Lakatos ja metamatematiikka

Todistusten ja kumoamisten metodi Imre Lakatosin Proofs and Refutations-teoksessa

Pro Gradu-tutkielma
Markus Tapani Hyytinen
2373162
Humanistinen tiedekunta
Filosofian ja historian maisteriohjelma
Oulun yliopisto

Lukuvuosi 2021-2022

Sisältö

Esipuhe

Onko matemaattinen tiedontuotanto erilaista muiden tieteenalojen tiedontuotantoon verrattuna? Miten matematiikka eroaa muista tieteenaloista, jos lainkaan? Voiko näihin kysymyksiin tarjota uskottavia vastauksia matematiikan tieteenalan sisällä?

Matematiikkaan tieteenalana liitetään toisinaan stereotyyppinen käsitys sen ylivertaisesta loogisuudesta, objektiivisuudesta tai "puhtaudesta".

1 Johdanto

Tämä tutkielma ei ole kokonaisnäkemys Imre Lakatosin matematiikanfilosofiasta, sillä rajauksen ulkopuolelle jää Lakatosin myöhempi tuotanto. Tutkielman näkökulma keskittyy Lakatoksen itsensä teoksen *Proofs and Refutations* filosofisessa esipuheessaan esille nostamiin teemoihin, pääosin metamatematiikkaan, formalismiin ja euklidiseen projektiin, joita käsitellään pääluvussa 3 ja sen alaluvuissa. Myöhempää tutkimusta varten jätetään myös Lakatosin ajattelun taustalta mahdollisesti löytyvän hegeliläis-historiallisen näkökulman erittely.

Tutkielma käsittelee kriittisesti matematiikan asemaa erityisen objektiivisena ja loogisena tieteenalana, esitellen Imre Lakatosin argumentteja teoksesta *Proofs and Refutations*. Matemaattisen tiedontuotannon olemuksen tarkastelun lisäksi tutkielma pohtii myös Imre Lakatosin itsensä asemaa matematiikanfilosofina. Lakatosin matematiikanfilosofiaa tutkitaan ensisijaisesti vertailemalla hänen matemaattisepistemologisia näkemyksiään David Hilbertin formalistiseen matemaattiseen ajatteluun. Lakatos itse motivoi tämän vastakkainasettelun teoksen *Proofs and Refutations* esipuheessaan, mutta teoksen sisältö itsessään ei jatka tätä dialogia kuin alaviitteissä. Saadakseni muodostettua vuoropuhelun Hilbertin ja Lakatosin välillä, olen syventänyt Lakatosin itsensä maalaamaa kuvaa metamatematiikan käsitteestä, joka eroaa 1900-luvun alkupuoliskolla valtavirtaistuneesta, Hilbertin matematiikanfilosofian ja S.C. Kleenen oppikirjan *Introduction to Metamathematics*[21] muovaamasta merkityksestä. Tarkastelemalla metamatematiikan käsitettä lakatosilaisesta näkökulmasta päästään mielestäni lähemmäksi filosofiaa ja saadaan muodostettua itsereflektoiva kuva matematiikan filosofisuudesta tieteenalan itsensä sisältä kummuten.

Hilbertiläisen näkökulman puutteet ja rajoitteet matemaattisen tiedontuotannon selittämisessä nousevat esiin euklidisen koulukunnan käsitettä tarkastellessa. Metamatematiikka ja euklidianismi ovat tutkielman ydinkäsitteitä, joiden avulla voidaan lähestyä sekä Imre Lakatosin matematiikanfilosofiaa että tämän näkökulmaa matematiikkaan tietoa tuottavana tieteenä sinänsä. Teoksen *Proofs and Refuta-*

tions sisältö ei riitä näiden tavoitteiden saavuttamiseen. Lakatosin matemaattis-filosofisten positioiden koostamiseksi olen käyttänyt lähteinä myös Lakatosin itsenäisiä tieteenfilosofiaa käsitteleviä artikkeleita. Tämä ei ole täysin ongelmatonta, sillä osa hyödyntämistäni artikkeleista on kirjoitettu ja julkaistu Lakatosin myöhemmän tuotannon merkittävän teoksen, *Method of Scientific Research Programmes* jälkeen, tutkielman rajauksen ulkopuolella. Olen kuitenkin päätynyt käyttämään artikkeleja tutkielman lähteinä, koska näen niiden sopivan teoksen *Proofs and Refutations* jatkumoon matemaattis-filosofisten näkemystensä osalta, varsinkin epistemologisissa argumenteissa.

Lähtökohtanani Lakatosin myöhemmän tuotannon hyödyntämisessä, kun rajana pidetään teosta *Method of Scientific Research Programmes*, on tietoisesti valittu oletus, että Lakatosin käsitykset epistemologiasta tieteellisen tiedontuotannon rakenteissa eivät muuttuneet hänen tuotantonsa aikana samassa määrin kuin hänen käsityksensä tieteellisen työskentelyn tavoista. Tämän lähtökohdan tukijalkana ovat artikkelit *Infinite regress and foundations of mathematics*[30] ja *A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics?*[29], jotka ovat mielestäni yllättävänkin yhteensopivia teoksen *Proofs and Refutations* kanssa. Lakatosin metodologiset ajatukset lienevät eroteltavissa hänen muista matemaattis-filosofisista, varsinkin epistemologisista, positioistaan. Tästä näkökulmasta tarkasteltuna löydettävissä voisi olla jonkinlainen tieteenfilosofinen jatkumo teoksien *Proofs and Refutations* ja *Method of Scientific Research Programmes* välillä. Tässä tutkielmassa teoksia ei kuitenkaan pyritä vertailemaan tai sovittamaan niitä yhteen, vaan MSRP on rajattu tutkielman ulkopuolelle. Tämä rajaus vähentää Lakatosin tarjoaman matemaattisen metodin merkitystä: luvussa 4 selitettävää todistusten ja kumoajien metodia ei tulkita tässä tutkielmassa konkreettisena ohjenuorana matemaattiseen työskentelyyn, vaikka se on voinut olla Lakatosin itsensä intentio, vaan sen avulla selitetään sekä Imre Lakatosin matematiikanfilosofiaa että matemaattista tiedontuotantoa sinänsä.

Rajauksen myötä tämä tutkielma ei hyödynnä erinäisiä hyvin merkittäviä lähteitä, jotka ovat vuoropuhelussa Imre Lakatosin tuotannon kanssa. En käsittele Paul Feyerabendin puheenvuoroja lainkaan, esimerkiksi teosta *Science in a Free Society.*[9] Jätin myös pois teoksen *Proofs and Refutations* vuoden 1976 laitoksen toisen toimittajan, Lakatosin oppilaan Elie Zaharin tutkielmat einsteiniläisestä fysiikan tutkimusohjelmasta, koska katsoin niiden nojaavan MSRP:hen niin suuressa määrin, että niiden lainaaminen pelkästään teoksen *Proofs and Refutations* kontekstiin olisi johdattanut tutkielman sivuraiteille. Näiden hylkäämieni tekstien sisältämän keskustelun kohdistaminen pelkästään teokseen *Proofs and refutations* ei olisi mielekästä tai vaatisi laajemman, yleisluontoisemman sukeltamisen matematiikanfilosofiaan kuin tämän Imre Lakatosiin rajatun tutkielman puitteissa on mahdollista. Tämä tutkielma ei pyri eksplikoimaan Imre Lakatosin kantaa tieteelliseen työskentelyyn tai edes hänen näkemyksiään epistemologiasta osana tieteenfilosofiaa, vaan selittämään Lakatosin matematiikanfilosofiaa osittain näihin näkökulmiin nojautuen. Lopputulos on suppea selvitys Lakatosin ajattelusta. Mielestäni Lakatos tähtää tuotannossaan yleisempään tieteenselitykseen kuin yhteen tieteenalaan, matematiikkaan, rajoitettuun katsantoon.

Matematiikanfilosofialla on kuitenkin erityinen asema Lakatosin tieteenfilosofiassa. Teos *Proofs and Refutations* on merkittävä, aikansa matemaattista valtavirtaa vastaan asettunut teos, jonka herättämät ajatukset matematiikan luonteesta ovat ymmärrettäviä ja hyödyllisiä nykypäivänäkin. *Proofs and Refutations* on yhtä aikaa matemaattinen ja filosofinen teos. Sen tulkitsemiseksi paras konteksti ei ole katsoa teokseen taaksepäin Lakatosin tuotannon kokonaisuudesta, etenkin MSRP:stä käsin, jolloin teoksen esittelemä matematiikan metodologia näyttäytyy irrallisena ja vanhentuneena, vaan tiedostaa teoksella oleva asema aikansa *matemaattisena* puheenvuorona. Kun teos sisällytetään matematiikan aatehistorialliseen jatkumoon 1900-luvun alun kontekstissa, myös teoksen filosofinen sisältö ja paikka Lakatosin tuotannon kokonaisuudessa on havaittavissa selkeämmin. Ilman tätä matemaattista näkökulmaa merkittävä osa tekstin filosofisestakin sisällöstä jää epäselväksi. Vastaavasti matemaattisen näkökulman ymmärtäminen tekee tekstin tieteenfilosofisen annin helpommin saavutettavaksi ja sovitettavaksi osaksi Lakatosin laajempaa kokonaisuutta.

2 Proofs and Refutations teoksena

2.1 Tausta

Teoksen *Proofs and Refutations* tekstin historia on monivaiheinen. Dialogimuotoisen tekstin ensimmäinen luku oli alkujaan Lakatosin esitelmäkokonaisuus Karl Popperin seminaarissa London School of Economicsissa maaliskuussa 1959[28, xii]. Lakatos laajensi tämän tekstin väitöskirjaksi Cambridgessa professori R.B. Braithwaiten alaisuudessa. Väitöstilaisuus pidettiin vuonna 1961. Lakatos julkaisi väitöskirjansa ensimmäisen luvun myöhemmin neljänä artikkelina otsikon *Proofs and Refutations* alla, joka oli kyseisen otsikon ensimmäinen ilmentymä. [35][28] Nykyään yleisin versio on postuumisti koottu punakantinen nide vuodelta 1976, joka pohjautuu *Proofs and Refutations*-artikkelisarjaan sekä Lakatosin väitöskirjan lukuihin 2 ja 3. Teoksen editoijat John Worrall ja Elie Zahar koostivat toisen pääluvun ja liitteitä pohjautuen Lakatosin julkaistuihin ja julkaisemattomiin matemaattisfilosofisiin ja heuristiikkaa pohtiviin teksteihin [28]. Teoksen otsikko *Proofs and Refutations* on kunnianosoitus Karl Popperin vuonna 1963 julkaistuun teokseen *Conjectures and Refutations: The Growth of Scientific Knowledge*. Lakatos nojaa Popperin tieteenfilosofiaan hyvin vahvasti, mitä käsitellään enemmän tämän tutkielman myöhemmissä luvuissa.

Teksti, josta myöhemmin tuli *Proofs and Refutations* ei kuitenkaan ollut Lakatosin ensimmäinen väitöskirja. Lakatos väitteli 25-vuotiaana Debrecenin yliopistossa Unkarissa vuonna 1947 otsikolla *On the Sociology of Concept Formation in the Natural Sciences*. Hänen uransa Unkarissa oli radikaalin kommunismin kyllästämä, ja usein Lakatosia käsitellessä keskitytäänkin vain hänen uransa myöhemmässä vaiheessa Cambridgessa julkaistuihin teoksiin *Proofs and Refutations* (tässä tutkielmassa käsitelty matematiikan filosofian teos) ja *The Methodology of Scientific Research Programmes* (tieteenfilosofiaa laajemmalti käsittelevä teos). Tässä tutkielmassa nimelllä *Proofs and Refutations* viitataan postuumisti koottuun laitokseen.

Keskeinen käsite Lakatosin tekstissä on "metamatematiikka". Lakatos olettaa tämän käsitteen tunnetuksi, ja käsittelee sitä enimmäkseen teoksen esipuheessa. Vähättelevä sävy, jolla Lakatos viittaa "metamatematiikkaan"paljastaisi itsessään käsitteen taustalla olevan ajattelusuuntien eroja, vaikka Lakatos ei itse eksplikoisikaan niitä esipuheessa. Mitä metamatematiikalla tarkoitettiin 1950- ja 1960-luvuilla? S.C. Kleenen oppikirjassa *Introduction to Metamathematics* 1950-luvulta metamatematematiikasta sanotaan: *"– – Metamathematics will be found to provide a rigorous mathematical technique for investigating a great variety of foundation problems for mathematics and logic, among which the consistency problem is only one."*.[21, 59] Metamatematiikka ei siis ole yksittäinen mekanistinen metodi, vaan kokoelma toimintatapoja ja -strategioita. Kleenen mukaan näitä eri metodeja yhdistävä tekijä on niiden huolellinen järjestelmällisyys (*rigour*) ja niiden tutkimuskohde: matematiikan perusteet. Kleenen ajatuksiin palataan luvussa 3.1. Imre Lakatosin ajatusten ymmärtämiseksi on tärkeää pitää mielessä metamatematiikan laaja tulkinta useita metodeja sisältävänä kokonaisuutena.

1900-luvun alkupuoliskon metamatematiikassa matematiikan tutkimusprosessit otettiin matemaattisen analyysin ja kehityksen kohteeksi. David Hilbert väitti vuonna 1905, että *"[we can] consider the proof itself to be a mathematical object."* [32] Tämän lausahduksen ajankohtana Hilbert oli jo saavuttanut merkittävän auktoriteettiaseman matematiikassa, vaikka metamatemaattinen keskustelu sinänsä olikin alkanut jo aikaisemmin.

Teoksen *Proofs and Refutations* alaotsikko *The Logic of Mathematical Discovery* kytkee teoksen osaksi metamatematiikan tavoitetta kehittää matematiikan tutkimusprosesseja loogisella ja systemaattisella tavalla.

Lakatosin esipuheessaan esittämä kritiikki onkin kohdistettava tarkemmin kuin metamatematiikkaan kokonaisuutena. Lakatos suuntaa kritiikkinsä Hilbertiläiseen matemaattisen ratkaisuprosessin systematisointiin ja muodollisiin aksiomaattisiin rakenteisiin. Kritiikki ei kohdistu metamatematiikkaan sinäsnä, ainakaan jos käsite "metamatematiikka"tulkitaan toimintana, jossa matemaattista tutkimusprosessia tutkitaan sekä matematiikan että filosofian keinoin. Mielestäni Lakatos edustaa laajaa tulkintaa metamatematiikasta. Lakatos kritisoi vain pientä osaa metamatematiikasta, vaikka hän esipuheessaan viittaakin siihen yhtenä kokonaisyksikkönä. Teos *Proofs and Refutations* tarjoaa metamatemaattisia toimintamalleja ja -näkökulmia kilpailijoiksi haastamaan Hilbertin vakiintunutta mallia. Lakatos siis haluaa palauttaa metamatematiikan laajaksi, useamman kuin yhden toimintatavan sisältäväksi matemaattiseksi työkalupakiksi. Lakatosin puheenvuoro vapauttaa metamatematiikan ahtaista, 1900-luvun alun euklidis-hilbertiläisistä kehyksistään. Tätä vastakkainasettelua ja Lakatosin argumentteja sekä hänen esittelemiään toimintamalleja käsitellään myöhemmissä luvuissa, varsinkin pääluvuissa 3 ja 4.

On tulkittavissa, että Lakatos luokittelee teoksensa metamatematiikan filosofista haaraa edustavaksi teokseksi, joka kritisoi ja pohtii matemaattisen tutkimusprosessin systematisointia. Mielenkiintoinen näkökulma Lakatoksen formalismiin kohdistamasta kritiikistä on Lakatosin väitöskirjaohjaajan, R.B. Braithwaiten näkemys tieteellisestä tutkimuksesta. Tulkitsen Braithwaiten edustavan näkemyksessään positivismia. Braithwaiten mukaan teoria tulisi rakentaa abstraktien, aina voimassaolevien lakien pohjalta. [19] Lakatoksen menetelmän historiallisuus (jopa dialektisuus) on kontrastina hänen väitöskirjaohjaajansa näkemyksiin.

Esipuheessaan Lakatos kohdistaa kritiikkinsä kehäänkärjen suuntaukseen, johon hän viittaa formalismina:

"Under the present dominance of formalism, one is tempted to paraphrase Kant: the history of mathematics, lacking the guidance of philosophy, has become blind, *while the philosophy of mathematics, turning its back on the most intriguing phenomena in the history of mathematics has become* empty *. . . . The purpose of these essays is to approach some problems of the* methodology of mathematics.*"* [28] (korostukset alkuperäisestä tekstistä)

Hilbertin lisäksi Lakatos nostaa esiin Georg Pólyan työt matemaattisen ongelmanratkaisun formalisoimisessa heuristiikkojen eli ongelmanratkaisustrategioiden kehittelyssä. [38] Kolmanneksi merkittäväksi vaikuttajakseen Lakatos mainitsee Karl Popperin, nostaen esiin hänen käsitteensä "logic of discovery"ja "situational logic". Lakatoksen ajattelua suhteessa Popperin ja Kuhnin tieteenfilosofiaan käsitellään tämän tutkielman luvussa 6. Teoksen *Proofs and Refutations* nimen sisältämän selkeän Popper-viittauksen lisäksi Lakatos osoitti alkuperäisen 4-osaisen artikkelisarjansa omistuskirjoituksen Pólyalle ja Popperille.

2.2 Rakenne

Proofs and Refutations koostuu neljästä osiosta: kaksi lukua ja kaksi liitettä. Tutkielmän tässä alaluvussa selitän osioiden tärkeimmät sisällöt, varsinkin ensimmäisestä luvusta, joka muodostaa tekstin matemaattis-filosofisen ytimen. Teoksen kaksi lukua ovat Lakatoksen itsensä viimeistelemä kokoelma neljästä *Proofs and Refutations*-artikkeleista, jotka hän julkaisi Cambridgen väitöskirjansa pohjalta vuosina 1963-1964. [35] Päälukujen teksti on julkaistu eri muodoissa useita kertoja.

Tässä tutkielmassa käytetään vuoden 1976-laitoksen mukaista tekstiä, jonka editoijina ja koostajina olivat Lakatosin oppilaat John Worrall ja Elie Zahar. He laajensivat ja muokkasivat tekstiä Lakatosin postuumien muistiinpanojen, kirjeenvaihdon ja sanallisen perimätiedon mukaisesti. Nämä laajennokset ja muokkaukset on selitetty alaviitteissä, ja ovat pääpiirteissään ongelmattomia, tekstiä parantavia teknisiä muutoksia. Lakatoksen eläessään jukaisemat tekstikappaleet on koostettu muokkaamattomina, vain sidosteita lisäten. Postuumit lisäykset ovat kokeneet suuremman muokkauksen: editoijat kirjoittivat pääluvun 2 ja liitteen 1 sisällön dialogimuotoon saavuttaakseen yhtenäisen tekstilajin pääluvun 1 kanssa. Worrall ja Zahar vakuuttavat esipuheessaan, että Lakatosin ajatusten matemaattinen sisältö on heidän laitoksessaan muokkaamaton, ja että heidän panostansa tulisi pitää kirjallisena, tietosisältöön vaikuttamattomana editointina. Tämä voi olla ongelmallista pääluvussa 2, sillä tuon luvun ydinajatus on esittää euklidinen päättelyketju eksplikoituna tavalla, jossa tavallisesti tiiviissä matemaattisissa julkaisuissa kirjoittamattomat ja ilmaisemattomat välivaiheet tuodaan esiin dialogimuodossa. Mielestäni Worrall ja Zahar onnistuivat hyvin tässä tehtävässä. Tulkinnanvaraiset kohdat on selkeästi tuotu esiin alaviitteissä taustoituksen kera. Editoijat tuovat omat tukintansa Lakatosin ajatuksista toisinaan esiin alaviitteissä. Toisen liitteen hegeliläistä dialektiikkaa käsittelevä alaviite herättää kysymyksiä: Sen yhteydessä Worrall ja Zahar tulkitsevat Lakatosin suhtautumista Hegeliin ja dialektiikkaan melko vahvasti, sitoutuen näkemykseen, jonka mukaan Lakatosin ajatukset dialektiikasta muuttuivat merkittävästi hänen uransa loppupuolella. Nähdäkseni näiden tulkintojen käsittely ei kuitenkaan ole tarpeellista teoksen *Proofs and Refutations* metamatemaattisen ydinsisällön esiintuonnissa, mikä on tämän tutkielman selkeä rajaus. Jos teoksen vuoden 1976 laitosta käytettäisiin Lakatosin hegeliläisyyden tutkimuksessa, olisi mielestäni syytä kiinnittää erityistä huomiota Worrallin ja Zaharin omiin käsitykseen aiheesta. Tämä on voinut vaikuttaa tekstin lopulliseen muotoon.

Teoksen *Proofs and Refutations* vuoden 1976 laitoksen eri painosten pituus on noin 150 sivua. Näistä ensimmäisen luvun pituus on tasan sata sivua ja toisen luvun 20 sivua. Liitteiden pituudet ovat 15 sivua ja 12 sivua.

Ensimmäinen ja toinen luku on kirjoitettu kaunokirjallisesti sokraattisen dialogin muotoon, mikä on harvinaista laajemmaltikin tieteissä ja miltei ennenkuulumatonta matematiikassa.. Lakatos tosin lainaa teoksessaan erästä tunnettua dialogimuotoon kirjoitettua fysiikan klassikkoa: Galileon teosta *Dialogue Concerning the Two Chief World Systems*. Lakatosin lainaus tästä Galileon dialogista esiintyy suorana lainauksena osiossa 6. a) sivulla 241 osana keskustelua eri avaruuskappaleiden perimmäisten olemuksten suhteesta niitä koskeviin todistuksiin. Lakatos oli siis tietoinen ainakin yhdestä luonnontieteellisestä dialogimuotoon kirjoitetusta teoksesta. Ehkä Galileon dialogi inspiroi Lakatosta valitsemaan tämän harvinaisen tekstityypin myös omalle teokselleen? Toinen mahdollinen esikuva Lakatosin valitsemalle tekstilajille on Lewis Carollin *Mind*-julkaisuun kirjoitettu dialogimuotoinen allegoria *What the Tortoise Said to Achilles* vuodelta 1895.[5]

Lakatosin dialogin henkilöitä ovat luokallinen matematiikan opiskelijoita, jotka on nimetty kreikkalaisten aakkosten mukaan, sekä heidän opettajansa. Osana dialogia Lakatos kuvaa luokan opiskelijoita "hyvin edistyneiksi", viitaten opiskelijoiden korkeaan (itse)kriittisyyden tasoon filosofisesta näkökulmasta, vaikka opiskelijat osoittavat myös kiitettävää osaamista vakiintuneiden matemaattisten menetelmien soveltamisesta. Eri henkilöhahmoilla on erilainen käsitys matematiikasta ja matemaattisesta tutkimusprosessista. Hahmojen käsitykset ja oletukset kehittyvät osana dialogia, mikä on ominaista sokraattisen dialogin tekstityypille. Henkilöhahmojen näkemyksissä voi huomata erilaisia (meta)matematiikan aatesuuntia ja tunnettujen, historiallisten matemaatikkojen ajatuksia. Luokan opettaja sekä osallistuu keskusteluun aktiivisesti että johtaa sitä. Opettaja tuo luokan tarkasteltavaksi omia todistuksiaan, esittelee omaa metamatematiikan teoriaansa, joka on Lakatosin todistusten ja kumoajien metodi, sekä vaatii oppilailta perusteluja heidän esittämilleen väitteille:

TEACHER: *Enough of philosophy! Let us see the proof. I do not like your philosophy, but I still may like your proof.*[28, 109]

Teoksen aihe, metamatematiikka, on haastavana pidetyn matematiikan tieteenalan melko obskuuri osa, mutta sokraattinen dialogi tekstityyppinä on filosofian tieteenalalta tuttu ja miellyttävä formaatti. Lakatos käytti paljon aikaa ja vaivaa tekstin jatkuvaan uudelleenkirjoittamiseen saavuttaakseen itse asettamansa korkean tavoitetason tekstin helppolukuisuuden suhteen. Vuoden 1976 laitoksen kokoajat John Worrall ja Elie Zahar väittävät teoksen esipuheessaan Lakatosin tavoitelleen selkeää, helposti seurattavaa ilmaisua. Dialogi selittää itseään lukuisissa kohdissa: Dialogin henkilöhahmot pyytävät toisiaan määrittelemään termejä, joita he eivät ymmärrä tai myöntävät, etteivät ymmärrä jotain todistusta. Tällöin dialogi siirtyy hetkeksi sivuraiteille henkilöhahmojen selittäessä haasteellisen käsitteen tai todistuksen osan yksityiskohtaisemmalla kielellä.

BETA: *Stop for a moment. I cannot easily follow your k-dimensional definitions. Let me think loudly about an example. – – I see now why you introduced the* mod 2 *sums in your definition. Please carry on.*

Dialogin jatkuva itsensä selittäminen ja mahdollinen kohdennus aloittaville matematiikan opiskelijoille muistuttaa George Pólyan teosta *How To Solve It.* [38] Lakatos käänsi tämän matemaattisen ongelmanratkaisun klassikkoteoksen englannista unkariksi viimeisinä unkarinvuosinaan 1950-luvun puolessavälissä. [35]

Punaisena lankana läpi teoksen kulkee tietyn matemaattisen ongelman käsittely eri näkökulmin ja metodein. Kyseessä on Leonhardt Eulerin vuonna 1758 löytämäksi luettu kysymys kolmiulotteisten avaruuskappaleiden luokittelusta. Kaksiulotteisia tasokappaleita voidaan luokitella niiden sivujen tai kärkien lukumäärän mukaisesti. Kaikille kaksiulotteisille monikulmioille pätee kaava

$$V = E,$$

missä V, *(vertex)* tarkoittaa kärkien lukumäärää ja E *(edge)* tarkoittaa sivujen lukumäärää. Kaksiulotteisissa monikulmioissa on siis yhtä monta kärkeä kuin sivua. Monikulmiot voidaan siis luokitella tämän perusteella kolmioihin, neliöihin, viisikulmioihin, kuusikulmioihin jne. Näin yksinkertainen särmien (tai tahkojen) ja kärkien vastaavuus ei toimi kolmiulotteisissa kappaleissa. Euler ehdotti monitahokkaiden luokitteluun kaavaa

$$V - E + F = 2,$$

missä uusi muuttuja F *(face)* tarkoittaa tahkojen lukumäärää. Lisäksi on huomattava, että avaruuskappaleiden sivuista käytetään suomenkielistä termiä "särmä", vaikka todistuksen aikana avaruuskappale muutetaan tasokappaleeksi.

Teoksen ensimmäinen luku alkaa ongelman esittelyllä: monitahokkaiden luokitteluun halutaan helppo luokittelutapa, kuten monikulmioille. Ongelmaan esitetään ratkaisuehdotukseksi otaksuma, tässä tapauksessa Eulerin esittämä lause. Tähän ongelman ja ratkaisu-otaksuman esittelyyn Lakatos käyttää vain yhden sivun. Teoksen runsaissa alaviitteissä esitellään lauseiden ja näkökulmien historiallinen tausta sekä Lakatosin kommentointi niihin. Lakatos siis jatkuvasti kommentoi ja taustoittaa dialogia alaviitteissä.

Varsinainen dialogi alkaa opettajan tarjotessa luokalle todistuksen väitteestä:

Lause 2.1. *Kaikille monitahokkaille pätee V-E+F=2.*

Referoin todistuksen kokonaisuudessaan, sillä se on erinomainen esimerkki luonnollisella kielellä kommunikoidusta syvällisestä matemaattisesta todistuksesta ja olisi eleganssinsa suhteen esimerkillinen, ellei siitä paljastuisi merkittäviä puutteita.

Todistus lauseelle $V - E + F = 2$, Lakatosin sanallistamana (vapaa suomennos sekä omia selittäviä lisäyksiäni):

Vaihe 1: Kuvitellaan ontto monitahokas (esimerkiksi ontto noppa), jonka pinta on venyvää kumia. Jos yksi tahko leikataan pois, voidaan jäljelle jäävä pinta venyttää levyksi liitutaululle ilman, että pintaa tarvitsee repiä. Tahkot ja särmät muuttavat muotoaan: särmät käyristyvät ja tahkoista tulee epäsäännöllisen muotoisia, mutta V ja E, eli kärkien ja särmien lukumäärä ei muutu. Jos alkuperäiselle monitahokkaalle päti $V - E + F = 2$, niin liitutaululle venytetylle pinnalle pätee $V - E + F = 1$, sillä siitä leikattiin yksi tahko irti.

Vaihe 2: Pinta koostuu monikulmioista. Jokaisen monikulmion voi jakaa kolmioiksi lävistäjiä lisäämällä. Pinnalle piirretään lävistäjiä (jotka ovat mahdollisesti kaarevia pinnan venyttämisen takia, mutta jos monitahokas irrotettaisiin liitutaululta ja palautettaisiin muotoonsa, olisivat lävistäjät suoria). Yhden lävistäjän lisääminen nostaa sekä särmien että tahkojen lukumäärää yhdellä, joten termin $V-E+F$ arvo säilyy muuttumattomana lävistäjien lisäyksessä.

Vaihe 3: Pinta koostuu nyt kokonaan kolmioista. Leikataan kolmiot irti yksi kerrallaan ulkoreunaa pitkin edeten. Ulkoreunan kolmio on kiinni muussa pinnassa joko kahdelta särmältään, jolloin sen irroittamisessa pinnasta poistuu yksi tahko ja yksi särmä, tai kolmio on kiinni muussa pinnassa vain yhdeltä särmältään, jolloin sen irroittamisessa pinnasta poistuu yksi tahko, yksi kärki ja kaksi särmää. Molemmissa näissä vaihtoehdoissa termin $V-E+F$ arvo säilyy muuttumattomana. Kolmioita poistetaan, kunnes jäljelle jää yksi kolmio. Koska yhdelle kolmiolle välttämättä pätee $V - E + F = 1$, päti se myös koko pinnalle ennen kolmioiden poistoa ja lävistäjien lisäyksiä. Näin ollen alkuperäiselle monitahokkaalle päti ennen tahkon poistoa $V - E + F = 2$. Lause on todistettu. [28, 7-8]

Tämä todistus, joka itse asiassa on Augustin-Louis Cauchyn eikä Leonhard Eulerin käsialaa vuodelta 1813, aloittaa varsinaisen metamatematiikan pohdinnan dialogissa, mikä kestää koko teoksen yli. Todistus sisältää lukuisia piilotettuja oletuksia, jotka eivät ole ilmiselviä. Todistuksen yksinkertaisuus ja sen seuraamisen helppous luo vaikutelman matemaattisesta eleganssista, mutta sen huomataan olevan epistemologisesti täysin riittämätön.

Todistus ei määrittele käsitettä "monitahokas"ja olettaa venyttämisen ja kolmioimisen olevan mahdollista mielivaltaiselle monitahokkaalle. Todistuksessa on lisäksi lukuisia mutia lausumattomia taustaoletuksia ja määrittelemättä jätettyjä käsitteitä, jotka ilmenevät teoksen *Proofs and Refutations* ensimmäisessä pääluvussa. Todistuksen huomataan pätevän vain tietynlaisille monitahokkaille. Tämä ei kuitenkaan tee todistuksesta hyödytöntä. Se todistaa lauseen tiettyjä monitahokkaita koskien, sekä auttaa tarkentamaan käsitteen "monitahokas"määritelmää. Tällöin todistus edistää matematiikan tieteenalaa eri tavalla, kuin mikä oli alkuperäinen tarkoitus todistusta laadittaessa. Samalla todistus, ja varsinkin sen metamatemaattinen tutkiminen, valaisee matematiikan tieteenalan tiedontuotantoprosessia ja matemaattisen tutkimuksen tekotapoja.

Dialogi on helppolukuisuudestaan huolimatta polveileva: kysymyksiin palataan usein myöhemmin uudestaan jos niiden huomataan olevan relevantteja myöhemmin käsiteltävissä teemoissa. Dialogin pitää kasassa selkeä alalukurakenne, jonka kehystämänä dialogin keskustelu pohjustaa ja lopulta rakentaa Lakatosin todistusten ja kumoajien metodin. Alaluvut ovat edelleen jaettuja kappaleisiin, joissa käsitellään kerrallaan yhtä metamatemaattista periaatetta, ongelmanratkaisustrategiaa (heuristic) tai näkökulmaa. Lakatos rakentaa kirjoitukseensa selkeyttä myös käytetyn sanaston myötä. Lakatosin metamatematiikassaan käyttämä sanasto sisältää paljon luonnollista kieltä jargonin sijasta. Vaikka hän käyttääkin merkittävässä määrin itse keksimiään termejä, ne on useimmiten selitetty tekstin osana.

