



Mäkikallio Pinja

Oppimisvälineiden hyödyntäminen matematiikan oppimisessa alkuopetusikäisillä

Kasvatustieteen kandidaatin tutkielma
KASVATUSTIETEIDEN TIEDEKUNTA
Opetus- ja kasvatusalan tutkinto-ohjelma, Luokanopettaja
2022

Oulun yliopisto

Kasvatustieteiden tiedekunta

Oppimisvälineiden hyödyntäminen matematiikan oppimisessa alkuopetusikäisillä (Pinja Mä-kikallio)

Kasvatustieteen kandidaatin tutkielma, 39 sivua

toukokuu 2022

Kandidaatin tutkielmani tavoitteena oli selvittää, miten oppimisvälineitä hyödynnetään alkuopetuksen matematiikan opetuksessa. Halusin selvittää, millaisia ja miten oppimisvälineitä alkuopetuksessa hyödynnetään. Tutkimuskysymyksiä minulla oli kaksi: 1. ”Millaisia tutkimustuloksia oppimisvälineiden hyödyntämisestä matematiikan oppimisessa on saatu selville?” ja 2. ”Miten oppimisvälineitä voidaan hyödyntää alkuopetuksen matematiikan opetuksessa *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden 2014* mukaan?”. Tutkimusmenetelmänä olen käyttänyt kuvailevaa kirjallisuuskatsausta, joka painottuu integroivaan orientaatioon. Aineistonkeruu on tapahtunut eri tietokantoja hyödyntäen sekä löytämieni lähteiden lähdeluetteloihin tutustumalla.

Tutkielmassani havaitsin, että useat tutkijat kannattavat konkreettisuuden hyödyntämistä matemaattisten ongelmien havainnollistamiseen. Konkreettisuutta keinoina voidaan hyödyntää sekä oppimisvälineitä että toiminnallisia menetelmiä, kuten leikkejä ja pelejä. Oppimisvälineet jaetaan tutkimuskirjallisuudessa varsinaisiin eli formaaleihin sekä informaaleihin oppimisvälineisiin. Formaaleja oppimisvälineitä ovat esimerkiksi kymmenjärjestelmävälineet ja geolauta, kun taas informaaleina oppimisvälineinä voidaan käyttää arkipäiväisiä esineitä, kuten hammastikkuja, käpyjä tai kananmunakennoja. Oppimisvälineet voidaan myös jakaa fyysisiin, virtuaaliin ja konkreettisiin (*tangible*) oppimisvälineisiin.

Lisäksi havaitsin tutkielmassani *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden 2014* kannustavan konkreettisuuden hyödyntämiseen niin matematiikan oppitunneilla kuin arviointitilanteissakin. Alkuopetuksen matematiikan opetuksen tavoitteiden täyttämiseksi oppimisvälineiden käyttäminen on luonnollista opetuksessa. Oppimisvälineiden käyttäminen uuden käsitteen opettamisen aluksi tukee oppilaan matemaattisen ajattelun kehittymistä, jonka jälkeen voidaan siirtyä käyttämään visuaalisia kuvamalleja ja lopuksi matemaattista symbolikieltä. Opettaja voi myös pyytää oppilasta esittämään symbolikielisen matemaattisen tehtävän esimerkiksi piirtäen tai oppimisvälineiden avulla, jolloin opettajalle havainnollistuu oppilaan matemaattinen ajattelu. Konkreettisuuden ohella myös ajattelun kielentäminen sanallisesti on tärkeää.

Avainsanat: alkuopetus, oppimisvälineet, konkreettisuus, toiminnallisuus

Sisältö

| | |
|---|-----------|
| 1. Johdanto..... | 4 |
| 2. Tutkimuksen tavoite ja toteutus | 6 |
| 2.1 Tutkimuskysymykset..... | 6 |
| 2.2 Tutkimusmenetelmä | 7 |
| 3. Teoreettinen viitekehys..... | 8 |
| 3.1 Brunerin oppimisteoria | 8 |
| 3.2 Konkreettisuus matematiikan opetuksessa..... | 10 |
| 3.3 Kognitiivisen kehityksen teoria | 12 |
| 3.4 Montessoripedagogiikka..... | 13 |
| 3.5 Varga-Neményi-pedagogiikka..... | 16 |
| 4. Matematiikan opetus ja opetussuunnitelma | 18 |
| 4.1 Matematiikka oppiaineena alkuopetuksessa | 18 |
| 4.2 Matematiikan opetuksen tavoitteet vuosiluokilla 1–2..... | 19 |
| 4.3 Matematiikan sisältöalueet vuosiluokilla 1–2..... | 21 |
| 4.4 Matematiikan oppiaineen arviointi vuosiluokilla 1–2..... | 22 |
| 5. Oppimisvälineet..... | 23 |
| 5.1 Fyysiset oppimisvälineet..... | 24 |
| 5.2 Virtuaaliset oppimisvälineet | 26 |
| 5.3 Konkreettiset oppimisvälineet | 27 |
| 5.4 Varga-Neményi-välineet ja Montessorin didaktiset materiaalit..... | 27 |
| 6. Yhteenveto | 30 |
| 6.1 Tutkimustuloksia oppimisvälineiden hyödyntämisestä matematiikan oppimisessa | 30 |
| 6.2 Oppimisvälineiden hyödyntäminen vuosiluokkien 1–2 matematiikan oppimisessa | 32 |
| 7. Pohdinta | 34 |
| 7.1 Tutkimuksen luotettavuus ja eettisyys | 34 |
| 7.2 Jatkotutkimuksen tekeminen aiheesta..... | 35 |
| Lähteet | 36 |

1. Johdanto

Kandidaatin tutkielmani aiheena on oppimisvälineiden hyödyntäminen matematiikan oppimisessa alkuopetusikäisillä. Mielenkiintoni aihetta kohtaan syntyi jo opintojeni ensimmäisenä lukuvuotena, jolloin opiskelin matematiikan didaktiikkaa. Didaktiikan opintojaksollamme esiteltiin paljon erilaisia oppimis- ja apuvälineitä, joita voisi hyödyntää matematiikan opettamisessa. Kaipasin kuitenkin lisätietoa oppimisvälineistä ja niiden hyödyntämisestä, jonka vuoksi päätin tehdä kandidaatin tutkielmani aiheeseen liittyen. Tutkielmani ikäryhmän halusin rajata alkuopetusikäisiin, koska alkuopetuksessa rakennetaan kestävä perusta lapsen matemaattiselle ajattelulle ja keskeisten käsitteiden ymmärtäminen on tärkeää, jotta oppiminen onnistuu myöhemmin (Risku, 2002).

Suomalaisen peruskoulun kestäessä yhdeksän vuotta, oppilas opiskelee matematiikkaa näiden yhdeksän vuoden aikana vähintään 32 vuosiviikkotuntia, jossa yksi vuosiviikkotunti vastaa yhteensä 38 oppituntia (Valtioneuvoston asetus perusopetuslaissa tarkoitetun opetuksen valtakunnallisista tavoitteista ja perusopetuksen tuntijaosta 793/2018, 6§). 32 vuosiviikkotunnista 21 vuosiviikkotuntia opetetaan vuosiluokilla 1–6 ja loput 11 vuosiviikkotuntia vuosiluokilla 7–9 (Valtioneuvoston asetus perusopetuslaissa tarkoitetun opetuksen valtakunnallisista tavoitteista ja perusopetuksen tuntijaosta 793/2018, 6§). Vielä tarkemmin ottaen alkuopetuksessa matematiikkaa opetetaan yhteensä kuusi vuosiviikkotuntia (Valtioneuvoston asetus perusopetuslaissa tarkoitetun opetuksen valtakunnallisista tavoitteista ja perusopetuksen tuntijaosta 793/2018, 6§). Luokanopettaja opettaa noin kaksi kolmasosaa matematiikan oppimäärästä peruskoulussa, kun taas matematiikan aineenopettaja opettaa noin yhden kolmasosan. Koska luokanopettaja opettaa suuren osan matematiikasta peruskoulussa, on tärkeää, että hänen taitonsa opettaa oppiainetta ovat kunnossa.

Keskeisiä käsitteitä kandidaatin tutkielmassani ovat *alkuopetus*, *oppiminen*, *oppimisvälineet* sekä *matemaattiset taidot*. *Alkuopetuksella* tarkoitetaan vuosiluokkien 1–2 aikana tapahtuvaa opetusta, joka niveltyy sekä esiopetukseen että myöhempään perusopetukseen (Brotherus ym., 2002, s. 30). Esi- ja alkuopetuksen keskeinen tehtävä on luoda pohja lapsen oppimiselle sekä tukea ja edistää lapsen kasvua, kehitystä ja hyvinvointia (Kyrönlampi ym., 2020, s. 9). Esi- ja alkuopetuksessa lasten yksilölliset kasvu- ja oppimispolut tulee ottaa huomioon ja pyrkiä joustavaan etenemiseen, mitä tulee oppimiseen (Kyrönlampi ym., 2020, s. 9–10).

Siljander (2014) määrittelee *oppimisen* olevan laajimmillaan prosessi, jossa keskeistä on muutos oppijan taidoissa, tiedoissa, ajattelutavoissa tai toiminnassa. Tutkielmassani oppimiseen keskeisesti liittyvä käsite on *oppimisväline*. Oppimisvälineelle on monia nimityksiä kirjallisuudessa esimerkiksi Swan ja Marshall (2010) puhuvat manipulatiivisista materiaaleista (*manipulative materials*), kun taas Tikkanen (2008) käyttää käsitettä toimintaväline ja Ikäheimo (2021) käsitteenmuodostusväline-käsitettä. Itselleni luontevimmaksi käsitteeksi on vakiintunut oppimisvälineen käsite, jolla tarkoitan oppilaan itsensä käytettävissä olevia havainnollistavia ja ajattelua tukevia materiaaleja. Tutkielmassani tarkastelen oppimista ja siinä hyödynnettäviä oppimisvälineitä matematiikan alkuopetuksen näkökulmasta.

Lisäksi tutkielmani olennainen osa ovat *matemaattiset taidot*. Matemaattiset taidot jaetaan useaan eri osatekijään, jotka ovat numeerinen tieto, aritmeettisten yhdistelmien muistaminen, matemaattisten käsitteiden ja periaatteiden ymmärtäminen, menetelmätietous ja -taito sekä ongelmanratkaisutaidot (Aunola & Nurmi, 2018). Aunola ja Nurmi (2018) kertovat matemaattisten taitojen kehityksen etenevän hierarkkisesti peruskäsitteiden ja taitojen oppimisesta monimutkaisempien tehtävien suuntaan. Tarkastelen matemaattisia taitoja *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden 2014* vuosiluokkien 1–2 matematiikan osuuden näkökulmasta.

Seuraavaksi tutkielmani etenee tutkimustavoitteen, tutkimuskysymysten ja tutkimusmenetelmän esittelyn jälkeen tutkielmani teoreettiseen viitekehykseen. Teoreettisessa viitekehyksessä esittelen useita teorioita, jotka puoltavat konkreettisuuden hyödyntämistä opetuksessa. Sen jälkeen avaan *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteita 2014* alkuopetuksen ja erityisesti matematiikan näkökulmasta. Viidennessä luvussa esittelen oppimisvälineisiin liittyvää tutkimustietoa sekä sitä, miten ne jaotellaan ja millaisia etuja ja haasteita niiden käyttöön liittyy. Tämän jälkeen kokoan yhteenvedossa vastaukset tutkimuskysymyksiini sekä viimeisessä luvussa pohdin tutkielmani tekemistä myös tutkimusetiikan ja luotettavuuden näkökulmista.

2. Tutkimuksen tavoite ja toteutus

Tässä luvussa esittelen tutkimukseni tavoitteen, tutkimuskysymykset ja tutkimusmenetelmän sekä avaan tiedonhankintaprosessiani. Tuomen ja Sarajärven (2009) mukaan tutkimuksen tavoite ilmaisee tutkimuksen hyödynnettävyyden näkökulman eli sen, mitä hyötyä valmiista tutkimuksesta tulee olemaan. Kandidaatin tutkielmani tavoitteena on selvittää oppimismateriaalien hyödyntämistä matematiikan oppimisessa alkuopetuksessa. Erityisesti haluan selvittää, millaisia oppimismateriaalit alkuopetuksen matematiikassa ovat ja miten niitä voidaan hyödyntää opetuksessa.

2.1 Tutkimuskysymykset

Mäntylän ja kollegojen (2013) mukaan hyvä tutkimuskysymys on neutraali eikä se sisällä vahvaa ennako-oletusta tutkimuksen tuloksesta. Tutkimuskysymyksen tulee olla sellainen, johon voi vastata hyvin oman tutkimuksensa ja sen aineiston puitteissa (Mäntylä ym., 2013). Sen vuoksi onkin tärkeää muistaa, että tutkimuskysymyksiä voi muokata ja tarkentaa tutkimusprosessin ja aineistonkeruun edetessä, jotta tutkimuskysymykset ja aineisto vastaavat toisiaan (Mäntylä ym., 2013; Puusa & Juuti, 2020). Omat tutkimuskysymykseni ovat muotoutuneet tutkimusprosessin aikana paljon alkuperäisestä, mutta lopulta sain ne muotoiltua lopulliseen muotoonsa. Koska kandidaatin tutkielmani tavoitteena on selvittää oppimismateriaalien hyödyntämistä alkuopetuksen matematiikassa, olen valinnut tutkimuskysymyksiksi seuraavat kysymykset:

1. Millaisia tutkimustuloksia oppimismateriaalien hyödyntämisestä matematiikan oppimisessa on saatu selville?
2. Miten oppimismateriaaleita voidaan hyödyntää alkuopetuksen matematiikan opetuksessa *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden 2014* mukaan?

Ensimmäisellä tutkimuskysymyksellä haluan selvittää, millaisia vaikutuksia tutkimusten mukaan oppimismateriaalien käyttämisellä on havaittu olevan esimerkiksi matemaattisen ajattelun kehittymiseen. Haluan saada selville, millaisella tutkimustiedolla oppimismateriaalien käyttämistä matematiikan opetuksessa perustellaan. Pyrin selvittämään tarkemmin, millaisia oppimismateriaaleita on olemassa ja miten niitä jaotellaan sekä millaisia haasteita ja etuja niiden käyttämiseen opetuksessa liittyy. Toisella tutkimuskysymyksellä pyrin selvittämään, millaisia oppimismateriaaleita *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden 2014* mukaiseen vuosiluokkien 1–2

matematiikan opetukseen voisi käyttää. Pyrin tarkastelemaan monipuolisesti eri näkökulmista, miten konkreettisuus ja erilaisten oppimisvälineiden hyödyntäminen näkyvät *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa 2014*.

