

Ribagua

Revista Iberoamericana del Agua

ISSN: (Print) (Online) Journal homepage: <https://www.tandfonline.com/loi/trib20>

Simulación directa de turbulencia de flujo secundario en ductos curvos

Julia V. Martorana, Lucas Berardini & Mariano I. Cantero

To cite this article: Julia V. Martorana, Lucas Berardini & Mariano I. Cantero (2020) Simulación directa de turbulencia de flujo secundario en ductos curvos, Ribagua, 7:2, 56-71, DOI: [10.1080/23863781.2021.1913975](https://doi.org/10.1080/23863781.2021.1913975)

To link to this article: <https://doi.org/10.1080/23863781.2021.1913975>



© 2021 The Author(s). Published by Informa UK Limited, trading as Taylor & Francis Group.



Published online: 21 Aug 2021.



Submit your article to this journal [↗](#)



Article views: 586



View related articles [↗](#)



View Crossmark data [↗](#)

Simulación directa de turbulencia de flujo secundario en ductos curvos

Julia V. Martorana^{1,2}, Lucas Berardini³ and Mariano I. Cantero^{1,3,4}

¹Centro Atómico Bariloche, Comisión Nacional de Energía Atómica, San Carlos de Bariloche, Río Negro, Argentina; ²Escuela de Producción, Sede Andina, Universidad Nacional de Río Negro, San Carlos de Bariloche, Río Negro, Argentina; ³Instituto Balseiro, Universidad Nacional de Cuyo, San Carlos de Bariloche, Río Negro, Argentina; ⁴Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, San Carlos de Bariloche, Río Negro, Argentina

RESUMEN

En este trabajo se estudia el flujo secundario en ductos curvos. El flujo secundario puede ser originado por la curvatura del ducto (primer tipo) o por la presencia de la turbulencia (segundo tipo). Se analizan aquí los patrones de circulación secundaria y la influencia de ésta en el flujo medio para dos valores de radio medio de curvatura. Se observa que los patrones de corriente se ven fuertemente afectados por el flujo secundario de primer tipo que genera un desplazamiento del valor máximo hacia el radio externo mientras que el flujo secundario del segundo tipo actúa modificando los contornos de velocidad en las regiones cercanas a las paredes horizontales del ducto. Estas modificaciones impactan en los esfuerzos de corte en las paredes y, en consecuencia, en los procesos de erosión y deposición del sedimentos y en la modificación de la resistencia hidráulica del ducto. El patrón de las celdas de recirculación del flujo secundario varía en los casos estudiados lo que evidencia la existencia de distintos mecanismos de mezclado de la corriente. Para este estudio se desarrollan simulaciones directas de turbulencia (DNS, por sus siglas en inglés) empleando un código pseudoespectral.

Direct simulation of secondary flow turbulence in curved pipelines

ABSTRACT

Secondary flow can be originated by duct curvature (first kind) or by the presence of turbulence (second kind). This work focuses on the study of secondary flow in a curve duct of square section in turbulent regime by means of fully resolved direct numeric simulations. Secondary flow patterns and its influence on mean flow are analyzed for two values of duct curvature. It is observed that flow patterns are strongly influenced by secondary flow generating a displacement of the maximum value towards the external radius, which modifies velocity contours in regions near the horizontal walls of the duct. Consequently, wall shear stresses and flow recirculation cells change substantially. These findings may have an important impact on sediment erosion and deposition, and on mixing mechanisms.

1. Introducción

Las corrientes que se generan en planos transversales, denominadas flujos secundarios, pueden presentarse en ríos, confluencias y canales submarinos. Asimismo, los flujos secundarios pueden generarse en muchas aplicaciones de ingeniería como, por ejemplo, en intercambiadores de calor, reactores químicos y ductos de enfriamiento y ventilación. A pesar de que los flujos secundarios poseen menor magnitud que la corriente principal, sus efectos sobre éste pueden ser importantes.

En el flujo turbulento en ductos curvos de sección cuadrada se generan dos tipos de corrientes transversales de menor magnitud, clasificadas como flujos

secundarios de primer y de segundo tipo (Bradshaw 1987). El flujo secundario de primer tipo se genera por la inclinación del vector vorticidad ocasionada por la aceleración de la corriente de la región interna de la curva con respecto al flujo que circula en la región externa. Este efecto se manifiesta tanto en régimen laminar como en régimen turbulento. El flujo secundario de segundo tipo, en cambio, se genera solo en presencia de turbulencia y se observa en las esquinas de un canal o en transiciones de rugosidad transversales. En un ducto de sección cuadrada el flujo turbulento provoca una recirculación desde el centro de la sección hacia las esquinas por las bisectrices de las mismas

CONTACT Julia V. Martorana  julia.martorana@cab.cnea.gov.ar

This article has been republished with minor changes. These changes do not impact the academic content of the article.

© 2021 The Author(s). Published by Informa UK Limited, trading as Taylor & Francis Group.

This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution-NonCommercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>), which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

y luego una circulación por las paredes hacia sus mediatrices.

El flujo secundario está relacionado con la turbulencia ya que ésta puede provocar la disipación de las corrientes secundarias de primer tipo y es responsable de la generación del flujo secundario de segundo tipo (Nikora & Roy 2012). En las curvas de los ríos el flujo secundario impacta sobre el lecho y sobre los márgenes erosionando la región externa de las curvas y depositando los sedimentos en la margen interna de las mismas. También modifica la distribución transversal de las velocidades medias y las tensiones de corte en las paredes, lo que tiene efectos sobre la resistencia hidráulica. Además, la presencia de corrientes secundarias modifica el mezclado vertical, transversal y longitudinal.