Teoksen *Proofs and Refutations* lukurakenne on ytimekäs ja harkittu. Ensimmäinen luku sisältää teoksen tärkeimmät merkitykset. Ensimmäinen luku sisältää hienojakoisen alarakenteen temaattisine alalukuineen. Sisällön pilkkominen alle kymmenen sivun osiin tukee argumenttien ymmärtämistä. Teoksen toinen luku on huomattavasti lyhyempi kuin ensimmäinen luku. Toinen luku sisältää kolme alalukua, muttei niiden jakoa edelleen kappaleisiin. Tämän tutkielman luvussa 4 hyödynnetään Lakatosin alalukujakoa selitettäessä todistusten ja kumoajien metodia.

Dialogista emergoituvaa Lakatosin metamatemaattista todistusten ja kumoajien metodia käsitellään tarkemmin tämän tutkielman seuraavassa pääluvussa.

Henkilöhahmojen välinen keskustelu etenee karkeasti yksinkertaistaen seuraavan syklin mukaisesti:

- Uusi todistus tai vastaesimerkki
- Vastaesimerkin esittely todistukseen tai vastaesimerkin kritisointi
- Lausumattomien oletuksien, lemmojen ja käsitteiden tarkastelu
- Erimielisyyksien palautuminen perustelemattomiin uskomuksiin
- Keskustelussa huomattujen oivallusten merkitysten pohdinta

Lakatosin käyttämää sanastoa (kuten lemma) selitetään tämän tutkielman alaluvussa 1.3. Esimerkki yllä esitetystä keskustelun syklistä esitellään alaluvussa 1.4.

Dialogi ei läheskään aina etene tämän rakenteen mukaisesti tai käy kaikkia sen osia läpi. Toisinaan usea eri henkilöhahmo esittää yhtä aikaa kritiikin tai vastaesimerkin, joita käsitellään keskustelussa rinnakkaisesti. Jokaisella henkilöhahmolla on omia metamatemaattisia ja yleisemmin filosofisia käsityksiään, jotka heijastuvat heidän perusteluissaan ja esittämissään kritiikeissä. Toisinaan henkilöhahmot huomaavat, että heidän erimielisyytensä johtuvat erilaisista perustelemattomista filosofisista uskomuksista.

Merkittävää on myös toisinaan tapahtuva mielenmuutos: osa henkilöhahmoista luopuu uskomuksistaan osana dialogia tai hyväksyy päättelyissä esiintyvät virheet tarpeeksi painaviksi syiksi luopua päättelyketjusta. Tämä hahmonkehitys tekee henkilöhahmoista kiinnostavampia kaunokirjallisesta näkökulmasta sekä sitoo tekstin vahvemmin sokraattisen dialogin tekstityyppiin. Dialogi tuo filosofisen, keskustelun kautta tapahtuvan mielenmuutoksen matematiikan tieteenalan piiriin. Päättelyssä ja perustelussa havaittujen "virheiden"puntarointi ja arviointi on teoksen ydinteemaa: luokan opettaja edustaa näkemystä, jonka mukaan virheellinen päätelmä tai perustelu onkin hyödyllinen ja uuden alku, eikä henkinen umpikuja. Opettaja formalisoikin menetelmän, joka sisällyttää vastaoletukset matemaattiseen luomisprosessiin.

Toinen luku sisältää dialogimuodossa yhden matemaattisen todistuksen, joka jätettiin ensimmäisen luvun ulkopuolelle sen pituuden vuoksi, mutta jonka olemassaoloon viitattiin jo ensimmäisessä luvussa. Tämä todistus esitellään teoksen *Proofs and Refutations* toisessa luvussa ja sitä käsitellään ylempänä esitellyn syklin mukaisesti.

Teoksen liitteet eivät ole kirjoitettu dialogimuotoon, vaan ne ovat proosamuotoista historiallisten esimerkkien kommentointina, kuten päälukujen alaviitteet. Liitteissä Lakatos nostaa esiin tapaustutkimuksen omaisesti historiallisen esimerkin todistusten ja kumoajien metodin soveltamisesta. Tätä historiallista esimerkkiä käsitellään tämän tutkielman toisessa luvussa. Liiteissä käsitellään myös Lakatosin mielestä merkittäviä historiallisia matemaattisia tuloksia, joita hän ei halunnut nostaa esiin päälukujen alaviitteissä.

Oman tulkintani mukaan eräs hyöty tekstin helppolukuisesta muodosta on sen saavutettavuus aloittaville matematiikan opiskelijoille. Eräs teoksen merkityksistä nykyaikana on jäykkien ennakkokäsitysten haastaminen ja matematiikan metodologian kriittinen tarkastelu opiskelijoille, jotka ovat siirtymässä oppikirjavetoiselta keskiasteelta yliopiston tutkijamaailmaan.

3 Lakatos ja metamatematiikka

Lakatos aloittaa teoksen *Proofs and Refutations* esipuheen kritisoimalla metamatematiikan senhetkistä tilaa:

"It frequently happens in the history of thought that when a powerful new method emerges the study of those problems which can be dealt with the new method advances rapidly and attracts the limelight, while the rest tends to be ignored or even forgotten, its study despised. This situation seems to have arisen in our country in the Philosophy of Mathematics as a result of the dynamic development of metamathematics."[28]

Vaikka varsinaisessa leipätekstissä termi metamatematiikka ei ole keskiössä, on sitä mielestäni käsiteltävä. Lakatos itse määritteli teoksensa tärkeimmiksi perustoiksi ja motivaattoreiksi George Pólyan heuristiikantutkimuksen ja Karl Popperin filosofian [28, xii]. Itse näen Lakatoksen matematiikanfilosofian osana matematiikan perusteiden filosofisen tarkastelun jatkumoa, joka hiipui 1900-luvun alkupuoliskon jälkeen mahdollisesti Gödelin epätädellisyyslauseiden, koneellisen laskennan vallankumouksen ja muun modernin matematiikan kerätessä valtaosan tiedeyhteisön kiinnostuksesta. Hänen myöhemmän tuotantonsa termiä käyttäen Lakatosin matematiikanfilosofian voi jopa tulkita degeneroituvan tutkimusohjelman osaksi, kun matemaatikkojen yhteisö hylkää matematiikan perusteita pohtivan filosofian ja kiinnostuu yhä enemmän aksioomajoukkojen formaalista tarkastelusta.

Teoksen *Proofs and Refutations* tulkitseminen metamatemaattiseksi tekstiksi tuo esiin eron Lakatosin heuristisen, suorastaan historiallisen matematiikkakäsityksen ja jäykän formaalin, eksaktin käsityksen välillä. 1900-luvun alkupuoliskolla (ja ennen tätä 1800-luvun lopussa) tämä kontrasti oli vasta kehittymässä, vaikka 1800-luvulla Augustin-Louis Cauchy ja Karl Weierstraß edistivätkin järjestelmällistä huolellisuutta (*rigour*) matematiikassa merkittävästi. Vasta 1900-luvun alkupuoliskon loogikkojen ja formalistien, kuten Fregen, Russellin ja Hilbertin pyrkimykset yhdenmukaistaa matematiikkaa saivat aikaan Lakatosin kritisoiman matematiikkakäsityksen valta-aseman. Rakennan luvuissa 4 ja 6 tulkintaa Lakatosin käsityksestä matematiikasta heuristiikan, mikrotason tieteen ja historiallisuuden näkökulmista. Alaluvussa 3.1 esiteltävät käsitteet kuten formalismi ja euklidinen projekti ovat mielestäni mitä tärkeintä taustatietoa, jotta Lakatosin matematiikanfilosofia voidaan tulkita kriittisenä vastalauseena tai antiteesinä aikansa matematiikanfilosofiselle keskustelulle.

Teoksen *Proofs and Refutations* alaotsikko *The Logic of Mathematical Discovery* kytkee teoksen osaksi metamatematiikan perintöä ja tavoitetta kehittää matematiikan tutkimusprosesseja loogisella ja systemaattisella tavalla.

Lakatosin aloituskappaleessaan esittämä kritiikki onkin kohdistettava tarkemmin kuin metamatematiikkaan kokonaisuutena. Lakatos suuntaa kritiikkinsä Hilbertiläiseen matemaattisen ratkaisuprosessin systematisointiin ja muodollisiin aksiomaattisiin rakenteisiin, eikä mahdolliseen laajempaan käsitteen "metamatematiikka"tulkintaan, jossa matemaattista tutkimusprosessia tutkitaan sekä matematiikan, että filosofian keinoin.

Mitä on metamatematiikka? Lyhyt, nykyaikainen vastaus voisi olla "matemaattisen ajattelun tutkimista". Tämä määritelmä on anakronistinen ja hyvin lavea. On hyödyllistä pohtia, mitä metamatematiikalla tarkoitettiin Imre Lakatosin kirjoittaessa teosta *Proofs and Refutations*. Selitän ensin käsitteen "metamatematiikka"nykyistä tilaa, jonka jälkeen käsittelen sen merkitystä Imre Lakatosin tuotannon aikana.

Nykyaikana käsitten "metamatematiikka"ymmärtäminen perustuu enimmäkseen S.C. Kleenen teokseen *Introduction to Metamathematics*[21]. Kyseinen oppikirja julkaistiin vuonna 1952, minkä jälkeen siitä on otettu yli kymmenen uusintapainosta jatkuneen käytön vuoksi. Oppikirja taustoittaa ja selittää erinomaisen ansiokkaasti mm. logiikan, joukko-opin ja funktio-opin sisältöjä selkeästi ja kattavasti. Käsittelen Kleenen oppikirjan suhdetta metamatematiikan käsitteeseen luvun 3.1 alussa.

Kontrastina nykyiseen melko vakiintuneeseen merkitykseen, 1900-luvun alkupuoliskolla metamatematiikan käsite haki muotoaan tiedeyhteisön keskustelussa ja tutkimuksessa. Kysymykset matematiikan perusteista sekä logiikan ja matematiikan suhteesta olivat etualalla ja saivat hyvin filosofisia sävyjä, joita käsitellään luvussa 3.1.2. Tämän keskustelun konteksti ja sen merkitykset ovat sisältö, jossa käytän termiä "metamatematiikka"tässä tutkielmassa. Metamatematiikan ei siis katsota rajoittuvan pelkästään formalismiin tai loogisen kielen avulla rakennettaviin matemaattisiin konstruktioihin, vaan se sisältää myös kvalitatiivista, filosofista keskustelua ja pohdintaa matemaattisen ajattelun rakenteista. Siinä missä nykyinen merkitys metamatematiikalle rajaa sen tiukasti matematiikan tieteenalan sisälle vähätellen sen filosofisia sisältöjä, valitsemani merkitys vie sen "matematiikan taakse", matematiikan filosofiaan ja jopa filosofiaan yleisesti, kohdellen sen filosofisia sisältöjä mitä merkityksellisimpinä. Täten metamatematiikka on yhteys matematiikan ja fiosofian välillä. Seurauksena tästä valinnasta filosofien kuten Imre Lakatoksen ja Ludwig Wittgensteinin tuotantoa voidaan luokitella metamatematiikan piiriin kuuluvaksi. Mielestäni tämä tulkinta on tarkoituksenmukainen Imre Lakatosin tuotantoa käsitellessä, koska tekstit kuten *Proofs and Refutations*, *Infinite Regress and Foundations of Mathematics* ja *What does a mathematical proof prove?* ovat ennemmin tulkintani mukaisia metamatemaattisia tekstejä kuin matemaattisia tai puhtaan filosofisia tutkimuksia.[28][30][25]

Matemaattisen ajattelun tutkimuksen kiinnostavimmat kysymykset ja menetelmät ovat muuttuneet aikojen saatossa. Lakatosta tarkastellessa kaksi aikaikkunaa ovat mielestäni kiinnostavimpia: 1800-luvun alkupuoliskolta 1900-luvun puoleenväliin sekä matematiikan esihistoriallisista alkuajoista nykyhetken ohi tulevaisuuteen, siis matemaattisen ajattelun koko historia. Jälkimmäinen aikaikkuna on relevantti, kun käsitellään rationaalisuuden historiallista kehitystä matematiikassa. Edellinen aikaikkuna puolestaan sisältää ajanjakson, jolloin matemaattinen tutkimus muuttui formaalimmaksi ja sen kieli eksaktimmaksi. Lakatos käsittelee eräitä tämän ajanjakson tapahtumia tapaustutkimuksen kaltaisesti "rationaalisen rekonstruktion"menetelmällä, jota käsitellään luvussa 5. Jälkimmäinen, laajempi aikaikkuna liittyy Lakatosin käyttämään historialliseen malliin "euklidinen projekti", jolla hän selittää matematiikkaa ja jonka viitekehykseen Lakatosin epistemologinen pohdinta asettuu. Lakatos rakentaa kirjoituksissaan vastakkainasettelun: onko matematiikka ajaton, kasvava euklidinen projekti vai historiaan sidottua, heuristista ongelmanratkaisua. Hänen tekstejään voikin tulkita ainakin kolmella tavalla:

1. Vastineina ja avauksina 1900-luvun puolivälin metamatemaattisessa ja tieteenfilosofisessa keskustelussa
2. Selityksinä matemaattisen ajattelun rakenteesta
3. Normatiivisina sääntöinä matemaattiseen[1] tutkimustyöhön

Tässä tutkielmassa painotan näistä ensimmäistä tulkintakehystä: 1900-luvun alkupuoliskon tieteellistä keskustelua. Tuon esille ja tulkitsen Lakatoksen kannanotot matematiikan olemuksesta niiltä osin, kun näen niiden tuovan merkityksellistä sisältöä hänen aikansa metamatemaattiseen dialogiin. Nämä merkitykselliset sisällöt koostuvat enimmäkseen matematiikan rationaalisuudesta eli tarkemmin matemaattisen ajattelun tarkoituksenmukaisesta rakenteesta. Tarkastelen myös Lakatosin kannanottoja matematiikan erehtyväisyydestä popperilaisena fallibilismina. Kolmas tulkintakehys, eli Lakatoksen normatiiviset kannanotot jäävät vähäiselle huomiolle, sillä tutkielma keskittyy teokseen *Proofs and Refutations*, jonka teksti on pääosin matemaattisen ajattelun rakenteita selittävää toisin kuin Lakatoksen myöhempi *The Methodology of Scientific Research Programmes*, josta on löydettävissä normatiivisempia kannanottoja.

On tulkittavissa, että Lakatos luokittelee teoksensa metamatematiikan filosofista haaraa edustavaksi teokseksi, joka kritisoi ja pohtii matemaattisen tutkimusprosessin systematisointia. Mielenkiintoinen näkökulma Lakatoksen formalismiin kohdistamasta kritiikistä on Lakatosin väitöskirjaohjaajan, R.B. Braithwaiten hieman

[1] Lakatosin myöhäisemmän tuotannon kuuluisa teos *The Methodology of Scientific Research Programmes* sisältää normatiivisia sääntöjä tieteelliseen tutkimukseen yleisemmin, tieteenalasta riippumatta

positivistinen näkemys tieteellisestä tutkimuksesta. Braithwaiten mukaan teoria tulisi rakentaa abstraktien, aina voimassaolevien lakien pohjalta. [19] Lakatoksen menetelmän historiallisuus (jopa dialektisuus) on kontrastina hänen väitöskirjaohjaajansa näkemyksiin.

Esipuheessaan Lakatos kohdistaa kritiikkinsä keihäänkärjen suuntaukseen, johon hän viittaa formalismina. Hän käyttää ilmaisua "present dominance of formalism", mikä viittaa ajanjaksoon ennen 1960-lukua tai korkeintaan 1960-luvulla, jolloin esipuhe kirjoitettiin. Itse tarkasteluissani viittaan tähän ajanjaksoon 1900-luvun alkupuoliskona.

"Under the present dominance of formalism, one is tempted to paraphrase Kant: the history of mathematics, lacking the guidance of philosophy, has become blind*, while the philosophy of mathematics, turning its back on the most intriguing phenomena in the history of mathematics has become* empty *. . . . The purpose of these essays is to approach some problems of the* methodology of mathematics*."* [28] (korostukset alkuperäisestä tekstistä)

Teoksessa *Proofs and Refutations* Lakatos esittää seuraavan rakenteen, joka selittää matemaattisen ajattelun toimintaa: matemaattisen lauseen todistus → vastaesimerkki → päivitetty lause. Tämä muistuttaa rakennetta: teesi → antiteesi → synteesi. Lakatosin mahdollisesti hegeliläisen kielenkäytön tarkastelu on kuitenkin tämän tutkielman rajauksen ulkopuolella. Tämän rajauksen vuoksi matematiikan erehtyväisyyden tarkastelu jää mikrotasolle: yksittäisen matemaatikon perustyön erehtymisen muotoihin ja virheenkorjausprosessiin. Tämä tarkastelu sijoittuu lukuun 6, jossa käsittelen myös Lakatoksen esseetä *Infinite regress and foundations of mathematics*. Tuo essee yhdistettynä teokseen *Proofs and Refutations* sisältää Lakatoksen radikaaleimmat ajatukset matematiikan erehtyväisyydestä. [30].

Matematiikan erehtyväisyden tarkastelu makrotasolla, eli suurempien teoreemaryppäiden keskinäinen kilpailu tiedeyhteisön keskustelussa, jää enimmäkseen rajauksen ulkopuolelle. Tämä erottelu matematiikan mikro- ja makrotason välillä on peräisin Teun Koetsierin tutkielmasta *Lakatos' Philosophy of Mathematics: A Historical Approach* [22], joka on tuoreimpia Lakatosin matematiikanfilosofiaa perusteellisesti käsitteleviä tekstejä. Teon Koetsierin Lakatos-tutkimusta käsittelen lisää luvussa 5.

Missä merkityksessä Lakatos käytti käsitettä metamatematiikka teoksessa *Proofs and Refutations*? Mitä metamatematiikalla tarkoitettiin 1900-luvun alussa tai erityisemmin 1950- ja 1960-luvuilla? Pohdin tätä seuraavassa alaluvussa 3.1. Huomio keskittyy erityisesti David Hilbertin formalismiin, joka oli ajankohtainen ja merkittävä matemaattisen tutkimuksen suuntaus 1920-1940-luvuilla ja jota kohtaan Lakatos esittää merkittävää kritiikkiä.

Luvussa 7 käsittelen Lakatosin kiinnostusta matemaattisen tutkimuksen loogisen rakenteen selittämiseen. Teoksessa *Proofs and Refutations* Lakatos tarjoaa tällaisen selitysmallin, Todistusten ja kumoajien metodin. Luvussa 4 esittelen tämän mallin ja pohdin selittääkö se riittävästi matemaattista tutkimusta loogisena ja rationaalisena toimintana. Luku 4 sisältää pohdintaa ja päätelmiä, joita luku 7 kokoaa.

3.1 Metamatemaattisen keskustelun historiallinen tausta

S.C. Kleene määritteli kirjoittamassaan oppikirjassa *Intruduction to Metamathematics* vuonna 1952 metamatematematiikkaa seuraavasti: *"This [formalist] program calls for a subject called 'metamathematics', in which they aim in particular to establish the consistency of classical mathematics. We note in advance that metamathematics will be found to provide a rigorous mathematical technique for investigating a great variety of foundation problems for mathematics and logic, among which the consistency problem is the only one."*[21, s. 59]

Kleenen oppikirja on yli 500-sivuinen järkäle matemaattisesta logiikasta, rekursiivisista funktioista ja muodollisista aksioomajärjestelmistä. Teoksen yleiskuva antaa metamatematiikasta hyvin *matemaattisen* vaikutelman kaikkine määritelmineen, kaavoineen ja todistuksineen. Edellisessä lainauksessa Kleene väittää metamatematiikan sisältävän jonkinlaisen prosessin matematiikan tekemiseen (*mathematical technique*), mikä viittaisi metamatematiikan tarjoavan tutkimusmenetelmiä tai metodologioita matematiikan tieteenalan sisällä. Mielestäni tämä näkemys metamatematiikasta on läheisessä yhteydessä David Hilbertin formalistiseen matematiikan koulukuntaan ja sen metodologiaan. Kleenen lainaus vie metamatematiikan askeleen kauemmaksi perusteita abstraktisti pohtivasta filosofoinnista, kohti käytännön tutkimustyötä matematiikan alalla. Seuraavassa alaluvussa huomataan, että tämä suhtautumistapa on ominaista David Hilbertille ja hänen formalismilleen, sekä pohditaan Imre Lakatosin positiota tässä kysymyksenasettelussa.

3.1.1 David Hilbertin formalismi

Tässä alaluvussa tarkastellaan David Hilbertin perustamaa formalismin koulukuntaa. Formalismissa on kolme pääperiaatetta/tavoitetta, jotka taustoitetaan tässä alaluvussa ja pohditaan niiden merkitystä suhteessa formalismin kokonaisuuteen sekä Imre Lakatosin ajatuksiin:

1. Loogisten sääntöjen ja merkkien asettaminen aksioomatasolla

2. Valittujen aksioomien keskinäinen ristiriidattomuus

3. Päätelmien palautettavuus aksioomiin ja siten päätelmien keskinäinen ristiriidattomuus

Formalistisen koulukunnan tarkastelu on hyödyllistä tarkentaaksemme käsitystä siitä, mitä Lakatos tarkoitti metamatematiikalla teoksen *Proofs and Refutations* kontekstissa. Kirjoittiko Lakatos metamatematiikkaa? Tarkastelen nyt David Hilbertin formalismia asettaakseni vertailukohdan, jonka perusteella on mahdollista keskustella missä määrin *Proofs and Refutations* on metamatematiikkaa. Formalismi nähdään teoksessa matemaattisena dogmatismina, joka asetetaan kritiikin alle. Käsittelen dogmatismin ja skeptisismin suhdetta tarkemmin luvussa 6. Lakatos ei pelkästään mainitse Hilbertiä teoksen esipuheessa, vaan myös esittää epistemologista ja tieteenfilosofista kritiikkiä Hilbertin ohjelmasta samalla kun kritisoi loogista positivismia:

"*'Formalism' is a bulwark of logical positivist philosophy. According to logical positivism, a statement is meaningful only if it is either 'tautological' or empirical. Since informal mathematics is neither 'tautological' or empirical, it must be meaningless, sheer nonsense. The dogmas of logical positivism have been detrimental to the* history and philosophy of mathematics."(Korostus sisältyy alkutekstiin.) [28, 2-4]

On mielenkiintoista huomata, että Lakatos väittää loogisen positivismin olleen haitallista matematiikan filosofialle (ja myös matematiikan historialle, mutta tämä näkökulma sivuutetaan). Wienin piiri otti vaikutteita David Hilbertin logiikan ja fysiikan tutkimuksesta (Hans Hahn ja Philipp Frank olivat olleet osan urastaan Hilbertin oppilaina). Myöhemmin tässä luvussa käsiteltävä Hilbertin ajatus loogisten aksioomien yhdenvertaisuudesta muiden matemaattisten aksioomien kanssa vaikutti merkittävästi 1900-luvun alkupuoliskon kielen formaalin loogisuuden tutkimukseen (yhdessä Russellin ja Whiteheadin teoksen *Principia Mathematica* kanssa).

Lisäksi Lakatos väittää, että formaalisoitu matematiikka on hedelmätöntä ja epäkiinnostavaa: formalisoidun järjestelmän sisällä matemaattiset kysymykset ovat joko koneellisesti ratkeavia tai sellaisia, joiden pohtimiseksi formalismi ei tarjoa työkaluja. [28, 4]

Olen valinnut kaksi näkökulmaa formalismin tarkastelua varten:

1. Hilbertin suuri projekti matematiikan perustan rakentamiseksi
2. Epistemologinen keskustelu ja oletukset tämän projektin taustalla

Tarkoituksenani on valaista matematiikan filosofian keskustelua 1900-luvun alusta kohti Imre Lakatosia. Selvitän ensin Hilbertin matemaattista metodologiaa, jonka jälkeen siirryn esityksessäni selkeämmin filosofisiin metamatemaattisiin teemoihin. Käsitteellä "teoria"viitataan muodolliseen, matemaattiseen teoriaan, eli joukkoon muodollisia lauseita, joiden välillä vallitsee implikaatioyhteyksiä. Käsite "teoria"tulee kuitenkin tulkita väljästi ja epämuodollisesti, sillä tarkasteltava matemaattis-filosofinen keskustelu käsittelee matemaattisen logiikan ja teorianmuodostuksen perusteita, ollen siten korkeammalla abstraktion tasolla kuin usein käytetyt muodolliset, vakiintuneet käsitteet. Hilbertin metodologian tarkempi tarkastelu on tärkeää, sillä Hilbert väittää metodologiansa perustuvan inhimillisen ajattelun rakenteisiin. Lakatos tarjoaa teoksessaan *Proofs and Refutations* vaihtoehtoisen metodologian, kritisoiden samalla Hilbertiä. Tämä vastakkainasettelu pohjustetaan tässä alaluvussa ja sitä pohditaan enemmän alaluvussa 3.1.3. Stanford Encyclopedia of Philosophy kiteyttää Hilbertin suuren tavoitteen mielestäni selkeästi:

"*[Hilbert's Program] calls for a formalization of all of mathematics in axiomatic form, together with a proof that this axiomatization of mathematics is consistent.*"[45]

Hilbertin mukaan matemaattinen todistus tulee olla intuitiivisesti ymmärrettävissä [14, 198]. Hän asettaa kuitenkin tiukkoja ehtoja sille, millainen esitysmuoto ja sisältö matemaattiseksi todistukseksi kelpaavalla loogisella päättelyllä on. Kaikki matemaattinen tieto oli Hilbertin mukaan esitettävissä hänen kriteeristönsä sisällä, ja tämän projektin suorittaminen olisi tehtävä, jotta matematiikka vapautettaisiin ristiriidoista. [14] (Myöhemmin Kurt Gödelin epätäydellisyyslauseet osoittivat, että Hilbertin metodologia on riittämätön tämän formalisointiprojektin suorittamiseen.) Hilbertin esittämä "formalisointiprosessi"on kaksiosainen: ensin matemaattinen tieto esitetään aksiomaattisessa muodossa, jonka jälkeen osoitetaan valittujen aksioomien muodostavan ristiriidattoman kokonaisuuden. Näistä edellinen vaihe, eli aksiomatisointi, tarkoittaa käytännössä jonkin tietyn tarkastelun kohteena olevan matematiikan osa-alueen muotoilemista matemaattisiksi lauseiksi, eli teoreemoiksi. Nämä teoreemat johdetaan loogisen päättelyn keinoin toisista teoreemoista, vähemmän kiinnostavista aputeoreemoista eli lemmoista tai aksioomista. Jokainen teoreema johdetaan loogisesti joko aksioomista, tai toisesta teoreemasta, joka puolestaan on johdettu aksioomista. Hilbertin formalisointiprosessin toisessa vaiheessa osoitetaan, että aksioomat ja niistä johdetut tulokset eivät ole ristiriidassa keskenään. Tätä jälkimmäistä vaihetta kutsutaan ristiriidattomuustodistukseksi (*consistency proof*). Laajoille aksioomajärjestelmille ristiriidattomuustodistuksen laatiminen on haastavaa, mutta onnistuessaan ne ovat olleet merkittäviä matemaattisen logiikan edistysaskeleita, esimerkiksi Gerhard Gentzenin todistus Peanon aksioomien ristiriidattomuudesta tietyin varauksin. [14, 198-201]

Tämänkaltaista loogisen perusteluketjun rakentamista voidaan kutsua nykypäivänkin epämuodollisessa kielenkäytössä matemaattiseksi todistamiseksi tai vain todistamiseksi. Epämuodollisessa kielenkäytössä sanalla "todistaminen"viitataan jonkin lauseen johtamiseen jostain aiemmin todistetusta lauseesta. Perusteluketjun eksplikointia aksioomiin asti pidetään mahdollisena, mutta usein kiinnostavinta on päättelyn viimeisin lenkki, joka yhdistää tarkasteltavan lauseen aiemmin rakennettuun tietokokonaisuuteen.

Kun kaikki tarkastelun kohteena olevat lauseet on palautettu aksioomiin asti, on Hilbertin formalistisessa tutkimusmenetelmässä saatu selville se aksioomajoukko, johon tutkittavat lauseet nojaavat. Tiettyä tutkittavien lauseiden joukkoa voi vastata useampi mahdollinen aksioomajoukko. Aksioomajoukon valintaan liittyy kriteerejä. Yleensä aksiomatisoinnissa pyritään suppeimpaan mahdolliseen aksioomajoukkoon, välttämään tiettyä aksioomaa tai käyttämään jotain etukäteen tunnettua aksioomajoukkoa. Keskustelu aksioomien keskinäisestä arvotuksesta on kuitenkin mielestäni (ja tulkintani mukaan tämä on luettavissa myös Lakatosin kirjoituksista) osa laajempaa matemaattis-filosofista keskustelua eikä pelkästään osa Hilbertin edustamaa matemaattisen tutkimuksen metodologiaa.

Aksiomatisoinnin jälkeen Hilbertin metodologiassa siirrytään tarkastelemaan saavutettua aksioomajoukkoa. Hilbert asettaa tutkimuksen välttämättömäksi tavoitteeksi aksioomajoukon ristiriidattomuuden: aksioomajoukon looginen ristiriidattomuus on todistettava. Tätä todistusta kutsutaan nimellä "*consistency proof*"eli ristiriidattomuustodistus. Ei riitä, että aksioomat voidaan koota joukoksi väitteitä, joiden välillä ei ole ristiriitaa, vaan on myös todistettava, että alkuperäinen tutkimuksen kohteena oleva aksioomista johdettu väitejoukko on ristiriidaton. Tämä voidaan muotoilla seuraavasti: jokaista tutkittavan väitejoukon aksiomatisoitua väitettä P kohti on todistettava, että väitteen P negaatiota $\neg P$ ei voida aksiomatisoida.[21, 55] Epämuodollisemmin ilmaistuna: ristiriidattomassa lausekokonaisuudessa aksioomista ei voi loogisesti seurata yhtä aikaa väitettä ja sen vastaväitettä. Ristiriitaisessa lausekokonaisuudessa puolestaan aksioomista on johdettavissa vähintään yhden väitteen osalta sekä väite että sen vastaväite. Kurt Gödel osoitti epätäydellisyyslauseillaan vuonna 1931, että luonnollisten lukujen ominaisuudet selittävä lausekokonaisuus on välttämättä ristiriitainen, osoittaen Hilbertin tavoitteen koko matematiikan formalisoinnista mahdottomaksi.

Hilbert kuvailee formalistisen ohjelmansa suhdetta inhimillisen ajattelun rakenteisiin vuonna 1927 pitämässään puheessa Hampurin matemaattiselle seminaarille:

"...this formula game is carried out according to certain definite rules, in which the technique of our thinking is expressed. ... The fundamental idea of my proof theory is none other than to describe the activity of our understanding, to make a protocol of the rules according to which our thinking actually proceeds. Thinking,

it so happens, parallels speaking and writing: we form statements and place them one behind another." [15, 475]

Ylläolevan sitaatin tärkeyttä on mielestäni syytä korostaa Lakatosin tulkinnassa. Hilbert väittää, että hänen metodologiansa on inhimillisen ajattelun rakenteita mukaileva, ja että tämä muoto on väitteiden peräkkäinen esittäminen. Mielestäni tässä on nähtävissä matematiikan metodologian alisteisuus logiikalle. Tässä yhteydessä Hilbertin formalismi muistuttaa hyvin paljon Russellin ja Whiteheadin logisismia. Opettaessaan matematiikkaa Göttingenin yliopistossa Hilbert käsitteli logiikan sääntöjä aksiomaattisella tavalla, rakentaen matematiikan logiikan perustalle (näissä luentomateriaaleissa Hilbert sai merkittävää apua Paul Bernays'ltä). Hilbert ei kuitenkaan pitänyt logiikkaa riittävänä perustana matemaattisille teorioille, kuten logisistisen koulukunnan edustajat, tärkeimpänä Russell, ennen häntä. Pelkät loogista kieltä määrittävät aksioomat eivät riitä matematiikan perustaksi, mutta ne ovat välttämätön osa matemaattista aksioomajoukkoa. Wilhelm Ackermann kokosi Hilbertin luentomateriaalin myöhemmin kirjaksi [16]. Ackermannin kokoama teos oli matematiikan yliopisto-opiskelijoille tarkoitettu johdanto logiikkaan, joka toimisi myös astinlautana Hilbertin ja Bernays'n myöhempään lukuteoriaa käsittelevään teokseen. Logiikka siis katsottiin tarpeelliseksi pohjatiedoksi lukuteorian opiskelua varten. Tämä lukuteorian teos kuitenkin viivästyi merkittävästi Gödelin julkaisujen vuoksi ja laajeni kaksiosaiseksi koko matematiikan perusteita yleisesti käsitteleväksi julkaisuksi [17]. Formalismissa uskomusten tärkeysjärjestys kulkee seuraavasti: inhimillisen ajattelun rakenteet ovat logiikan perusta, ja edelleen matematiikan tutkimuskäytännöt ja säännöt perustuvat logiikalle. Kuitenkin kaksi vuotta aiemmin vuonna 1925 pitämässään Karl Weierstraßin muistopuheessa Hilbert kannattaa Immanuel Kantin näkemystä matematiikan tutkimuskohteen ja logiikan erillisyyttä:

"In recognizing that there are such preconditions [necessary for the valid use of material logical deduction] that must be taken into account, we find ourselves in agreement with the philosophers, notably with Kant. Kant taught — and it is an integral part of his doctrine — that mathematics treats a subject matter which is given independently of logic. Mathematics, therefore, can never be grounded solely on logic. Consequently, Frege's and Dedekind's attempts to so ground it were doomed to failure." [14, 192]

Palaan tähän logiikan, matematiikan ja ajattelun rakenteiden aihealueeseen myöhemmin luvuissa 5 ja 6 Lakatosin ajatusten valossa.