2.2 Tutkimusmenetelmä

Tutkimusmenetelmänä käytän kuvailevaa kirjallisuuskatsausta, joka on yleiskatsaus, jossa tehdään tutkimusta tutkimuksesta (Salminen, 2011). Sen tarkoituksena on näyttää, miten asiaa on aiemmin tutkittu ja millaisista näkökulmista sitä on tutkittu (Hirsjärvi ym., 2009). Kuvaileva kirjallisuuskatsaus voidaan jakaa narratiiviseen ja integroivaan orientaatioon (Salminen, 2011). Narratiivisessa kirjallisuuskatsauksessa pyritään antamaan laaja kuva käsiteltävästä aiheesta (Salminen, 2011). Kun taas integroivalla kirjallisuuskatsauksella aihetta halutaan tutkia mahdollisimman monipuolisesti (Salminen, 2011). Oma tutkielmani kallistuu enemmän integroivaan kirjallisuuskatsaukseen, sillä integroivalla kirjallisuuskatsauksella saan luotua monipuolisen kuvan tutkielman aiheestani.

Olen etsinyt tutkielmaani aineistoa eri tietokannoista, kuten Ebsco Databasesta, Scopuksesta ja Google Scholarista. Hakusanoina olen käyttänyt sekä suomen- että englanninkielisiä termejä, mutta aiheeseeni sopiva aineisto on pääasiassa englanniksi. Hakusanojani ovat olleet esimerkiksi *alkuopetus*, *primary education*, *matematiikka*, *mathematics*, *oppimisväline*, *instructional material*, *concrete material* sekä *manipulative*. Näillä hakusanoilla sekä eri artikkeleihin ja niiden lähdeluetteloihin tutustumalla olen löytänyt suurimman osan lähdemateriaalistani.

Hakusanojen käyttöön ja muodostamiseen olen saanut apua Oulun yliopiston kirjaston informaatikolta. Seuraavaksi esittelen käyttämiäni hakusanoja ja -lausekkeita. Hakusanojen yhdistämiseen olen käyttänyt Boolean hakuoperaattoreita OR ja AND. Lisäksi hakusanojen katkaisumerkkinä olen käyttänyt asteriski-merkkiä (*). OR-operaattorin avulla voi hakea kahta sanan synonyymia tai termiä eri kielillä yhtäaikaaisesti, esimerkiksi *alkuope** OR ”*primary education*” OR ”*elementary education*”. AND-hakuoperaattoria käytetään silloin, kun halutaan molempien hakusanojen löytyvän hakutuloksen otsikosta tai kuvailutekstistä. AND-operaattoria olen käyttänyt esimerkiksi seuraavalla tavalla: *mathematic** AND ”*primary education*”. Yksi hakulausekkeista, jolla olen löytänyt aineistoa, on: *alkuope** OR ”*primary education*” AND *matema** OR *mathematic** AND ”*instructional material**” OR ”*concrete material**” OR *manipulative**.

3. Teoreettinen viitekehys

Tässä luvussa tarkastelen kandidaatin tutkielmani teoreettista viitekehystä. Teoreettisessa viitekehyksessä esittelen Jerome Brunerin (1967) oppimisteoriaa, jossa hän jakaa abstraktin käsitteen oppimisen kolmelle tasolle: toiminnalliselle, ikoniselle ja symboliselle tasolle. Carbonneun ja kollegojen (2013) mukaan konkreettisten välineiden hyödyntämisen kognitiiviset edut ovat suurempia nuoremmilla lapsilla, jotka vielä harjoittelevat ylempien tasojen matemaattisten käsitteiden esittämismuotoja. Tämän vuoksi esittelen Brunerin teoriaa jatkojalostaneiden tutkijoiden havaintoja sekä sitä, millaisia etuja ja haasteita myös Brunerin teorian esiin nostama konkreettisuus tuo matematiikan opetukseen. Sen jälkeen esittelen Piaget'n ja Inhelderin (1977) kognitiivisesta kehityksestä kertovan teorian. Heidän teoriansa kuvaa tarkasti lapsen ajattelun kehittymistä ja se tukee ajatusta siitä, että konkreettisuuden hyödyntäminen opetuksessa auttaisi lasta hahmottamaan matemaattisia käsitteitä. Erityisesti konkreettisten operaatioiden vaiheessa lapsi hyötyy konkreettisista malleista opetuksessa (Piaget & Inhelder, 1977).

Esittelen myös Montessori-pedagogiikkaa etenkin matematiikan näkökulmasta, sillä Montessorin didaktiset materiaalit ovat olleet yksiä ensimmäisiä konkreettisia oppimisvälineitä matematiikan opetukseen (Lindgren, 1990). Viimeiseksi teen katsauksen Varga-Neményi-menetelmään, jonka keskeisenä pedagogisena periaatteena voidaan pitää sitä, että oppilas saa todellisuuteen perustuvia kokemuksia käsitteiden selventämiseksi (Oravec & Kivovics, 2005; Tikkanen, 2008). Montessori-pedagogiikkaan ja Varga-Neményi-menetelmään perustuvassa opetuksessa konkreettisuus ja toiminnallisuus ovat tärkeitä ajattelun ja käsitteiden ymmärryksen kehittämisen keinoja. Molemmissa näissä hyödynnetään runsaasti erilaisia oppimisvälineitä, joita esittelen tutkielmani luvussa viisi.

3.1 Brunerin oppimisteoria

Jerome Brunerin (1967) kehittämässä oppimisteoriassa on kolme tasoa, jotka yksilö suorittaa saavuttaakseen taidon (Bruner, 1967, s. 10–12). Ensimmäinen tasoista on toiminnallinen (*enactive*) taso, jossa oppiminen tapahtuu toiminnan kautta (Bruner, 1967, s. 10). Tällä tasolla hyödynnetään runsaasti erilaisia oppimisvälineitä, kuten palikoita ja helmiä laskemisen tukena (Resnick & Ford, 1981). Konkreettisten välineiden lisäksi välittömiä kokemuksia voidaan saada myös liikkumalla, esimerkiksi hyppimällä tai taputtamalla (Manninen ym., 2020). Toiminnallisella tasolla oleva oppilas saattaa myös koskettaa sormillaan leukaansa tai pöydän kantta laskiessaan, jolloin laskeminen näkyy motorisena toimintana (Resnick & Ford, 1981).

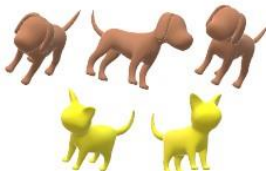
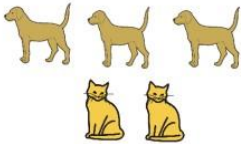
Oppilas saattaa tällöin toistaa huomaamattaan samaa liikettä, jota hän teki, kun hän opetteli laskemaan tavaroita koskettaen ja luetteli samanaikaisesti lukusanoja (Resnick & Ford, 1981).

Seuraavalla tasolla eli ikonisella (*iconic*) tasolla oppimisen tukena hyödynnetään visuaalisia malleja sekä näköaistimuksia (Bruner, 1967, s. 10–11). Mannisen ja kollegoiden (2020) mukaan erityisesti visuaalinen ja auditiivinen aistikanava ovat käytössä ikonisella tasolla. Ikonisella tasolla oppilas siirtyy konkreetian ja fyysisten kokemusten alueelta mielikuvien alueelle, jossa oppilas hyödyntää toiminnallisella tasolla rakentamiaan mielikuvitelmiä (Resnick & Ford, 1981). Kolmas ja viimeinen taso on symbolinen (*symbolic*) taso, jossa oppiminen tapahtuu symboleiden avulla (Bruner, 1967, s. 11). Symboleja ovat esimerkiksi numerot tai kirjaimet (Bruner, 1967, s. 11). Symbolisella tasolla toiminta ja visuaaliset havainnot kielennetään symbolien avulla (Bruner 1967, s. 14). Tällä tasolla lapsi huomaa, että matemaattiset symbolit ovat ikään kuin lyhenteitä asioille, jolloin niiden käyttäminen on järkevämpää kuin saman asian esittäminen laskupalikoiden avulla (Resnick & Ford, 1981).

Seuraavaksi havainnollistan yhden esimerkkilaskutehtävän avulla opiskeltavan asian standardoimisesta toiminnallisen ja ikonisen tason kautta symboliselle tasolle. Kuviossa yksi on havainnollistus erilaisten materiaalien hyödyntämisestä sanallisessa yhteenlaskutehtävässä Brunerin (1967) tasoilla. Laskutehtävä on ”Laske, kuinka monta eläintä Maijalla on, jos hänellä on kolme koiraa ja kaksi kissaa.” Toiminnallisella tasolla oppilas voi käyttää apuna koira- ja kissaleluja, kuten kuvioon yksi on kuvattu. Tällöin oppilaalla on mahdollisuus hyödyntää sekä tunto- että näköaistia laskiessaan leluja.

Kuvio 1.

Brunerin tasojen konkretisaatio esimerkkinä sanallinen yhteenlaskutehtävä ”Laske, kuinka monta eläintä Maijalla on, jos hänellä on kolme koiraa ja kaksi kissaa”.

| Brunerin taso | Tehtävän esitysmuoto |
|---|--|
| Toiminnallinen (<i>enactive</i>) taso |  |
| Ikoninen (<i>iconic</i>) taso |  |
| Symbolinen (<i>symbolic</i>) taso | $3+2=5$ |

Ikonisella tasolla oppilas voi käyttää apunaan kuvamalleja tai piirroksia kolmesta koirasta ja kahdesta kissasta ratkaistakseen laskutehtävän (ks. kuvio 1). Ikäheimon (2021) mukaan piirtäminen ja oman työskentelynsä selittäminen auttaa oppilasta muistamaan asian paremmin. Viimeisellä eli symbolisella tasolla oppilaan yhteenlaskutaito on kehittynyt siihen pisteeseen, että oppilas osaa muodostaa laskutehtävän käyttäen matemaattisia symboleja eli numero- ja operaatiomerkkejä (ks. kuvio 1).

Kuvion yksi sanallisen laskutehtävän konkretisaatio on hyvä esimerkki siitä, kuinka Brunerin (1967) tasoja hyödynnetään matematiikan oppimisessa. Omassa tutkielmassani olen kiinnostunut erityisesti toiminnallisen tason oppimisesta, jossa oppimisen tukena hyödynnetään erilaisia apu- ja oppimisvälineitä sekä motorisia kokemuksia. Lindgren (1990) muistuttaakin, ettei konkreettisten materiaalin käyttämisen oppiminen ole itsessään tavoite, vaan ne ovat oppimisen apuvälineitä. Opettajan tulee auttaa oppilaita ymmärtämään yhteys oppimisvälineen ja matemaattisen ongelman välillä (Lindgren, 1990). Matemaattisen oppimisen kumulatiivisuuden vuoksi myös ikonisen tason oppimisvälineet, kuten erilaiset kuvamallit kuuluvat tutkielmani aihepiiriin.

3.2 Konkreettisuus matematiikan opetuksessa

Koska tutkielmani aiheeseen liittyvät hyvin vahvasti oppimisvälineet sekä konkreettiset materiaalit, haluan seuraavaksi avata niiden hyödyntämisestä saatuja tuloksia. Tutkimusten mukaan konkreettisten välineiden käyttämisestä matematiikan opetuksessa on saatu monensuuntaisia tuloksia (McNeil & Jarvin, 2007). Joidenkin tutkimusten mukaan ne hyödyttävät oppimista, kun taas toisissa niillä ei ole havaittu olevan mitään merkitystä, mutta on myös havaittu, että ne saattavat jopa haitata oppimista (McNeil & Jarvin, 2007). McNeil ja Jarvin (2007) kokoavat artikkelissaan kolme keskeistä ajatusta konkreettisuuden hyödyntämisestä matematiikan opetuksessa. Ensimmäinen niistä on se, että konkreettisten materiaalien ajatellaan tarjoavan oppilaalle lisämateriaalia matematiikan oppimisen tueksi (McNeil & Jarvin, 2007). Opettajan käytäessä useita erilaisia opetusmenetelmiä ja esimerkiksi kuvallisia sekä konkreettisiä oppimisvälineitä hän tavoittaa suuremman joukon oppilaita (McNeil & Jarvin, 2007). Opetustapojen monipuolisuuden avulla opettaja pystyy vastaamaan useamman oppijan oppimistyyliin.

Toinen heidän pääajatuksistaan on se, että konkreettisten oppimisvälineiden hyödyntäminen auttaa oppilasta todentamaan oman elämismaailmansa ymmärrystä ja tietoa (McNeil & Jarvin,

2007). Tästä syystä matemaattiset oppimisvälineet on suunniteltu usein vastaamaan lapsen elämisaailman tietoa (McNeil & Jarvin, 2007). Kun oppimisvälineessä on lapselle tuttuja piirteitä, on lapsen luontevampaa ryhtyä käyttämään sitä. Kolmantena aiempien tutkimusten (McNeil & Jarvin, 2007 viittaavat Glenberg, Gutierrez, Levin, Japuntich, & Kaschak, 2004; Martin & Schwartz, 2005) mukaan McNeil ja Jarvin (2007) esittävät, että oppimisvälineiden käyttämisen tuottama fyysinen aktiivisuus auttaa oppilasta muistamaan kyseisen asian.

McNeil ja Jarvin (2007) kokoavat artikkelissaan myös syitä sille, mikseivät oppimisvälineet välttämättä tue lapsen matematiikan oppimista. Ensimmäiseksi syyksi he esittävät useiden tutkimusten perusteella sitä, että opettajan tapa esitellä oppimisväline vaikuttaa siihen, miten oppilaat sitä käyttävät (McNeil & Jarvin, 2007). Siksi opettajan tulee esitellä ne oppimisvälineinä eikä leluina (McNeil & Jarvin, 2007). Tärkeää on myös se, että opettajat osaavat itse käyttää oppimisvälineitä tarkoituksenmukaisella tavalla (McNeil & Jarvin, 2007). Toinen haaste oppimisvälineiden hyödyntämiselle on se, että oppilaiden tulisi ymmärtää välineen kaksoismerkitys sekä oppimisvälineenä että jonkin matemaattisen symbolin tai laskukaavan kuvaajana (McNeil & Jarvin, 2007). McNeil ja Jarvin (2007) esittävät, että opettajien olisi syytä pohtia edellä mainittuja asioita, mikäli he haluavat hyödyntää oppimisvälineitä opetuksessaan.

Brunerin (1967) teorian portaittaisuudesta huolimatta tasot eivät ole portaittaisia, vaan niillä voidaan liikkua limittäin. Fyfe kollegoineen (2014) puhuukin konkreettisuuden häivyttämisen tekniikasta, jossa oppilaalle muodostuu jatkumo konkreettisesta muodosta ikonisen muodon kautta abstraktiin muotoon. Tällöin oppilaalle muodostuu ajan kuluessa vahva pohja ymmärrykselle, joka auttaa oppilasta lopuksi standardisoimaan asian ilman konkreettista apuvälinettä (Fyfe ym., 2014). Näiden edellä esitettyjen syiden valossa McNeil ja Jarvin (2007) esittävät, että opettajien tulisi hyödyntää etenkin sellaisia oppimisvälineitä, jotka ovat erittäin konkreettisia ja havainnollistavat asiaa hyvin, kuten kymmenjärjestelmävälineet.

