(\frac{1}{2}\rho |u_0^2|\right)} \quad (4.2.1)$$

où ΔP est la différence entre la pression en un point et la pression maximale le long de la pale, ρ la densité et u_0 la vitesse à l'entrée du canal. Le coefficient de pression est le rapport entre les forces de pression et les forces d'inertie. Il est affiché comme illustré à la figure 4.8.

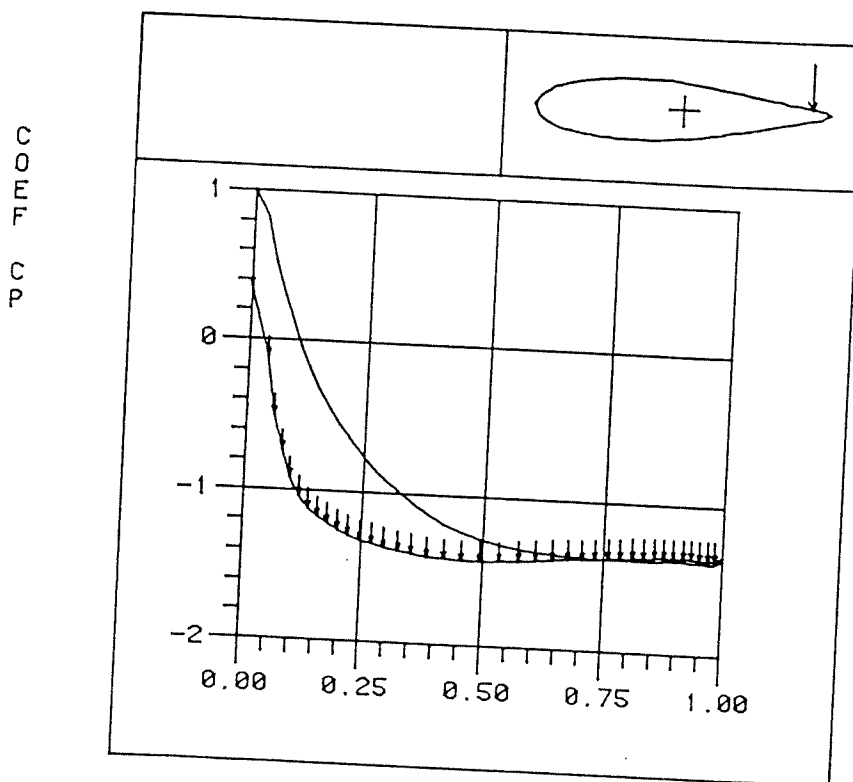


Figure 4.8 Graphique du coefficient de pression

COEFFICIENT S

Affiche un graphique du coefficient de vitesse (Speed Coefficient) le long de l'intrados et de l'extrados du profil.

Le coefficient de vitesse est défini par

$$CS = 1 - CP \quad (4.2.2)$$

où CP est le coefficient de pression (voir (4.2.1)).

Un exemple d'affichage est montré à la figure 4.9.

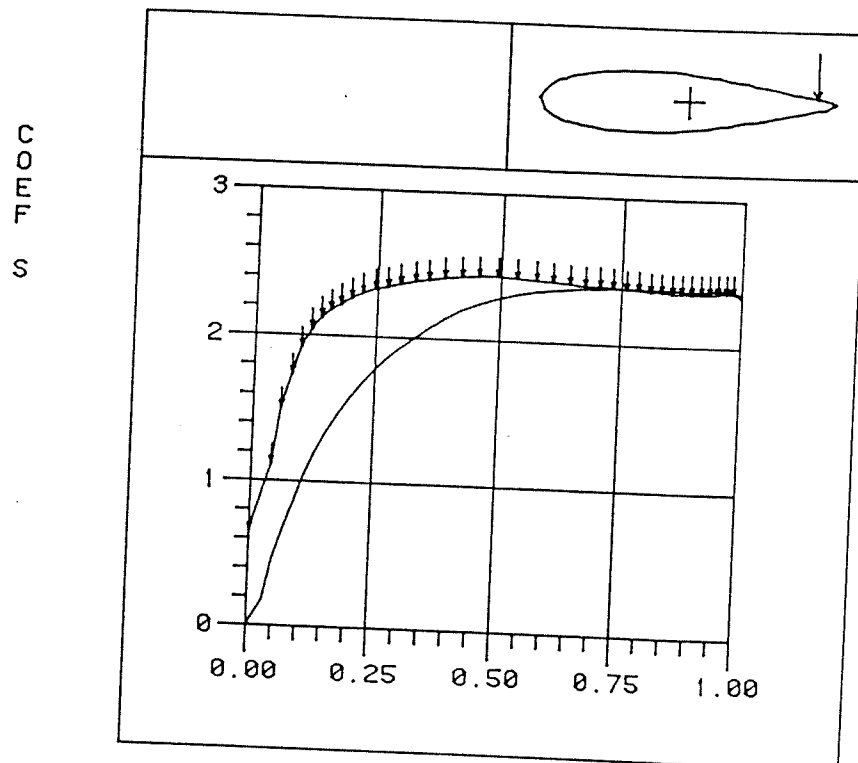


Figure 4.9 Graphique du coefficient de vitesse

COEFFICIENT CF

Le coefficient de frottement est défini par

$$CF = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho |u_0|^2} \quad \text{et} \quad \tau_0 = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\text{paroi}} \quad (4.2.3)$$

(voir STREETER-WYLIE [24], p. 227 et RYHMING [25], p. 223).
 τ_0 est le taux de cisaillement à la paroi et μ la viscosité.

Un exemple de graphique obtenu est présenté à la figure 4.10.

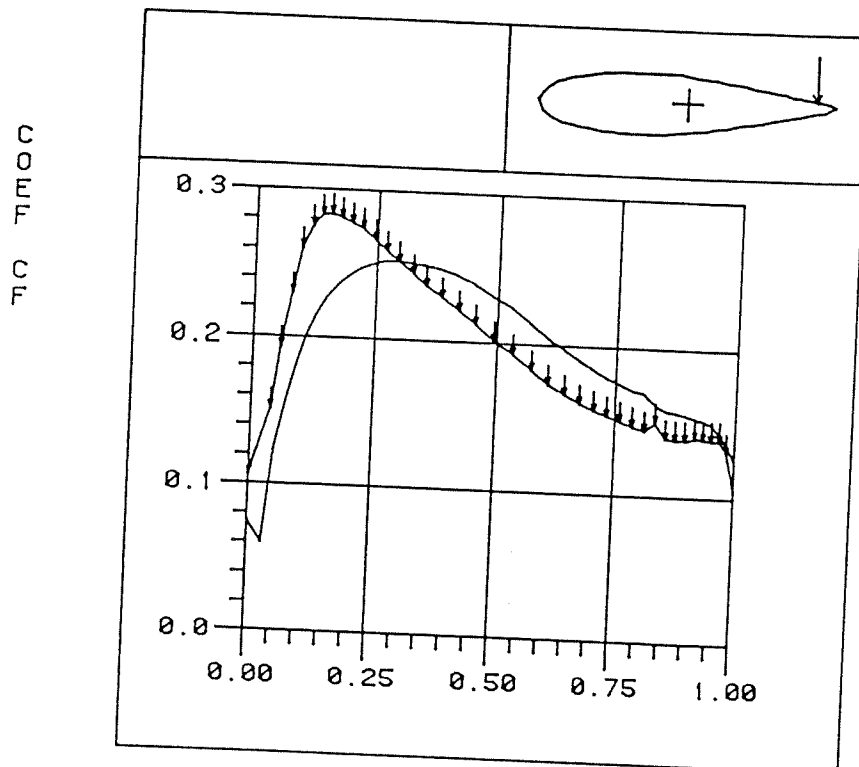


Figure 4.10 Graphique du taux de cisaillement à la paroi

ISOVALEUR

Cette fonction permet de voir les lignes de niveau de la pression ou de l'énergie cinétique, comme montré à la figure 4.11. Un exemple de sortie graphique est présenté à la figure 4.12.

```

CHOIX DES ISOVALEURS
-->PRESSION (STA)TIQUE
-->PRESSION (TOT)ALE
-->ENERGIE (CIN)ETIQUE
( )=ABREVIATION
ENTRER UNE OPTION,...

```

Figure 4.11 Choix de la fonction à afficher

I
S
O
B
A
R
E

S
T
A
T

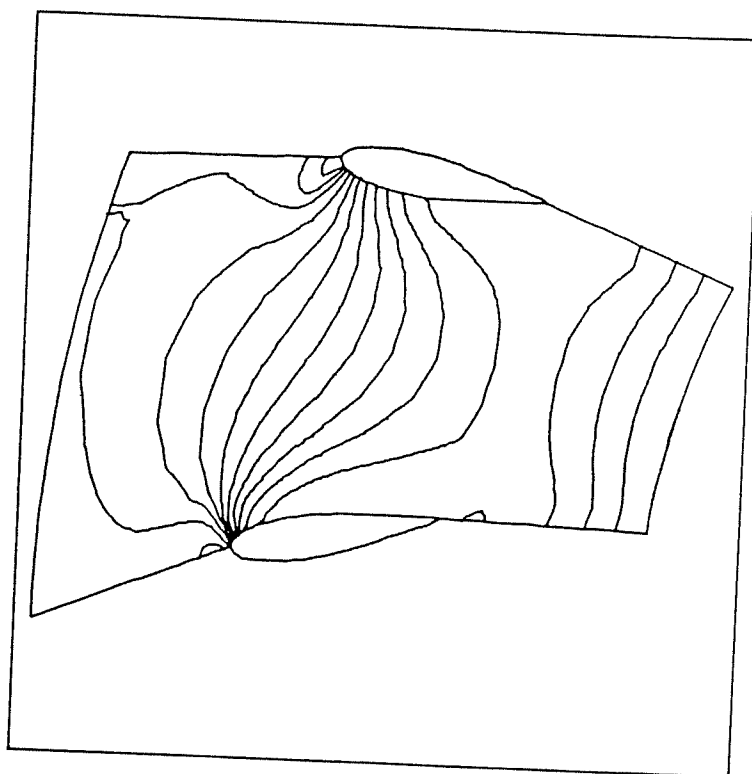


Figure 4.12 Isobares statiques

PERTE DE PRESSION TOTALE

La perte de pression totale est indiquée par la ligne pleine à la figure 4.13. La ligne pointillée représente la conservation du débit massique le long du canal.

