

# Chaos Quantique et Randomisation dans une Chaîne avec Blocage de Rydberg

par

Martin Schnee

Mémoire présenté au département de physique  
en vue de l'obtention du grade de maître ès science (M.Sc.)

FACULTÉ des SCIENCES  
UNIVERSITÉ de SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, 2 août 2022

Le 2 août 2022

*le jury a accepté le mémoire de M. Martin Schnee dans sa version finale.*

Membres du jury

Professeur Stefanos Kourtis  
Directeur de recherche  
Département de physique

Professeur René Côté  
Membre interne  
Département de physique

Professeur Ion Garate  
Président rapporteur  
Département de physique

*À ma famille,*

# Résumé

Selon les lois de la thermodynamique un système isolé à N-corps est supposé évoluer vers un état d'équilibre thermodynamique. Ce fait repose sur l'hypothèse fondamentale que les systèmes complexes peuvent atteindre n'importe quel état de l'espace des phases en un temps raisonnable, ce qui n'est possible que si leur évolution est chaotique. Les difficultés surviennent dès lors que l'on cherche une description quantique : la mécanique quantique interdit en effet une telle dynamique chaotique. De plus, même si dans la plupart des cas la thermalisation survient bel et bien, certains systèmes quantiques à N-corps ont été découverts qui résistent au processus de thermalisation. Pour résoudre ce paradoxe, l'intrication semble être un ingrédient essentiel. Dans ce mémoire on espère pouvoir répondre à ces questions fondamentales dans le cadre d'un phénomène appelé "cicatrices quantiques à N-corps", récemment observé dans des simulateurs à atomes froids. Dans ces expériences, en initialisant le système dans un état non-intriqué très ordonné, de fortes contraintes locales donnent naissance à une dynamique non-triviale caractérisée par des oscillations de longues durée de vie et une thermalisation très lente. En utilisant un modèle simple qui reproduit ce phénomène nous sommes capable de simuler la dynamique quantique et de l'étudier par le prisme de l'intrication. Pour cela nous sondons la structure fine de l'intrication au cours du temps à l'aide d'outils statistiques issus de la théorie des matrices aléatoires. Nos résultats montrent que bien que la dynamique ne soit pas générique, elle présente tout de même certaines caractéristiques universelles.

Mots-clefs : *Chaos quantique, Evolution, Intrication, Matrices aléatoires, dynamique hors-équilibre, Thermalisation, Blocage de Rydberg, Réseaux de tenseurs.*

# Remerciements

À bien des égards le physicien est un voyageur. Sans pour autant renier son port d'attache il arpente sans relâche les océans de la connaissance, sans cesse à la recherche de terres nouvelles à explorer.

Pour moi, le voyage a commencé il y a maintenant plus de deux ans, et ce mémoire représente une première étape importante. Il n'aurait certainement pû voir le jour sans l'aide précieuse de nombreuses personnes qu'il me faut remercier.

Stefanos tout d'abord, pour m'avoir fait confiance dès le départ et pour la patience dans les moments de doute. Cela m'a beaucoup aidé à gagner en confiance, en expérience et en autonomie. J'apprécie beaucoup ta capacité à sortir des sentiers battus, à explorer mille choses à la fois, et j'oserai dire que nos façon de penser se complètent bien! Merci de m'avoir offert un projet qui a largement dépassé mes espérances.

Faire ses premiers pas en recherche par temps de pandémie ne fut ma foi pas une mince affaire. Même si les premiers temps m'ont offert l'expérience assez unique d'une certaine forme rare de liberté – comment user de son temps lorsqu'aucune activité sociale n'impose son rythme? – l'expérience a d'évidence vite montré ses limites. Heureusement j'ai pû compter sur des amis fidèles pour passer au travers des moments les plus difficiles, le "1er cercle", l'exception tacite à l'éloignement qui était alors la règle : Sam, Claude et Noué, chacun là quand il le fallait.

Autres compagnons d'aventures, de fortunes et d'infortunes, toujours prêts à commettre des méfaits : Laurine, Jess, Max (merci pour les conseils de code!), Joff, Luca, Vishnu, Lucas et j'en oublie probablement.

Enfin, bien sûr, mon frère, ma mère et mon père, et bien sûr ma grand-mère, que j'aime fort. Soutiens infailibles malgré mes erreurs. J'ai bien de la chance de vous avoir!

Pour finir j'ajouterais simplement que je suis très content que ce projet, qui n'était pas évident à cerner au départ, ait finalement abouti à un tout plutôt clair et cohérent. Je remercie les membres de mon jury, Ion et René, pour leur relecture attentive, leurs conseils et leur disponibilité.

Je ne suis qu'au début du voyage, l'aventure n'est pas terminée!

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>iii</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Chaos Quantique et Randomisation des Sous-systèmes</b>	<b>4</b>
<b>1 Évolution dans le temps des systèmes quantiques isolés</b>	<b>5</b>
<b>2 Chaos quantique</b>	<b>10</b>
2.1 Chaos classique . . . . .	11
2.2 Chaos quantique . . . . .	14
<b>3 Évolution hors-équilibre des systèmes à N-corps : intrication &amp; typicité.</b>	<b>22</b>
3.1 Trempe quantique . . . . .	23
3.2 Intrication typique dans les systèmes multicorps . . . . .	24
3.3 Dynamique typique dans les systèmes multicorps . . . . .	29
3.4 Equilibration & thermalisation . . . . .	32
<b>4 Statistique du spectre d'intrication</b>	<b>35</b>
<b>5 Blocage de Rydberg &amp; modèle PXP</b>	<b>42</b>
<b>II Résultats</b>	<b>50</b>
<b>6 Chaos non-générique dans le modèle PXP</b>	<b>51</b>
6.1 Introduction . . . . .	51
6.2 Méthodes . . . . .	52
6.3 Entropie d'intrication aux temps longs . . . . .	53
6.4 Apparition d'un comportement universel . . . . .	57
<b>Conclusion</b>	<b>62</b>

<b>A Matériel Supplémentaire</b>	<b>64</b>
A.1 Méthode de réseaux de tenseurs pour l'évolution unitaire . . . . .	64
A.1.1 MPS . . . . .	65
A.1.2 TEBD . . . . .	68
A.2 Introduction à la Théorie des Matrices Aléatoires . . . . .	73
<b>Bibliographie</b>	<b>80</b>

# Liste des figures

1.1	<b>À gauche</b> : Exemple de représentation en graphe d'un système quantique à 1 dimension avec $L$ composants, avec des conditions aux bords périodiques (en haut) et ouvertes (en bas). <b>À droite</b> : L'évolution unitaire peut être représentée sous forme de circuit. . . . .	6
1.2	Dans la base des énergies l'évolution unitaire a un effet trivial que l'on visualise plus aisément en représentant l'état par une matrice densité. Si un système quantique est initialisé dans l'état $\rho_0 =  \psi_0\rangle\langle\psi_0 $ représenté en <b>(a)</b> dans la base propre du hamiltonien $H$ avec des sous-espaces dégénérés (carrés sombres), alors à tout instant ultérieur l'état $\rho(t) =  \psi(t)\rangle\langle\psi(t) $ , en <b>(b)</b> , évolue d'une façon telle que seules les phases relatives "tournent". Les sous-espaces dégénérés sont laissés complètement invariants sous l'action de l'évolution (figure tirée de [31]). . . . .	8
1.3	Représentation schématique de l'effet de l'évolution d'un système quantique générique sur l'état. . . . .	9
2.1	Le chaos classique est caractérisé par une divergence exponentielle entre des trajectoires initialement très proches. Les billiards permettent de le visualiser dans l'espace réel (à gauche), mais on le décrit plus généralement dans l'espace des phases (à droite). . . . .	11
2.2	Tout système chaotique classique composé d'un grand nombre de particules est sujet au phénomène de thermalisation, qui est irréversible et indépendant de l'état initial. . . . .	12
2.3	Illustration schématique des deux régimes caractéristiques du chaos classique (figure tirée de [40]). . . . .	14
2.4	<b>(À gauche)</b> : Distribution des espacements adjacents du spectre d'énergie pour les systèmes chaotiques (Wigner-Dyson). <b>(À droite)</b> : pour les systèmes intégrables (Poisson). <b>Insets</b> : interprétation de la répulsion en terme d'anti-croisements (figure adaptée de [57] [30]). . . . .	18
2.5	Décroissance typique de l'écho de Loschmidt <b>(a)</b> et de l'OTOC <b>(b)</b> pour les systèmes quantiques avec limites classique chaotique (figures tirée de [59] [33]).	20

3.1	Un état pur d'un système multicorps peut exhiber des corrélations quantiques entre ses différentes sous-parties. Pour le voir on peut diviser le système en deux sous-systèmes $A$ et $B$ . Si l'état globale $ \psi\rangle_{AB}$ ne peut être écrit comme un produit des états des sous-systèmes $ \psi\rangle_A$ et $ \psi\rangle_B$ alors ces deux parties sont dites intriquées. On peut effectuer une mesure partielle sur l'un des sous-systèmes, ce qui revient à ignorer l'information sur l'autre ("Trace"). Si les deux parties sont intriquées le sous-système mesuré sera vu comme un mélange statistique ("Mixed"). Le degré de mélange étant la quantique d'intrication entre les deux parties (figure adaptée de [66]). . . . .	25
3.2	Lorsqu'on partitionne un système physique en deux régions (en bleu v.s. en blanc) on observe que certains états possèdent une valeur d'intrication qui ne dépend que des degrés de liberté à la frontière (en rouge). Au contraire l'intrication des états typiques implique tous les degrés de liberté d'une région (en bleu) (figure tirée de [25]). . . . .	28
3.3	Croissance de l'entropie d'intrication dans les systèmes chaotiques génériques. On voit une première phase linéaire, dite balistique, qui sature rapidement à une valeur quasi-maximale, l'entropie de Page (figure tirée de [65]). . . . .	30
4.1	Distributions théoriques du rapports des espacements adjacents pour les ensembles gaussiens et diagonal (voir Annexe) (figure tirée de [75]). . . . .	37
4.2	Comportement statistique du spectre d'intrication à mi-chaîne aux temps courts, pour un hamiltonien chaotique (H) et un circuit aléatoire unitaire (R) à $L = 16$ qubits. <b>(a)</b> Densité spectrale moyenne aux temps courts qui converge vers une forme universelle en $1/f$ (pointillés) après $t_{LC}$ . <b>(b)</b> Saturation précoce du rapport d'espacement moyen à la valeur pour GUE signalant l'apparition de la répulsion dans le spectre, indépendamment de la taille du système. <b>(c)</b> Largeur de bande du spectre d'intrication montrant un pic qui sépare la dispersion initiale de la phase de compression. <b>(d)</b> Croissance de l'entropie d'intrication aux temps courts, avec une phase initiale linéaire (figure tirée de [62]). . . . .	39
4.3	Comportement au temps long pour un hamiltonien chaotique ( $L = 16$ qubits). <b>(a)</b> Croissance de l'entropie d'intrication et saturation à la valeur de Page à $t = 30$ . <b>(b)</b> Saturation du facteur de forme spectrale dans sa forme universelle à $t = 30$ signalant un comportement pleinement de type matrice aléatoire (figure tirée de [62]). . . . .	40
5.1	Schéma du dispositif expérimental d'atomes piégés utilisé pour implémenter la chaîne avec blocage de Rydberg. [83] . . . . .	43

5.2	<b>(en haut)</b> État moyen de chacun des atomes de la chaîne au cours du temps. La partie à gauche de la flèche bleue correspond à la préparation de l'état $ \mathbb{Z}_2\rangle$ initial. À la suite on distingue les oscillations caractéristiques des cicatrices quantiques (flèches vertes). <b>(en bas)</b> Illustrations de l'oscillations des observables à plusieurs corps avec la densité de murs de domaines au cours du temps, modélisation (MPS) v.s. mesures (figure tirée de [83]). . . . .	44
5.3	<b>(a)</b> Le terme local à 3 qubits $PXP$ doit être compris comme un bit-flip conditionné par l'état des qubits adjacents. <b>(b)</b> Graphe du sous-espace dynamique émergent à partir de l'état $\mathbb{Z}_2$ pour 6 qubits. Il peut être construit par application successives du hamiltonien $PXP$ sur cet état (figure tirée de [61]). . . . .	45
5.4	La dynamique contrainte du modèle $PXP$ (représenté sous forme de circuit) est très dépendante de l'état initial. Cette dynamique est gelée (portes blanches) sur les qubits (en violet) pour lesquels le motif initial est conservé par les contraintes. La dynamique se fragmente donc entre des régions déconnectées du système impliquant un nombre réduit de qubits (portes vertes). Cela donne naissance à des secteurs dynamiques émergents. . . . .	47
5.5	La statistique du spectre d'énergie suggère que le modèle $PXP$ est non-intégrable (Wigner-Dyson) et donc chaotique (figure tirée de [61]). . . . .	48
6.1	Reproduction avec l'algorithme TEBD du résultat de [61] montrant l'entropie d'intrication au temps courts à partir des états initiaux $ \mathbb{Z}_0\rangle,  \mathbb{Z}_2\rangle,  \mathbb{Z}_3\rangle,  \mathbb{Z}_4\rangle$ avec des conditions aux bords ouvertes pour 30 qubits. . . . .	53
6.2	Croissance de l'entropie d'intrication dans le temps pour $L = 29, 31, 33$ et $35$ qubits à partir de l'état $ \mathbb{Z}_2\rangle$ . L'entropie typique de Page (gris plein), l'entropie d'un état pur aléatoire dans le sous-espace sans-mur (pointillé noir), et la valeur de $S(t)$ à $t = 1800$ (pointillé gris) sont données pour 35 qubits. . . . .	55
6.3	Entropie d'intrication le long de la chaîne en fonction de la taille des sous-systèmes, à différents instants au cours de l'évolution (35 qubits). On voit l'apparition d'une courbe de type Page en "pyramide aplatie" qui sature bien avant la courbe de Page théorique typique (pointillés). . . . .	57
6.4	Comportement aux temps courts. (a), (b) et (c) montrent des quantités pertinentes aux temps courts ( $t < 80$ ) pour 29, 31, 33 et 35 qubits. (d) pour 35 qubits seulement. <b>(a)</b> Entropie d'intrication de la demi-chaîne aux temps courts. La phase balistique initiale est linéaire (fit en pointillés) et dure un temps $t_{LC} \sim \mathcal{O}(L)$ . S'y superposent les oscillations de <i>cicatrice</i> quantique de courte période. <b>(b)</b> Croissance du rang de la matrice densité réduite. $d_{SM}^{L=35} = 2584$ est la dimension du sous-espace sans-mur (SM) évaluée par eq. 5.5 et vérifiée par comptage pour 35 qubits. <b>(c)</b> Rapport d'espacement moyen en fonction du temps. Une moyenne glissante a été appliquée (intervalle = 500 points). Les zones ombragées représentent l'erreur standard sur la moyenne pour chacune des courbes. <b>(d)</b> Entropie relative à GOE pour 35 qubits. . . . .	58

6.5	Distribution des rapports d'espacement moyen du spectre d'intrication à différents instants $t = 8, 12, 14, 20$ au voisinage de $t_{\langle \bar{r} \rangle}$ (35 qubits). (1ère ligne) échelle linéaire, (2ème ligne) échelle log-log. . . . .	60
6.6	Distribution des rapports d'espacement moyen du spectre d'intrication au temps long $t = 948$ (35 qubits). . . . .	60
A.1	(a) remodelage et décomposition aux valeurs singulières de la fonction d'onde. (b) forme canonique de l'état produit de matrices, où deux matrices $\Lambda$ triviales ont été rajoutées aux extrémités (pointillées). (c) Transformation pour passer à la forme canonique gauche ( $A$ ) ou droite ( $B$ ). . . . .	67
A.2	évolution dans le temps. . . . .	69
A.3	contraction d'une porte de Trotter sur 3 site. . . . .	71
A.4	Exemple schématique d'une matrice aléatoire de nombre réels construite en suivant une loi gaussienne (GOE). . . . .	73
A.5	Densité spectrale moyenne renormalisé pour 3 matrices dans GOE, GUE et GSE respectivement ( $n = 8$ ). Quand $n \rightarrow \infty$ la distribution tend vers le semicercle de Wigner dans l'intervalle $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ (figure tirée de [89]). . . . .	76
A.6	Distribution des espacements entre valeurs propres adjacentes pour GOE et GUE (figure tirée de [91]). . . . .	77
A.7	Densité spectrale moyenne d'une matrice de l'ensemble de Wishart-Laguerre, décrite par la distribution de Marchenko-Pastur pour un rapport de forme $y = 1$ . Ici $\lambda = \bar{\rho}$ désigne les valeurs propres normalisées. . . . .	78

# Introduction

Bien que les fondations de la mécanique quantique aient été établies il y a maintenant plus d'un siècle, nous sommes toujours loin d'en avoir compris toute la richesse. Les systèmes quantiques complexes en particulier, dans lesquels de nombreuses particules interagissent ensemble de façon cohérente, constituent un terrain de jeu pour explorer comment les règles simples du monde quantique peuvent conduire à l'émergence d'objets inattendus. Par exemple de nouvelles phases de la matière aux propriétés exotiques [1], comme les isolants topologiques [2], ou bien des quasiparticules au comportement étrange comme les anyons [3]. La modélisation de ces phénomènes, qui supposent souvent de fortes corrélations, reste l'un des défis majeurs [4].

En parallèle un autre champ de recherche s'est développé ces trente dernières années, l'information quantique [5]. En plus d'imaginer de nouveaux outils permettant de manipuler l'information selon les règles de la mécanique quantique, l'information quantique a permis de formaliser notre compréhension des corrélations spécifiques que l'on peut trouver dans le monde quantique [6]. On envisage même aujourd'hui d'utiliser ces concepts pour pousser plus loin notre compréhension des systèmes quantiques à N corps, en les voyant eux-mêmes comme des systèmes informationnelles [7] [8].

Du côté expérimental, des progrès substantiels ont été accomplis ces 40 dernières années dans le piégeage, l'isolation et le contrôle cohérent d'un nombre toujours plus grand de systèmes quantiques individuels [9] [10] [11]. Grâce à cela il est aujourd'hui possible de réaliser des systèmes quantiques artificiels et mesurer leurs propriétés avec une extrême précision. D'un côté, on assiste à un effort international pour construire des calculateurs quantiques universelles toujours plus fiables et puissants [12] [13] [14] [15]. De l'autre, les simulateurs quantiques analogues ouvrent la

voie à une exploration fine de la physique des systèmes quantiques à N corps au-delà de ce qui est envisageable avec les systèmes naturels [16] [17] [18]. Avec même des applications potentielles en physiques des particules et des hautes énergies [19].

Le concept d'intrication est au coeur de ces avancées. Il peut être vu à la fois comme une ressource pour le calcul quantique et comme une sonde de la structure de corrélation des systèmes quantiques. Il a été découvert notamment que les phases topologiques de la matière à température nulle peuvent être classifiées par leur propriétés universelles d'intrication [20], mais aussi que l'on peut tirer partie de l'intrication pour modéliser efficacement des systèmes de matière condensée à l'aide de réseaux de tenseurs [21] [22].

L'étude des systèmes quantiques à N corps hors équilibre est un domaine de recherche relativement récent et en pleine expansion qui profite particulièrement de ces nouveaux outils [23] [24] [25]. L'objectif est de comprendre comment ces systèmes évoluent lorsqu'ils ne sont soumis qu'à leur propre dynamique. Cette question est liée de près aux fondations de la physique statistique : à quelles conditions un système atteint-il un état d'équilibre, voire même thermalise-t-il ? Ces questions, à la transition quantique-classique, ne sont pourtant que le sommet de l'iceberg. La dynamique quantique apparait en effet beaucoup plus riche et subtile que sa limite classique, et autorise toutes sortes de régimes non-conventionnels encore mal connus. On peut citer la localisation à N corps [26] et les cristaux temporelles [27]. L'élaboration de diagnostics pour sonder les différents aspects de la dynamique quantique est l'objet du champ de recherche appelé chaos quantique [28] [29] [30].

Le travail présenté dans ce mémoire se situe à l'interface entre ce domaine de la dynamique à N corps et la théorie de l'information quantique. Celle-ci offre en effet une perspective particulièrement puissante pour décrire la dynamique, notamment lorsque les systèmes thermalisent. L'intrication semble alors jouer un rôle essentiel, puisqu'elle coïncide au temps long avec l'entropie thermodynamique. Plus généralement on a compris ces dernières années que la thermalisation correspond à un brouillage de l'information. De nombreuses questions surgissent alors : *Peut-on identifier des propriétés universelles dans la dynamique de l'information quantique ? Quelles sont les différentes classes d'universalité ? Que se passe-t-il dans le cas d'une dynamique non-conventionnelle ? Quelles sont les temps caractéristiques ?* On étudie ces questions dans le cas d'un système présentant une telle dynamique anormale associée au phénomène de cicatrices quantiques à N corps. La dynamique a été simulée et on a utilisé

des outils issus de la théorie des matrices aléatoires pour caractériser l'apparition d'un comportement universelle du spectre d'intrication au cours de l'évolution.

## **Première partie**

# **Chaos Quantique et Randomisation des Sous-systèmes**

## Chapitre 1

# Évolution dans le temps des systèmes quantiques isolés

Avant toute chose, commençons par poser le cadre de la discussion qui va suivre. Dans ce mémoire nous allons essentiellement nous intéresser à l'évolution dans le temps des systèmes quantiques. Et particulièrement celle de systèmes quantiques complexes et isolés de leur environnement. Il semble donc utile de rappeler brièvement la façon dont la physique quantique envisage ce type de situation.

*Systèmes quantiques multicorps* – Les systèmes qui nous intéressent sont les systèmes quantiques composés d'un grand nombre de constituants individuels ( $L \gg 1$  mais fini), qui interagissent localement avec leurs plus proches voisins. Ils sont souvent représentés sous la forme d'un graphe d'interaction dont les sommets sont les constituants physiques. L'hamiltonien qui décrit le système prend alors la forme d'une somme de termes locaux [23],

$$H = \sum_j h_j. \quad (1.1)$$

Chaque terme décrit l'interaction locale entre un nombre fini de sites (l'hamiltonien est dit *k-local*). Ce genre de systèmes est très répandu en physique de la matière condensée, l'exemple le plus emblématique étant probablement les systèmes de type réseaux de spins, à 1, 2 ou 3 dimensions spatiales (voir Fig. 1.1). Nous nous concentrerons ici sur les systèmes multicorps isolés de leur environnement (sans forçage ni

bain thermique).

*État* – En physique quantique un système isolé est toujours décrit par un état pur  $|\psi\rangle$ . Cet état représente toute la connaissance qu'il est possible d'avoir sur ce système. Typiquement si le système est complexe – comme par exemple une longue chaîne d'atomes en interaction – cet état est un vecteur de taille *gigantesque*. En effet, si on imagine que chaque constituant individuel possède  $q$  degrés de liberté, alors la dimension de  $|\psi\rangle$  est exponentiellement grande avec le nombre de constituants ( $\sim \mathcal{O}(q^N)$ ).

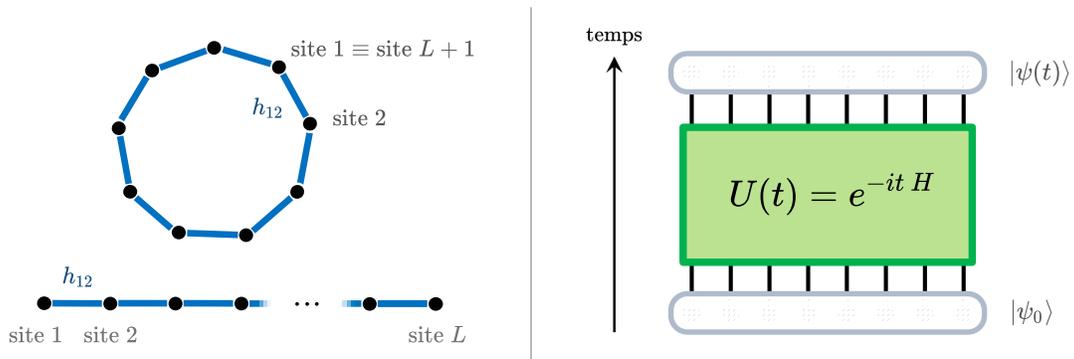


FIGURE 1.1 – **À gauche** : Exemple de représentation en graphe d'un système quantique à 1 dimension avec  $L$  composants, avec des conditions aux bords périodiques (en haut) et ouvertes (en bas). **À droite** : L'évolution unitaire peut être représentée sous forme de circuit.

*Dynamique* – L'évolution dans le temps de cet état est entièrement encodée dans l'opérateur d'évolution  $U$ . Comme notre système est isolé, l'hamiltonien génère seul la dynamique (voir Fig. 1.1). L'opérateur d'évolution est alors *unitaire* et, pour un hamiltonien indépendant du temps, prend une forme très simple (à partir d'ici  $\hbar = 1$ ) :

$$U(t) = e^{-iHt} . \quad (1.2)$$

À partir de là le formalisme quantique nous offre deux représentations équivalentes pour décrire la dynamique. La première considère que seuls les états évoluent alors que les observables sont fixes :

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi_0\rangle \quad (1.3)$$

Si l'état initial est pur, l'unitarité de  $U(t)$  garantit que l'état du système le reste à tout instant. C'est l'évolution à *la Schrödinger*.

À l'inverse, dans la seconde représentation, ce sont les observables qui évoluent alors que l'état du système est considéré fixe (égale à l'état initial  $|\psi_0\rangle$  ci-dessus) :

$$\hat{O}(t) = U(t)\hat{O}_0U^\dagger(t) \quad (1.4)$$

c'est l'évolution à *la Heisenberg* (on parle parfois directement d'*observables de Heisenberg*). La valeur initiale  $\hat{O}_0$  donne alors l'opérateur  $\hat{O}$  dans la représentation de Schrödinger. À tout instant la valeur moyenne d'un observable peut être calculée dans l'une ou l'autre des représentations :

$$\langle \hat{O} \rangle_{|\psi(t)\rangle} = \langle \psi(t) | \hat{O} | \psi(t) \rangle = \langle \psi | \hat{O}(t) | \psi \rangle = \langle \hat{O}(t) \rangle_{|\psi\rangle} \quad (1.5)$$

*Observer l'évolution* – Imaginons que l'on veuille suivre l'évolution d'un système quantique. Pour cela il faut d'abord décider d'une observable à regarder. Comme choisir une observable c'est choisir une base (propre), cela revient à adopter un certain "point de vue" dans l'espace des états. Un point essentiel est que, pour étudier la dynamique d'un système quantique tous les points de vue – les observables – ne se valent pas. Certaines sont plus pertinentes que d'autres.

Puisque les systèmes qui nous intéressent sont isolés leur énergie est nécessairement conservée. De plus toutes les observables qui commutent avec l'hamiltonien, c'est-à-dire pour lesquelles  $[H, \hat{O}] = 0$ , sont aussi des quantités conservées<sup>1</sup>. Elles partagent la même base propre que  $H$ . Cela signifie que leur valeur moyenne restera stationnaire quel que soit l'état initial, et donc que l'on ne peut pas les utiliser comme témoins de l'évolution. De façon équivalente l'évolution des états est triviale dans la base propre de l'énergie  $\{|E\rangle\}$ . Le nombre de composantes dans la superposition et les probabilités associées resteront les mêmes à tout instant. Seules les phases relatives vont changer (voir Fig. 1.2),

$$|\psi_0\rangle = \sum_E c_E |E\rangle \xrightarrow{U(t)} |\psi(t)\rangle = \sum_E c_E e^{-iEt} |E\rangle . \quad (1.6)$$

Les *observables pertinentes*, et les bases qu'elles définissent, sont donc celles qui ne

---

1. en présence de dégénérescences les quantités conservées sont les observables pour lesquelles il existe *des bases* dans lesquelles  $\hat{O}$  et  $H$  sont diagonales.