Larkinin (2016) mukaan Brunerin (1967) toiminnallisella tasolla oppimisvälineinä voidaan käyttää lapselle tuttuja tavaroita, kuten leluja ja urheiluvälineitä. McNeil ja Jarvin (2007) puolestaan esittävät artikkelissaan, että leluja tai muita tavaroita, jotka ovat lapsille tuttuja koulun ulkopuolisista konteksteista ei tulisi käyttää oppimisvälineenä. Larkinin (2016) mukaan myös erilaiset fyysiset ja digitaaliset oppimisvälineet, kuten Multilink-kuutiot, laskunapit, älylaitteissa olevat sovellukset ja fyysisten oppimisvälineiden vastaavat virtuaaliset versiot sopivat Brunerin (1967) toiminnalliselle tasolle. McNeil ja Jarvin (2007) kannattivat artikkelissaan Multilink-kuutioiden ja muiden varsinaisesti matemaattista asiaa

havainnollistavien oppimisvälineiden käyttöä. Larkin (2016) nostaa artikkelissaan oppimista tukeviksi välineiksi myös erilaiset valokuvat, diagrammit ja graafiset kuvat, jotka tukevat oppilaan oppimista Brunerin (1967) ikonisella tasolla.

3.3 Kognitiivisen kehityksen teoria

Jean Piaget ja Bärbel Inhelder (1977) kehittivät kognitiivisen kehityksen etenemistä kuvaavan teorian, joka selittää myös lapsen matemaattisen ajattelun taitojen kehittymistä. Kognitiivisen kehityksen eteneminen on Piaget'n ja Inhelderin (1977) mukaan vaiheittain etenevää. Ensimmäinen teorian vaiheista on sensomotorinen taso, joka kestää Piaget'n ja Inhelderin (1977) mukaan lapsen syntymästä noin kaksivuotiaaksi saakka. Sensomotorisella tasolla lapsen älykkyyden ajatellaan kehittyvän jo ennen kielellisen ilmaisemisen mahdollisuuden syntymistä (Piaget & Inhelder, 1977). Sensomotorisella tasolla lapsi ilmaisee ajatteluaan kehon liikkeiden ja toiminnan avulla (Piaget & Inhelder, 1977). Vaikka lapsi ei vielä voi puhumalla kommunikoida hoivaajilleen, voi hän kuitenkin erilaisten äännähdysten ja itkun kautta herättää heidän huomionsa. Lapsi omaksuu tällä tasolla myös esimerkiksi esinepysyvyyden eli sen, ettei esine lakkaa olemasta, jos se peitetään esimerkiksi liinalla (Piaget & Inhelder, 1977).

Sensomotorisen tason jälkeen Piaget'n ja Inhelderin (1977) mukaan on esioperationaalinen vaihe, joka alkaa noin kaksivuotiaana ja päättyy noin seitsemännen ikävuoden tienoilla. Heidän mukaansa esioperationaalista vaihetta ja sitä seuraavaa konkreettisten operaatioiden vaihetta ei kuitenkaan ole järkevää erottaa toisistaan (Piaget & Inhelder, 1977). Kokonaisuutena nämä kaksi vaihetta kestävät noin kaksivuotiaasta 12-vuotiaaksi (Piaget & Inhelder, 1977). Tässä vaiheessa lapsi suorittaa mielessään monenlaisia operaatioita, jotka koostuvat palautettavissa olevista muunnoksista (Piaget & Inhelder, 1977). Operaationa voidaan Piaget'n ja Inhelderin (1977) mukaan pitää esimerkiksi yhteenlaskua ja sille vastakkaista operaatiota vähennyslaskua.

Esioperationaalisessa vaiheessa lapsi omaksuu säilyvyyden käsitteen, jota Piaget ja Inhelder (1977) kuvaavat esimerkillä, jossa vesi kaadetaan kapeampaan lasiin. Tällöin lapsi, joka ei ole omaksunut säilyvyyden käsitettä erehtyy luulemaan veden lisääntyneen, vaikka todellisuudessa veden määrä ei ole muuttunut (Piaget & Inhelder, 1977). Konkreettisten operaatioiden vaiheessa lapsi ymmärtää, ettei veden määrä muutu lasista riippumatta (Piaget & Inhelder, 1977). Esioperationaalisella tasolla lapsen ajattelu nojaa vahvasti hänen havaintoihinsa, kun taas konkreettisten operaatioiden vaiheessa lapsen ajattelu perustuu identtisuuden käsitteen ja muunnos-

ten käänteisyyden periaatteeseen (Piaget & Inhelder, 1977). Piaget'n ja Inhelderin (1977) mukaan konkreettisia näistä operaatioista tekee se, että ne kohdistuvat suoraan esineisiin eivätkä vielä sanallisesti esitettyihin olettamuksiin tai väittämiin. Alakouluikäisen lapsen ollessa konkreettisten operaatioiden vaiheessa hänelle olisi tärkeää nähdä ja oppia asioita konkreetian kautta (Piaget & Inhelder, 1977).

Piaget ja Inhelder (1977) kuvaavat myös lukukäsitteen kehittymistä. Lapsi on heidän mukaansa omaksunut lukukäsitteen, kun lapsi ymmärtää lukumäärän säilyvän tavaroiden avaruudellisesta sijainnista riippumatta (Piaget & Inhelder, 1977). Tällä he tarkoittavat sitä, että jos laskunapeista tehdään kaksi kymmenen napin jonoa ja vaikka toisen jonon napit olisivat kauempana toisistaan, jolloin jonosta tulisi pidempi, lapsi ymmärtäisi kuitenkin, että nappeja on jonoissa yhtä paljon. Lapsen lukukäsitteen ymmärrys on operationaalisella tasolla, kun hän ymmärtää jonoissa olevan yhtä monta nappia riippumatta niiden avaruudellisesta sijainnista (Piaget & Inhelder, 1977).

Viimeinen vaihe yksilön kognitiivisessa kehityksessä Piaget'n ja Inhelderin (1977) mukaan on formaalien eli muodollisten operaatioiden vaihe, joka kestää 11–12-vuotiaasta 14–15-vuotiaaksi (Piaget & Inhelder, 1977). Keskeinen ero konkreettisten operaatioiden vaiheen ja formaalien operaatioiden vaiheen välillä on se, että jälkimmäisessä vaiheessa lapsi pystyy selvittämään asioita pelkkien kuvitelmien avulla (Piaget & Inhelder, 1977). Yksilön ajattelu on siis jo sen verran kehittynyttä, ettei hän tarvitse välttämättä konkreettisia välineitä ymmärryksensä tueksi. Piaget'n ja Inhelderin (1977) mukaan ihmisen formaalin eli muodollisen ajattelun kehittyminen jatkuu koko nuoruuden ja ihmiselämän ajan.

3.4 Montessoripedagogiikka

Italialainen lääkäri Maria Montessori on yksi ensimmäisistä pedagogeista, joka ryhtyi kehittämään ja tuottamaan konkreettisia oppimisvälineitä matemaattisten käsitteiden havainnollistamiseksi (Lindgren, 1990). Montessori (1965b) kutsuu kehittämiään välineitä didaktiseksi materiaaliksi. Montessorin (1965b) ajatus on, että opettaja järjestää oppimisympäristön suunnitelmallisesti siten, että tarkasti valitut ja kehitetyt välineet ovat oppilaiden vapaasti käytettävissä sekä tarpeeksi matalalla, jotta lapsi yltää niihin itse. Näin lapsi saa itse luonnollisen kypsytymisen tahdissa valita, milloin hän haluaa tutkia eri materiaaleja (Montessori, 1965b).

Montessori jakaa lapsuuden neljään eri kehityskauteen, jotka hän on myös nimennyt niitä kuvaavasti (Hayes & Höynälänmaa, 1985). Kehityskaudet ovat 0–6 vuotta eli varhaislapsuus, 6–12 vuotta eli lapsuus, 12–18 vuotta eli nuoruus sekä 18–24 vuotta eli kypsyys (Hayes & Höynälänmaa, 1985). Näiden kehityskausien aikana lapsi on luontaisesti kiinnostunut tietyistä asioista ja taidoista, jolloin hänen edellytyksensä oppia nämä asiat ovat silloin parhaimmillaan (Wilander, 2018). Näitä kausia, jolloin taidon oppimiselle on otollisin aika, nimitetään montessoripedagogiikassa herkkyyskausiksi (Wilander, 2018). Montessoripedagogiikan herkkyyskauden aikana lapsen sisäinen tarve toimii oppimisen kannustimena, kun taas kehityspsykologiassa ajatellaan ympäristön olevan oppimisen liikkeellepaneva voima (Wilander, 2018).

Alakouluiässä lapset ovat Montessorin toisella herkkyyskaudella, joka sijoittuu 6–12 vuoden ikään. Tästä syystä haluan avata herkkyyskauden aikana lapsen kehityksessä tapahtuvia muutoksia. Herkkyyskauden aikana lapsi muokkaa omaa persoonallisuuttaan ja hänen persoonallisuutensa muuttuu voimakkaammaksi ja tyynemmäksi (Wilander, 2018). Ensimmäisellä herkkyyskaudella lapsi on erityisen kiinnostunut mitä ja missä -kysymyksistä, kun taas toisella kaudella lasta kiinnostaa miksi, kuinka ja milloin -kysymykset (Hayes & Höynälänmaa, 1985).

Toiselle herkkyyskaudelle ominaista on Montessorin mukaan moraalisuus, kulttuurin omaksuminen, mielikuvitus, syiden etsintä, älylliset ponnistukset sekä sosiaalisuus (Hayes & Höynälänmaa, 1985). Lapselle on tärkeää ymmärtää, mitä hän tekee ja syy tekemiselleen, minkä vuoksi hän tarvitsee yhä konkreettista välineistöä (Hayes & Höynälänmaa, 1985). Koulun tulisi tarjota lapselle erilaisten oppimateriaalien lisäksi myös tietoa siitä, kuinka lapsi voi itse etsiä tietoa (Hayes & Höynälänmaa, 1985). Ensimmäisellä kaudella lapsi sopeutuu omaan perheeseensä ja kotiinsa, kun taas toisella kaudella lapsi omaksuu kulttuurin ja alkaa sopeutumaan yhteiskuntaan (Hayes & Höynälänmaa, 1985). Montessori näkee lapsen toisen herkkyyskauden aikana uteliaana tutkijana, joka haluaa ymmärtää syy-seuraussuhteita (Hayes & Höynälänmaa, 1985).

Montessorin (1965b) ajatuksena on, ettei opettajan tarvitse opettaa lapselle asioita, vaan lapsen oma kiinnostus ja luonnollinen kypsyminen saavat lapsen oppimaan. Opettaja voi kuitenkin esitellä välineen oppilaalle, mutta hän ei näytä, kuinka tehtävä suoritetaan loppuun (Montessori, 1965a). Useimmiten lapset eivät kuitenkaan tarvitse opettajan apua materiaalien käyttöön ottamisessa, sillä he tarkkailevat toisiaan ja mallintavat toistensa tekemistä (Montessori, 1965a). Didaktiset materiaalit toimivat reagensseina oppimiselle, joka näyttäytyy opettajalle fyysisenä toimintana ja oppilaan saavuttamana sisäisenä järjestyksenä (Montessori, 1965b).

Didaktiset materiaalit on suunniteltu niin, että ne korjaavat lapsen virheet, jolloin ne ovat lapsen itsensä helposti käytettäviä (Montessori, 1965a; Wilander, 2018). Lapsi huomaa tekemänsä virheet materiaalin todistaessa sen hänelle konkreettisesti (Montessori, 1965a; Wilander, 2018). Materiaalin käytön oppiminen ei ole itsessään mikään tavoite, vaan materiaalin tarkoituksena on kehittää lasta, kuten esimerkiksi hänen hahmotuskykyään (Montessori, 1965a). Materiaalin avulla lapsi oppii havainnoimaan asioita, ja sitä kautta lapsi oppii vertailemaan sekä muodostamaan päätelmiä (Montessori, 1965a). Hayes ja Höynälänmaa (1985) kertovat, että montessorimateriaalin avulla lapselle syntyy vahvoja muistikuvia, joita lapsi voi myöhemmin yhdistellä oppimaansa. Toistojen kautta lapsen huomiokyvyn ja älykkyyden harjoitus johtaa kognitiiviseen kehitykseen (Montessori, 1965a).

Peruskoulussa käytettäviä montessorivälineitä ovat kieli- ja matematiikan materiaalit, joissa geometria on omana osa-alueenaan sekä maantiedon, biologian ja historian materiaalit (Wilander, 2018). Esimerkiksi pituuden hahmottamiseksi materiaaleissa on värisauvoja, joista lyhin on kymmenen senttimetriä, ja jotka pitenevät aina kymmenellä senttimetrillä viimeisen ollessa kymmenes eli sata senttimetriä pitkä (Montessori, 1965a). Montessorin (1965a) mukaan lyhin sauva toimii mittayksikkönä muille sauvoille, toisen ollessa kaksi kertaa sen pituinen, kolmannen kolme kertaa ja niin edelleen. Sauvojen suhde toisiinsa on sama kuin lukujen 1–10 suhde toisiinsa (Montessori, 1965a). Montessoripedagogiikkaan on kehitetty paljon erilaisia matemaattikkavälineitä, koska asioiden oppimista halutaan hidastaa niiden tarkastelemiseksi eri puolilta, jotta lapsi saavuttaa täydellisen ymmärryksen (Hayes & Höynälänmaa, 1985).

Montessorin mukaan matemaattisen mielen oikea kehitys etenee vaiheittain (Hayes & Höynälänmaa, 1985). Ensimmäinen vaihe matemaattisen mielen oikeanlaisessa kehityksessä on kokemuksen saaminen, jonka lapsi saavuttaa käyttämällä konkreettisia matemaattisia välineitä (Hayes & Höynälänmaa, 1985). Toisessa vaiheessa lapsi oivaltaa asian ja toisaalta tässä vaiheessa montessorimateriaalit paljastavat lapsen mahdolliset hahmotusvaikeudet esimerkiksi hierarkian, operaatioiden tai prosessin kulun ymmärtämisessä (Hayes & Höynälänmaa, 1985). Lapsen oivallettua asian välineen avulla, hän voi siirtyä seuraavaksi kolmannen vaiheen mukaan abstraktin sovelluksen pariin (Hayes & Höynälänmaa, 1985). Hayesin ja Höynälänmaan (1985) mukaan montessorimatematiikassa erilaista verrattuna perinteiseen matematiikan opetukseen on se, että siinä siirrytään kymmenjärjestelmään heti ensimmäisten lukujen hallitsemisen jälkeen. Näin tehdään siitä syystä, että kymmenjärjestelmässä operoidaan loppujen lopuksi vain yhdeksällä luvulla ja nollalla (Hayes & Höynälänmaa, 1985). Myös yhteen-, vähennys-,

jako- ja kertolaskut opetetaan lapsille kymmenjärjestelmässä hyödyntäen kultaisia helmiä ja vastaavia numerokortteja (Hayes & Höynälänmaa, 1985).