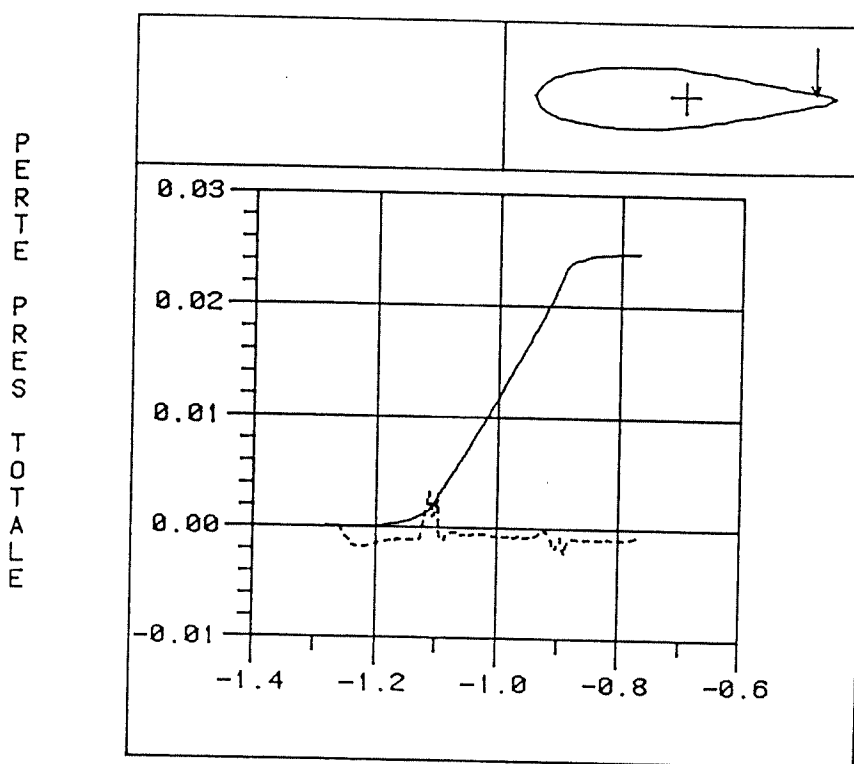


Figure 4.13 Graphique de la perte de pression totale

IMPRIMER DES TABLEAUX

Cette dernière fonction permet d'imprimer sous forme de tableau une grande diversité de variables, comme montré à la figure 4.14.

```

CHOIX DE VALEUR
-->(PRE)SSION STATIQUE
-->(VX) COMPOSANT X          DE VITESSE
-->(VY) COMPOSANT Y          DE VITESSE
-->(VR) COMPOSANT RADIAL DE VITESSE
-->(VT) COMPOSANT TANG. DE VITESSE
-->(XB) COORDONNEE CARTESIENNE X
-->(YB) COORDONNEE CARTESIENNE Y
-->(RP) COORDONNEE CYLINDRIQUE RP
-->(TEP)COORDONNEE CYLINDRIQUE TEP
ENTRER UNE OPTION, ...

```

Figure 4.14 Liste des tableaux imprimables

4.3 Stockage de l'information

Profil d'aube

Les profils sont stockés dans un fichier contenant le nom du profil, le nombre de points sur ce profil suivi des coordonnées x des points de l'extrados, puis de leurs coordonnées y; l'intrados est ensuite stocké de la même façon.

Maillage

Le maillage généré par le préprocesseur est transféré dans un fichier qui est lu par l'algorithme de calcul. Ce fichier contient le nombre de rangées et de colonnes du maillage, quelques dimensions clés et les

coordonnées des noeuds (intersection ligne-colonne).
L'objet graphique emmagasiné en mémoire est constitué des
coordonnées de noeuds.

Résultats

Après avoir obtenu la vitesse et de la pression, le
processeur les écrit dans un fichier qui sera ensuite
utilisé par le programme d'analyse des résultats. Ce
fichier contient également le nombre de Reynolds considéré.

CHAPITRE 5

Les résultats obtenus par le présent algorithme d'éléments finis se divisent en trois parties: d'abord la comparaison des résultats avec des solutions analytiques, puis les résultats obtenus dans le canal formé par les aubes directrices et avant directrices d'une turbine hydraulique. Enfin, le temps de calcul est évalué en fonction de la taille du maillage.

5.1 Ecoulement de Couette

L'algorithme est d'abord utilisé pour simuler un écoulement de Couette entre deux cylindres concentriques où le cylindre central est fixe et le cylindre extérieur tourne sur lui-même avec une vitesse tangentielle unitaire. Ce type d'écoulement possède une solution analytique qu'on peut retrouver dans de nombreuses références dont LU [12] section 8.2. Le champ de vitesse obtenu est présenté à la figure 5.1 et les isobares à la figure 5.2. La solution de l'écoulement de Couette est de la forme

$$v_{\theta} = ar + b/r \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{v_{\theta}^2}{r} \quad (5.1.1)$$

où a et b sont des constantes déterminées à partir de la vitesse angulaire v_{θ} aux parois des cylindres intérieur et extérieur.

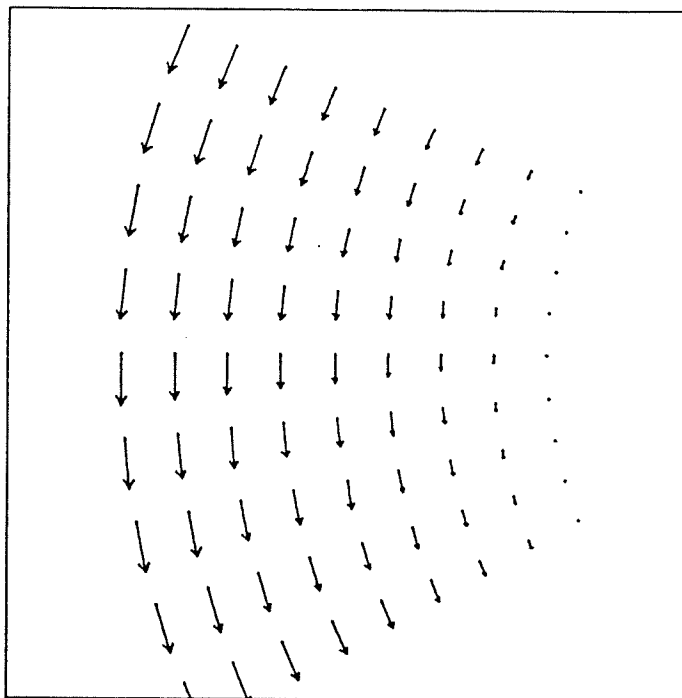
V
I
T
E
S
S
E

Figure 5.1 Champ de vitesse pour un écoulement de Couette

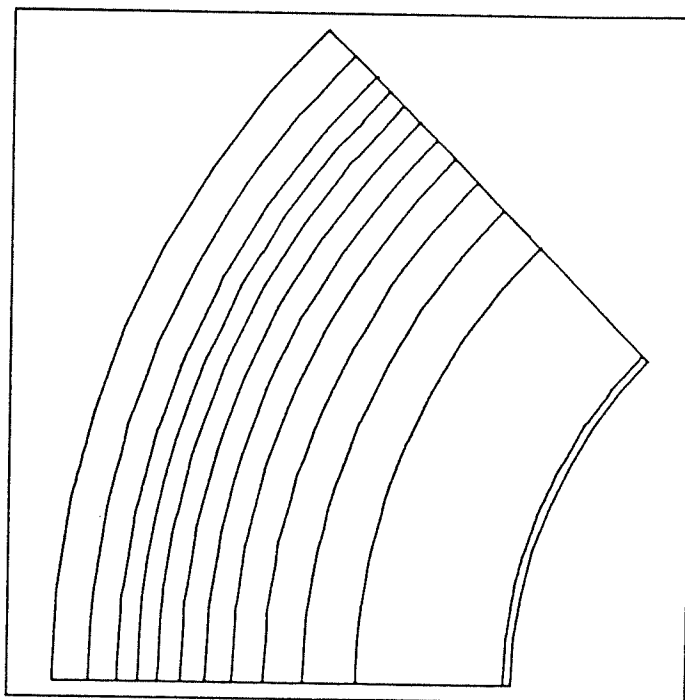
I
S
O
B
A
R
E
S
T
A
T

Figure 5.2 Isobares pour un écoulement de Couette

Le champ de vitesse obtenu est exclusivement tangentiel. à la précision de la machine près; on obtient une erreur de l'ordre de 10^{-6} sur la vitesse même avec un maillage grossier de 4×4 éléments.

Le champ de pression de la figure 5.2 ne présente pas de gradient tangentiel, tout comme la solution analytique; la pression n'est fonction que du rayon.

On remarque également que la solution obtenue est indépendante du nombre de Reynolds tel que prédit par la solution analytique.

5.2 Ecoulement de Jefferey-Hamel

Cet écoulement se produit entre deux plaques planes convergentes et possède également une solution analytique (BATCHELOR [27] section 5.2).

Pour un canal légèrement convergent à basse vitesse, la solution analytique donne un profil de vitesse parabolique qui se propage le long du canal. Le test consistait à imposer ce profil parabolique à l'entrée et à vérifier s'il est bien propagé. La figure 5.3 illustre le champ de vitesse obtenu et la figure 5.4 compare le profil

obtenu à la sortie au profil analytique de l'entrée. On voit que le profil de vitesse est très bien conservé.