Hilbert lausuu vuoden 1927 Hampurin puheessaan heti aiemman ajattelun rakenteita koskevan väitteensä jälkeen tieteenfilosofisen kannanoton:

"...part of the task of science to liberate us from arbitrariness, sentiment, and habit

and to protect us from the subjectivism that already made itself felt in Kronecker's views and, it seems to me, finds its culmination in intuitionism."[15, 475]

Formalistisen ohjelmansa lopulliseksi tavoitteeksi Hilbert nimeää matematiikan vapauttamisen ennakko-oletuksista ja arvostelee kilpailijoidensa metafyysisiä ja epistemologisia näkemyksiä:

"Already at this time I should like to assert what the final outcome will be: mathematics is a presuppositionless science. To found it I do not need God, as does Kronecker, or the assumption of a special faculty of our understanding attuned to the principle of mathematical induction, as does Poincaré, or the primal intuition of Brouwer, or, finally, as do Russell and Whitehead, axioms of infinity, reducibility, or completeness, which in fact are actual, contentual assumptions that cannot be compensated for by consistency proofs."[15, 479]

En käy läpi Brouwerin ja Russellin & Whiteheadin ehdotuksia matematiikan perustaksi yhtä perusteellisesti kuin Hilbertin, koska Lakatos ei käy heidän kanssaan suoraan dialogia teoksessa *Proofs and Refutations*. Hilbertin lähestymistapa saavutti enemmän suosiota kuin muut kilpailevat matematiikan perustan projektit. Kilpailevien perustanrakennusprojektien yksityiskohtaisen vertailun sijaan on hyödyllistä tarkastella, millaisia filosofisia ja metodologisia kysymyksia matematiikan alalla käytiin niiden vastakkainasettelun seurauksena. 1900-luvun alkupuoliskolla matematiikan tutkimusprosessit otettiin korostetun tietoisesti matemaattisen analyysin ja kehityksen kohteeksi, mistä seurasi nimitys "metamatematiikka". Tämä ilmeni jo vuonna 1905, kun David Hilbert väitti, että *"[we can] consider the proof itself to be a mathematical object."* [32]

Kokoavasti voimme siis todeta, että formalismi on matemaattinen koulukunta, jota määrittää näkemys matematiikan lähtökohta-oletuksista sekä tarkkaan määritelty metodologia:

1. Logiikan symbolit ja operaatiot osana matematiikan aksioomia
2. Aksioomien lukumäärän ja sisällön rajoittamattomuus (poikkeus alla)
3. Vaatimus aksioomien keskenäisestä ristiriidattomuudesta
4. Vaatimus lauseiden palautettavuudesta aksioomiin

Hilbertin formalismi rakentui Russellin ja Whiteheadin logisismin varaan sitoutuessaan inhimillisen ajattelun rakenteista ammentavaan logiikkaan matematiikan perustana. Matematiikan tutkimuskohteena olevien olioiden joukkoa oli siis laajennettu. Erityisen mielenkiintoista tässä murroksessa on Hilbertin näkemys, että nämä uudet "metamatemaattiset"tutkimuskohteet, eli matemaattiset todistukset sinänsä eikä niiden todistettavat, otettiin tutkimuskohteeksi ilman, että tutkimus-metodologia muuttui perustavanlaatuisesti. Hilbert kohteli todistuksia koskevaa metamatemaattista tutkimusta matemaattisen tiedon tuottamisena, ja rinnasti asettamansa aksioomien muodostusprosessin kompleksilukujen keksimiseen ja vakiintumiseen [14, 195]. Taustalla käytiin kuitenkin epistemologista keskustelua matemaattisen tiedon oikeutuksesta. Matematiikka otti askeleen filosofian suuntaan tässä laajennuksessa. Hilbertin formalismi sisälsi epistemologisia positioita, joille löytyy historiallinen kehys ja haastajia. 1900-luvulle sijoittuu myös ontologista keskustelua matemaattisten olioiden olemassaolosta, mutta keskityn nyt epistemologiseen keskusteluun.

3.1.2 1900-luvun alun metamatemaattisen keskustelun filosofiset ulottuvuudet

Koska Hilbert rajasi metamatematiikan puhtaasti matemaattisesti metodiksi, siihen liittyvää matemaattis-filosofista keskustelua voitaisiin pitää erillisenä kokonaisuutena metamatematiikasta. Tässä on näennäinen ristiriita tai ainakin kommunikaatiotavan ero verrattuna Imre Lakatosin tuotantoon, jossa mielestäni on läsnä lausumaton ajatus metamatematiikan filosofisuudesta. Tämä korostuu varsinkin Lakatosin yksittäisissä artikkeleissa, joissa hän pohtii matematiikan rationaalisuutta ja erehtyväisyyttä. Itse näen mielekkäimpänä näkemyksen, jossa metamatematiikka sisältää niin merkittävästi filosofista sisältöä, ettei sen rajaaminen filosofian ulkopuolelle ole mielekästä. Tulkitsen metamatematiikan sijainnin matematiikan ja filosofian välimaastossa siis lähemmäksi filosofiaa kuin Hilbert.

Teos *Proofs and Refutations* osaltaan yhdistää matematiikan metodologian tarkastelua epistemologisempaan tiedon perustan ja päättelyn tarkasteluun. Tämä yhdistelmä ei ole ennennäkemätön. Kun tarkastellaan 1900-luvun alun matematiikan filosofiaa, löydetään merkittäviä epistemologisia kysymyksiä. Käsittelen näistä kahta:

1. Äärettömän kokonaisuus
2. Intuitionistinen formalismin kritiikki

Nämä esimerkit antavat kontekstia millaista matematiikan filosofian keskustelua käytiin ennen Lakatosin puheenvuoroja. Muita merkittäviä esimerkkejä, jotka sivuutan, ovat esimerkiksi Ludwig Wittgensteinin ajatukset kielen, logiikan ja matematiikan suhteesta ja eritasoisten formaalin logiikan järjestelmien kehitys aksioomatutkimuksen rinnalla. Sivuutan myös suuren osan matematiikan ontologian tarkastelusta, sillä vaikka esimerkiksi kysymys olemassaolotodistuksista (existence proof) oli esillä Hilbertin metamatematiikassa, se ei saavuta merkittävää asemaa Imre Lakatosin argumenteissa.

Äärettömän käsite matematiikassa oli filosofisen keskustelun kohteena 1900-luvun alussa. Useaa eri konstruktiota matematiikassa voidaan kutsua epämuodollisessa kielenkäytössä "äärettömäksi". Lukusuoralle sijoittuvia reaalilukuja on "ääretön"määrä ja luonnollisten lukujen lukumäärä on myös "ääretön", mutta näiden äärettömyyksien keskenäisten suuruuksien vertailu on avoin kysymys matematiikassa (kontinuumihypoteesi). Muita näkökulmia ovat esimerkiksi. "äärettömän pienet"etäisyydet lukusuoralla, eli infinitesimaalit ja "äärettömän pitkät"lukujonot. Augustin-Louis Cauchyn ja Karl Weierstraßin kehittelemä $\delta - \epsilon$-menetelmä palautti osan näistä "äärettömistä"kysymyksistä ja käsitteistä äärellisten käsitteiden vertailuksi. Vuoden 1925 puheessaan "*On the infinite*"Hilbert tulkitsee aikaistaan äärettömyyskeskustelun tilaa seuraavasti:

"Nevertheless the infinite still appears in the infinite numerical series which defines the real numbers and in the concept of the real number system ***which is thought of as a completed totality*** *existing all at once."*[14, 183] (lihavointi lisätty)

Äärettömyyden eksistenssi ei ole Hilbertin oma ontologinen kanta. Hän toteaa, että reaalilukujen ajatellaan olevan suljettu kokonaisuus, ottaen etäisyyttä kysymykseen. Tämä on linjassa Hilbertin formalismin yleisen linjan kanssa: aksioomiksi voidaan valita mielivaltaisesti mitä tahansa, kunhan vaatimus ristiriidattomuudesta pitää. Hilbert olisi siis periaatteessa hyväksynyt minkä tahansa äärettömyyskannan ottavan sisäisesti ristiriidattoman matemaattisen järjestelmän, olematta etukäteen filosofisesti sitoutunut suosimaan suuntausta tai toista. Itse tulkitsen, että Hilbert olisi mieluummin jättänyt filosofiset kannanotot lausumatta aksioomatasolla jos mahdollista, ellei tällainen sitoutuminen olisi tuottanut käytännön tutkimuksia edistäviä tuloksia. Äärettömyyden totaaliuden kieltäminen oli intuitionistisen koulukunnan tärkeimmälle kehittäjälle, L. E. J. Brouwerille *a priori* linjaus, jota hän perusteli ajattelun rakenteilla.[42][21] Hilbert, joka myös vetosi ajattelun rakenteisiin loogisten aksioomien yhteydessä, piti kysymystä siis vähemmän merkityksellisenä. Tämä ilmentää Hilbertin yleistä linjaa kiinnostuksen keskittämisestä matematiikan metodologiaan ja tuloksiin, eikä matemaattis-filosofiseen pohdintaan. Puheessaan Hilbert esittää kannanoton, että luonnossa mitään jatkumoa ei voida jakaa äärettömän pieniin osiin (kvantittumis-ilmiö fysiikassa). Sen sijaan hän puoltaa äärettömyyden hyödyllisyyttä, jopa välttämättömyyttä puhtaasti ajatuksellisena rakennelmana matematiikassa. [14, 185-187]

Hilbert erottaa toisistaan kaksi eri epämuodollisen kielen "ääretöntä":

"Someone —— might say that in analysis we deal with the infinitely large and the infinitely small as only limiting concepts, as something becoming, happening, i.e., with the potential infinite. But this is not the true infinite. We meet the true infinite when we regard the totality of numbers 1,2,3,4,... *itself as a completed unity, or*

when we regard the points of an interval as a totality of things which exists all at once. This kind of infinity is known as actual infinity."[14, 188] (kursivointi alkuperäinen)

Tämä käsitys äärettömyydestä ja naiivi lukuteoria kuitenkin aiheuttivat merkittäviä paradokseja, kuten Burali-Forti-paradoksin, Cantorin paradoksin ja Russellin paradoksin. [21, 36] Nykyaikana nämä paradoksit on ratkaistu kehittyneemmillä lukuteorian aksiomatisoinneilla, tärkeimpänä Zermelo-Fraenkel-lukuteoria. Hilbert itse tarjosi vastaukseen koko matematiikan formalisoimista hänen ajatustensa mukaisesti, käytännössä koko matematiikan kattavaa ristiriidattomuustodistusta, mikä hänen mukaansa estäisi ristiriitojen muodostumisen.

L.E.J Brouwer oli Hilbertin merkittävimpiä vastapelureita 1900-luvun alun matematiikanfilosofiassa. Hän edusti intuitionistista koulukuntaa ja suhtautui kriittisesti matematiikan perinteeseen, jossa perustavanlaatuisia määritelmiä luodaan "tyhjästä", esimerkiksi aksioomia asetettaessa. Brouwer kyseenalaisti olemassaolopostulaatit, esimerkiksi äärettömän totaalisuuden. Leopold Kronecker oli jo 1880-luvulla kritisoinut Karl Weierstraßin, Richard Dedekindin ja Georg Cantorin määritelmiä väittäen niiden olevan vain sanoja, jotka eivät ohjeista arvioimaan, täyttääkö tutkimuskohde annettua määritelmää.[21, 46] Brouwerin käsitys matematiikasta rakentuu konstruktioille, eli hän vaati matemaattisen todistuksen sisältävän mielellään ohjeistuksen, miten tutkittava matemaattinen ilmiö voidaan mallintaa esiin, tai miten voidaan mallintaa ristiriitainen tilanne, joka osoittaisi mallinnuksen olevan mahdotonta. Ohjeistus olisi parhaimmillaan algoritminen, mahdollisimman vähän tulkinnanvaraa jättävä prosessi. Tätä kutsutaan matematiikassa konstruktiotodistukseksi (constructive proof). Jokaisen matemaattisen väitteen yhteydessä tulisi siis esittää prosessi, jolla tuloksen voi konstruoida. Tai vaihtoehtoisesti, jos todistuksen kohteena on jonkin matemaattisen entiteetin olemattomuus, osoittaa, että tämän konstruktio on mahdotonta. Brouwerin vaatimus konstruktiotodistuksille kyseenalaistaa epäsuoran todistamisen metodin, joka on hyvin yleinen, perustavanlaatuinen todistusstrategia matematiikassa. Epäsuora todistus matematiikassa perustuu ristiriidan lakiin (väite ja sen vastaväite eivät voi olla totta yhtä aikaa) ja kolmannen poissuljetun lakiin (väite on joko tosi tai epätosi). Brouwer asetti kolmannen poissuljetun lain kyseenalaiseksi. Konstruktiotodistuksessa ei saisi hyödyntää epäsuoraa todistusta. Tämä tiukka vaatimus konstruktiotodistuksissa ei ollut pelkästään Brouwerin kannattama. Jules Molk kommentoi kolmannen poissuljetun lakia ja olemassaolotodistuksia alaviitteessa ranskannoksessaan Felix Kleinin teoksesta *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften und ihren Grenzgebiete* seuraavasti:

"In order to give a mathematical demonstration of a proposition, it does not suffice, for example, to establish that the contrary proposition implies a contradiction. One

has to give a procedure that, operating on the elements under consideration, by means of a finite number of arithmetical operations in the old sense of the word, permits one to obtain the result formulated by the proposition to be demonstrated." [34][42, käännös ranskasta englantiin]

Brouwer itse puolestaan kirjoittaa:

"Now the principium tertii exclusi: this demands that every supposition is either correct or incorrect, mathematically: that of every supposed fitting in a certain way of systems in one another, either the termination or the blockage by impossibility, can be constructed. The question of the validity of the principium tertii exclusi is thus equivalent to the question concerning the possibility of unsolvable mathematical problems. For the already proclaimed conviction that unsolvable mathematical problems do not exist, no indication of a demonstration is present."[42, 29] (kursiivi alkuperäinen)

Brouwer jatkaa myöntämällä, että kolmannen poissuljetun laki on pätevä päättelyperiaate tarkasteltaessa tietynlaisia rajattuja, ei-jatkuvia järjestelmiä, joissa voidaan konstruoida jokainen tapaus läpi, mahdollisesti koneellisesti. Laajennoksena tälle, Brouwer hyväksyy myös lukujen ominaisuuksia koskevan induktiopäättelyn: jos jonkin lukuteoreettisen ominaisuuden osoittava konstruktio löytyy mielivaltaiselle kokonaisluvulle ja voidaan osoittaa konstruktio, jolla tämä ominaisuus siirtyy systemaattisesti toiselle, uudelle kokonaisluvulle, ominaisuus on konstruoitavissa kaikille kokonaisluvuille, vaikka niiden lukumäärä on ääretön. Brouwer painottaa, että tällainen induktiivinen konstruointi on *a posteriori*-tietoa. Konstruktion mahdollisuutta ei voi Brouwerin mukaan arvioida *a priori*, mutta konstruktion mahdottomuus, eli ristiriidan konstruktio, voi onnistua yrityksen ja erehdyksen kautta, mikä osoittaa konstruktion mahdottomaksi *a posteriori*. [42, 29] Brouwer käsitteli aihetta hieman laajemmin väitöskirjassaan. [4, 148] Ajatukset yrityksestä ja erehdyksestä sekä matemaattisista teoreemoista *a posteriori*-tietona heijastuvat myös Lakatosin tuotannossa: niitä käsitellään luvuissa 4 ja 5.

Arend Heyting kommentoi Brouwerin kantaa seuraavasti:

"According to Brouwer —— no science, in particular not philosophy or logic, can be a presupposition of mathematics. It would be circular to apply any philosophical or logical principles as means of proof, since mathematical conceptions are already presupposed in the formation of such principles."[13]

Tämä näkemys on Russellin logisismille ja Hilbertin formalismille täysin vastakkainen. Lainauksen jälkimmäisessä virkkeessä Heytingin viittaamat "filosofis-loogiset periaatteet"tarkoittavat aristotelistä logiikkaa, jonka taustaoletuksiin kuuluu luonnollisten lukujen laskusäännöt, mikä johtaa kehäpäätelmään yritettäessä perustella luonnollisten lukujen ominaisuuksia aristotelisen logiikan ominaisuuksilla[21, 46][42]. Tulkitsen Brouwerin kritiikin ylettyvän epistemologiseen koherentismiin (väitejoukon episteeminen oikeutus riippuu koko joukon ristiriidattomuudesta eikä yksittäiset kehäpäätelmät kaada sitä). Hilbertin projektin voidaan käsittää hakevan oikeutusta matemaattiselle tiedolle sekä foundationalismin että koherentismin kautta. Vaikka Hilbert väittikin, että matematiikan rakenteiden tulee pohjautua ajattelun rakenteisiin, hän ei formalismin projektissaan asettanut logiikan sääntöjä matematiikan yläpuolelle, vaan sen rinnalle yhdistäessään loogiset aksioomat ja oliot lukuteoreettisiin aksioomiin ja olioihin yhdeksi suureksi aksioomajoukoksi, joka takaa matemaattisten teorioiden totuuden ristiriidattomuustodistuksien kautta. Brouwerin väite, ettei filosofiankaan tulisi asettua matematiikaan perustaksi jää hieman epäselväksi. Brouwerin ajatukset matematiikan perustaksi rajataan kuitenkin tarkastelun ulkopuolelle, sillä ne eivät ole Imre Lakatosin suoran kommentoinnin kohteena samalla tavalla kuin Hilbertin formalismi. Brouwer kuitenkin asetti 1900-luvun alussa merkittävästi erilaisen, etenkin *filosofisesti* erilaisen, näkemyksen matematiikan perustaksi. Matematiikan perustan ei siis välttämättä tarvitse olla formalismin mukainen. 1900-luvun matematiikka olisi voinut kehittyä eri tavalla, jos Brouwerin intuitionismi olisi päätynyt vallitsevaksi perustateoriaksi.

Nykyaikana käytetyin aksioomajoukko, ZFC sisältää aksioomia, jotka mahdollistavat olemassaoloväitteiden esittämisen ilman ohjeistusta kyseessä olevan olion konstruointiin. Näistä aksioomista, jotka altistuvat Brouwerin kritiikille, ovat tärkeimpinä äärettömyyden aksiooma (on olemassa vähintään yksi ei-äärellinen joukko, yleensä luonnolliset luvut), kolmannen poissuljetun laki, sekä valinnan aksiooma. Kolmannen poissuljetun laki on esimerkki päättelyperiaatteesta, joka ei ohjeista, miten sen tuloksena olemassaolevaksi päätelty olio saadaan konstruoitua. Valinnan aksioomaa tarvitaan tukemaan olemassaolotodistuksia, jotka perustuvat äärettömien joukkojen osittamiseen.

Imre Lakatosin ajatusten taustalla oli siis keskustelua matematiikan perusteista, logiikan ja matematiikan suhteesta, äärettömyyteen liittyviä joukko-opillisia paradokseja sekä varsinkin Hilbertin kurinalaisuutta painottava formalistinen projekti ja metodologia. Lakatos kääntää huomion matematiikan perusteista tapaan, jolla matemaattista tutkimusta tehdään. Lakatosin Hilbertiä kohtaan esittämä kritiikki on siis merkittävästi erilaista kuin Brouwerin ja Hilbertin matematiikan perusteita koskeva vastakkainasettelu. Metamatematiikkaa ja varsinkin teosta *Proofs and Refutations* käsiteltäessä liikutaan veteen piirretyllä viivalla matematiikan ja filosofian välimaastossa. 1900-luvun alkupuoliskon metamatemaatikot, Lakatos mukaanlukien, painottivat keskustelun matemaattisia ulottuvuuksia tuottaen hyvin matemaattista tekstiä, jonka sisältö ja merkitykset eivät helposti aukea ilman matemaattista perehtyneisyyttä. Mielestäni Lakatosin arvo metamatemaattisessa keskustelussa löytyy filosofian puolelta: Lakatos tuo esiin metamatematiikan filosofiset ulottuvuudet ja tuo esiin filosofisia kysymyksiä matemaattisten käytäntöjen ja sitoumusten pohjalta. Nämä tieteenfilosofiset rikkaudet ovat kuitenkin, teoksen erinomaisen selkeästä rakenteesta ja tekstistä huolimatta, matemaattisen verhon ja jargonin peitossa, mikä luo merkittävän kynnyksen matematiikkaan perehtymättömille tieteenfilosofeille uppoutua Lakatosin ajatuksiin. Toistuva esimerkki tällaisesta matemaattis-filosofisesta keskustelunaiheesta on "euklidisen projektin"käsite, jota tarkastellaan seuraavassa alaluvussa.

3.1.3 Matematiikka euklidisena projektina

Käsite "euklidinen projekti"tai "euklidinen metodi"on keskeisessä asemassa matemaattis-filosofista kritiikkiä, jonka Lakatos kohdistaa aikansa metamatemaattiseen keskusteluun. Tämän käsitteen sisältöä on syytä tarkastella.

On tärkeää huomata, että adjektiivi "euklidinen"on tässä yhteydessä tulkittava aatehistoriallisena eikä matemaattisena käsitteenä. Matemaattisessa asiayhteydessä käsitteen "euklidinen"tulkitaan viittavan Eukleideen *Alkeet*-teoksessa esiteltyyn geometrian aksioomajoukkoon, joka on toiminut perustana *euklidisen avaruuden* määrittelyssä osana geometrian ja topologian kehitystä. Matemaattisessa asiayhteydessä vastakohta adjektiiville "euklidinen"on adjektiivi "epäeuklidinen"esimerkiksi osana termejä "epäeuklidinen avaruus"tai "epäeuklidinen geometria", joilla viitataan epästandardeihin, poikkeuksellisiin tilakäsityksiin ja -määritelmiin, kuten pallon pinnalle sijoitettu koordinaatisto. Tässä tutkielmassa tämä matemaattinen merkitys ei kuitenkaan ole käytössä, vaan adjektiivilla viitataan tietynlaiseen matematiikan tekemisen tapaan, suorastaan arvopohjaan, jota kuvaillaan tässä alaluvussa.

Euklidista koulukuntaa voisi (anakronistisesti) kutsua metamatemaattiseksi aatesuunnaksi. Eukleideen *Alkeet*-teos nautti miltei kyseenalaistamatonta arvostusta 1800-luvun loppupuolelle saakka. [10] Tämä ylhäinen asema piti paikkansa geometriassa teoksen ollessa opetuskäytössä noin kaksituhatta vuotta, mutta myös laajemmin tieteessä: *Alkeet*-teosta pidettiin erinomaisena tieteenä. Aristoteles oli pitänyt euklidista geometriaa suuressa arvossa, René Descartes rakensi filosofiaa deduktiivisen päättelyn varaan, Baruch Spinoza kirjoitti etiikkaa käsittelevän teoksensa *Ethica ordine geometrico demonstrata* Eudleideen *Alkeet*-teoksen rakennetta mukaillen ja John Locken mukaan geometriassa on nähtävissä *"the utmost security of demonstration"* [10]. Listaa voisi jatkaa. 1800-luvun loppupuolella geometrian vankkumaton asema alkoi kuitenkin murentua, esimerkiksi etäisyyden ja pinnan käsitteiden osalta. 1900-luvun alkupuoliskolla geometria oli muuttunut *Alkeet*-teoksen sisällöistä, mutta sen tieteenfilosofinen asema vielä sinnitteli.

Tiedostettaessa matemaattis-filosofisen keskustelun taustat, joiden aikana ja seurauksena Lakatos kirjoitti teoksen *Proofs and Refutations*, viittaukset eudlidiaanisiin projekteihin voidaan tulkita viittauksiksi Hilbertin projektiin (kts. luku 3.1.1), jota Lakatos piti mitä suurimmassa määrin euklidisena. Kuitenkin toisinaan teoksessa *Proofs and refutations* Lakatos viittaa "euklidiseen metodiin"historiallisena, metodologisena kokonaisuutena. Lakatos käyttää tätä termiä sekä viitatakseen antiikin Kreikan aikaiseen matemaattiseen tutkimukseen Eukleideen *Alkeet* teoksesta eteenpäin, että pitkäaikaisena matematiikan alan traditiona, joka on Lakatosin mukaan toiminut matematiikan metodologisena perustana Euklideesta nykypäivään saakka. Termillä on siis kaksoismerkitys Lakatosin tuotannossa, vaikka jälkimmäinen merkitys onkin yleisempi ja Lakatosin argumenttien kannalta relevantimpi. Käsittelen kuitenkin hieman antiikin Kreikan metodologiaa, sillä "euklidinen metodi"ei ole toteutunut muuttumattomana historian saatossa.

Teun Koetsier kokoaa teoksessaan *Lakatos' Philosophy of Mathematics* [22] historian ja aatehistorian tutkimustuloksia taustoittaakseen Lakatoksen väitteitä euklidisesta metodista.

Tärkeä artikkeli, jossa Lakatos käsittelee matematiikan peruslähtökohtia on *Infinite Regress and foundations of mathematics*[30], jota käsittelen tarkemmin luvussa 6. Lakatos nostaa jopa artikkelin otsikkoon ajatuksen, että matematiikalla ei ole yhtä yksittäistä perustaa, vaan useita perustoja. Lakatos määrittelee "euklidisen projektin"epistemologiset ulottuvuudet seuraavasti artikkelissaan *A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics?*, joka julkaistiin osittaisena vuonna 1967 ja laajemmin postuumisti vasta 1978 [29]:

"Classical epistemology has for two thousand years modelled its ideal of a theory, whether scientific or mathematical, on its conception of Euclidean geometry. The ideal theory is a deductive system with an indubitable truth-injection at the top a finite collection of axioms) — so that truth, flowing down from the top through the safe truth-preserving channels of valid inferences, inundates the whole system. — — Let us call those sentences of a deductive system in which some truth values are initially injected , 'basic statemets', and the subset of basic statements which receive the particular value true, 'true' basic statements. Then a system is Euclidean if it is the [deductive] closure *of those of its basic statements which are assumed to be true. Otherwise it is quasi-empirical."*[29, 28] (kursiivi ja hakasulkeet alkuperäiset)

Käsite "quasi-empirical"eli kvasi-empiirinen sisältää siis kaikki teoriat, jotka eivät noudata euklidista suunnitelmaa. Lakatos tarkentaa käsitteitä eksplikoimalla kirjoittamattomia sääntöjä, jotka liittyvät euklidiseen ja kvasi-empiiriseen teorianmuodostukseen: euklidista teoriaa on hyväksyttävää väittää todeksi, kun taas kvasi-empiirinen teoria on aina kyseenalainen, vaikka se keräisi tukea todistusaineistosta. Euklidisessa teoriassa pieni osa ("huippu") tosia lauseita *todistaa* koko teorian todeksi, kun taas kvasi-empiirisessä teoriassa tärkeimmät käsitteet *selitetään* teorian kokonaisuuden avulla ja osana [29, 7, vapaa suomennos].

Lakatosin mukaan jokainen tieteenala joutuu valitsemaan, kumpaa epistemologista ideaalia se käyttää: euklidista vai kvasi-empiiristä. Selitysmalli siis kattaa koko tieteen, mutta epäilen vahvasti, että Lakatos olisi tarkoittanut tätä kahtiajakoa käytettäväksi laajemmin tieteenfilosofisessa tutkimuksessa. Ennemmin tämä kahtiajako valaisee matematiikan tieteenalan luonnetta osana Lakatosin pyrkimyksiä osoittaa, ettei matematiikka välttämättä ole euklidinen tiede. Lakatos nimeää kolme vaihetta euklidisen tieteenalan teorianmuodostusprosessissa [29, 29]:

1. Esitieteellinen yrityksen ja erehdyksen kausi
2. Perusteiden rakennus: päättelyrakenteiden organisointi ja rajaukset
3. Järjestelmän sisään jääneiden kysymysten ratkaisujen päätteleminen

Euklidisen tieteen itsekritiikki perustuu Lakatosin mukaan varmuuden epäilyyn: mitä päättelyketjut ("todistukset") oikeasti todistavat, ja ovatko käytetyt metodit liian vahvoja, ja siten alttiita erehdyksille [29, 30].

Kun Lakatos selostaa matemaattisen todistuksen määritelmää formalistisessa traditiossa, kyseessä on euklidisen epistemologian toimintaesimerkki matematiikan tieteenalalla:

"Most of the students of modern philosophy of mathematics will instinctively define proof according to their narrow formalist conception of mathematics. That is, they will say that a proof is a finite sequence of formulae of some given system, where each formula derived by a rule of the system from some of the preceeding formulae. 'Pure' formalism admits any formal system, so we must specify in which system S we operate; then we speak only about an S-proof. Logicism admits essentially only one large distinguished system, and so essentially admits a single concept of proof."[25, 62]

Ylläoleva lainaus kuvastaa myös osaltaan matematiikan rationaalisuutta euklidisessa ohjelmassa. Matematiikan rationaalisuutta käsitellään lisää luvussa 5.

Lakatos kiinnittää huomiota käsitteiden määrittelyyn euklidisessa projektissa:

"EPSILON: I understand your sarcasm! Once before you queried my definitions. I then said they are, in fact, indubitably true axioms stating the essence of the concepts in question, with the help of infallibly clear and distinct intuition. I have though about this since and I think I have to give up my Aristotelian view of definitions. When I define a vague term, I in fact replace it by a new one, and

the old term serves only as an abbreviation *of my new one"*[28, 121] (kursiivi alkuperäinen)

Lakatos selittää tätä lainausta artikkelissaan *The Method of Analysis-Synthesis*:

"In the seventeenth and eighteenth centuries calculus, 'unreasoned' facts, invaded mathematics. How to rationalize them, how to raise them to the level of 'reasoned' facts soon became a central problem. Cauchy and his followers solved the problem by the 'translation-procedure'... The explanation of some facts about the real *line using complex function theory is analogous to the transcendental hypotheses of physics. To deduce these hypotheses from first principles was one of the problems which the arithmetization of mathematics and then logicization of mathematics set out to solve."*[24, 88] (kursiivi alkuperäinen)

"Kääntäminen"on siis eräs tapa korjata epävarmuutta euklidisessa projektissa. Teoksen *Proofs and Refutations* toinen pääluku käsittelee euklidista projektia pitkän käännösesimerkin kautta.[28, 106] Luvussa Lakatos käsittelee esimerkin, jossa avaruusgeometrian ongelma ilmaistaan ja ratkaistaan lineaarialgebran kirkkaalla ja selkeällä kielellä. Tässä on kyseessä epäformaalin ongelman formalisointi. Formalisoitu, ratkaistu ongelma on tautologia:

"THETA: ... If there are no counterexamples to the [formal] theorem, we shall call the theorem a tautology: *in our case an arithmetico-set theoretical tautology."*[28, 124-125] (kursiivi alkuperäinen)

Euklidisen projektin sisällä matemaattisen tutkimustyön tavoitteena on siis tautologioiden tuottaminen. Lakatos jättää teoksessa *Proofs and Refutations* euklidisen projektin erehtyväisyyden pohtimisen avoimeksi. Matematiikan erehtyväisyyttä käsitellään enemmän luvuissa 6 ja 7. Lopulliset tautologiat täyttävät todistuksille asetetun kriteerin: tulosten on oltava lopullisia ja varmoja [24, 75]. Lakatos tulkitsee tämän vaatimuksen olevan voimassa nykypäivänäkin eri sanamuodossa puhuttaessa riittävistä ja välttämättömistä ehdoista[28, 63-65].