3.5 Varga-Neményi-pedagogiikka

Varga-Neményi-pedagogiikka on Unkarissa matemaatikko Tamás Vargan ja hänen kollegansa Eszter C. Neményin sekä heidän työryhmänsä 1960-luvulla kehittämä matematiikan opettamisen menetelmä (Oravecz & Kivovics, 2005). Suomessa menetelmä tunnetaan myös nimillä ”unkarilainen matematiikka” tai ”matematiikkaa unkarilaisittain” (Tikkanen & Lampinen, 2005). Menetelmän tarkoituksena on kehittää oppilaiden luovaa matemaattista ajattelukykyä ja ajattelun tukena käytetään runsaasti erilaisia apuvälineitä (Oravecz & Kivovics, 2005). Koko menetelmän pääperiaatteena voidaan pitää toiminnallisuuteen perustuvaa opettamista, oppilaan saadessa todellisuuteen perustuvia kokemuksia käsitteiden selventämiseksi (Oravecz & Kivovics, 2005; Tikkanen, 2008). Ikäheimon (2021) mukaan Varga-Neményi-menetelmässä edetään konkreettisesta toiminnasta ja malleista kohti abstraktia ajattelua. Keskeistä menetelmässä on myös oppilaan ikätason huomioiminen esimerkeissä leikeissä, peleissä ja opettajan käyttämässä kielessä (Oravecz & Kivovics, 2005; Tikkanen, 2008).

Menetelmässä ajatellaan, että ajatustoiminnot sisäistyvät konkreettisen toiminnan avulla (Oravecz & Kivovics, 2005). Myös monenlaisten aistihavaintojen saaminen on tärkeää (Oravecz & Kivovics, 2005; Tikkanen, 2008). Visuaalisten havaintojen lisäksi oppilaan tulisi saada tuntoaistiin perustuvia aistimuksia esimerkiksi käyttämällä omaa vartaloaan mittaamisen välineenä (Oravecz & Kivovics, 2005; Tikkanen, 2008). Kuuloaistimuksia lapsi voi saada esimerkiksi kuuntelemalla ja laskemalla taputusten määrää (Oravecz & Kivovics, 2005; Tikkanen, 2008).

Aistimukseen perustuvan oppimisen rinnalla kulkee erilaisten apuvälineiden monipuolinen käyttäminen, ja ne voidaan jakaa pysyviin ja tilapäisiin apuvälineisiin (Oravecz & Kivovics, 2005). Toimintavälineinä voidaan Tikkasen (2008) mukaan käyttää erilaisia manuaalisia esineitä tai kirjallista materiaalia. Ikäheimon (2021) mukaan toimintamateriaaleina voidaan hyödyntää arjen esineitä tai matematiikan opiskeluun suunniteltuja välineitä, kuten Varga-Neményi-värisauvoja. Pysyviä apuvälineitä menetelmässä ovat muun muassa värisauvat, loigikkapalat ja raha (Oravecz & Kivovics, 2005). Kun taas tilapäisinä apuvälineinä voidaan käyttää mitä tahansa esinettä, jolla voidaan havainnollistaa matemaattista ongelmaa (Oravecz & Kivovics, 2005), kuten esimerkiksi käpyjä tai nappeja (Ikäheimo, 2021). Toimintavälineet tarjoavat lapselle mahdollisuuden tutkia ja harjoitella abstraktia käsitettä sekä sen sovelluksia

(Tikkanen, 2008). Toisaalta toimintavälineiden avulla voidaan tarkistaa ja yleistää ratkaisumenetelmiä sekä auttaa luomaan ajatusmalleja (Tikkanen, 2008).

Seuraavaksi esittelen Varga-Neményi-menetelmän abstraktion jatkumoa (Oravecz & Kivovics, 2005), jota kutsutaan myös abstraktion tieksi (Tikkanen, 2008; Ikäheimo, 2021). Abstraktion tie on nelivaiheinen ja se etenee toiminnallisista kokemuksista, kuten leikeistä, välineiden hyödyntämiseen, josta edetään erilaisten kuvien käyttämiseen ja lopuksi matemaattiseen symbolikieleen (Oravecz & Kivovics, 2005). Tärkeää on vaiheiden toistaminen uudestaan eri luvuilla, kunnes abstrakti laskutoimitus tai käsite on standardisoitunut (Oravecz & Kivovics, 2005). Tietä kuljetaan myös päinvastaiseen suuntaan, jolloin oppilasta voidaan abstraktin laskutoimituksen yhteydessä pyytää esittämään tehtävä konkreettisesti välineillä tai sanallisena laskutehtävänä (Oravecz & Kivovics, 2005; Ikäheimo, 2021). Oppilas saa palata konkreettisten välineiden pariin tarvittaessa (Oravecz & Kivovics, 2005). Tästä syystä opetuksessa tulee kiinnittää huomiota myös apuvälineiden käytön opettamiseen (Oravecz & Kivovics, 2005).

Virheiden tekeminen ja erehtyminen on menetelmässä sallittua, sillä se on luonnollinen osa oppimista (Oravecz & Kivovics, 2005). Kun oppilas erehtyy, hänet ohjataan kulkemaan jatkumo uudelleen, jolloin hän itse havaitsee oman virheensä ja korjaa sen (Oravecz & Kivovics, 2005). Tikkasen (2008) mukaan Varga-Neményi-menetelmässä pedagogisena periaatteena voidaan pitää ”*lupa erehtyä, väitellä ja iloita*” -lausetta, joka on perustana turvallisen oppimisilmapiiri luomiselle. Tärkeää on, ettei opettaja kerro oppilaalle suoraan virheestä, vaan kertoo oppilaalle korkeintaan tämän erehtyneen (Oravecz & Kivovics, 2005). Opettaja voi auttaa oppilasta huomaamaan virheensä johdattelulla oppilasta esimerkiksi kysymyksillä (Tikkanen, 2008). Keskustelut matematiikan oppitunneilla tukevat oppimista sekä oppilaan ongelmanratkaisukyvyyn kehittymistä (Oravecz & Kivovics, 2005).

Kuten oppimisessa ja opettamisessa ylipäätään myös Varga-Neményi-menetelmässä oppilaan ikätason huomioiminen on tärkeä pedagoginen periaate (Oravecz & Kivovics, 2005). Opettajan tulee ottaa huomioon oppilaiden psyykkiset ja fyysiset kyvyt sekä valmiudet, ja arvioida oppilaiden tiedot sekä sanavarasto (Oravecz & Kivovics, 2005). Jokaisen oppilaan kehittymistä seurataan ja tuetaan hänen omalla tasollaan (Tikkanen, 2008). Myös oppilaan keskittymiskyvyn pituuden huomioon ottaminen on tärkeää, sillä esimerkiksi ekaluokkalainen voi keskittyä intensiivisesti korkeintaan 10–15 minuuttia (Oravecz & Kivovics, 2005). Nämä asiat auttavat opettajaa opetuksen suunnittelussa.

4. Matematiikan opetus ja opetussuunnitelma

Tässä luvussa esittelen, millainen oppiaine matematiikka on vuosiluokilla 1–2 sekä sen opetuksen tavoitteita, sisältöalueita ja oppimisen arviointia. Tutkielmani kannalta näen tärkeäksi tarkastella perusopetuksen opetussuunnitelmaa sekä sitä, miten suomalainen opetussuunnitelmaprosessi tapahtuu. Uusimmat perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet on otettu käyttöön vuonna 2014, joiden pohjalta on laadittu paikalliset opetussuunnitelmat (Vitikka & Rissanen, 2019). Opetussuunnitelman perusteiden tarkoituksena on taata kansallinen yhdenmukaisuus opetuksen suunnittelussa ja toteutuksessa (Vitikka & Rissanen, 2019). Perusteiden pohjalta opetuksen järjestäjät eli kunnat ja niiden alaisuudessa koulut laativat omat paikalliset opetussuunnitelmansa, joissa perusteiden sisällöt ja tavoitteet täsmentyvät vuosiluokkaistettuina (Vitikka & Rissanen, 2019). Seuraavissa alaluvuissa avaan *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteisiin 2014* pohjautuen matematiikan osalta opetuksen tavoitteita, sisältöalueita ja oppimisen arviointia alkuopetuksessa.

4.1 Matematiikka oppiaineena alkuopetuksessa

Vuosiluokilla 1–2 on tärkeää luoda oppilaalle myönteinen kuva itsestään oppijana ja valmiudet oppimiselle tulevaisuudessa (Opetushallitus, 2016). Alkuopetuksessa oppilaat harjoittelevat omatoimisuutta ja vastuunottoa omista koulutehtävistään sekä yhteistyötaitoja muiden oppilaiden kanssa (Opetushallitus, 2016). Työtavoissa alkuopetuksessa korostuvat toiminnalliset ja havainnollistavat menetelmät sekä leikki ja pelillisuus yhdistettynä mielikuvituksellisuuteen ja tarinoihin (Opetushallitus, 2016). Wilanderin (2018) mukaan vuoden 2014 perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet sisältävät runsaasti montessoripedagogiikan aineksia, kuten toiminnallisuutta, eri aistien hyödyntämistä opetuksessa sekä lapsen itseohjautuvuuteen ohjaamista.

Opetussuunnitelman mukaan matematiikka on luonteeltaan kumulatiivinen oppiaine, jolloin opetuksen tulee olla systemaattisesti etenevää (Opetushallitus, 2016). Ikäheimon (2021) mukaan oppilaan ajattelun taitoihin mahdollisesti jäävät puutteet haittaavat matematiikan opiskelua myöhemmin. Myös matematiikan opetuksessa on tärkeää luoda oppijalle myönteinen minäkuva itsestään matematiikan oppijana sekä luoda myönteinen suhtautuminen oppiainetta kohtaan (Opetushallitus, 2016). Matematiikan oppimisessa keskeistä on konkretia ja toiminnallisuus sekä eri aistien hyödyntäminen (Opetushallitus, 2016). Myös Bruner, Montessori sekä Varga ja Neményi ovat esittäneet näkemyksiään konkreettisuuden hyödyntämisen tueksi mate-

matiikan opetuksessa ja opiskelussa. Opetuksen tarkoituksena on kehittää oppilaan kykyä ilmaista omaa matemaattista ajatteluaan konkreettisilla välineillä, suullisesti, kirjallisesti ja piirtäen sekä tulkittua kuvia (Opetushallitus, 2016). Kuvien piirtäminen ja tulkitseminen tukevat oppimista Brunerin (1967) ikonisella tasolla, jolloin erilaisia kuvamalleja hyödynnetään oppimisen apuvälineinä. Kun taas konkreettiset välineet sopivat toiminnalliselle tasolle Brunerin (1967) oppimisteoriassa.

Matematiikan opetuksessa on tärkeää käyttää oppilaita kiinnostavia ja heille tuttuja esimerkkejä sekä aiheita sisällön opettamisen lähtökohtana (Opetushallitus, 2016). Matematiikan oppimisympäristön tulisi olla toiminnallisuuteen ja välineiden käyttöön kannustava (Opetushallitus, 2016). Montessoripedagogiikassa oppimisympäristö rakennetaan sellaiseksi, että se tukee lapsen luontaista oppimishalua sekä kypsymistä ja lapsi voikin itse tarttua erilaisiin välineisiin kiinnostuksensa mukaan (Montessori, 1965b). Työtapojen tulee olla vaihtelevia, kuten itsenäistä ja ryhmätyöskentelyä sekä pedagogisia pelejä ja leikkejä (Opetushallitus, 2016). Opetussuunnitelma myös mainitsee, että opetuksessa ja opiskelussa tulee hyödyntää tieto- ja viestintäteknologiaa (Opetushallitus, 2016).

4.2 Matematiikan opetuksen tavoitteet vuosiluokilla 1–2

Seuraavaksi avaan *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden 2014* matematiikan vuosiluokkien 1–2 opetukselle asetettuja tavoitteita, jotka on jaettu opetussuunnitelmassa kolmeen osaan: 1. *Merkitys, arvot ja asenteet*, 2. *Työskentelyn taidot* sekä 3. *Käsitteelliset ja tiedonala-kohtaiset tavoitteet*. Merkitys, arvot ja asenteet -tavoitteita on yksi: ”T1 tukea oppilaan innostusta ja kiinnostusta matemaattikkaa kohtaan sekä myönteisen minäkuvan ja itseluottamuksen kehittymistä” (Opetushallitus, 2016). Alkuopetuksen tehtävänä onkin yleisesti rakentaa lapselle myönteistä minäkuvaa itsestään oppijana (Opetushallitus, 2016).

Työskentelyn taidot -tavoitteisiin kuuluu kolme tavoitetta, joista ensimmäinen on: ”T2 ohjata oppilasta kehittämään taitoaan tehdä havaintoja matematiikan näkökulmasta sekä tulkita ja hyödyntää niitä eri tilanteissa” (Opetushallitus, 2016). Tavoitteella pyritään siihen, että lapsi osaisi hyödyntää matemaattista ajatteluaan monipuolisissa tilanteissa. Seuraava tavoite on ”T3 kannustaa oppilasta esittämään ratkaisujaan ja päätelmiään konkreettisilla välineillä, piirroksin, suullisesti ja kirjallisesti myös tieto- ja viestintäteknologiaa hyödyntäen” (Opetushallitus, 2016). Tavoitteena on siis, että lapsi oppisi esittämään matemaattista ajatteluaan eri keinoilla, joita

myös esittelen omassa tutkielmassani. Viimeinen tämän osan tavoitteista on ”T4 ohjata oppilasta kehittämään päättely- ja ongelmanratkaisutaitojaan” (Opetushallitus, 2016). Kyseinen tavoite auttaa oppilasta kehittämään matemaattista ajatteluaan sekä ongelmanratkaisukykyään.

Kolmas tavoiteluokka on Käsitteelliset ja tiedonalankohtaiset tavoitteet, joita on yhteensä kahdeksan. Ensimmäinen näistä tavoitteista on ”T5 ohjata oppilasta ymmärtämään matemaattisia käsitteitä ja merkintätapoja” (Opetushallitus, 2016). Oppilas oppii merkitsemään esimerkiksi yhteen- ja vähennyslaskun numero- ja operaatiomerkkejä käyttäen ja sen lisäksi oppilas ymmärtää esimerkiksi käsitteet: yhteenlasku, yhteenlaskettava ja summa. Seuraava tavoite on ”T6 tukea oppilasta lukukäsitteen kehittymisessä ja kymmenjärjestelmän periaatteen ymmärtämisessä” (Opetushallitus, 2016). Oppilas oppii ymmärtämään paikkajärjestelmää eli esimerkiksi kymmenien ja ykkösten paikan kymmenjärjestelmässä. Seuraava tavoite on ”T7 perehdyttää oppilasta peruslaskutoimitusten periaatteisiin ja tutustuttaa niiden ominaisuuksiin” (Opetushallitus, 2016). Peruslaskutoimituksiin kuuluvat yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskut ja esimerkiksi yhteen- ja kertolaskujen yksi ominaisuuksista on vaihdannaisuus.