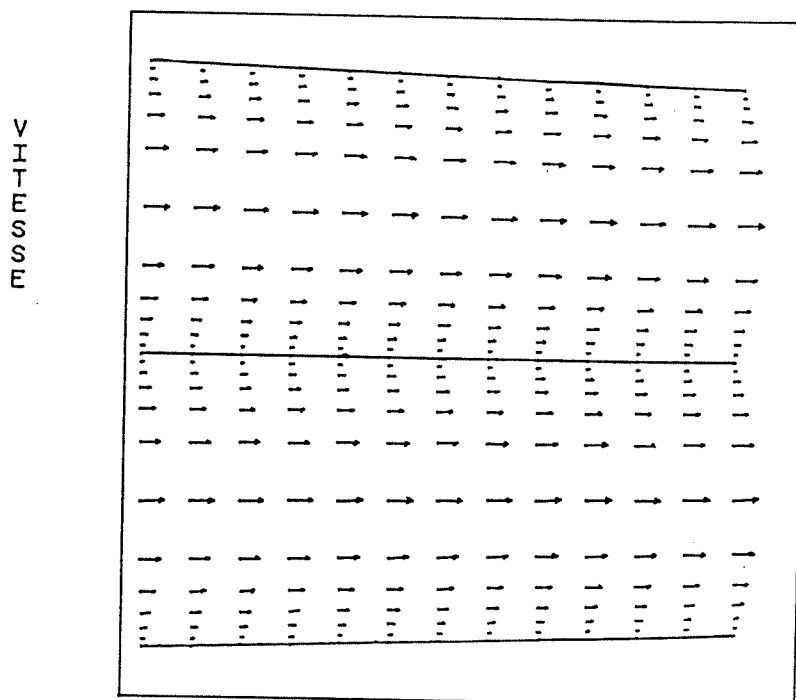


Figure 5.3 Champ de vitesse pour l'écoulement de Jeffrey-Hamel à Reynolds 1

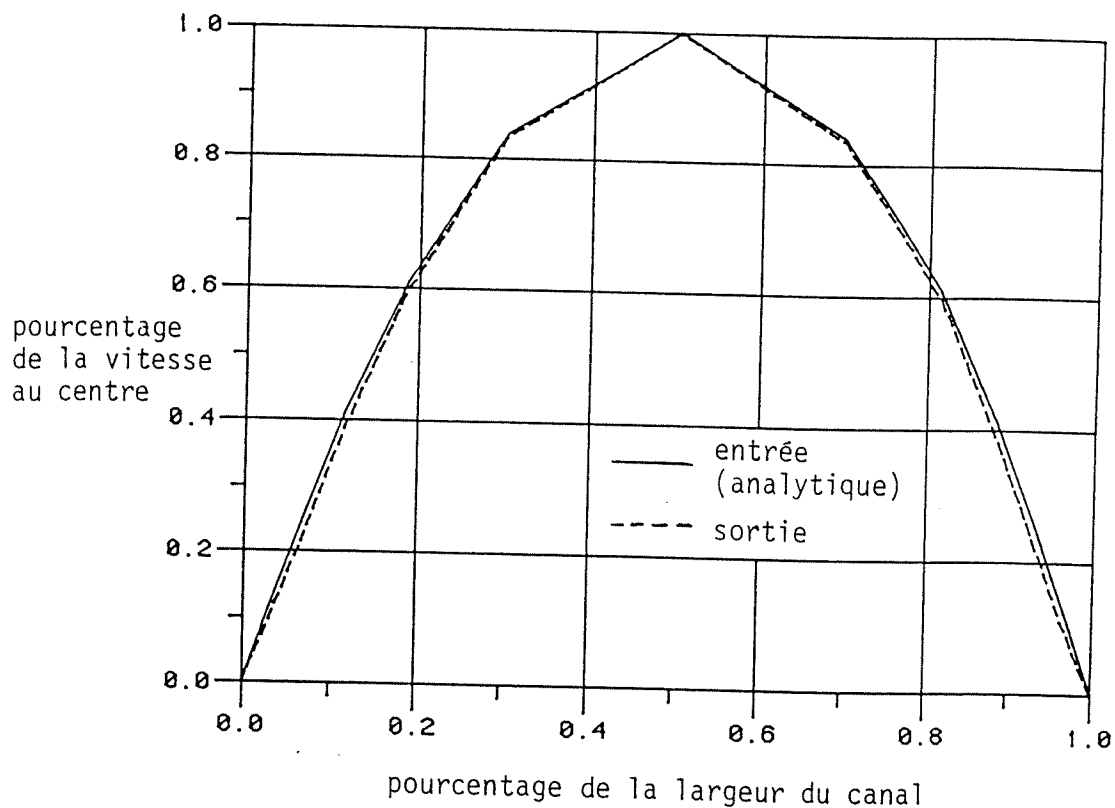


Figure 5.4 Comparaison des profils de vitesse à l'entrée et à la sortie

Pour un convergent quelconque à nombre de Reynolds élevé, la solution analytique de l'écoulement de Jefferey-Hamel indique que le profil de vitesse sera presque uniforme sauf dans une couche mince près de la paroi. La figure 5.5 montre le champ de vitesse obtenu par l'algorithme et la figure 5.6 présente la comparaison des profils de vitesse à l'entrée et à la sortie. Ici aussi le profil de vitesse est bien conservé par l'algorithme.

5.3 Canal déformé

Dans le but d'établir si l'algorithme est sensible à la forme du maillage, nous avons simulé un écoulement radial entre des aubes planes dans un maillage déformé illustré à la figure 5.7. Le champ de vitesse obtenu est présenté à la figure 5.8. On remarque que l'écoulement reste parfaitement radial à l'exception d'une zone très près des pales où l'écoulement est dévié par la formation d'une couche limite, ce qui correspond bien à la réalité. La solution obtenue ne semble pas affectée outre mesure par la déformation des mailles.