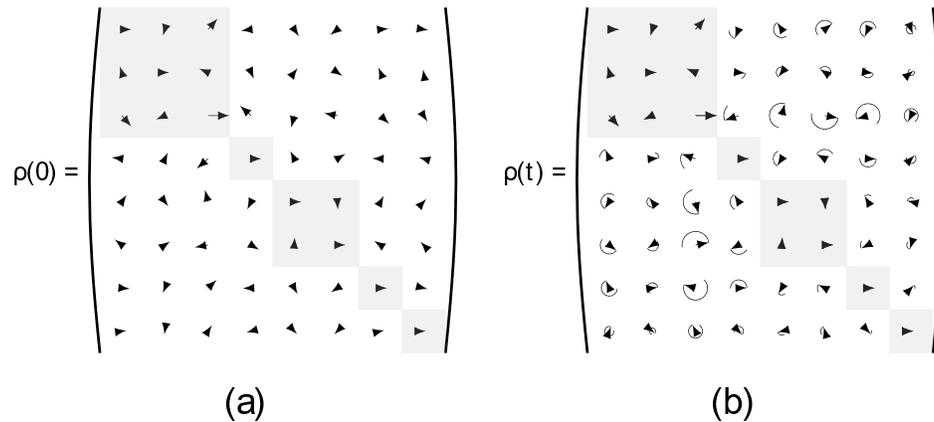


FIGURE 1.2 – Dans la base des énergies l'évolution unitaire a un effet trivial que l'on visualise plus aisément en représentant l'état par une matrice densité. Si un système quantique est initialisé dans l'état  $\rho_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$  représenté en (a) dans la base propre du hamiltonien  $H$  avec des sous-espaces dégénérés (carrés sombres), alors à tout instant ultérieur l'état  $\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ , en (b), évolue d'un façon telle que seules les phases relatives "tournent". Les sous-espaces dégénérés sont laissés complètement invariants sous l'action de l'évolution (figure tirée de [31]).

commutent pas avec l'hamiltonien ( $[H, \hat{O}] \neq 0$ ).

*Effet de la dynamique dans les systèmes génériques* – De manière générale, si on regarde l'état quantique dans une base "pertinente" on va voir (évolution à *la Schrödinger*) que le nombre de composantes impliquées dans la superposition – et les amplitudes associées – va changer au cours du temps. Typiquement, pour un système générique<sup>2</sup>, même si l'état initial est très "simple" – c'est-à-dire qu'il contient très peu de composantes dans la base d'intérêt – on observe que l'évolution va conduire rapidement à une superposition très "compliquée" [32],

$$|\psi_0\rangle = |a\rangle \xrightarrow{U(t)} |\psi(t)\rangle = \sum_{a=1}^d c_a(t) |a\rangle \quad , \text{ où } d \sim \mathcal{O}(q^N). \quad (1.7)$$

c'est-à-dire avec un très grand nombre de composantes non nulles et des phases aléatoires. De façon analogue, dans le point de vue *de Heisenberg* les observables qui ne sont pas conservées vont devenir très compliquées. Pour le comprendre, on peut décomposer tout opérateur  $\hat{O}$  dans un base complète d'opérateurs  $\{\hat{P}_i\}$  (par exemple la base des *chaînes de Pauli* dans le cas d'une chaîne de spins). Imaginons alors que

2. nous préciserons ce que l'on entend par "générique" au prochain chapitre.

l'on prenne comme valeur initiale un opérateur "simple" dans cette base, par exemple avec 1 seule composante  $\hat{P}_0$ . Alors, à un temps  $t$  ultérieur, une évolution générique va produire un opérateur  $\hat{O}(t)$  "compliqué", en terme du nombre de chaînes de Pauli nécessaire pour le décrire [33],

$$\hat{O}_0 = \hat{P}_0 \xrightarrow{U(t)..U^\dagger(t)} \hat{O}(t) = \sum_{a=1}^d \alpha_a(t) \hat{P}_a \quad (1.8)$$

Cette idée de *complexification*, esquissée ici de manière approximative mais que nous préciserons bientôt, constitue le fil conducteur de tout ce dont nous allons discuter dans la suite de ce mémoire (Fig. 1.3).

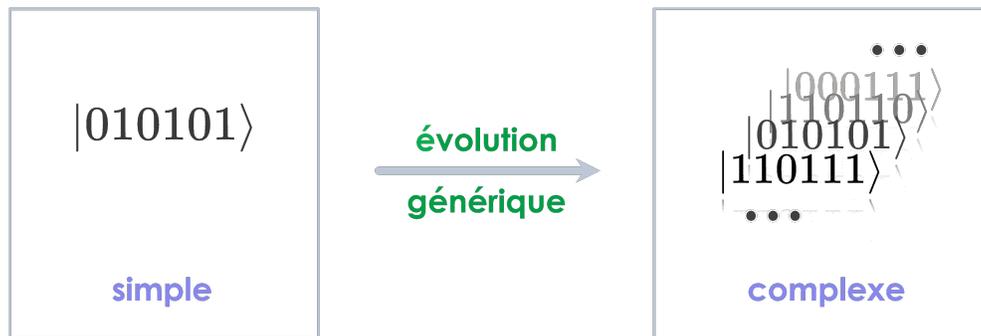


FIGURE 1.3 – Représentation schématique de l'effet de l'évolution d'un système quantique générique sur l'état.

## Chapitre 2

# Chaos quantique

*Le chaos quantique n'existe pas.* Bien que cette affirmation puisse sembler *a minima* malhonnête – pourquoi ce titre de chapitre dans ce cas? – voire fausse, sa tonalité radicale a surtout le mérite de nous mettre en garde. Il y a certaines choses qu'il est important d'avoir en tête lorsqu'on fait ses premiers pas dans ce domaine pour le moins enchevêtré [28] [34].

La première est que le chaos quantique *ne peut pas* être défini en essayant de transposer simplement l'idée classique de chaos au monde quantique. Nous préciserons pourquoi par la suite. La seconde est qu'en fait, il n'existe à ce jour aucune définition claire et unique du chaos quantique. Comme nous le verrons, c'est plutôt à un paysage de concepts fragmenté et incomplet que l'on a affaire. Les quantités physiques observées sont variées. Certaines visent simplement à caractériser le système dans son ensemble alors que d'autres sondent des aspects particuliers tout au long de la dynamique quantique. Enfin, plusieurs d'entre elles cherchent à faire le pont avec certains traits qu'exhibent les systèmes chaotiques classiques.

Avant d'exposer les multiples facettes du chaos quantique, il est bon de rappeler brièvement ce que cela signifie *d'être chaotique* pour un système classique. Nous aurons alors la perspective nécessaire pour comprendre (i) pourquoi définir le chaos quantique est une tâche difficile, (ii) pourquoi il existe une grande diversité d'approches, et (iii) quelle est celle que nous allons poursuivre.

## 2.1 Chaos classique

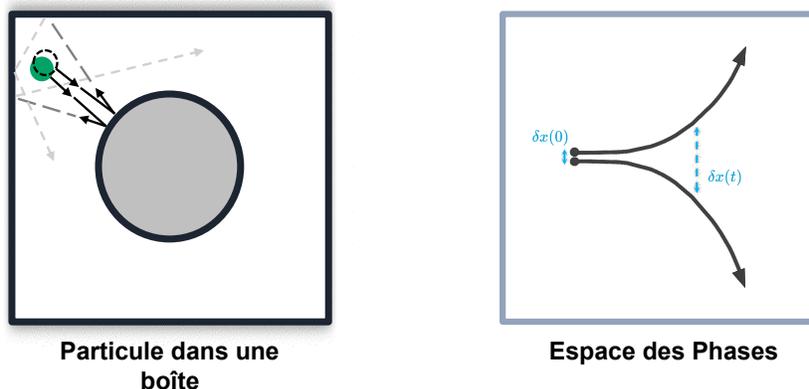


FIGURE 2.1 – Le chaos classique est caractérisé par une divergence exponentielle entre des trajectoires initialement très proches. Les billiards permettent de le visualiser dans l'espace réel (à gauche), mais on le décrit plus généralement dans l'espace des phases (à droite).

Le chaos en physique classique est une notion précise qui possède une définition unifiée : *on dit qu'un système physique est chaotique si sa dynamique montre une hypersensibilité aux conditions initiales.*

*Sensibilité aux conditions initiales* – Mathématiquement l'idée classique de chaos s'appuie sur la notion d'espace des phases. L'état d'un système classique peut être représenté par un point dans cet espace des phases. Ainsi un système chaotique possède la propriété suivante : deux points initialement arbitrairement proches, et soumis à la même dynamique, décriront des trajectoires qui divergeront exponentiellement vite l'une de l'autre [35]. On peut quantifier cela en comparant l'écart entre les deux trajectoires à deux instants différents (voir Fig. 2.1),

$$\frac{\partial x(t)}{\partial x(0)} \sim e^{\lambda_{L,\max} t} \quad (2.1)$$

Pour les systèmes chaotiques cette quantité montre une croissance exponentielle dans le temps, complètement caractérisée par ce que l'on appelle l'*exposant de Lyapunov maximal*,  $\lambda_{L,\max}$ , positif.

*Quel est l'ingrédient nécessaire pour qu'un système classique soit chaotique ?* – Une trajectoire dans l'espace des phases est décrite complètement par le spectre des exposants de Lyapunov  $\{\lambda_{L,i}\}$ . Pour les systèmes conservatifs la somme de ces

exposants doit donner 0<sup>1</sup>. Dans le cas des systèmes chaotiques *au moins* l'un d'eux est positif (trajectoire divergente), ce qui signifie que d'autres doivent être négatifs (trajectoires convergentes) pour compenser. Ceci n'est possible que si l'hamiltonien qui génère la dynamique est une *fonction non-linéaire* des positions et des moments conjugués. C'est typiquement le cas des systèmes constitués d'un grand nombre de particules en interaction [28] [34].

*Thermalisation* – L'une des conséquences majeures du comportement chaotique dans les systèmes complexes est l'existence du phénomène de thermalisation (voir Fig. 2.2). On se contentera ici de donner une explication intuitive [36]. Considérons un système qui conserve l'énergie. Sa trajectoire dans l'espace des phases va rester confinée à une surface d'énergie constante. Si ce système est chaotique alors celle-ci va rapidement devenir très compliquée (l'espace des phases "accessible"). De sorte qu'au cours de son évolution chaque région de cette surface va être visitée étant donné un temps suffisamment long (i.e.  $x(t)$  passera arbitrairement proche de n'importe quel point). On peut alors montrer que, dans cette limite, la surface va être entièrement couverte, et ce uniformément<sup>2</sup>. Par conséquent on peut associer à chaque région de même volume la même probabilité d'occurrence. Cela implique in fine que les moyennes temporelles sont équivalentes à des moyennes d'ensemble, bien plus faciles à calculer. Le chaos est donc l'ingrédient nécessaire et suffisant pour calculer les propriétés des systèmes à l'équilibre, et ainsi donner un fondement à la physique statistique<sup>3</sup>.

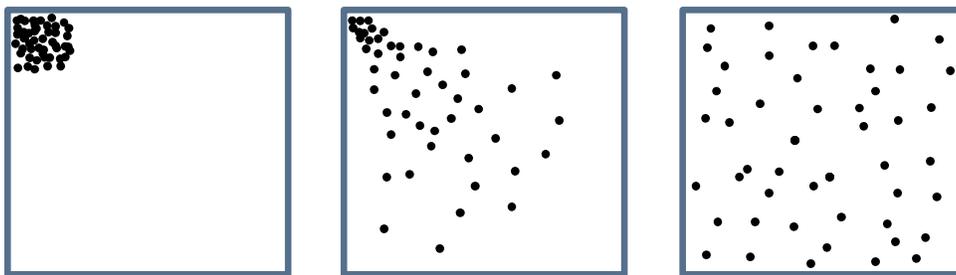


FIGURE 2.2 – Tout système chaotique classique composé d'un grand nombre de particules est sujet au phénomène de thermalisation, qui est irréversible et indépendant de l'état initial.

1. C'est une conséquence du Théorème de Liouville qui dit que le volume doit être conservé tout au long de la trajectoire dans l'espace des phases.

2. L'uniformité est encore une conséquence du Théorème de Liouville qui nous assure que la durée passée dans chacune des régions est proportionnelle à son volume.

3. Une autre propriété, le *mélange*, peut parfois suffire à ce qu'un système soit ergodique. Notons d'ailleurs que tout système chaotique est nécessairement mélangeant mais que l'inverse n'est pas vrai.

*Sensibilité aux perturbations & perte de mémoire* – Les systèmes chaotiques classiques possèdent deux autres propriétés essentielles [37].

La première est la sensibilité de la dynamique à une petite perturbation initiale. Pour la mesurer on peut calculer la moyenne thermodynamique de la sensibilité aux conditions initiales  $\partial x(t)/\partial x(0)$ , où on imagine que  $\partial x(0)$  est causé par une perturbation initiale infinitésimale. Dans le cas d'un système chaotique, on s'attend à ce que cette fonction ait une *croissance exponentielle* décrite par le spectre des *exposants de Lyapunov*  $\{\lambda_{L,i}\}$ ,

$$\left\langle \left( \frac{\partial x(t)}{\partial x(0)} \right)^2 \right\rangle_{\beta} \sim \sum_i c_i e^{2\lambda_{L,i}t} \quad (2.2)$$

Les  $c_i$  sont des constantes et la moyenne d'ensemble  $\langle \cdot \rangle_{\beta}$  est réalisée sur l'espace des phases (à l'aide de la fonction de partition) à une température inverse  $\beta$  donnée<sup>4</sup>. Aux temps longs le comportement est contrôlé par l'exposant de Lyapunov maximal. Il est intéressant de noter que cette quantité peut aussi être écrite comme une fonction de corrélation (à 4 points) entre deux observables arbitraires  $V$  et  $W$  à deux instants différents ( $\{ \cdot \}$  désigne le crochet de Poisson),

$$\left\langle \{W(t), V(0)\}^2 \right\rangle_{\beta}. \quad (2.3)$$

L'autre propriété importante est la perte de la mémoire de l'état initial. Autrement dit, rapidement l'état du système ne va plus du tout dépendre de l'état initial. On peut quantifier cela en calculant la fonction de corrélation entre les coordonnées à deux instants différents (fonction d'autocorrélation),

$$\langle x(t)x(0) \rangle_{\beta} - \langle x \rangle_{\beta}^2 \sim \sum_j b_j e^{-\mu_j t} \quad (2.4)$$

où les  $b_j$  sont des constantes. On peut montrer que dans les systèmes chaotiques, ces corrélations connaissent une *décroissance exponentielle au temps long*, qui est entièrement contrôlé par le spectre des *résonances de Ruelle*  $\{\mu_j\}$  dont les valeurs peuvent être complexes (éq. 2.4). Aux temps très long le comportement est contrôlé par la résonance minimale  $\mu_{min}$ .

---

4. On aurait simplement pu calculer la valeur moyenne de  $\partial x(t)/\partial x(0)$ . Le problème est que cette quantité peut parfois être négative, de sorte que lorsqu'on moyenne sur l'ensemble thermodynamique (fixé par  $\beta$ ) certains facteurs pourraient s'annuler mutuellement et ainsi cacher ce que l'on cherche à mesurer. Pour cette raison il est préférable de prendre la moyenne de son carré.

En résumé, la dynamique des systèmes chaotiques classiques est caractérisée par deux régimes exponentiels caractéristiques. Un régime des temps courts d'abord, le *régime de Lyapunov*, où le comportement du système est le reflet de la sensibilité aux conditions initiales, décrite par le spectre des *exposants de Lyapunov*. Un régime des temps longs ensuite, le *régime de Ruelle*, où le comportement du système est le reflet des propriétés ergodiques de la dynamique et de l'approche vers l'équilibre thermodynamique [38] [39]; il est décrit par le spectre des *résonances de Ruelle*.

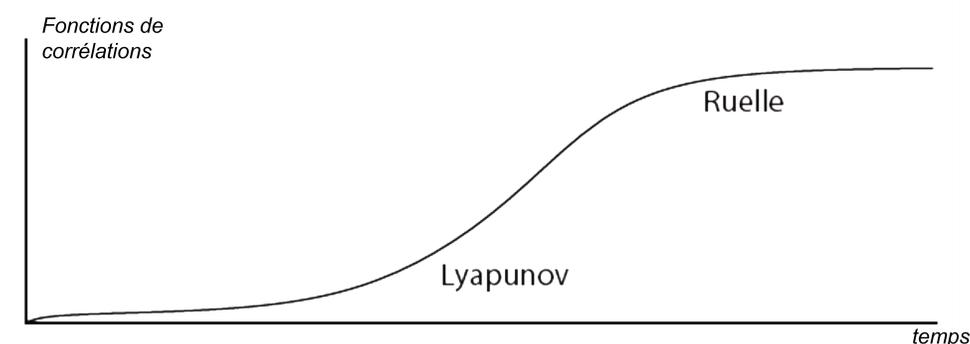


FIGURE 2.3 – Illustration schématique des deux régimes caractéristiques du chaos classique (figure tirée de [40]).

## 2.2 Chaos quantique

*Quel est l'analogue du chaos classique en physique quantique?* – Au premier abord on peut être tenté de transposer naïvement l'idée classique de sensibilité aux conditions initiales au formalisme quantique. Pourtant, si on essaie effectivement de prendre deux états quantiques initiaux, très proches en terme de recouvrement, et qu'on leur faire subir la même évolution, on se rend vite compte qu'il reste toujours constant.

$$\langle \psi(t) | \tilde{\psi}(t) \rangle = \langle \psi_0 | \underbrace{U^\dagger(t)U(t)}_{\mathbb{1}} | \tilde{\psi}_0 \rangle = \langle \psi_0 | \tilde{\psi}_0 \rangle \quad , \forall t. \quad (2.5)$$

Cela reste vrai si, par exemple, on change de métrique de distance - en utilisant la distance-trace ou l'entropie relative au lieu de la fidélité. Cette difficulté s'explique en fait fondamentalement par un postulat de base de la physique quantique : l'unitarité de l'évolution [34].

Le problème de définir *ce qu'est* le chaos quantique est donc loin d'être anodin. Pour cette raison historiquement les efforts se sont d'abord restreint à chercher des *manifestations - ou signatures - quantiques du chaos classique*, c'est-à-dire des correspondances entre les systèmes chaotiques classiques et leur analogue quantifié [41]. Dans les systèmes simples à quelques corps, puis dans les systèmes à N-corps. Néanmoins ces systèmes ne constituent qu'une petite partie des systèmes autorisés par la physique quantique. Ces 20 dernières années, la recherche sur le chaos quantique s'est étendue à l'étude de la dynamique de systèmes quantiques sans équivalent classique, comme les circuits quantiques. Malgré cela la question de la nature du chaos quantique reste un problème ouvert [32] [29]. Plus que cela, il n'est pas certain que la question initiale ait vraiment un sens. La dynamique quantique s'avère particulièrement riche et surprenante, et rien n'interdit a priori qu'une multitude de mécanismes microscopiques se cachent derrière l'émergence du chaos classique. De ce point de vue le terme "chaos quantique" ne désigne donc pas un concept unique mais plutôt l'ensemble des phénomènes et propriétés qui émergent dès lors que la dynamique quantique devient complexe<sup>5</sup>.

Aujourd'hui le domaine du chaos quantique trouve des applications dans des champs de recherche variés, du transport dans la matière condensée [43] [44] jusqu'à la physique des trous noirs [45] [46], en passant par le contrôle [47] et la certification [48] [49] de systèmes quantiques. Dans la suite on présente quelques diagnostics du chaos quantique parmi ceux les plus souvent rencontrés dans la littérature : la statistique du spectre d'énergie, l'écho de Loschmidt, et les corrélateurs en désordre temporel.

## Statistique des niveaux d'énergie

Comme son nom l'indique cette signature quantique du chaos est de nature statistique. L'idée intuitive est que le spectre d'énergie des systèmes quantiques qui possèdent un analogue classique chaotique est caractérisé par des corrélations universelles qui se traduisent par une répulsion des niveaux d'énergie. Leur description repose sur la théorie des matrices aléatoires.

---

5. Pour cette raison le physicien M. Berry a proposé d'utiliser à la place le terme de "chaologie quantique" pour désigner ce domaine [42].

Cette mesure du chaos a été introduite au départ dans les années 1950 pour décrire la structure énergétique des noyaux atomiques lourds. En proposant de considérer les fortes interactions entre les nucléons comme aléatoires, Wigner et Dyson réussissent à décrire statistiquement l'allure de leurs spectres et montrent qu'en fait elle ne dépend pas des détails microscopiques du système [50] [51]. Intuitivement les interactions sont si compliquées que l'on peut faire comme si l'hamiltonien était une matrice aléatoire (voir Annexe A.2). Quelques années plus tard, de nombreux travaux visant cette fois à comprendre la limite semi-classique de systèmes classiques chaotiques simples renforcent l'idée d'une correspondance classique-quantique entre chaos et spectre des matrices aléatoires [29].

*Ré pulsion des niveaux d'énergie* — L'idée est donc de supposer que, pour les systèmes quantiques ayant un analogue chaotique classique, l'hamiltonien est une matrice aléatoire appartenant à un *ensemble gaussien* compatible avec les symétries globales du système (voir Annexe A.2). La théorie des matrices aléatoires prédit des propriétés universelles pour ces matrices, notamment pour leurs valeurs propres et vecteurs propres. En particulier, on peut regarder l'*espacement entre niveaux d'énergie consécutifs* (ce qu'on appelle des corrélations à courte distance). En faisant l'histogramme de ces espacements entre niveaux consécutifs pour toutes les valeurs du spectre on trouve qu'il doit suivre une distribution précise appelée distribution de Wigner-Dyson (voir Fig. 2.4),

$$P_{WD}(s) = \frac{\pi s}{2} e^{-\frac{\pi s^2}{4}}. \quad (2.6)$$

Sa caractéristique principale est l'absence de dégénérescence dans le spectre, ce qu'on appelle la *ré pulsion de niveaux*.

Au contraire, le spectre des systèmes intégrables (non-chaotiques) ne présente pas ce genre de corrélation. Les valeurs propres sont aléatoirement distribuées et très souvent dégénérées. Il s'en suit que la distribution des espacements consécutifs suit une loi très différente dite *de Poisson* (associée à l'*ensemble diagonal*),

$$P_P(s) = e^{-s}. \quad (2.7)$$

Dans les systèmes quantiques réalistes le spectre est fini et les interactions locales. Les ensembles de matrices aléatoires n'en sont donc pas une modélisation exacte. Ils

supposent en effet l'interaction de toutes les particules ensembles. Néanmoins dans la mesure où l'on ignore les valeurs extrêmes du spectre, et en particulier si l'on se restreint à une petite fenêtre d'énergie, ils restent très précis et fournissent une ligne directrice pour comprendre les propriétés universelles de ces systèmes [32] [29].

À ce jour ce lien entre chaos et propriétés statistiques du spectre d'énergie n'a pas reçu de preuve analytique. Il reste donc à l'état de conjectures [52] [53] :

*“Pour les systèmes quantiques dont la limite classique est intégrable, les niveaux d'énergie se comportent comme des variables aléatoires indépendantes, et peuvent être décrits par l'ensemble diagonal.”* (Berry-Tabor)

*“Pour les systèmes quantiques dont la limite classique est non-intégrable chaotique, les niveaux d'énergie sont corrélés, et leur distribution peut être entièrement décrite par l'ensemble de matrices aléatoires gaussiennes.”*  
(Bohigas-Gianonni-Schmit)

Néanmoins, en ce qui concerne les systèmes à 1 corps, cette correspondance classique-quantique est considérée comme établie et bien comprise. Pour les systèmes multiconpores par contre, malgré de très nombreux indices numériques et expérimentaux concordants, et de grands progrès dans les dernières années, elle n'est pas encore claire [32]. En particulier il semble que la question de savoir *quelle propriété* des systèmes chaotiques classiques est sondée par ce diagnostic ne soit pas encore parfaitement clair. De nombreux auteurs suggèrent néanmoins que la répulsion des niveaux d'énergie dans un système quantique caractérise simplement la non-intégrabilité du système classique associé [54] [55] [56]. Quoi qu'il en soit insistons sur le fait qu'on ne connaît pas à ce jour de contre-exemple flagrant pour ce diagnostic. Notons aussi que cette signature a été trouvée dans des systèmes quantiques sans équivalent classique, mais son interprétation y est moins évidente.

La statistique des niveaux d'énergie est historiquement la première des signatures quantiques du chaos classique à avoir été étudiée. De ce fait elle est appuyée par une littérature considérable. Cela explique que les systèmes quantiques qui exhibent de la répulsion dans leur spectre d'énergie soient presque systématiquement désignés comme des *systèmes chaotiques quantiques* ou des *systèmes chaotiques génériques*. Cela n'en reste pas moins un raccourci de langage discutable.

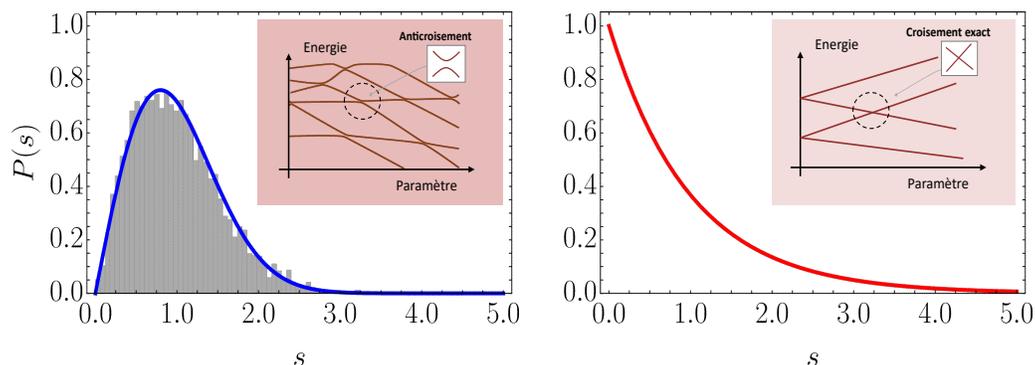


FIGURE 2.4 – **(À gauche)** : Distribution des espacements adjacents du spectre d'énergie pour les systèmes chaotiques (Wigner-Dyson). **(À droite)** : pour les systèmes intégrables (Poisson). **Insets** : interprétation de la répulsion en terme d'anticroisements (figure adaptée de [57] [30]).

## Echos & fonctions de corrélations temporelles

Des signatures quantiques du chaos classique peuvent aussi être trouvées dans le comportement de certaines fonctions de corrélations temporelles quantiques. Il s'agit de l'*écho de Loschmidt* et des *corrélateurs en désordre temporel* (OTOC). Ces deux quantités sont dynamiques. Elles mesurent deux notions distinctes de sensibilité aux perturbations. Elles sont donc reliées à l'effet papillon classique, ce qui explique qu'on les considère comme des mesures de chaos.

*Écho de Loschmidt* — L'écho de Loschmidt<sup>6</sup> mesure à quel point l'état initial peut être recouvert après une évolution suivie d'une inversion temporelle imparfaite (d'où l'appellation "mesure d'écho"). Il est défini comme [58],

$$LE(t) = |\langle \psi_0 | e^{iH_p t} e^{-iHt} | \psi_0 \rangle|^2 \quad (2.8)$$

où  $H_p = H + V$  est l'hamiltonien perturbé, et  $V$  une petite perturbation. De manière équivalente on peut le voir comme une mesure de distance (via la fidélité) entre les résultats de deux évolutions, l'une régulière et l'autre perturbée. De ce point de vue c'est une mesure de la sensibilité de l'évolution à une perturbation [59].

*Corrélateur "en désordre temporel"* — L'OTOC est un diagnostic qui mesure la

6. on rencontre aussi le terme *décroissance de la fidélité* dans la littérature, mais il est ambiguë car aussi utilisé pour parler de la *probabilité de survie* de l'état initial.

sensibilité de l'évolution à une perturbation localisée dans le temps. Il mesure aussi la croissance des opérateurs locaux, et enfin le mélange de l'information.

$$OTOC(t) = \langle W^\dagger(t) V_0^\dagger W(t) V_0 \rangle_\beta \quad (2.9)$$

Lorsque  $V$  et  $W$  sont à la fois hermitiens et unitaires, l'OTOC est lié au commutateur de ces opérateurs dans le temps,  $OTOC(t) = 1 - \langle [W(t), V(0)]^2 \rangle / 2$ , qui diagnostique l'effet de la perturbation  $V$  sur la mesure de  $W$  plus tard, et vice versa.

Contrairement à l'écho de Loschmidt dans lequel l'effet de la perturbation est délocalisé tout au long de l'évolution, dans l'OTOC les perturbations sont bien localisées dans le temps. Ainsi même si ces deux diagnostics ressemblent a priori aux fonctions de corrélations classiques (§2.1), on voit que dans le cas quantique la notion de perturbation n'est pas aussi évidente à définir. Il y a ainsi plusieurs façons de le faire, contrairement au cas classique où l'on peut toujours faire référence à une perturbation appliquée à l'état initial.