Kahdeksas tavoite on ”T8 ohjata oppilasta kehittämään sujuvaa peruslaskutaitoa luonnollisilla luvuilla ja käyttämään erilaisia päässä-laskustrategioita” (Opetushallitus, 2016). Sujuvan laskutaidon kehittämiseksi tulee tehdä riittävästi erilaisia harjoituksia ja myös päässä-laskua tulisi harjoitella säännöllisesti. Seuraava tavoite on ”T9 tutustuttaa oppilas geometrisiin muotoihin ja ohjata havainnoimaan niiden ominaisuuksia” (Opetushallitus, 2016). Oppilas oppii tunnistamaan esimerkiksi nelikulmion, kolmion ja ympyrän sekä lisäksi niiden ominaisuuksia, kuten kulma, sivu ja kärkipiste. Kymmenes tavoite on ”T10 ohjata oppilasta ymmärtämään mittaamisen periaate” (Opetushallitus, 2016). Oppilaat harjoittelevat mittaamista erilaisilla välineillä, kuten viivoitin, vaaka ja mitat sekä oppivat suureita ja niihin liittyviä mittayksiköitä.

Tavoite numero 11 on ”T11 tutustuttaa oppilas taulukoihin ja diagrammeihin” (Opetushallitus, 2016). Taulukoihin ja diagrammeihin tutustuminen tehdään esimerkiksi luokkahuoneesta löytyvien tuolien tai ikkunoiden määrää laskemalla, joita esitetään esimerkiksi pylväsdiagrammin avulla. Viimeinen matematiikan opetuksen tavoite on ”T12 harjaannuttaa oppilasta laatimaan vaihteellaisia toimintaohjeita ja toimimaan ohjeen mukaan” (Opetushallitus, 2016). Vaihteellaisia toimintaohjeita tekemällä harjoitellaan ohjelmointiin liittyviä alkeistaitoja.

4.3 Matematiikan sisältöalueet vuosiluokilla 1–2

Opettamisen tavoitteisiin liittyy sisältöalueet, joissa kuvataan millaisia oppisisältöjä oppilaille, tulee opettaa. Matematiikan vuosiluokkien 1–2 opetussuunnitelmassa sisältöalueita on neljä. Ensimmäinen sisältöalue, *Ajattelun taidot* painottaa elämässä tärkeitä ajattelun taitoja, kuten syy-seuraussuhteita ja alkeellista ohjelmointia eli omien toimintaohjeiden tekemistä ja noudattamista. Toinen sisältöalue, *Luvut ja laskutoimitukset* sisältää paljon peruslaskutaitoon liittyviä sisältöjä, joilla rakennetaan vahva matemaattinen pohja. Vahvan pohjan rakentaminen on tärkeää matematiikan kumulatiivisuuden vuoksi. *Geometria ja mittaaminen* on kolmas sisältöalue ja sen sisällöt ovat havainnoitavissa konkreettisesti monissa eri tilanteissa. Neljäs sisältöalue on *Tietojenkäsittely ja tilastot*, jolla pyritään harjoittelemaan tiedon keräämistä sekä tallentamista yksinkertaisilla tavoilla. Kuvaan taulukossa yksi sisältöalueiden keskeiset oppisisällöt tarkemmin sisältöalueittain luokiteltuna sekä niitä vastaavat opettamisen tavoitteet.

Taulukko 1.

Sisältöalueet matematiikan opetussuunnitelmassa vuosiluokilla 1–2 sekä niitä vastaavat opettamisen tavoitteet. (mukaillen Opetushallitus, 2016)

| Sisältöalue ja sen sisällöt tiivistetysti | Opettamisen tavoitteet |
|--|--------------------------------|
| S1 Ajattelun taidot: yhtäläisyydet, erot, säännönmukaisuus, vertailu, luokittelu, järjestys, syy-seuraussuhde, matemaattiset tilanteet eri näkökulmista, ohjelmoinnin alkeet | T1, T2, T3, T4, T5, T12 |
| S2 Luvut ja laskutoimitukset: luonnolliset luvut, lukumäärän, lukusanan ja numeromerkinnän yhteys, lukujonotaidot, lukujen vertailu ja järjesteleminen, parillisuus, monikerrat, puolittaminen, 1–10 hajotelmat, kymmenjärjestelmä, yhteen- ja vähennyslasku lukualueella 0–20 & 0–100, päässälaskustrategiat, vaihdannaisuus ja liitännäisyys yhteen- ja kertolaskussa, kertolasku, kertotaulut 1–5 & 10, pohja jakolaskun ymmärtämiselle, kerto- ja jakolaskun yhteys, murtoluvun käsitteen pohjustaminen | T1, T2, T3, T4, T5, T6, T7, T8 |
| S3 Geometria ja mittaaminen: kolmiulotteisen ympäristön hahmottaminen ja tasogeometrian havainnoiminen, suunta- ja sijaintikäsitteet, kappaleet ja tasokuviot sekä niiden luokittelu, mittaamisen periaate, pituus (m, cm), massa (kg, g), tilavuus (l, dl), aika, kellonajat ja ajanyksiköt | T1, T2, T3, T4, T5, T9, T10 |
| S4 Tietojenkäsittely ja tilastot: tiedon kerääminen ja tallentaminen, yksinkertaiset taulukot ja pylvädiagrammit | T1, T2, T3, T4, T5, T11 |

4.4 Matematiikan oppiaineen arviointi vuosiluokilla 1–2

Opetukseen olennaisena osana liittyy myös oppimisen arviointi, jonka tulee aina perustua opetussuunnitelman perusteiden tavoitteisiin sekä paikallisen opetussuunnitelman tarkempiin tavoitteisiin (Opetushallitus, 2016). Arvioinnissa opettajan tulee ottaa huomioon oppilaan ikätaso sekä mahdollinen oppimisen vaikeus suunnitellessaan ja toteuttaessaan arviointikäytänteitä (Opetushallitus, 2016). Arviointitilanteiden tulee olla monipuolisia niin arviointikäytänteiden kuin oppimistilanteenkin suhteen (Opetushallitus, 2016). Oppilaan tulee saada käyttää tarvittaessa apuvälineitä tai tieto- ja viestintäteknologiaa arviointitilanteessa sekä oppilas voi antaa suorituksensa myös suullisesti (Opetushallitus, 2016). Alkuopetuksessa on tärkeää harjoitella oppilaan itsearviointitaitoja siten, että opettaja auttaa oppilasta tunnistamaan hänen vahvuuksiinsa ja onnistumisiaan suhteessa hänen henkilökohtaisiin tavoitteisiinsa (Opetushallitus, 2016).

Matematiikan oppiaineen arvioinnin alkuopetuksessa tulisi olla kannustavaa ja oppilaan omia vahvuuksia tukevaa (Opetushallitus, 2016). Arviointikeinoina voidaan hyödyntää kirjallisia ja suullisia suorituksia sekä piirtämisen ja välineiden avulla tehtäviä suoritteita (Opetushallitus, 2016). Ratkaisujen oikeellisuuden lisäksi opettajan on tärkeää arvioida myös oppilaan työskentelytapaa ja työskentelyn sujuvuutta (Opetushallitus, 2016). Matematiikan oppiaineen arviointikohteena on edistyminen seuraavissa taidoissa: lukukäsitteen ymmärtäminen ja lukujonotaidot, kymmenjärjestelmän ymmärtäminen, laskutaidon sujuvuus, kappaleiden ja kuvioiden luokittelun taidot sekä matematiikan käyttäminen ongelmanratkaisussa (Opetushallitus, 2016).

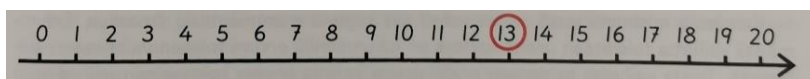
5. Oppimisvälineet

Tässä luvussa kuvaan oppimisvälineisiin liittyvää tutkimustietoa. Riskun (2002) mukaan matemaattisten käsitteiden abstraktiuden vuoksi alkuopetuksessa kannattaa käyttää havainto- ja toimintamateriaalia, jotka konkretisoivat käsitteitä pienelle lapselle. Konkreettiseen malliin liitetään ensin puhuttu kieli, jonka jälkeen myöhemmin kirjoitettu symbolikieli (Risku, 2002). Myös Brunerin (1967) oppimisteoriassa edetään konkretian kautta visuaalisiin malleihin ja lopuksi symboliseen kieleen. Kun lapsi saavuttaa ensin konkreettisen materiaalin avulla ymmärryksen asiasta, hän todennäköisemmin suoriutuu tehtävästä hyvin ja ymmärtää asian paremmin myös abstraktilla tasolla (Jones & Tiller, 2017). Myös McDonoughin (2016) mukaan oppimisvälineet hyödyttävät matematiikan oppimista, mutta ne eivät yksistään riitä kehittämään oppilaan matemaattista ajattelua. Vessonen ja kollegat (2020) ovat sitä mieltä, että matemaattisia oppimisvälineitä ei käytetä pelkästään oikean vastauksen ratkaisemiseen vaan myös ongelman havainnollistamiseen.

Ikäheimon ja Riskun (2004) mukaan alkuopetuksessa tärkeitä käsitteenmuodostusvälineitä ovat muun muassa lukusuorat ja kymmenjärjestelmävälineet. Lukusuora (kuva 1) tarjoaa oppilaalle visuaalista tukea luvun etäisyyden hahmottamiseen nolasta sekä esimerkiksi luvun naapurilukujen tarkastelemiseen (Ikäheimo, 2021). Kymmenjärjestelmävälineiden (kuva 2) avulla lapset saavat taktiilisia ja visuaalisia aistimuksia, joiden avulla lapsille voidaan konkretisoida eri lukuja sekä peruslaskutoimituksia (Ikäheimo, 2021). Kymmenjärjestelmävälineisiin kuuluu paikka-alusta sekä ykköskuutiot, kymppisauvat, satalevyt, tuhatkuutiot ja niiden lisäksi on saatavilla myös desimaaliosia (Ikäheimo, 2021).

Kuva 1.

Lukusuora. (Ikäheimo, 2021, s. 195 (kuva 7.35e))

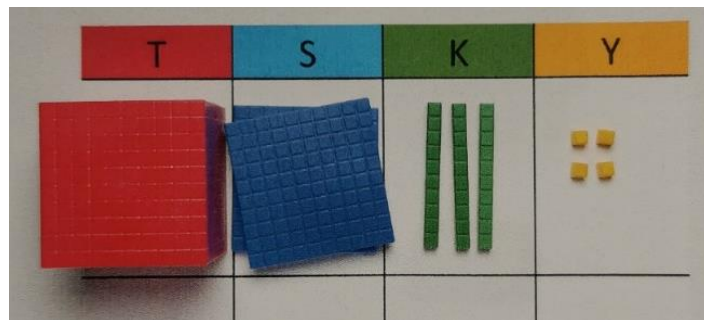


Oppimisvälineille on monia nimityksiä kirjallisuudessa ja esimerkiksi Quigleyn (2021) mukaan konkreettiset materiaalit-käsitettä ja matemaattiset oppimisvälineet-käsitettä käytetään rinnakkain matematiikan oppimista ja opetusta tutkivassa kirjallisuudessa. Oppimisvälineet voivat olla sekä fyysisiä että virtuaalisia (Quigley, 2021). Sowell (1989) muistuttaa, että manipulatiivisiin kuuluvat konkreettiset välineet sekä kuvalliset esitysmuodot. McNeilin ja Jarvinin (2007) mukaan manipulatiivit ovat välineitä, joiden avulla oppilaiden on helpompi ymmärtää

abstrakteja käsitteitä. Manipulatiiveina voivat toimia esimerkiksi konkreettiset esineet, kuten leluautot ja -nuket, mutta he eivät suosittele lelujen käyttämistä oppimisvälineinä (McNeil & Jarvin, 2007). Niiden avulla oppilas voi tutustua aiheeseen eri aistien avulla, kuten tuntoaistin tai näköaistin avulla (McNeil & Jarvin, 2007). Swanin ja Marshallin (2010) mukaan matemaattinen manipulatiivi on esine, jota yksilö voi käyttää tuntoaistia hyödyntäen, ja joka kehittää joko tietoisesti tai tiedostamatta oppijan matemaattista ajattelua.

Kuva 2.

Kymmenjärjestelmävälineet sekä paikka-alusta. (Ikäheimo, 2021, s. 143 (kuva 5.40a))



Lehtonen (2022) jakaa matemaattiset oppimisvälineet kolmeen eri ryhmään: fyysisiin välineisiin, virtuaalisiin välineisiin ja konkreettisiin oppimisvälineisiin (*tangible*). Hänen mukaansa fyysiset oppimisvälineet ovat fyysisiä esineitä, kuten helmiä, geolautoja ja kymmenjärjestelmävälineitä (ks. kuva 2) (Lehtonen, 2022). Viime vuosikymmeninä myös virtuaaliset välineet ovat vakiinnuttaneet asemaansa matematiikan opetuksessa teknologian kehityksen ansiosta (Lehtonen, 2022). Konkreettiset oppimisvälineet yhdistävät digitaalisen teknologian ja 'hands-on'-työskentelyn (Manches & O'Malley, 2012). Lehtosen (2022) mukaan opettajalla on kuitenkin suuri valta vaikuttaa siihen, käytetäänkö hänen luokkassaan erilaisia oppimisvälineitä ja milloin niitä saa käyttää. Seuraavissa alaluvuissa esittelen tarkemmin nämä kolme oppimisvälineryhmää Lehtosen (2022) tekemän jaon mukaisesti.

5.1 Fyysiset oppimisvälineet

Fyysiset oppimisvälineet ovat fyysisiä esineitä, joita voidaan hyödyntää opetuksen ja oppimisen tukena (Lehtonen, 2022). Fyysisten oppimisvälineiden yksi keskeisistä eduista onkin se, että niiden avulla lapsi saa tuntoaistimuksia (Manches & O'Malley, 2012). Nämä tuntoaistimukset auttavat luomaan lapselle selvän muistijäljen opiskeltavasta asiasta (McNeil & Jarvin, 2007).

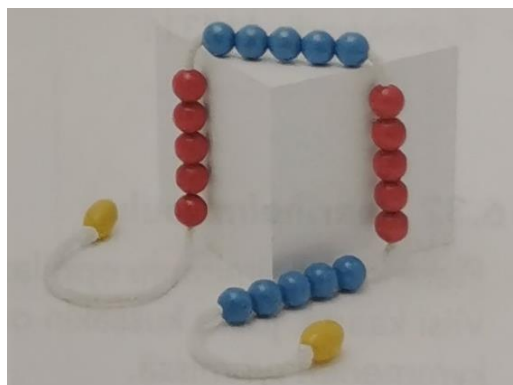
Haasteena fyysisten oppimisvälineiden käytössä kuitenkin saattaa olla se, miten oppilas ymmärtää yhteyden oppimisvälineen ja matemaattisen käsitteen välillä (Manches & O'Malley, 2012). Oppilaan voi olla myös vaikeaa hahmottaa yhteys fyysisen oppimisvälineen eli konkreettisen esitystavan ja symbolisen esitystavan välillä (Uttal ym., 2013). Manches ja O'Malley (2012) ovatkin sitä mieltä, että oppimisvälineiden hyödyt oppimiselle riippuvat siitä, kuinka opettaja esittelee välineet oppilaille. Opettajan tapaan esitellä oppimisvälineet vaikuttavat hänen pedagoginen lähestymistapansa sekä asenteensa fyysisiä oppimisvälineitä kohtaan (Manches & O'Malley, 2012).