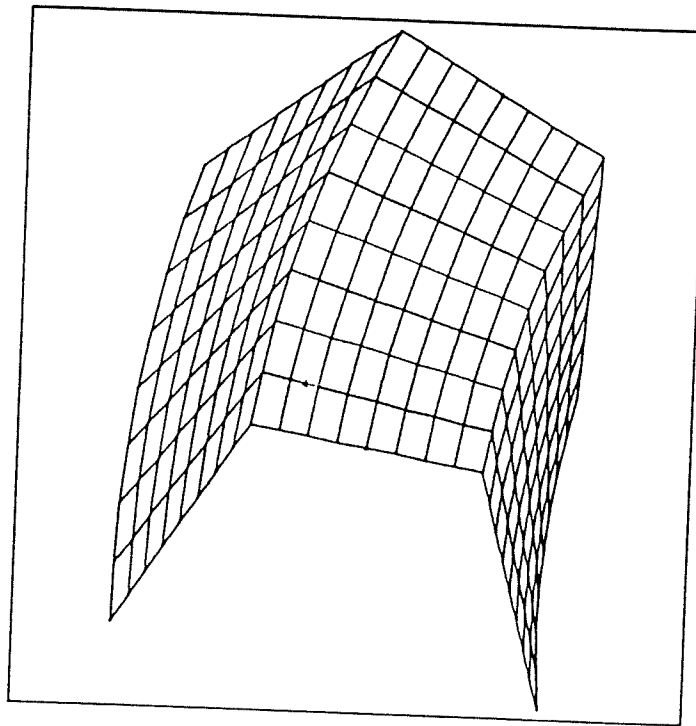


Figure 5.7 Maillage déformé

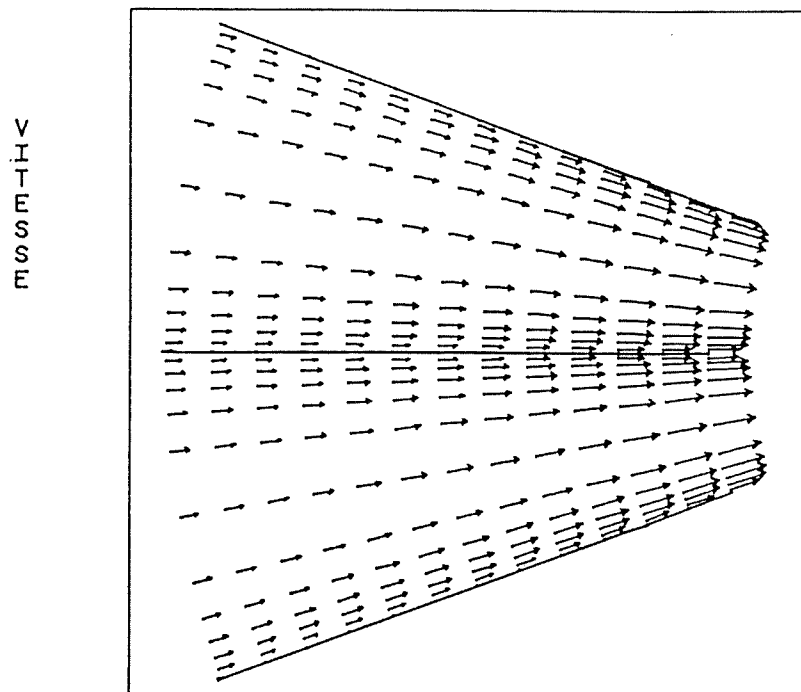


Figure 5.5 Champ de vitesse pour l'écoulement de
Jefferey-Hamel à Reynolds 4000

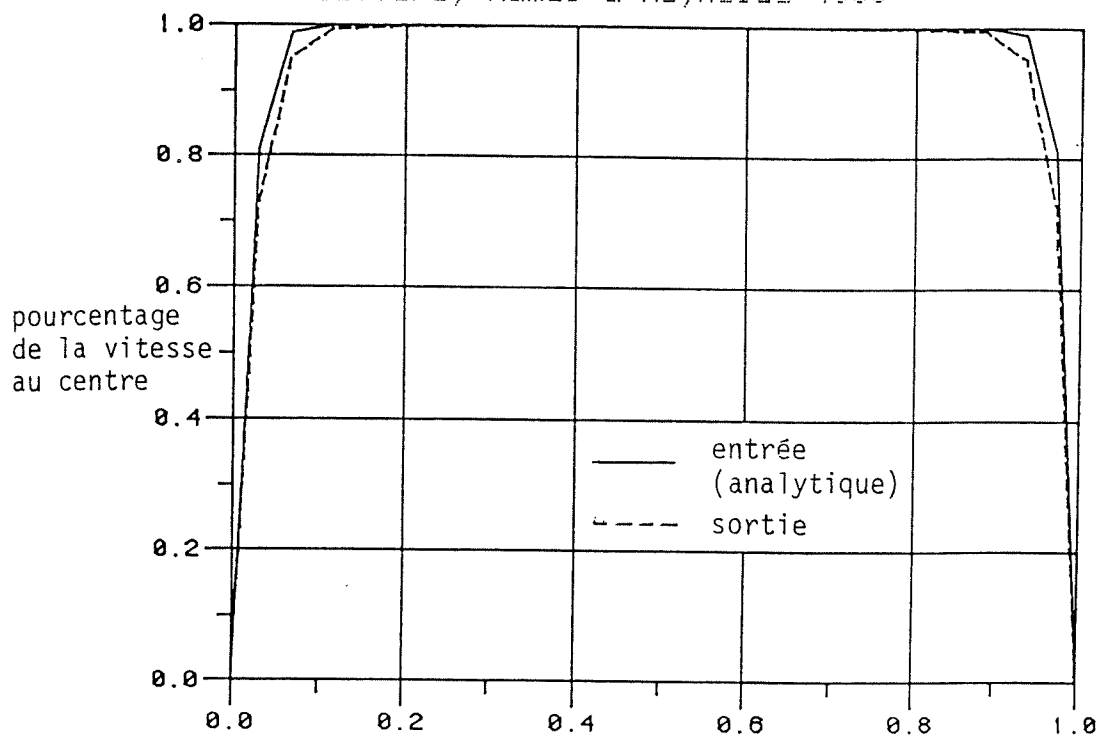


Figure 5.6 Comparaison des profils de vitesse à l'entrée
et à la sortie à Reynolds 4000

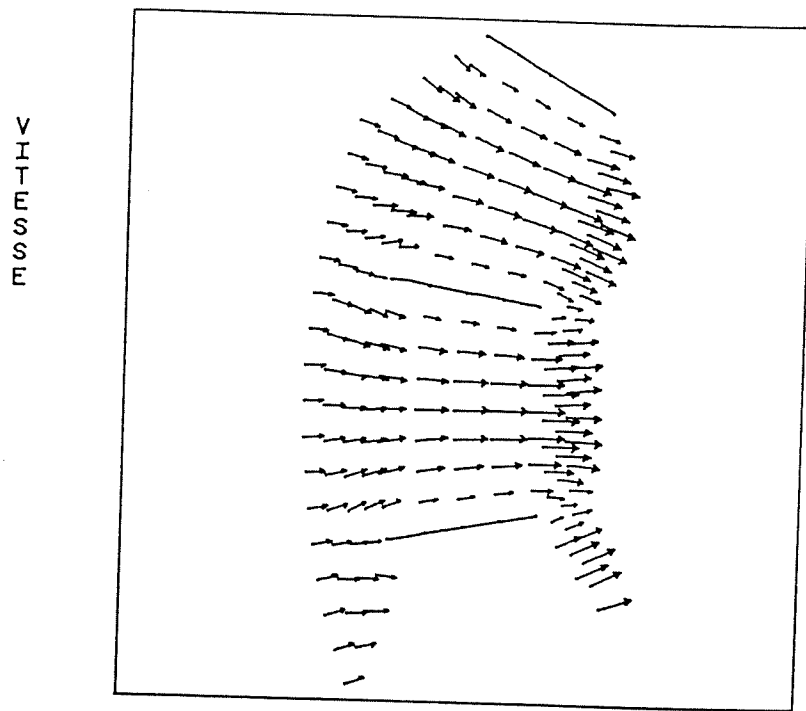


Figure 5.8 Champ de vitesse dans le maillage déformé

5.4 Aubes directrices et avant-directrices

L'algorithme est finalement utilisé pour simuler l'écoulement entre les aubes directrices et avant-directrices d'une turbine hydraulique. Le canal utilisé est similaire à celui de la figure 2.2 et comporte 13×74 éléments; les caractéristiques du canal sont montrées à la figure 5.9.

CARACTERISTIQUES DE LA CASCADE

CASCADE	=		
NOMBRE DE RANGEE	=	13	
NO. TOTAL COLONNE	=	74	
RAYON DE GORGE	=	79.00	(1.00)
ANGLE PERIODIQUE	=	18.00	(DEG)
LOC. RAD. DU PIVOT	=	88.00	(1.11)
LOC. ANG. DU PIVOT	=	7.25	(DEG)
(P/R BORD FUITE 1)			
PROFIL 1	=	SVAPRO2	WGTPRO2 S
LOC. RAD. BORD ATTAQ	=	121.8	(1.54)
LOC. RAD. BORD FUITE	=	104.3	(1.32)
CORDE	=	27.22	(0.34)
ANGLE PROFIL 1	=	34.50	(DEG)
NOMBRE DE PTS	=	15	
PROFIL 2	=	W74	
LOC. RAD. BORD ATTAQ	=	98.42	(1.25)
LOC. RAD. BORD FUITE	=	78.86	(1.00)
CORDE	=	28.88	(0.37)
ANGLE PROFIL 2	=	43.00	(DEG)
NOMBRE DE PTS	=	20	
LONG. ENTREE	=	25.00	(0.32)
ANGLE ENTREE	=	35.00	(DEG)
LONG. SORTIE	=	40.00	(0.51)
ANGLE SORTIE	=	45.00	(DEG)
NO. COL. ENTREE	=	13	
NO. COL. INTER	=	8	
NO. COL. SORTIE	=	18	
CONC. RANGEES	=	0.60	
CONC. COL. ENTREE	=	0.30	
CONC. COL. INTER	=	0.30	
CONC. COL. SORTIE	=	0.30	

Figure 5.9 Caractéristiques du canal formé des aubes directrices et avant-directrices

Les figures 5.10 à 5.14 illustrent les résultats obtenus pour un nombre de Reynolds de 800.