Pour ces deux diagnostics le comportement dans les systèmes simples à quelques corps est bien compris (ex. : kicked rotor, cat map), et partage des caractéristiques communes. Ainsi dans les systèmes avec un équivalent classique chaotique on voit 3 phases : une première phase de décroissance exponentielle, une seconde phase décroissante dépendante du modèle et enfin une phase de saturation (voir Fig. 2.5). Une différence majeure entre ces deux quantités est l'échelle de temps qui est bien supérieure pour l'OTOC. Ce dernier est donc plus sensible à la dynamique, en particulier le régime aux temps courts pour lequel on a pu montrer une correspondance entre le comportement de l'OTOC et les exposants de Lyapunov classiques. Cela explique qu'il ait reçu autant d'attention ces dernières années. Dans les systèmes à N-corps on peut retrouver ces propriétés mais le comportement général est moins clair [60].

## Notre approche

Nous n'avons pas présenté une liste exhaustive des quantités associées au chaos quantique. La liste étant particulièrement longue. Néanmoins on peut les classer grossièrement en deux catégories : les diagnostics statiques du chaos quantique,

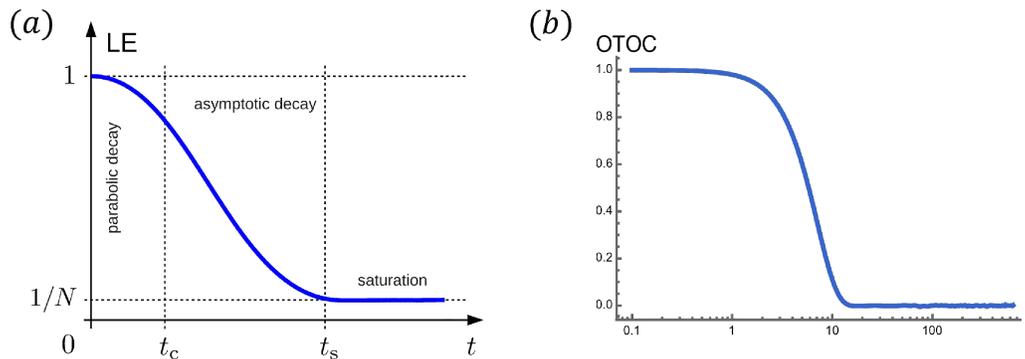


FIGURE 2.5 – Décroissance typique de l'écho de Loschmidt **(a)** et de l'OTOC **(b)** pour les systèmes quantiques avec limites classique chaotique (figures tirée de [59] [33]).

comme la statistique des niveaux d'énergie, et les diagnostics dynamiques, dont les protocoles d'écho font partie.

Les diagnostics statiques présupposent que l'essentiel de la dynamique est encodé dans l'hamiltonien du système lui-même. Bien que cette idée puisse sembler assez intuitive, il faut rappeler que l'état du système au temps  $t$  dépend aussi de l'état initial. On peut alors imaginer que pour certains systèmes physiques il existe des situations particulières où le choix de l'état initial va avoir un impact significatif sur l'évolution. Par exemple lorsque ce dernier ne se superpose qu'avec un nombre réduit de niveaux d'énergie. Récemment de tels systèmes ont été identifiés [61]. Si l'on se fie à leur spectre d'énergie ils sont a priori chaotiques, pourtant pour certains états initiaux très particuliers ils vont présenter une dynamique qui semble hautement non générique. Avec par exemple une croissance anormalement lente de l'intrication, une persistance de la mémoire des conditions initiales, et des indices pointant vers une absence de thermalisation au temps long. Pour ce genre de situation les diagnostics dynamiques sont particulièrement pertinents puisqu'ils dépendent de l'état initial.

Dans ce mémoire, on étudie un système physique exhibant ce genre de propriété, le modèle PXP, en utilisant un diagnostic dynamique du chaos différent de ceux présentés plus haut, la *statistique du spectre d'intrication* (voir Ch.4). De nombreux travaux récents [33] [62] [63] suggèrent que la dynamique unitaire des systèmes chaotiques génériques possède des propriétés universelles, au sens où elle tend à produire rapidement et avec une haute probabilité des états dits typiques. Comme nous le verrons dans les prochains chapitres, ces états typiques possèdent des propriétés intéressantes

(sous-systèmes thermalisés avec une entropie quasi-maximale, brouillage maximal de l'information, irréversibilité émergente) qui correspondent à ce qu'on attendrait pour un comportement chaotique dans le régime asymptotique. Ce diagnostic analyse directement le spectre d'intrication de l'état  $|\psi(t)\rangle$  tout au long de l'évolution du point de vue de la théorie des matrices aléatoires, et permet de poser la question suivante : *à quelle point la dynamique randomise-t-elle l'état des sous-systèmes au cours du temps ?* En conséquence il ne nécessite pas l'existence d'un hamiltonien, ce qui lui confère un caractère universel. Il semble ainsi particulièrement prometteur pour caractériser à la fois la dynamique des systèmes à N-corps quantiques mais aussi celle de systèmes plus généraux comme les circuits quantiques.

## Chapitre 3

# Évolution hors-équilibre des systèmes à N-corps : intrication & typicalité.

L'évolution des systèmes quantiques complexes peut être approchée de bien des manières. L'intrication, cette forme particulière de corrélation quantique, semble être une ressource particulièrement puissante pour étudier la dynamique quantique. En mesurant la quantité d'intrication créée au cours du temps par les interactions locales entre les degrés de liberté individuels on peut suivre l'évolution du système. Cette idée peut être associée à un autre concept, tout aussi puissant, celui de typicalité, formalisé par la théorie des matrices aléatoires. L'avantage de ces outils réside dans le fait qu'ils permettent de caractériser la dynamique quantique en restant agnostiques par rapport aux détails du système, c'est-à-dire la nature des constituants individuels et de leurs interactions. À la fin de ce chapitre nous donneront aussi quelques arguments expliquant en quoi ces deux concepts sont liés à l'équilibration et à la thermalisation des systèmes quantiques isolés, deux problèmes ouverts de la physique contemporaine.

### 3.1 Trempe quantique

L'une des manières les plus communes d'étudier l'évolution des systèmes multi-corps consiste à réaliser ce qu'on appelle une *trempe* quantique ("quantum quench" en anglais), par analogie à la trempe des forgerons. C'est un protocole qui consiste à initialiser le système dans l'état fondamental  $\rho_0$  d'un hamiltonien local  $H_0$  (souvent car il est simple à préparer ou bien car il possède des propriétés intéressantes) puis à changer brusquement les interactions de façon à obtenir l'hamiltonien d'intérêt  $H$  et laisser le système évoluer. Une autre façon de le voir, peut-être plus simple, est qu'on se contente d'initialiser le système dans un état qui n'est pas état propre de  $H$ . On peut ensuite suivre l'état au temps  $t$  pour étudier la dynamique unitaire générée par  $H$  [25],

$$\rho(t) = e^{iHt} \rho_0 e^{-iHt} \quad (3.1)$$

Nous ne serons intéressés qu'aux cas où l'état initial, et donc aussi tous les suivants, sont purs  $\rho = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$ .

Cette expérience de pensée est une version quantique de l'idée classique de dynamique hors-équilibre. On sait maintenant la réaliser dans des simulateurs quantiques analogues au sein desquels un contrôle atome par atome est possible. À l'aide de cette technique on peut étudier de nombreux aspects liés à la dynamique des systèmes quantiques. L'une des questions majeures étant de comprendre comment la thermodynamique émerge de la dynamique quantique microscopique.

En ce qui nous concerne on est intéressé à étudier les phases dynamiques quantiques. La physique quantique des systèmes multicorps semble permettre une très grande variété de dynamiques comparé aux cas classiques. Si une petite partie d'entre elles correspond à l'idée classique de thermalisation, d'autres échappent à ce paradigme. Il s'agit donc plus généralement de mieux comprendre ces phases dynamiques quantiques, et en particulier de trouver un moyen de les caractériser et d'identifier les conditions sous lesquelles elles peuvent apparaître, indépendamment de la nature des constituants. Dans cette perspective de nombreux travaux récents suggèrent de s'intéresser à l'intrication contenue dans ces systèmes [64] [65].

## 3.2 Intrication typique dans les systèmes multicorps

*Intrication* — L'intrication est une forme particulière de corrélation, spécifiquement quantique, entre deux parties d'un système. Elle consiste en une superposition de motifs de corrélations en ces deux parties. De ce fait l'espace des états effectif du système entier est d'une certaine manière contraint et ne peut pas être décomposé en un produit de l'espace de chacune des parties (voir Fig. 3.1). Pour décrire un état intriqué il faut choisir une bipartition  $AB$  du système, généralement spatiale. On peut alors écrire tout état (pur) par sa décomposition de Schmidt :

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i=1}^{\chi} \lambda_i |i\rangle_A |i\rangle_B \quad (3.2)$$

où  $\{|i\rangle_{A(B)}\}_{i=1,\dots,\chi}$  sont deux bases orthonormées représentant les degrés de liberté d'intrication du sous-système  $A$  avec  $B$  (et vice versa). Les coefficients  $\lambda_i$  peuvent être vu comme des poids qui contiennent toute l'information sur le motif de corrélations entre les degrés de liberté des 2 parties  $A$  et  $B$ . Ces poids, généralement en ordre décroissant, constituent le *spectre d'intrication* qui est évidemment commun aux deux parties.

L'intrication se distingue par le fait que, quand bien même l'état du système entier est parfaitement connu (il est pur), l'incertitude sur la connaissance de l'état des parties est élevée. Autrement dit contrairement à une corrélation classique l'état du système total ne peut pas être déduit de la mesure de ses parties. L'état d'une partie (par ex.  $A$ ) est donc une distribution classique d'états quantiques obtenue en calculant, par trace partielle, la probabilité marginale relativement à l'autre partie ( $B$ ) :

$$\rho_A = \text{tr}_B(|\psi\rangle_{AB}\langle\psi|_{AB}) = \sum_{i=1}^{\chi} p_i |i\rangle_A \langle i|_A \quad , \quad p_i = \lambda_i^2 \quad (3.3)$$

On note que le spectre de cette *matrice densité réduite* est équivalent au spectre d'intrication à un carré près.

*Quantité d'intrication* — Pour les états purs une mesure simple de la quantité d'intrication est l'entropie d'intrication. On l'obtient en calculant l'entropie de Von

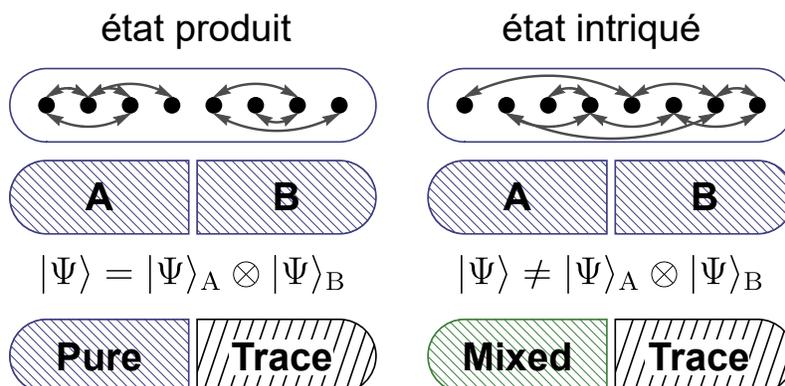


FIGURE 3.1 – Un état pur d'un système multicorps peut exhiber des corrélations quantiques entre ses différentes sous-parties. Pour le voir on peut diviser le système en deux sous-systèmes  $A$  et  $B$ . Si l'état globale  $|\psi\rangle_{AB}$  ne peut être écrit comme un produit des états des sous-systèmes  $|\psi\rangle_A$  et  $|\psi\rangle_B$  alors ces deux parties sont dites intriquées. On peut effectuer une mesure partielle sur l'un des sous-systèmes, ce qui revient à ignorer l'information sur l'autre ("Trace"). Si les deux parties sont intriquées le sous-système mesuré sera vu comme un mélange statistique ("Mixed"). Le degré de mélange étant la quantité d'intrication entre les deux parties (figure adaptée de [66]).

Neumann de l'une des parties,

$$S_A = -\text{tr}(\rho_A \log \rho_A) = -\sum_{i=1}^{\chi} p_i \log p_i = S_B \quad (3.4)$$

Elle peut s'interpréter comme une mesure *moyenne* du degré d'aléatoire sur la connaissance que l'on a des sous-systèmes. L'entropie d'intrication a aussi une signification opérationnelle puisqu'elle donne le nombre de paires de Bell équivalentes utilisables pour réaliser un protocole d'information quantique à partir de cet état (ex. : de la téléportation).

Prenons comme exemple une paire de Bell  $|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$  qui est un état pur de 2 qubits maximales intriqués. On note qu'il s'écrit directement dans la représentation de Schmid, avec  $\lambda_i = 1/\sqrt{2}$ . La matrice densité pour un des deux qubits s'écrit donc  $\rho_A = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1|$ , et l'entropie d'intrication vaut  $S_A = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2})\log(2) = \log(2)$ .

*Intrication maximale* — Pour un système de taille finie, il existe une valeur maximale  $S_{\max}$  de l'entropie d'intrication. Cette valeur correspond à l'entropie d'une distribution uniforme d'états quantiques. Si on appelle  $d_A$  la dimension de la partie  $A$  (resp.  $d_B$  pour la partie  $B$ ), avec  $d_A \leq d_B$  sans perte de généralité, alors la matrice densité réduite du sous-système  $A$  prend la forme  $\rho_A = \mathbb{1}/d_A$ . L'incertitude classique

sur l'état quantique de  $A$  est alors maximale et,

$$S_{\max} = \log(d_A) \quad (3.5)$$

L'intrication maximale est proportionnelle à la taille du sous-système le plus petit. Par exemple dans le cas d'un système composé uniquement de qubits (tel que  $N = N_A + N_B$ , avec  $d_A = 2^{N_A}$ ), on a :  $S_{\max} = \log(2^{N_A}) = N_A \log(2)$ .

Comme nous le verrons dans le chapitre 5 il existe des systèmes dont les interactions contraignent l'espace des états. Le nombre maximal de degrés de liberté accessibles est donc moindre et l'entropie maximale est réduite.

Puisqu'on veut étudier l'intrication dans des systèmes très grands - idéalement macroscopiques - on s'attend à ce que les motifs d'intrication possibles puissent être complexes et très variés. Heureusement il se trouve que la plupart des états quantiques se comportent en fait quasiment de la même manière. Ils exhibent un "comportement typique" qui ne dépend pas des détails microscopiques.

*États typiques* — Considérons un système quantique composé d'un grand nombre de degrés de liberté. On imagine qu'on prend au hasard un état dans l'espace de Hilbert correspondant en suivant une distribution uniforme, c'est-à-dire que tous les états sont équiprobables. L'état obtenu est ce qu'on appelle un *état aléatoire*. Comme on va le voir les états aléatoires possèdent des propriétés d'intrication typiques remarquables.

Pour créer concrètement un état aléatoire, une méthode consiste à fixer une base  $\{|i\rangle\}$  arbitraire, puis à tirer au hasard les parties réelles et imaginaires de chaque composante complexe  $c_i = a + ib$  en suivant une distribution normale de moyenne zéro et de variance unité  $N(0, 1)$ . On obtient,

$$|\psi\rangle_{\text{random}} = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{i=1}^d c_i |i\rangle \quad (3.6)$$

avec la normalisation  $\mathcal{N} = (\sum_{i=1}^d |c_i|^2)^{1/2}$ . De façon complètement équivalente, on peut aussi appliquer à un état arbitraire - par exemple  $|0\rangle$  - une unitaire aléatoire  $U_{\text{rand.}}$ ,

$$|\psi\rangle_{\text{random}} = U_{\text{rand.}} |0\rangle . \quad (3.7)$$

Pour de tels états aléatoires on peut montrer que l'immense majorité exhibe les mêmes propriétés globales typiques (à une petite variation près), comme par exemple la valeur moyenne des observables globales. Autrement dit, pour un état aléatoire donné la probabilité que celui-ci n'exhibe pas la valeur typique est exponentiellement faible avec la dimension de l'espace de Hilbert [25],

$$\mathbb{P}\left(|X_{|\psi\rangle} - X_{\text{typique}}| > \epsilon\right) \leq o\left(e^{-d_{\mathcal{H}}}\right) \quad (3.8)$$

où  $X$  désigne une quantité globale arbitraire calculé à partir de l'état du système, et  $d_{\mathcal{H}}$  la dimension de l'espace de Hilbert. D'un point de vue mathématique ce phénomène est dû à ce qu'on appelle la concentration de la mesure. On appelle ces états des *états typiques*.

*Intrication typique* — Il se trouve que les états typiques ont des propriétés d'intrication remarquables. Notamment, pour ces états l'intrication entre 2 parties est toujours quasi-maximale quelle que soit la bipartition. Autrement dit tout sous-système est presque totalement mélangé. Ainsi si on calcule l'entropie d'intrication moyenne pour une bipartition  $AB$  fixée on trouve une valeur typique appelée *entropie de Page* [67]. Elle est donnée par,

$$S_{\text{Page}} = \langle S_A \rangle = \frac{1}{\ln 2} \left( \sum_{k=d_B+1}^{d_A d_B} \frac{1}{k} - \frac{d_A - 1}{2d_B} \right) \quad (3.9)$$

où  $\langle \cdot \rangle$  dénote une moyenne sur l'ensemble des états aléatoires. Lorsque les deux parties sont de taille équivalente ( $N_A \approx N_B$ ) il est pratique de l'approximer par,

$$S_{\text{Page}} = \log(d_A) - \frac{1}{2} \quad (3.10)$$

On voit aussi plus explicitement que pour un état typique, l'entropie d'intrication est proportionnelle au nombre de constituants individuels du sous-système, son "volume". Par exemple pour un système de qudits ( $d$  niveaux),  $d_A = d^{N_A}$ , et  $S_{\text{Page}} = N_A \log(d) - 1/2 \sim |A|$ . On parle d'intrication en *loi de volume*.

Au contraire les états atypiques, qui constituent une partie infime de l'espace des états, sont généralement faiblement intriqués. L'entropie ne dépend que du nombre de constituants à la frontière entre les deux partitions. On appelle cela une intrication

en loi d'aire,  $S \sim |\partial A|$ . Les poids dans le spectre d'intrication sont exponentiellement décroissant. Cela a des conséquences en terme de simulations numériques. Les états en loi d'aire étant beaucoup moins coûteux à simuler que les états intriqués en loi de volume.

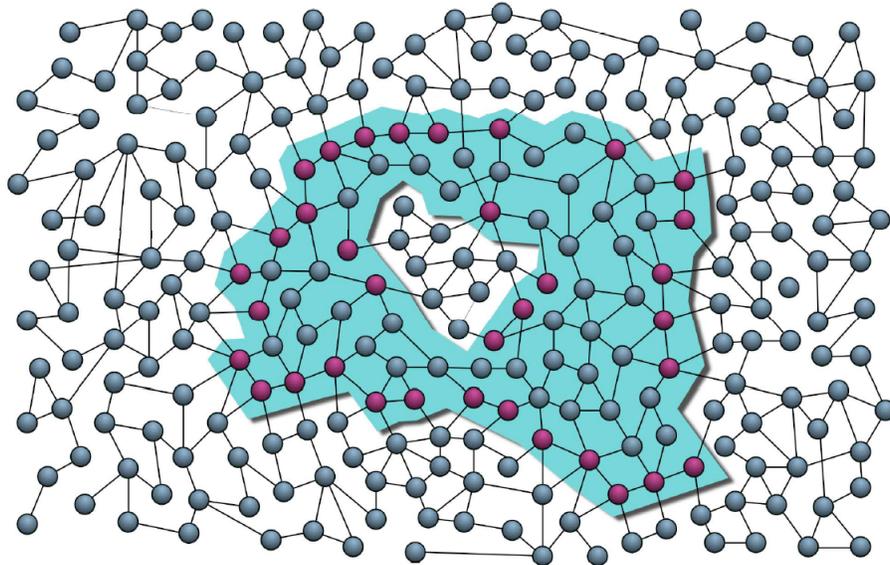


FIGURE 3.2 – Lorsqu'on partitionne un système physique en deux régions (en bleu v.s. en blanc) on observe que certains états possèdent une valeur d'intrication qui ne dépend que des degrés de liberté à la frontière (en rouge). Au contraire l'intrication des états typiques implique tous les degrés de liberté d'une région (en bleu) (figure tirée de [25]).

*Propriétés thermodynamiques* — Les états typiques possèdent une propriété remarquable qui explique pourquoi on les utilise pour étudier les fondements de la thermodynamique. On peut montrer que, si on tire un état (pur) aléatoirement et uniformément de n'importe quel sous-espace  $\mathcal{H}_S$  de l'espace de Hilbert, cet état peut être très bien approximé par une distribution classique d'état quantique uniforme sur ce sous-espace [16]. La précision de l'approximation est exponentielle avec la dimension du sous-espace. Une conséquence importante est que, si  $\mathcal{H}_S$  correspond à un petit fenêtré d'énergie  $\mathcal{E} = [E, E + \delta E]$ , alors l'état pur est bien approximé par l'état microcanonique,

$$|\psi\rangle_{rand.,\mathcal{E}} \approx \rho_{micro.,\mathcal{E}} \quad (3.11)$$

En outre, si ensuite on prend l'état réduit à un sous-système (spatial), on trouve une

matrice densité qui est indistinguable de l'état thermodynamique de Gibbs,

$$\text{tr}_B(|\psi\rangle\langle\psi|_{\text{rand.},\mathcal{E}}) \approx \rho_{\text{Gibbs},\mathcal{E}} \quad (3.12)$$

à une température inverse effective  $\beta$  fixée par l'énergie  $\mathcal{E}$  du système global.

Tout cela illustre à quel point il peut être intéressant de combiner les concepts d'intrication et de typicalité pour décrire la physique des systèmes quantiques à N-corps. Bien que les arguments basés sur la typicalité puissent être considérés comme non-physiques, l'avantage de la typicalité est qu'elle offre un cadre mathématique qui permet de comprendre dans quelles situations et pour quelles raisons les détails peuvent être négligés. On a ainsi un outillage puissant qui permet de dériver des résultats généraux indépendamment des détails microscopiques des systèmes physiques.

### 3.3 Dynamique typique dans les systèmes multicorps

*Croissance linéaire et saturation de l'intrication* — Les résultats pionniers de Lieb et Robinson [68] concernant les limites de la propagation de l'information quantique dans les systèmes multicorps sont essentiels pour comprendre la dynamique hors-équilibre des systèmes multicorps. La borne de Lieb-Robinson consiste à dire que la propagation de l'information dans les systèmes hamiltoniens locaux en dehors d'un "cône de lumière" est exponentiellement supprimée. Mathématiquement, on considère deux observables locales (ayant un support sur un nombre fini de sites) arbitraires, l'une à  $t = 0$  ( $\hat{A}$ ) et l'autre à un temps  $t$  ultérieur ( $\hat{B}$ ), séparées dans l'espace par un grand nombre de sites. À mesure que  $\hat{A}(t)$  évolue la distance entre les supports des observables diminue. Le degré de commutation entre celles-ci  $\|[\hat{A}(t), \hat{B}]\|$ , initialement nul, ne devient significatif que lorsque les observables "se touchent", c'est-à-dire lorsque leurs supports se recouvrent. Pour une évolution arbitraire générée par un hamiltonien local le temps minimal requis est linéaire avec le nombre de sites qui les séparaient initialement. De ce fait les fonctions de corrélations ne peuvent croître significativement au cours du temps qu'à l'intérieur de ce cône de lumière. On

parle de propagation *balistique* de l'information.

De plus, ce cône de propagation de l'information est aussi un cône contraignant la dynamique de l'intrication. Il a été montré que [25] :

- (1) si l'état initial est faiblement intriqué (en loi d'aire) alors l'entropie d'intrication ne pouvait qu'au plus croître linéairement dans le temps.
- (2) il existe des hamiltoniens locaux invariants par translation qui exhibent cette croissance linéaire.

Ce comportement a été confirmé dans des simulations numériques, pour des hamiltoniens locaux non-intégrables et des circuits quantiques locaux aléatoires, et observé dans des expériences d'atomes froids.

Par ailleurs cette croissance linéaire de l'intrication ne s'observe que jusqu'à ce que le cône de lumière ait atteint les bords du système. Après cela l'intrication croit moins vite puisqu'il reste peu de degrés de libertés à intriquer. Dans les systèmes génériques, on observe que l'entropie d'intrication sature à la valeur typique de Page et semble y rester pour un temps arbitrairement long dans la limite thermodynamique. C'est-à-dire que l'intrication est en loi de volume. Cela suggère que la dynamique des systèmes génériques conduit rapidement et de façon irréversible à des états typiques. Néanmoins il n'existe pas de preuve générale de cela.

Cette croissance de l'entropie d'intrication explique aussi qu'il soit aisé de simuler la dynamique unitaire des systèmes multicorps sur de courtes échelles de temps, mais que cela devienne exponentiellement difficile au-delà même avec des méthodes de compression efficaces comme celles basées sur les réseaux de tenseurs (par ex. TEBD).

*Toute dynamique ergodique génère des états typiques* — Si on résume les faits théoriques et les observations présentés jusqu'ici il semble raisonnable de faire "avec les mains" la conjecture suivante : pour tout système physique local invariant par translation (hamiltonien ou circuit), la dynamique unitaire conduit avec une très grande probabilité à un état typique dans la limite du temps long. C'est-à-dire, redisons-le, un état du système pour lequel l'état des sous-systèmes est :

- (1) intriqué en loi de volume avec le reste du système,
- (2) quasi-indistinguable d'un état thermique.

Les deux théorèmes suivants, prouvés récemment et centraux pour notre travail, donnent un premier élément de réponse dans cette direction [63] :

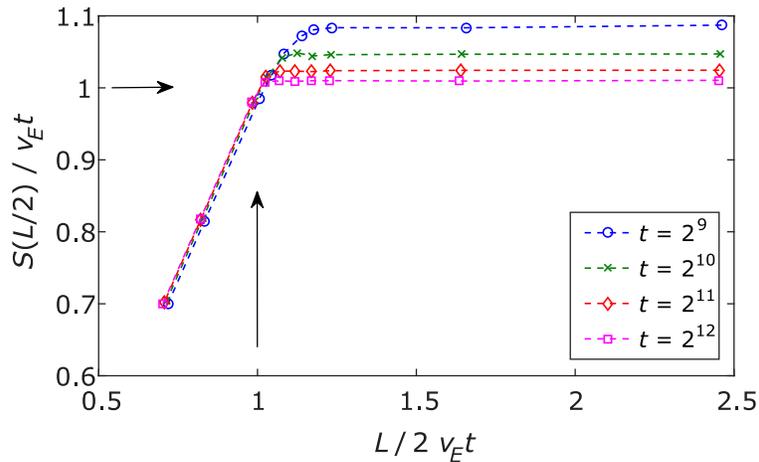


FIGURE 3.3 – Croissance de l'entropie d'intrication dans les systèmes chaotiques génériques. On voit une première phase linéaire, dite balistique, qui sature rapidement à une valeur quasi-maximale, l'entropie de Page (figure tirée de [65]).

*Si on soumet un état initial arbitraire à une dynamique unitaire ergodique, c'est-à-dire universelle<sup>1</sup>, alors dans la limite du temps long l'état de n'importe quel sous-système est presque totalement mixé. De plus les fluctuations de la matrice densité associée sont décrites par l'ensemble de matrices aléatoires gaussien unitaire (GUE).*

*Si cette dynamique unitaire aléatoire est universelle dans tout sous-espace d'énergie  $\mathcal{E} = [E, E + \delta E]$  alors l'état de n'importe quel sous-système dans la limite du temps long est approximable par un état thermique de Gibbs. De plus les fluctuations de la matrice densité associée sont décrites par une déformation faible de l'ensemble gaussien unitaire (GUE).*

Cela nous motive à aller au-delà de l'entropie d'intrication pour caractériser la dynamique des systèmes quantiques multicorps. Comme nous allons le voir dans le chapitre suivant il semble que les fluctuations de la matrice densité, et en particulier du spectre d'intrication, soient un indicateur plus pertinent pour caractériser les

1. ici "universel" signifie que l'opérateur d'évolution unitaire est une matrice aléatoire gaussienne et permet d'accéder à n'importe quel état de l'espace d'Hilbert.

phases de la dynamique, en particulier celles qui sont non-triviales.

### 3.4 Equilibration & thermalisation

Ces résultats sur la dynamique typique des états et de l'intrication des systèmes quantiques à  $N$  corps sont étroitement connectés aux phénomènes d'équilibration et de thermalisation de systèmes quantiques isolés. Bien qu'ils ne constituent pas le centre de ce mémoire, la question des *conditions* de leur existence, et le cas échéant de l'*échelle de temps* associée, est très souvent présente lorsqu'on s'intéresse à la dynamique des systèmes quantiques macroscopiques. On donne donc quelques éléments.