Fyysisten oppimisvälineiden käyttäminen vaatii opettajalta huolellista ohjeistusta ja opastusta oppilaille, jotta niiden käyttäminen hyödyttäisi oppimista (Carbonneau ym., 2013). Opettajan voi olla haastavaa auttaa jokaista oppilasta huomaamaan yhteys oppimisvälineen ja symbolisen esitystavan välillä, etenkin, jos opettaja on ainut aikuinen luokassa (Uttal ym., 2013; Lehtonen, 2022). Westin (2018) mukaan oppimisvälineet yksinään eivät kehitä oppilaan matemaattista ymmärrystä, vaan niiden lisäksi tarvitaan vuorovaikutusta oppilaan ja opettajan välille sekä opetusta, jotta yhteys oppimisvälineen ja matemaattisen käsitteen välille muodostuu.

Uttal ja kollegat (2013) jakavat fyysiset oppimisvälineet formaaleihin ja informaaleihin oppimisvälineisiin. Heidän mukaansa esimerkiksi kymmenjärjestelmävälineet (ks. kuva 2) ja Cuisenaire-lukusauvat, jotka on suunniteltu auttamaan lapsen matemaattisen ajattelun kehittymistä ovat formaaleja oppimisvälineitä (Uttal ym., 2013). Myös esimerkiksi kuutiot (Multilink ja Unifix) ja laskukiekot ovat suosittuja oppimisvälineitä (Swan & Marshall, 2010). Ikäheimon (2022) mukaan helminauhat (ks. kuva 3), joita on saatavissa yleensä 10, 20 ja 100 helmen suuruisina auttavat oppilasta lukumäärän hahmottamisessa sekä laskemisessa taktiilisten ja visuaalisten tuntoaistimusten avulla (Ikäheimo, 2021).

Kuva 3.

Helminauha 20. (Ikäheimo, 2021, s. 563 (16.23 Helminauha 20))



Kuvassa kolme on 20 helmen helminauha, jossa on sekä punaisia että sinisiä helmiä. Eriväriset helmet auttavat oppilasta hahmottamaan viiden voimaa verrattuna siihen, että kaikki helmet olisivat samanvärisiä (Ikäheimo, 2021). Informaaleja fyysisiä oppimisvälineitä ovat arkipäiväiset esineet ja tavarat, kuten esimerkiksi leikkirahat, jäätelötikut, hammastikut, kuutiot ja erilaisia rasiat sekä karkit tai muut tavarat, jotka sopivat laskemiseen (Carbonneau ym., 2013; Uttal ym., 2013; Jones & Tiller, 2017).

5.2 Virtuaaliset oppimisvälineet

Virtuaalisilla oppimisvälineillä tarkoitetaan virtuaalisia versioita fyysistä oppimisvälineistä (Manches & O'Malley, 2012; Larkin, 2016), jotka tarjoavat digitaalisessa muodossa erilaisia etuja verrattuna niiden fyysisiin kappaleisiin (Manches & O'Malley, 2012). Niiden etuina voidaan pitää esimerkiksi niiden hallittavuutta, joustavuutta ja edullisuutta (Manches & O'Malley, 2012). Toisaalta haasteena virtuaalisten oppimisvälineiden käyttämisessä saattaa olla laitteista johtuvat ongelmat, jolloin oppimisvälineet eivät toimi halutulla tavalla (Vessonen ym., 2020).

Myös virtuaalisten oppimisvälineiden avulla oppilas voi olla vuorovaikutuksessa konkreettisten esitysmuotojen kanssa ja oppia tekemällä niin kuin fyysistenkin oppimisvälineiden kanssa (Manches & O'Malley, 2012). Larkin (2016) kuitenkin huomauttaa, että digitaalisten oppimisvälineiden hyöty ei välttämättä ole niin suuri, koska ne on erotettu oppimisvälineiden vastavasta fyysisestä muodosta. Tällöin oppilas ei saa tuntoaistimusta, mikä on puolestaan fyysisen oppimisvälineen yksi keskeisimmistä eduista (Manches & O'Malley, 2012). Virtuaalisten oppimisvälineiden etu fyysisiin verrattuna saattaa olla se, että lapsi voi keskittyä paremmin välineiden eroihin, koska muut häiriötekijät, kuten välineen paino tai väri eivät häiritse lasta (Manches & O'Malley, 2012).

Manches ja O'Malley (2012) huomauttavat, että toisinaan fyysisten välineiden ominaisuudet, kuten paino tai koko saattaa kuitenkin auttaa oppilasta hahmottamaan asioita tai niiden välisiä suhteita. Vaikuttaisi siis siltä, että on oppilaasta ja hänen oppimistyylistään kiinni ovatko fyysiset vai virtuaaliset oppimisvälineet hänelle toimivampia. Myös opiskeltavalla aiheella vaikuttaisi olevan merkitystä sen suhteen olisiko virtuaaliset, konkreettiset oppimisvälineet (*tangible*) vai niiden käytön yhdistelmä tehokkainta oppimisen kannalta (Pires ym., 2019). Vessonen ja kollegat (2020) toteavat artikkelissaan, että virtuaalisten oppimisvälineiden käyttö voi olla aikatehokkaampaa kuin fyysisten oppimisvälineiden käyttö, jolloin oppilas kerkeää tekemään yhden oppitunnin aikana enemmän tehtäviä.

5.3 Konkreettiset oppimisvälineet

Konkreettiset oppimisvälineet (*tangible*) ovat konkreettisia laitteita ja välineitä, joissa on digitaalista tietoa (Lehtonen, 2022). Pricen (2013) mukaan konkreettiset oppimisvälineet ovat esineitä, joihin on sisällytetty tietokonemaista tietoa ja niitä voidaan langattomasti yhdistää digitaalisiin esitysmuotoihin. Konkreettisiin oppimisvälineisiin eivät kuitenkaan kuulu tietokoneet (Lehtonen, 2022). Konkreettiset oppimisvälineet yhdistelevät fyysisten ja virtuaalisten välineiden puolia luoden uusia oppimisen mahdollisuuksia (Lehtonen, 2022). Lehtonen (2022, s. 33) mainitsee esimerkkeinä konkreettisista oppimisvälineistä kaupallisen OSMOn matematiikkapelit, Marichalin ja kollegoiden (2017) kehittämän Ceibal Tangiblen sekä Ziton ja kollegoiden (2021) kehittämän Owlet manipulativesin.

Erilaisten havainto-ominaisuuksien, kuten esimerkiksi värin, koon ja äänen mukauttaminen oppimisvälineestä on konkreettisilla oppimisvälineillä helpompaa kuin fyysisillä oppimisvälineillä (Manches & O'Malley, 2012). Näin ollen konkreettisten oppimisvälineiden voidaan ajatella olevan helpommin muokattavia havainto-ominaisuuksiltaan (Lehtonen, 2022). Konkreettisten oppimisvälineiden havainto-ominaisuuksien, kuten värin muuttaminen onnistuu jopa samanaikaisesti, kun oppilas käyttää niitä (Lehtonen, 2022).

Lehtosen (2022) mukaan konkreettisten oppimisvälineiden etuna voidaan pitää niiden helppokäyttöisyyttä, jolloin oppijan huomio pysyy itse opiskeltavissa olevassa asiassa, eikä siinä kuinka oppimisvälinettä käytetään. Manches ja O'Malley (2012) toteavat, että fyysinen oppimisvälineen käyttäminen vapauttaa oppijan kognitiivisia resursseja matemaattisten käsitteiden oppimiseen. Pires ja kollegat (2019) havaitsivat tutkimuksessaan, että konkreettisten oppimisvälineiden avulla oppilaan ja oppimisvälineen välinen vuorovaikutus on rikkaampaa ja monipuolisempaa kuin virtuaalisten oppimisvälineiden käytön yhteydessä. Pricen (2013) mukaan oppijan autonomia kasvaa hänen käyttäessään konkreettisiä oppimisvälineitä, koska ne tukevat oppimista antamalla välitöntä palautetta oppilaan suoriutumisesta.

5.4 Varga-Neményi-välineet ja Montessorin didaktiset materiaalit

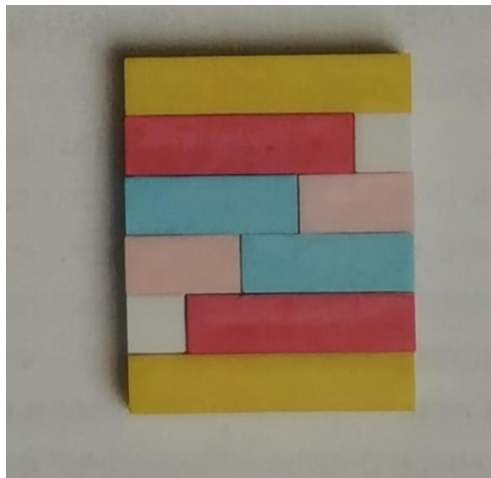
Varga-Neményissä käytetään monenlaisia välineitä, joiden tarkoituksena on tukea oppimista (Tikkanen, 2008). Menetelmässä välineet jaetaan pysyviin ja tilapäisiin oppimisvälineisiin (Oravec & Kivovics, 2005). Pysyviä oppimisvälineitä Varga-Neményi-menetelmässä ovat esi-

merkiksi loogiset palat, värisauvat ja leikkirahat (Oravec & Kivovics, 2005). Kun taas tilapäisenä oppimisvälineenä voidaan käyttää esimerkiksi tikkaita kuvaamaan lukusuoraa (Oravec & Kivovics, 2005). Tikkanen ja Lampinen (2005) nimeävät Varga-Neményi-menetelmän tärkeimmiksi toimintavälineiksi värisauvat, loogiset palat sekä sinipunakiekot.

Ikäheimo (2021) neuvoo kirjassaan värisauvojen käyttämisestä esimerkiksi lukujen hajotelmien harjoitteluun (ks. kuva 4). Varga-Neményi-värisauvojen pituudet vaihtelevat 1–10 senttimetrin välillä ja niiden lisäksi on myös 12 ja 16 senttimetriä pitkät värisauvat (Ikäheimo, 2021). Eripituiset sauvat ovat erivärisiä ja sauvoja verrataan esimerkiksi ykkössauvaan (kuvasa neljä ykkössauva on valkoinen), joka on yhden senttimetrin mittainen, jolloin oppilaalle konkretisoidaan muiden sauvojen pituudet ja luvut, joita sauvat edustavat (Ikäheimo, 2021). Värisauvat tarjoavat oppilaalle taktiilista ja visuaalista oppimisen tukea (Ikäheimo, 2021), jolloin ne sopivat hyvin Brunerin (1967) toiminnallisen tason oppimiseen.

Kuva 4.

Varga-Neményi-värisauvojen käyttö luvun 5 hajotelmien harjoitteluun. (Ikäheimo, 2021, 178 (kuva 7.20b))



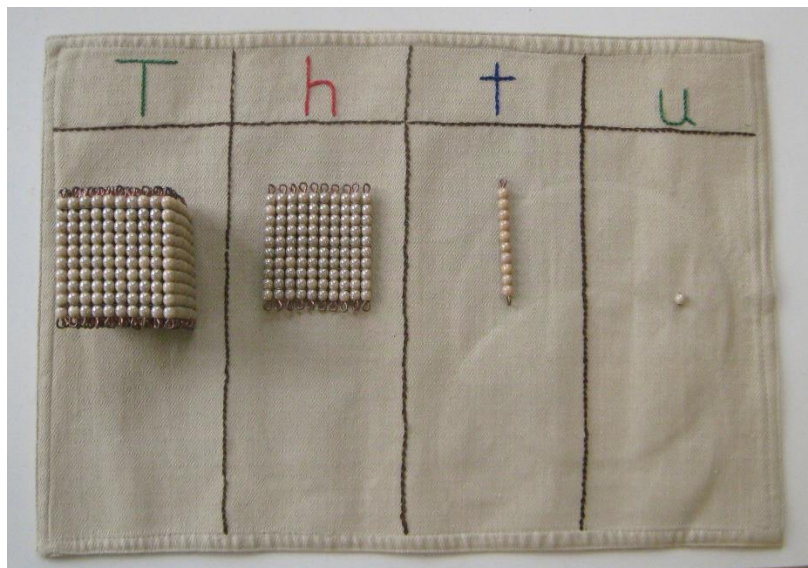
Montessori-pedagogiikkaan puolestaan liittyy paljon omanlaistaan didaktista materiaalia. Montessorivälineillä on neljä pääperiaatetta, jotka toistuvat niissä: 1. virheen kontrolli, 2. esteettisyys, 3. aktiivisuus ja 4. välineiden määrän rajaus (Wilander, 2018). Virheen kontrollin avulla lapsen on mahdollista työskennellä itsenäisesti, koska välineen avulla lapsensa on helppo arvioida onnistumisestaan (Montessori, 1965a; Hayes & Höynälänmaa, 1985; Wilander, 2018). Esteettisyys on montessorivälineissä tärkeää, kuten niiden ehjyys, kaunis väri, huolellinen valmistus ja täsmällinen ulkomuoto sekä luonnonmateriaalien suosiminen (Wilander, 2018). Aktiivisuutta välineet tukevat esimerkiksi hienomotoristen taitojen kehittämisellä (Wilander, 2018).

Välineiden määrän rajaaminen perustuu Montessorin havaintoon siitä, että vain yksi kappale jokaista välinettä opettaa lasta odottamaan vuoroaan (Wilander, 2018). Sen lisäksi välineiden määrän rajauksella pyritään siihen, että välineitä käytettäisiin yhdessä, koska ne muodostavat loogisesti jatkuvan kokonaisuuden (Wilander, 2018).

Montessori-pedagogiikan matematiikan materiaaleja peruskoulussa ovat esimerkiksi hiekkapaperinumerot, kultaiset helmet (ks. kuva 5) ja laskusauvat sekä monet muut välineet (Hayes & Höynälänmaa, 1985; Wilander, 2018). Hiekkapaperinumeroita hyödynnetään esimerkiksi lukujen yhdestä kymmeneen numeromerkkien oppimiseen ja kirjoittamisen harjoitteluun (Hayes & Höynälänmaa, 1985; Wilander, 2018). Kuvassa viisi näkyvät kultaiset helmet ovat montessoripedagogiikassa kymmenjärjestelmän opettamiseen käytettävä väline, johon kuuluu irralliset ykköshelmet, sauvat, joissa on kymmenen helmeä, neliöt, joissa on sata helmeä ja kuutiot, joissa on tuhat helmeä (Wilander, 2018). Laskusauvojen avulla lapsille konkretisoituu kymmenjärjestelmän lukujen suuruuserot laskusauvojen mittaerojen avulla (Wilander, 2018).