V
I
T
E
S
S
E

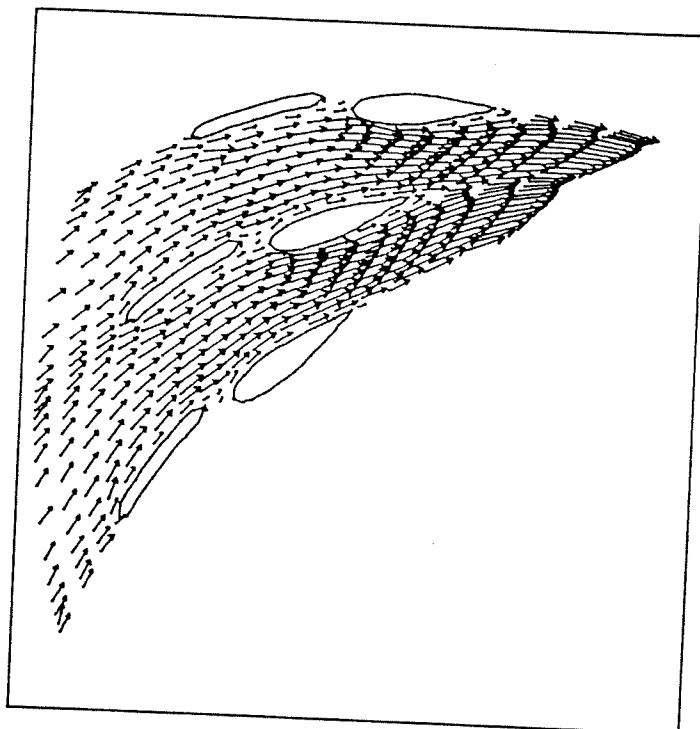


Figure 5.10 Champ de vitesse à Reynolds 800

I
S
O
B
A
R
E
S
T
A
T

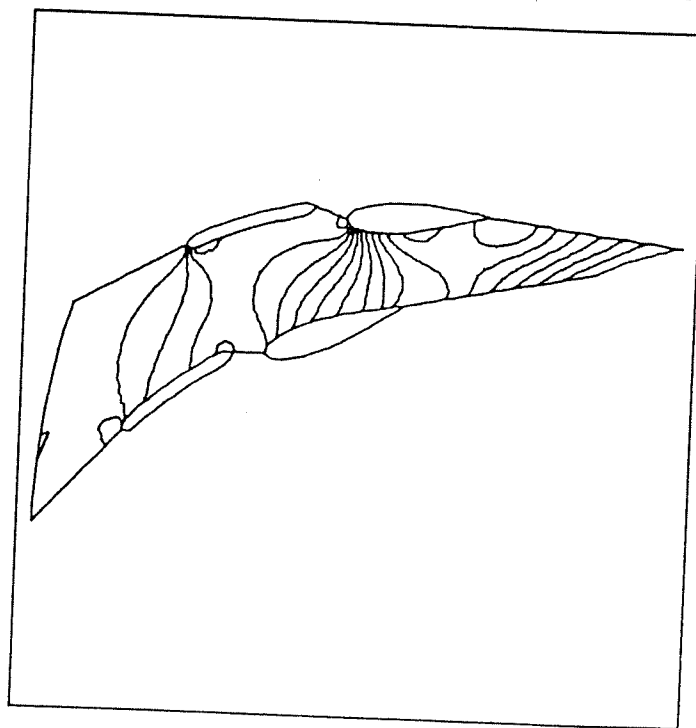


Figure 5.11 Isobares statiques à Reynolds 800

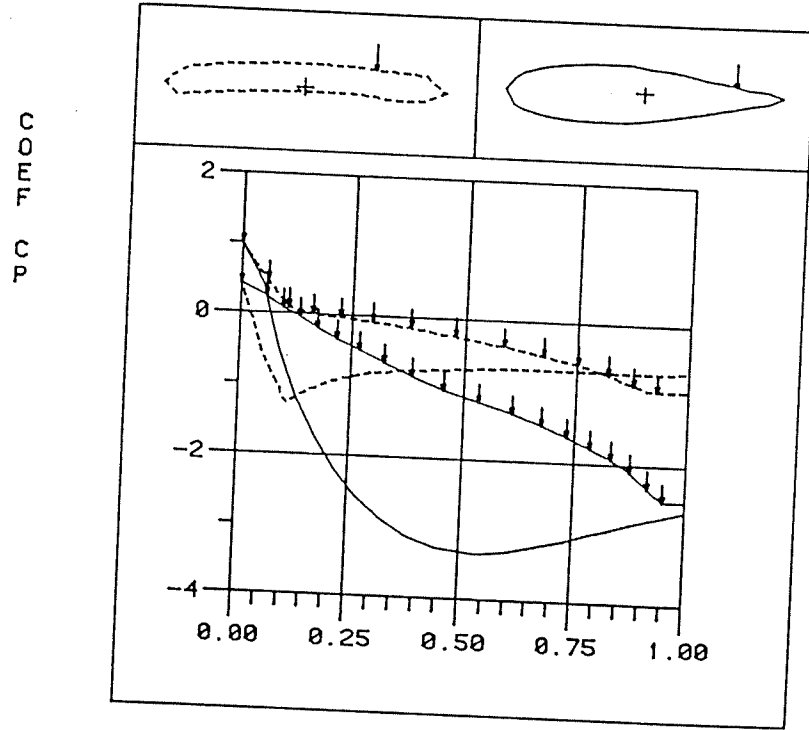


Figure 5.12 Coefficient de pression à Reynolds 800

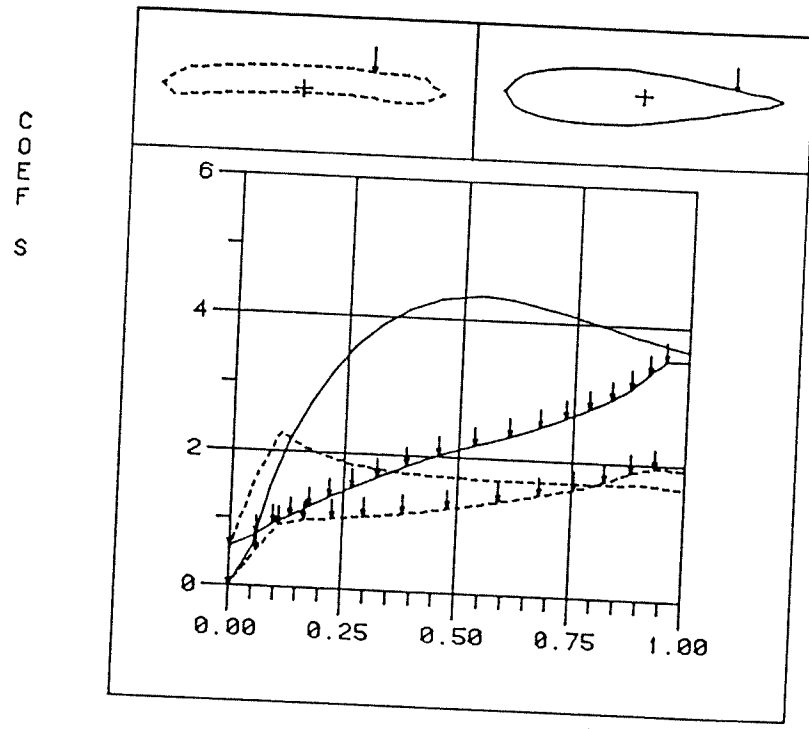


Figure 5.13 Coefficient de vitesse à Reynolds 800

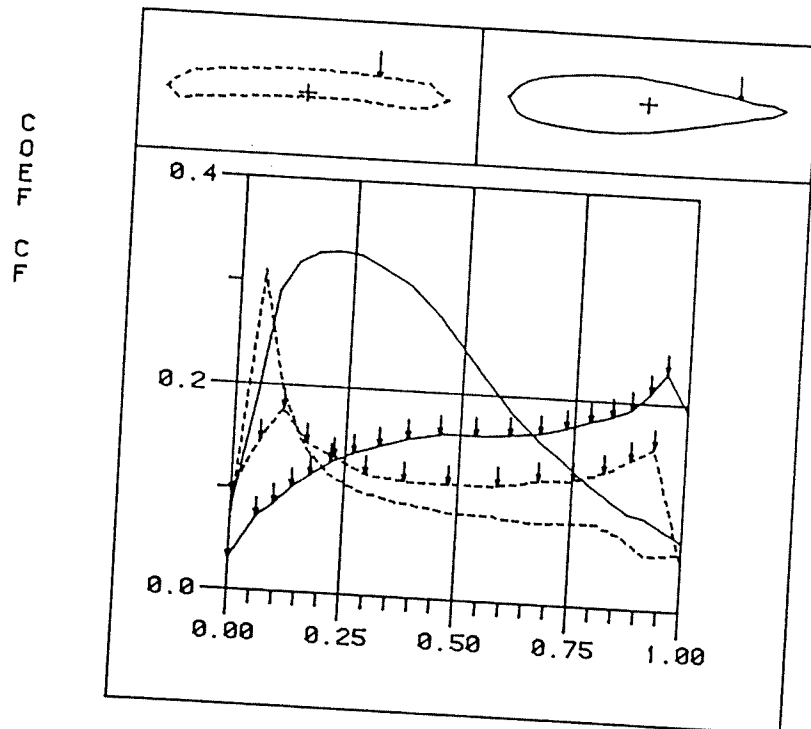


Figure 5.14 Coefficient de frottement à Reynolds 800

A la figure 5.10, on remarquera principalement les déviations de l'écoulement aux bords d'attaque et aux bords de fuite des aubes, de même que la zone de recirculation derrière l'avant-directrice. Ces résultats semblent bien représenter la réalité et correspondent à ce à quoi on s'attend avec cette géométrie.

La figure 5.11 représentant les isobares est caractérisée par un très fort gradient de pression au bord d'attaque des aubes correspondant à la déflexion de la vitesse observée à la figure 5.10 et à la proximité du point de stagnation.

Les figures 5.12 et 5.13 des coefficients de pression et de vitesse sont utilisées dans la phase de design afin d'évaluer les performances de la turbine; de ces coefficients on peut déduire la "portance" du profil. On peut associer le saut de ces coefficients aux bords d'attaque aux forts gradients de pression observés précédemment.

Le coefficient de frottement montré à la figure 5.14 est relié à la traînée des pales. On peut à nouveau observer l'influence des forts gradients de pression aux bords d'attaque.

Les figures 5.15 à 5.19 illustrent des résultats analogues à un nombre de Reynolds de 3000. Noter l'accroissement de taille des zones de recirculation.