Lakatos päättelee, että euklidinen tutkimusohjelma on pohjimmiltaan *anti-empiristinen*, aistihavaintoja vastustava. Hän muotoilee kaksi euklidisessä tutkimusohjelmassa esiintyvää kriteeriä, jotka tukevat tätä tulkintaa:

1. Vain järjen erehtymätön intuitio voi varmentaa väitelauseet niin, ettei epäilyksiä jää.

2. Tosiasiat on osoitettava varmoista periaatteista tai määritelmistä.[24, 5]

Euklidisen koulukunnan ongelmanratkaisumetodologia on Lakatosin kriittisen tarkastelun kohteena hänen eri kirjoituksissaan. Artikkeli *The Method of Analysis-Synthesis* käy läpi aatehistoriallisen tarkastelun tämän metodologian kehityksestä historian saatossa, painottaen Eukleideen Alkeet-teoksen kirjan 13 sisältöä ja sen metodologian myöhempää soveltamista luonnontieteisiin. Lakatos käyttää tästä termiä "kartesiolainen kehä". Karteesiolainen kehä oli Lakatosin mukaan nykyistä hypoteeseihin perustuvaa tieteellisen tutkimuksen mallia edeltänyt rakenne [27, 103]. Euklidisten luonnontieteiden tarkastelu rajataan pääsääntöisesti pois tästä tutkielmasta, mutta Alkeet-teoksen kirjan 13 sisältö on metamatemaattisesti relevanttia kontrastina Lakatoksen omaan todistusten ja kumoajien metodologian esitykseen teoksessa *Proofs and Refutations.*

Lakatos huomauttaa, että euklidisessa heuristiikassa tiedontuotanto ja todistaminen ovat erillään. Todistusten ja kumoajien metodissa tiedontuotanto ja todistaminen ovat osa samaa prosessia (tästä enemmän luvussa 5.1). Alkeet-teoksen kirjan 13 alkuperäistekstit ovat korruptoituneet, joten Lakatos käyttää lähteenään Pappus Aleksandrialaisen selitysteosta. Allaolevasta lainauksesta käy ilmi tiedontuotannon (analyysi) ja todistamisen (synteesi) erillisyys. On huomattava, että termit "analyysi"ja "synteesi"on tulkittava antiikin kreikkalaisessa merkityksessä ja kontekstissa eikä modernimmassa esim. dialektisessa merkityksessä.

"Analysis then takes what is sought as if it were admitted and passes from it through its successive consequences to something which is admitted as the result of synthesis: for in analysis we assume that which is sought as if it were (already) done (γεγονός), and we inquire what it is from which this results, and again what is the antecedent cause of the latter, and so on, until by so retracing our steps we come upon something already known or belonging to the class of first principles , and such a method we call analysis as being solution backwards (ἀνάπολιν λύσιν)."[11, 138-139]

"But in synthesis, reversing the process, we take as already done that which was last arrived at in the analysis and , by arranging in their natural order as consequences what were before antecedents, and successfully connecting them one with another, we arrive finally at the construction of what was sought; and this we call synthesis."[11, 138-139]

Teoksessa *Proofs and Refutations* euklidista metodologiaa ei eksplikoida näin suoraan. Tästä huolimatta sitä kritisoidaan suuressa määrin. Lakatos kiinnitti erityistä huomiota euklidisen metodin kyvyttömyyteen käsitellä vastaesimerkkejä rakentavasti, kuvaillen menetelmää, jossa vastaesimerkit karsinoidaan rajattujen määritelmien avulla tulosten ulkopuolelle "heuristisesti steriiliksi"[28, 136]. Tämän menetelmän vastaesimerkkien varalle Lakatos nimesi "poikkeusten poissulkemisen menetelmäksi"(*exception-barring method*).

Lakatos käyttää esimerkkinä euklidisen tutkimuksen tekemisestä matematiikassa 1800-luvun loppupuoliskolla tapahtunutta huolellisuuden (rigour) kehitystä. Hän kuvailee tämän matematiikan historian kehitysvaiheen olleen Cauchyn johtamaa euklidisen metodologian soveltamista: *"The Cauchy revolution of rigour was motivated by a conscious attempt to apply Euclidean methodology to the Calculus."*[28, 137] Lakatos kiinnittää huomiota siihen, että Cauchyn lähtökohta on käytettyjen käsitteiden aiempaa tarkempi määrittely:

"As for methods, I have had to give them all the rigour that one demands in geometry, so at never to resort to reasons drawn from the generality of algebra."[6]

Lainauksessa "geometry"viittaa Eukleideen *Alkeet*-teokseen. Cauchy siis etsi vastaesimerkkejä differentiaalilaskennassa (esimerkiksi hajautuvista sarjoista seuraavia paradokseja) soveltaen *Alkeet*-teoksen 13. luvun analyysiä. Lähtien tutkimaan jo melko kehittynyttä 1800-luvun differentiaalilaskentaa Cauchy lähti selvittämään sen lähtökohta-oletuksia ja määritelmiä. Aina kun tämä palauttava päättelyketju epäonnistui, Cauchy oli löytänyt vastaesimerkin, ristiriidan tai puutteen differentiaalilaskennan perusteissa. Tämän urakan jälkeen differentiaalilaskennan perusteet oli määritelty tarkemmin kuin ennen Cauchyn tutkimusta. Prosessin toinen osa, eli euklidisen terminologian mukaisesti synteesi, alkoi, kun tämän vastamääritellyn perustan pohjalle alettiin rekonstruoimaan differentiaalilaskennan menetelmiä. Tästä projektista merkittävän osan työsti Karl Weierstraß 1800-luvun loppupuoliskolla mm. funktion jatkuvuuden ja väliarvolauseen osalta.

Kun differentiaalilaskennan perusta oli rakennettu Cauchyn johdolla, sen tarkasteluun ei tarvitsisi enää palata. Euklidisen ohjelman mukainen pysyvä perusta kestäisi ikuisesti. Sen päälle rakennettaisiin yhä selittävämpiä matemaattisia konstruktioita. Varma perusta ja huolellisuus konstruktioiden laatimisessa takaisivat ristiriidattomuuden. Tämä ajatus osoittautui utopiaksi myöhemmin löydettyjen paradoksien takia, kuten aiemmin tässä pääluvussa tarkasteltiin. Varman perustan rakentaminen vaihtui formaalin aksioomajärjestelmän mielivaltaiseen valintaan ja ristiriidattomuuden vaatimus ensisijaisemmaksi tavoitteeksi aksioomavalintoihin verrattuna. Pohjimmiltaan tutkimuksen rakenne oli kuitenkin sama: rakentaa syistä seurauksia loogisen päättelyn kautta enenevässä määrin, kerryttäen matemaattista tietoa. *Alkeet*-teoksen luvun 13 analyysi/synteesi metodologian valossa tulkittuna näissä 1800-luvun lopun ja 1900-luvun alun metamatemaattisissa muutoksissa analyysi, eli seurauksista syihin suuntautuva konstruktio jäi taka-alalle synteesin, eli syistä seurauksiin tapahtuvan konstruktion ottaessa ensisijaisemman aseman.

Cauchy kiinnitti myös huomiota matemaattisten konstruktioiden hyödyntämään logiikkaan. Euklidisessa perinteessä luonnollisien lukujen ominaisuuksiin perustuva "geometrinen"tai "aristotelinen"logiikka, jossa erilaiset deduktiiviset päätelmät välittävät tietosisällön perusteista päätelmiin, oli vallalla.[22, VII] Cauchy kritisoi ankarasti mm. edeltäjiensä differentiaalilaskentaa, funktio-oppia ja sarjakehitelmiä, väittäen niiden sisältävän enimmäkseen induktiivista selittelyä eikä deduktiivista, pitävää päättelyä. [28, 138] 1800-luvun alun differentiaalilaskennassa synteesiä oltiin tehty vaillinaisen analyysin kera, kunnes Cauchy palautti mielenkiinnon analysiin ja Weierstraß näennäisesti vei analyysin tyydyttävään loppuun asti differentiaalilaskennan osalta. Lakatos kommentoi tätä ajattelun muutosta vahvalla vastakkainasettelulla:

"Inductive argument was fallible — therefore it was committed to the flames. Deductive argument took its place — because it was held to be infallible."[28, 138] (alkuperäisessä tekstissä koko kommentti kursiivilla)

Hilbert puolestaan rakensi uudentyyppistä analyysiä, kuitenkin pitäen synteesiä merkityksellisempänä. Lakatos ei itse mainitse termejä analyysi tai synteesi esitellessään omaa todistusten ja kumoajien metamatemaattista teoriaansa, jota käsitellään tarkemmin luvussa 4. Lakatos kritisoi "euklidista koulukuntaa", mutta ei sanonut omien metamatemaattisten konstruktioidensa olevan irrallisia sen vaikutuspiiristä tai jatkumosta. Sopivampi tulkinta onkin, että Lakatos oli tietoinen (meta)matematiikan historiasta, ja oman tutkimuksensa suhteesta siihen. Tämä historiallinen tietoisuus, tieteen historiallisuuden tiedostaminen ja kriittinen dialogi oman alansa tieteenhistorian kanssa on Lakatosin tuotannon erityinen ansio. Tämä ilmenee erityisesti, kun Lakatos rakentaa vastakkainasetteluita matematiikan käytännön tutkimuksen ja formalistis-euklidisen teoriaperustan välille teoksessa *Proofs and Refutations* sekä hänen metamatematiikkaa käsittelevissä filosofisemmissa artikkeleissaan *The method of analysis-synthesis*, *A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics?* ja *Infinite regress and the foundations of mathematics.* [28][24][29][30]

4 Lakatosin todistusten ja kumoajien metodi

Teoksen *Proofs and Refutations* sisältö voidaan jakaa kahteen osaan: metamatemaattiseen keskusteluun sekä todistusten ja kumoajien metodin esittelyyn. Aiemmissa luvuissa on käsitelty teosta puheenvuorona metamatemaattisessa keskustelussa sekä Lakatosin asemaa keskustelijana matematiikan ja filosofian tieteenalojen välimaastossa. Nyt käsittelen todistusten ja kumoajien metodia. Näitä kahta teemaa yhdistää Lakatosin kaksi näkökulmaa:

1. Matematiikan historiallisuus

2. Matemaatikon mikrotason työskentelyn merkityksellisyys

Lakatosin myöhempi teos *The Methodology of Scientific Research Programmes*[31] (myöhemmin tekstissä *MSRP*) keskittyy enemmän tiedeyhteisön makrotason työskentelyn mallintamiseen ja ohjeistamiseen esimerkiksi teorioiden vertailun näkökulmasta, kun taas *Proofs and Refutations* painottaa mikrotason työskentelyä, kuten yksittäisten hypoteesien ja teoreemojen muodostamisprosessia.

Esittelen ensin metodin rungon, jonka jälkeen pohdin sen näkökulmia ja lähtökohtia. Luvuissa 5 ja 6 käsittelen metodin suhdetta yllä esitettyihin kahteen teoksen *Proofs and Refutations* läpitunkevaan näkökulmaan.

Todistusten ja kumoajien metodin esittely teoksen dialogissa kestää pitkään, noin kolmasosan päälukujen tekstistä. Taustoitus koostuu vallalla olevien metamatemaattisten periaatteiden kritisoimisesta avaruusgeometrian esimerkin kautta. Vasta luvussa 1.5.c. dialogin henkilö Lambda sanallistaa aiemmissa luvuissa esitetyn "lemman sisällyttämisen metodin"eksplisiittisiksi heuristisiksi säännöiksi ja uudelleennimeää sen "todistusten ja kumoajien metodiksi". Lambdan ajatukset dialogissa heijastavat mm. Lakatosin aiempaa artikkelia *Infinite regress and foundations of mathematics*[30] esitellen yhteyden popperilaisen falsifioinnin välittymisen periaatteen (*principle of retransmission of falsity*) ja lemmojen kriittisen tarkastelun välillä. Alla on oma käännökseni näistä heuristisista säännöistä Worralin ja Zaharin toimittaman laitoksen vuoden 1981 korjatun julkaisun pohjalta (alkuperäiset alaviitteet poistettu). Tässä luvussa esiintyvät odistusten ja kumoajien metodin listaukset (ensimmäinen heti alla, toinen myöhemmin tässä luvussa) olen kääntänyt suomeksi toisin kuin muut lainaukset tässä tutkielmassa. Käännös mahdollistaa käsitteiden yksiselitteisemmän ja hienojakoisemman tarkastelun ensimmäistä lainausta seuraavissa tekstikappaleissa. Jotkin englanninkieliset termit ovat matemaattista jargonia ja vaativat selittämistä joka tapauksessa. Lisäksi joidenkin termien sisältö ei tässä yhteydessä mielestäni täysin vastaa sanakirjamääritelmiä, vaan saavat lisämerkitystä popperilais-lakatosilaisessa kontekstissa. Näiden syiden vuoksi lainaukset ovat suomeksi eivätkä englanniksi.

Sääntö 1: Jos aloitat otaksumasta, aseta tavoitteiksesi sekä sen todistaminen että kumoaminen. Tarkastele todistusta huolellisesti ja listaa sen ei-itsestäänselvät lemmat (tämä on todistuksen analyysi)[1]*. Etsi vastaesimerkkejä sekä otaksumalle (yleiset vastaesimerkit) että epäilyttäville*[2] *lemmoille (paikalliset vastaesimerkit).*

Sääntö 2: Jos aloitat yleisestä vastaesimerkistä, hylkää otaksuma ja lisää todis-

[1]Sulkeissa olevat käsitteenasettelut sisältyvät alkutekstiin, lukuunottamatta termiä "hirviö"(poikkeus) koskevaa tarkennusta säännössä 2. Se on oma lisäykseni Lakatosin tekstin hengessä.

[2]Dialogissa käsitellään laajalti kysymystä milloin lemma on ei-itsestäänselvä. Kysymys on subjektiivinen ja riippuu sekä matematikon ennakko-oletuksista että tämän itsekriittisyyden tasosta. Eri matematikot tuottavat hieman erilaisia lemmalistauksia ja tulkitsevat niiden itsestäänselvyyttä eri tavoin.

tuksen analysiisi sopiva lemma, jonka vastaesimerkki kumoaa. Seuraavaksi korvaa hylätty otaksuma uudella parannetulla otaksumalla, joka sisällyttää kyseisen lemman lähtöoletuksena eli alkuehtona. Älä anna kumoamisen tulla ohitetuksi "hirviönä"(poikkeuksena). Yritä sanallistaa kaikki "piilossa olevat lemmat"eksplisiittisesti.

Sääntö 3: Jos aloitat paikallisesta vastaesimerkistä, tutki onko se samalla myös yleinen vastaesimerkki. Jos näin on, voit soveltaa helposti sääntöä 2. — —

Sääntö 4: Jos aloitat paikallisesta vastaesimerkistä joka ei ole myös yleinen, yritä parantaa todistuksen analyysiäsi vaihtamalla kumottu lemma vielä kumoamattomaan.[28, 50, 58]

Säännöstä 4 esitetään myöhemmin huomautus, että lemman lisäksi tai sijasta voidaan vaihtaa tutkimuksen kohteena oleva todistus paremmalla todistuksella (elegantimmalla, vähemmän lemmoja vaativalla tai vaikutusalueeltaan laajemmalla)[28, 59]. Sääntö 4 on esitelty dialogissa myöhemmin kuin säännöt 1-3. Säännön 4 esittelee dialogissa henkilö Omega, eikä Lambda kuten sääntöjen 1-3 tapauksessa. Henkilöhahmona Lambdan tehtävänä on esitellä popperilaista falsifikationismia ja Lakatosin epistemologisia päätelmiä. Lambda ennakoi artikkelia *A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics?*, jonka Lakatos kirjoitti vuosien 1965 ja 1967 välillä, mutta joka julkaistiin vasta 1976. Popperilaiseen epistemologiaan viittaa etenkin Lambdan käyttämä termi *"retransmission of falsity"*. Omegan näkemykset dialogissa puolestaan ovat Lakatosin omaa kehitelmää. Omega kritisoi sääntöjä 1-3: Vaikka lauseiden vaikutusalueen rajaaminen kasvattaa niiden totuusarvoa, menetetään samalla informaatiosisältöä ja sovellusaluetta. Tässä näkyy Lakatosin kritiikki euklidista koulukuntaa kohtaan. Lauseiden totuudellisuuden kasvattaminen on tärkeä arvo, mutta sen ohessa on huolehdittava, ettei totuuden tavoittelu tee tieteen tuloksista tyhjiä, tarpeettomia tautologioita. Omega ajaa positiivista heuristiikkaa, eli ohjeistusta *sisällöntuotantoon*. Sääntö 4 on positiivinen heuristiikka ja siten erilainen säännöistä 1-3, joiden tehtävä on parantaa lausejärjestelmän totuussisältöä.

Todistusten ja kumoajien metodin säännöt sisältävät matemaattista jargonia. Selitän seuraavaksi käytettäviä termejä laajemmin ymmärrettävällä kielellä, tavoitteenani avata matematiikan mikrotason työskentelyä muillekin kuin matematiikan tutkijoille.

Otaksumalla tai arvauksella, englanniksi *conjecture* tarkoitetaan matemaattista väitettä (eli lausetta tai teoreemaa), jota ei ole todistettu. Suomenkielinen sana "otaksuma"viittaa matemaattiseen kontekstiin, kun taas käsitettä arvaus voidaan käyttää laajemmin varhaisesta hypoteesista. Lemma, ali apulause, on pienimuotoisempi otaksuma tai jo todistettu lause, jota ei varsinaisesti tutkita tai joka ei ole sinänsä kiinnostava, mutta jota tarvitaan tutkittavan otaksuman loogisen todistuksen rakentamiseksi. Lemma voi olla välietappi otaksuman todistuksessa tai apuväline, jonka avulla todistuksen päättelyketjua voidaan lyhentää.

Matemaattinen otaksuma vastaa vain osittain luonnontieteen ja tieteenfilosofian termiä "hypoteesi". Otaksuman lähde voi olla esimerkiksi intuitio, ulkopuolelta saatu tutkimuskysymys tai laajemman matemaattisen teorian pohjalta laadittu ennuste. Otaksumaa voi tukea (*corroborate*) esimerkiksi numeerinen aineisto, intuitio tai alustavat, epämuodolliset todistukset. Intuitio voi tässä yhteydessä tarkoittaa esimerkiksi samankaltaisten matemaattisten rakenteiden havaitsemista toisessa, jo todistetussa matemaattisessa lauseessa tai teoriassa. Fysiikassa tällaista intuitiota kutsutaan symmetriaksi, joka on itsessään otaksuma eikä aina voimassaoleva, vaikka kyseinen otaksuma onkin saanut merkittävää tukea onnistuneista ennusteista esimerkiksi kvanttifysiikassa.

Otaksuman muuttaminen todistetuksi lauseeksi on matemaattinen ongelma. Suunnitelmallista, mutta epätäydellistä lähestymistä ongelmanratkaisuun kutsutaan heuristiikaksi. Yleisellä tasolla heuristiikka tarkoittaa käyttäytymismalleja, joilla ihminen lähestyy ongelmia silloin, kun selkeää reittiä ratkaisuun ei ole tiedossa. Heuristista käyttäytymistä on tutkittu psykologian tieteenalan piirissä.

Matematiikassa substantiivi "heuristiikka"tarkoittaa suunnitelmaa tai algoritmista (ohjelmoitavaa) menetelmää, jolla lähestytään ongelmaa silloin, kun päättelyketju kysymyksenasettelusta lopputulokseen ei ole etukäteen selvillä. Lakatoksen kritiikki euklidista koulukuntaa ja Hilbertin formalismia kohtaan väittää niiden aliarvioivan tai sivuuttavan heuristiikan merkityksen mikrotason matemaattisessa tutkimustyössä.

Heuristiikan merkitys Lakatosin ajattelussa on suurelta osin lainattu George Pólyalta. Heuristiikan hyöty ongelmanratkaisussa on toimia ajattelutapana, toimintasuunnitelmana tai ohjeistuksena, jolla ratkaisun lähestyminen on tehokkaampaa ja varmempaa.[20, 243] Heuristiikkojen tutkiminen ja määritteleminen on hyvin käytännönläheistä tutkimustyötä. Pólya listasi ja esitteli teoksessaan *How to Solve It* yksinkertaisia, yleisiä matemaattisia heuristiikkoja[38]. On tärkeää huomata, että Lakatos määritteli käsitteen "heuristiikka"uudelleen myöhemmässä tuotannossaan. Teoksessaan *MSRP* käsite "positiivinen heuristiikka"tarkoittaa suosituksia, mitä ja miten on hyödyllistä tutkia jonkin tutkimusohjelman sisällä. Vastaavasti "negatiivinen heuristiikka"tarkoittaa suosituksia, mitä ja miten ei kannata tutkia. Nämä positiivisen ja negatiivisen heuristiikan käsitteet liittyvät Lakatosin tieteenfilosofiseen tutkimustoiminnan selitykseen tutkimusohjelmien (*"research programmes"*) avulla, eikä niillä ole merkitystä teoksen *Proofs and Refutations* kontekstissa. Tässä Lakatosin keskivaiheen tuotannon teoksessa (varhaiseksi vaiheeksi luen hänen marxistiset kirjoituksensa Unkarissa) hänen tieteenfilosofiansa on vielä hyvin popperilaista eivätkä *MSRP*:n omaleimaiset ajatukset ole vielä kehittyneet. Tämänkin tutkielman sisällä siis käsite "heuristiikka"käsitetään yleisessä merkityksessään melko laajalti pätevänä toimintasuunnitelmana jonkin tavoitteen saavuttamiseksi, kuten esimerkiksi todistusten ja kumoajien metodin säännössä 4.

Matemaattista todistamista käsiteltiin yleisluontoisesti aatehistoriallisesta näkökulmasta pääluvussa 3. Todistamisella Lakatos tarkoittaa euklidisen koulukunnan mukaista todistusta, jossa hyväksytyistä lähtökohdista loogisesti johdetaan todistettava lause. Lakatos ei vaadi todistusten ja kumoajien metodissa tiukan formalistista todistusta tarkkaan eksplikoituine aksioomajoukkoineen ja ristiriidattomuustodistuksineen. On tärkeää havaita, että todistusten ja kumoajien metodin kuvailema mikrotason toiminta eroaa Hilbertin formalismista merkittävästi esimerkiksi juuri suhtautumisessa ristiriitoihin. Sääntö 1 tavoittelee ristiriitaa, joka on Hilbertin formalismissa kauhistus: Hilbertin ohjelmassa ristiriidoista on päästävä loogisesti aukottomasti eroon, Lakatosin metodologiassa ne ovat tutkimusta eteenpäin ajava voima. Lakatos siis aktiivisesti tavoittelee metamatematiikassaan ilmiötä, jonka poissulkemisen on Hilbertiläisen metamatematiikan ytimessä (ristiriidattomuustodistukset). Toisaalta voidaan väittää, että sekä Hilbertillä ja Lakatosilla on pohjimmiltaan sama päämäärä: ristiriidattomuus. Logiikan kolmannen poissuljetun laki asettaa vahvan vaatimuksen ristiriidattomuudelle matemaattisissa järjestelmissä, eikä Lakatos kyseenalaista tätä periaatetta kirjoituksissaan toisin kuin L.E.J Brouwer[42]. Hilbert pyrkii ristiriidattomuuteen suoraan, Lakatos puolestaan lähestyy ristiriidattomuutta toistuvien ristiritojen ja parempien otaksumien kautta. Tässä vastakkainasettelussa näkyy Lakatosin artikkelissa *A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics?* esittelemä ero euklidisen ja kvasi-empiirisen tieteentekemisen välillä.

Mielestäni Lakatos on lähempänä muiden luonnontieteiden ajattelua kuin Hilbert, joka oli itse myös fyysikko. Lakatos soveltaa popperilaista falsifiointiin perustuvaa tieteenfilosofiaa matematiikkaan, kun taas Hilbert pyrki tuomaan lisää perusteellista huolellisuutta (*rigour*) matematiikkaan. Matemaattisella kumoamisella (*refutation*) Lakatos tarkoittaa ensisijaisesti vastaesimerkkien etsimistä. Vastaesimerkki on ristiriita, jonka osoitetaan olevan loogisesti seurausta lähtökohta-oletuksista ja todistuksessa käytetyistä lemmoista. Klassinen vastaesimerkki on irrationaalilukujen olemassaolon todistus. Todistus, että $\sqrt{2}$ ei ole esitettävissä kahden kahden kokonaisluvun suhteena $\frac{p}{q}$, samalla sekä todistaa irrationaalilukujen olemassaolon (Lakatos voisi huomauttaa, että todistetuksi tuli vain tietynlainen, juuri tästä päättelyketjusta nouseva määritelmä irrationaaliluvuille), että lisäksi kumoaa väitteen, että jokainen luku olisi esitettävissä kahden kokonaisluvun suhteena.[43] Perinteisesti euklidisen koulukunnan mukaan yksi vastaesimerkki riittää kumoamaan koko väitteen, koska matemaattisten lauseiden ajatellaan olevan yleisesti paikkansapitäviä. Todistusten ja kumoajien menetelmä kiinnittää huomiota juuri tähän: väitteiden voimassaoloehtoihin (tai voimassaolo-avaruuteen laajemmin ajateltuna) ja sen kaventumiseen vastaesimerkkien myötä.

Vastaesimerkit jaetaan todistusten ja kumoajien menetelmässä kahteen kategoriaan: paikallisiin (*local*) ja yleisiin (*global*). Matematiikassa nämä termit voidaan tulkita kahdella tavalla: Yleinen tarkoittaa koko tutkittavaa joukkoa koskevaa tulosta ja paikallinen jotain sen rajattua osaa (osajoukkoa) koskevaa tulosta. Abstraktimmassa tulkinnassa yleinen tulos koskee laajinta mahdollista asiayhteyttä, kun taas paikallinen tulos koskee rajattua asiayhteyttä ja sisältää ajatuksen, että yleinen tulos voi olla olemassa erilaisena kuin paikallinen tulos tai että paikallisia tuloksia on useampia. Esimerkkinä tästä on lukion oppimäärään sisältyvä funktion ääriarvon käsite. Funktion paikallinen ääriarvo on yhden "kaaren"kuten paraabelikäyrän lakipiste tai "kuopan pohja", mutta esimerkiksi korkeamman asteen polynomifunktiossa näitä voi olla useita, joista kaikista korkein tai matalin kohta on yleinen ääriarvo. Todistusten ja kumoajien metodissa sanojen paikallinen ja yleinen merkitys on lähempänä abstraktia tulkintaa: tulkinta-avaruutena on "kaikki mahdolliset matemaattiset teoreemat". Euklidinen koulukunta piti vastaesimerkkiä kyseisen tutkimuspolun loppuna tai poikkeuksena, joka tuli eristää. Näitä eri suhtautumisia vastaesimerkkeihin käsitellään teoksen *Proofs and Refutations* dialogin alkuosassa eri henkilöhahmojen näkökulmien kautta.

Vastaesimerkkien merkityksen pohtiminen on koko dialogin ydinsisältöä. Jo teoksen ensimmäisillä sivuilla rakennetaan erottelu vastaesimerkin eri vaikutusalueiden välillä:

TEACHER: – – *You have shown the poverty of the argument - the proof - but not the falsity of the conjecture.*

ALPHA: *Will you scrap your proof then?*

TEACHER: *No. Criticism is not necessarily destruction. I shall improve my proof so that it will stand up to the criticism.* [28, 10]

Tämä vuoropuhelu käsittelee matemaattisten todistusten luontiprosessia euklidisesta näkökulmasta, koulukunnan oletusten sisällä, sillä repliikit sijoittuvat dialogin alkupuolelle ja Alpha on henkilöhahmona perinteisen euklidisen matematiikanfilosofian edustaja. Nämä repliikit hieman laajemmassa kontekstissa teoksen sivulla 10 tarkentavat vastaesimerkkien toimintaperiaatetta matematiikassa: vastaesimerkki voi kohdistua todistukseen ilman, että se kumoaa itse lausetta. Opettajan henkilöhahmo väittää, ettei vastaesimerkki välttämättä kumoa itse todistustakaan, joka voidaan pelastaa parantelemalla sitä. Vastaesimerkin ja todistuksen rakenteet eivät ole kritiikin kohteena. Vastaesimerkkiä ja todistusta pidetään euklidisen koulukunnan mukaisesti loogisina, ajattomina konstruktioina. Lakatos osoittaa, että vastaesimerkkien, todistusten ja lauseiden vuoropuhelu voi saada monipuolisia ja hienovaraisempia muotoja kuin binäärinen hyväksyminen ja hylkääminen. Tässä vuoropuhelussa Lakatoksen teksti lähtee tiiviisti euklidisista lähtökohdista, mutta ottaa askeleen kohti matemaattisten todistusten historiallista, kertyvää tulkintaa: loogisesti epäpätevät todistukset voivat johtaa uuteen, parannettuun todistukseen, joka on kuitenkin loogisesti tosi sinänsä, riippumatta tavasta miten siihen päädyttiin.

Alphan positio euklidiaanisen koulukunnan dogmaattisena edustajana (tai karikatyyrinä) tulee selväksi hänen ajatuksessaan, että vastaesimerkin pitäisi kumota lause tai sen todistus peruuttamattomasti. Tämä osa dialogia on hyvin merkittävä. Euklidinen suhtautuminen vastaesimerkkiin tutkimuspolun umpikujana vaihdetaan tulkintaan vastaesimerkistä kritiikkinä. Samassa keskustelussa merkitys tarkentuu entisestään, kun kritiikkiä kuvaillaan *rakentavana* kritiikkinä. Tämä on merkittävä näkökulman muutos verrattuna euklidiseen absoluuttiseen suhtautumiseen vastaesimerkkeihin: vastaesimerkit ovat rakentavaa kritiikkiä, popperilaista falsifikaatiota ja hyödyllinen välivaihe heuristisessa ongelmanratkaisussa. Esseessään *Infinite regress and foundations of mathematics* Lakatos toisaalta väittää, että euklidinen koulukuntakaan ei käytännössä noudattanut absoluuttista umpikuja-tulkintaa vastaesimerkeistä, vaan noudatti heuristista ongelmanratkaisu-algoritmia.[30]

TEACHER: – – *A local, but not global, counterexample is a criticism of the proof, but not of the conjecture.*

GAMMA: *So, the conjecture may be true, but your proof does not prove it.*

TEACHER: *But I can easily elaborate, and* improve the proof, *by replacing the false lemma by a slightly modified one, which your counterexample will not refute.* [28, 11] Korostus lainauksessa on alkuperäisessä tekstissä. Henkilöhahmon Gamma käyttämä termi "totuus"viittaa tässä yhteydessä deduktiiviseen päättelyyn: otaksuma on tosi jos se on looginen seuraus oletuksistaan.

Gamman henkilöhahmo esittää euklidisen kolukunnan edustajaa, mutta skeptistä tulkintaa siitä Alphan dogmatismin sijasta. Gamma kyseenalaistaa jatkuvasti esitettyjä väitteitä ja todistuksia, usein paljastaen niiden heikot kohdat oivaltavien vastaesimerkkien avulla. Tulkinta vastaesimerkistä tutkimuspolun loppuna perustuu logiikan rakenteeseen. Yleisesti voimassaolevaksi väitetty väite ei ole tosi, jos sille on olemassa yksikin vastaesimerkki. Euklidisen koulukunnan perinteessä pyritään yleisesti voimassa oleviin absoluuttisiin totuuksiin tasogeometrian ihanteiden mukaisesti. Matemaattisen lauseen todistaminen on tutkimuksen loppu, koska todistuksen ajatellaan olevan yleisesti voimassa oleva ja kaikki mahdolliset vastaesimerkit pois sulkeva. Tähän tilaan päässeen matemaattisen lauseen häiritseminen vastaesimerkillä on vakavaa, sillä todistetun matemaattisen lauseen päälle on voitu rakentaa uusia matemaattisia lauseita todistuksineen. Mitä korkeampi euklidinen rakennelma matemaattisen lauseen päälle on rakennettu, sitä vakavampi rikkomus koulukunnan arvopohjaa vastaan sen kyseenalaistaminen vastaesimerkillä on. Lakatos kuvailee euklidista suhtautumista varmuuteen seuraavasti:

"In the Euclidean methodology there are no conjectures, only theorems."[28, 107]

EPSILON: I shall call such an 'already Euclidean' or established theory a dominant theory."[28, 123] (korostus Lakatosin)

"Counterexamples were regarded as grave and disastrous blemishes: they showed that a conjecture was wrong and that one had to start proving again from scratch." [28, 138]

Euklidisessa käsityksessä matemaattinen lause on siis joko tosi tai epätosi; välimuotoja ei ole. Kolmannen poissuljetun laki on absoluuttinen. Tosi teoria (kokoelma lauseita) kuitenkin voi saavuttaa "vakiintuneen"tai "hallitsevan"aseman, mikä myöntää jonkinlaisen logiikan ulkopuolisen arvostus- tai arviointikriteeristön olemassaolon myös euklidisessa viitekehyksessä. Tämä kriteeristö ei kuitenkaan ole epistemologinen, vaan sosiaalisesti ylläpidetty. Euklidinen koulukunta ei ole kiinnostunut tämän sosiaalisen kriteeristön tarkastelusta, mutta Lakatos on hyvin kiinnostunut juuri tästä matematiikan kirjoittamattomien sääntöjen käytännöstä.