L'équilibration et la thermalisation sont deux phénomènes mystérieux, parce qu'ils sont universels (ils semblent ne pas dépendre des détails microscopiques), et par qu'ils sont paradoxaux : l'évolution des systèmes quantiques est réversible, or l'équilibration, et encore plus la thermalisation, sont par essence irréversibles. Expliquer comment ces phénomènes émergent de la physique quantique des systèmes isolés constitue un défi majeur de la recherche actuelle. D'autant plus qu'on a découvert relativement récemment des systèmes quantiques à  $N$ -corps qui ne thermalisent pas, voire qui ne s'équilibrent pas [23].

L'*équilibration* correspond au fait qu'une quantité, après avoir été initialisée à une valeur hors-équilibre, évolue vers une certaine valeur puis reste proche de celle-ci pendant une durée prolongée. Il semble bien accepté que deux ingrédients sont nécessaires pour que l'équilibre puisse apparaître dans un système à  $N$ -corps [25] : (1) un nombre suffisamment grand de niveaux d'énergie occupés (une grande dimension effective), et (2) un nombre suffisant d'espacements d'énergie non-dégénérés dans le spectre (condition de non-résonance). La typicalité assure que la première condition est réalisée pour l'immense majorité des états. On peut montrer que ces états typiques possèdent une grande dimension effective et des propriétés thermodynamiques [69]. La seconde se comprend intuitivement par le fait que, pour que les sous-systèmes s'équilibrent, il est nécessaire qu'ils soient couplés avec le reste du système. Ils peuvent alors déphaser. Ce couplage implique un certain degré de levée de dégénérescence.

La *thermalisation* désigne l'équilibration vers un état thermique quel que soit l'état initial. C'est un concept plus fort que celui d'équilibration, et dont la définition peut varier selon les auteurs, avec l'addition de conditions supplémentaires, comme par exemple l'indépendance vis-à-vis de l'état initial des sous-systèmes, une condition importante si l'on s'intéresse à la thermalisation des sous-systèmes. L'une des pistes les plus prometteuses pour comprendre à quelles conditions un système quantique dans un état pur thermalise porte le nom d'Hypothèse de Thermalisation des états propres (ETH).

*ETH* – Essentiellement l'hypothèse de thermalisation des états propres propose que les observables d'un système non-intégrable chaotique ont, dans la base des énergies  $\{E_m\}$ , des éléments de matrice d'une forme telle que l'on retrouve les prédictions de la physique statistique microcanonique [36]. Plus précisément, pour tout opérateur local à quelques corps  $\hat{O}$  :

$$\langle E_m | \hat{O} | E_n \rangle = \langle \hat{O} \rangle_{\text{micro}, \bar{E}_{mn}} \delta_{mn} + e^{-\frac{S_{th}(\bar{E}_{mn})}{2}} f_{\hat{O}}(\bar{E}_{mn}, \omega_{mn}) R_{mn}, \quad (3.13)$$

où  $\bar{E}_{mn} = \frac{E_m + E_n}{2}$ ,  $\omega_{mn} = \frac{E_n - E_m}{2}$  et  $S_{th}$  est l'entropie thermodynamique. La fonction  $f_{\hat{O}}(\bar{E}_{mn}, \omega_{mn})$  est lisse et dépend de l'opérateur  $\hat{O}$ , et  $R$  est une matrice aléatoire gaussienne.

La formulation de l'ETH repose sur des idées issues du chaos et de la typicalité mais va plus loin en supposant une forme générale pour l'hamiltonien qui est plus réaliste physiquement qu'une simple matrice aléatoire [29]. L'ETH suppose que les états propres du hamiltonien sont des superpositions aléatoires mais localisées en énergie. Ainsi si on se restreint à une petite fenêtre d'énergie  $[E, E + \Delta E]$ <sup>2</sup>, le comportement est celui d'une matrice aléatoire. Néanmoins l'ETH permet de décrire les fluctuations au-delà de cette fenêtre en postulant une fonction d'enveloppe  $e^{-\frac{S_{th}(\bar{E}_{mn})}{2}} f_{\hat{O}}(\bar{E}_{mn}, \omega_{mn})$  pour les éléments hors-diagonaux.

L'ETH implique la thermalisation des sous-systèmes. La valeur moyenne de  $\hat{O}$  réduite à tout sous-système  $A$  est donnée par la moyenne thermodynamique canonique :  $\langle \hat{O} \rangle_A = \langle \hat{O} \rangle_{\text{cano.}, \beta(E)}$ . Cela signifie que l'état du sous-système est très proche de l'état

2. La largeur de la fenêtre  $\Delta E$  est choisie de sorte d'être très supérieure aux espacements entre niveaux d'énergie (qui sont exponentiellement supprimés avec la taille du système,  $|E_{i+1} - E_i| \propto e^{-cN}$ ,  $\forall E_i \in [E, E + \Delta E]$ ). Sa taille est en fait déterminée par l'énergie de Thouless,  $E_T = \hbar D / L^2$ , où  $D$  est la constante de diffusion et  $L$  la taille du système.

thermodynamique de Gibbs. Autrement dit l'ETH implique que pour toute sous-région le reste du système agit comme un bain thermique. L'entropie d'intrication correspond alors à l'entropie thermodynamique.

Toutefois il existe de nombreuses variantes de l'ETH, et certaines questions importantes restent sans réponse, en particulier : quelles conditions sont requises pour qu'un système satisfasse l'ETH, et à quels opérateurs l'ETH s'applique. Par ailleurs certains auteurs affirment que tout système non-intégrable thermalise et que tout système intégrable ne thermalise pas. Bien que de nombreux résultats numériques semblent aller dans ce sens, cette affirmation est loin de faire consensus [25]. Comme nous le verrons dans la suite le modèle PXP pourrait être un bon contre-exemple.

## Chapitre 4

# Statistique du spectre d'intrication

Historiquement, le spectre d'intrication a d'abord été proposé comme diagnostic de l'ordre topologique dans l'état fondamental des systèmes avec un gap, et plus généralement de l'ordre de brisure de symétrie [70] [71]. Ces hamiltoniens ont généralement un état fondamental avec un spectre d'intrication qui décroît en loi de puissance ce qui donne lieu à une entropie en loi d'air. Au contraire les états hautement excités ont un spectre d'intrication beaucoup plus uniforme (qui obéit à la loi de Marchenko-Pastur), ce qui donne lieu à une intrication en loi de volume [72]. Ces distributions bien distinctes des valeurs dans le spectre d'intrication reflètent directement les propriétés physiques très différentes observées entre l'état fondamental (à  $T = 0$ ) et les états hautement excités (à  $T \gg 0$ ).

Cette structure du spectre d'intrication peut être décrite statistiquement en utilisant les outils de la théorie des matrices aléatoires : c'est ce qu'on appelle la *statistique du spectre d'intrication* (ESS). Ainsi, plus récemment, il a été proposé d'utiliser la statistique du spectre d'intrication pour caractériser les différentes phases de la dynamique quantique après une trempe [73]. Cet outil permettant une caractérisation plus fine des corrélations quantiques, au-delà de l'entropie d'intrication. En particulier il a été observé que les systèmes chaotiques génériques génèrent une dynamique qui rapidement conduit à une structure universelle du spectre d'intrication [62]<sup>1</sup>. De ce fait ce comportement universel du spectre d'intrication peut être pris comme une définition du chaos quantique.

---

1. ici "universel" signifie que la matrice densité à partir de laquelle on obtient le spectre d'intrication a les propriétés d'une matrice aléatoire gaussienne - voir Annexe A.1

*Distribution du rapport des espacements adjacents* — Rappelons d’abord (section 3.2) que le spectre d’intrication pour une bipartition donnée du système est équivalent au spectre de la matrice densité de l’un ou l’autre des parties, aux modes nuls près. Dans la suite on considère le spectre de la matrice densité. Les ensembles de matrices densité aléatoires partagent des propriétés très proches des ensembles d’hamiltoniens aléatoires. En particulier les corrélations dans leur spectre sont décrites par la même statistique (voir Annexe A.2).

Appelons  $p_i$  les valeurs propres de la matrice densité, et ordonnons-les en ordre décroissant  $p_k > p_{k+1}$ . Au lieu de calculer simplement les espacements entre valeurs consécutives on prend le *rapport des espacements adjacents* [72],

$$r_k = \frac{p_{k-1} - p_k}{p_k - p_{k+1}}. \quad (4.1)$$

Ce ratio étant indépendant de la densité d’états locale dans le spectre cela permet d’éviter les difficultés rencontrées lors du calcul de la distribution des espacements, en particulier pour des matrices de taille finie. En particulier on n’a pas besoin d’utiliser la procédure de *dépliage* (unfolding) du spectre [74].

Pour des matrices densité aléatoires, la *densité d’états* suit la distribution de Marchenko-Pastur (voir Annexe A.2) et la distribution du rapport des espacements adjacents suit l’hypothèse de Wigner-Dyson, qui est donnée par [75],

$$P_{WD}(r) = \frac{1}{Z} \frac{(r + r^2)^\beta}{(1 + r + r^2)^{1+3\beta/2}} \quad (4.2)$$

avec  $Z = 4\pi/81\sqrt{3}$  et  $\beta = 1$  pour les matrices densité réelles. Cette quantité sonde essentiellement la répulsion entre les valeurs dans le spectre d’intrication.

Pour évaluer la convergence au 1er ordre de la distribution des rapports vers  $P_{WD}(r)$  il peut être utile de regarder la valeur moyenne de cette distribution qui est aussi universelle. On calcule sa valeur en prenant la moyenne d’ensemble des rapports d’espacement normalisés  $\tilde{r} = \min\{r, \frac{1}{r}\}$ ,

$$\langle \tilde{r} \rangle = \langle \min\{r, \frac{1}{r}\} \rangle \quad (4.3)$$

Pour GOE sa valeur est  $\langle \tilde{r} \rangle_{GOE} \approx 0.54$ .

Dans le cas où les valeurs dans le spectre d'intrication sont décorréliées, la distribution des rapports d'espacements correspond à la distribution de Poisson,

$$P_{Poisson}(r) = \frac{1}{(1+r)^2} \quad (4.4)$$

Dans ce cas le rapport d'espacement moyen vaut  $\langle \tilde{r} \rangle_{Pois.} \approx 0.39$ . En calculant tout au long de l'évolution la distribution des rapports d'espacements adjacents on peut ainsi évaluer à quel point la dynamique randomise les sous-systèmes, et voir l'apparition d'un comportement universel.

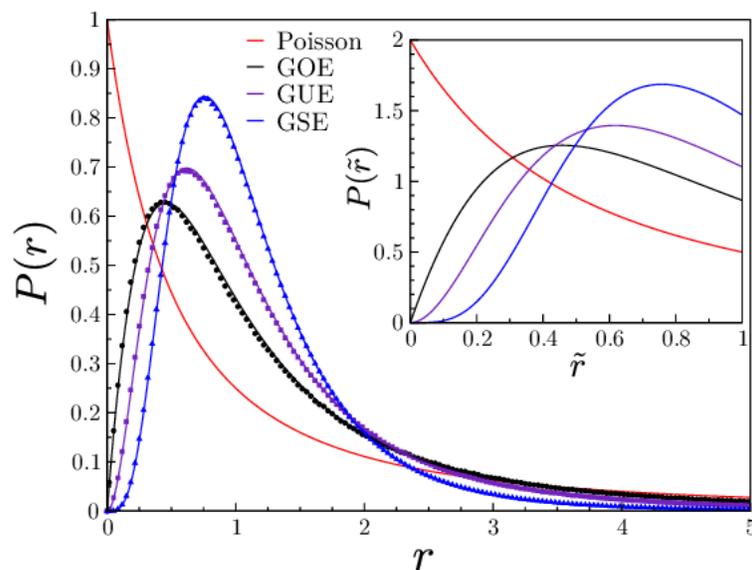


FIGURE 4.1 – Distributions théoriques du rapports des espacements adjacents pour les ensembles gaussiens et diagonal (voir Annexe) (figure tirée de [75]).

Remarquons plusieurs choses importantes. D'abord, puisque la statistique est calculée à partir des valeurs non nulles du spectre, cela implique que ce diagnostic est insensible au rang de la matrice densité. C'est à la fois un avantage, puisqu'on peut détecter la randomisation dans un sous-espace restreint, mais aussi un inconvénient car cela oblige à compléter ce diagnostic avec une mesure de la taille effective du sous-espace dans lequel le comportement universel apparaît. Pour cela on peut utiliser simplement le rang de la matrice densité (équivalent à l'entropie de Rényi  $S_0$ ). Ensuite, l'intérêt de ce diagnostic réside aussi dans le fait qu'il est indépendant de l'existence d'un hamiltonien. On a seulement besoin d'un état quantique à un temps  $t$ . On peut donc l'utiliser autant dans le cas de circuits quantiques, que dans le cas

d'évolutions non-triviales hautement dépendantes de l'état initial pour lesquelles caractériser l'hamiltonien ne suffit pas. Enfin, notons que puisqu'il est basé sur le spectre d'intrication, il présente l'avantage d'être un diagnostic informationnel. Il est donc agnostique quant à la nature des constituants du système. En outre il sonde spécifiquement des propriétés universelles au sens de la théorie des matrices aléatoires, c'est-à-dire que là aussi il permet d'ignorer délibérément les détails physiques microscopiques.

## Dynamique des systèmes chaotiques génériques

Le fait d'utiliser la statistique du spectre d'intrication comme un diagnostic de la dynamique quantique vient d'abord du travail pionnier de Chamon et al. [73]. Essentiellement ils montrent qu'avec cette approche il est possible de distinguer différents types de dynamiques unitaires (non-hamiltoniennes), plus précisément celles qui sont réversibles de celles qui ne le sont pas (en posant une certaine définition de l'irréversibilité sur laquelle nous ne nous étendrons pas). Ce travail a ensuite été étendu en montrant que l'ESS peut être utilisé comme une signature de l'universalité du calcul quantique. Il est ainsi possible de discriminer si un circuit aléatoire est construit à partir d'un ensemble de portes universel ou Clifford [76] [77], ou bien la densité de mesures projectives nécessaire pour induire une transition de phase entre ces deux régimes [78].

Dans [63] les auteurs démontrent analytiquement que si on soumet un état initial arbitraire à une dynamique unitaire ergodique, c'est-à-dire universelle, alors dans la limite du temps long l'état de n'importe quel sous-système est presque totalement mixé. De plus les fluctuations de la matrice densité associée sont décrites par l'ensemble de matrices aléatoires gaussien unitaire (GUE). Ce résultat analytique a été confirmé numériquement et approfondi dans plusieurs travaux [79] [80], [81] et particulièrement dans [62]. Les auteurs étudient la dynamique de trempe à partir d'un état produit pour un circuit aléatoire unitaire d'une part et un système complètement chaotique d'autre part (modèle d'Ising en champ transverse et longitudinal). Ils identifient 3 phases distinctes au cours de l'évolution du spectre d'intrication, avec 3 échelles de temps :

- **1ère phase**  $[t_0, t_{(r)GUE}]$  : elle survient aux temps très courts,  $t \sim o(1)$ , et finit

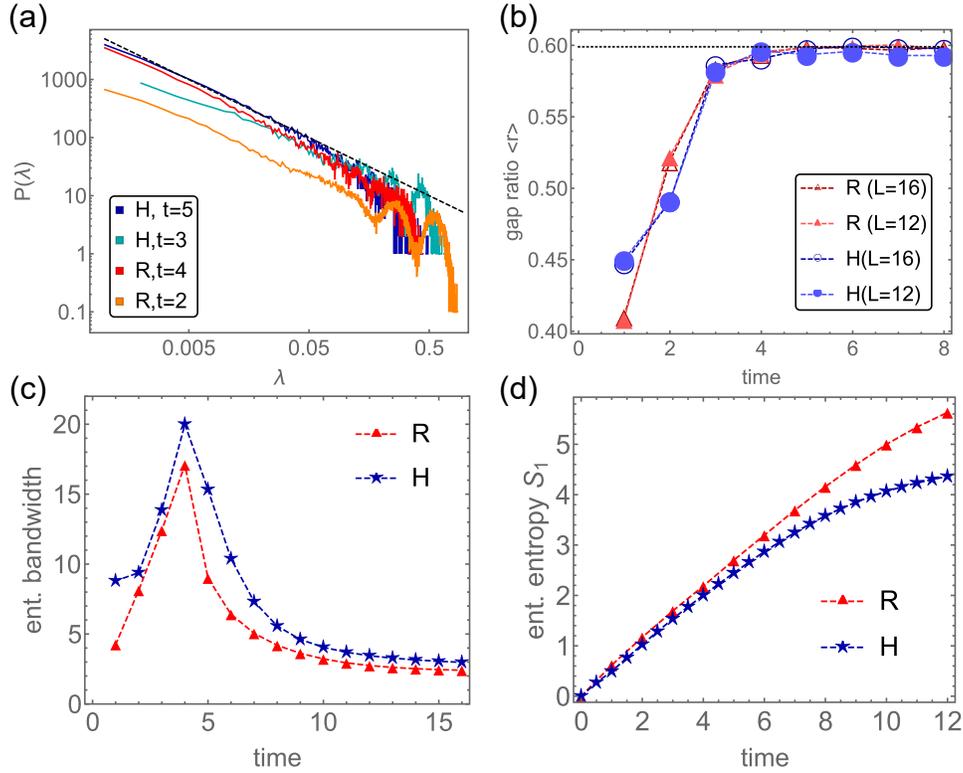


FIGURE 4.2 – Comportement statistique du spectre d'intrication à mi-chaîne aux temps courts, pour un hamiltonien chaotique (H) et un circuit aléatoire unitaire (R) à  $L = 16$  qubits. **(a)** Densité spectrale moyenne aux temps courts qui converge vers une forme universelle en  $1/f$  (pointillés) après  $t_{LC}$ . **(b)** Saturation précoce du rapport d'espacement moyen à la valeur pour GUE signalant l'apparition de la répulsion dans le spectre, indépendamment de la taille du système. **(c)** Largeur de bande du spectre d'intrication montrant un pic qui sépare la dispersion initiale de la phase de compression. **(d)** Croissance de l'entropie d'intrication aux temps courts, avec une phase initiale linéaire (figure tirée de [62]).

avec l'apparition de répulsion (saturation de  $\langle r \rangle \rightarrow \langle r \rangle_{GUE}$ ). Le comportement de  $\langle r \rangle$  est indépendant de la taille du système et des sous-systèmes, et des détails de la dynamique (même comportement pour le système physique et le circuit). En conséquence cette randomisation au 1er ordre est donc universelle, comme le temps caractéristique associé :  $t_{\langle r \rangle_{GUE}} \approx 5$ . Cette phase a lieu en même temps que l'entropie d'intrication croît linéairement.

- **2ème phase**  $[t_{\langle r \rangle_{GUE}}, t_{LC}]$  : elle finit au moment où le cône de lumière atteint les bords du système, où le rang  $\chi$  de la matrice densité sature, et où  $S$  termine sa phase balistique. Sur tout cet intervalle la densité d'états présente une forme universelle  $1/f$ . Cela signifie que la théorie des matrices aléatoires ne

décrit que la structure statistique locale de l'ES. Le temps caractéristique  $t_{LC}$  dépend de la taille du système :  $t_{LC} = L/2$ .

- **3ème phase** [ $t_{LC}, t_{relax.}$ ] : elle finit par la saturation de l'intrication à la valeur  $S_{Page}$  à  $t_{relax.} \sim \mathcal{O}(L)$  [65]. Durant cet intervalle le spectre d'intrication se “comprime” jusqu'à ce que la densité d'états atteigne Marchenko-Pastur,  $1/f \rightarrow P_{MP}$ . Le facteur de forme spectral sature, ce qui indique que le comportement purement GUE est atteint à  $t_{relax.}$ . La théorie des matrices aléatoires décrit la statistique globale.

Notons ainsi que, jusqu'à  $t_{LC}$  de nouvelles valeurs continuent de s'ajouter au spectre d'intrication. Ses valeurs se dispersent comme le montre le croissence de la largeur de bande d'intrication. Après  $t_{LC}$  plus aucune nouvelle valeur ne se rajoute, ce sont plutôt les valeurs existantes qui se réorganisent pour tendre vers une distribution plus uniforme. La largeur de bande diminue, c'est la compression du spectre d'intrication. Par ailleurs les phases 2 et 3 ne sont pas invariantes vis-à-vis de la taille du système et des sous-systèmes. Leur durée peut donc s'étirer plus ou moins. Enfin on observe que ce comportement est absent dans la limite intégrable (pour le modèle physique d'Ising). La densité d'états est une fonction delta à tout instant, ce qui implique que la répulsion n'apparaît jamais.

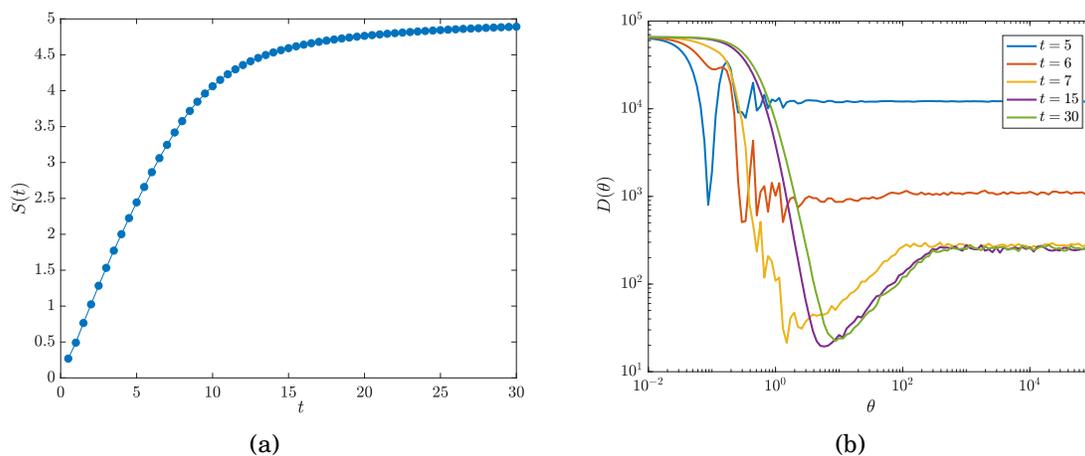


FIGURE 4.3 – Comportement au temps long pour un hamiltonien chaotique ( $L = 16$  qubits). **(a)** Croissance de l'entropie d'intrication et saturation à la valeur de Page à  $t = 30$ . **(b)** Saturation du facteur de forme spectral dans sa forme universelle à  $t = 30$  signalant un comportement pleinement de type matrice aléatoire (figure tirée de [62]).

Ces résultats suggèrent que la distribution GOE/GUE du spectre est ce vers quoi la dynamique devrait converger asymptotiquement pour les systèmes complètement chaotiques. En conséquence on introduit une mesure de la distance entre la distribution des rapports au cours de l'évolution et cette distribution pour le cas complètement aléatoire (GOE), l'entropie relative<sup>2</sup> [82]

$$D_{KL}[P(r)|P_{GOE}(r)] = \sum_i p_i \ln \frac{p_i}{p_{GOE,i}} . \quad (4.5)$$

Elle vaut 0 lorsque les deux distributions coïncident et à l'inverse tend vers  $\infty$  à mesure qu'elles divergent l'une de l'autre. C'est donc une mesure (inverse) du degré de randomisation de l'état du sous-système.

---

2. Classiquement on l'appelle aussi *divergence de Kullback-Leibler*.

## Chapitre 5

# Blocage de Rydberg & modèle PXP

Ces dernières années de grandes avancées ont été accomplies dans la manipulation et le contrôle individuel d'atomes froids, neutres ou ionisés. Cela ouvre la voie à la réalisation de simulateurs quantiques analogues. Des systèmes quantiques pour lesquels la géométrie, l'état individuel des atomes et leurs interactions locales peuvent être précisément ajustés de manière à pouvoir réaliser un système physiquement équivalent à certains systèmes quantiques complexes naturels. L'avantage principal de ces dispositifs est la possibilité d'investiguer des observables et des régimes inaccessibles avec les systèmes naturels. Les applications attendues vont de la matière condensée à la physique des hautes énergies en passant par la chimie.

*Chaîne d'atomes de Rydberg* – Le système physique qui nous intéresse a été réalisé expérimentalement dans un tel simulateur en 2017 par l'équipe de Lukin à Harvard [83]. Il s'agit d'une chaîne à 1 dimension composée d'atomes dit *de Rydberg*. Un état de Rydberg est un état dans lequel l'électron externe d'un atome est excité dans un niveau d'énergie très élevé. Il est alors très éloigné du reste du cortège électronique, ce qui cause l'apparition d'un dipôle électrique. Combiné à l'état fondamental on obtient, avec une très bonne approximation, un système effectif à deux niveaux.

Chaque atome peut ensuite être piégé dans un réseau optique pour former un chaîne régulière, et piloté individuellement à l'aide d'excitations lasers adéquatement ajustées. Ce système est décrit par l'hamiltonien effectif suivant :

$$\mathcal{H} = \sum_i \frac{\Omega_i}{2} X_i - \sum_i \Delta_i P_i^\bullet + \sum_{i < j} V_{ij} P_i^\bullet P_j^\bullet \quad (5.1)$$

en unités de  $\hbar$ . Le premier terme décrit la transition de l'atome  $i$  entre l'état fondamental  $|\circ\rangle$  et l'état de Rydberg  $|\bullet\rangle$  (matrice de Pauli  $X$ <sup>1</sup>), pilotée par un signal résonant à la fréquence  $\Omega_i$ . Ce signal peut être mis hors-résonance en créant à l'aide de lasers un désaccord  $\Delta_i$  suffisant avec l'état excité,  $\Delta_i \gg \Omega_i$  (deuxième terme).  $P^\bullet = |\bullet\rangle\langle\bullet|$  désigne le projecteur sur l'état de Rydberg. Enfin les atomes peuvent interagir deux-à-deux par interaction dipolaire de type Van der Waals s'ils sont simultanément dans l'état de Rydberg (troisième terme).  $V_{ij} = C/r_{ij}^6$  est l'intensité de l'interaction à la distance  $r_{ij}$ ,  $C > 0$  est une constante appelée coefficient de Van Der Waals. La magnitude de l'interaction  $V_{ij}$  est ajustée soit en changeant la distance entre les atomes soit en les couplant à différents états de Rydberg.

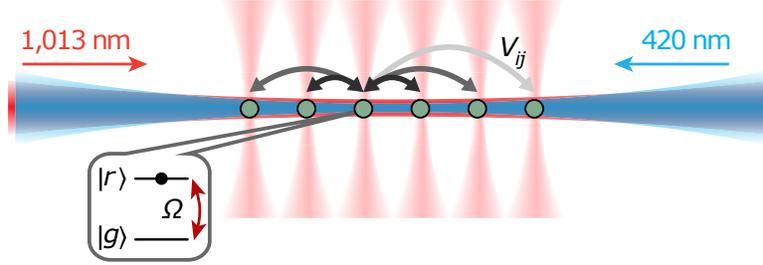


FIGURE 5.1 – Schéma du dispositif expérimental d'atomes piégés utilisé pour implémenter la chaîne avec blocage de Rydberg. [83]

*Régime du blocage de Rydberg* – On se concentre sur le régime de couplage cohérent et homogène, c'est-à-dire pour lequel  $V_{j,j+1} \gg \Omega \gg \Delta$  et avec  $|\Omega_i| = \Omega$  et  $\Delta_i = \Delta$ , respectivement. Dans ce régime les interactions avec les premiers voisins sont contraintes de sorte que deux atomes voisins ne peuvent être excités simultanément, c'est le blocage de Rydberg. De plus les interactions au-delà des premiers voisins sont négligeables. Dans cette limite l'hamiltonien peut être approximé par

$$\mathcal{H}_c = \sum_i P_{i-1}^\circ \left( \frac{\Omega}{2} X_i - \Delta P_i^\bullet \right) P_{i+1}^\circ \quad (5.2)$$

avec  $P^\circ = |\circ\rangle\langle\circ|$  le projecteur sur l'état fondamental. Le blocage de Rydberg est contenu dans le fait que  $P_i^\bullet P_{i+1}^\bullet = 0$ .

C'est dans ce régime qu'a été observé en 2017 par Bernien et al. [83] le phénomène

1. On reprend la notation de [Turner et al.], c'est-à-dire qu'on utilise la base  $\{|\bullet\rangle, |\circ\rangle\}$  ce qui donne  $X = |\circ\rangle\langle\bullet| + |\bullet\rangle\langle\circ|$  et  $Z = |\bullet\rangle\langle\bullet| - |\circ\rangle\langle\circ|$ .

de *cicatrices quantiques* à  $N$ -corps. En initialisant le système dans un état antiferromagnétique, c'est-à-dire un simple état produit alterné  $|\circ\bullet\circ\bullet\dots\rangle$ , on observe une réapparition périodique de ce motif pendant un temps anormalement long (Fig. 5.2). Cette mémoire remarquable de l'état initial est associée à des oscillations de l'entropie d'intrication et des fonctions de corrélations locales caractérisées par un amortissement beaucoup plus lent que l'échelle de temps de relaxation locale  $1/\Omega$  attendue. Ce maintien de la cohérence pendant un temps particulièrement long pour certains états initiaux particuliers rappelle fortement le phénomène de cicatrice quantique à 1 particule observé dans certains modèles de billard quantique [84].