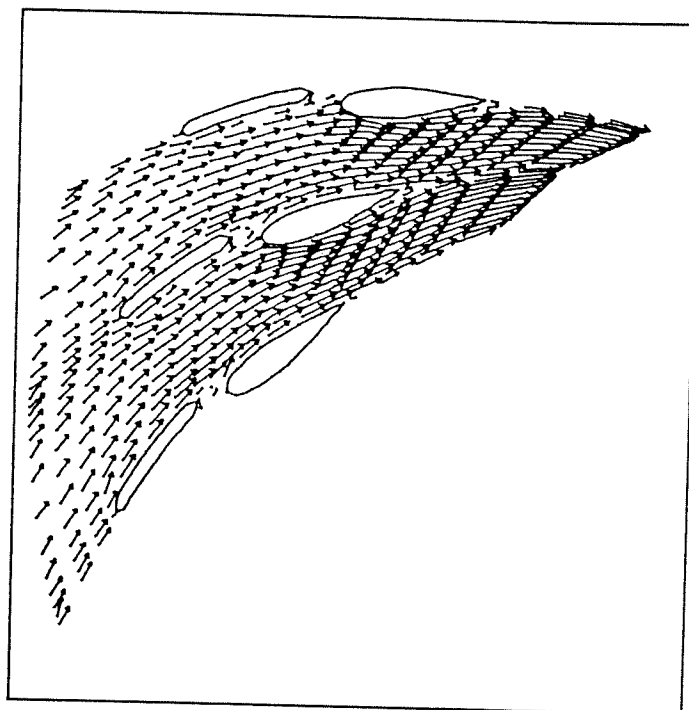
V
I
T
E
S
S
E

Figure 5.15 Champ de vitesse à Reynolds 3000

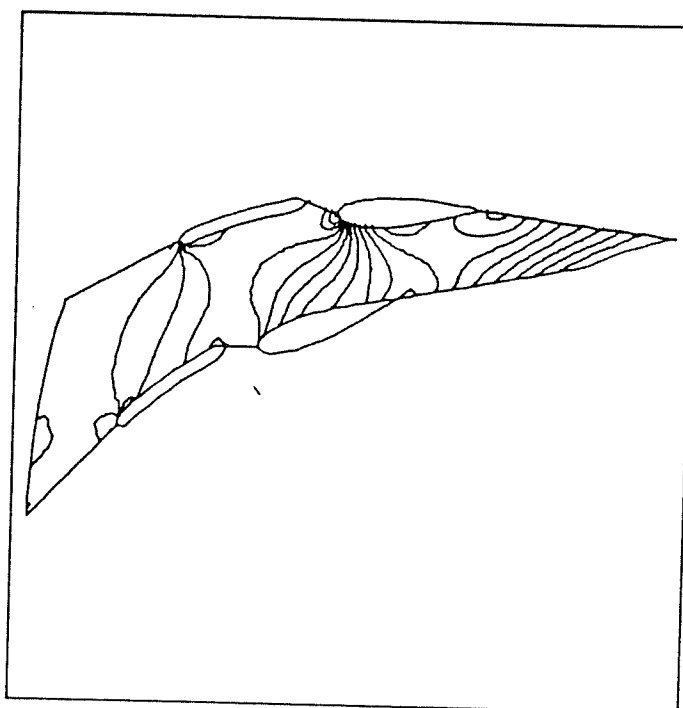
I
S
O
B
A
R
E
S
T
A
T

Figure 5.16 Isobares statiques à Reynolds 3000

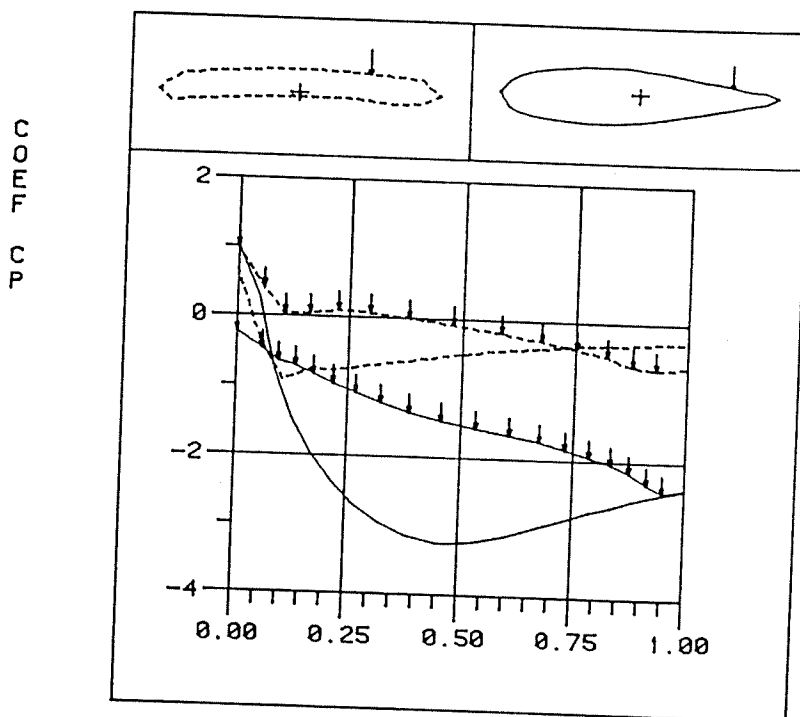


Figure 5.17 Coefficient de pression à Reynolds 3000

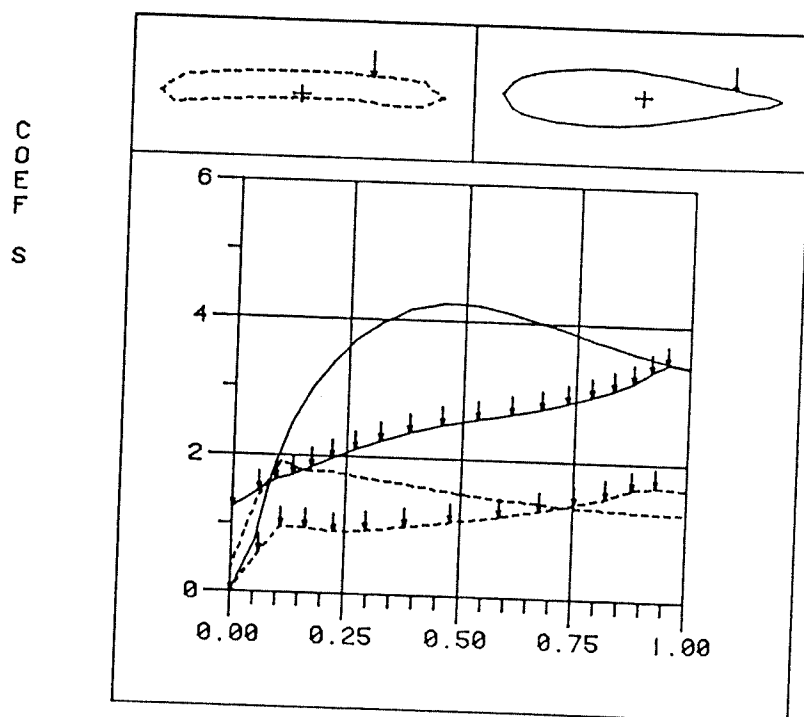


Figure 5.18 Coefficient de vitesse à Reynolds 3000

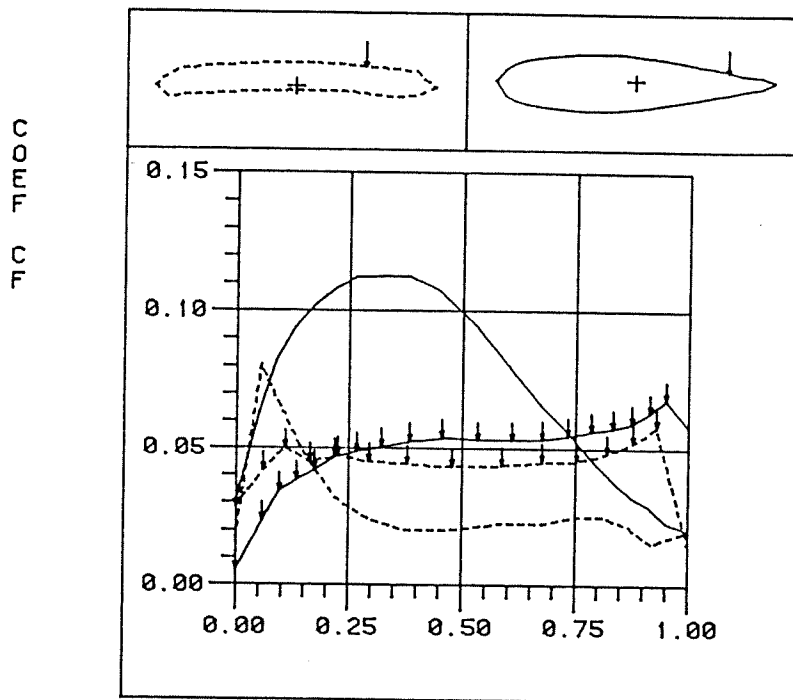


Figure 5.19 Coefficient de frottement à Reynolds 3000

La figure 5.20 montre le champ de vitesse obtenu lorsque la vitesse à l'entrée n'est pas alignée avec l'axe du canal. On voit bien la formation d'une grande zone de recirculation derrière l'aube avant-directrice, le passage du fluide entre les deux pales, et le déplacement du point d'arrêt sur l'extrados des aubes avant-directrices. Ce résultat illustre bien la robustesse de l'algorithme.

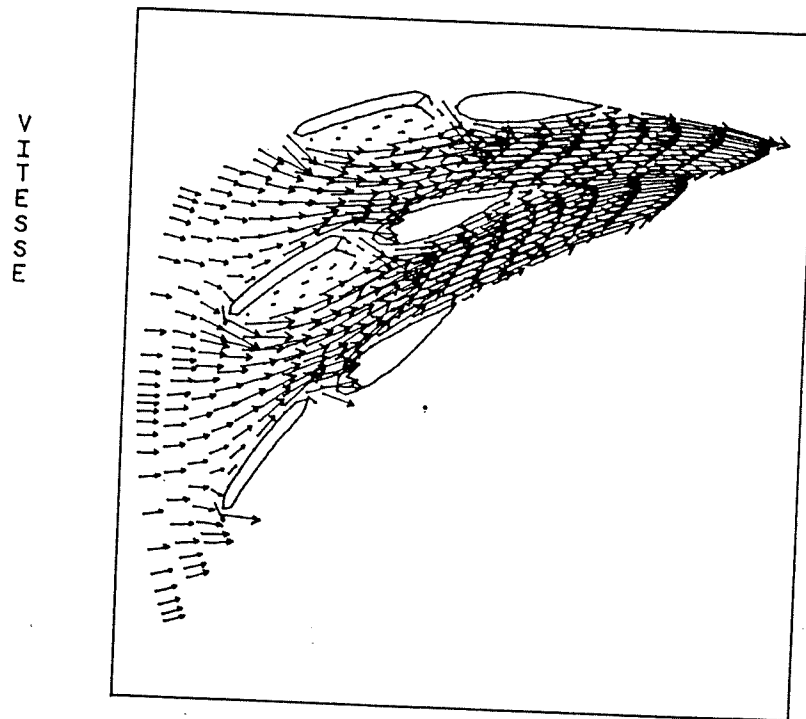


Figure 5.20 Champ de vitesse pour un écoulement désaligné

5.5 Ajustement automatique de la montée de Reynolds

Les figures 5.21 et 5.22 illustrent la façon dont l'algorithme s'ajuste à la sévérité d'un problème, en particulier pour le canal de la section précédente.