Lakatoksen dialogin alkupuolella esitellään eri suhtautumistapoja vastaesimerkkeihin historiallisten alaviitteiden kera. Epämieluista vastaesimerkkiä, jonka huomataan kaatavan tärkeäksi koetun matemaattisen lauseen (tai sen todistuksen, kuten myöhemmin dialogissa tarkennetaan), kutsutaan hirviöiksi (*monster*). Hirviön käsitteessä on keskeistä sen epämieluisuus ja ongelmallisuus todistusprosessille: hirviö ilmaantuu kun lause tai lemma on jo todistettu eikä se välttämättä ole pelkästään ristiriidassa oletusten kanssa, vaan myös niiden määritelmien ulkopuolella. Hirviöiden ilmaantuminen on uhka euklidiselle käsitykselle matematiikasta. Käsitteiden ja aksioomien määritelmien uskotaan johtavan yksiselitteisiin seurauksiin, jotka eivät tarvitse selitystä sinänsä. Aksioomien uskotaan sisältävän kaikki matemaattinen informaatiosisältö, jota lauseet todistusten kautta eksplikoivat. Hirviöt rikkovat näitä matematiikanfilosofisia uskomuksia. Perustavanlaatuisten matemaattisten lauseiden, eli niiden, joiden päälle on rakennettu muita lauseita, kumoutumisen uhan nähdään horjuttavan koko tieteenalan uskottavuutta. Tämän ehkäisemiseksi matemaattisen todistuksen vaaditaan olevan aukoton. Päättelyketju aksioomista lopputulokseen, josta ei puutu yhtään välivaihetta, takaa todistuksen aukottomuuden. Tämä on kuitenkin vain ideaali, joka ei käytännössä usein pidä paikkaansa.

Euklideen *Alkeet*-teoksen todistukset ovat esimerkillisiä, vaikka nykymatemaatikot löytävätkin niistä puutteita [41, 187]. *Alkeet*-teosta käytettiin matematiikan oppimateriaalina Euroopassa (ja muuallakin maailmassa, esimerkiksi islamilaisen kulttuuripiirin sisällä[3]) olivat matematiikan oppimateriaaleja aina 1900-luvulle asti. Teoksen huolelliset ja selkeät matemaattiset todistukset saivat malliesimerkin tai matemaattisen ihanteen aseman. Tämä ihanne ei kuitenkaan toteutunut aina: matemaatikkojen toimintatavat ja huolellisuus vaihtelivat eri aikakausina. Lakatos tarkastelee teoksen *Proofs and Refutations* liitteessä I matemaattisen huolellisuuden (*rigour*) kehitystä 1700-1800 lukujen funktio- ja raja-arvo-opin tutkimuksessa. Hän toteaa Cauchyä ja Weierstraßia edeltäneiden funktio-opin ja raja-arvojen tutkijoiden työskentelyn olleen nykystandardeilla mitattuna leväperäistä[28, I].

Hirviöitä voi kuitenkin ilmestyä vielä nykypäivänäkin. Lakatos pohtii hirviöiden odottamatonta ilmestymistä ja selittää, miksi hirviöitä ilmestyy, vaikka todistus olisi huolella laadittu ja tarkastettu. Todistuksen loogisen päättelyketjun laadinnassa matemaatikko hyödyntää matemaattista osaamistaan laajalti oivaltaen ja loogisia yhteyksiä rakentaen. Lakatos selittää tätä perustason ajatustyötä uuden käsitteen avulla: piilotettu lemma (*hidden lemma*). Piilotettu lemma on oletus, jota matemaatikko pitää tiedostamattaan totena todistusta rakennettaessa tai vaihtoehtoisesti niin itsestäänselvänä, ettei mainitse lemmaa kirjallisesti osana todistustaan. Mahdollista on myös, että matemaatikko on aikonut kirjoittaa lemman todistuksen lopullisessa versiossa, mutta ei ole pitänyt sitä tarkistuksen yhteydessä tärkeänä, unohti sen tai leikkasi sen pois tilansäästön vuoksi [28, 46, alaviite 1]. Piilotettu lemma paljastuu usein vasta matemaattisen häiriön kuten vastaesimerkin yhteydessä tai sovellettaessa teoriaa uusiin käyttötarkoituksiin. Lemmaa pidetään havaitsemisen yhteydessä usein virheenä: liian kunnianhimoisena tai ristiriitaisena oletuksena, joka paikannetaan ilmenneiden ongelmien juurisyyksi. Piilotetun lemman paljastuminen paljastaa samalla alkuperäisen todistuksen laatineen matemaatikon ajatustyöskentelyn rakenteita, kuten itsestäänselvinä pidettyjä oletuksia ja liian kunnianhimoisia yleistyksiä. Nämä paljastuvat eksplisiittisesti piilotetun lemmojen myötä, tarjoten muille matemaatikoille tarttumapinnan jatkaa edellisen matemaatikon ajatustyötä parantaen todistusta. Vaikka ristiriita tai vastaesimerkki näennäisesti kumoaakin aikaisemman todistuksen, piilotetun lemman käsite perustelee miten jatkotyö saman ongelman parissa on edistyneempää matematiikkaa kuin alkuperäinen todistus: implisiittisiä oletuksia on eksplikoitu ja todistuksen voimassaolo-avaruudesta on poistettu ristiriitainen alue.

Jokainen matemaattinen todistus voi sisältää tuntemattoman määrän piilotettuja lemmoja. On mahdollista, että piilotetut lemmat ovat väistämättömiä joissakin loogisissa järjestelmissä. Tällöin metamatemaattinen väitelause "On mahdotonta listata eksplisiittisesti kaikkia deduktiivisen päätelmän oletuksia"olisi tosi joissakin loogisissa järjestelmissä (kuten ZFC tai muut nykyaikana käytetyt aksioomajärjestelmät). Jokainen formaali järjestelmä on kuvailtava ja selitettävä luonnollisella kielellä (tai matemaattisella jargonilla). Hilbertin formalismia mukaillen tällainen kuvailu voi esimerkiksi sisältää selityksen käytetystä logiikasta sekä valitut aksioomat. Tämä metakonteksti on olemassa jokaiselle formaalille järjestelmälle. Vaikka järjestelmän sisäiset oletukset ja lemmat olisivat tarkasti listattavissa, tämä ei koskisi järjestelmän metakontekstia, joka on välttämättä inhimillinen, kielellinen ja historiallinen.

Käsitteen "piilotettu lemma"voisi suomentaa myös fraaseilla "piilossa oleva lemma"tai "piileskelevä lemma", koska lemman huomiotta jättäminen voi jäädä matemaatikolta tiedostamatta. Alkutekstinen fraasi "*hidden lemma*"sisältää sekä merkityksen "piilotettu lemma"että "piilossa oleva lemma". Näistä edellinen sisältää implisiittisesti väitteen, että joku tai jokin on enemmän tai vähemmän piilottanut lemman vaikeasti havaittavaksi. Tämä tulkinta on erityisen merkityksellinen tapauksissa, joissa matemaatikko pitää jotain välivaihetta niin itsestäänselvänä, että jättää sen merkitsemättä. Tätä tulkintaa myötäilee myös toivottavasti kuvitteelinen skenaario, jossa matemaatikko on epävarma jostakin päättelyketjun osasta ja ohittaa siksi sen perustelun. Tällainen epärehellinen toiminta kuitenkin huomattaisiin viimeistään tutkimuksen julkaisuvaiheessa jos formaali päättely tarkistettaisiin koneellisesti.[1] Tulkinta "piilossa oleva lemma"selittää mielestäni enemmän tapausta, jossa matemaatikko tiedostamatta pitää lemmaa niin itsestäänselvänä ettei kirjoita sitä näkyviin tai ei tiedosta edes käyttäneensä sitä. Kolmas tulkinta "piileskelevä lemma"on oma tulkintani, jossa lemma piiloutuu ja se on löydettävissä tietoisella, aktiivisella etsinnällä. Lakatos keskittyy tekstissään enemmän lemman löytymiseen kuin sen piileskelyn tapaan. Hän kuitenkin valitsi saksankieliselle termille *stillschweigend* käännöksen *hidden* eikä *tacit*, mikä mielestäni korostaa matemaatikoiden tietämättömyyttä lemman olemassaolosta sen löytymiseen asti[28, 46, alaviite 1]. Matemaattisen todistuksen rakentaja ei ole tietoinen lemmoista, jotka piileskelevät oletuksissa, joihin hänen todistuksensa nojaa. Näistä lemmoista eivät ole tietoisia myöskään matemaatikot, jotka tutustuvat todistukseen ennen kuin vastaesimerkki tai hyvin huolellinen todistuksen analyysi paljastaa aiemmin havaitsemattomat lemmat. Lakatosin mukaan lemmat ovat kuitenkin olemassa todistuksen alkuperäisestä syntyhetkestä alkaen, vaikka kukaan ei ole tietoinen niistä ennen niiden paljastumista.

Mielestäni käsite "*hidden lemma*"on erityisen hyödyllinen kahdessa kontekstissa:

[1] Koneelliseen todistuksen tarkistamiseen käytetyt ohjelmistot kuten Coq listaavat lauseen todistuksessa käytetyt aksioomat, määritelmät ja välivaiheet. On olemassa ohjelmistoja, jotka myös laativat todistuksia välivaiheineen. Toisinaan nämä todistukset ovat niin laajoja, ettei ihminen voi tarkastaa niitä.[12] Nämä ohjelmistot eivät kuitenkaan (vielä?) kykene kuvailemaan käyttämäänsä formaalia järjestelmää tai selittämään tuloksiaan luonnollisella kielellä.

1. Matematiikan epävarmuuden ja ainaisen keskeneräisyyden korostamisessa
2. Sisältöätuottavana heuristiikkana todistusten ja kumoajien metodissa

Tulkinta sisältöätuottavasta heuristiikasta viittaa todistusten ja kumoajien metodin sääntöön 4, joka esiteltiin aiemmin tässä kappaleessa. Lakatoksen myöhemmän teoksen, MSRP:n kontekstissa tämä sääntö voitaisiin selittää käsitteen *positive heuristic* avulla, jolloin on muodostettavissa mielenkiintoinen jatkumo Lakatoksen varhaisen ja myöhemmän tuotannon välille. Sekä *Proofs and Refutations* että MSRP ottavat vaikutteita George Pólyan teoksesta *How to Solve It*[38].

On tärkeää huomata, että piilotettu lemma ei välttämättä ole väitelause tai deduktiivisen päättelyketjun välivaihe. Myös käytettyjen termien *määritelmät* voivat sisältää tiedostamattomia oletuksia tai epätarkkuuksia. Vastaesimerkit voivat tuoda esiin käytettyjen termien heikkoudet ja pakottaa niiden tarkemman määrittelemisen.[28, 43-47] Perustavanlaatuisimmillaan vastaesimerkit voivat johtaa matemaattisen järjestelmän perusaksioomien uudelleenmäärittelyyn.

Piilotetut lemmat ovat välttämättömiä, sillä epämuodollisessa matematiikassa tutkijoiden ei ole mielekästä listata kaikkia taustaoletuksiaan. Matemaatikot eivät edes kykene sanallistamaan kaikkea informaatiota, mitä he käyttävät työssään. Matemaatikkojen sisäinen ajattelukieli, mikäli se edes on kieli, ei ole sama kieli kuin se looginen kieli, mitä he matemaattisessa työssään tuottavat. On kuitenkin mahdollista listata kaikki todistuksen kannalta *välttämättömät* lemmat.[1] Lakatos haluaa kiinnittää huomiota tapauksiin, joissa taustatiedot ja -oletukset muuttuvat yhtäkkiä huomionarvoiseksi tiedoksi[28, 45, alaviite 3].

Lakatos tarjoaa todistusten ja kumoajien metodinsa uudeksi, paremmaksi, käytännön työskentelyyn pohjautuvaksi vaihtoehdoksi euklidisille käytännöille. Euklidisen koulukunnan ideaalien mukaisessa tutkimustyössä vastaesimerkki kumoaa itse väittämän, kun taas todistusten ja kumoajien metodissa vastaesimerkin vaikutusalue on todistus ja sen oletukset. Euklidisen ideaalin mukainen todistettavan lauseen hylkääminen ei kuitenkaan usein ole haluttu lopputulos, vaan matemaatikko ennemmin haluaa "pelastaa"tutkimuksensa. Lakatos esittelee eri taktiikoita, joilla matemaatikko voi puolustautua vastaesimerkkejä vastaan historiallisiin esimerkkeihin perustuen. Lakatos esittelee nämä puolustusmenetelmät vähemmän hedelmällisinä kontrasteina omalle todistusten ja kumoajien metodilleen rakentaen matematiikan tieteenalan metodologian historiallista kehitystä, kulminaatiopisteenä todistusten ja kumoajien metodi.

Teoksen *Proofs and Refutations* runko muodostuu näiden puolustautumismenetel-

[1] Esimerkiksi Metamath-kielellä kirjoitetuista todistuksista on koottu julkinen tietokanta, jossa jokainen todistus on palautettavissa ZFC-järjestelmän aksioomiin.[33]

mien esittelystä historiallisine esimerkkeineen sekä niiden metodologisen merkityksen pohdinnasta. Teksti rakentuu kohti todistusten ja kumoajien metodia ja sen edellä esiteltyä sääntömuotoa. Allaoleva vapaasti suomentamani kaavio esittelee tämän rakenteen[28, v]:

- Yleiset vastaesimerkit teoreeman uhkana
  1. Antautumisen metodi: teoreeman hylkääminen
  2. Hirviöiden poissulkemisen metodi: vastaesimerkin hylkääminen
  3. Poikkeusten poissulkemisen metodi: valikoiva hylkääminen ja määrittelyiden rajaaminen varman päälle pelaamisena
  4. Hirviöiden hienosäädön metodi
  5. Lemman olettamisen metodi: todistuksen luoma teoreema
- Yleiset vastaesimerkit todistuksen uhkana: huolellisuuden ongelma
  1. Hirviöiden poissulkeminen teoreeman puolustamiseksi
  2. Piilotetut lemmat
  3. Todistusten ja kumoajien metodi
  4. Teoreeman ja huolellisuuden käsitteiden venyminen todistuksen tarkastelussa
- Paikalliset vastaesimerkit sisällöntuottajina
  1. Sisällön lisääminen yhä syvenevillä todistuksilla
  2. Pyrkimys lopullisiin todistuksiin sekä niitä vastaaviin välttämättömiin ja riittäviin ehtoihin
  3. Eri todistukset tuottavat eri teoreemoja

Tämä rakenne on Lakatosin tarkasti suunnittelema ja pedagogisesti tarkoituksenmukainen. Lakatos rakentaa teesinsä osana kiinnostavaa fiktiivistä dialogia lukijan mielenkiinnon ylläpitämiseksi. Dialogin henkilöhahmot ovat karikatyyrisiä, mikä auttaa lukijaa havaitsemaan usein alitajunnan tasolle jäävien perustavanlaatuisten oletuksen vaikutuksen tutkimustyöhön. Hahmot kuitenkin muuttavat ja päivittävät mielipiteitään keskustelujen edetessä, missä näkyy Lakatosin kanta dogmatismia vastaan. Dialogi rakentuu historiallisten esimerkkien, niiden falsifioimisen ja käsitteiden tarkastelun pohjalle. Tämä popperilainen lähestymistapa luo kiinnostavan kontrastin tavanomaiseen, formalistiseen matemaattisen tiedon esitysmuotoon motivoiden lukijaa.

David Corfield kiteyttää todistusten ja kumoajien menetelmän seitsemään vaiheeseen. Olen suomentanut tämän lainauksen samoin kuin aiemman todistusten ja kumoajien metodia suoraan esittelevän lainauksen. Corfieldin esitys eroaa lakatosin omasta esityksestä. Aiempi lainaus oli Lakatosin itsensä kirjoittama ja esitteli todistusten ja kumoajien metodin normatiivisena säännöstönä tai toimenpideketjuna matemaattista työskentelyä varten. Corfieldin teksti puolestaan antaa kuvan todistusten ja kumoajien metodista yhäkin toimenpideketjuna (methodological steps [2, 5]), mutta *kuvaillen* sitä ulkoapäin katsottuna. Lakatos esittelee metodin 1960-luvulla matematiikanfilosofian ja metamatematiikan eturintamassa, kun taas Corfield puolestaan selittää Lakatosin metodia historiana. Lakatosin normatiivinen esitys keskittyy toimenpiteisiin ja tekemiseen eli verbeihin, kun taas Corfieldin deskriptiivinen esitys tarjoaa substantiiveja, eli välivaiheita. Mielestäni prosessin kehämäisyys ilmenee voimakkaammin Lakatosin alkuperäisessä normatiivisessa esityksessä kuin Corfieldin kuvailussa, joka antaa ymmärtää prosessin olevan ohi kun viimeinen välivaihe on saavutettu. Corfieldin esityksessä välivaiheen 2 sulkeissa oleva todistuksen määritelmä kuuluu lainaukseen ja on Corfieldin oma.

1. Hiomaton otaksuma.
2. Todistus (karkea ajatuskoe tai päätelmä, joka jakaa hiomattoman otaksuman alilauseisiin ja lemmoihin).
3. Yleiset vastaesimerkit.
4. Todistuksen uudelleentarkastelu. Ongelmallinen lemma löydetään. Ongelmallinen lemma on voinut olle aiemmin piilossa tai ymmärretty väärin.
5. Vastalöydetyn ongelmallisen lemman etsiminen muiden lauseiden todistuksista.
6. Tarkastelu, pätevätkö alkuperäisen otaksuman aiemmin hyväksytyt seuraamukset enää sen kumoamisen jälkeen.
7. Vastaesimerkeistä tehdään uusia esimerkkejä, avaten uusia tutkimussuuntia. [2, 5][8]

Corfieldin muotoilua voidaan käyttää teoksen *Proofs and Refutations* esimerkkien ilmaisuun (alla yksi tutkimusketju teoksen pääteoreemasta, esimerkkejä olisi mahdollista konstruhoida useita):

1. Hiomaton otaksuma: Kaikille monikulmioille pätee ehto $V - E + F = 2$ (katso luku 2.2).
2. Todistus: Cauchyn kuminen kuutio -ajatuskoe.
3. Yleiset vastaesimerkit: sylinteri ja tähdeksi jatketuilla viisikulmioilla päällystetty dodekaedri [28, 16,31].

4. Todistuksen uudelleentarkastelu: yhtenäisyyden vaatimus piilotettuna lemmana ja lävistäjän määritelmä [28, 43-47].
5. Vastalöydetyn ongelmallisen lemman etsiminen muiden lauseiden todistuksista: yhtenäisyyden vaatimus lähtökohta-oletuksena Poincarén todistuksessa[28, luku 2].
6. Tarkastelu, pätevätkö alkuperäisen otaksuman aiemmin hyväksytyt seuraamukset enää sen kumoamisen jälkeen: kyllä, suppeammalla vaikutusalalla[28, luku 2].
7. Vastaesimerkeistä tehdään uusia esimerkkejä, avaten uusia tutkimussuuntia: monitahokkaiden luokittelu [28, esim. luku 1. osio 7.] ja Poincarén lineaarialgebra-todistus [28, luku 2].

Kokonaisvaltaisten esimerkkien ammentaminen teoksesta *Proofs and Refutations* on kuitenkin hieman keinotekoista. Dialogi keskittyy yksittäisten vaiheiden perusteluun ja yksityiskohtaiseen metamatemaattiseen tarkasteluun. Matematiikan historiasta löydetyt esimerkit, jotka ilmaistaan dialogin alaviitteissä, ovat hyvin rajattuja. Teoksen loppuliitteessä esitellään lukujonon suppenemisen tutkimusta historiallisen aineiston kautta esimerkkinä todistusten ja kumoajien metodin toiminnasta käytännössä. Tapaa, jolla Lakatos hyödyntää matemaattis-historiallista aineistoa käsitellään alaluvussa 5.1.

Lakatosin todistusten ja kumoajien metodin tärkeimpiä ansioita on vastaesimerkkien tulkitseminen hyödyllisiksi ja tutkimusta edistäviksi tuloksiksi. Tämä on popperilaisen, falsifikaatioon nojaavan tieteenfilosofian soveltamista matematiikkaan. Karl Popperin ajattelussa falsifikaatio on ajatusketjun päätöksenä päämäärä sinänsä. Lakatos puolestaan kohtelee matemaattista vastaesimerkkiä, joka euklidisen koulukunnan mukaisesti tulkittuna olisi popperilainen falsifikaatio, välietappina tai uutena alkuna matemaattisessa tutkimuksessa. Tässä on nähtävissä hegeliläinen dialektiikka: teesi (matemaattinen lause tai todistus) kohtaa antiteesin (vastaesimerkki), joiden yhdistelmänä muodostuu synteesi (uusi, paranneltu lause tai todistus).

Vastaesimerkki, eli falsifikaatio, nähdään Lakatosin mukaan itsessään kiintoisana tarkastelun kohteena ja uutta sisältöä tuottavana ilmiönä. Lakatos soveltaa tätä popperilaista ajatusta euklidisen koulukunnan käytäntöihin ja tavoitteisiin. Tässä sovelluksessa kiinnostavaa on tapa, jolla Lakatos perustelee sen. Samoin kuin Hilbert motivoi formalisminsa olemassaolevien käytäntöjen (logisismi ja intuitionismi) ongelmilla, Lakatos motivoi tutkimuksensa euklidisen ajattelutavan ja formalismin ongelmilla. Näin hän asettaa oman todistuksien ja kumoajien metodinsa metamaattiseksi kehitysaskeleeksi Hilbertin toimintatavoista. Formalismin ongelmat eivät kuitenkaan olleet samanlaisia kuin logisismin tai intuitionismin (jotka itsessäänkin olivat ratkaisevasti erilaisia lähestymistapoja matematiikkaan). Logisismin ongelmallisuus oli ilmaistavissa formaalilla, loogisella kielellä (paradoksit) ja intuitionismin ristiriitaa formalismiin nähen voitiin tarkastella niiden käyttämien lukuteorian ja logiikan aksioomien eroavaisuuksina.[21, §11-§14] Vastakkainasettelut ovat siis abstrakteja ja laaja-alaisia. Lakatos puolestaan keskittyy tapaan, jolla matemaatikot tekevät ruohonjuuritason päättelytyötä sekä yksittäisiin historiallisiin esimerkkeihin. Hän nostaa esiin matemaatikkojen erimielisyyksiä, ja heidän mielenmuutoksiaan, yleensä tekstin alaviitteissä.[28, 31]

Lakatosin huomio keskittyy formaalin kielen rakenteen ja täsmällisen käytön tarkastelun sijasta luonnolliseen kieleen, jolla formaalia kieltä kuvaillaan sekä tapoihin, joilla matemaatikot soveltavat formaaleja järjestelmiä matematiikassa. Hilbertin formalismi voidaan tulkita normatiiviseksi ohjeistukseksi matemaattiseen työskentelyyn, sisältäen ohjeistuksen käytännön matemaattiseen työhön: ristiriidattomuustodistukset. Tämä on formalismin positiivinen heuristiikka, Lakatosin käyttämällä terminologialla ilmaistuna. Todistusten ja kumoajien metodi puolestaan voidaan tulkita *kuvailuksi* matemaattisesta työskentelystä. Tämän deskription pätevyys on kyseenalaista. Todistusten ja kumoajien metodi voidaan muotoilla normatiiviseksi ohjeistukseksi matemaattista työskentelyä varten, mutta joka ei vaadi itseään tarkasteltavan absoluuttisena ohjeistuksena, vaan pikemminkin ohjenuorana. Teoksen *Proofs and Refutations* sisältämä todistusten ja kumoajien metodi on matemaattista tutkimustyötä selittävä kokonaisuus, jota perustellaan *rationaalisella rekonstruktiolla.* Rationaalista rekonstruktiota ja Lakatosin tieteenhistoriallisen kuvauksen pätevyyttä käsitellään luvussa 5, etenkin alaluvussa 5.1.

Todistusten ja kumoajien metodin esittelyn jälkeen se asetetaan teoksen *Proofs and Refutations* dialogissa monitahoisen kritiikin kohteeksi. Teos esittelee metodin enemmänkin näkökulmana tai selityksenä kuin normina, jota matemaatikkojen tulisi noudattaa. Dialogin ensimmäisen osion lopussa painotetaan historiallista näkökulmaa matematiikkaan eikä dialogissa saavutettuja havaintoja, ohjenuoria ja menetelmiä. Käsitteiden venytys (englanniksi *"concept-stretching"*) on tapa, joka dialogissa havaitaan sopivaksi reaktioksi todistusten ja kumoajien metodin soveltamiseen: matemaattisten käsitteiden määritelmiä muutetaan tarvittaessa (sekä luonnollisessa että formaalissa kielessä) ristiriitojen ratkaisemiseksi. Lakatos väittää käsitteiden venyvyyden hyväksymisen olleen ja olevan merkittävä muutos matematiikan tieteenalalla:

TEACHER: *You are wrong, Beta. [Mathematicians]* did *accept it, and their acceptance was a turning point in the history of mathematics.* This revolution in mathematical criticism changed the concept of mathematical truth, changed the standards of mathematical proof, changed the patterns of mathematical growth![28, 104]

Ylläolevaan katkelmaan liittyy alaviite, jossa Lakatos selittää mahtipontista väitettä (molemmissa lainauksissa korostukset ovat Lakatosin omia):

The concepts of criticism, counterexample, consequence, truth and proof are inseparable; when they change, the primary change occurs in the concept of criticism *and changes in the others follow.*[28, 105, alaviite 1]

Aiemmin tekstissä Lakatos esittelee historiallisuuden ja kielellisyyden murtautumista matematiikkaan dialogin hahmojen erimielisyydellä. Dialogissa henkilöhahmo Alpha edustaa euklidista ajattelua, jossa saavutettu matemaattinen totuus on ikuista. Alphan ajattelu seuraavassa katkelmassa ilmentää myös kartesiolaiseen "kirkkaan ja selkeän"ajatuksen ihannetta. Katkelma valaisee kielellis-historiallisen tiedon ja matemaattisen tiedon vastakkainasettelua matematiikan tieteenalan kehityksessä

LAMBDA: *So you are not interested either in counterexamples, or in proof-analysis, or in lemma-incorporation?*

ALPHA: *That is right. I reject all your rules. I propose one single rule instead:* Construct rigorous (crystal-clear) proofs.

LAMBDA: *You argue that the* rigour of proof-analysis *is unattainable. Is* the rigour of proof *attainable? Cannot 'crystal clear' thought-experiments lead to paradoxical or even contradictory results?*

ALPHA: *Language is vague, but thought can achieve absolute rigour.*

LAMBDA: *But surely 'at each stage of evolution our fathers also thought they had reached it? If they deceived themselves, do we not likewise cheat ourselves?'*[1]

ALPHA: *'Today absolute rigour is attained.'*[2]

[*Giggling in the classroom.*]

GAMMA: *This theory of 'crystal-clear' proof is sheer psychologism!*

ALPHA: *Better than the logico-linguistic pedantry of your proof-analysis!* [28, 52]

D.A. Anapolitanos esittelee esseessään *Proofs and Refutations: A Reassessment* Lakatosin todistusten ja kumoajien metodiin kohdistuvaa kritiikkiä. [1] Matematiikan historiallisuuden ja matematiikan tutkimuksen dynaamisuuden tiedostaminen on tärkeää niin matematiikan, historian kuin filosofiankin näkökulmista. Anapolitanos väittää, että matemaattisen tutkimus- ja löytöprosessin mallintaminen

[1] Lambda lainaa matematiikko Poincaréa.[37, 214]

[2] Alpha lainaa samaa Poincarén teosta kuin Lambda.[37, 216]

(rational reconstruction) Lakatosin metodin mukaiseksi on hyvin vaikeaa ja voi onnistua parhaimmillaankin vain osittaisesti. On merkittävää, että Anapolitanos käyttää kritiikinsä selittämiseen termiä "rekonstruktio"syventymättä käsitteen ongelmiin, joita esitellään tämän tutkielman luvussa 5.1.

Anapolitanoksen mukaan matematiikan tutkimusprosessin kuvaaminen lakatosilaisittain sisältää kaksijakoisen tavoitteen: yhtä aikaa kuvailla matemaattisen löytämisen prosessi sekä laatia selittävä malli sen rakenteesta. Tämän tavoitteen väitetään olevan liian monimutkainen. Anapolitanos erittelee esseessään yksittäisiä syitä Lakatosin metodin liialliseen kompleksisuuteen. Näistä esitellään tässä luvussa selkeimmät päälinjat.

Lakatos rakentaa todistusten ja kumoajien metodin melko yksipuolisen aineiston perusteella: 1800-luvun geometrian eräs erityinen ongelma (monitahokkaiden Euler-luokittelu). [1] Herää väistämättö kysymys, tapahtuuko muilla matematiikan osa-alueilla tutkimuskysymysten muodostus eri tavalla? Ehkä niissä vastaesimerkit eivät ole yksiselitteisiä tai niiden syntetisointi osaksi alkuperäistä väitettä ei ole aina mahdollista. Teoksen *Proofs and Refutations* postuumit kokoajat ovat tiedostaneet tämän kritiikin, ja vastaavat siihen esipuheessaan väittäen, että teoksen myöhempien lukujen tulisi hälventää nämä epäilykset [28, x]. Teoksen liitteissä, jotka laajentavat Lakatosin alkuperäistä, osissa julkaistua dialogia, todellakin tuetaan todistusten ja kumoajien metodia muullakin historiallisella aineistolla kuin monitahokkaiden Euler-luokittelulla. Lakatosin historiallisen aineiston käsittely ei kuitenkaan ole ongelmatonta, mikä huomataan alaluvussa 5.1.

Luku 2 ja liite 1 ovat postuumisti koottuja Lakatosin jättämän aineiston pohjalta, eikä hän itse ehtinyt viimeistellä niitä huolelliseen tapaansa. Luvussa 2 esitellään monitahokkaiden luokittelun ongelma vektorialgebran kielellä, eli suoritetaan kääntäminen kielijärjestelmästä toiseen. Luvun 2 kontekstissa kielijärjestelmät, joiden välillä väitelauseita käännetään, ovat matematiikan eri osa-alueiden teorioita. Matemaattisen teorian soveltamista sen alkuperäisen vaikutusalueen ulkopuolle pidetään yleisesti teorian ansiona tai vahvistuksena sen hyödyllisyydestä. Modernin vektorialgebran käsitteistö ja työkalut ovat laajemmalti tunnettuja ja arvostettuja matematiikan työvälineitä kuin 1800-luvun avaruusgeometrian paikoin hyvinkin ristiriitainen käsitteistö. Kääntämällä alkuperäinen lause vektorialgebran kielijärjestelmään löydetään uusi, arvostettu ja voimakas käsitteistö monitahokkaiden kuvailuun. Käsitteistön voimakkuus ilmenee aksioomien valinnan selkeänä ilmenemisenä ja vaihtoehtoisten valintojen vaikutusten vertailtavuutena sekä aiemman kielijärjestelmän piirissä syntyneiden kysymysten helppona ratkeavuutena. Tosin näiden kysymysten vastaukset osoittautuivat olevan sidoksissa aksioomien valintaan, mikä sopii täydellisesti Lakatosin käsitykseen matematiikan epistemologiasta (aiheesta lisää luvuissa 5, 6 ja 7).

Anapolitanos kyseenalaistaa Lakatosin menetelmän yleistettävyyden. Vaikka menetelmä kuvaileekin joitain erityisiä ongelmanratkaisuprosesseja erinomaisesti, voidaanko sillä kuvailla kaikkea matemaattista ongelmanratkaisua? Anapolitanos väittää, että todistusten ja kumoajien menetelmä ei tee oikeutta tilanteille, joissa matemaattisessa tutkimustyössä tapahtuu paradigman muutos. Näissä "Kriisitilanteissa"käsitteellisiä viitekehyksiä muutetaan aktiivisesti. Anapolitanoksen mukaan Lakatosin menetelmä ei selitä, millä perusteella kriisitilanteesta voitollisena (laajimmalti tuettuna) selviytynyt kielijärjestelmä valittiin, esimerkiksi miksi Zermelo-Fraenkel aksioomajärjestelmä (ZFC) saavutti valta-asemansa Gödelin epätäydellisyysteoreemojen aiheuttamassa kriisissä. Todistusten ja kumoamisten metodi ei selitä ja priorisoi logiikan ulkopuolisia syitä tutkimuksessa tehtävissä valinnoissa, vain toteaa niiden olemassaolon ja tarjoaa niitä kriteereiksi matemaattisten väitteiden laadun vertailuun. Todistusten ja kumoajien metodi olettaa, että todistuksia ja kysymyksenasetteluja innovoidaan luovasti, mutta ei ota kantaa tähän prosessiin. Selitysten vertailussa tutkijat pohtivat monenlaisia syitä, kuten teoreemojen ja todistusten esteettisiä eroja, tuttuuttaan eri selityksien välillä, jatkuvuuden tunnetta aikaisempien ja uusien tulosten välillä, tulosten intuitiivista uskottavuutta sekä jälkikäteen tarkasteltuna lauseiden hedelmällisyyttä uusien lauseiden ja teorioiden tuotannossa. [1]

Lakatosin menetelmä ei myöskään ennusta, minkälaisilla tutkimuskysymyksillä ristiriitatilanteista tai paradokseista voidaan päästä eteenpäin. Todistusten ja kumoajien metodin positiivinen heuristiikka (sääntö 4) toimii vain ruohonjuuritasolla yksittäisten teoreemojen työstämisessä. Laajempien teoriakokonaisuuksien kehittämisessä tämän heuristiikan soveltaminen ei ole mielekästä erilaisen lähdemateriaalin takia. Matemaatikot eivät käsittele laajoja matemaattisia teorioita yksittäisten teoreemojen tapaan, vaikka molemmat olisivatkin redusoitavissa samanmuotoisiksi, vain erilaajuisiksi loogisiksi päättelyketjuiksi. Vakiintuneiden teorioiden lähtökohtaoletuksia ei olla valmiita asettamaan kyseenalaisiksi todistusten ja kumoajien metodin vaatimalla tavalla. Vaikka niiden kyseenalaistaminen voi johtaa uuden, hienostuneemman järjestelmän syntyyn Lakatosin mallin mukaisesti (aksioomajärjestelmien laajennoksia käsitellään luvussa 7), niin toisinaan teorioiden erot eivät ole puhtaan matemaattisia, vaan filosofisia. Todistusten ja kumoajien metodi ei tarjoa positiivista heuristiikkaa, joka toimisi matemaattisten teorioiden *filosofiseen* kehittämiseen tai vertailuun. Esimerkiksi Brouwerin intuitionalistiseen kielijärjestelmään ei voida päätyä Hilbertin formalistisesta kielijärjestelmästä Lakatosin menetelmää soveltamalla.