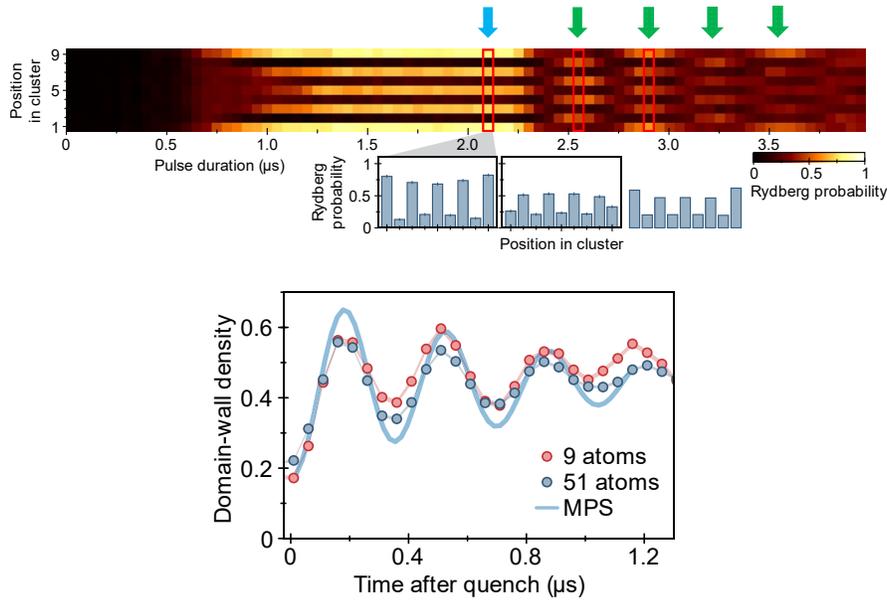


FIGURE 5.2 – **(en haut)** État moyen de chacun des atomes de la chaîne au cours du temps. La partie à gauche de la flèche bleue correspond à la préparation de l'état  $|Z_2\rangle$  initial. À la suite on distingue les oscillations caractéristiques des cicatrices quantiques (flèches vertes). **(en bas)** Illustrations de l'oscillations des observables à plusieurs corps avec la densité de murs de domaines au cours du temps, modélisation (MPS) v.s. mesures (figure tirée de [83]).

*Modèle PXP.* – Puisqu'on va explorer la physique de ce système avec les outils de l'information quantique, on choisit à partir de maintenant de parler de *qubits* au lieu d'atomes de Rydberg. Dans le cas résonant idéal où  $\Delta = 0$ , le système peut être approximé par un modèle effectif simple, le modèle "PXP",

$$H_{PXP} = \sum_{i=1}^L P_{i-1} X_i P_{i+1} \quad (5.3)$$

Par soucis de simplicité on note  $P_i = P_i^\circ$  le projecteur sur l'état fondamental. L'énergie d'interaction est normalisée à 1 (unités  $(\Omega/2)^{-1}$ ) et  $L$  désigne le nombre de sites. Ce modèle possède plusieurs symétries notables. Une symétrie d'inversion spatiale qui associe le site  $j$  au site  $L - j + 1$ , une symétrie de réflexion spectrale dans son spectre d'énergie qui fait que tout état propre d'énergie  $E > 0$  possède un partenaire d'énergie  $-E$ , et une symétrie particule-trou.

Dans le cas où l'on considère des conditions aux bords ouvertes, cela se traduit par  $P_{i=0} = P_{i=N+1} = 1$ . Au contraire si on considère des conditions aux bords périodiques, le site  $N + 1$  est équivalent au site 1, et le modèle PXP acquiert une symétrie par translation [61].

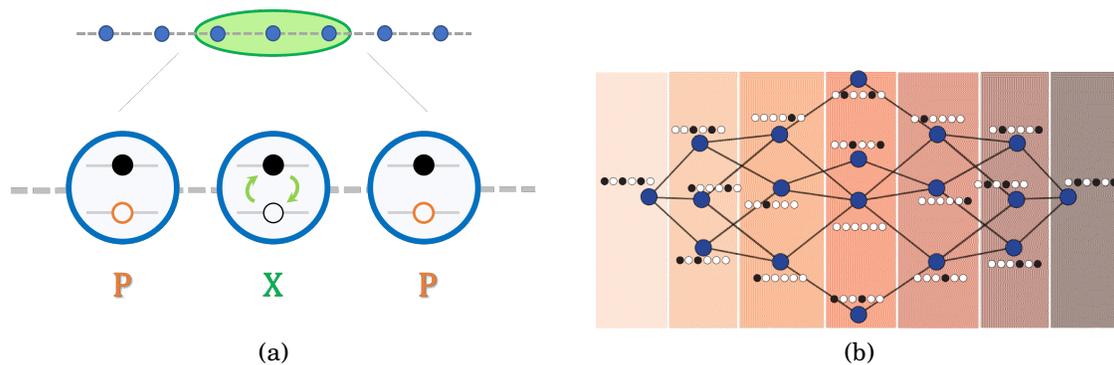


FIGURE 5.3 – (a) Le terme local à 3 qubits  $PXP$  doit être compris comme un bit-flip conditionné par l'état des qubits adjacents. (b) Graphe du sous-espace dynamique émergent à partir de l'état  $\mathbb{Z}_2$  pour 6 qubits. Il peut être construit par application successive du hamiltonien PXP sur cet état (figure tirée de [61]).

*Espace d'Hilbert fragmenté et dynamique contrainte* – Chaque terme  $PXP$  décrit le blocage de Rydberg comme une interaction locale contrainte entre le qubit  $i$  et ses deux plus proches voisins. Du point de vue de la dynamique cela signifie que le qubit  $i$  subit un bit-flip conditionnellement au fait que les deux qubits voisins soient dans leur état fondamental (Fig. 5.3a). La 1ère conséquence est que la formation ou la disparition de motifs de  $n \geq 2$  excitations adjacentes  $\cdots \bullet \bullet \cdots$  est impossible. On appelle ces motifs *murs de domaine*. Par exemple la transition  $\circ \circ \circ \leftrightarrow \circ \bullet \circ$  est autorisée, alors que  $\circ \circ \bullet \leftrightarrow \circ \bullet \bullet$  est interdite. La 2ème conséquence est que le transport d'un mur de domaine le long de la chaîne est bloqué. Par exemple  $\circ \bullet \circ \leftrightarrow \circ \circ \bullet$  est interdit. En résumé ces interactions contraintes ont pour effet dynamique de conserver et figer une configuration de murs de domaines donnée. Cela conduit à la fragmentation de l'espace

de Hilbert en secteurs correspondant chacun à une certaine configuration de murs de domaine, c'est-à-dire une certaine nombre de murs de tailles  $n$  variables à des positions fixées). Par exemple {1 mur  $n = 2$  au site  $i = 1$  ; 3 murs  $n = 3$  aux sites  $i = 5, 10, 16$ } est une configuration qui définit un secteur. Il existe aussi un secteur *sans-mur*.

Ce secteur sans-mur est le secteur de plus grande dimension, elle est en fait exponentiellement grande avec la taille du système. On peut le calculer en raisonnant par récurrence. Imaginons une chaîne de  $L$  sites ( $L$  impair). Tous les états respectant la contrainte "sans-mur" peuvent être construits à partir des états sans-mur pour  $L - 1$  et  $L - 2$  sites. Il suffit en effet de rajouter à une extrémité (par exemple à gauche) soit le motif  $\circ$  sur les états à  $L - 1$  sites, soit le motif  $\bullet\circ$  sur les états à  $L - 2$  sites. Le nombre total d'états est donc la somme de la dimension des secteurs sans-mur pour  $L - 1$  et  $L - 2$  sites :

$$d_L = d_{L-1} + d_{L-2}. \quad (5.4)$$

Dans le cas où  $L$  est pair on a que  $d_L = d_{L-1}$  puisqu'il suffit de rajouter  $\circ$  à gauche. Avec les conditions initiales  $d_0 = 1$  et  $d_1 = 2$  on voit que la relation de récurrence 5.4 donne en fait les entiers de la suite de Fibonacci. Ces valeurs peuvent être retrouvées à l'aide du nombre d'or  $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$  :

$$d_L = \frac{\phi^{L+1} - (1 - \phi)^{L+1}}{\sqrt{5}}. \quad (5.5)$$

La dimension des autres secteurs (avec murs) varie avec la densité de murs. Plus une configuration est dense en murs de domaine, plus la dimension du secteur correspondant est petite. En effet le nombre d'états autorisées dans un secteur dépend uniquement du nombre de qubits libres restant entre les murs de domaine. Avec la contrainte qu'entre deux murs l'absence de murs doit aussi être préservée. De plus les qubits en contact avec les murs sont aussi figés. Ces régions entre deux murs forment alors des sous-secteurs sans-mur déconnectés les uns des autres. Le nombre d'états dans un secteur est donc le produit du nombre d'états dans chacun d'eux.

Du point de vue de l'évolution, l'état initial fixe le(s) secteur(s) impliqué(s) dans la dynamique. Si c'est une unique chaîne de bits alors un seul secteur est sélectionné, si c'est une superposition de chaîne de bits alors la dynamique peut avoir lieu dans plusieurs secteurs. Prenons le cas d'une unique chaîne de bits. Dans ce cas où elle

contient des murs de domaine alors la dynamique est *fragmentée* dans des sous-secteurs sans-mur déconnectés (voir Fig. 5.4). Si elle n'en contient pas, ce qui est le cas par exemple de l'état  $|\mathbb{Z}_2\rangle = |\circ \bullet \circ \bullet \dots\rangle$ , alors l'évolution a lieu sur tous les qubits mais reste restreinte au secteur sans-mur, elle n'est pas fragmentée. On peut donc toujours se ramener au secteur sans-mur pour comprendre cette dynamique contrainte.

À partir d'un état produit initial  $|\psi_0\rangle$  donné on peut facilement construire le secteur dans lequel la dynamique est contrainte en appliquant de façon répétée l'hamiltonien  $H_{PXP}$  sur  $|\psi_0\rangle$ . De cette façon on génère toutes les chaînes de bits autorisées dans le secteur. Cette construction peut être comprise à partir du développement de Taylor de l'opérateur d'évolution en puissances du hamiltonien :  $U = e^{-iHt} = \mathbb{1} - iHt + H^2t^2/2 - iH^3t^3/3! + \dots$ . Les états générés à chaque fois que  $H$  est appliqué peuvent être identifiés aux sommets d'un graphe où les arêtes représentent 1 unique bit-flip. L'hamiltonien est la matrice d'adjacence de ce graphe (voir Fig. 5.3).

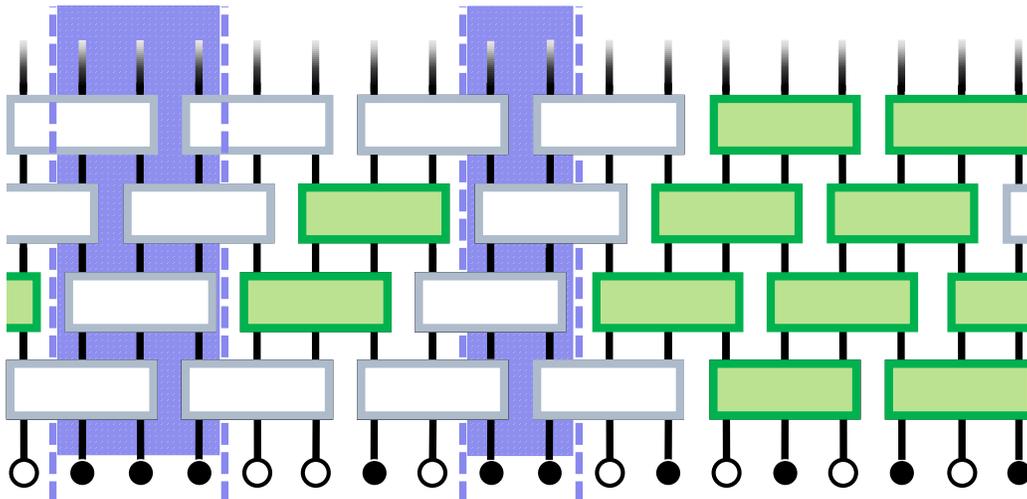


FIGURE 5.4 – La dynamique contrainte du modèle PXP (représenté sous forme de circuit) est très dépendante de l'état initial. Cette dynamique est gelée (portes blanches) sur les qubits (en violet) pour lesquels le motif initial est conservé par les contraintes. La dynamique se fragmente donc entre des régions déconnectées du système impliquant un nombre réduit de qubits (portes vertes). Cela donne naissance à des secteurs dynamiques émergents.

*Non-intégrabilité & Statistique du spectre d'énergie* – Le nombre d'états propres atypiques d'intrication faible dans l'hamiltonien du modèle PXP dépend linéairement de la taille du système, alors que l'espace d'Hilbert croît exponentiellement. Ainsi dans la limite thermodynamique ( $N \gg 1$ ), ce sous-ensemble d'états propres spéciaux

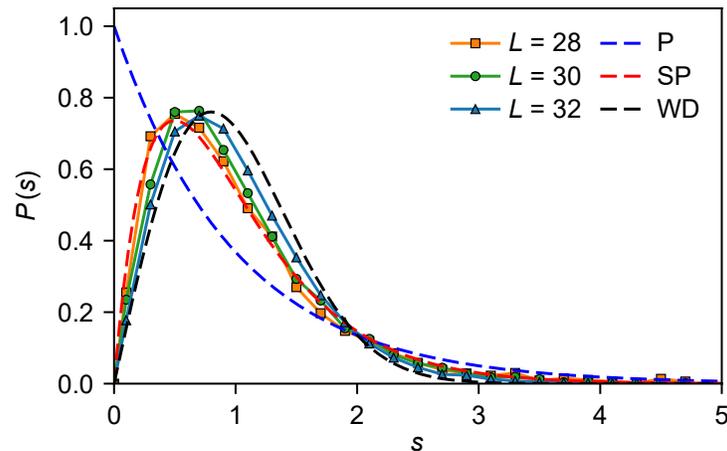


FIGURE 5.5 – La statistique du spectre d'énergie suggère que le modèle PXP est non-intégrable (Wigner-Dyson) et donc chaotique (figure tirée de [61]).

est de mesure nulle. Autrement dit il constitue une fraction négligeable du spectre. Comme le suggère la répulsion des niveaux dans la statistique du spectre d'énergie il semble que le modèle PXP soit non-intégrable chaotique dans la limite thermodynamique [61]. Ce diagnostic est supposé indiquer que la dynamique est ergodique quelque soit l'état initial. C'est-à-dire qu'elle mène rapidement vers un état stationnaire sans mémoire de l'état initial qui couvre la totalité de l'espace de Hilbert et exhibe une entropie d'intrication en loi de volume (entropie de Page). Le modèle est donc un exemple de système physique où ce diagnostic échoue. La croissance balistique de l'entropie d'intrication est aussi supposée être la marque d'une dynamique chaotique générique, néanmoins la pente observée est significativement plus faible que dans les systèmes génériques [61]. Pour toutes ces raisons on parle de *brisure faible de l'ergodicité* par le modèle PXP ("faible" car le sous-ensemble d'états propres anormaux est de taille négligeable). Pour finir, on note que l'état  $|\mathbb{Z}_2\rangle$  possède une distribution inhabituelle dans la base des énergies, il est dispersé sur un petit nombre d'états propres répartis dans tout le spectre. Comme mentionné dans la section 3.4, il semble qu'un état initial avec de telles propriétés ne favorise pas une convergence rapide vers l'équilibre.

*Conséquences sur l'intrication spatiale* – Puisqu'en général l'espace de Hilbert du modèle PXP est restreint on s'attend à ce que l'intrication maximale, pour une bipartition égale, soit plus faible que l'intrication maximale pour un système générique. Il n'existe pas à notre connaissance de formule analytique exacte pour l'intrication

typique dans le modèle PXP. Néanmoins dans [85] ils dérivent une formule de l'intrication maximale à mi-chaîne pour une chaîne de qubit avec une contrainte de type blocage de Rydberg (*PXP*) à la frontière de la bipartition :

$$S_{Block.} = \frac{L}{2} \log(\phi) + \log(\phi + 2) - \frac{\phi + 1}{\phi + 2} \log\left(\frac{\phi + 1}{\phi}\right) \quad (5.6)$$

Néanmoins ils ne tiennent pas compte de l'effet des contraintes dans le volume de chacune des parties de la chaîne.

## **Deuxième partie**

### **Résultats**

## Chapitre 6

# Chaos non-générique dans le modèle PXP

### 6.1 Introduction

De précédents travaux montrent que le modèle PXP génère une dynamique inhabituelle lorsqu'on l'initialise dans l'état  $|\mathbb{Z}_2\rangle$ . En particulier la croissance anormalement lente de l'entropie d'intrication au cours du temps indique une dynamique différente de celle des systèmes chaotiques génériques. On sait qu'à cause des interactions locales contraintes  $PXP$  la dynamique est restreinte à un petit sous-espace de l'espace de Hilbert, de taille  $\sim \phi^L$  (voir chapitre 5). Néanmoins cela ne suffit pas à expliquer sa lenteur. D'autres mécanismes plus subtils la sous-tendent, difficiles à interpréter (c'est ce que suggère aussi l'observation des cicatrices quantiques multicorps) [83] [61].

Jusqu'à maintenant cette dynamique n'a été simulée que pour des temps courts c'est-à-dire  $t \lesssim 20$ . On ne sait donc que peu de choses sur le comportement aux temps longs. De nombreuses questions restent sans réponses.

Nous choisissons d'étudier cette dynamique à travers le prisme de l'intrication. Plus précisément, inspiré par le travail de Chang et al. [62] sur les systèmes chaotiques génériques mais aussi par de précédents travaux par Chamon et al. [73], on utilise la statistique du spectre d'intrication comme un outil pour caractériser la dynamique

quantique au-delà de l'entropie d'intrication. Cela nous permet d'aborder les questions suivantes :

- *La dynamique s'équilibre-t-elle ?* A priori on ne s'attend pas à ce que le système thermalise puisque l'espace de Hilbert ne peut être exploré totalement. Par contre la question de la survenue de l'équilibration est ouverte. En particulier, si on prend l'entropie d'intrication comme marqueur de la dynamique, à quelle valeur et à quelle échelle de temps sature-t-elle ?
- *Quel genre d'état obtient-on au temps long ?* En particulier à quel point est-il typique ? Quelle est sa structure d'intrication au-delà de l'entropie du point de vue de la statistique du spectre d'intrication ? Autrement dit à quel point les sous-systèmes sont-ils randomisés ? À quelle échelle de temps acquiert-il sa forme asymptotique ?
- *Plus généralement, cette dynamique est-elle un phénomène isolé ou une nouvelle classe de dynamique quantique ?*

Pour cela on souhaiterait savoir si, en parallèle de la croissance de l'entropie, il s'établit une structure universelle particulière du spectre d'intrication. On utilise donc les outils issus de la théorie des matrices aléatoires au spectre de la matrice densité réduite associée à une demie chaîne. Cette partition est pertinente car (i) l'entropie d'intrication à mi-chaîne est un marqueur très répandu pour suivre la dynamique des systèmes quantiques, et surtout (ii) on maximise le nombre de degrés de liberté impliqués ce qui devrait garantir une meilleure statistique.

## 6.2 Méthodes

La simulation de la dynamique repose sur l'algorithme TEBD (voir Appendice A.1). À chaque pas de temps l'état du système est représenté sous forme d'un état produit de matrices (MPS), à partir duquel il est aisé d'extraire le spectre d'intrication. L'opérateur d'évolution unitaire pour 1 pas de temps est décomposé en un produit de petits opérateurs unitaires locaux par trotterisation. Avec cette méthode il est plus simple de choisir des conditions aux bords ouvertes. Les termes aux bords sont  $P_1 X_2 P_3$  et  $P_{L-2} X_{L-1} P_L$ . Bien que cela implique de briser la symétrie de translation (on a alors 4 choix d'états "quasi- $|\mathbb{Z}_2\rangle$ " selon le motif conservé aux bords), la physique dans le volume n'est pas significativement différente du cas périodique si  $L$  est assez

grand. De plus on remarque qu'en choisissant comme motif aux bords  $|1\dots 1\rangle$  on peut simuler la dynamique de  $n + 1$  qubits avec  $n$  qubits (impair). On prend donc comme état initial  $|\mathbb{Z}_2\rangle = |101\dots 01\rangle$ .

En utilisant cet méthode on est capable de simuler la dynamique d'une chaîne contrainte contenant jusqu'à  $L = 35$  qubits. Les simulations ont été réalisées sans tronquer le spectre pour être certain d'obtenir une statistique non biaisée. De plus on a cherché à atteindre des temps extrêmement longs  $t \sim 1800$ , de façon à se rapprocher autant que possible d'un éventuel régime d'équilibration de l'entropie d'intrication. Bien que l'on atteigne des dimensions de lien de l'ordre de  $\chi = 2584$ , ce n'est pas la mémoire qui est le facteur limitant (ce qui s'explique par la structure en réseau de tenseurs) mais le temps de calcul. La précision de la simulation TEBD à des temps si longs est assurée par un pas de temps très petit  $\delta t = 0.01$ . La convergence aux temps longs est vérifiée par comparaison avec une méthode de diagonalisation exacte sur un nombre croissant de qubits. Cette méthode a été développée spécifiquement pour le modèle PXP et optimisée en diagonalisant directement l'hamiltonien projeté dans le secteur sans-mur (on l'appellera parfois sous-espace déconnecté). On vérifie ainsi qu'en l'absence de troncation la précision de l'algorithme TEBD dépend essentiellement de la taille du pas de temps mais très peu de la taille du système.

### 6.3 Entropie d'intrication aux temps longs

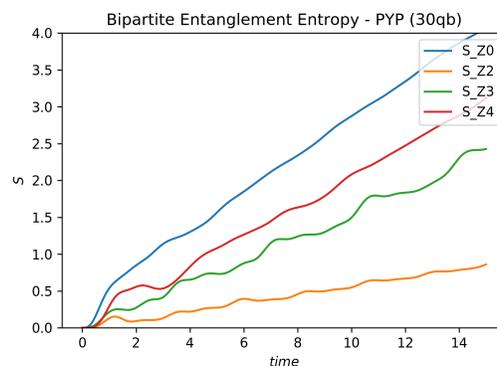


FIGURE 6.1 – Reproduction avec l'algorithme TEBD du résultat de [61] montrant l'entropie d'intrication au temps courts à partir des états initiaux  $|\mathbb{Z}_0\rangle$ ,  $|\mathbb{Z}_2\rangle$ ,  $|\mathbb{Z}_3\rangle$ ,  $|\mathbb{Z}_4\rangle$  avec des conditions aux bords ouvertes pour 30 qubits.

Avant toute chose on veut vérifier la justesse de l’algorithme d’évolution temporelle TEBD. À la figure 6.1 on reproduit les résultats trouvés par Turner et al. [61] pour le modèle PXP. On calcule la croissance de l’entropie d’intrication lors d’une trempe à partir de 4 états produits initiaux qui diffèrent par leur périodicité :

$$|Z_0\rangle = |\circ\circ\circ\circ\dots\rangle \quad (6.1)$$

$$|Z_2\rangle = |\circ\bullet\circ\bullet\dots\rangle \quad (6.2)$$

$$|Z_3\rangle = |\circ\circ\bullet\circ\circ\bullet\dots\rangle \quad (6.3)$$

$$|Z_4\rangle = |\circ\circ\circ\bullet\circ\circ\circ\bullet\dots\rangle \quad (6.4)$$

Les résultats originaux ont été obtenus à partir de la méthode iTEBD qui a l’avantage de modéliser l’évolution du système dans la limite thermodynamique ( $L \rightarrow \infty$ ) avec un coût relativement faible<sup>1</sup>. Néanmoins à mesure que l’on augmente la durée de l’évolution la dimension de lien augmente exponentiellement ce qui ne permet pas d’atteindre des temps longs sans une approximation préjudiciable. Cela explique en partie pourquoi les études théoriques n’ont pas exploré des temps plus longs<sup>2</sup>. C’est aussi la raison pour laquelle nos résultats ont été produits à l’aide de la méthode TEBD sur une chaîne de taille finie avec des conditions aux bords ouvertes. Même pour des temps très longs la dimension de l’indice de lien finit par saturer à une valeur contrôlable car dépendante de  $L$  (au plus  $\chi = d^{L/2}$ ). Il est donc plus aisé de simuler l’évolution pendant des temps très longs. Par ailleurs, la modélisation d’un système de taille finie reproduit plus fidèlement le comportement que l’on observerait dans des expériences avec atomes de Rydberg. Le code de l’algorithme TEBD a été construit à partir de zéro.

Finalement, bien que les méthodes utilisées soient un peu différentes, la concordance entre les deux est assurée par le fait qu’on ait simulé un grand nombre de qubits. Les effets de bords sont ainsi minimisés et les prédictions physiques à l’intérieur de la chaîne sont quasiment équivalentes. On constate ainsi une excellente adéquation entre les deux tracés de l’entropie d’intrication bipartite au cours du temps au milieu de la

---

1. Pour un nombre  $L = \infty$  de sites l’algorithme iTEBD a un coût computationnel en espace de  $\mathcal{O}(d^2\chi^2)$  et en temps de  $\mathcal{O}(d^3\chi^2)$ , alors que pour  $L$  sites (fini) TEBD a un coût computationnel en espace de  $\mathcal{O}(Ld\chi^2)$  et en temps de  $\mathcal{O}(Ld^3\chi^3)$  (où  $d$  est la dimension de l’indice physique et  $\chi$  la dimension de l’indice de lien - voir Annexe A.1)

2. L’autre raison étant que ces études se concentraient essentiellement sur le phénomène de cicatrices quantiques qui survient à des temps relativement courts.

chaîne. On est capable de retrouver la croissance globalement linéaire caractéristique de l'entropie aux temps courts ainsi que les oscillations spécifiques à ce modèle dues aux cicatrices quantiques.

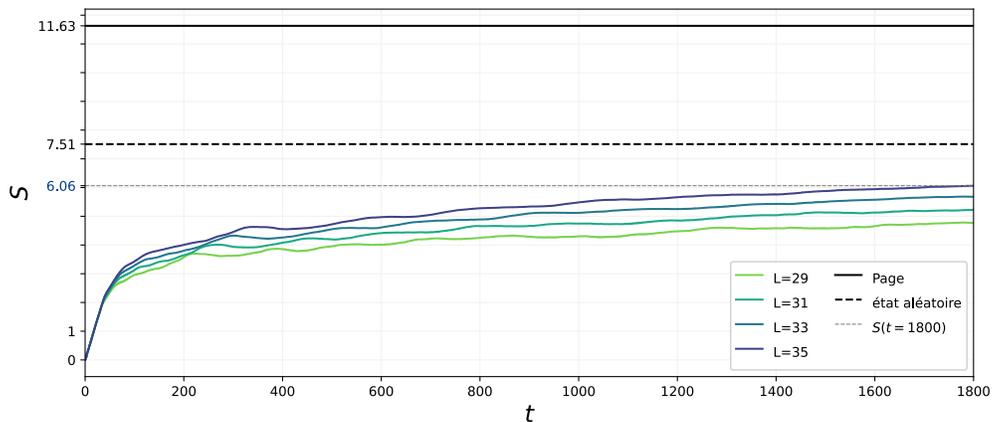


FIGURE 6.2 – Croissance de l'entropie d'intrication dans le temps pour  $L = 29, 31, 33$  et  $35$  qubits à partir de l'état  $|\mathbb{Z}_2\rangle$ . L'entropie typique de Page (gris plein), l'entropie d'un état pur aléatoire dans le sous-espace sans-mur (pointillé noir), et la valeur de  $S(t)$  à  $t = 1800$  (pointillé gris) sont données pour 35 qubits.

On simule ensuite la dynamique de trempe initialisée dans l'état  $|\mathbb{Z}_2\rangle$  pour 4 tailles de systèmes jusqu'à  $L = 35$  qubits (voir Fig. 6.2). On calcule l'entropie d'intrication au cours du temps à mi-chaîne ( $L$  étant impair, on pose que la longueur de la partie de gauche ( $A$ ) est la plus petite :  $L_A = L_B - 1 = \lfloor L/2 \rfloor$ ).