Kuva 5.

Montessorin kultaiset helmet ja paikka-alusta. (Liotta, J. & Liotta C., 14.1.2008)



6. Yhteenveto

Tässä luvussa kokoan tutkielmani yhteen ja vastaan tutkimuskysymyksiini tutkielmani pohjalta. Ensimmäinen tutkimuskysymykseni on ”Millaisia tutkimustuloksia oppimisvälineiden hyödyntämisestä matematiikan oppimisessa on saatu selville?”. Tähän kysymykseen vastaan nojaten teoriaani, joka tukee konkreettisuuden hyödyntämistä oppimisessa. Sen lisäksi kertaan, millaisia oppimisvälineitä suositellaan käytettävän sekä mitä oppimisvälineitä käytettäessä tulisi ottaa huomioon. Toinen tutkimuskysymykseni on ”Miten oppimisvälineitä voidaan hyödyntää alkuopetuksen matematiikan opetuksessa *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden 2014* mukaan?”. Tähän kysymykseen vastaan *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden 2014* matematiikan osuuteen ja tutkielmani teorian tietoon perustuen.

6.1 Tutkimustuloksia oppimisvälineiden hyödyntämisestä matematiikan oppimisessa

Seuraavaksi esitän vastauksen ensimmäiseen tutkimuskysymykseeni. Tutkielmassani selvisi, että alkuopetusikäisen oppimista ja ajattelun kehitystä hyödyttää konkreettisten mallien hyödyntäminen oppimisen tukena (Montessori, 1965a; Bruner, 1967; Piaget & Inhelder, 1977). Piaget’n ja Inhelderin (1977) mukaan lapsen kognitiivisessa kehityksessä on alakouluikäisessä meilläkin konkreettisten operaatioiden vaihe, jolloin sanallisten selitysten rinnalle lapsi tarvitsee konkreettisia malleja ajattelunsa tueksi. Myös Brunerin (1967) kolmiportainen oppimisteoria ja sen toiminnallinen taso puoltaa konkreettisten ja toiminnallisten menetelmien käyttämistä oppimisen aluksi. Toiminnallisuutta voidaan pitää myös unkarilaisen Varga-Neményi-pedagogiikan pääperiaatteena (Oravec & Kivovics, 2005; Tikkanen, 2008). Myös Riskun (2002) mukaan havainto- ja toimintamateriaalit konkretisoivat lapselle abstrakteja matemaattisia käsitteitä.

Tutkimusartikkeleissa esitetään erilaisten esineiden käyttämistä oppimisvälineenä. Suurimassa osassa tutkielmani lähteistöstä tavallisten arkipäiväisten esineiden käyttämistä oppimisvälineenä suositeltiin (Oravec & Kivovics, 2005; Carbonneau ym., 2013; Uttal ym., 2013; Larkin, 2016; Jones & Tiller, 2017; Ikäheimo, 2021). Uttal kollegoineen (2013) kutsuu näitä arkipäiväisiä esineitä, joita käytetään oppimisvälineinä, informaaleiksi oppimisvälineiksi. McNeil ja Jarvin (2007) eivät kuitenkaan suosittele sellaisten esineiden käyttämistä oppimisvälineinä, jotka ovat tuttuja lapselle koulun ulkopuolisesta kontekstista. Uttalin ja kollegojen (2013) formaaleiksi oppimisvälineiksi kutsumia fyysisiä oppimisvälineitä, kuten Multilink-

kuutioita, kymmenjärjestelmävälineitä tai lukusauvoja myös McNeil ja Jarvin (2007) suosittelevat käytettävän oppimisvälineenä. Myös Varga-Neményin oppimisvälineet, kuten värisauvat ja loogiset palat (Oravec & Kivovics, 2005; Tikkanen & Lampinen, 2005) sekä Montessorin didaktiset materiaalit, kuten kultaiset helmet ja hiekkapaperinumerot (Hayes & Höynälänmaa, 1985; Wilander, 2018) ovat fyysisiä formaaleja oppimisvälineitä.

Fyysisten käsin tunnusteltavissa olevien oppimisvälineiden lisäksi esittelen tutkielmassani myös virtuaalisia oppimisvälineitä sekä konkreettisia oppimisvälineitä (*tangible*), jotka niin ikään ovat formaaleja oppimisvälineitä. Virtuaaliset oppimisvälineet ovat fyysisten oppimisvälineiden vastaavia virtuaalisia kopioita (Manches & O'Malley, 2012), joita voidaan käyttää esimerkiksi tietokoneella tai iPadillä. Ne ovat fyysisiin oppimisvälineisiin verrattuna edullisempia, joustavampia muunneltavuuden suhteen (Manches & O'Malley, 2012) sekä aikatehokkaampia (Vessonen ym., 2020). Haasteena niiden käytössä voi kuitenkin olla laitteissa olevat ongelmat (Vessonen ym., 2020) ja tuntoaistimuksen puute (Manches & O'Malley, 2012).

Konkreettiset oppimisvälineet (*tangible*) ovat konkreettisia laitteita ja välineitä, joissa on Pricen (2013) mukaan tietokonemaista tietoa ja Lehtosen (2022) mukaan digitaalista tietoa. Ne yhdistelevät fyysisten ja virtuaalisten oppimisvälineiden ominaisuuksia ja luovat näin ollen uusia oppimisen mahdollisuuksia (Lehtonen, 2022). Konkreettisten oppimisvälineiden etuna pidetään niiden muunneltavuutta havainto-ominaisuuksien suhteen, jopa samanaikaisesti, kun oppilas hyödyntää niitä (Manches & O'Malley, 2012; Lehtonen, 2022). Konkreettisten oppimisvälineiden avulla oppilaan ja oppimisvälineen välille muodostuu monipuolisempi ja rikkaampi yhteys oppilaan käsitellessä fyysisiä välineitä kuin virtuaalisia välineitä käytettäessä (Pires ym., 2019). Konkreettisen oppimisvälineen fyysinen manipulaatio vapauttaa oppilaan kognitiivisia resursseja matemaattisten käsitteiden oppimiseen (Manches & O'Malley, 2012).

Useassa tutkimuksessa havaittiin, että opettajan tapa esitellä oppimisvälineet oppilaille vaikuttaa siihen, kuinka hyödyllisiä ne ovat matematiikan oppimisen kannalta (McNeil & Jarvin, 2007; Manches & O'Malley, 2012; Lehtonen, 2022). Opettajan tulee esitellä oppimisvälineet oppilaille oppimisvälineinä eikä leluina, jotta oppilaat käyttävät niitä oppimisensa apuna leikkimisen sijaan (McNeil & Jarvin, 2007). Lisäksi opettajan tulee kiinnittää huomiota oppilaiden huolelliseen ohjeistamiseen ja opastamiseen, jotta oppimisvälineet hyödyttäisivät oppimista (Carbonneau ym., 2013). Oppimisvälineen ja sen esittämän symbolisen matemaattisen ongelman välisen yhteyden korostaminen on myös tärkeää (Manches & O'Malley, 2012; Uttal ym., 2013; Lehtonen, 2022). Lehtonen (2022) huomauttaa, että opettajalla on suuri valta vaikuttaa

oppimisvälineiden käyttöön omassa luokassaan, kuten esimerkiksi käytetäänkö niitä ollenkaan ja milloin niitä saa käyttää.

6.2 Oppimisvälineiden hyödyntäminen vuosiluokkien 1–2 matematiikan oppimisessa

Toisessa tutkimuskysymyksessäni pyrin tarkastelemaan oppimisvälineiden ja konkreettisuuden mahdollisuuksia matematiikan oppimisessa pohjautuen *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteisiin 2014*. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa mainitaan useaan otteeseen toiminnallisuus, konkreettisuus sekä erilaiset esitystavat (Opetushallitus, 2016), jolloin oppimisvälineiden käyttäminen oppimisessa on luonnollista. Lisäksi matematiikan arvioinnin osuudessa mainitaan, että arviointikeinoina voidaan hyödyntää muiden keinojen ohella myös piirtämisen tai välineiden avulla tehtyjä ratkaisuja matemaattisiin tehtäviin (Opetushallitus, 2016).

Seuraavaksi käsittelemme muutamien opetussuunnitelman opetuksen tavoitteiden ja teorian tiedon yhteyttä toisiinsa. Tavoite numero yhden ”T1 tukea oppilaan innostusta ja kiinnostusta matematiikkaa kohtaan sekä myönteisen minäkuvan ja itseluottamuksen kehittymistä” sekä tavoite numero kahden ”T2 ohjata oppilasta kehittämään taitoaan tehdä havaintoja matematiikan näkökulmasta sekä tulkita ja hyödyntää niitä eri tilanteissa” (Opetushallitus, 2016) täyttämiseen auttaisi opetusmenetelmien monipuolinen hyödyntäminen (McNeil & Jarvin, 2007) sekä erilaisten oppimisvälineiden niin formaalien kuin informaalienkin hyödyntäminen (Uttal ym., 2013).

Tavoite numero kolmen ”T3 kannustaa oppilasta esittämään ratkaisujaan ja päätelmiään konkreettisin välinein, piirroksin, suullisesti ja kirjallisesti myös tieto- ja viestintäteknologiaa hyödyntäen” (Opetushallitus, 2016) täyttämiseksi Brunerin (1967) oppimisteorian kolme tasoa: toiminnallinen, ikoninen ja symbolinen tarjoavat keinoja opetuksen monipuolisuuteen. Toiminnallisella tasolla oppilas voi hyödyntää esimerkiksi oppimisvälineitä (Resnick & Ford, 1981), ikonisella tasolla visuaalista ja auditiivista aistikanavaa (Manninen ym., 2020), kunnes symbolisella tasolla oppilas hyödyntää numero- ja operaatiomerkkejä (Bruner, 1967). Lisäksi esimerkiksi virtuaalisten ja konkreettisten (*tangible*) oppimisvälineiden hyödyntäminen sopivat tavoite numero kolmen mukaiseen opetukseen.

Tavoitteissa viisi ”T5 ohjata oppilasta ymmärtämään matemaattisia käsitteitä ja merkintätapoja” ja seitsemän ”T7 perehdyttää oppilasta peruslaskutoimitusten periaatteisiin ja tutustuttaa

niiden ominaisuuksiin” (Opetushallitus, 2016) keskeistä on matemaattiset merkintätavat, käsitteet ja peruslaskutoimitukset sekä niiden ominaisuudet. Resnickin ja Fordin (1981) mukaan Brunerin (1967) toiminnallisella tasolla laskemisen tukena voidaan hyödyntää esimerkiksi helmiä tai palikoita. Formaaleista oppimisvälineistä voidaan hyödyntää esimerkiksi kymmenjärjestelmävälineitä ja helminauhoja (Ikäheimo, 2021) sekä laskukuutioita ja laskukiekkoja (Swan & Marshall, 2010). Myös monet informaalit oppimisvälineet, kuten karkit ja hammastikut sopivat laskemisen apuvälineiksi (Carbonneau ym., 2013; Uttal ym., 2013; Jones & Tiller, 2017). Numeromerkkien opettelemiseen montessoripedagogiikassa hyödynnetään hiekkapaperinumeroita (Hayes & Höynälänmaa, 1985; Wilander, 2018).

Tavoite numero kuuden ”T6 tukea oppilasta lukukäsitteen kehittymisessä ja kymmenjärjestelmän periaatteen ymmärtämisessä” (Opetushallitus, 2016) täyttämiseksi kymmenjärjestelmävälineiden käyttäminen on luonnollista (Ikäheimo & Risku, 2004; McNeil & Jarvin, 2007; Uttal ym., 2013; Ikäheimo, 2021). Piaget ja Inhelder (1977) kuvasivat lapsen lukukäsitteen olevan operationaalisella tasolla, kun lukuja kuvaavien tavaroiden avaruudellinen sijainti ei vaikuta lapsen käsitykseen niiden yhteenlasketusta lukumäärästä. Lukukäsitteen kehittämisen tukena ja tarkistamiseksi voidaankin hyödyntää esimerkiksi informaaleja oppimisvälineitä (Uttal ym., 2013), kuten nappeja tai käpyjä (Ikäheimo, 2021).

Tavoite numero yhdeksän ”T9 tutustuttaa oppilas geometrisiin muotoihin ja ohjata havainnoimaan niiden ominaisuuksia” (Opetushallitus, 2021) täyttämiseen voidaan hyödyntää esimerkiksi Lehtosen (2022) mainitsemaan geolautaa, johon oppilas voi kuminauhan avulla hahmotella tasokuvioita, kuten kolmion tai nelikulmion. Geometrisista muodoista on olemassa monenlaisia niitä havainnollistavia oppimisvälineitä niin fyysisessä kuin virtuaalisessakin muodossa, joiden hyödyntäminen sopisi tavoitteen yhdeksän mukaiseen opetukseen. Tavoitteen kymmenen ”T10 ohjata oppilasta ymmärtämään mittaamisen periaate” (Opetushallitus, 2016) täyttämiseen voidaan hyödyntää monenlaisia keinoja. Oravec ja Kivovics (2005) sekä Tikkanen (2008) kertoivat esimerkkinä oman vartalon käyttämisestä mittaamisen välineenä. Myös Montessorin värisauvoja (Montessori, 1965a) sekä Varga-Neményin värisauvoja (Oravec & Kivovics, 2005; Ikäheimo, 2021) voidaan käyttää mittaamisen harjoitteluun.

7. Pohdinta

Tässä luvussa tarkastelen tutkimusprosessiani ja sen minulle tuomaa tietoa. Lisäksi arvioin tutkielmani luotettavuutta ja eettisyyttä sekä hahmottelen aihetta pro gradu -tutkielmalle. Sain tutkielmani aiheen idean omakohtaisesta tarpeesta saada lisätietoa oppimisvälineisiin ja niiden hyödyntämiseen liittyen. Tutkielmassani onnistuin löytämään teoriaan nojaavia perusteluita sille, miksi konkreettisuus ja sen hyödyntäminen on tärkeää alkuopetusikäisten oppilaiden ajattelun kehitykselle ja oppimiselle. Lisäksi pääsin tutustumaan tarkemmin Montessori-pedagogiikkaan, joka on omalta osaltaan ollut merkittävä oppimisvälineiden hyödyntämisen historiassa ja nykyisyydessäkin. Myös unkarilainen Varga-Neményi-menetelmä ja sen taustalla oleva pedagogiikka oli minulle aiemmin melko tuntematon. Tutkielmani kautta pääsin laajentamaan tietämystäni näiden suhteen.

Omaan tutkielmaani perustuen ajattelen oppimisvälineiden hyödyntämisen olevan tärkeää alkuopetuksen matematiikassa. Opettajan tulee kuitenkin antaa aikaa oppimisvälineiden käytölle, jotta ne tukevat matemaattisen ongelman ratkaisemista sekä matemaattisen ajattelun kehittymistä. Oppilaille tulee neuvoa, miten välineitä käytetään, jotta ne toimivat oppimisvälineenä eivätkä leluina. Lisäksi opettajan tulisi järjestää oppimisympäristö siten, että se tukisi oppimisvälineiden käyttämistä oppilaan niin halutessaan.