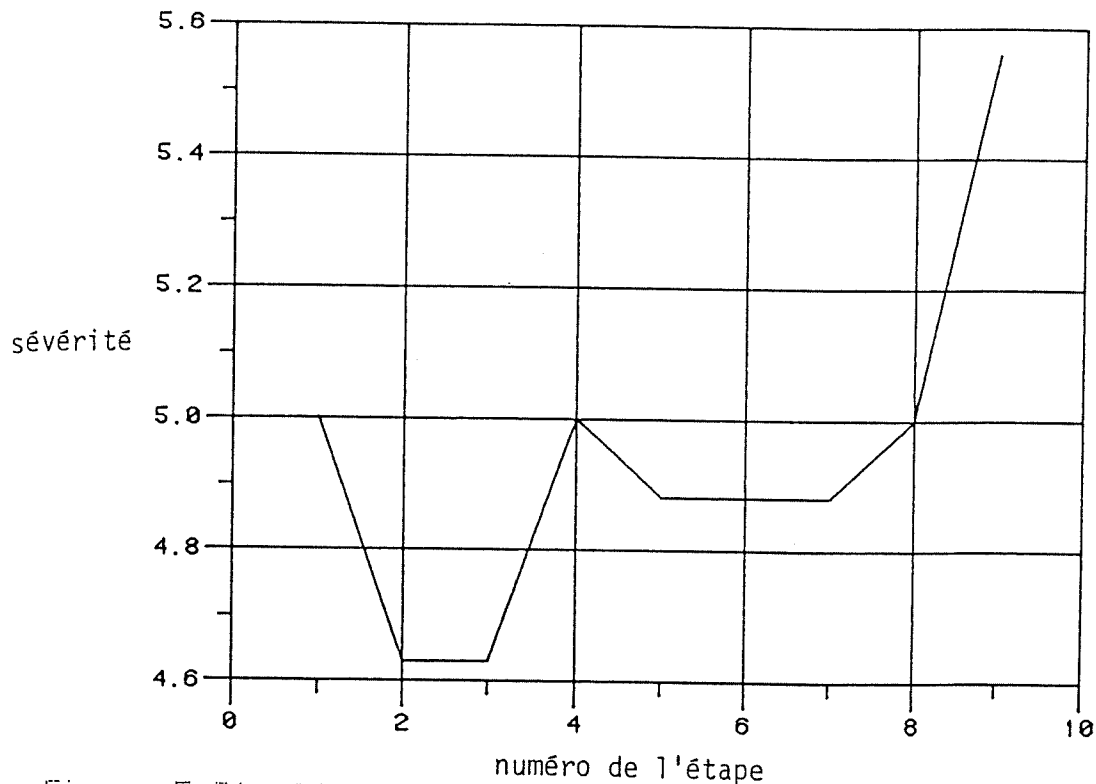


Figure 5.21 Ajustement de la sévérité d'un maillage

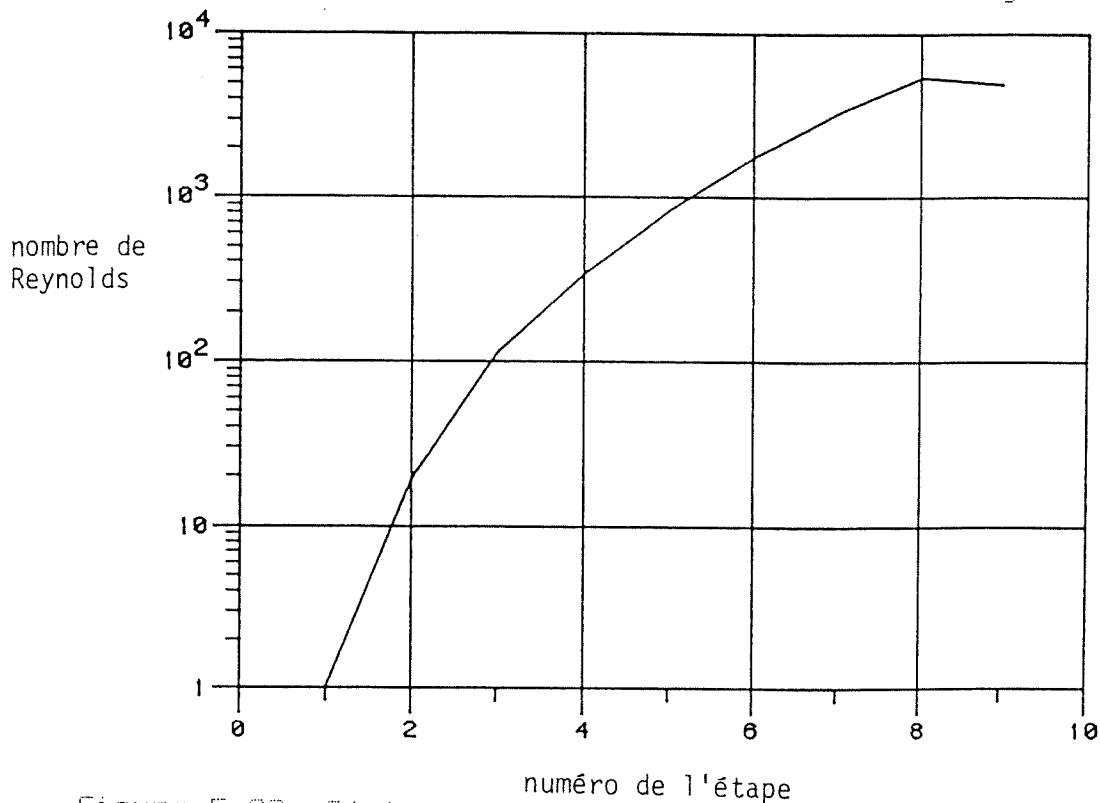


Figure 5.22 Série de nombre de Reynolds utilisée

A la fin du calcul, l'accroissement de la sévérité et la baisse subite du nombre de Reynolds correspondent à l'atteinte de la borne de l'algorithme introduite à la section 3.5. Cette borne marque la limite de ses capacités: cet algorithme ne peut simuler un écoulement laminaire à plus haut nombre de Reynolds.

La borne obtenue pour cet écoulement est de Reynolds = 4000 pour une sévérité de 5 alors que nous avons obtenu pour un canal à une seule pale une borne de plus de 10000 pour une sévérité évaluée à 2.6. Ceci tend à confirmer que la limite de l'algorithme est liée à la sévérité tel que suggéré à la section 3.5: moins le canal est sévère et plus la borne sera élevée.

5.6 Evaluation du coût de calcul

Les graphiques des figures 5.23 et 5.24 représentent respectivement l'influence de la taille des maillages (nombre d'éléments) sur le temps de calcul et sur l'espace mémoire requis. Les calculs sont effectués sur un ordinateur IBM 4381 modèle 2.

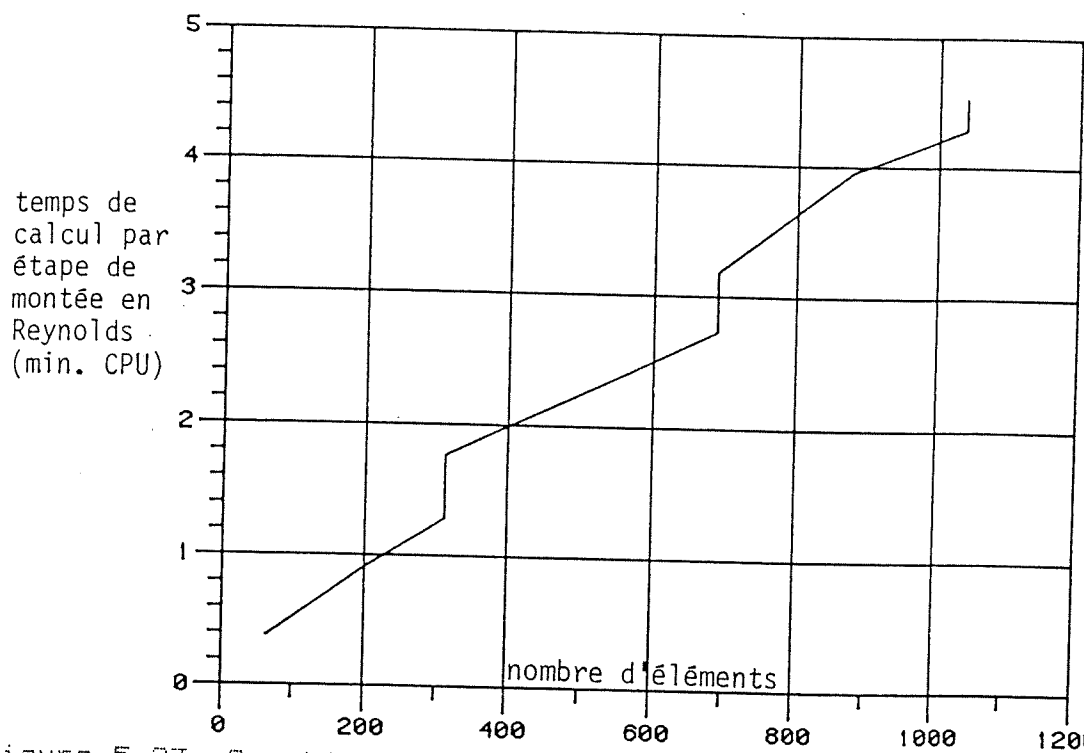


Figure 5.23 Graphique du temps de calcul en fonction de la taille du maillage

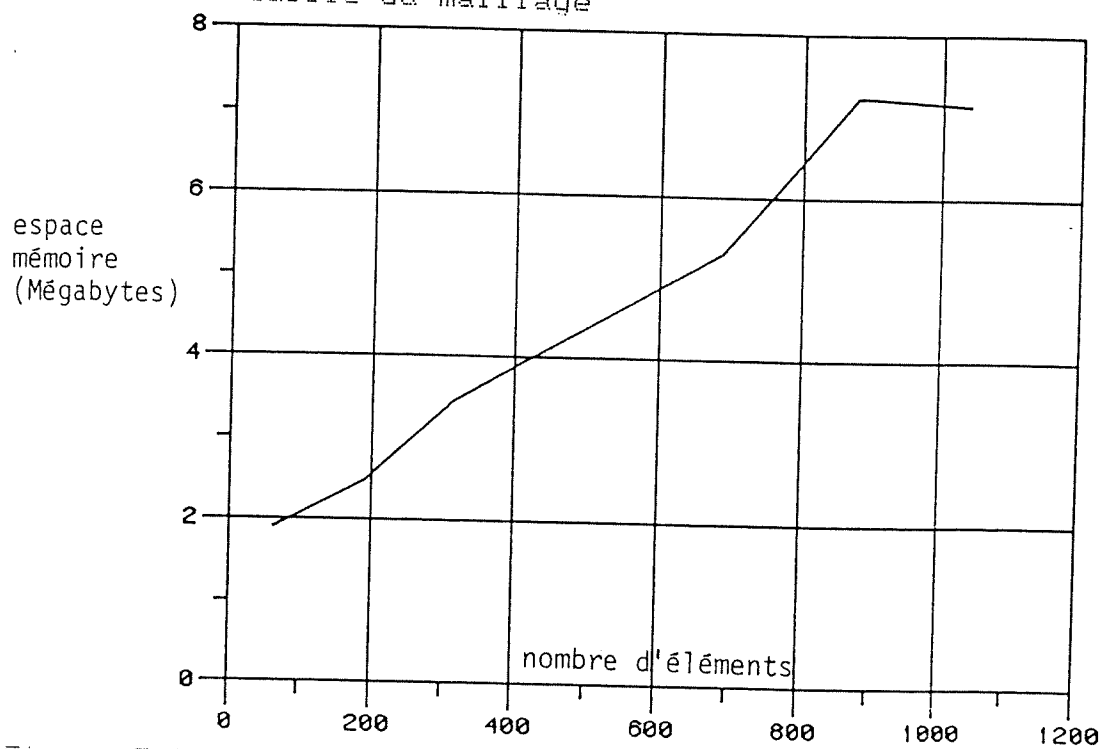


Figure 5.24 Graphique de l'espace mémoire en fonction de la taille du maillage

On observe que les deux courbes sont croissantes comme on pouvait s'y attendre. On remarquera qu'à la figure 5.23 on peut avoir des temps de calcul différents pour un même nombre d'éléments: cette différence est due au fait que deux maillages peuvent avoir une topologie bien différente affectant la largeur de bande donc le temps de calcul.