Notre simulation montre que l'entropie d'intrication croît extrêmement lentement comparé aux systèmes génériques ou aux circuits aléatoires pour lesquels on a un temps de relaxation  $t_{relax.} \sim \mathcal{O}(L)$ .

Aux temps courts on observe la croissance linéaire attendue pour les systèmes avec interactions locales, la phase balistique. La pente est indépendante de la taille du système. Pour les systèmes génériques et les circuits aléatoires (de Haar) cette phase est supposée durer jusqu'à  $t_{LC} = L_A/2 \sim \mathcal{O}(L)$ , et correspond au temps mis par le cône de lumière d'intrication pour rejoindre les bords du système [62]. C'est la délocalisation progressive de l'information initialement localisée sur chaque qubit par l'action des interactions locales. Dans le cas du modèle PXP la phase balistique dure plus longtemps mais reste de l'ordre de la taille du système,  $t_{LC(PXP)} \sim \mathcal{O}(L)$ . À cela

se superposent aussi les oscillations de courtes période typiques du phénomène de "cicatrice quantique". On voit à la figure 6.4(a) qu'elles se poursuivent bien après la phase de croissance balistique.

Aux temps intermédiaires l'entropie continue à croître mais encore plus lentement. On observe en particulier des fluctuations de faible amplitude et de longue période ( $\Delta t \sim 150$ ), inexistante dans les systèmes chaotiques génériques, et qui ont tendance à s'amortir aux temps longs  $t \sim 1500$ .

Comme le montre la Fig. 6.2, même à des temps très longs ( $t = 1800$ ) on ne peut pas affirmer clairement l'existence d'une valeur d'équilibre pour l'entropie d'intrication (le temps de calcul très important, de l'ordre de 2160 heures, soit  $\sim 90$  jours, est le facteur limitant). Pour prouver l'équilibration il faudrait atteindre un temps tel que la phase où l'entropie est à l'équilibre soit plus longue la phase hors-équilibre initiale. On peut estimer que cela requièrerait un temps de simulation  $\sim 5 \times$  plus long!

Néanmoins le comportement au temps long semble s'amortir, ce qui suggère l'existence d'une valeur asymptotique d'équilibre. Si on regarde  $S(t)$  pour 35 qubits, cette valeur semble très inférieure à l'entropie de Page correspondante, même si l'on tient compte des corrections pour une chaîne contrainte,  $S_{Page}$  corrigée. Cela laisse penser que la croissance de l'intrication dans le modèle PXP est incomplète à  $t \rightarrow \infty$ . C'est cohérent avec le fait que la dynamique est piégée dans un petit sous-espace et que tous les degrés de libertés ne soient pas accessibles.

On calcule aussi l'entropie d'intrication en fonction de la taille des sous-systèmes ( Fig. 6.3) à différents instants. Comme attendu pour un système avec des interactions locales et des conditions aux limites périodiques on voit l'établissement d'une courbe avec une forme quasi-pyramidale typique : la *courbe de Page*. Néanmoins, à la différence d'un système chaotique générique, on constate que l'évolution contrainte générée par le modèle PXP conduit à des valeurs d'entropie plus faibles, quelque soit la taille du sous-système. Cela conduit à une courbe de Page significativement plus aplatie.

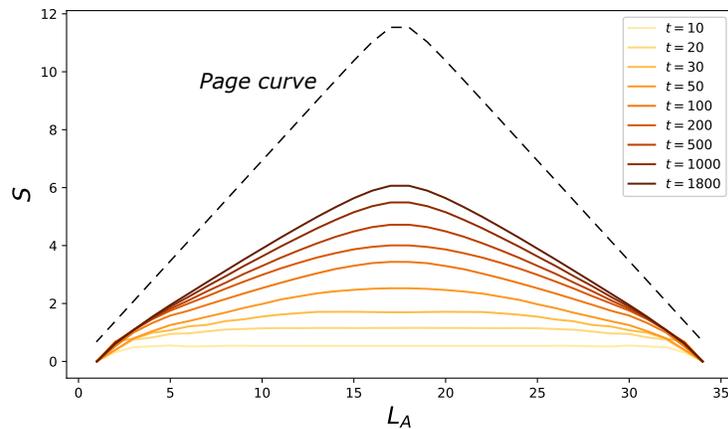


FIGURE 6.3 – Entropie d'intrication le long de la chaîne en fonction de la taille des sous-systèmes, à différents instants au cours de l'évolution (35 qubits). On voit l'apparition d'une courbe de type Page en "pyramide aplatie" qui sature bien avant la courbe de Page théorique typique (pointillés).

## 6.4 Apparition d'un comportement universel

On se concentre ensuite sur la statistique du spectre d'intrication pour la même bipartition à mi-chaîne. Pour évaluer plus aisément l'apparition d'un comportement universel on commence par tracer le 1er moment de la distribution des rapports d'espacements adjacents : le rapport moyen des espacements adjacents  $\langle \tilde{r} \rangle$ . Cette quantité est sensible uniquement à la répulsion entre les valeurs adjacentes du spectre. À la figure 6.4(c) on voit que  $\langle \tilde{r} \rangle$  sature très rapidement à une valeur proche de la valeur théorique pour GOE  $\langle \tilde{r} \rangle_{GOE} \approx 0.5359$ . L'approche vers le comportement de type matrice aléatoire se fait en un temps  $t_{\langle \tilde{r} \rangle_{GOE}} \sim \mathcal{O}(10)$ , ce qui est deux fois plus long que le temps observé dans [62]. Néanmoins il est bien indépendant de la taille du système. L'entropie relative à GOE,  $D_{KL}[P(r)|GOE]$ , qui est une mesure de la distance entre ces deux distributions, confirme ce comportement ( Fig. 6.4(d)).

De plus on trace le rang  $\chi$  de la matrice densité réduite ( Fig. 6.4(b)). Il donne le nombre de degrés de liberté d'intrication, c'est-à-dire la dimension effective de l'espace de Hilbert du sous-système dans le temps. Partant d'un état initial non-intriqué, le rang à  $t = 0$  est nul. Il croit ensuite rapidement, puis sature à un temps  $t_\chi$  qui dépend de la taille du système. Durant cette phase initiale les interactions locales

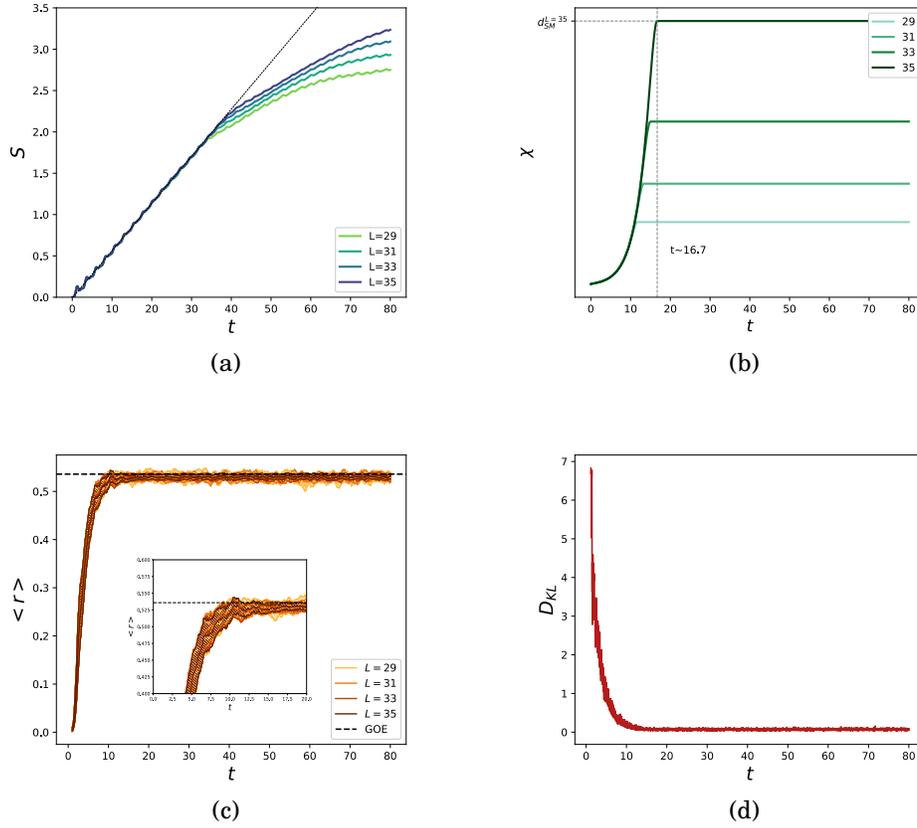


FIGURE 6.4 – Comportement aux temps courts. (a), (b) et (c) montrent des quantités pertinentes aux temps courts ( $t < 80$ ) pour 29, 31, 33 et 35 qubits. (d) pour 35 qubits seulement. **(a)** Entropie d'intrication de la demi-chaine aux temps courts. La phase balistique initiale est linéaire (fit en pointillés) et dure un temps  $t_{LC} \sim \mathcal{O}(L)$ . S'y superposent les oscillations de *cicatrice* quantique de courte période. **(b)** Croissance du rang de la matrice densité réduite.  $d_{SM}^{L=35} = 2584$  est la dimension du sous-espace sans-mur (SM) évaluée par eq. 5.5 et vérifiée par comptage pour 35 qubits. **(c)** Rapport d'espacement moyen en fonction du temps. Une moyenne glissante a été appliquée (intervalle = 500 points). Les zones ombragées représentent l'erreur standard sur la moyenne pour chacune des courbes. **(d)** Entropie relative à GOE pour 35 qubits.

créent rapidement un grand nombre de degrés de liberté d'intrication entre les moitiés gauche et droite du système. On note que le rang auquel la matrice densité sature est très inférieur à celui que l'on aurait pour un système générique équivalent ou même pour une demi-chaine avec contrainte [85] ( $\chi_{sat.} \ll \phi^{L/2} \ll 2^{L/2}$ ). Par contre il est bien égale à la dimension du sous-espace sans-mur que l'on peut évaluer numériquement en comptant les configurations de bits qui satisfont les contraintes locales PXP à

partir de l'état  $|\mathbb{Z}_2\rangle$  ( $\chi_{sat.} = d_{SM}$ ). La matrice densité réduite n'atteint donc jamais son rang maximal mais explore entièrement le sous-espace accessible. Cela suggère que si une valeur d'équilibre existe pour l'entropie (à des temps hors de portée de notre simulation), elle correspondrait à l'entropie moyenne d'un état aléatoire pris dans ce sous-espace sans-mur ( Fig. 6.2).

Par ailleurs, on voit aussi que, pour les tailles de systèmes considérées,  $t_\chi$  est toujours supérieur à  $t_{\langle\bar{r}\rangle_{GOE}}$ . En outre, on voit ( Fig. 6.4(a)) que l'apparition de la répulsion se fait bien avant la fin de la phase de croissance balistique (linéaire) de l'entropie d'intrication ( $t_{\langle\bar{r}\rangle_{GOE}} \approx t_{LC(PXP)}/4$  pour 35 qubits). Cela montre qu'il y a une première phase, avant  $t_{\langle\bar{r}\rangle_{GOE}}$ , durant laquelle les premiers degrés de liberté d'intrication sont créés et rapidement exhibent de la répulsion. Elle est suivie d'une deuxième phase au cours de laquelle la dynamique randomise la matrice densité à mesure que les derniers degrés de liberté d'intrication se rajoutent. Tout ceci a lieu lors de la phase de croissance balistique de l'entropie d'intrication, c'est-à-dire avant que le cône de lumière ait supposément atteint les bords du système et bien avant que l'entropie n'approche une éventuelle valeur d'équilibre. Le fait que l'entropie continue à grandir après que le rang a saturé montre que les valeurs dans le spectre continuent à se redistribuer parmi celles existantes. Cela se fait en conservant la structure universelle. Néanmoins, alors que dans les systèmes génériques cela conduit rapidement à un rétrécissement du spectre d'intrication autour de la distribution uniforme donnant l'entropie typique quasi-maximale, dans le cas du modèle PXP cela se fait très lentement. Cela suggère que la dynamique  $|\mathbb{Z}_2\rangle$  du modèle PXP implique un mécanisme dynamique qui freine ce rétrécissement du spectre d'intrication. Se poser la question de l'existence de l'équilibration revient alors à demander si ce mécanisme pourrait empêcher la convergence vers un spectre étroit.

Pour compléter l'information donnée par le rapport d'espacement moyen on trace la distribution complète  $P(r)$ , à différent instant autour de  $t_{\langle\bar{r}\rangle_{GOE}}$  d'abord (voir Fig. 6.5), puis à un temps beaucoup plus long (voir Fig. 6.6). On peut voir clairement l'établissement d'une distribution de type Wigner-Dyson avec une répulsion claire proche de  $t_{\langle\bar{r}\rangle_{GOE}}$  dès que le nombre de valeur singulière devient suffisant pour obtenir une bonne statistique. Au temps long la distribution de Wigner-Dyson est maintenue. Avec ce résultat on peut affirmer que la dynamique  $|\mathbb{Z}_2\rangle$  du modèle PXP randomise l'état des sous-systèmes de telle manière qu'ils exhibent rapidement un comportement

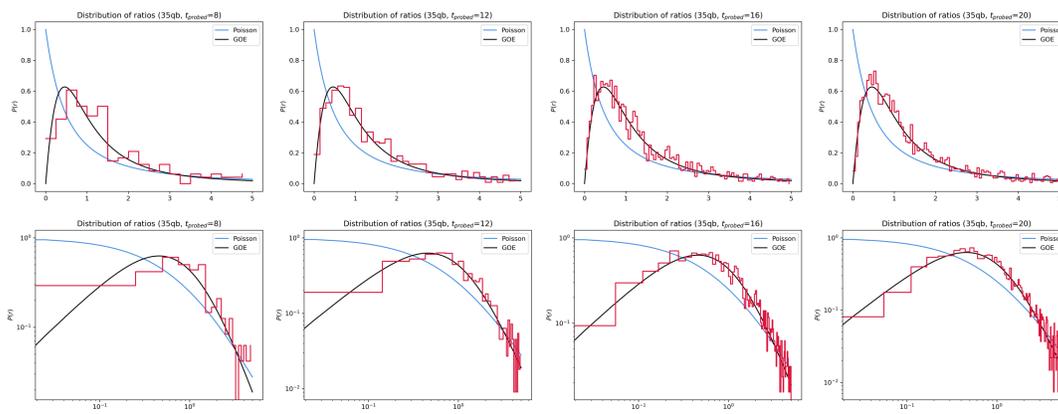


FIGURE 6.5 – Distribution des rapports d’espaceur moyen du spectre d’intrication à différents instants  $t = 8, 12, 14, 20$  au voisinage de  $t_{\langle \bar{r} \rangle}$  (35 qubits). (1ère ligne) échelle linéaire, (2ème ligne) échelle log-log.

de type matrice aléatoire. Contrairement aux systèmes génériques cela se fait dans un secteur de l’espace de Hilbert qui est fixé par l’état initial et par les interactions contraintes du modèle PXP.

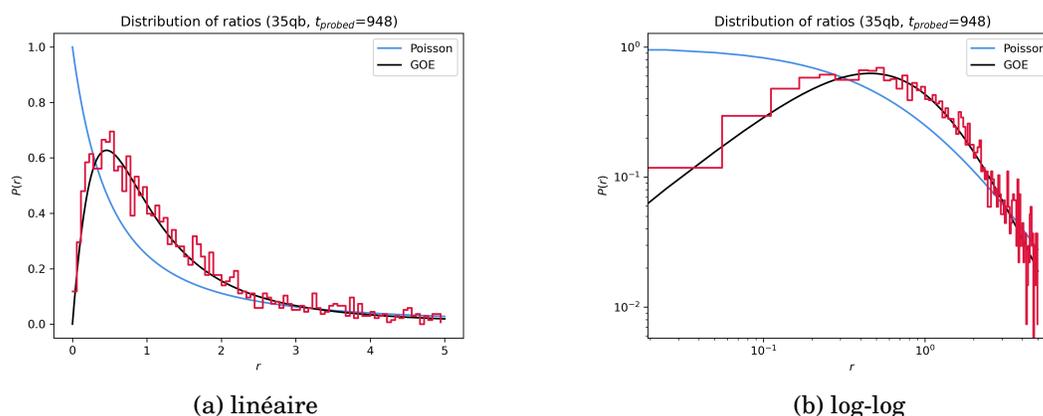


FIGURE 6.6 – Distribution des rapports d’espaceur moyen du spectre d’intrication au temps long  $t = 948$  (35 qubits).

Finissons sur une remarque concernant la thermalisation des sous-systèmes. La statistique des niveaux d’énergie suggère que le PXP thermalise (Wigner-Dyson). Néanmoins l’état  $|Z_2\rangle$  dans la base des états propres de l’énergie n’est distribué que sur une portion du spectre de mesure nulle, et cette superposition n’est pas concentré dans une fenêtre restreinte d’énergie ; de ce fait on ne peut pas s’attendre à ce que

l'état au temps long soit lui-même concentré dans une fenêtre d'énergie et donc exhibe des propriétés thermodynamiques au niveau des sous-systèmes. Notre étude vient confirmer cela en montrant que (i) quand bien même l'état à  $t$  s'est randomisé l'entropie d'intrication est loin de s'être stabilisée ce qui suggère que les autres observables non plus, (ii) de plus la dynamique ne produisant de mélange aléatoire que dans un secteur restreint déconnecté (la matrice densité n'atteint pas son rang maximal), l'entropie d'intrication ne peut pas atteindre sa valeur maximale qui, pour les systèmes chaotiques génériques, correspond à l'entropie thermodynamique des sous-systèmes. Il y a donc de fortes présomptions pour penser que même si la dynamique  $|\mathbb{Z}_2\rangle$  du modèle PXP venait à s'équilibrer l'état d'équilibre ne présente pas de comportement thermodynamique pour les observables des sous-systèmes. Ajoutons tout de même que le comportement de type matrice aléatoire des sous-systèmes suggère qu'au temps long la valeur moyenne des observables définies sur le secteur déconnecté pourrait être bien approximée par une moyenne d'ensemble sur ce sous-espace.

# Conclusion

Nos résultats de simulation de la dynamique de trempe pour le modèle PXP confirment que l'intrication croît anormalement lentement à partir de l'état  $|\mathbb{Z}_2\rangle$ . Toutes les phases de la croissance de l'entropie d'intrication sont beaucoup plus longues que dans le cas d'une dynamique chaotique générique : la phase balistique initiale et surtout la phase intermédiaire qui précède l'équilibre dans les systèmes génériques. Aux temps longs le comportement suggère l'apparition d'une saturation de l'entropie, à une valeur très inférieure à la valeur typique de Page pour une évolution générique. Cependant l'intervalle de temps étudié n'est pas suffisant pour affirmer avec certitude qu'il y a équilibration. Il est limité par la durée très importante des simulations. Une analyse de la dépendance en fonction de la taille du système pourrait fournir un résultat plus robuste sans avoir à étendre le temps de simulation.

Plus important, nous avons ensuite investigué l'apparition d'un comportement de type matrice aléatoire dans le spectre d'intrication. Nous avons trouvé que la répulsion commence à se manifester (saturation à  $\langle \tilde{r} \rangle_{GOE}$ ) très tôt, avant la fin de la phase balistique de l'intrication (comme pour les systèmes génériques), mais aussi avant la saturation du rang de la matrice densité ce qui n'avait jamais été observé ( $t_{\langle \tilde{r} \rangle_{GOE}} < t_{rank} < t_{LC,PXP}$ ). Ainsi on voit que, bien que cela soit un peu plus lent que dans les systèmes chaotiques génériques, la dynamique du modèle PXP randomise très rapidement les sous-systèmes et les maintient randomisé alors que de nouvelles valeurs continuent de se rajouter dans le spectre d'intrication. Nous avons observé clairement la distribution de Wigner-Dyson ce qui signifie que la théorie des matrices aléatoires décrit les corrélations locales dans le spectre d'intrication.

Enfin nous avons montré que la dynamique  $|\mathbb{Z}_2\rangle$  est unique car, bien qu'elle induise une randomisation des sous-systèmes, cela survient dans un sous-espace de

l'espace de Hilbert total. Cela se distingue donc clairement des systèmes chaotiques génériques. De plus ce résultat conforte l'idée que s'il existe une valeur d'équilibre pour l'entropie d'intrication elle devrait être très inférieure à la valeur typique de Page.

D'un point de vue expérimental, la répulsion mesurée par la statistique du spectre d'intrication est difficile à observer bien qu'en principe cela soit possible en réalisant la tomographie de l'état évolué. Ce protocole est coûteux en mesures mais les simulations montrent que le temps d'évolution à atteindre est accessible aux expériences avec atomes de Rydberg actuelles, avec un nombre de qubits supérieur à celui atteint dans les simulations [83]. Idéalement on voudrait trouver une quantité plus aisée à mesurer, comme par exemple une fonction de corrélation temporelle sur des observables locales, dont le comportement dépendrait des corrélations dans le spectre d'intrication. La probabilité de survie pourrait être un candidat à investiguer [55].

Par ailleurs il reste à explorer l'apparition éventuelle de corrélations longues distances dans le spectre d'intrication en utilisant par exemple le facteur de forme spectral. On pourrait alors trancher la question de l'apparition d'un comportement pleinement de type matrice aléatoire, et voir à quel moment de la croissance de l'entropie il survient.

Enfin la comparaison entre la croissance inhabituelle de l'entropie et la randomisation du spectre d'intrication dans le modèle PXP suggère que ces deux sondes sont plus indépendantes que ce que l'on pensait jusque-là. Comprendre - dans le cas du modèle PXP - à quels mécanismes microscopiques chacune est sensible pourrait permettre par exemple de comprendre laquelle de ces deux sonde détermine essentiellement le comportement des observables au temps long de ce type de système quantique inhabituel.

## **Annexe A**

# **Matériel Supplémentaire**

## **A.1 Méthode de réseaux de tenseurs pour l'évolution unitaire**

La simulation des systèmes quantiques à N-corps est une tâche particulièrement difficile. Cela tient essentiellement au fait que l'espace des états est exponentiellement grand avec le nombre de constituants. Le coût en mémoire est rapidement très élevé. Le développement de méthodes numériques efficaces est donc crucial pour aller plus loin dans notre compréhension de nouvelles phases quantiques de la matière, de nouvelles architectures de calcul quantique, ou bien de ce qui nous occupe ici c'est-à-dire la dynamique des systèmes à N corps.

Les méthodes basées sur les réseaux de tenseurs offrent des performances remarquables pour ce type de problèmes. Elles sont très variées. Néanmoins elles peuvent toujours se réduire à au moins l'un des deux ingrédients suivants, ou une combinaison des deux. D'un côté la représentation en réseau de tenseurs des états quantiques. Elle tire partie du fait que l'information contenue dans un état quantique est la plupart du temps très structurée. Cela se traduit par l'existence de corrélations quantiques. L'état produit de matrices (MPS) est un exemple d'une telle représentation compressée. De l'autre la représentation en réseau de tenseurs des opérateurs (hermitiens ou unitaires). Elles s'appuient généralement sur les symétries du systèmes et la propriété de localité des interactions. La décimation par bloc d'évolution temporelle (TEBD) est un exemple de méthode qui permet de simuler l'évolution d'un état sous forme de MPS en décomposant l'opérateur d'évolution en un produit de petits opérateurs d'évolution locaux.

### A.1.1 MPS

Un état produit de matrices est une représentation alternative d'un ket  $|\psi\rangle$  [86]. Elle est particulièrement utile pour les systèmes à 1 dimension impliquant de nombreux degrés de liberté, comme par exemple les systèmes composés d'un grand nombre de qubits. Pour construire une telle représentation on s'appuie sur 2 ingrédients : l'opération de *remodelage* basée sur la propriété de multilinéarité de l'espace des états, ainsi que l'opération de *décomposition aux valeurs singulières* d'une matrice (SVD).

*Remodelage & multilinéarité* – Considérons un système physique de grande taille composé de plusieurs systèmes simples ( $L$  qudits). Chacun d'eux possède un espace des états  $\mathcal{H}_i = \mathbb{C}^{d_i}$  de dimension  $d_i$ . L'espace de Hilbert du système entier  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_L$  est formé par leur produit tensoriel, et sera donc de dimension  $d = d_1 \times d_2 \times \dots \times d_L$ . C'est-à-dire qu'il implique toutes les combinaisons possibles des degrés de liberté locaux. Cette structure confère à tout état  $|\psi\rangle$  de  $\mathcal{H}$  la propriété d'être multilinéaire. Cela signifie que tout vecteur d'état (tenseur à 1 seul indice) peut être *remodelé* en un tenseur à  $k \leq L$  indices pourvu que le produit de leur dimension respective corresponde à la dimension totale de l'espace des états du système.

Prenons un état  $|\psi\rangle$  arbitraire, que l'on va noter  $\psi_j$ . En notant  $|j_i\rangle$  la base locale associée au site  $i$  on peut le décomposer dans la base locale produit tensoriel des  $L$  sites :  $|\psi\rangle = \sum_{j_1, \dots, j_L} \psi_{j_1 \dots j_L} |j_1 \dots j_L\rangle$ . À partir de là on peut par exemple le remodeler en un tenseur à 2 indices de telle manière à partitionner le système en séparant le 1er site (le plus à gauche) des autres,

$$\psi_j \rightarrow \psi_{j_1 j_2, \dots, L} \quad (\text{A.1})$$

La dimension de l'espace de Hilbert est bien préservée :  $d_1 \times d_{2, \dots, L} = d$ . Cela peut être représenté de façon diagrammatique (voir Fig.A.1a).

*Décomposition aux valeurs singulières & intrication* – Considérons maintenant une bipartition plus générale du système, par exemple une bipartition gauche-droite. Il se trouve qu'on peut toujours réécrire l'état  $|\psi\rangle$  dans une forme qui rend explicite la relation entre les degrés de liberté de la partie gauche et de la partie droite. C'est la décomposition de Schmidt :

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha} \Lambda_{\alpha} |\alpha\rangle_G \otimes |\alpha\rangle_D \quad (\text{A.2})$$

Les  $|\alpha\rangle_G$  (resp.  $|\alpha\rangle_D$ ) sont les degrés de libertés de la partie gauche (resp. de la partie droite). Les coefficients  $\{\Lambda_{\alpha}\}$ , qui sont réels et positifs, constituent le spectre d'intrication. Ils expriment le poids des corrélations quantiques entre les deux parties. Cette représentation peut être calculée effectivement en remodelant d'abord  $|\psi\rangle$  en

une matrice  $\psi_{j_G j_D}$ , puis en réalisant une décomposition aux valeurs singulières (SVD) de cette matrice (voir Fig.A.1) :

$$\psi_{j_G j_D} = \sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha}^{[G]j_G} \Lambda_{\alpha} \Upsilon_{\alpha}^{[D]\dagger j_D} \quad (\text{A.3})$$

où l'indice  $j_G \equiv j_1 \dots j_l$  implique tous les degrés de libertés de la partie gauche, et  $j_D \equiv j_{l+1} \dots j_L$  de la partie droite. De cette façon on retrouve les coefficients  $\Lambda_{\alpha}$ , appelées *valeurs de Schmidt*, ainsi que les degrés de liberté gauche  $|\alpha\rangle_G = \Gamma_{\alpha}^{[G]j_G} |j_1 \dots j_l\rangle_G$  et droite  $|\alpha\rangle_D = \Upsilon_{\alpha}^{[D]j_D} |j_{l+1} \dots j_L\rangle_D$ . L'indice  $\alpha$  est appelé *indice de lien*. Sa dimension correspond au nombre de valeurs de Schmidt et informe sur le degré de corrélation entre les deux parties.