Opetuksen havainnollistamistapoina opettajan tulisi käyttää monipuolisia menetelmiä, jotta opettaja vastaisi mahdollisimman monen oppilaan oppimistyyliin. Oppimisvälineiden kirjokin on laaja aina fyysistä oppimisvälineistä virtuaalisiin oppimisvälineisiin ja konkreettisiin oppimisvälineisiin (*tangible*). On siis muistettava, että eri oppilaat voivat hyötyä erilaisista oppimisvälineistä. Oppimisvälineiden hyödyntämisen rinnalle tarvitaan kuitenkin oppilaan ajattelun kielentämistä sekä vuoropuhelua opettajan kanssa. Myös Montessorin didaktisissa materiaaleissa sekä Varga-Neményin välineistöissä on paljon suomalaisen matematiikan opetukseen sopivia oppimisvälineitä.

7.1 Tutkimuksen luotettavuus ja eettisyys

Tutkimuseettisen neuvottelukunnan (2012) mukaan hyvään tieteelliseen käytäntöön kuuluu rehellisyys, huolellisuus ja tarkkuus tutkimustyössä, tallentamisessa ja esittämisessä sekä tutkimusten ja niiden tulosten arvioinnissa. Sen lisäksi on tärkeää, että tutkimukseen sovelletaan

eettisesti kestäviä tiedonhankinta- ja arviointimenetelmiä sekä avointa ja vastuullista tiedeviestintää (Tutkimuseettinen neuvottelukunta, 2012). Asianmukaisella viittaustekniikalla otetaan huomioon ja kunnioitetaan muiden tutkijoiden tekemää työtä (Tutkimuseettinen neuvottelukunta, 2012). Olen käyttänyt tutkielmassani viittausjärjestelmänä APA-versiota 7. Tutkimusta tehdessäni olen noudattanut näitä hyvään tieteelliseen käytäntöön kuuluvia periaatteita.

Aaltion ja Puusan (2020) mukaan luotettavaan ja hyvään tutkimuskäytäntöön kuuluu, että tutkimuksessa esitetään perusteet, joiden mukaan tutkimusta voidaan pitää luotettavana. Tutkielmani luotettavuuden takaamiseksi olen pyrkinyt valikoimaan lähteikseni kansainvälisiä vertaisarvioituja tieteellisiä artikkeleja, joiden lisäksi olen käyttänyt muutamia alan perusteoksia. Käyttämäni kirjallisuus on kattanut melko laajan aikavälin aina vuodesta 1965 tähän vuoteen saakka. Lisäksi tutkielmani lähteistöön pyrin valikoimaan mahdollisimman monipuolisia ja eri näkökulmista asiaa tarkastelevia lähteitä. Aaltio ja Puusa (2020) muistuttavat, että tutkijalla on tutkimusprosessin alussa aina jonkinlainen esiyymmärrys aiheesta, joka suuntaa hänen ajatuksiinsa ja tiedonhakuun. Olen kuitenkin avannut tutkielmassani, millaisella esiyymmärryksellä olen lähtenyt tutkielmaani tekemään.

7.2 Jatkotutkimuksen tekeminen aiheesta

Kandidaatin tutkielmaa tehdessäni havaitsin oppimisvälineiden olevan laaja kokonaisuus erilaisia materiaaleja niin fyysisessä kuin digitaalisessa muodossa. Pro gradu -tutkielmassa minua kiinnostaisi tutkia tarkemmin, miten ja millaisia oppimisvälineitä opettajat hyödyntävät alkuopetuksen matematiikan opetuksessa. Tätä voisin tutkia haastatteleamalla opettajia välineiden käytöstä ja siitä, miten opettajat esimerkiksi esittelevät välineet oppilaille, ovatko välineet aina oppilaiden hyödynnettävissä sekä millaisia sääntöjä niiden käyttämiseen liittyy. Pro gradu -tutkielmassa haluaisin selvittää asiaa etenkin opettajien näkökulmasta, sillä omassa tutkielmassani havaitsin, että opettajalla on suuri valta päättää, miten ja milloin oppimisvälineitä käytetään (Lehtonen, 2022).

Toisaalta pro gradussa voisin tutkia tarkemmin myös sitä, mitä oppimisvälineryhmiä opettajat hyödyntävät. Myös sitä voisi selvittää, miten opettajat perustelevat oppimisvälineiden käyttämistä. Lehtosen (2022) mukaan oppimisvälineet voidaan jakaa fyysisiin, virtuaalisiin ja konkreettisiin oppimisvälineisiin. Uskon, että fyysisiä oppimisvälineitä hyödyntää moni opettaja, mutta kiinnostavaa olisikin selvittää etenkin virtuaalisten ja konkreettisten oppimisvälineiden hyödyntämistä.

Lähteet

- Aaltio, I. & Puusa, A. (2020). 11. Mitä laadullisen tutkimuksen arvioinnissa tulisi ottaa huomioon? Teoksessa A. Puusa & P. Juuti (toim.), *Laadullisen tutkimuksen näkökulmat ja menetelmät*. Gaudeamus.
- Aunola, K., & Nurmi, J.-E. (2018). Matemaattisten taitojen kehitys kouluikässä. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg, & P. Räsänen (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen* (s. 54–69). Niilo Mäki Instituutti.
- Brotherus, A., Hytönen, J. & Krokfors, L. (2002). *Esi- ja alkuopetuksen didaktiikka*. (2., uud. p.). WSOY.
- Bruner, J. (1967). *Toward a Theory of Instruction*. The Belknap Press of Harvard University Press.
- Carbonneau, K., Marley, S., & Selig, J. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology*, 105(2), 380–400. <https://doi.org/10.1037/a0031084>
- Fyfe, E., McNeil, N., Son, J. & Goldstone, R. (2014). Concreteness Fading in Mathematics and Science Instruction: A Systematic Review. *Educational psychology review*, 26(1), 9–25. <https://doi.org/10.1007/s10648-014-9249-3>
- Hayes, M. & Höynälänmaa, K. (1985). *Montessori-pedagogiikka*. Otava.
- Hirsjärvi, S., Remes, P. & Sajavaara, P. (2009). *Tutki ja kirjoita* (15. uud. p.). Tammi.
- Ikäheimo, H. & Risku, A.-M. (2004). Matematiikan esi- ja alkuopetuksesta. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.), *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (s. 222–240). Niilo Mäki Instituutti.
- Ikäheimo, H. (2021). *Matematiikan osaaminen vahvaksi: Iloa opetukseen ja oppimiseen*. Otavan Kirjapaino Oy.
- Jones, J., & Tiller, M. (2017). Using Concrete Manipulatives in Mathematical Instruction. *Dimensions of Early Childhood*, 45(1), 18–23.
- Kyrönlampi, T., Mäkitalo, K. & Uitto, M. (2020). Johdanto. Teoksessa T. Kyrönlampi, K. Mäkitalo & M. Uitto (toim.), *Esi- ja alkuopetuksen käsikirja* (s. 9–13). PS-Kustannus.
- Larkin, K. (2016). Mathematics Education and Manipulatives: Which, When, How? *Australian Primary Mathematics Classroom*, 21(1), 12–17.
- Lehtonen, D. (2022). *'Now I Get It!' Developing a Real-World Design Solution for Understanding Equation-Solving Concepts* (Tampere University Dissertations 538) [väitöskirja,

- Tampereen yliopisto]. Trepo Tampereen yliopiston avoin julkaisuarkisto. <https://trepo.tuni.fi/handle/10024/136918>
- Lindgren, S. (1990). Toimintamateriaalin käyttö matematiikan opiskelussa: matikkatupako-
keilu peruskoulun toisella luokalla (Acta Universitas Tamperensis A 307) [väitöskirja,
Tampereen yliopisto]. Tampereen yliopisto.
- Liotta, J. & Liotta, C. (14.1.2008). *Naming the Quantities* [valokuva]. Flickr. Haettu 16.5.2022
osoitteesta <https://www.flickr.com/photos/jessandcolin/2200341937/in/photostream/>
- Manches, A. & O'Malley, C. (2012). Tangibles for learning: A representational analysis of
physical manipulation. *Personal and ubiquitous computing*, 16(4), 405–419.
<https://doi.org/10.1007/s00779-011-0406-0>
- Manninen, E., Filppa, H., Komulainen, T. & Harmoinen, S. (2020). Merkityksellistä matema-
tiikkaa tutkien ja keskustellen. Teoksessa T. Kyrönlampi, K. Mäkitalo & M. Uitto (toim.),
Esi- ja alkuopetuksen käsikirja (s. 93–108). PS-Kustannus.
- McDonough, A. (2016). Good concrete activity is good mental activity. *Australian Primary
Mathematics Classroom*, 21(1), 3–7.
- McNeil, N. & Jarvin, L. (2007). When Theories Don't Add Up: Disentangling the Manipulati-
ves Debate. *Theory into practice*, 46(4), 309–316.
<https://doi.org/10.1080/00405840701593899>
- Montessori, M. (1965a). *Dr. Montessori's own handbook: A Short Guide to Her Ideas and Ma-
terials*. Schocken Books.
- Montessori, M. (1965b). *Spontaneous activity in education: The Advanced Montessori Method*.
Schocken Books.
- Mäntylä, K., Reukauf, M. & Toomar, J. (2013). *Graka kaulassa: Gradun ja kandin tekijän sel-
viytymisopas*. Finn Lectura.
- Opetushallitus. (2016). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014*. Opetushallitus.
- Oravec, M. & Kivovics, Á. (2005). Matematiikan opetus Varga -menetelmällä Unkarissa. Te-
oksessa E. Korpinen (toim.), *Matematiikkaa unkarilaisittain Suomessa ja Unkarissa: Ma-
tematika magyar módra Finnországban és Magyarországon* (s. 22–31). TUOPE, Tutkiva
opettaja 2. Jyväskylä Journal of Teacher Researcher.
- Piaget, J. & Inhelder, B. (1977). *Lapsen psykologia* (suom. Rutanen, M.). Gummerus.
- Pires, A., González Perilli, F., Bakala, E., Fleisher, B., Sansone, G. & Marichal, S. (2019).
Building blocks of mathematical learning: Virtual and tangible manipulatives lead to dif-
ferent strategies in number composition. *Frontiers in Education*, 4, Article 81.
<https://doi.org/10.3389/feduc.2019.00081>

- Price, S. (2013). Tangibles: Technologies and interaction for learning. Teoksessa S. Price, C. Jewitt & B. Brown (toim.), *The Sage handbook of digital technology research* (s. 307–325). SAGE Publications. <http://dx.doi.org/10.4135/9781446282229>
- Puusa, A. & Juuti, P. (2020). 4. Laadullisen tutkimuksen olemus. Teoksessa A. Puusa & P. Juuti (toim.), *Laadullisen tutkimuksen näkökulmat ja menetelmät*. Gaudeamus.
- Quigley, M. (2021). Concrete Materials in Primary Classrooms: Teachers' Beliefs and Practices about How and He They Are Used. *Mathematics Teacher Education and Development*, 23(2), 59–78.
- Resnick, L. & Ford, W. (1981). *The psychology of mathematics for instruction*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Risku, A.-M. (2002). Leikisti ja oikeesti – oikeata matematiikkaa lapsesta lähtien. Teoksessa O. Saloranta (toim.), *Ensimmäiset kouluvuodet: Perusopetuksen vuosiluokkien 1–2 opetus* (s. 115–141). Opetushallitus.
- Salminen, A. (2011). *Mikä kirjallisuuskatsaus? Johdatus kirjallisuuskatsauksen tyyppeihin ja hallintotieteellisiin sovelluksiin*. Vaasan yliopiston julkaisuja.
- Siljander, P. (2014). *Systemaattinen johdatus kasvatustieteeseen: Peruskäsitteet ja pääsuunnaukset*. Vastapaino.
- Sowell, E. J. (1989). Effects of Manipulative Materials in Mathematics Instruction. *Journal for research in mathematics education*, 20(5), 498–505. <https://doi.org/10.2307/749423>
- Swan, P., & Marshall, L. (2010). Revisiting Mathematics Manipulative Materials. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 15(2), 13–19.
- Tikkanen, P. & Lampinen, A. (2005). Unkarilainen Varga-Neményin matematiikan opetusmenetelmä Suomessa. Teoksessa E. Korpinen (toim.), *Matematiikkaa unkarilaisittain Suomessa ja Unkarissa: Matematika magyar módra Finnországban és Magyarországon* (s. 74–88). TUOPE, Tutkiva opettaja 2. Jyväskylä Journal of Teacher Researcher.
- Tikkanen, P. (2008). *”Helpompaa ja haus Kempaa kuin luulin” Matematiikkaa suomalaisten ja unkarilaisten perusopetuksen neljäsluokkalaisten kokemana*. [väitöskirja, Jyväskylän yliopisto]. JYX-julkaisuarkisto. <https://jyx.jyu.fi/handle/123456789/18042>
- Tuomi, J. & Sarajärvi, A. (2009). *Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi* (9. uud. laitos.). Tammi.
- Tutkimuseettinen neuvottelukunta. (2012). Hyvä tieteellinen käytäntö ja sen loukkausepäilyjen käsitteleminen Suomessa. Haettu 15.5.2022 osoitteesta: https://tenk.fi/sites/tenk.fi/files/HTK_ohje_2012.pdf

- Uttal, D., Amaya, M., del Rosario Maita, M., Hand, L., Cohen, C., O'Doherty, K. & DeLoache, J. (2013). It works both ways: Transfer difficulties between manipulatives and written subtraction solutions. *Child Development Research*, 2013, Article 216367. <https://doi.org/10.1155/2013/216367>
- Valtioneuvoston asetus perusopetuslaissa tarkoitetun opetuksen valtakunnallisista tavoitteista ja perusopetuksen tuntijaosta 793/2018. Haettu 15.4.2022 osoitteesta <https://www.finlex.fi/fi/laki/alkup/2018/20180793>
- Vessonen, T., Väisänen, E., Laine, A. & Aunio, P. (2020). Virtuaalisten ja konkreettisten apuvälineiden käytön vaikutus viidesluokkalaisten murtolukujen oppimiseen. *NMI-bulletin*, 30(4), 72–82.
- Vitikka, E. & Rissanen, M. (2019). Opetussuunnitelma kansallisena ja paikallisena ohjausvälineenä. Teoksessa T. Autio, L. Hakala & T. Kujala (toim.), *Siirtymiä ja ajan merkkejä koulutuksessa: Opetussuunnitelmatutkimuksen näkökulmia* (s. 221–245). Tampere University Press.
- West, J. (2018). Mathematical manipulatives for misers. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 23(2), 15–18.
- Wilander, S. (2018). *Montessoripedagogiikka: Oppimisen iloa*. Bookwell.