Todistusten ja kumoajien menetelmä vaikuttaa jättävän uusien, nerokkaan luovien oivallusten ja alkuperäisten kielijärjestelmien keksimisen selitysalueensa ulkopuolelle, sillä se olettaa, että matemaattinen tutkimus alkaa aina naiivista hypoteesista. Tutkimustyö voi saada alkunsa myös esimerkiksi äkillisestä oivalluksesta tai tarpeesta kehittää uusia termejä ja määritelmiä ajankohtaisesti kiinnostavan matematiikan osa-alueen tutkimiseksi.

Vaikka Lakatos ansiokkaasti nostaa esiin matemaattisen tutkimustyön historiallisuuden ja monitulkintaisuuden, hän virheellisesti olettaa matematiikan tutkimuskysymysten olevan kirkkaita ja selkeitä. Ironisesti Lakatos jättää huomiotta matematiikan filosofisen luonteen laajemmalla teorioiden ja suuntausten tasolla, vaikka mikrotason matemaattisen työskentelyn arvokysymysten ja erehtyväisyyden paljastamisessa hän onkin edelläkävijä. Toisaalta Lakatos toistuvasti painottaa keskittyvänsä juurikin mikrotason työskentelyyn, vaikka tarjoaakin todistusten ja kumoajien metodia matematiikkaa matematiikan rationaalisuutta laajalti selittäväksi. Tämän tehdessään Lakatos painottaa mikrotason työskentelyä liikaa jättäen laajemmat rationaaliset rakenteet huomiotta. Hän palaa näihin teemoihin muissa julkaisuissaan, kuten artikkeleissa ja teoksessa *MSRP*. Matematikan makrotason rationaalisuus, laajojen matemaattisten teorioiden arvottaminen ja vertailu sekä *MSRP* ovat tämän tutkielman rajauksen ulkopuolella, mutta Lakatosin muita matematiikanfilosofisia artikkeleita hyödynnetään lähteinä seuraavissa luvuissa. Etenkin Lakatosin varhaisen tuotannon artikkeli *Infinite regress and foundations of mathematics* täydentää teoksen *Proofs and Refutations* matematiikanfilosofista sisältöä ratkaisevasti.

Todistusten ja kumoajien menetelmä pyrkii kehittämään tutkimuskysymystä selkeämpään ja kumoajat huomioivampaan muotoon, muun muassa eksplikoimalla aiemmin "piilotettuja"lemmoja ja asettamalla vastaesimerkit vuoropuheluun alkuperäisen väitteen kanssa. Tässä todistusten ja kumoajien metodi muistuttaa hegeliläistä dialektiikkaa: väite ja sen vastaesimerkki yhdistetään uusiksi lähtökohtaoletuksiksi, joista rakennetaan uusi, tiedollisesti parempi väite.

Tarkastellessa todistusten ja kumoajien metodia voidaan esittää seuraavat apukysymykset, joiden avulla voidaan paikallistaa ja tutkia Lakatosin matematiikanfilosofiaa: Mitä tarkoitusta varten todistusten ja kumoajien metodi on luotu tai mitä sen käytöllä pyritään saamaan aikaiseksi? Entä kuinka hyvin metodi onnistuu tässä? Kaksi näkökulmaa näihin kysymyksiin vastaamisessa on:

1. Metodin merkitys teoksen *Proofs and Refutations* dialogin kontekstissa
2. Metodin merkitys matemaatikoille tosielämän tiedeyhteisössä

Todistusten ja kumoajien merkitys matemaatikoille tosielämän tiedeyhteisössä voi olla kahdenlainen: metodi voidaan tulkita kuvaukseksi tosiasiallisesta, käytännössä jo nyt tapahtuvasta mikrotason matemaattisesta työskentelystä tai normatiiviseksi ohjeeksi sitä varten. Näitä näkökulmia käsitellään seuraavissa luvuissa, varsinkin alaluvuissa 5 ja 5.1. Merkityksellistä on myös tarkastella, kuinka hyvin todistajien ja kumoajien metodi onnistuu tehtävissään.

5 Matematiikan rationaalisuus

Lakatos pohjustaa todistusten ja kumoajien metodin historiallisilla esimerkeillä osana teoksen *Proofs and Refutations* dialogia. Historialliset esimerkit käsittelevät enimmäkseen avaruusgeometriaa ja matemaatikkojen mikrotason työskentelyä Eulerin kaavan $V - E + F = 2$ todistamiseksi. Teoksen loppuosa sisältää toisenkin tapaustutkimuksen, jossa historiallinen esimerkki tulkitaan todistusten ja kumoajien metodin kautta: Cauchyn ja hänen aikalaistensa määritelmät ja tulokset lukujonon tasaisesta suppenemisesta[28, liite 1]. Lakatos kutsuu tätä tutkimusmenetelmää nimellä rationaalinen rekonstruktio. Tässä alaluvussa esittelen rationaalisen rekonstruktion tutkimusmenetelmänä Lakatosin kontekstissa ja Teun Koetsierin kritiikin menetelmää kohtaan. Rationaalisen rekonstruktion huomataan jäävän kauaksi sen itselleen asettamista ominaisuuksista, mutta lievennettynä olevan käyttökelpoinen työkalu.

Vuonna 1970 julkaistussa artikkelissaan *History of Science and Its Rational Reconstructions* Lakatos selittää käsityksiään tieteenfilosofiasta, varsinkin rationaalisesta rekonstruktiosta ja tieteenalojen rationaalisesta toiminnasta sinänsä. [26] Käsittelen tässä alaluvussa enimmäkseen kyseistä tekstiä. Artikkelin julkaisuajankohta on hyvin myöhään Lakatosin tuotannossa ja se käsitteleekin enimmäkseen Lakatosin tekstin *Methodology of Scientific Research Programmes* (MSRP) ajatuksia. Näkökulma tieteestä rationaalisena toimintana, jonka rationaalisuutta selittää parhaiten tieteenalojen sisäinen historiankirjoitus löytyy kuitenkin selkeänä jo teoksesta *Proofs and Refutations*. Näiltä osin vuoden 1970 teksti on mielestäni sovellettavissa myös Lakatosin vanhemman tuotannon selitykseen.

Lakatosin mukaan jokainen rationaalinen rekonstruktio sisältää tieteenalalle luonteenomaisen rakenteen tieteellisen tiedon rationaalisesta kasvusta. Nämä rakenteet ovat normatiivisia, eli ohjeistuksia, joita tieteilijöiden odotetaan noudattavan tiedostamattaankin. [26, 105] Lakatos ei selitä miksi hän kuvailee rationaalisten rekonstruktioiden olevan normatiivista. Tarjoan itse kaksi selitysmallia tälle:

1. Rationaalisuus ja tiedon kasvu koko tiedeyhteisön jakamina arvoina
2. Jälkiviisauden tuoma näkökulma: rationaalinen rekonstruktio rakennetaan näyttämään normatiiviselta

Normatiivisuusväitteensä jälkeen Lakatos jatkaa väittämällä, että rationaaliset rekonstruktiot vaativat empiiriseen aineistoon perustuvua teorioita jäljelle jäävän ei-rationaalisen toiminnan selittämiseksi. Lakatos ei näe tätä ongelmana, vaan todellisen historian rikkautena verrattuna siitä tehtyihin rationaalisiin rekonstruktioihin. [26, 105] Tarjoan esimerkiksi empiriikkaa vaativasta ei-rationaalisesta tieteellisestä toiminnasta sähkövirran kulkusuunnan virtapiirissä.

Sähkövirran matemaattinen selittäminen yhtälöiden ja symbolien avulla oli kehittynyt 1700-luvun lopulla ja 1800-luvun alkupuolella merkittävästi. Tällöin myös määriteltiin sähkövirran suunta katodilta anodille, eli jännitelähteen positiiviselta navalta negatiiviselle (huom. anakronistinen terminologia). Elektronit hiukkasina kuitenkin havaittiin vasta vuonna 1897 J. J. Thomsonin katodisädekokeissa. Tämä johti nykypäivän oppikirjoissa esiteltävään selitykseen sähkövirrasta elektronien virtana jännitelähteen negatiiviselta navalta positiiviselle. Nykypäivänäkin sähkövirran kulkusuunnasta käytetään laskukaavoissa ja yhtälöissä vanhempaa suuntakäytäntöä positiiviselta navalta negatiiviselle, aiheuttaen ihmetystä aloittelevissa sähkömagnetismin opiskelijoissa, jotka pitävät suuntasääntöä epärationaalisena. Luokkatilanteessa sähkömagnetismin opettaja yleensä selittää tämän näennäisen epärationaalisuuden historiallisilla syillä.

Lakatosin mukaan tieteenalan ulkopuoliset historialliset selitykset tieteenalan sisäisille asioille eivät ole rationaalisia. Seuraavassa katkelmassa hän väittää, että tieteenalan sisäinen historiankirjoitus on ensisijaista ulkoiseen nähden. Toinen vahva katkelmassa esitetty väite on, että tieteellisen tutkimuksen logiikka selittää täysin tieteellisen tiedon karttumisen rationaalisuuden. Käänteisesti ilmaistuna: tieteellisen tiedon karttumisen rationaalisuudessa ei ole mitään, mitä ei voisi selittää tieteellisen tutkimuksen logiikalla. Kaikki järkiperusteisen ajattelutoiminnan tuottama tieteellinen tieto on siis tieteellisen tiedontuottamisen rakenteen ansiota. Tällä väitteellä on mielestäni merkittävä implikaatio esimerkiksi tekoälyn tuottaman tutkimusaineiston hyväksymisessä: Jos tietokoneen tuottama tutkimus noudattaa samoja tiedontuottamisen rakenteita (ja käytäntöjä) kuin ihminen, on tutkimus yhtä rationaalinen kuin ihmisen tuottama aineisto.

The history of science is always richer than its rational reconstructions. But rational reconstruction or internal history is primary, external history only secondary, since the most important problems of external history are defined by internal history. *External history either provides non-rational explanation of the speed, locality, selectiveness etc. of historic events* as interpreted *in terms of internal history; or, when history differs from its rational reconstruction, it provides an empirical explanation of why it differs. But the* rational *aspect of scientific growth is fully accounted for by one's logic of scientific discovery.* [26, 105, kursivointi Lakatosin]

On myös esitettävissä vaihtoehtoinen tulkinta lainauksen viimeiselle virkkeelle: Ajattelijan edustama matematiikan tutkimuslogiikka riittää selittämään tieteellisen tiedon karttumisen rationaalisuuden. Tiedonkarttumisen rationaalisuus on tämän tulkinnan piirissä hyvin helposti ja kokonaisvaltaisesti selitettävissä oleva asia. Tarvitaan vain jokin looginen rakenne, joka mallintaa tiedonkarttumista, ja ilmiön rationaalisuus on selitetty. Tämä jälkimmäinen selitys kohtaa tosin ristiriidan Lakatosin itsensä antamasta esimerkistä tiedontuotannon historiallisista osista, jotka ovat hänen mukaansa epärationaalisia (esim. aiemmin esitelty sähkövirran suunta). On siis olemassa tiedonkarttumisen malleja, joiden kuvailema toiminta ei ole rationaalista. Tämän vuoksi mielestäni ensimmäinen tulkinta Lakatosin väittämästä on uskottavampi: tiedonkarttumisen rationaalisuus on täysin selitettävissä tietoisesti asetetuilla tieteentekemisen työkäytännöillä.

Huomattavaa on myös, että Lakatos nostaa esiin mahdollisuuden rationaalisen rekonstruktion ja historiankirjoituksen välisille eroavaisuuksille. Historiankirjoitus on tällöin empiiristä ja rationaalinen rekonstruktio rationaalista. Tieteellisen tiedon karttuminen kuitenkin selittyy kokonaan rationaalisella rekonstruktiolla. Rationaalisen rekonstruktion selitysvoimaa ja suhdetta historiankirjoitukseen käsitellään alaluvussa 5.1.

Lakatos itse nostaa esiin kahden rationaalisen rekonstruktion eroavaisuuden: analyysi-synteesin tutkimusmetodin kehittymisen antiikin kreikan matematiikassa. Hän vertaa omaa rationaalista rekonstruktiotaan ja johtopäätöksiä tämän metodin kehittymisestä Jaakko Hintikan ja Unto Remeksen tutkimukseen samasta aiheesta [18]. Lakatosin tulkinnan mukaan Hintikka ja Remes olettavat analyysi-synteesin metodin olleen heuristinen malli Eukleideen geometriassa *sen jälkeen kun* kyseinen geometrian teoria oltiin jo ilmaistu aksiomaattisessa muodossa. Toinen heidän merkittävä oletuksensa Lakatosin mukaan on ajatus siitä, että matemaattisten todistuksien päättely on aina pätevää ja todistuksissa käytetyt lemmat aina mahdollisia todistaa. Lakatosin omassa rekonstruktiossa kreikkalaisen matematiikan kehittymisestä esi-euklidisesta ajasta Eukleideen *Alkeet*-teokseen analyysi-synteesin menetelmä on heuristinen työkalu, jolla kreikkalaiset kehittivät lukemattomien yrityksien ja erehdysten kautta Babylonialaisilta ja Egyptiläisiltä perittyä tietopohjaa, kunnes se oli kehittynyt Eukleideen *Alkeet*-teoksen muotoon. Lakatos esittää Eukleiden *Alkeet*-teoksen matematiikan kehittymisen todistusten ja kumoajien metodin terminologian kautta. [26, 99-100] Näin Lakatos sekä oikeuttaa todistusten ja kumoajien metodin olemassaoloa matemaattisen tutkimustyön selittäjänä että soveltaa sitä historialliseen aineistoon, tuoden esiin uudenlaisen tulkinnan antiikin kreikan aatehistoriasta. Seuraavassa alaluvussa käsitellään rationaalisen rekonstruktion selitysvoimaa ja faktuaalisuutta.

5.1 Lakatosin rationaalisten rekonstruktioiden luokittelu ja merkitykset

Teun Koetsier tarkastelee teoksessaan *Lakatos' Philosophy of Mathematics: A Historical Approach*[22] Lakatosin rationaalisen rekonstruktion menetelmää kriittisesti. Koetsier myös määrittelee rationaalisen rekonstruktion systemaattisesti. Seuraavat tekstikappaleet ovat vapaasti suomennettu tiivistelmäni Koetsierin teoksen 1. luvun alusta (valikoiden sivuilta 12-16).

Matematiikkaa voidaan tarkastella prosessina, eli *matemaattisten toimenpiteiden* jonona. Kun jotain tiettyä matemaattisten toimenpiteiden jonoa kuvaillaan, on kyseessä *konstruktio matematiikan kehityksestä.* Jos konstruktio viittaa matemaattisten toimenpiteiden jonoon, joka oikeasti tapahtui historiassa (tämä historia voi olla hyvinkin lähellä nykyhetkeä), määritellään kyseessä olevan *rekonstruktio matematiikan kehityksestä.* Rekonstruktiot ovat tietynlaisia konstruktioita, mutta kaikki konstruktiot eivät ole rekonstruktioita. Esimerkiksi opetuksessa käytettävät pedagogiset esitelmät ovat usein konstruktioita, mutta eivät yleensä ole rekonstruktioita historiallisesta kehityksestä. [22, 12]

(Re)konstruktiota voidaan kutsua rationaaliseksi, jos se perustuu selkeästi johonkin matemaattiseen metodologiaan (implisiittiseen säännöstöön) ainakin osittain. Rationaalisella (re)konstruktiolla on yleensä seuraavanlainen rakenne: Se koostuu jonosta matemaattisia toimenpiteitä ja niiden tuloksia, mukaanlukien negatiiviset tulokset. Matemaattisiin toimenpiteisiin liittyvät implisiittiset säännöt suosittelevat usein tietynlaista matemaattista käyttäytymismallia aiemmin tehtyjen toimenpiteiden ja tulosten perusteella (konstruktio esittelee nänä yhteydet). Matemaattiseen käyttäytymismalliin vaikuttavat usein myös muut tekijät, esimerkiksi matemaattiset tulokset, joita ei esitellä konstruktiossa.[22, 12]

[Koetsier esittelee] rationaalisuuden lisäksi toisenkin hyödyllisen näkökulman rekonstruktioihin: niiden *faktuaalisuuden.* Rekonstruktio on sitä faktuaalisempi, mitä täydellisemmin se vastaa historiassa todellisesti tapahtuneiden matemaattisten toimenpiteiden jonoa. Rekonstruktio voi siis olla rationaalisuudestaan riippumatta *faktuaalinen*, *kontrafaktuaalinen* tai jotain niiden väliltä.[22, 13]

Esityksessään Koetsier korostaa, että hänen rationaalisuuskäsityksensä on tarkoitettu vain matematiikan rationaalisuuden tarkasteluun rekonstruktioiden kontekstissa. Hänen mukaansa rekonstruktioissa esiintyvät implisiittiset säännöt tai metodologiat käsittelevät sitä, millainen matemaattinen käyttäytyminen on riittävän tai riittämättömän hyödyllistä tietyn *matemaattisen* ongelman ratkaisussa. Nämä matemaattiset käytössäännöt on pidettävä erillään yleisemmistä, psykologisista ongelmanratkaisumalleista eli heuristiikoista. [22, 13] Teoksen *Proofs and Refutations* aikana Lakatos vielä käsitteli metodologiaa ja heuristiikkaa yhtenä kokonaisuutena. Myöhemmässä tuotannossaan (*MSRP*) hän erottelee näille käsitteille eri sisällöt. [22, 16]

Rationaalisilla (re)konstruktioilla voi olla Koetsierin mukaan neljää eri tarkoitusta:

1. Pedagoginen
2. Metodologinen
3. Filosofinen
4. Historiallinen

Pedagogisen (re)konstruktion tarkoitus on opettaa muille jokin tietty matemaattinen metodologia tai implisiittinen säännöstö. Metodologisen (re)konstruktion tarkoitus on puolustaa jotain tiettyä matemaattista metodologiaa, eli väittää sen olevan perustellusti toimiva ja hyödyllinen tai kuvailevan arvostettua matemaattista toimintaa tarpeeksi tarkasti, että tiedeyhteisö hyväksyy metodin selittävän matemaattista toimintaa riittävästi. Tätä tarkoitusta varten rekonstruktion on oltava mahdollisimman faktuaalinen. Filosofinen (re)konstruktio selittää matematiikan kokonaisluonnetta: yhden tai useamman (re)konstruktion väitetään sopivan paremmin tiettyyn näkemykseen matematiikasta kuin toiseen, esimerkiksi vertaillessa platonista realismia ja näkemystä matematiikasta inhimillisenä rakennelmana. Historiallinen tarkoitus (re)konstruktioille on joko täysin kuvaileva (deskriptiivinen) tai käyttää rekonstruktioita aineistona jonkin historiallisen lainalaisuuden kuten "tieteiden kehityksen"löytämiseksi. [22, 15]

Hämmästyttävästi molemmat Lakatosin teoksessaan *Proofs and Refutations* esittelemät rationaaliset rekonstruktiot (monitahokkaiden avaruusgeometria ja lukujonon tasainen suppeneminen) ovat huomattavan kontrafaktuaalisia. Koetsier käy läpi Lakatosin rekonstruktioita ja löytää niistä anakronismeja, yksinkertaistuksia ja ylitulkintaa. Historiankirjoituksen näkökulmasta Lakatos ei ole ottanut aineistonsa kontekstia riittävästi huomioon. [22, I.3.4-I.4.4] Nämä puutteet eivät kuitenkaan tee todistusten ja kumoajien metodista epäuskottavaa, vaan pelkästään muuttavat Lakatosin sille tarjoamat perustelut rationaalisista rekonstruktioista rationaalisiksi konstruktioiksi. Nämä konstruktiot tuovat ilmi matematiikan rationaalista luonnetta tavalla, joka on sekä tunnistettava, että julkaisuaikanaan tuore ja alkuperäinen. Lakatos toi esille kumoamisen merkityksen matemaattisesta työskentelyssä. Koetsierin mukaan todistusten ja kumoajien metodin arvo on myös sen esittelemän työskentelytavan rikkaudessa: kumoutumiseen on tarjolla monipuolisia reagointitapoja, joita Hilbertin formalistinen matematiikanfilosofia ei olisi huomannut. [22, 45] [28, 4, alaviite 1]

Näiden ajatusten valossa rationaaliset konstruktiot, jotka Lakatos on rakentanut todistusten ja kumoajien metorin tueksi ovat mielestäni ensisijaisesti pedagogisia ja metodologisia, eivät historiallisia. Pedagoginen tarkoitus täyttyy teoksen *Proofs and Refutations* dialogissa erinomaisesti: teksti on helppolukuista, innostavaa ja tärkeimmät väitteet on ilmaistu selkeästi numeroitujen listojen ja kertauksen avulla.

Konstruktioiden tulkinta metodologisiksi onnistuu myös, mutta heikommin kuin pedagoginen tulkinta. Todistusten ja kumoajien metodi tarjoaa implisiittisen säännöstön matemaattiselle toiminnalle, jolla voidaan selittää menestyksekästä matemaattista työskentelyä siitä huolimatta, että konstruktiossa esiintyvät matemaatikot kuten Niels Henrik Abel tavoittelivat eri päämääriä kuin Lakatos kuvaili heidän tavoitelleen, tai että Lakatos kuvaili heidän työskentelyään anakronistisella terminologialla, mukaanlukien todistusten ja kumoajien metodin käsitteet. Näistä puutteista huolimatta matematiikan historia (ja myös historiankirjoitus) olisi voinut tapahtua Lakatosin kuvailemalla tavalla. konstruktion kontrafaktuaalisuudesta huolimatta se voi olla hyödyllinen työkalu matemaatikoille.

Konstruktion mahdollisen filosofisen tarkoituksen suhteen olen varovainen vetämään yleisiä johtopäätöksiä. Luvussa 6 kuitenkin pohdin konstruktion tukemia matematiikanfilosofisia merkityksiä ja väitteitä matematiikan erehtyväisyyden kontekstissa. Teos *Proofs and Refutations* pysyttelee korostetusti matemaatikkojen mikrotason työskentelyn selittämisessä ja kuvailussa. Vaikka teoksesta on löydettävissä mielenkiintoisia mielenkiintoisia filosofisia irtiottoja, mahdollisesti hegeliläiseen suuntaan (esimerkiksi todistusten ja kumoajien metodi teesi-antiteesi-synteesi -narratiivin ilmentymänä), nämä eivät selvästikään ole kirjan perimmäistä tarkoitusta Lakatosin itsensä mielestä. Teoksen *Proofs and Refutations* konstruktioilla voi olla filosofinen merkitys osana laajempaa matematiikan filosofian tutkimusta, mutta teoksen itsensä kontekstissa konstruktioiden filosofinen tarkoitus jää vähäiseksi. Lakatos käsittelee matematiikanfilosofiaa suoraan vain teoksen liitteissä. Hänen matematiikanfilosofiset erilliset kirjoituksensa ([30] [29] [25] [24]) puolestaan eivät nojaa teoksen *Proofs and Refutations* sisältämiin rationaalisiin konstruktioihin, vaan rakentavat omat, itsenäiset argumenttinsa.

Lakatos pohtii matematiikan rationaalisuuden olemusta hyvin hegeliläisellä kielellä teoksen *Proofs and Refutations* toisessa liitteessä, joka on postuumi lisä vuoden 1976 laitoksessa. Liite ei ole kirjoitettu dialogimuotoon. Kyseisen liitteen teksti perustuu Lakatosin vuoden 1961 väitöskirjatekstin kolmanteen lukuun, joten sen voidaan katsoa edustavan samaa vaihetta Lakatosin ajattelussa kuin päätekstin dialogi.

Mathematics, this product of human activity, 'alienates itself' from the human activity which has been producing it. It becomes a living, growing organism, that acquires a certain autonomy *from the activity that produced it; it develops its own autonomous laws of growth, its own dialectic. – – The activity of human mathematicians, as it appears in history, is only a fumbling realization of the wonderful* *dialectic of mathematical ideas. But any mathematician, if he has talent, spark, genius, communicates with, feels the sweep of, and obeys this dialectic of ideas. Now heuristic is concerned with the autonomous dialectic of mathematics and not with its history, though it can study its subject only through the study of history and through the rational reconstruction of history.*[28, 146]

Matematiikan rationaalisuus ilmenee siis hegeliläisenä dialektiikkana, joka toteutuu tiedeyhteisössä vain horjuen. Tämä dialektiikka sinänsä on tutkijan (matematiikan filosofin tai aatehistorioitsijan) suoran havaintomaailman ulkopuolella. Matematiikan rationaalisuutta tarkastelevan filosofin tutkimuskohde ei siis ole matemaatikkojen itsessään horjuva ja epätäydellinen työskentely, vaan matematiikan dialektiikassa ilmenevä rationaalisuus. Historiallisessa aineistossa ilmenevän matemaattisen toiminnan odotetaan siis olevan yhtä lailla epätäydellistä ja horjuvaa: siis ei täysin rationaalista. Tämä epätäydellisyys ilmenee myös matematiikan erehtyväisyytenä, mitä käsitellään luvussa 6.

Lakatosin rationaalisia rekonstruktioita (tai vain konstruktioita, heikennettyä tulkintaa käyttäen) matematiikan historiasta pohdittaessa on mielestäni tärkeää huomioida, että tutkimuskohteen oletetaan olevan rationaalinen. Konstruktion rakentaja sitoutuu johonkin käsitykseen rationaalisuudesta joko tiedostamattaan tai tietoisesti. Tällöin hän valikoi tekstiään varten historiallisesta aineistosta vain rationaalisuuskäsitykseensä sopivaa materiaalia tai tulkitsee aineistoa tähän käsitykseen sopivalla tavalla. Rationaaliseksi rekonstruktioksi tarkoitettu teksti siis maalaa tutkimuskohteestaan välttämättömästi rationaalisen kuvan. Tämä vaikuttaa kehäpäätelmältä, jos rationaalisen rekonstruktion tarkoituksena pidetään pelkästään tutkimuskohteen rationaalisuuden osoittamista.

Filosofisen merkitystulkinnan mukaisesti (rationaalinen re)konstruktio voi tulkita matematiikan luonnetta. Historiallisen aineiston koherenssi (tai koherenssin puute) kirjoittajan rationaalisuuskäsityksen kanssa konstruktiossa voi dialektisessa prosessissa tuottaa uusia tulkintoja matematiikan luonteesta, kirjoittajan rationaalisuuskäsityksestä tai matemaattisen työskentelyn metodologiasta. Nämä huomiot voidaan havaita, kun rationaaliseksi rekonstruktioksi tarkoitettua tekstiä luetaan nämä laajemmat merkityskokonaisuudet mielessä pitäen. Tällöin voidaan myös havaita kirjoittajan olettamasta rationaalisuuskäsityksestä ja tieteenalan metodologiasta piirteitä, mitä ei välttämättä ole eksplikoitu tekstissä. Esimerkiksi teoksen *Proofs and Refutations* tekstistä voidaan havaita pohjimmiltaan euklidinen deduktion kunnioitus, josta on kyseenalaistettu päättelyn lähtökohdat eikä itse päättelyn mielekkyyttä ajattelun rakenteena. Siitä huolimatta, että Lakatos vaikuttaa esipuheensa perusteella edustavan popperilaista, falsifikaatioon nojaavaa metodologiaa, esitteekin dialogi lähinnä matemaattisia oivalluksia ja työskentelytapoja, joissa keskiössä on vanhasta matemaattisesta tuloksesta kiinnipitäminen näennäisestä kumoamisesta huolimatta. Euklidisen menetelmän korvaavaksi matematiikan metodologiaksi paljastuukin jotain, joka on lähempänä myöhemmin MSRP:ssä esiteltyä tieteenfilosofiaa kuin popperilaista falsifikationismia. Tätä aihetta käsitellään lisää luvussa 6 matematiikan erehtyväisyyden näkökulmasta.

5.2 Mikrotason rationaalisuus

Teos *Proofs and Refutations* on mahdollista lukea hyökkäyksenä matematiikan erehtymättömyyttä vastaan. Lakatoksen taidolla rakentama jännittävä narratiivi esittelee kiihtyvällä tahdilla vastaesimerkkejä jo "todistettuihin"väitteisiin ja nostaa esille lukijan perusolettamuksia matematiikan luonteesta kyseenalaistaakseen ne. Todistetuista tuloksista löydetään jatkuvasti puutteita ja uusien näkökulmien valaisemia epäjohdonmukaisuuksia, jotka on korjattava. Tämän laskelmoidun hyökkäyksen merkitys ei kuitenkaan ole tehdä matematiikasta epätieteellistä tai epäloogista.

Lakatos erottelee tuntemattomaan katsovan matematiikan tutkimuksen ("guessing") ja todistamisen ("proving"), kuten alaluvussa 7 esitellään. Näistä edellisen käsittelyssä Lakatos oli aikanaan edelläkävijä nostaessaan otaksumien muodostamisen ja käsittelyn tutkimuskohteeksi sinänsä. Harva kyseenalaistaa matemaattisten väitteiden todistamisen olevan rationaalista toimintaa. Teoksen *Proofs and Refutations* esittämän euklidisen koulukunnan kritiikin ja matemaattisen mikrotason työskentely esilletuonnin jälkeen herää kuitenkin kysymys: Onko matematiikan rationaalisuus kyseenalaistettava, jos sitä tarkastellaan laajana kokonaisuutena, joka sisältää muutakin kuin formaalin todistamisen ja todistetut tulokset?

Oman tulkintani mukaan teoksen *Proofs and Refutations* sisältö voidaan selittää kahden tavoitteen avulla:

1. Euklidisen myytin dekonstruktio
2. Mikrotason matematiikan selittäminen

Näistä edellistä tavoitetta on käsitelty luvussa 3.1.3. Toinen tavoite, eli mikrotason matematiikan selittäminen on teoksen *Proofs and Refutations* matematiikanfilosofista ydintä. Lakatos rakentaa oman selityksensä matematiikaksi kutsutun tieteenalan sisältämälle toiminnalle. Tämä selitys, eli todistusten ja kumoajien metodi, nojaa vahvasti historialliseen aineistoon ja tutkimusprosessin yksittäisten kysymysten ongelmanratkaisun askeliin, eli mikrotason matemaattiseen toimintaan.

Todistusten ja kumoajien metodi onnistuu selittämään paremmin matemaattisen työskentelyn mikrotasoa kuin sen pidempiaikaista kehitystä tiedeyhteisön tasolla, eli makrotasoa. Makrotason selityksen ongelmia ei varsinaisesti käsitellä tässä tutkielmassa, mutta makrotason selityksiin liittyviä historiallisen aineiston käytön ongelmia käsiteltiin alaluvussa 5.1. Mikrotason selityksessä Lakatosin tarjoaman mallin selitysvoima on kuitenkin varteenotettava. Todistusten ja kumoajien metodin tarjoama heuristiikka, eli ongelmanratkaisusuunnitelma vastaesimerkkien käsittelyä varten oli julkaisuaikanaan tuore näkökulma ja vielä nykyäänkin auttaa matemaatikkoa kääntämään vastaesimerkin uudeksi mahdollisuudeksi tutkimuksellisen umpikujan sijaan. Heuristiikan pragmaattinen hyöty on hyvin merkittävä: tilanteessa, jossa matemaatikko on törmännyt ylitsepääsemättömään ongelmaan hänen rakentelemansa mielleyhtymät ja hänen hyödyntämänsä lemmat ovatkin yhä hyödyllistä materiaalia sen sijasta, että ne olisi hylättävä. Lisäksi metodin säännöstö (suomennettu tämän tutkielman luvussa 4) tarjoaa selkeät toiminta-ohjeet, mikä ehkäisee "tyhjän paperin ongelmaa", eli uuden ratkaisuyrityksen aloittamisen vaikeutta.