*Construire un MPS* – On peut appliquer cette opération plusieurs fois pour complètement décomposer  $|\psi\rangle$  en un état produit de matrices. Pour cela on commence par remodeler la fonction d'onde pour séparer les degrés de liberté du 1er site ( $j_1$ ) des  $L - 1$  autres. On réalise ensuite une SVD, ce qui fait apparaître l'indice de lien  $\alpha_1$ , puis on recontracte la matrice de valeurs singulières avec la matrice singulière droite. La matrice résultante doit alors être remodelée pour séparer le 2ème site ( $j_2$ ) des suivants. L'indice de lien  $\alpha_1$  est fusionné avec l'indice physique  $j_2$ . On peut alors à nouveau appliquer une SVD et répéter le même algorithme. À chaque itération la matrice singulière gauche  $\Gamma^{[n]}$  est remodelée en un tenseur de rang 3 de façon à faire réapparaître l'indice physique  $j_n$  ( $\Gamma_{\alpha_{n+1}}^{[n]\beta_n} \rightarrow \Gamma_{\alpha_n \alpha_{n+1}}^{[n]j_n}$ ). En répétant l'opération  $L - 1$  fois on aboutit à une décomposition complète de  $|\psi\rangle$  en un réseau de tenseurs (voir Fig.A.1b)<sup>1</sup>,

$$|\psi\rangle = \sum_{j_1, \dots, j_L} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_L} \Lambda_{\alpha_1}^{[1]} \Gamma_{\alpha_1 \alpha_2}^{[1]j_1} \Lambda_{\alpha_2}^{[2]} \Gamma_{\alpha_2 \alpha_3}^{[2]j_2} \dots \Lambda_{\alpha_L}^{[L]} \Gamma_{\alpha_L \alpha_{L+1}}^{[L]j_L} \Lambda_{\alpha_{L+1}}^{[L+1]} |j_1 j_2 \dots j_L\rangle \quad (\text{A.4})$$

Les matrices de valeurs singulières aux extrémités sont triviales  $\Lambda_{\alpha_1}^{[1]} = \Lambda_{\alpha_{L+1}}^{[L+1]} = (1)$ , et sont rajoutées *ad hoc* pour des raisons pratiques lors de l'implémentation numérique de la méthode. Par ailleurs puisque les valeurs singulières  $\Lambda_{\alpha}$  constituent le spectre d'intrication associé à une bipartition donnée, on peut interpréter le MPS comme une représentation explicite de la structure d'intrication de l'état  $|\psi\rangle$ .

*Normalisation & formes canoniques* – La forme du MPS à l'équation A.4 est appelée forme canonique (Fig.A.1b). Comme dans la décomposition de Schmidt, chacune des matrices  $\Lambda^{[n]}$  contient toute l'information sur la normalisation de l'état  $|\psi\rangle$ . C'est-à-dire que  $\text{tr} \Lambda^{[n]} = 1$ .

Néanmoins cette forme n'est pas la plus pratique si on utilise des méthodes pour lesquelles le MPS doit être régulièrement mis à jour localement. C'est le cas par exemple de la méthode TEBD pour représenter l'évolution temporelle. Il est alors plus pratique

1. La dernière SVD donne une matrice singulière droite mais par convention on harmonise la notation tel que  $\Upsilon_{\alpha_N \alpha_{N+1}}^{[N]j_N} \equiv \Gamma_{\alpha_N \alpha_{N+1}}^{[N]j_N}$ .

de manipuler et stocker directement les tenseurs  $\Gamma^{[n]} \Lambda^{[n+1]} = B^{[n]}$  (voir Fig.A.2). En effet lors d'une opération locale la normalisation pourra être mise à jour directement en évitant des opérations inutiles (contractions et SVDs). Cette forme est appelée *forme canonique droite* (voir Fig.A.1c). Notons qu'il existe une forme canonique gauche équivalente<sup>2</sup>. Notons qu'on peut stocker en parallèle les matrices  $\Lambda^{[n]}$  si nécessaire, de façon à pouvoir rapidement investiguer la structure d'intrication.

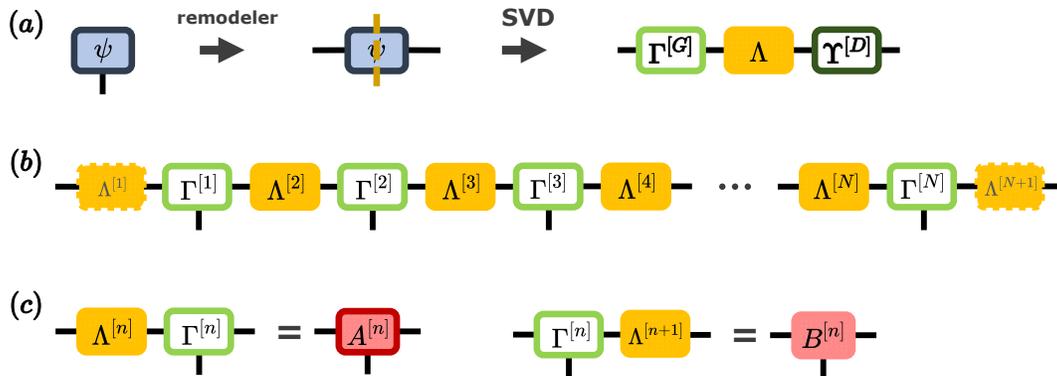


FIGURE A.1 – (a) remodelage et décomposition aux valeurs singulières de la fonction d'onde. (b) forme canonique de l'état produit de matrices, où deux matrices  $\Lambda$  triviales ont été rajoutées aux extrémités (pointillées). (c) Transformation pour passer à la forme canonique gauche ( $A$ ) ou droite ( $B$ ).

*Compression & efficacité numérique* – L'intérêt principale de la représentation MPS est qu'elle permet une représentation compressée des états quantiques, et par conséquent des simulations numériques particulièrement efficaces. L'idée est que l'on peut tronquer les valeurs singulières les plus faibles, réduisant de fait la dimension du sous-espace local correspondant. Si on appelle  $\chi$  le nombre de valeurs singulière (i.e. la dimension de l'indice de lien) cela correspond à poser un  $\chi_{\text{tronc.}} < \chi$ . Les états suivant la *loi d'aire* d'intrication peuvent être fortement compressés car leur spectre de valeurs singulières ne possède qu'un petit nombre de valeurs significatives. On peut donc tronquer une grande partie du spectre tout en conservant une excellente approximation de l'état initial. La représentation ne requiert alors qu'un nombre de coefficients polynomiale avec le nombre sites. La représentation MPS atteint sa limite lorsque l'intrication suit une *loi de volume*. Dans ce cas la plupart des valeurs singulières sont élevées et ne peuvent être tronquées sans modifier significativement l'état. Il faut alors un nombre exponentiel de coefficients pour le représenter. Enfin un MPS ne requiert qu'un nombre polynomiale d'opération pour être construit.

Dans le cas du modèle PXP on ne réalise aucune compression de l'état car on veut garder le plus grand nombre possible de valeurs singulières pour être d'avoir une bonne statistique (voir chapitre 4).

2. En effet il y a un choix arbitraire ici. On aurait tout aussi bien pû utiliser la contraction  $\Lambda^{[n]} \Gamma^{[n]} = A^{[n]}$ . C'est la forme canonique gauche.

## A.1.2 TEBD

La méthode de décimation par blocs d'évolution temporelle permet de simuler l'évolution unitaire, c'est-à-dire évaluer  $|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi_0\rangle$ . Elle est pleinement efficace lorsqu'on la combine avec la représentation MPS [87].

L'idée de base est de décomposer l'opérateur d'évolution en un produit de petites opérations unitaires locales. Ceci peut être réalisé facilement dans le cas où l'évolution est générée par un hamiltonien local, en s'appuyant sur la décomposition de Suzuki-Trotter (éq.A.8).

Cette décomposition n'est valide que pour un pas de temps  $\delta t$  suffisamment petit. Pour cette raison l'implémentation de la méthode TEBD requiert d'abord de discrétiser l'évolution en petit pas de temps avant d'utiliser Suzuki-Trotter pour obtenir la représentation finale de l'opérateur d'évolution dite *en mur de briques* (voir Fig.A.2).

*Décomposition en petits pas de temps* – Considérons l'hamiltonien  $H$  indépendant du temps. Dans ce cas on est assuré qu'il commute avec lui-même. On peut alors diviser l'intervalle de temps sur lequel se déroule l'évolution en petites étapes de temps,  $\delta t = t/n$ , et l'opérateur d'évolution devient,

$$U(t) = e^{-iHt} = \left( e^{-i\frac{t}{n}H} \right)^n = U_{\delta t}^n \quad (\text{A.5})$$

*Décomposition en "mur de briques"* – L'évolution sur 1 pas de temps  $U_{\delta t}$  peut ensuite être décomposée en un produit de petites unitaires locales. En effet, comme l'hamiltonien  $H = \sum_{j=1}^L h_j$  est local, l'opérateur d'évolution prend la forme suivante :

$$U_{\delta t} = e^{-i\delta t \sum_{j=1}^L h_j} \quad (\text{A.6})$$

Cela suggère qu'on peut décomposer  $U_{\delta t}$  en un produit d'opérateurs locaux avec une bonne approximation. Pour cela on commence par regrouper les termes dans l'hamiltonien qui commutent entre eux. C'est-à-dire tout les 3 sites dans le cas du modèle PXP ( $h_j = PX_jP$ ) :

$$U_{\delta t} = e^{-i\delta t \left( \sum_{j=3 \bmod 0} h_j + \sum_{j=3 \bmod 1} h_j + \sum_{j=3 \bmod 2} h_j \right)} \quad (\text{A.7})$$

Chacun des groupes ne commute pas avec l'autre, mais en utilisant la formule de Suzuki-Trotter au 1er ordre<sup>3</sup>,

$$e^{\delta t(A+B)} = e^{\delta t A} e^{\delta t B} + \mathcal{O}(\delta t^2) \quad (\text{A.8})$$

---

3. valable même si  $A$  et  $B$  ne commutent pas tant que  $\delta t$  est suffisamment petit.

on peut réécrire  $U$  en un produit de 3 unitaires avec une erreur maîtrisée,

$$U_{\delta t} = \left[ e^{-i\delta t \sum_{j=3 \bmod 0} h_j} \right] \left[ e^{-it \sum_{j=3 \bmod 1} h_j} \right] \left[ e^{-it \sum_{j=3 \bmod 2} h_j} \right] + \mathcal{O}(\delta t^2) \quad (\text{A.9})$$

Enfin, puisque pour chacune de ces unitaires les  $h_j$  commutent, on peut utiliser le fait que,

$$e^{A+B} = e^A e^B, \quad \text{si } [A, B] = 0 \quad (\text{A.10})$$

pour finalement les décomposer exactement en un produit d'opérateurs locaux appelés *portes de Trotter*,

$$U_{\delta t} = \left[ \prod_{j=3 \bmod 0} e^{-it h_j} \right] \left[ \prod_{j=3 \bmod 1} e^{-it h_j} \right] \left[ \prod_{j=3 \bmod 2} e^{-it h_j} \right] + \mathcal{O}(\delta t^2). \quad (\text{A.11})$$

Cette décomposition peut être représentée sous forme diagrammatique comme un circuit pour lequel l'état initial est un MPS sur lequel vont s'appliquer des portes unitaires locales (voir Fig.A.2). La forme canonique du MPS est préservée lors de l'application successive de ces portes.

Notons qu'il existe aussi une décomposition de Suzuki-Trotter au 2<sup>nd</sup> ordre dans le cas où l'on recherche une précision supérieure. Néanmoins elle implique *in fine* un plus grand nombre d'opérations.

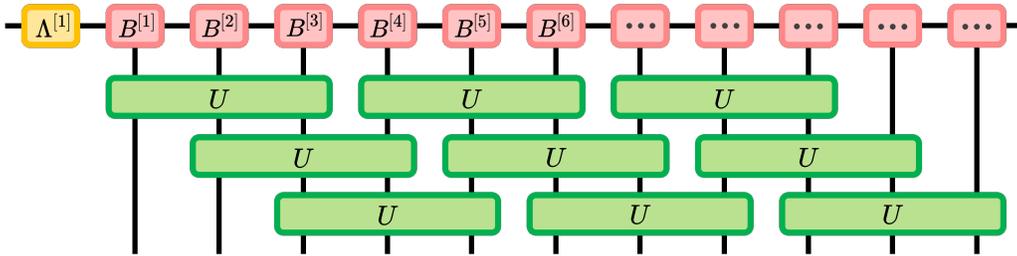


FIGURE A.2 – évolution dans le temps.

*Contraction locale d'une porte de Trotter sur le MPS* – Il nous reste à expliquer l'algorithme de contraction d'une porte de Trotter sur le MPS. Pour qu'un algorithme de contraction de réseau de tenseurs soit efficace on veut généralement éviter de faire grossir trop vite les tenseurs.

Dans le cas du modèle PXP une porte de Trotter s'applique sur 3 sites. Il est plus judicieux de commencer par contracter les 3 tenseurs correspondant à ces sites (voir Fig.A.3). Cela se fait en deux contractions successives : on contracte  $B^{[n-1]}$  avec  $B^{[n]}$ , puis le tenseur résultant avec  $B^{[n+1]}$ . On peut ensuite contracter ce tenseur à 3 sites avec la porte de Trotter (on obtient  $C$ ).

L'étape suivante consiste à retrouver la représentation MPS. Puisque la porte de Trotter implique 3 sites cela nécessite deux SVDs successives. La première SVD vise à séparer le site de gauche des deux autres. Pour cela il est nécessaire de faire un

remodelage judicieux, c'est-à-dire fusionner l'indice physique du 1er site avec l'indice de lien de gauche, et les indices physiques des deux autres avec l'indice de lien de droite. Comme on utilise la forme canonique droite du MPS, toute SVD va bien donner une matrice singulière droite dans la forme canonique droite mais aussi une matrice singulière gauche dans la forme canonique gauche ( $\tilde{A}$ ). Cette forme est dite *mixte*. Il faut donc transformer cette dernière en forme canonique droite  $\tilde{B}$ . On recontracte ensuite la matrice de valeur singulière avec la matrice singulière droite, puis le tout peut être à son tour remodelé de façon à isoler l'indice associé au 2ème site du 3ème, avant d'appliquer la deuxième SVD. Là encore on obtient une forme canonique gauche qui doit être transformée en forme canonique droite. Pour faire cela, on peut en principe effectuer la contraction,

$$\tilde{B}_{\alpha_n \alpha_{n+1}}^{[n]j_n} = (\tilde{\Lambda}_{\alpha_n \alpha_n}^{[n]})^{-1} \tilde{A}_{\alpha_n \alpha_{n+1}}^{[n]j_n} \tilde{\Lambda}_{\alpha_{n+1} \alpha_{n+1}}^{[n+1]} \quad (\text{A.12})$$

Néanmoins cela implique de prendre l'inverse d'une matrice ce qui est numériquement instable lorsque la matrice contient de petits coefficients. À la place on peut utiliser l'astuce suivante : on contracte le tenseur initiale (avant SVD) avec la matrice singulière droite obtenue après SVD. Par exemple, selon la Fig.A.3, on a que

$$\tilde{B}_{\alpha_n \alpha_{n+1}}^{[n]j_n} = \tilde{C}_{\alpha_n}^{j_n \beta_{n+1}} \tilde{B}_{\alpha_{n+1}}^{[n+1] \dagger \beta_{n+1}} \quad , \quad \beta_{n+1} \equiv (j_{n+1}, \alpha_{n+2}) . \quad (\text{A.13})$$

On obtient alors la forme canonique droite désirée. Finalement, on est capable de retrouver le MPS mis à jour pour les 3 sites dans leur forme canonique droite. L'intrication encodée dans les matrices  $\tilde{\Lambda}$  a changé.

*Sources d'erreurs* – Les sources d'erreurs dans les méthodes basées sur la décomposition de Trotter sont de trois types :

- **taille du pas de temps  $\delta t$ .**
- **degré de non-commutation des termes locaux du hamiltonien.**
- **erreur d'arrondi numérique.** Néanmoins en évitant d'avoir à calculer l'inverse des matrices de valeurs singulières on a éliminé la source la plus probable d'instabilité numérique de ce type.

Les deux premiers types d'erreurs sont intrinsèques à la décomposition de Trotter et sont explicitement définis dans la borne suivante. Si on appelle  $T_1(\delta t) = \prod_{j=1}^L e^{-i\delta t h_j}$  l'approximation de Trotter au 1er ordre de l'opérateur d'évolution  $U_{\delta t}$ , alors l'erreur est bornée supérieurement par [88],

$$\|T_1(\delta t) - U_{\delta t}\| \leq \frac{\delta t^2}{2} \sum_{j=1}^L \left\| \left[ \sum_{i=j+1}^L h_i, h_j \right] \right\| \quad (\text{A.14})$$

C'est-à-dire que l'erreur est au plus proportionnelle à  $\delta t^2$  et dépend du degré de commutation entre les termes du hamiltonien. De manière générale il faut considérer cette borne avec précaution, l'erreur de Trotter étant parfois surestimée. Néanmoins

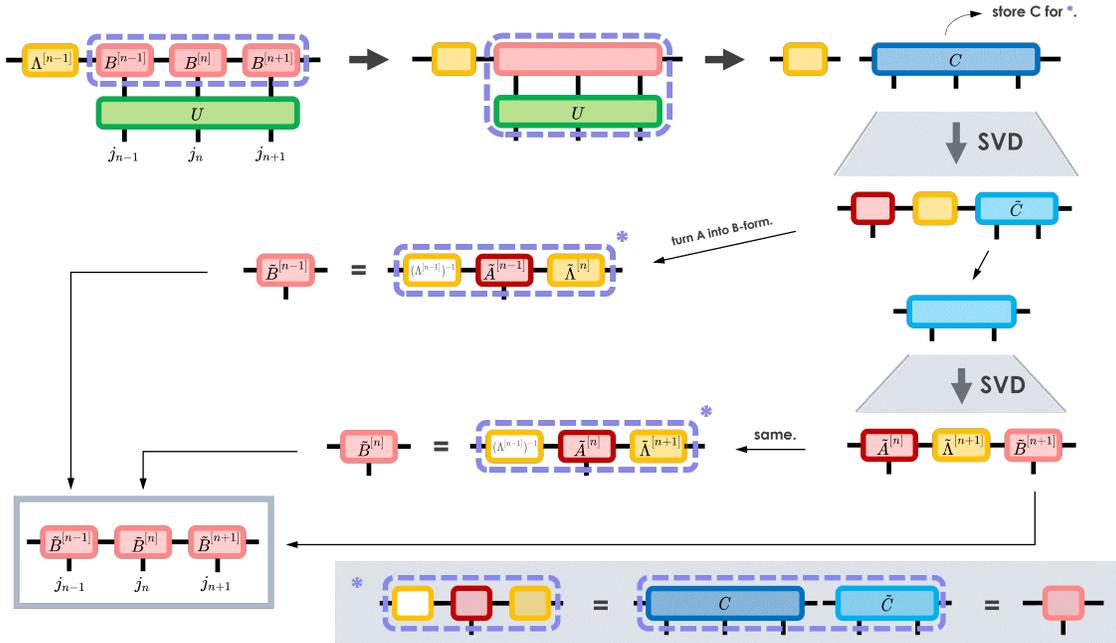


FIGURE A.3 – contraction d'une porte de Trotter sur 3 site.

pour des hamiltoniens locaux de nombreux résultats numériques laissent penser qu'elle est précise.

## Matrice PXP

Pour l'implémentation numérique on a utilisé à la place des termes  $PXP$  des termes  $PYP$  équivalents à une transformation de jauge près. La physique restera donc la même. Ce choix présente un avantage numérique significatif étant donné que l'on a à stocker uniquement des nombres réels. On sauve donc du temps de calcul et de la mémoire.

En effet, comme le terme  $PYP$  est représenté par la matrice :

$$P_{i-1}Y_iP_{i+1} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & -i & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & i & 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix}_{8 \times 8} \quad (\text{A.15})$$

lorsqu'on écrit l'opérateur d'évolution  $U = e^{-iH_{PY}t}$  les nombres imaginaires disparaissent.

## A.2 Introduction à la Théorie des Matrices Aléatoires

La théorie des matrices aléatoires fournit l'outillage pour caractériser le "comportement typique" (statistique) de matrices. Plus précisément elle montre que toutes les matrices construites à partir des mêmes hypothèses de base vont exhiber des caractéristiques communes dites "universelles". Une matrice étant caractérisée en particulier par ses valeurs et vecteurs propres, ce sont ces quantités qui vont avoir un comportement universel. En physique ces propriétés universelles peuvent soit servir de sonde, comme dans le cas des systèmes chaotiques, ou bien expliquer comment un même comportement peut émerger de systèmes *a priori* très différents.

*Qu'est-ce qu'une matrice aléatoire ?* – c'est une matrice, appelons-la  $M$ , dont les éléments sont des nombres - réels ou complexes<sup>4</sup> - choisis aléatoirement et indépendamment en suivant une distribution de probabilité donnée. On peut demander en plus que la matrice ait certaines propriétés globales, par exemple qu'elle soit symétrique ou bien invariante sous une transformation donnée.

*Ensemble de matrices aléatoires* – L'ensemble de toutes les matrices possibles suivant un jeu de règles donné forment un ensemble de matrices aléatoires. Différents ensembles ont été identifiés et étudiés par les mathématiciens.

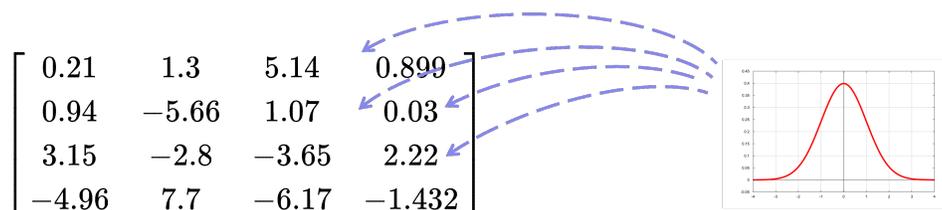


FIGURE A.4 – Exemple schématique d'une matrice aléatoire de nombre réels construite en suivant une loi gaussienne (GOE).

On pourrait poser la question suivante : *supposons qu'on nous donne une matrice arbitraire, est-il possible de déterminer si elle appartient à un ensemble donné de matrices aléatoires ?*

La réponse à cette question est oui. Cela s'explique par le fait que les matrices aléatoires d'un même ensemble partagent des *propriétés universelles*. Pour le comprendre on peut s'intéresser aux éléments de la matrice  $M$ . Puisqu'ils sont aléatoirement échantillonnés à partir d'une *même* distribution et *indépendamment* les uns des autres, alors la matrice doit être aléatoire aussi. On doit pouvoir lui associer une

4. voire même quaternioniques !

distribution de probabilité  $P$  de telle façon qu'on puisse la considérer à son tour comme une variable aléatoire. Une manière simple de le faire est de considérer la *distribution de probabilité conjointe* de tous les éléments de matrice. Si  $M$  est de taille  $m \times n$ , et  $x_{ij}$  est un de ses éléments, alors comme ils sont indépendamment et identiquement distribués la distribution conjointe s'écrit :

$$P[M] := P(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{mn}) = P(x_{11})P(x_{12}) \dots P(x_{mn}) \quad (\text{A.16})$$

Cette distribution est *universelle* pour toute matrice définie à partir des mêmes postulats que  $M$ . Autrement dit elle ne dépend pas des détails de la matrice. Néanmoins, analytiquement elle n'est pas toujours simple à dériver, et dans les faits il faut un large échantillon de matrices pour la vérifier.

Heureusement il existe d'autres propriétés universelles plus pratiques à utiliser, liées notamment au spectre des valeurs propres (et aux vecteurs propres associés). Nous allons les détailler dans le cas d'ensemble de matrices aléatoires particuliers : les ensembles gaussiens et l'ensemble diagonal. Ces ensembles sont particulièrement pertinent pour étudier les systèmes chaotiques.

### Ensembles Gaussiens

Les ensembles gaussiens sont des ensembles de matrices aléatoires carrées ( $n \times n$ ) dont les éléments sont choisis i.i.d.<sup>5</sup> en suivant une distribution de probabilité gaussienne centrée en 0 et de variance 1 (notée  $\mathcal{N}(0, 1)$ ). Selon que les éléments sont réels ou complexes<sup>6</sup>, il y a  $\beta = 1$  ou  $\beta = 2$ <sup>7</sup> nombres réels à tirer aléatoirement, et on a affaire à l'ensemble gaussien *orthogonal* (GOE) ou *unitaire* (GUE). En outre on exige que les valeurs propres soient réelles. Pour cela il suffit de symétriser la matrice aléatoire gaussienne  $M$  dans le cas où  $x_{ij} \in \mathbb{R}$ , et de la rendre hermitienne dans le cas où  $x_{ij} \in \mathbb{C}$ ,

$$\text{GOE}(\mathbb{R}) : \quad \frac{M + M^T}{2} = \tilde{M} \quad \Rightarrow \quad \tilde{M}^T = \tilde{M} \quad (\text{A.17})$$

$$\text{GUE}(\mathbb{C}) : \quad \frac{M + M^\dagger}{2} = \tilde{M} \quad \Rightarrow \quad \tilde{M}^\dagger = \tilde{M}. \quad (\text{A.18})$$

La distribution conjointe des éléments de matrice pour ces ensembles est proportionnelle à :

$$P[\tilde{M}] \propto e^{-\frac{1}{2}\text{tr}\tilde{M}^2} \quad (\text{A.19})$$

5. indépendamment et identiquement distribués

6. il existe aussi le cas où les éléments sont des quaternions, que nous ne détaillons pas ici.

7. ce paramètre  $\beta$  désigne le nombre de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées nécessaires pour définir un élément de matrice. On l'appelle *nombre de Dyson*.

à un facteur de normalisation près. Comme la trace est invariante par rotation i.e. par changement de base, cette distribution conjointe est invariante par transformation orthogonale (resp. unitaire) pour toute matrice  $\tilde{M}$  symétrique (resp. hermitienne). Cela explique les noms donnés à ces deux ensembles. Les matrices sont appelées *matrices de Wigner*.

Alors que les éléments de matrices sont indépendants, les valeurs propres des matrices des ensembles gaussiens sont corrélées. Cela se traduit d'abord par le fait que leur distribution de probabilité conjointe  $P(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  n'est pas factorisable. De celle-ci on peut dériver plusieurs quantités caractéristiques universelles qui témoignent de ces corrélations.

*Distribution des valeurs propres* – Les valeurs propres des ensembles gaussiens ont tendance à se concentrer dans l'intervalle  $[-\sqrt{2\beta n}, \sqrt{2\beta n}]$  qui dépend de la taille de la matrice. Pour décrire leur répartition on peut calculer la densité moyenne de valeurs propres  $\langle \text{DOS}(\lambda) \rangle$  autour d'une valeur  $\lambda$  donnée (aussi appelée densité spectrale moyenne). Il suffit de compter le nombre de valeurs propres égales à  $\lambda$  et à normaliser par  $n$  le nombre total de valeurs propres. Pour éviter que le résultat dépende de la taille de la matrice on renormalise au préalable chaque valeur propre par un nombre proportionnel à  $n$ , par exemple  $\lambda \rightarrow \tilde{\lambda} = \lambda/\sqrt{\beta n}$ <sup>8</sup>. Dans la limite où l'on considère des matrices de grande taille ( $n \rightarrow \infty$ ) cette densité spectrale moyenne vaut,

$$\langle \text{DOS}(\lambda) \rangle_{n \rightarrow \infty} = \left\langle \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta(\tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}_i) \right\rangle_{n \rightarrow \infty} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - \tilde{\lambda}^2} \quad (\text{A.20})$$

et prend une forme de demi-cercle caractéristique appelée *semicercle de Wigner*. (voir Fig.A.5).

*Distribution des espacements* – Considérons l'ensemble des valeurs propres ordonnées en ordre décroissant  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$ . On désigne par  $s = \lambda_i - \lambda_{i-1}$  l'espacement entre deux valeurs propres adjacentes. La probabilité qu'il existe un espacement d'une valeur  $s$  donnée est,

$$\text{GOE : } P_{GOE}(s) = \frac{\pi}{2} s e^{-\frac{\pi}{4} s^2} \quad (\text{A.21})$$

$$\text{GUE : } P_{GUE}(s) = \frac{32}{\pi^2} s^2 e^{-\frac{4}{\pi} s^2}. \quad (\text{A.22})$$

et est appelée *distribution de Wigner-Dyson* (ou "hypothèse de Wigner"). Dans le cas où on utilise ces ensembles pour décrire l'hamiltonien d'un système physique, la répulsion peut être interprétée physiquement comme un anticroisement généralisé résultant du couplage (aléatoire) entre tous les niveaux d'énergie [90].

---

8. Dans ce cas les valeurs seront distribuées dans l'intervalle  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

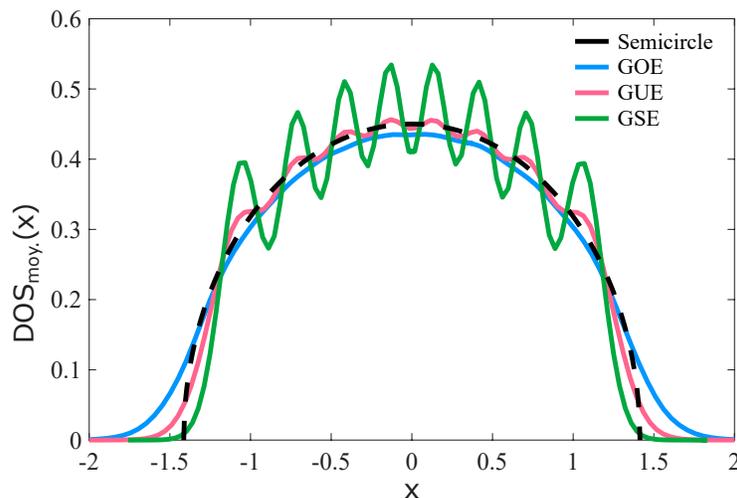


FIGURE A.5 – Densité spectrale moyenne renormalisé pour 3 matrices dans GOE, GUE et GSE respectivement ( $n = 8$ ). Quand  $n \rightarrow \infty$  la distribution tend vers le semicercle de Wigner dans l'intervalle  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$  (figure tirée de [89]).