CONCLUSION

Nous avons développé un schéma aux éléments finis en coordonnées polaires capable de simuler un écoulement laminaire, incompressible et stationnaire en deux dimensions. Cet algorithme peut être utilisé pour obtenir le comportement d'un fluide dans un canal formé des aubes directrices et avant-directrices d'une turbine hydraulique.

Lorsque comparés à des solutions analytiques, les résultats de l'algorithme se sont avérés très précis, et dans un canal interaube l'algorithme est capable de prévoir les zones de recirculation. Il est robuste et n'est pas sensible aux déformations du maillage; de plus il s'ajuste automatiquement à la sévérité de chaque problème.

Les résultats présentés ici ne constituent qu'une partie de la validation de l'algorithme. Les résultats obtenus devraient être comparés à ceux obtenus d'algorithmes différents et à des données expérimentales.

Une deuxième phase de développement de l'algorithme pourrait comprendre l'extension en trois dimensions, l'instationnaire, la compressibilité, la turbulence ou plusieurs de ces facteurs.

ANNEXE A

Transformation de la formulation variationnelle des équations de Navier-Stokes en coordonnées polaires (Lu [12]).

1. Transformation du tenseur de contraintes

a) Coordonnées cartésiennes

En coordonnées cartésiennes, le tenseur du taux de déformation D_{ij} s'écrit:

$$\frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla}}u + (\underline{\underline{\nabla}}u)^T) \quad (A.1.1)$$

où

$$\underline{\underline{\nabla}} = \frac{\partial}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial}{\partial y} \underline{j} \quad (A.1.2)$$

$$\underline{u} = u_1 \underline{i} + u_2 \underline{j} \quad (A.1.3)$$

Effectuant le produit diadique, on obtient sous forme matricielle

$$\underline{\underline{\nabla}}u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial x} \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (A.1.4)$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{2} (\underline{\nabla} u + (\underline{\nabla} u)^T) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (\text{A.1.5})$$

b) Coordonnées polaires

On doit tenir compte du fait que e_r et e_θ dépendent de r et θ . En effet

$$\underline{e}_r = \cos \theta \underline{j}_1 + \sin \theta \underline{j}_2 \quad (\text{A.1.6})$$

$$\underline{e}_\theta = -\sin \theta \underline{j}_1 + \cos \theta \underline{j}_2$$

d'où

$$\frac{\partial \underline{e}_r}{\partial \theta} = \underline{e}_\theta, \quad \frac{\partial \underline{e}_\theta}{\partial \theta} = -\underline{e}_r \quad (\text{A.1.7})$$

$$\frac{\partial \underline{e}_r}{\partial r} = \frac{\partial \underline{e}_\theta}{\partial r} = 0 \quad (\text{A.1.8})$$

voir référence [4].

On peut montrer également que

$$\underline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \underline{e}_\theta \quad (\text{A.1.9})$$

posant

$$\underline{u} = u_r \underline{e}_r + u_\theta \underline{e}_\theta \quad (\text{A.1.10})$$

On obtient

$$\underline{\underline{\nabla u}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} & \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \end{pmatrix} \quad (\text{A.1.11})$$

finalement

$$\frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla u}} + (\underline{\underline{\nabla u}})^T) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) & \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \end{pmatrix} \quad (\text{A.1.12})$$

2. Equation de continuité

$$\underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{u}} = 0 \quad (\text{A.2.1})$$

devient

$$\left(\underline{\underline{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\underline{\underline{e}}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \cdot (u_r \underline{\underline{e}}_r + u_\theta \underline{\underline{e}}_\theta) = 0 \quad (\text{A.2.2})$$

développant et utilisant les relations (A.1.7) et (A.1.8)

$$\underline{\underline{e}}_r \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r} (u_r \underline{\underline{e}}_r) + \frac{\partial}{\partial r} (u_\theta \underline{\underline{e}}_\theta) \right) + \frac{\underline{\underline{e}}_\theta}{r} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (u_r \underline{\underline{e}}_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \underline{\underline{e}}_\theta) \right) = 0 \quad (\text{A.2.3})$$

finalement

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{A.2.4})$$

3. Termes de transport

Le terme de transport

$$(\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} \quad (\text{A.3.1})$$

s'écrit en coordonnées polaires

$$[(u_r \underline{e}_r + u_\theta \underline{e}_\theta) \cdot (\underline{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\underline{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta})] [u_r \underline{e}_r + u_\theta \underline{e}_\theta] \quad (\text{A.3.2})$$

$$= [u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}] [u_r \underline{e}_r + u_\theta \underline{e}_\theta] \quad (\text{A.3.3})$$

$$= u_r \frac{\partial}{\partial r} (u_r \underline{e}_r) + u_r \frac{\partial}{\partial r} (u_\theta \underline{e}_\theta) + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_r \underline{e}_r) + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \underline{e}_\theta) \quad (\text{A.3.4})$$

$$= \underline{e}_r \left(u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta u_\theta}{r} \right)$$

dans la direction radiale et

$$+ \underline{e}_\theta \left(u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta u_r}{r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right)$$

dans la direction tangentielle.

REFERENCES

- 1) Hughes, W.F. and Gaylord, E.W., "Basic Equations of Engineering Science", Schaum Publishing Co., New York, (1964).
- 2) Fortin M., Fortin A., "Développement d'un schéma instationnaire pour les équations de Navier-Stokes", à paraître.
- 3) Dhatt, G. et Touzot, G., "Une présentation de la méthode des éléments finis", Maloine S.A. éditeur, (1981).
- 4) Spiegel, M.R., "Vector analysis and an introduction to tensor analysis", série Schaum, McGraw-Hill, New York, (1959).
- 5) Oden, J.T., "Finite Elements of Non-Linear Continua", McGraw-Hill, New York, (1972).
- 6) Zienkiewicz, D.C., "The Finite Element Method in Engineering Science", McGraw-Hill, London, (1971).
- 7) Strang, G. et Fix, O.J., "Analysis of the Finite Element Method", Prentice-Hall, New Jersey, (1973).
- 8) Ciarlet, P.-G., "The Finite Element Method for Elliptic Problems", North-Holland, Amsterdam, (1978).
- 9) Fortin, A., "Méthodes d'éléments finis pour les équations de Navier-Stokes", Thèse de doctorat, Université Laval, Québec, (1984).
- 10) Fortin, M. et Tanguy, P., "A Non-Standard Mesh Refinement Procedure Through Node Labelling", à paraître dans International Journal of Numerical Methods in Engineering.
- 11) Ciarlet, P.-G. et Raviart, P.-A., "Interpolation Theory Over Curved Element with Applications to Finite Element Methods", Comp. Math. Appl. Mech. Eng. 1, p. 217-149, (1972).
- 12) Lu, Pau-Chang, "Introduction to the mechanics of viscous fluids", McGraw-Hill, New York, (1977).
- 13) Arrow, K.J., Hurwicz, L., Usawa, H., "Studies in non-linear programming", Stanford University Press, (1958).

- 14) Fortin, A., Fortin, M., Thi, V.C. et Camarero, R., "Simulation numérique d'écoulements visqueux dans une turbine hydraulique", Rapport EPM/RT-85-4, Ecole Polytechnique, (1985).
- 15) Fortin, M., Fortin, A., "A Generalisation of Usawa's Algorithm for the solution of the Navier-Stokes Equations", Prépublication 84-25, Université Laval, (1984).
- 16) Fortin, M., Glowinski, R., "Résolution numérique de problèmes aux limites par des méthodes de Lagrangien augmenté", Dunod, Paris, (1983).
- 17) Brezzi, F., "On the existence, uniqueness and approximation of Saddle-points problems arising from Lagrangian multipliers", RAIRO, 8, R2, p. 129-151, (1974).
- 18) Fortin, A., Fortin, M., "Experiments with several elements for viscous incompressible flows", Rapport EPM/RT-85-9, Ecole Polytechnique, Montréal, (1985).
- 19) Griffiths, D.F., "The construction of approximately divergence-free finite elements", In the Mathematical foundations of the finite element method with applications to PDE, (Ed. A. Aziz) Academic Press, (1972).
- 20) Hecht, "Construction d'une base d'un élément fini P_1 non conforme à divergence nulle dans R^3 ", Thèse de 3e cycle, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), (1980).
- 21) Yosida, K., "Functional Analysis", Springer-Verlag, Berlin, (1965).
- 22) Gerald, C.F., Wheatley, P.O., "Applied Numerical Analysis", Addison-Wesley, Reading, Mass., (1984).
- 23) Garon, A., Camarero, R., "Génération des maillages", rapport EPM/RT-84-11, Ecole Polytechnique, (1984).
- 24) Streeter, V.L., Wylie, E.B., "Fluid mechanics", McGraw-Hill, New York, (1979).
- 25) Ryming, I.L., "Dynamique des fluides". Presses polytechniques romande, Suisse, (1985).

- 26) Spiegel, M.R., "Formules et tables de mathématiques", série Schaum, McGraw-Hill, (1978).
- 27) Batchelor, G.K., "An introduction to fluid dynamics", Cambridge University Press, New York, (1967).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL



3 9334 00289359 0