Matemaatikot eivät kuitenkaan käytä todistusten ja kumoajien metodin heuristiikkasäännöstöä sellaisenaan, eivätkä vastaesimerkit ole käytännön tutkimustyössä keskiössä Lakatosin esittelemällä tavalla (esim. [7, 108]). Lakatosin esittelemä mikrotason matematiikan selitys ei siis vastaa todellisuutta, vaan on kontrafaktuaalinen. Tämä ei välttämättä ole ongelmallista. Kontrafaktuaalisuuden esittämä haaste on läsnä koko teoksen *Proofs and Refutations* sisällössä niin historiallisen aineiston käsittelyssä kuin mikro- ja makrotasonkin matematiikanselityksissä. Lakatosin ottamia vapauksia historiallisen aineiston käsittelyssä on kritisoitu laajalti [7]) [46, 103]. Joidenkin tutkijoiden mielestä Lakatosin ajatukset ovat hyödyllisinä uudelleentulkittuina, esimerkiksi lievennettyinä pedagogiseksi ohjelmaksi normatiivisen ohjeen sijasta ([22, I.3.3.]) tai korostamalla nykyhetken tulkitsijan käsitystä rationaalisuudesta [23, 3.2.].

Matematiikan mikrotason työskentelyn selittäminen, varsinkin sen rationaalisuuden osalta, ja keskustelunavaukset matematiikan tieteenfilosofisten perusteista ovat yhteydessä toisiinsa hyvin kiinteällä tavalla teoksen *Proofs and Refutations* dialogissa. Väitän, että Lakatosin tekstiä on hyödyllistä tulkita siten, että tarjotut selitysmallit ovat mahdollisia, eivät faktuaalisia. Hän tarjoaa mahdollisen rationaalisen selityksen matemaatikkojen mikrotason toiminnalle ja sitä kautta osoittaa, että uskottava rationaalinen selitys on mahdollinen. Teun Koetsierin mukaan *Proofs and Refutations* on uskottava pääosin siksi, että se esittelee *tunnistettavaa* matemaattista käyttäytymistä [22, 44]. Tämä on mielenkiintoista, sillä tekstin historialliset esimerkit ovat muokattuja eivätkä matemaatikot käytännössä useinkaan toimi todistusten ja kumoajien metodin mukaisella tavalla.

Lakatoksen kuvailema matemaattinen käyttäytyminen onkin *ideaalista* matemaattista mikrotason työskentelyä. Mielestäni Lakatosin kuvauksen uskottavuus ja selitysvoima perustuu jaetulle arvopohjalle. Matemaatikot ovat vahvasti sitoutuneet rationaalisuuden ja ristiriidattomuuden arvoihin. Lakatos selittää aiemmin huomiotta jäänyttä matematiikan osa-aluetta, falsifikaatioiden dialektiikkaa, matemaattisia käsitteitä käyttäen ja vahvasti matematiikan arvoja edustaen. Kolmas merkittävä arvo tässä tarkastelussa on koherenssi. Lakatoksen selitys tarjoaa matematiikan tieteenalalle sisäisesti ristiriidattoman selitysmallin mikrotason toiminnalle. Tämä ristiriidattomuus on kuitenkin saavutettu aineiston valikoivan hyödyntämisen avulla, mikä asettaa todistusten ja kumoajien metodin alttiiksi tulevien, parempien selitysmallien hyökkäyksille. Lakatoksen ajatuksia koherentimpi selitys matematiikasta voisi esimerkiksi sisällyttää laajemman historiallisen aineiston perustakseen ja jättää vähemmän ilmiöitä selittämättä. [23, 94] Matemaatikot siis pitävät Lakatosin metamatemaattisia selityksiä uskottavina ja hyödyllisinä, niiden aatehistoriallisista puutteista huolimatta. Tämä korostaa Lakatosin tekstin erityislaatuista asemaa matematiikan ja filosofian välimaastossa.

Teoksen *Proofs and Refutations* dialogi osoittaa ajatuksen epärationaalisuudesta epäuskottavaksi ja tarjoaa yhden erityisen rationaalisen selityksen matemaattiselle toiminnalle. Myöhemmissä teksteissään, etenkin MSRP:ssä, Lakatos pohtii tieteellisen tutkimustoiminnan selittämistä laajemmalla ja abstraktimmalla tasolla eikä yhden erityisratkaisun kautta. Tekstillä on myös pedagoginen merkitys. Teoksen *Proofs and Refutations* dialogi on ajatuksia herättelevää ja nostaa esiin tieteenfilosofisia ja metamatemaattisia teemoja sekä matematiikan tieteenalan historiallisuutta, mihin opiskelijat eivät välttämättä kiinnitä huomiota mekanistisessa matematiikan yliopisto-opetuksessa. Dialogin teksti on selkeää ja sen matemaattinen sisältö ymmärrettävää ilman laajaa perehtyneisyyttä. Teksti soveltuu mielestäni erinomaisesti matematiikan ja matematiikkaan vahvasti nojaavien oppiaineiden kuten fysiikan kanditason oppimateriaaliksi, tai lukiotason syventäväksi materiaaliksi. Tämä tukisi monitieteellisyyden ja lähdekriittisyyden laaja-alaisia oppimistavoitteita (LOPS 2019 [36]) lukiomatematiikassa.

6 Matematiikan erehtyväisyys

Lakatosin matematiikanfilosofiset intressit keskittyvät kahteen aiheeseen:

1. Matematiikan rationaalisuus
2. Matematiikan erehtyväisyys

Näistä matematiikan rationaalisuus, jota käsitellään luvuissa 5 ja 7, on Lakatosille tärkeämpi aihe. Laajentamalla rationaalisuuden käsitettä käsittämään muunkin kuin deduktiivisen päättelyn, Lakatos kykeni selittämään matemaattista mikrotason työskentelyä historiallisesta aineistosta enemmän kuin aikaisemmin. [22, 44] Tämä selitys rakennettiin popperilaista, falsifiointia painottavaa metodologiaa hyödyntäen: Lakatos asetti vastaesimerkit, eli hypoteesien ja lauseiden loogisesti epätodeksi osoittamisen, keskeiseen asemaan matemaattisessa työskentelyssä. Tämä on ristiriidassa euklidisesta koulukunnasta kumpuavan käsityksen kanssa, jossa matemaattisen lauseen ajatellaan olevan peruuttamattomasti totta onnistuneen todistuksen jälkeen. Lakatosin teksti herättääkin kysymyksiä: Miten ristiriita euklidianismin edustaman "ikuisen totuuden"ja vastaesimerkkien välillä ratkaistaan? Onko falsifiointi mielekäs työskentelytapa matematiikassa? Millaista erehtyväisyyttä (*fallibilism*) esiintyy matematiikan tieteenalalla? Onko tämä erehtyväisyys hyödyllistä vai vaarallista? Onko erehtyväisyyttä edes mahdollista poistaa matematiikasta? Useimpia näistä kysymyksistä on sivuttu aiemmissa luvuissa ja alaluvuissa. Tässä luvussa keskityn matematiikan erehtyväisyyden ja Lakatosin pohdinnan kuvailuun.

Lakatos mainitsee teoksen *Proofs and Refutations* esipuheessa nojanneensa Popperin filosofiaan niin paljon, ettei hän mainitse viittauksia Popperiin tekstissään laisinkaan. Popperilainen falsifikationismi on koko teoksen matematiikkakäsityksen lähtökohta: Lakatos selittää matematiikkaa popperilaisesta näkökulmasta tavalla, jota hänen aikanaan ei oltu ennen tehty. Lakatos ei perustele popperilaisen falsifikationismin lähtökohtaansa, vaan olettaa sen rakentaakseen argumentteja matematiikan rationaalisuuden selittämiseksi. Lakatosin yhtenä motivaationa lienee ollut popperilaisen tieteenfilosofian edustaminen: onnistunut matematiikan rationaalisuuden selitys popperilaisen falsifikationismin pohjalta vahvistaisi tämän uskottavuutta tiedeyhteisössä. Koska Lakatos käsittelee matematiikan erehtyväisyyttä teoksen *Proofs and Refutations* tekstissä vain vähäisessä määrin, avuksi tarvitaan muita hänen tekstejään ja vertailua Popperin ajatuksiin, varsinkin niissä yhteyksissä kun Lakatos poikkeaa puhdasoppisesta popperilaisuudesta tai kehittää falsifikationismia omaan suuntaansa.

Teun Koetsier määrittelee kaksi erilaista positiota matematiikan erehtyväisyydestä työkaluksi Lakatosin käsitysten tarkasteluun: [22, I.3.5]

1. Vahva erehtyväisyys
2. Heikko erehtyväisyys

Koetsier määrittelee vahvan erehtyväisyyden (*strong fallibility thesis*) tarkoittavan samanlaista falsifioinnin mahdollisuutta matematiikassa kuin Popperin mukaan luonnontieteissä: kokonainen teoria on mahdollista falsifioida. Näin ollen on mahdollista, että kaikki lauseet ja teoriat, joista matematiikan kokonaisuus on rakennettu, falsifioitaisiin riittävien vastaesimerkkien löytyessä. Tällöin nykyhetken käsitys matematiikan "totuudesta"tai "edistyksestä"osoittautuisi näennäiseksi ja sattumalta muodostuneeksi.[22, 45]. Vahva erehtyväisyys siis käsittelee matemaattisia lauseita ja teorioita joko kokonaan tosina tai kokonaan epätosina.

Heikon erehtyväisyyden käsite huomioi tilannekohtaisuuden ja aste-erot matemaattisen väitteen totuuden tai epätotuuden määrittelyssä. Matemaattiset teoriat ovat erehtyväisiä, mutta niitä ei voi falsifioida kokonaan. Uudemmat teoriat samasta aiheesta syrjäyttävät merkittävän osan vanhan teorian sisällöstä. Tällöin vanhan teorian voidaan tulkita erehtyneen tai ainakin toimineen vajavaisilla tiedoilla. Uusi teoria (tai yksittäinen lause) on monipuolisempi esimerkiksi voimassaoloehtojensa suhteen tai selittää aiemmin "ongelmallisen"vastaesimerkin tyydyttävällä tavalla. Vanha tietosisältö kuitenkin toimii perustana, jopa välttämättömänä edellytyksenä, uudelle tiedolle. [22, 46]

Kontrastina erehtyväisyydelle on ajatus matematiikan erehtymättömyydestä (*infallibilism*). Lakatosin ajatukset ovat terävimmillään kohdistettuna ehdottomaan uskoon matematiikan erehtymättömyydestä. Tällaista matematiikkakäsitystä esiteltiin tämän tutkielman luvussa 5 ja erityisesti alaluvussa 3.1.3. Räikeä vastakkainasettelu euklidisen erehtymättömyysposition ja vahvan erehtyväisyyden välillä haastaa lukijaa ottamaan matematiikan erehtyväisyyden vakavasti ja pohtimaan Lakatosin esittämiä väitteitä. Tämä kirjallinen ja pedagoginen strategia teki ja tekee yhä Lakatosin tekstistä kiinnostavamman, mutta ei ollut teoksen *Proofs and Refutations* julkaisun aikaan välttämätön kohdeyleisön kiinnostuksen herättämiseksi, olihan matematiikan erehtyväisyys ja epätäydellisyys tullut esiin jo vuosikymmeniä aiemmin esimerkiksi Russelin ja Gödelin löydöksissä.

Vahvan erehtyväisyyden käsite on popperilaista falsifikationismia sovellettuna matematiikkaan miltei sellaisenaan. Heikko erehtyväisyys puolestaan nojaa vahvasti Lakatosin todistusten ja kumoajien metodiin. Mielestäni nämä molemmat käsitteet ovat hyödyllisiä Lakatosin tekstien tulkinnassa. Vahva erehtyväisyys on mahdollisesti lähempänä Lakatosin tekstin intentiota ja sitoutumista popperilaiseen falsifikationismiin, mutta heikko erehtyväisyys on puolustettavampi ja nykykeskustelulle relevantimpi positio.

Teoksen *Proofs and Refutations* dialogiteksti sisältää Lakatosin mukaan tarinan dialektiikan ja rationaaliset rekonstruktiot historiasta; tekstin runsaat alaviitteet puolestaan kuljettavat "todellista"historiaa tarinan mukana [28, 5]. Luvun 5.1 päätelmien pohjalta voidaan sanoa, että alaviitteissä kuljetettu historiankirjoituksen tulkinta on myös rationaalista (re)konstruktiota eikä luotettavaa historiankirjoitusta.

Dialogin teksti edustaa aluksi vahvaa erehtyväisyyttä: Lakatos väittää esipuheessaan, ettei matemaattisten löydöksien logiikkaa voi kehittää ilman formalismin kritisointia ja hylkäämistä [28, 4]. Dialogissa lauseita ja teoreemoja käsitellään lähtökohtaisesti kokonaisuuksina, joiden oletetaan osoittautuvan loogisesti epätosiksi vastaesimerkin löytyessä (kts. luku 4). Yksi ydinsanomista todistusten ja kumoajien metodissa kuitenkin on juuri kokonaisuusnäkemyksen kyseenalaistaminen. Nostaessaan ansiokkaasti esiin piilotettujen lemmojen merkityksen ja luodessaan lauseiden voimassaoloalueiden uudelleenmäärittelylle systemaattisen heuristiikan, Lakatos tulee samalla haastaneeksi vahvan erehtyväisyyden ja siten myös koko teoksen popperilaiset lähtökohdat. Tekstissä ei kuitenkaan pohdita suoraan matematiikan erehtyväisyyttä sinänsä, vaan ainoastaan matemaattista työskentelyä lemmojen, lauseiden ja teorioiden tasolla, joten tämän ristiriidan suora käsittely jää dialogissa vähäiseksi. Alaviitteet ja Lakatosin muu tuotanto antavat kuitenkin aineistoa vahvan ja heikon erehtyväisyyden näennäisen ristiriidan ratkaisemiseksi.

Teoksen *Proofs and Refutations* alaviitteistä löytyvä "oikea historia"sisältää samanlaisia yksinkertaistuksia ja painotuksia kuin dialogissa henkilöhahmojen repliikkeinä ilmituleva rationaalinen rekonstruktio. Tämä ei kuitenkaan tee alaviitteistä arvottomia. Alaluvussa 5.1 huomattiin, että Lakatosin rationaalisilla (re)konstruktioilla on selitysvoimaa paikoittaisesta kontrafaktuaalisuudestaan huolimatta. Alaviitteet eivät Lakatosin väitteestä huolimatta edusta "todellista historiaa", vaan ne ovat oma konstruktionsa, joka kulkee erillään dialogin leipätekstin konstruktiosta, paikoitellen sitä tukien. *"... The real history will chime in in the footnotes, most of which are to be taken, therefore, as an organic part of the essay."*[28, 5] Lakatos ei siis tarkoittanut alaviitteiden muodostavan omaa, itsenäistä historiankirjoitusta tai -kertomusta, vaan täydentävän dialogin rekonstruktioita hieman eri näkökulmasta. Näin tapahtuukin. Teun Koetsierin analyysin mukaan alaviitteisiin valitut historialliset väitteet ja toteamat maalaavat matematiikan erehtyväisyydestä kuvan, joka on paljon lähempänä heikkoa kuin vahvaa erehtyväisyyspositiota [22, 56]. Koetsierkaan ei analysoinut dialogin kaikkia alaviitteytä erehtyväisyyden näkökulmasta, vaan vain Cauchyn jatkuvuuslauseiita käsittelevää katkelmaa.

Millainen konstruktio Lakatosin "todellista historiaa"sisältävät alaviitteet ovat matematiikan erehtyväisyyden suhteen? Oman tulkintani mukaan alaviitteitä ei ole mielekästä tarkastella tässä yhteydessä irrallisena, erillisenä materiaalina, vaan täydennyksinä ja toisena näkökulmana dialogin rationaalisen rekonstruktion esittämiin väitteisiin matematiikan luonteesta. Dialogi tarjoaa vahvan erehtyväisyyden mukaista kuvaa matematiikasta, kun taas alaviitteiden näkökulma, ehkä Lakatosin tarkoituksen vastaisesti, tarjoaa heikon erehtyväisyyden mukaista näkemystä. Kuten aiemmin on todettu, sekä dialogi että alaviitteet sisältävät historiallisia yksinkertaistuksia ja painotuksia, minkä perusteella niiden voidaan sanoa olevan historiallisia konstruktioita, ei rekonstruktioita. Cauchy (ja Abel) eivät käyttäneet todistusten ja kumoajien menetelmää työskentelyssään, eivätkä Lakatosin kuvaukset heidän työskentelystään kestä historialista kritiikkiä. Historiallisen arvon sijasta alaviitteiden konstruktioilla voi kuitenkin olla pedagoginen ja/tai filosofinen merkitys.

Mielestäni pedagoginen merkitys on ilmeinen. Alaviitteissä kulkeva "todellinen historia"vuosilukuineen sitoo fiktiivisen dialogin historiankirjoitukseen lisäten tekstin kiinnostavuutta lukijalle ja opettaen matematiikan tieteenalan tapahtumia 1800- ja 1900-luvuilta. Filosofinen merkitys on mahdollinen (konstruktioiden eri merkityskategorioita käsiteltiin alaluvussa 5.1). Alaviitteiden sisältämät konstruktiot voivat auttaa selittämään matematiikan luonnetta. Lakatosin voidaan väittää onnistuneen teoksen *Proofs and Refutations* dialogilla kyseenalaistamaan matematiikan erehtymättömyyden. Dialogi ja alaviitteet tarjoavat kaksi eri vaihtoehtoa matematiikan erehtymättömyydelle: vahvan ja heikon erehtyväisyyden. Se, että vaihtoehtoja on kaksi, voidaan nähdä vahvempana argumenttina matematiikan erehtymättömyyttä vastaan kuin pelkkä yksi erehtymättömyyspositio tarjoaisi: ajatus matematiikan erehtyväisyydestä toimii pohjana monensuuntaisille selitysmalleille. Sekä dialogin että alaviitteiden historialliset konstruktiot antavat siten pluralistisena kokonaisuutena uskottavuutta matematiikan erehtyväisyydelle sinänsä, tai ennemminkin horjuttavat erehtymättömyyden asemaa matemaattisen työskentelyn ja tiedontuotannon kuvailuissa ja selityksissä.

Kumpi erehtymättömyyden selitysmalleista on uskottavampi: vahva vai heikko erehtyväisyys? Sekä historiallinen aineisto, että Lakatosin teksti on paremmin yhteensopiva heikon erehtyväisyyden kanssa. Vaikka matemaattiset väitteet voidaan jakaa hienojakoisiin, loogisesti testattaviin perusväitteisiin paremmin kuin muissa tieteissä, tieteilijöiden käyttäytyminen on kuitenkin samankaltaista: teorioita ennemmin muokataan kuin hylätään. Vastaesimerkit löytyvät usein sattumalta eivätkä tarkoituksellisen etsinnän seurauksena. Lakatoksen myöhempi teos MSRP käsittelee tätä kysymystä laajalti[31]. Teoksen *Proofs and Refutations* alaviitteiden maalaamassa kuvassa matematiikan erehtyväisyydestä voidaan nähdä Lakatosin ensiaskeleita puhtaasta popperilaisesta falsifikationismista lievempään positioon, jota hän edustaa MSRP:ssä. Itse näen vahvan erehtyväisyyden arvon lähinnä pedagogisena retoriikkana ja historiallisena kuriositeettina, kun taas heikko erehtyväisyys tarjoaa uskottavamman kehyksen sekä matemaattisen tiedon asteittaiselle kehityksellä että matematiikan rationaalisuudelle. Vaikka *Proofs and Refutations* ei käsittelekään matematiikan erehtyväisyyttä keskeisenä aiheena, voidaan Lakatosin muista artikkeleista löytää taustoitusta tälle keskustelulle.

Tarkastelen seuraavaksi Lakatosin artikkelin *Infinite regress and foundations of mathematics* kannanottoja matematiikan erehtyväisyyteen vahvan ja heikon erehtyväisyyden käsitteiden avulla. Lakatos käyttää käsitteitä *theory*, *programme* ja *rational enterprise* synonyymisesti luokitellessaan rationaalisia, tieteellisiä selityskokonaisuuksia. Artikkelissa Lakatos käsittelee teoriakokonaisuuksien totuudellisuutta luokitellen tieteelliset selityskokonaisuudet (teoriat) kolmen kategorian alle: euklidinen, empiristinen ja induktivistinen. Nämä kategoriat ovat mahdollisesti tulkittavissa metodologioiksi tai tutkimusohjelmiksi, mutta tämä tulkinta vaatisi laajempaa analyysiä artikkelin tieteenfilosofisesta sijoittumisesta teosten *Proofs and Refutations* ja *MSRP* välillä. On kuitenkin huomionarvoista, että julkaisuajankohdaltaan kyseinen artikkeli sijoittuu Lakatoksen varhaisempaan tuotantoon, eli lähemmäksi teosta *Proofs and Refutations*. Kaikki näistä kategorioista pyrkivät jäsentämään tieteellistä tietoa deduktiivisen päättelyn avulla ja Lakatos käyttääkin niistä yhteisnimitystä *deductive systems*, jolle käytän vapaata suomennosta "deduktiivinen rakennelma". On tärkeää huomata, ettei Lakatos vaadi päättelyn noudattavan formaalia logiikkaa, vaan myös epämuodollinen päättely on lähtökohtaisesti sallittua. Tällöin tosin kyseessä ei enää ole formaali deduktiivinen rakennelma. [30, 3-4]

Käsite, joka yhdistää Lakatosin teorialuokittelun erehtyväisyyden ja falsifikaation tarkasteluun on epätotuuden takaisinvälittyminen (*the principle of retransmission of falsity*). Lakatos tarkoittaa käsitteellä vastaesimerkin vaikutusta premisseihin: Jos jokin deduktiivisen rakennelman lopputuloksena saaduista päätelmistä osoittautuu epätodeksi, on tällöin vähintään yksi premisseistä epätosi. Samoin vastaesimerkki jollekin lopputuloksena saadulle päätelmälle on samalla vastaesimerkki vähintään yhdelle deduktiivisen rakennelman premisseistä. On tärkeää huomata kuitenkin, että tämä ei päde toiseen suuntaan: jos jokin loogisen rakennelman premisseistä on epätosi, on täysin hyväksyttävää, että kaikki lopputulokset ovatkin tosia.

Lakatosin mukaan loogiselta rakennelmalta ei vaadita epätotuuden välittymistä kuin yhteen suuntaan: lopputuloksista premisseihin. Tämä on mielestäni erityisen tärkeä huomio: Vaikka matematiikan kaikki tulokset olisivat vailla vastaesimerkkejä, se ei takaa premissien totuutta. Tämä on tunnettu, yleisesti hyväksytty *status quo* matematiikassa ja tärkeä syy miksi aksioomista ei puhuta absoluuttisesti tosina, vaan valittuina. Tämä herättää kuitenkin matematiikanfilosofisen kysymyksen: Millaista matematiika olisi, jos loogisilta järjestelmiltä vaadittaisiin kaksisuuntaista epätotuuden välittymistä? Kysymys jää kuitenkin tämän tutkielman rajauksen ulkopuolelle. Tarkastellaan seuraavaksi epätotuuden välittymisen merkitystä matematiikan erehtyväisyydelle.

Vahvassa erehtyväisyydessä teoriaa tarkastellaan kokonaisuutena, heikossa taas pienempinä osina. Epätotuuden välittyvyyden käsite ei ota kantaa, miten premisseihin välittyneeseen epätotuudeen tulisi suhtautua tai miten loogisen rakennelman kokonaisuus suhtautuu osiinsa, muuten kuin mahdollisuutena, että yksi epätotuus loppupäätelmissä mahdollistaa kaikkien premissien epätotuuden. Tämä lisää mielestäni vahvan erehtyväisyyden uskottavuutta: yksikin epätotuus lopputuloksissa mahdollistaa kaikkien deduktiossa käytettyjen lähtökohta-oletusten virheellisyyden. Tämä laajalle leviävän epätotuuden riski osaltaa selittää matematiikan tieteenalan vakavaa suhtautumista vastaesimerkkeihin ja epätotuuksiin. Jos matemaattisessa todistuksessa on hyödynnetty useaa premissiä (mukaanlukien kaikkien lemmojen premissit), on epätoden lopputuloksen ilmaantuessa periaatteessa käytävä kaikki premissit läpi epätoden oletuksen löytämiseksi. Olisi huolimatonta työtä lopettaa premissien tarkastelu yhden epätotuuden löytyessä, koska löydetty epätotuus saattaa olla looginen seuraus useammasta kuin vain yhdestä premississtä. Lakatosin todistusten ja kumoajien metodi vaatii tätä huolellisuutta ja lisäksi asettaa Lakatosin omaa terminologiaa käyttäen positiivisen heuristiikan eli ohjeistuksen, miten löydettyjä epätosia premissejä tulee käsitellä niiden löydyttyä. Todistusten ja kumoajien metodi siis aloittaa vahvan erehtyväisyyden mukaisista toimintaohjeista: epätosi lopputulos asettaa päättelyketjun kokonaisuuden kyseenalaiseksi, mutta jatkaa heikon erehtyväisyyden mukaisella positiivisella heuristiikalla: päättelyketju jaetaan osakokonaisuuksiin ja premissejä tarkastellaan sekä muokataan yksitellen ja pienempinä kokonaisuuksina. Metodin erehtyväisyyskäsitys on siis vahvan ja heikon erehtyväysyyden välimaastossa.

Todistusten ja kumoajien metodi ei kuitenkaan ota kaikkia epäpätevän päättelyn mahdollisia lähteitä huomioon. Tämä vahvistaa ajatusta, ettei teosta *Proofs and Refutations* ole mielekästä tulkita kokonaisena matematiikan tieteenalan selityksenä eikä todistusten ja kumoajien metodia matemaattisen työskentelyn metodologiana, joka olisi sovellettavissa jokaiseen tilanteeseen. Metodi olettaa, että on löydetty vastaesimerkki, eli ristiriitainen (epätosi) lopputulos. Päättelyketju, mukaanlukien matemaattinen päättely, voi olla epäpätevää (*unsound*), vaikka lopputulos olisi tosi ja päättelyn logiikka virheetöntä (*valid*). Esimerkiksi vähintään yhdestä epätodesta lähtökohdasta tehty virheetön deduktio voi tuottaa toden lopputuloksen:

1. Premissi 1: Yli 80-vuotiaat eivät voi asettua puolueiden esivaaleissa ehdolle USA:n presidentiksi.
2. Premissi 2: Joe Biden asettui esivaaleissa ehdolle USA:n presidentiksi.
3. Päätelmä: Joe Biden oli alle 80-vuotias asettuessaan esivaaleissa ehdolle USA:n presidentiksi.

Tämän esimerkkipäätelmän lopputulos on tosi ja logiikka virheetöntä, vaikka ensimmäinen premissi on epätosi.

Vaikka laajemmin filosofian piirissä onkin käyty keskustelua tällaisen päättelyn oikeutuksesta (esim. pragmaattinen totuusteoria ja seurausetiikka), matemaattisen päättelyn aloittamista epätosista lähtökohtaoletuksista ei yleensä pidetä tarkoituksenmukaisena muuten kuin epäsuoraa todistamista käytettäessä. Matematiikassa tavoitellaan väitelauseita, joiden muoto on "Jos A on tosi, niin Y on tosi."Epäsuora todistaminen matematiikassa tähtää tähän samaan tietosisältöön: Epäsuora todistus tuottaa väitelauseen "Joko ei-B on epätosi tai A on epätosi."Tällaisen väitelauseen looginen informaatiosisältö on sama kuin "Jos A on tosi, niin Y on tosi."Lähtöoletusten joukkoa A käsitellään siis sekä suorassa että epäsuorassa todistamisessa totena kokonaisuutena. Mielestäni tämä edustaa käsitystä vahvasta erehtyväisyydestä matematiikasta, vaikkakin erehdysten ehkäisemisen näkökulmasta. Syvällisemmän käsityksen saamiseksi Lakatosin suhtautumisesta (tieteellisen) tiedon erehtyväisyyteen seuraavassa alaluvussa tarkastellaan laajempaa filosofista näkökulmaa aiheeseen skeptisismin ja dogmatismin vastakkainasettelun kautta.

6.1 Lakatosin positio skeptisismin ja dogmatismin välimaastossa

Teos *Proofs and Refutations* on ratkaisukeskeinen. Matematiikan erehtyväisyyden pohtimisen sijasta Lakatos tarjoaa ideoita ja konkreettisia työskentelymalleja epätotuuksien vähentämiseksi matematiikassa. Näiden työskentelymallien välittömänä tavoitteena ei ole täydellinen totuus euklidisen koulukunnan tavoitteiden mukaisesti eikä olemassaolevan teorian falsifiointi Popperin (varhaisen) falsifikationismin mukaisesti, vaan *parempi* tieto kuin ajatustyön alussa. Tähän liittyy läheisesti tiedon arvioiminen: Voidaanko tietää, milloin päätelmä on tosi? Voidaanko totuutta edes saavuttaa? Voidaan tarjota myös heikompi muotoilu: Voidaanko päätelmiä parannella? Voidaanko tietää, milloin päätelmä on parempi kuin edellinen?

Esipuheessaan Lakatos väittää formalismin olevan "viimeisin linkki dogmaattisista matematiikan filosofioista"[28, 4]. Hän jatkaa, ettei teos *Proofs and Refutations*, jota hän kutsuu "tapaustutkimukseksi", "haasta matemaattista dogmatismia suoraan vaan pohtii väitettä, että epämuodollinen, kvasi-empiirinen matematiikka ei edisty lauseiden lukumäärän karttumisen kautta, vaan jatkuvan spekulatiivisten arvausten määrän kasvun ja kritiikin myötä todistusten ja kumoajien logiikan mukaisesti"[28, 5]. Teen tästä kolme huomiota:

1. Lakatos luokittelee formalismin dogmaattiseksi matematiikanfilosofiaksi.

2. Hän hyväksyy pääpiirteissään dogmatismin ja formalismin. Tähän sisältyy hyväksyntä formaalin matematiikan edistymisestä hilbertiläisen lauseiden karttumisen mukaisesti.

3. Epämuodollinen matematiikka on erillistä formaalista matematiikasta ja sen edistymistä on selitettävä erikseen todistusten ja kumoajien metodin logiikalla.

Näistä huomioista kolmas on erityisen merkittävä: todistusten ja kumoajien metodin ei ole tarkoitus korvata formaalia matematiikkaa, vaan rakentaa rinnalle epämuodollisen matematiikan selitystä. Lakatos korostaa metodin logiikkaa, eli rationaalista rakennetta, eikä eksakteja heuristisia ongelmanratkaisun askeleita. Tässä luvussa ei keskitytä metodin puutteisiin matemaattisen tutkimustyön selittämisessä kuten aiemmissa luvuissa, vaan Lakatosin suhteeseen dogmaattiseen matematiikanfilosofiaan.

Seuraavaksi pohdin, mitä skeptisismi ja dogmatismi tarkoittavat matematiikan filosofian kontekstissa ja asetan teoksen *Proofs and Refutations* tähän jatkumoon.

Lakatos kiteyttää teoksen *Proofs and Refutations* esipuheessa skeptisismin ja dogmatism määritelmät siten, että dogmatismi "väittää, että ihmisjärki tai -aistit voivat saavuttaa totuuden ja tietää saavuttaneensa sen"ja skeptisismi "kieltää totuuden saavuttamisen mahdollisuuden (paitsi ehkä mystisen kokemuksen kautta) tai mahdollisuuden tietää totuuden saavuttamisesta"[28, 4-5]. Lakatos kuitenkin jättää dogmatismin ja skeptisismin suhteen enimmäkseen käsittelemättä esipuheessaan, väittäen skeptikkojen luovuttaneen matematiikan alalla dogmatismin voittamattoman epistemologian edessä. Alaviitteessä Lakatos viittaa aiempaan, vuonna 1962 julkaistuun esseeseensä *Infinite regress and foundations of mathematics*, siltä varalta, että esipuheen lukija haluaa tutustua tarkemmin skeptisismin ja dogmatismin vuoropuheluun matematiikan kontekstissa. Tämä essee käsittelee ensisijaisesti epistemologiaa ja siihen on viitattu lukuisia kertoja tämän tutkielman aiemmissa luvuissa.[28, 5]

Essee *Infinite regress and foundations of mathematics* on Lakatosin varhaisemman tuotannon (ennen MSRP:tä) laajin epistemologiaa käsittelevä artikkeli. Teoksen *Proofs and Refutations* kontekstissa nostan artikkelista kaksi sisältöä tarkastelua varten: Miten Lakatos määrittelee skeptisismin ja dogmatismin ja mikä on Lakatosin oma positio matematiikan epistemologian suhteen?