Remarquons enfin que tout hamiltonien peut être rendu diagonale tel que ses vecteurs propres forment une base. La théorie des matrices aléatoires spécifie alors la statistique de ses valeurs propres et vecteurs propres. Pourtant dans cette base l'hamiltonien est trivial et ne ressemble pas à une matrice aléatoire. La raison est que les énoncés de la RMT valent pour un *ensemble* d'hamiltoniens aléatoires tirés aléatoirement dans une base fixée. Ainsi quand bien même on choisirait de les écrire dans la base propre de l'un d'entre eux, pour tous les autres cette base n'aurait rien de spéciale [29].

### Ensemble de Wishart-Laguerre

L'ensemble de Wishart-Laguerre<sup>9</sup> est un ensemble de matrices aléatoires hermitiennes et positives semi-définies. Il permet de décrire le comportement d'une matrice densité tirée au hasard selon une distribution uniforme (mesure de Haar).

Une matrice de Wishart est une matrice carrée  $\rho_{n \times n}$  contruite à partir d'une matrice aléatoire rectangulaire  $\Psi_{n \times m}$  dont les entrées peuvent être réelles ou complexes<sup>10</sup>, indépendamment et identiquement distribuée selon une distribution normale  $N(0, 1)$ . Si on prend le cas où les entrées  $\Psi_{ij} \in \mathbb{R}$  alors,

$$\rho = \Psi\Psi^T \tag{A.23}$$

9. Parfois désigné simplement comme ensemble de Laguerre (LOE, LUE, LSE).

10. voire quaternioniques.

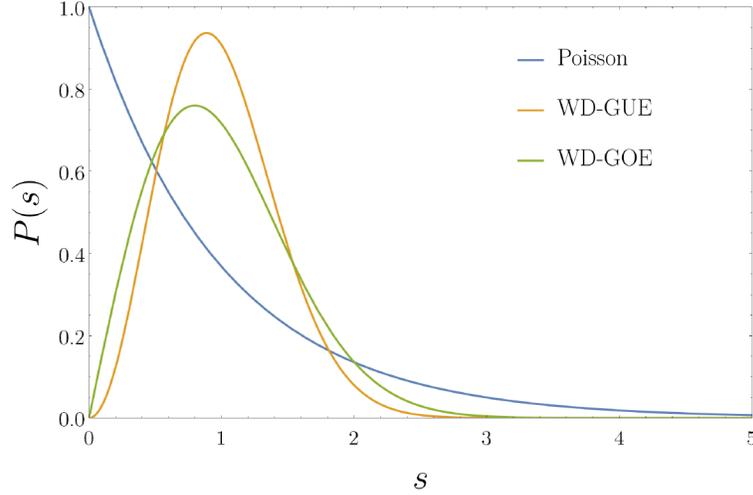


FIGURE A.6 – Distribution des espacements entre valeurs propres adjacentes pour GOE et GUE (figure tirée de [91]).

Ainsi par définition les matrices de Wishart sont hermitiennes, positives semi-définies et invariantes par rotation (orthogonale ou unitaire selon qu'elles sont réelles ou complexes). À la différence des ensembles gaussien orthogonaux et unitaires les matrices de Wishart ont ainsi des valeurs propres  $\{p_i\}$  positives ou nulles ( $0 \leq p$ ).

On a supposé que  $n \leq m$  sans perte de généralité<sup>11</sup>. Le rapport  $y = n/m$  détermine les caractéristiques spectrales de  $\rho$  (si  $\rho$  était une matrice densité réduite  $y$  définirait la bipartition). Ainsi les valeurs propres sont concentrés dans l'intervalle  $[\alpha_-, \alpha_+]$ , avec  $\alpha_{\pm} = (1 \pm \sqrt{y})^2$ .

*Distribution des valeurs propres* – La densité spectrale moyenne n'est pas la même que GOE/GUE. Dans la limite où  $n, m \rightarrow \infty$ , elle obéit à la loi de Marchenko-Pastur,

$$\langle \text{DOS}(p) \rangle_{n,m \rightarrow \infty} = \frac{1}{m} \mathcal{D}_{MP}(\tilde{p}) \quad (\text{A.24})$$

avec :

$$\mathcal{D}_{MP}(\tilde{p}) = \frac{1}{2\pi y \tilde{p}} \sqrt{(\tilde{p} - \alpha_-)(\alpha_+ - \tilde{p})}. \quad (\text{A.25})$$

où  $\tilde{p} = p/M$ . Cette distribution est indépendante de l'indice de Dyson  $\beta$ . Elle ne dépend que du rapport  $y$  (la bipartition). Dans le cas où  $n = m$  (bipartition égale), on a que

11. le rang de  $\rho$  est donc borné par le rang "ligne" de  $\Psi$ , qui est égale à sa dimension. Au contraire si on avait  $n > m$  le rang de  $\rho$  serait limité par le rang colonne,  $\rho$  aurait donc un rang inférieur à sa dimension.

$y = 1$  et  $p \in [0, 4]$ , et alors la distribution de Marchenko-Pastur prend la forme simple,

$$\mathcal{D}_{MP}^{n=m}(p) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4 - \tilde{p}}{\tilde{p}}}. \quad (\text{A.26})$$

Notons que pour une matrice densité réduite il y a déjà une normalisation (telle que  $\text{tr}(\rho) = 1$ ). Les valeurs propres sont donc entre 0 et 1. Pour retrouver la correspondance avec l'expression de la distribution de Marchenko-Pastur ci-dessus il faut simplement renormaliser les valeurs propres avant de faire l'histogramme,  $\tilde{p} = 4p/p_{max}$ .

*Distribution des espacements* – Les corrélations dans le spectre sont par contre de la même nature que dans les ensembles gaussien orthonaux et unitaires. La distribution des espacements est donc la distribution de Wigner-Dyson (eq.A.22).

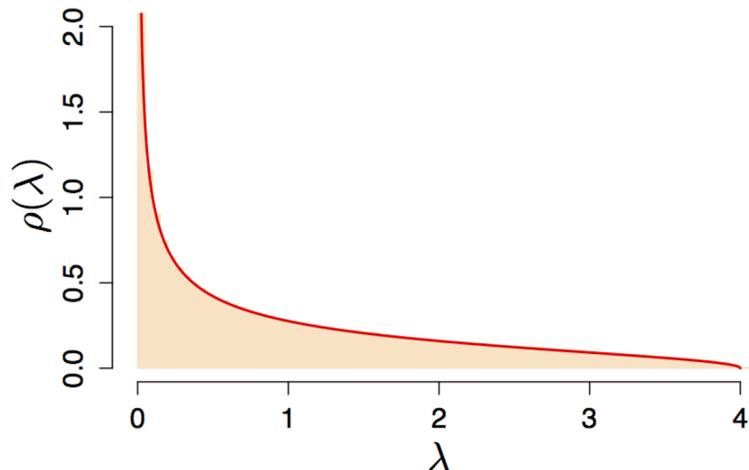


FIGURE A.7 – Densité spectrale moyenne d'une matrice de l'ensemble de Wishart-Laguerre, décrite par la distribution de Marchenko-Pastur pour un rapport de forme  $y = 1$ . Ici  $\lambda = \tilde{p}$  désigne les valeurs propres normalisées.

### Ensemble Diagonal

L'ensemble diagonal est l'ensemble de toutes les matrices aléatoires pour lesquelles les entrées sur la diagonale sont réelles indépendamment et identiquement distribuées selon une loi normale, et les entrées hors-diagonales sont nulles. Par définition le spectre de ces matrices ne présente pas de corrélations et la distribution des espacements  $s$  est décrite par la loi de Poisson,

$$P_{Poisson}(s) = e^{-s}. \quad (\text{A.27})$$

### Dépliage du spectre & distribution des ratios

Lorsqu'on étudie les propriétés statistiques spectrales de matrices de taille finie il est nécessaire de prétraiter le spectre par une procédure appelée *dépliage* [92]. In fine on veut pouvoir comparer les propriétés statistiques de la matrice d'intérêt avec les résultats de la théorie des matrices aléatoires qui sont normalisés. Il faut donc a priori normaliser le spectre. Néanmoins pour les matrices de taille finie le spectre n'est pas uniforme, souvent il est moins dense aux bords qu'au centre. Ce qui va causer des fluctuations indésirables aux bords lors de l'histogrammage. Pour remédier à cela il faut renormaliser localement le spectre par la densité d'état. On peut additionnellement tronquer les valeurs extrêmes du spectre. De nombreuses méthodes existent. Néanmoins ces procédures de lissage des données peuvent introduire des biais et fausser l'interprétation des résultats. Pour contourner ces problèmes, dans le cas de la distribution des espacements adjacents, [74] ont suggéré d'utiliser le ratio des espacements adjacents à la place. Dans [75] les distributions correspondantes pour les ensembles gaussiens et diagonaux ont été dérivées (voir 4). Elle évitent d'avoir à réaliser la procédure de dépliage du spectre.

# Bibliographie

- [1] Xiao-Gang Wen. Topological order : From long-range entangled quantum matter to a unified origin of light and electrons. *ISRN Condensed Matter Physics* **2013**, 1–20 (2013). [cf. p. 1]
- [2] M. Z. Hasan et C. L. Kane. Colloquium : Topological insulators. *Reviews of Modern Physics* **82**, 3045–3067 (2010). [cf. p. 1]
- [3] Ady Stern. Anyons and the quantum hall effect—a pedagogical review. *Annals of Physics* **323**, 204–249 (2008). [cf. p. 1]
- [4] Román Orús. A practical introduction to tensor networks : Matrix product states and projected entangled pair states. *Annals of Physics* **349**, 117–158 (2014). [cf. p. 1]
- [5] Michael A. Nielsen et Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, (2012). [cf. p. 1]
- [6] Luigi Amico, Rosario Fazio, Andreas Osterloh et Vlatko Vedral. Entanglement in many-body systems. *Reviews of Modern Physics* **80**, 517–576 (2008). [cf. p. 1]
- [7] Bei Zeng, Xie Chen, Duan-Lu Zhou et Xiao-Gang Wen. *Quantum Information Meets Quantum Matter*. Springer New York, (2019). [cf. p. 1]
- [8] Beni Yoshida. *Studying Many-body Physics Through Coding Theory*. Thèse de Doctorat, Massachusetts Institute of Technology, (2012). [cf. p. 1]
- [9] Claude N. Cohen-Tannoudji. Nobel lecture : Manipulating atoms with photons. *Reviews of Modern Physics* **70**, 707–719 (1998). [cf. p. 1]
- [10] J. M. Raimond, M. Brune et S. Haroche. Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity. *Reviews of Modern Physics* **73**, 565–582 (2001). [cf. p. 1]
- [11] D. Leibfried, R. Blatt, C. Monroe et D. Wineland. Quantum dynamics of single trapped ions. *Reviews of Modern Physics* **75**, 281–324 (2003). [cf. p. 1]
- [12] John Preskill. Reliable quantum computers. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **454**, 385–410 (1998). [cf. p. 1]

- [13] T. D. Ladd, F. Jelezko, R. Laflamme, Y. Nakamura, C. Monroe et J. L. O’Brien. Quantum computers. *Nature* **464**, 45–53 (2010). [cf. p. 1]
- [14] John Preskill. Quantum computing in the nisq era and beyond. *Quantum* **2**, 79 (2018). [cf. p. 1]
- [15] Frank Arute, Kunal Arya, Ryan Babbush, Dave Bacon, Joseph C. Bardin, Rami Barends, Rupak Biswas, Sergio Boixo, Fernando G. S. L. Brandao, David A. Buell, Brian Burkett, Yu Chen, Zijun Chen, Ben Chiaro, Roberto Collins, William Courtney, Andrew Dunsworth, Edward Farhi, Brooks Foxen, Austin Fowler, Craig Gidney, Marissa Giustina, Rob Graff, Keith Guerin et al. Quantum supremacy using a programmable superconducting processor. *Nature* **574**, 505–510 (2019). [cf. p. 1]
- [16] Seth Lloyd. Universal quantum simulators. *Science* **273**, 1073–1078 (1996). [cf. p. 2, 28]
- [17] R. Blatt et C. F. Roos. Quantum simulations with trapped ions. *Nat. Phys.* **8**, 277–284 (2012). [cf. p. 2]
- [18] Ehud Altman, Kenneth R. Brown, Giuseppe Carleo, Lincoln D. Carr, Eugene Demler, Cheng Chin, Brian DeMarco, Sophia E. Economou, Mark A. Eriksson, Kai-Mei C. Fu, Markus Greiner, Kaden R.A. Hazzard, Randall G. Hulet, Alicia J. Kollár, Benjamin L. Lev, Mikhail D. Lukin, Ruichao Ma, Xiao Mi, Shashank Misra, Christopher Monroe, Kater Murch, Zaira Nazario, Kang-Kuen Ni, Andrew C. Potter et al. Quantum simulators : Architectures and opportunities. *PRX Quantum* **2**, 017003 (2021). [cf. p. 2]
- [19] Erez Zohar, J Ignacio Cirac et Benni Reznik. Quantum simulations of lattice gauge theories using ultracold atoms in optical lattices. *Reports on Progress in Physics* **79**, 014401 (2016). [cf. p. 2]
- [20] M. B. Hastings. Locality in quantum systems. *Lectures Notes, Les Houches Summer School* (2010). [cf. p. 2]
- [21] Frank Pollmann. Chapter 15 : Entanglement in many-body systems. *Lecture Notes, Autumn School on Correlated Electrons, Jülich, Germany* (2020). [cf. p. 2]
- [22] Jacob C Bridgeman et Christopher T Chubb. Hand-waving and interpretive dance : an introductory course on tensor networks. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **50**, 223001 (2017). [cf. p. 2]
- [23] J. Eisert, M. Friesdorf et C. Gogolin. Quantum many-body systems out of equilibrium. *Nat. Phys.* **11**, 124–130 (2015). [cf. p. 2, 5, 32]
- [24] Anatoli Polkovnikov, Krishnendu Sengupta, Alessandro Silva et Mukund Vengalattore. Colloquium : Nonequilibrium dynamics of closed interacting quantum systems. *Reviews of Modern Physics* **83**, 863–883 (2011). [cf. p. 2]
- [25] C. Gogolin et J. Eisert. Equilibration, thermalisation, and the emergence of statistical mechanics in closed quantum systems. *Reports on Progress in Physics* **79(5)**, 056001 (2016). [cf. p. 2, 23, 27, 28, 29, 32, 34]

- [26] Dmitry A. Abanin, Ehud Altman, Immanuel Bloch et Maksym Serbyn. Colloquium : Many-body localization, thermalization, and entanglement. *Reviews of Modern Physics* **91**, 021001 (2019). [cf. p. 2]
- [27] Vedika Khemani, Roderich Moessner et S. L. Sondhi. A brief history of time crystals. *arxiv :1910.10745* (2019). [cf. p. 2]
- [28] D. Poulin. A rough guide to quantum chaos. 2002, (2002). [cf. p. 2, 10, 12]
- [29] L. D’Alessio, Y. Kafri, A. Polkovnikov et M. Rigol. From quantum chaos and eigenstate thermalization to statistical mechanics and thermodynamics. *Adv. Phys.* **65**, 239–362 (2016). [cf. p. 2, 15, 16, 17, 33, 76]
- [30] P Poggi. Summer study course on many-body quantum chaos. 2021, (2021). [cf. p. 2, 18]
- [31] Christian Gogolin. *Equilibration and thermalization in quantum systems*. Thèse de Doctorat, Freie Universität Berlin, (2014). [cf. p. 8]
- [32] Felix Binder, Luis A. Correa, Christian Gogolin, Janet Anders et Gerardo Adesso. *Thermodynamics in the Quantum Regime*, tome 195. Springer International Publishing, (2018). [cf. p. 8, 15, 17]
- [33] N. R. Hunter-Jones. *Chaos and Randomness in Strongly-Interacting Quantum Systems*. Thèse de Doctorat, Caltech, (2018). [cf. p. 9, 20]
- [34] J Emerson. Quantum chaos and quantum-classical correspondence. *PhD Thesis* (2002). [cf. p. 10, 12, 14]
- [35] M. C. Gutzwiller. *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*, tome 1. Springer New York, (1990). [cf. p. 11]
- [36] J. M. Deutsch. Eigenstate thermalization hypothesis. *Reports on Progress in Physics* **81**, 082001 (2018). [cf. p. 12, 33]
- [37] D. Stanford. Many-body quantum chaos. Dans *Proceedings of the Seminar at the school, IAS PiTP 2018 : From Qubits to Spacetime*, <https://video.ias.edu/PiTP/2018/0723-DouglasStanford>, (2018). [cf. p. 13]
- [38] I. García-Mata, M. Saraceno, R. A. Jalabert, A. J. Roncaglia et D. A. Wisniacki. Chaos signatures in the short and long time behavior of the out-of-time ordered correlator. *Phys. Rev. Lett.* **121**, 210601 (2018). [cf. p. 14]
- [39] G. Casati et T. Prosen. Quantum chaos, dynamical stability and decoherence. *Brazilian Journal of Physics* **35**, 233–241 (2005). [cf. p. 14]
- [40] J Polchinski. Chaos in the black hole s-matrix. *arXiv : High Energy Physics - Theory* (2015). [cf. p. 14]
- [41] F. Haake. *Quantum Signatures of Chaos*, tome 54. Springer Berlin Heidelberg, (2010). [cf. p. 15]
- [42] M. Berry. Quantum chaology, not quantum chaos. *Physica Scripta* **40**, 335–336 (1989). [cf. p. 15]

- [43] Rodolfo Jalabert. Mesoscopic transport and quantum chaos. *Scholarpedia* **11**, 30946 (2016). [cf. p. 15]
- [44] M.S. Santhanam, Sanku Paul et J. Bharathi Kannan. Quantum kicked rotor and its variants : Chaos, localization and beyond. *Physics Reports* **956**, 1–87 (2022). [cf. p. 15]
- [45] Juan Maldacena, Stephen H. Shenker et Douglas Stanford. A bound on chaos. *Journal of High Energy Physics* **2016**, 106 (2016). [cf. p. 15]
- [46] Stephen H. Shenker et Douglas Stanford. Black holes and the butterfly effect. *Journal of High Energy Physics* **2014**, 67 (2014). [cf. p. 15]
- [47] Lukas J. Fiderer et Daniel Braun. Quantum metrology with quantum-chaotic sensors. *Nat. Commun.* **9**, 1351 (2018). [cf. p. 15]
- [48] Daniel K. Mark, Joonhee Choi, Adam L. Shaw, Manuel Endres et Soonwon Choi. Benchmarking quantum simulators using quantum chaos. *arxiv :2205.12211* (2022). [cf. p. 15]
- [49] Joonhee Choi, Adam L. Shaw, Ivaylo S. Madjarov, Xin Xie, Jacob P. Covey, Jordan S. Cotler, Daniel K. Mark, Hsin-Yuan Huang, Anant Kale, Hannes Pichler, Fernando G. S. L. Brandão, Soonwon Choi et Manuel Endres. Emergent randomness and benchmarking from many-body quantum chaos. *arxiv :2103.03535* (2021). [cf. p. 15]
- [50] E. P. Wigner. On the statistical distribution of the widths and spacings of nuclear resonance levels. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **47**, 790–798 (1951). [cf. p. 16]
- [51] F. J. Dyson. Statistical theory of the energy levels of complex systems. i. *J. Math. Phys.* **3**, 140–156 (1962). [cf. p. 16]
- [52] M. V. Berry et M. Tabor. Level clustering in the regular spectrum. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* **356**, 375–394 (1977). [cf. p. 17]
- [53] O. Bohigas, M. J. Giannoni et C. Schmit. Characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuation laws. *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1–4 (1984). [cf. p. 17]
- [54] F. Borgonovi, F.M. Izrailev, L.F. Santos et V.G. Zelevinsky. Quantum chaos and thermalization in isolated systems of interacting particles. *Physics Reports* **626**, 1–58 (2016). [cf. p. 17]
- [55] Lea F. Santos et E. Jonathan Torres-Herrera. *Nonequilibrium Quantum Dynamics of Many-Body Systems*. Springer International Publishing, (2018). [cf. p. 17, 63]
- [56] Benoît Grémaud et Sudhir R Jain. Spacing distributions for rhombus billiards. *Journal of Physics A: Mathematical and General* **31**, L637–L643 (1998). [cf. p. 17]

- [57] M Schecter et T Iadecola. Weak ergodicity breaking and quantum many-body scars in spin-1  $x$ - $y$  magnets. *Phys. Rev. Lett.* **123**, 147201 (2019). [cf. p. 18]
- [58] T. Gorin, T. Prosen, T. H. Seligman et M. Žnidarič. Dynamics of loschmidt echoes and fidelity decay. *Physics Reports* **435**, 33–156 (2006). [cf. p. 18]
- [59] A. Goussev, R. A. Jalabert, H. M. Pastawski et D. Wisniacki. Loschmidt echo. *Scholarpedia* **7**, 11687 (2012). [cf. p. 18, 20]
- [60] A. Bhattacharyya, W. Chemissany, S. S. Haque et B. Yan. Towards the web of quantum chaos diagnostics. *The European Physical Journal C* **82**, 87 (2022). [cf. p. 19]
- [61] C. J. Turner, A. A. Michailidis, D. A. Abanin, M. Serbyn et Z. Papić. Weak ergodicity breaking from quantum many-body scars. *Nat. Phys.* **14**, 745–749 (2018). [cf. p. 20, 45, 48, 51, 53, 54]
- [62] P. Chang, X. Chen, S. Gopalakrishnan et J. H. Pixley. Evolution of entanglement spectra under generic quantum dynamics. *Phys. Rev. Lett.* **123**, 190602 (2019). [cf. p. 20, 35, 38, 39, 40, 51, 55, 57]
- [63] M Bauer, D Bernard et T Jin. Universal fluctuations around typicality for quantum ergodic systems. *Phys. Rev. E* **101**, 012115 (2020). [cf. p. 20, 31, 38]
- [64] J. Eisert, M. Cramer et M. B. Plenio. Colloquium : Area laws for the entanglement entropy. *Reviews of Modern Physics* **82**, 277–306 (2010). [cf. p. 23]
- [65] A Nahum, J Ruhman, S Vijay et J Haah. Quantum entanglement growth under random unitary dynamics. *Phys. Rev. X* **7**, 031016 (2017). [cf. p. 23, 30, 40]
- [66] R Islam, R Ma, P M Preiss, M Eric Tai, A Lukin, M Rispoli et M Greiner. Measuring entanglement entropy in a quantum many-body system. *Nature* **528**, 77–83 (2015). [cf. p. 25]
- [67] D N Page. Average entropy of a subsystem. *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1291–1294 (1993). [cf. p. 27]
- [68] E. H. Lieb et D. W. Robinson. The finite group velocity of quantum spin systems. *Communications in Mathematical Physics* **28**, 251–257 (1972). [cf. p. 29]
- [69] S Lloyd. Pure state quantum statistical mechanics and black holes (phd thesis ch.3). *PhD Thesis* (1988). [cf. p. 32]
- [70] H. Li et F. D. M. Haldane. Entanglement spectrum as a generalization of entanglement entropy : Identification of topological order in non-abelian fractional quantum hall effect states. *Phys. Rev. Lett.* **101**, 010504 (2008). [cf. p. 35]
- [71] A. Chandran, V. Khemani et S. L. Sondhi. How universal is the entanglement spectrum? *Phys. Rev. Lett.* **113**, 060501 (2014). [cf. p. 35]
- [72] Z Yang. *Entanglement complexity of quantum states, dynamics and quantum computation*. Thèse de Doctorat, Boston University, (2019). [cf. p. 35, 36]

- [73] C. Chamon, A. Hama et E. R. Mucciolo. Emergent irreversibility and entanglement spectrum statistics. *Phys. Rev. Lett.* **112**, 240501 (2014). [cf. p. 35, 38, 51]
- [74] V. Oganessian et D. A. Huse. Localization of interacting fermions at high temperature. *Phys. Rev. B* **75**, 155111 (2007). [cf. p. 36, 79]
- [75] Y. Y. Atas, E. Bogomolny, O. Giraud et G. Roux. Distribution of the ratio of consecutive level spacings in random matrix ensembles. *Phys. Rev. Lett.* **110**, 084101 (2013). [cf. p. 36, 37, 79]
- [76] D Shaffer, C Chamon, A Hama et E Mucciolo. Irreversibility and entanglement spectrum statistics in quantum circuits. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* **2014**, P12007 (2014). [cf. p. 38]
- [77] S Zhou, Z Yang, A Hama et C Chamon. Single t gate in a clifford circuit drives transition to universal entanglement spectrum statistics. *SciPost Physics* **9**, 087 (2020). [cf. p. 38]
- [78] L Zhang, J Reyes, S Kourtis, C Chamon, E R Mucciolo et A E Ruckenstein. Nonuniversal entanglement level statistics in projection-driven quantum circuits. *Phys. Rev. B* **101**, 235104 (2020). [cf. p. 38]
- [79] J N Bandyopadhyay et A Lakshminarayan. Testing statistical bounds on entanglement using quantum chaos. *Phys. Rev. Lett.* **89**, 060402 (2002). [cf. p. 38]
- [80] X Chen et A W W Ludwig. Universal spectral correlations in the chaotic wave function and the development of quantum chaos. *Phys. Rev. B* **98**, 064309 (2018). [cf. p. 38]
- [81] T. Rakovszky, S. Gopalakrishnan, S. A. Parameswaran et F. Pollmann. Signatures of information scrambling in the dynamics of the entanglement spectrum. *Phys. Rev. B* **100**, 125115 (2019). [cf. p. 38]
- [82] Z Yang, K Meichanetzidis, S Kourtis et C Chamon. Scrambling via braiding of nonabelions. *Phys. Rev. B* **99**, 045132 (2019). [cf. p. 41]
- [83] Hannes Bernien, Sylvain Schwartz, Alexander Keesling, Harry Levine, Ahmed Omran, Hannes Pichler, Soonwon Choi, Alexander S. Zibrov, Manuel Endres, Markus Greiner, Vladan Vuletić et Mikhail D. Lukin. Probing many-body dynamics on a 51-atom quantum simulator. *Nature* **551**, 579–584 (2017). [cf. p. 42, 43, 44, 51, 63]
- [84] E Heller. Bound-state eigenfunctions of classically chaotic hamiltonian systems : Scars of periodic orbits. *Phys. Rev. Lett.* **53**, 1515–1518 (1984). [cf. p. 44]
- [85] S. C. Morampudi, A. Chandran et C. R. Laumann. Universal entanglement of typical states in constrained systems. *Phys. Rev. Lett.* **124**, 050602 (2020). [cf. p. 49, 58]
- [86] U Schollwöck. The density-matrix renormalization group in the age of matrix product states. *Annals of Physics* **326**(1), 96–192 (2011). [cf. p. 65]

- [87] J Hauschild et F Pollmann. Efficient numerical simulations with tensor networks : Tensor network python (tenpy). *SciPost Phys. Lect. Notes* , 5 (2018). [cf. p. 68]
- [88] A. M. Childs, Y. Su, M. C. Tran, N. Wiebe et S. Zhu. Theory of trotter error with commutator scaling. *Phys. Rev. X* 11(1) (2021). [cf. p. 70]
- [89] G Livan, M Novaes et P Vivo. *Introduction to Random Matrices*, tome 26. Springer International Publishing, (2018). [cf. p. 76]
- [90] V. E. Kravtsov. Random matrix theory : Wigner-dyson statistics and beyond. (lecture notes of a course given at sissa (trieste, italy)). *Lecture Notes* (2009). [cf. p. 75]
- [91] S Oliviero, L Leone, F Caravelli et A Hama. Random matrix theory of the isospectral twirling. *SciPost Physics* 10, 076 (2021). [cf. p. 77]
- [92] Y Atas. *Quelques aspects du chaos quantique dans les systèmes de N-corps en interaction*. Thèse de Doctorat, Université Paris-Sud, (2014). [cf. p. 79]