Artikkelin *Infinite regress and foundations of mathematics* määritelmät skeptisismille ja dogmatismille ovat samat, kuin teoksessa *Proofs and Refutations* (selvitetty edellisissä tekstikappaleissa tässä alaluvussa) [30, 3]. Näiden ajatussuuntausten epistemologisia sitoumuksia kuitenkin selitetään suoraan ja selväsanaisesti artikkelissa, toisin kuin teoksen *Proofs and Refutations* tekstissä. Lakatosin mukaan sekä skeptikot että dogmaatikot edustavat kriittistä rationalismia, tarkemmin sanottuna justifikationismia. Molempien suuntausten pääkysymys on "Miten voi tietää?", johon skeptikot vastaavat "Ei voi tietää.", sillä heidän mukaansa merkitykselle ja totuudelle ei voi olla varmaa perustaa [30, 4]. Skeptikotkin siis ajattelevat, että varma tieto vaatii varman perustan, mutta kieltävät sen mahdollisuuden. Rationaaliset pyrkimykset saavuttaa tietoa ovat kyvyttömiä saavuttamaan tavoitteensa [30, 4]. Dogmatistit puolestaan eivät luovuta, vaan yrittävät saavuttaa tietoa johonkin rationaalisesti muodostettuun peruslähtökohtaan sitoutumalla ja rakentamalla sen päälle teorioita. Lakatosin mukaan tällaiseksi peruslähtökohdaksi on tarjottu kolmea rationalistisen tieteenfilosofian tuotetta:

1. Euklidinen tutkimusohjelma
2. Empiristinen tutkimusohjelma
3. Induktivistinen tutkimusohjelma

On tärkeää huomata, että olen tulkinnut sanan "tutkimusohjelma"artikkelin itsensä kontekstissa, ottamatta kantaa artikkelin mahdollisen ennakointiin Lakatosin myöhemmän teoksen *MSRP* sisällöistä. Näistä kolmesta rationaalisen tiedonrakentamisen lähtökohdasta kiinnostavin teoksen *Proofs and Refutations* kontekstissa on euklidinen tutkimusohjelma.

Lakatos kiteyttää tulkintansa euklidisista teorioista hyvin selkeästi:

"No Euclidean theory, however, can ever stand up to sceptical criticism. And the most incisive sceptical arguments against mathematical dogmatism came from the self-tormenting doubts of the dogmatists themselves– –"[30, 11]

Tämän väitteen perusteluun Lakatos käyttää suuren osan artikkelin sivumäärästä, keskittyen vastaesimerkkien epistemologiseen rakenteeseen ja Gödelin käänteentekeviin tutkimustuloksiin, kuten epätäydellisyysaksioomiin ja ω-vajaisiin järjestelmiin. Lakatos käyttää Hilbertin formalismia ja sitä seurannutta (formalistisen) metamatematiikan kehitystä, kuten konsistenssitodistuksia, esimerkkinä "ettei metamatematiikka pysäytä [skeptisismin] loputonta regressiota matemaattisissa todistuksissa, vaan se ilmestyy uudelleen yhä sisältörikkaampien metateorioiden loputtomana hierarkkiana."[30, 22]

Hilbertiläinen matemaatikko, metamatemaatikko ja fyysikko Hermann Weyl kommentoi Gödelin epätäydellisyyslauseiden tuloksia seuraavasti:

"We are not surprised that a concrete chunk of nature, taken in its isolated phenomenal existence, challenges our analysis by its inexhaustibility and incompleteness – – But it is surprising that a construct created by mind itself, the sequence of integers, the simplest and most diaphanous thing for the constructive mind, assumes a similar aspect of obscurity and deficiency when viewed from the axiomatic angle."[44, 220]

Lakatos ei kuitenkaan hylkää dogmatismia lopullisesti asettuen skeptikkojen puolelle, vaan väittää, että rohkean arvailun (*daring speculation*) toteaminen erehtyväiseksi riittää vastaukseksi kritiikkiin[30, 20]. Hän myöntää Hilbertiläisen metamatematiikan kerryttäneen matematiikan tieteenalan tietosisältöä esimerkiksi Gentzenin Peanon aritmetiikkaa koskevan konsistenssitodistuksen myötä. Gentzenin todistus on erinomainen esimerkki Lakatosin matematiikanfilosofisista näkemyksistä: Todistaakseen Peanon aritmetiikan konsistenssin aksioomiinsa nähden Gentzen joutui todistuksessaan nojaamaan primitiiviseen rekursiiviseen aritmetiikkaan (PRA) ja transfiniittiseen induktioon. Järjestelmän konsistenssi todistettiin siis järjestelmän ulkopuolelta käsin, merkittävien apulauseiden olettamisen avulla. Tämä strategia toistui Gödelin jälkeisessä matematiikassa useasti: aksioomajärjestelmiä laajennettiin, kun suppean järjestelmän todettiin olevan kyvytön vastaamaan tutkittaviin kysymyksiin. Tätä laajennus-strategiaa käsitellään enemmän luvussa 7.

On myös tärkeää huomata, ettei Gentzenin tulos koskenut Peanon alkuperäistä aksioomajoukkoa, jonka induktio-aksiooma sisälsi toisen kertaluvun logiikkaa, vaan ensimmäisen asteen logiikan induktiossaan sisältävää Peanon *aritmetiikkaa*. Konsistenssitodistuksen vaikutusalue oli siis rajattu. Hermann Weyl oli pettynyt tähän tulokseen, pitäen sitä "pyrrhisenä voittona"sekä osoituksena madalletuista todistamisen arviointikriteereistä. Weyl väitti todistuksen hämärtäneen käsitystä siitä, mikä on intuitiivisesti luotettavaa aksiomaattisessa lukuteoriassa ja logiikassa [44, 220]. Mielestäni Lakatos tulkitsee Gentzenin konsistenssitodistuksen olevan malliesimerkki *kypsästä* tiedontuotannosta matematiikassa:

"As meta-mathematics grows, its sophisticated triviality grows ever more sophisticated and ever less trivial. Triviality and certainty are Kinderkrankheiten *of knowledge."*[30, 22]

Matemaattinen tieto sisältää siis implisiittistä epävarmuutta, vähintään Gödeliläisen epätäydellisyyden muodossa, mutta myös todistuksien itsensä rakenteessa: todistuksissa hyödynnetyt oletukset eivät olekaan itsestäänselviä, vaan kritisoitavia hienovaraisen tutkinnan ja tulkinnan kohteita. Näiden reunaehtojen sisällä on kuitenkin mahdollista rakentaa tietoa ja tietää sen olevan totta. Totuuden määritelmä on kuitenkin heikentynyt: sen sijasta, että väite olisi sinänsä absoluuttisesti tosi, on se tosi, *jos* sen oletukset ovat tosia. Tämä on pohjimmiltaan dogmatistinen positio. Siinä missä euklidinen koulukunta ja Hilbert pitivät päättelyperustan totuutta oletettuna epäkiinnostavan triviaalilla, mielivaltaisella tavalla, Lakatos kääntää skeptisen katseen näihin oletuksiin ja löytää niistä uusia tutkimuskohteita. Tällöin matemaattinen tieto ei ole rakennus, joka lepää varmalla perustalla, vaan joukko erillisiä päättelyketjuja, joista jokainen on sisäisesti konsistentti, kunnes se liitetään rohkealla oivalluksella osaksi jotain toista ketjua tai katkaistaan erillisiin osiin kiistanalaisen oletuksen kyseenalaistamisen takia.

Lakatosilaisessa käsityksessä matemaattinen tiedontuotanto on dynaaminen, useita erillisiä päättelyrakenteita sisältävä kokonaisuus. Näitä erillisiä päättelyrakenteita voi olla mahdollista kutsua hieman anakronistisesti tutkimusohjelmiksi MSRP:n mukaisesti. Näin huomataan Lakatosin matematiikanfilosofian yhtenäisiä piirteitä hänen varhaistuotantonsa teoksen *Proofs and Refutations* sekä myöhemmän MSRP:n välillä.

Lakatos myös syyttää dogmatismia varmuuden arvon asettamisesta toisinaan totuuden arvon edelle. Rudolf Carnapin Wienin piirin aikaiset logiikan kirjoitukset saivat Lakatoksen mukaan useat loogikot pitämään logiikkaa symbolien keskinäisien suhteiden eikä totuusmerkityksien välittymisen tutkimuksena [30, 23, alaviite]. Lakatos ei ole kiinnostunut tyhjiössä itsenään subsistoivista merkkijärjestelmistä, vaan matemaatikkojen työskennellessään esitettämistä lauseista, joiden avulla tiedeyhteisö pyrkii pääsemään lähemmäksi totuutta. Dogmatismin ristiriitainen suhtautuminen intuitioon on Lakatosin erityisen kritiikin kohde. Tämän kritiikin vaikutusalue on laajennettavissa yleisemminkin tieteenfilosofiaan. Intuitionismin (ja myöhemmän konstruktivistisen matematiikan) matematiikanfilosofia voi olla helpommin sovitettavissa Lakatosin lähtökohtiin matemaattisesta tutkimuksesta kuin pohjimmiltaan euklidinen Hilbertin formalismi, vaikka Lakatoksen ajattelusta löytyykin paljon yhtymäkohtia formalismin kanssa, kuten tässä ja aiemmissa luvuissa on osoitettu.

Eräs erityisalue dogmatismin ja skeptisismin välisessä keskustelussa on dogmatismin suhtautuminen intuitioon. Toisaalta intuition epävarmuus tiedetään intuitiivisesti, toisaalta Lakatos nostaa esiin sitaatteja, joissa matemaatikot väittävät tai olettavat intuition olevan ylin auktoriteetti.[1][2] Lakatosin mielestä tämä on ristiriitaista: 1900-luvun metamatematiikka oli kehittynyt intuitioon nojaamiseen kohdistuneesta kritiikistä, mutta 1950-luvulle tultaessa hän huomaa sekä formalististen että logisististen metamatemaatikkojen asettavan *oman* intuitionsa "korkeimmaksi auktoriteetiksi". Tämä naseva dogmatismin kritiikki päättyy retoriseen kysymykseen:

"*Why [have] foundations, if they are admittedly subjective?*"[30, 23]

Lakatos jättää vastaamatta suoraan tähän itse esittämäänsä kysymykseen, joten näennäisesti jää avoimeksi, sanoutuuko hän lopulta irti dogmatistisesta, euklidisesta koulukunnasta tai sen hilbertiläisen formalismin edustamasta koherentismia sisällyttävästä muodosta. Oma tulkintani mukaan Lakatos haluaa pikemminkin nousta kysymyksen yläpuolelle ja tarkastella matemaattista tiedontuotantoa prag-

[1] "*[Matemaatikon] on muistettava, että korkein auktoriteetti on intuitio, ja että ratkeamattomat ristiriidat intuition ja symbolisen logiikan välillä on ratkaistava luopumalla symbolisesta logiikasta.*"Lakatosin viittaus Rosseriin on merkitty epäselvästi. Rosserin alkuperäisessä tekstissä on selvää, että väite on Rosserin itsensä eikä kolmannen käden lainaus, kuten Lakatos antaa ymmärtää [30, 23].[40, 11]

[2] "– – *ylimmäinen testi sille, onko jokin metodi soveliasta laskea metamatematiikkaan kuuluvaksi, on arvioida sen intuitiivista uskottavuutta* – –"[21, 63]

maattisena prosessina käytännön kautta. Tämä näkyy Lakatosin esseen päätösvirkkeessä:

"*Why not honestly admit mathematical fallibility, and try to defend the dignity of* fallible *knowledge from cynical scepticism, rather than to delude ourselves that we shall be able to mend invisibly the latest tear in the fabric of our 'ultimate' intuitions?*"[30, 23]

Matemaattinen tieto on siis arvokasta ja kunniallista erehtyväisyydestään huolimatta. Sen sijaan, että tiedeyhteisö käyttäisi aikaansa erehtymättömyyden illuusion ylläpitoon, olisi sen hyödyllisempää puolustaa saavutetun tiedon oikeutusta skeptisismin ydinargumenteilta: Voidaanko tietää mitään? Entä voidaanko tietää, että myöhempi tieto on aikaisempaa parempaa? Edelliseen kysymykseen Lakatos vastaisi euklidisen koulukunnan ja formalismin mukaisesti "kyllä", ja suhtautuu jälkimmäiseen kysymykseen oman tieteenfilosofiansa mukaisesti: On mahdollista rakentaa päättelyketjuja muotoa "B on tosi jos A on tosi"ja näiden päättelyketjujen paremmuutta voidaan vertailla filosofisten rationaalisuuskriteerien, kritiikin ja dialektiikan avulla. Lakatoksen metamatematiikan takana on kaksi arvoa ylitse muiden: rationaalisuus ja pragmaattisuus. Nämä ilmenevät matemaatikkojen arkityössään kohtaamien ongelmien ratkaisustrategioissa. Vastaus jälkimmäiseen skeptisismin ydinkysymykseen voidaan muotoilla Lakatosin tieteenfilosofian mukaisest myös: mitä rationaalisemman tutkimusprosessin osana matemaattinen tieto syntyy, sitä parempaa se on, ja myös mitä enemmän (meta)matemaattinen teoria avustaa matemaatikkoja heidän arkityönsä ongelmien ratkaisemisessa, sitä parempi teoria on.

On merkittävää, että näiden molempien kriteerien arviointi ei ole enää matematiikan tutkimusmenetelmillä tarkasteltavaa tietoa, vaan tieteenfilosofista pohdintaa. Lakatoksen vastaukset skeptisismin ongelmaan metamatematiikan saralla ovat siis osin lähellä Hilbertin matematiikanfilosofiaa, mutta esitetty filosofian, eikä formaalin logiikan kielellä.

7 Pohdintaa

Lakatos kritisoi euklidista työskentelytapaa matematiikassa sen käytännöstä erottaa totuuden löytäminen ja todistaminen. [27, 72]

"The two activities of guessing and proving are rigidly separated in the Euclidian tradition. The idea of a proof which deserves its name and still is not conclusive was alien to the rigourists [of the nineteenth century]. Counterexamples were regarded as grave and disastrous blemishes: they showed that a conjecture was wrong and that one had to start proving again from scratch." [28, 138]

Käsitteen "guessing"eli arvailu käyttäminen uraauurtavan matemaattisen tutkimuksen kuvailuun on mielestäni retorinen tehokeino, jolla Lakatos korostaa kahden matemaattisen tavoitteen eroa: Eteenpäin katsova arvaileminen, josta itse käytin tämän alaluvun otsikossa sanaa "tutkimus", on jännittävää uuden löytämistä. Tällaista matemaattista toimintaa esiintyy usein vastalöydettyjen aihepiirien, yhteyksien tai sovellusten käsittelyssä. Matemaatikon toiminta ei kuitenkaan ole sokeaa arvailua, vaan suunnitelmallista, rationaalista toimintaa. Lakatosin todistusten ja kumoajien metodi on malli, joka kuvailee ja selittää varsinkin tämän matemaattisen "arvailun"rationaalista rakennetta, luvussa 5.1 esiteltyjen ajatusten mukaisesti. Todistaminen ("proving") puolestaan on taaksepäin katsovaa toimintaa, jolla matemaattinen otaksuma kiinnitetään osaksi laajempaa matemaattista kokonaisuutta.

Riippuen matemaatikon edustamasta matemaattis-filosofisesta koulukunnasta todistaminen joko muuttaa otaksuman (mahdollisesti ikuiseksi) totuudeksi tai maltillisemmin sitoo sen osaksi käytetyn aksioomajoukon loogisia seurauksia. Näistä tulkintakoulukunnista edellinen edustaa euklidista näkemystä, jota esiintyy tässä vahvassakin muodossa esimerkiksi lukion oppikirjojen implisiittisesti välittämässä matematiikkakäsityksessä. Jälkimmäinen tulkinta edustaa Hilbertiläistä formalismia, joka tiedostaa valittujen aksioomien mielivaltaisuuden. Vaikka matematiikan filosofia on harvinainen aihealue matematiikan yliopistokursseissa, useimmat matemaatikot törmäävät uransa aikana vähintäänkin epäsuorasti euklidisen koulukunnan haasteisiin (paradoksit, Gödelin epätäydellisyyslauseet, vaihtoehtoiset aksioomavalinnat) ja joutuvat siten rakentamaan mielessään malleja matematiikan tieteenalasta, jotka selittävät ja sisällyttävät nämä haasteet. Matematiikan opiskelu yliopistoissa ei välttämättä anna opiskelijoille työkaluja tähän dialektiseen prosessiin, jolloin merkittävien tieteenfilosofisten haasteiden, kuten paradokseihin suhtautumisen tai aksioomiin liittyvien arvovalintojen käsittely jää alitajuiseksi ajatustyöksi tai kokonaan käsittelemättä.

Ongelmana tämän alaluvun alun lainauksen mainitsemassa euklidisessa näkemyksessä on, että pieninkin vastaesimerkki kaataa koko teorian. Lakatos rekonstruoi Cauchyn tuotantoa 1800-luvun lopulta teoksen *Proofs and Refutations* ensimmäisessä liitteessä osoittaakseen tämän pyrkimyksiä rajata matemaattisten lauseiden pätevyysaluetta pelastaakseen vakiintuneen matematiikan kumoutumiselta [28, liite I]. Vastaesimerkkejä kuitenkin nousi rajoitettujakin lauseita kohtaan, minkä Lakatos tulkitee euklidisen menetelmän perustavanlaatuiseksi ongelmaksi. Hän tarjoaa ratkaisuvaihtoehdoksi kahden kirjoittamattoman taustaoletuksen hylkäämistä euklidisesta metodista: [28, 138]

1. On olemassa väitteitä, joiden totuuden arvioinnissa intuitiomme on erehtymätön. Koko matematiikka voidaan redusoida tällaisiin väittämiin.

2. Looginen päättely on erehtymätöntä.

Lakatos alkoi luottamaan päättelyyn enemmän myöhempää tuotantoaan kohti asettaen deduktiivisen päättelyn tärkeäksi ja arvostetuksi tieteelliseksi työkaluksi. [28, 138, alaviite 4*][30] Matematiikan tieteenalan kehitys 1900-luvun puolivälissä ja sen jälkeen kuitenkin osoitti, että matemaatikot luopuivat loogisen erehtymättömyyden vaatimuksesta sen sijaan, että olisivat jatkaneet täydellisen järjestelmän etsintää. Hilbertin projektista matematiikan perustan rakentamiseksi luovuttiin. Sen sijaan, että matemaatikot pyrkivät luomaan formalistisen aksioomajärjestelmän, joka sisältäisi kaikki matemaattiset lauseet, tyydyttiin formalisoimaan järjestelmiä, jotka sisältäisivät *käytetyimmät* matemaattiset lauseet. Zermelo-Fraenkel-aksioomat (ZFC) täydennettynä valinta-aksioomalla ja yhdistettynä predikaattilogikkaan on tällainen järjestelmä. Tapauksissa, joissa näiden järjestelmien selitysvoima ei riittänyt, oli mahdollista rakentaa laajempi järjestelmä, joka sisälsi halutut suppeamman järjestelmän ulkopuolelle jääneet lauseet, kuten NBG- tai TC-laajennokset ZFC-aksioomiin tai kontinuumihypoteesin hyväksyminen tai hylkääminen, joista molemmat vaihtoehdot ovat konsistentteja ZFC:n kanssa.

Matemaatikot ovat rakentaneet myös ZFC:tä suppeampia aksioomajärjestelmiä. On löydetty myös ei-triviaaleja järjestelmiä, jotka täyttävät Gödelin täydellisyyslauseet (esimerkiksi Tarskin geometria-aksioomat ja tietyt suljetut kunnat). Näillä suppeilla järjestelmillä voidaan ratkaista rajattuja matemaattisia ongelmia. Gödelin epätäydellisyyslauseet muuttivat matemaatikkojen lähestymistapaa matematiikan perusteisiin. Täydellisen järjestelmän rakentamisen sijaan alettiin tutkia, mitkä aksioomat ovat välttämättömiä minkäkin teoreeman todistamiseksi. Tätä tutkimusohjelmaa kutsutaan käänteiseksi matematiikaksi (*reverse mathematics*). Käänteinen matematiikka on Lakatosin teoksen *Proofs and refutations* hengen mukaista tutkimusta, jossa huomion ytimessä on matemaattisen todistamisen lähtökohta-oletukset ja kielellisen määrittelyn mielivaltaisuus, vaikka käänteinen matematiikka ei hyödynnäkään Lakatosin todistusten ja kumoajien metodia työskentelystrategianaan. Lakatosin vaatimus loogisen päättelyn erehtymättömyyden hylkäämisestä siis toteutui ainakin tietyissä matematiikan osa-alueissa. Logiikkaa ja määritelmiä suoraan käsittelevissä matematiikan osa-alueissa kuten kategoriateoriassa ja formaalin logiikan tutkimuksessa tunnettuja paradokseja ja epätäydellisyyksia voidaan käsitellä tapauskohtaisesti tarkkojen rajausten ja laajennosten kautta, kuten Lakatos kuvailee dialogissaan matemaatikkojen eri strategioita "hirviöihin"suhtautumisessa.

Myöhemmässä tuotannossaan artikkelissa *Infinite Regress and Foundations of Mathematics* Lakatos käsittelee euklidisen menetelmän epistemologiaa laajemmin ja yksityiskohtaisemmin tyytymättä edellisenkaltaisiin yksinkertaisiin korjausehdotuksiin [30].

Mihin todistamista tarvitaan? Eikö tuloksen löytäminen riitä? Matematiikan tieteenalalla tuloksen löytämisen jälkeen se käy läpi näennäisesti erilaisen prosessin tiedeyhteisössä kuin muiden tieteenalojen kohdalla: matemaattisen tiedeyhteisön kritiikissä mielipiteiden kamppailu jää taka-alalle huomion keskittyessä tieteenalalle ominaisen konstruktion, "todistuksen", pätevyyden tarkasteluun. Tässä yleisen tason matemaattisen tiedontuotannon prosessin kuvailussa epämuodolliset ja muodolliset todistukset käyttäytyvät samoin. Selvittyään tästä prosessista ja päästyään osaksi matematiikan kaanonia, tulos mahdollisesti nauttii korkeampaa episteemista arvostusta kuin muiden tieteenalojen tuottama tieto. Tieteen uskotaan olevan rationaalista toimintaa. Tälle näennäiselle erolle halutaan rationaalinen selitys: Miksi todistaminen on rationaalista toimintaa matemaattisessa tiedontuotannossa? Onko se? Ehdotan mahdollisia syitä todistamisen metodille:

- Todistaminen vakiintuneena metodina matematiikan tiedontuotannossa
- Epistemologisen lisävahvistuksen tarve

Todistaminen on ollut matemaattisessa tiedontuotannossa käytössä antiikin Kreikasta asti. Lakatos tarkastelee todistamisen epistemologiaa teoksen *Proofs and refutations*[28] lisäksi erityisesti artikkeleissaan *What does a proof prove?*[25] ja *Infinite regress and foundations of mathematics*[30]. Näitä Lakatosin metodologisia ja epistemologisia tarkasteluja käsiteltiin tarkemmin luvuissa 5.2 ja 4.

Teoksessa *Proofs and Refutations* Lakatos palauttaa metamatemaattisen keskustelun abstraktista, formaalista logiikasta matemaatikkojen arkityön tasolle ja samalla käytetyn kielen helpommin saavutettavaksi, filosofiseksi dialogiksi. Teosta voidaan lukea joko erityislaatuisen helppotajuisena matemaattisena tutkielmana tai hieman teknisenä humanistisena filosofian tutkielmana. Lakatos on matematiikanfilosofiassaan yhtä aikaa sekä matematiikan ja filosofian välimaastossa, että dogmatismin ja skeptisismin välimaastossa. Mielestäni Lakatoksen ajatukset ovat parhaimmillaan, kun häntä tulkitaan sillanrakentajana eri suuntien välissä tavalla, joka antaa uudenlaisen, hedelmällisen näkökulman matematiikkaan.

8 Lähdeluettelo

[1] Anapolitanos D.A. (1989) *Proofs and Refutations: A Reassessment* julkaistu osana teosta *Imre Lakatos and Theories of Scientific Change*, taittajina Gavroglu, K., Goudaroulis, Y. & Nicolacopoulos, P-. Springer Netherlands, Amsterdam.

[2] Bagçe, S. & Başkent, C. 2009. *An Examination of Counterexamples in Proofs and Refutations*. Philosophia Scientiæ, 13(2), 3-20.

[3] Brentjes, S. 2008. *Elements: Reception of Euclid's Elements in the Islamic World.* Kokoomateoksessa Selin, H. 2016. *Encyclopaedia of the History of Science, Technology, and Medicine in Non-Western Cultures.* Springer. Dordrecht. doi:10.1007/978-1-4020-4425-0_9379

[4] Brouwer, L.E.J., 1907. *Over de Grondslagen de Wiskunde.* University of Amsterdam, Amsterdam.

[5] Caroll, L. 1895. *What the Tortoise Said to Achilles*. Mind, 104(416):691-693. doi:10.1093/mind/104.416.691 JSTOR:2254477

[6] Cauchy, A.L., 1821. *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechique.* De Bure, Pariisi.

[7] Corfield, D. 1997. *Assaying Lakatos's Philosophy of Mathematics.* Studies in History and Philosophy of Science. Springer. doi.org/10.1016/S0039-3681(96)00002-7

[8] Corfield, D. 2002. *Argumentation and the Mathematical Process*. Julkaistu teoksessa *Appraising Lakatos: Mathematics, Methodology and the Man.* Argumentation and the Mathematical Process. Kampis, Kvasz & Stöltzner (ed). Kluwer Academical Publishing, Dordrecht.

[9] Feyerabend, P. 1978. *Science in a Free Society.* NLB, Lontoo.

[10] Gray, J., 2019. *Epistemology of Geometry.* The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2019 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/fall2019/entries/epistemology-geometry/>.

[11] Heath, T.L., 1925. *The Thirteen Books of Euclid's Elements.* Toinen laitos (1956). Dover, New York.

[12] Heule, Kullmann & Marek, 2016. *Solving and Verifying the Boolean Pythagorean Triples Problem via Cube-and-Conquer*. Lecture Notes in Compu-

ter Science, pp. 228–245. Springer International. doi:10.1007/978-3-319-40970-2_15

[13] Heyting, A., 1934. *Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus. Beweistheorie.* Springer, Berliini.

[14] Hilbert, D. (1925). On the infinite. Julkaistu teoksessa Benacerraf, P. & Putnam, H. (1983) *Philosophy of mathematics: Selected readings, Second edition.* Cambridge University Press, Cambridge.

[15] Hilbert, D. (1927). The foundations of mathematics. Julkaistu teoksessa Van Heijenoort, J. (1996) *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931.* Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts.

[16] Hilbert, D. & Ackermann, W. 1928. *Grundzügen der theoretischen Logik.* Springer-Verlag, Berliini.

[17] Hilbert, D. & Bernays, P. 1934, 1939. *Grundlagen der Mathematik I,II.* Springer-Verlag, Berliini.

[18] Hintikka, J. & Remes, U. 1974. *The method of analysis. Its geometrical origin and its general significance.* Boston Studies in the Philosophy of Science, Vol. XXV. Reidel. Dordrecht.

[19] Homans, G.C. (1984) *Coming to My Senses: The Autobiography of a Sociologist.* Routledge, United Kingdom.

[20] Kiss, O. 2002. *Mathematical Heuristics–Lakatos and Pólya.* Julkaistu teoksessa *Appraising Lakatos: Mathematics, Methodology and the Man.* Argumentation and the Mathematical Process. Kampis, Kvasz & Stöltzner (ed). Kluwer Academical Publishing, Dordrecht.

[21] Kleene, S.C. (1952) *Introduction to Metamathematics* North Holland.

[22] Koetsier, T. (1991). *Lakatos' Philosophy of Mathematics: A Historical Approach* (Studies in the History and Philosophy of Mathematics, Vol. 3). Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam. DOI:10.1016/S0928-2017(07)80017-X

[23] Kuukkanen, J-M. 2017. *Lakatosian Rational Reconstruction Updated.* International Studies in the Philosophy of Science, 31:1, 83-102, DOI: 10.1080/02698595.2017.1370930

[24] Lakatos, I., 1961. *The method of analysis-syntesis.* Osa 1a: *Analysis-Synthesis: A Pattern of Euclidean Heuristic And Its Criticism (a) Prologue on analysis and synthesis.* Julkaistu kokoomateoksessa J. Worrall & G. Currie (Editoi-

jat), *Mathematics, Science and Epistemology* (pp. 70-72). Cambridge University Press, Cambridge. doi:10.1017/CBO9780511624926.003

[25] Lakatos, I., 1961. *What does a mathematical proof prove?* Julkaistu kokoomateoksessa J. Worrall & G. Currie (Editoijat), *Mathematics, Science and Epistemology* (pp. 61-69). Cambridge University Press, Cambridge. doi:10.1017/CBO9780511624926.003

[26] Lakaros, I. 1970. *History of Science and Its Rational Reconstructions*. Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association. Springer.

[27] Lakatos, I., 1974. *The method of analysis-syntesis.* Osat 1b-2d. Julkaistu kokoomateoksessa J. Worrall & G. Currie (Editoijat), *Mathematics, Science and Epistemology* (pp. 72-103). Cambridge University Press, Cambridge. doi:10.1017/CBO9780511624926.003

[28] Lakatos, I. (1976) *Proofs and Refutations* Cambridge University Press. Edited by Worrall, J. & Zahar, E.

[29] Lakatos, I., 1978. *A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics?* Julkaistu kokoomateoksessa J. Worrall & G. Currie (Editoijat), *Mathematics, Science and Epistemology* (pp. 24-42). Cambridge University Press, Cambridge. doi:10.1017/CBO9780511624926.003

[30] Lakatos, I. (1978). *Infinite regress and foundations of mathematics.* Julkaistu osana teosta J. Worrall & G. Currie, *Mathematics, Science and Epistemology.* Cambridge University Press, Cambridge. DOI:10.1017/CBO9780511624926.002 [Alkuperäinen julkaisu 1962. *Aristotelian Society Supplementary Volume*, 36: 155-94. The Aristotelian Society.]

[31] Lakatos, I. (1978). *The Methodology of Scientific Research Programmes: Philosophical Papers Volume 1.* Cambridge University Press, Cambridge.

[32] Mancosu, P. (2010) *The Adventure of Reason: Interplay Between Philosophy of Mathematics and Mathematical Logic, 1900-1940*. Oxford University Press, Oxford.

[33] Metamath.org *http://us.metamath.org/mpeuni/mmset.html.* Luettu 7.2.2022.

[34] Molk, J., 1909, uusintapainos 1992. *ENCYCLOPÉDIE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, Tome I, Arithmétique et Algèbre : Vol. 1, Arithmétique , 1904-1909.* Editions Jacques Gabay, Pariisi.

[35] Musgrave, Alan and Pigden, Charles, "Imre Lakatos", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2016 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/lakatos/>.

[36] Opetushallitus. 2019. *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019.* PunaMusta, Helsinki.

[37] Poincaré, H. 1905. *La Valeur de la Science.* Flammarion, Pariisi. Auktorisoitu käännös englanniksi: Halsted, G.B., 1913. *The Foundations of Science* pp. 359-546. The Science Press, Lancaster, Pennsylvania.

[38] Pólya, G. (1945) *How to Solve It.* Princeton University Press, Princeton.

[39] Popper, K.R., 1963. *Conjectures and Refutations: The Growth of Scientific Knowledge.* Routledge, Lontoo.

[40] Rosser, J. Barkley. 1953. *Logic for mathematicians.* McGraw-Hill Publishing Co. Lontoo.

[41] Szabó, A., 1978. *The Beginnings of Greek Mathematics.* Reidel, Dordrecht.

[42] Van Atten, M. ja Sundholm, G., 2015. *L.E.J. Brouwer's "Unreliability of the logical principles". A new translation, with an introduction.* arXiv:1511.01113v1 [math.HO], doi:10.13140/RG.2.1.4845.2563

[43] Von Fritz, K. & Christianidis, J. (ed.), 2004. *The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum.* Julkaistu kokoomateoksessa Boston Studies in the Philosophy of Science: Classics in the History of Greek Mathematics. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-2640-9_11

[44] Weyl, H. 1949. *Philosophy of Mathematics and Natural Science.* Princeton University Press, Princeton.

[45] Zach, R., "Hilbert's Program", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2019 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/fall2019/entries/hilbert-program/>.

[46] Zammito, J. H. 2004. *A Nice Derangement of Epistemes: Post-positivism in the Study of Science from Quine to Latour.* University of Chicago Press, Chicago.