El estudio teórico del flujo secundario en corrientes laminares en tuberías curvas fue iniciado por Dean (1928) quien analizó los parámetros adimensionales que gobiernan el comportamiento del flujo, la generación de flujo secundario de primer tipo y la estabilidad de los mismos. En los trabajos de Cheng *et al.* (1976), Ghia & Sokhey (1977) y Bara *et al.* (1992) se presentan estudios en régimen laminar realizados por medio de simulaciones numéricas y experimentos. Estos trabajos reportan la aparición de dos vórtices contrarrotantes sobre la sección transversal de un ducto rectangular y la aparición de fenómenos de inestabilidad centrífuga para algunas condiciones de flujo. Hille *et al.* (1985) realizaron experimentos para estudiar la longitud de desarrollo de un flujo laminar sobre un ducto curvo a partir de un perfil de velocidad homogéneo a la entrada.

Con respecto al flujo turbulento en ductos rectos, Gavrilakis (1992) y Huser & Biringen (1993) realizaron simulaciones numéricas directas (DNS, por sus siglas en inglés) en un ducto recto de sección cuadrada con el objetivo de analizar el comportamiento del flujo medio y el origen del flujo secundario. También mediante cálculos DNS, Pinelli *et al.* (2010) y Zhang *et al.* (2015) analizaron la influencia del número de Reynolds en el flujo medio y obtuvieron que este valor afecta los patrones de flujo secundario. A su vez, Vinuesa *et al.* (2014) estudiaron el efecto de la relación de aspecto de la sección del ducto mediante cálculos DNS. Entre las simulaciones de grandes vórtices (LES, por sus siglas en inglés) realizadas sobre el tema, se pueden nombrar los estudios de Madabhushi & Vanka (1991), Breuer & Rodi (1994) y Yao *et al.* (2015). En estos trabajos también se exhibe un análisis de las características del flujo para diferentes números de Reynolds.

Estudios de flujos incompresibles y compresibles en ductos curvos de sección cuadrada fueron presentados por Münch & Métais (2006, 2007). Estos trabajos reportan los resultados de cálculos LES y analizan la

influencia del radio de curvatura sobre el flujo medio y la transferencia de calor. En estos trabajos se estudia una porción de ducto de baja amplitud angular, por lo que los fenómenos de desarrollo hidrodinámico también resultan importantes.

Estudios numéricos en ductos de sección transversal circular reportan resultados de simulaciones DNS en ductos toroidales y helicoidales (Hüttl & Friedrich 2001). Mediante estos cálculos los autores analizaron la influencia del radio de curvatura y de la torsión sobre el flujo medio y sobre el desarrollo de la turbulencia. Castiglia *et al.* (2010) analizaron flujos laminares y en régimen de transición y se focalizaron en la transferencia de calor en distintos regímenes, para varios radios de curvatura.

Si bien la motivación principal de este trabajo es la descripción de los parámetros medios del flujo se decidió utilizar cálculos DNS que permiten la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes de forma completa sin necesidad de recurrir a modelos de turbulencia. La anisotropía que existe en flujos turbulentos delimitados por paredes con flujo secundario dificulta el modelado de los mismos mediante las ecuaciones promediadas de Navier-Stokes (RANS, por sus siglas en inglés) (Vinuesa *et al.* 2014; Orlandi & Pirozzoli 2020).

En el presente trabajo se estudia cómo se modifica la estructura del flujo por la curvatura del ducto. Para esto se analizan las variaciones que se producen en ambos tipos de flujo secundario en casos con distintos radios medios. Las simulaciones se llevan a cabo mediante cálculos DNS empleando un código de cálculo pseudo-espectral que utiliza expansiones de Fourier en la dirección principal y expansiones de Chebyshev en las direcciones restantes. Este trabajo documenta el modelo numérico utilizado y su validación mediante la comparación con datos reportados en la bibliografía. Los resultados muestran la pérdida de simetría con respecto a la línea vertical central de la sección en la distribución de la velocidad en la dirección principal ocasionada por el flujo secundario de primer tipo y la variación de los contornos de velocidad en las regiones cercanas a las paredes horizontales generadas por el flujo secundario de segundo tipo. El patrón del flujo secundario se modifica al variar el radio medio, generándose cuatro celdas de recirculación adicionales en el caso del radio mayor.

2. Modelo matemático

Las ecuaciones adimensionales que gobiernan el flujo en este caso son

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re_r} \nabla^2 \mathbf{u} - \mathbf{F}, \quad (2.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.1b)$$

donde $\mathbf{u} = \{u_r, u_\theta, u_z\}$ es el campo de velocidades adimensional, p es la presión adimensional y \mathbf{F} es el gradiente de presión uniforme que fuerza la corriente en la dirección θ ($\mathbf{F} = \{0, 2, 0\}$). Para la adimensionalización de las ecuaciones 2.1 se utiliza como escala de velocidad la velocidad de corte $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$, donde τ_w es el esfuerzo de corte en la pared y ρ es la densidad del fluido. Como escala de longitud se toma la mitad del ancho del ducto, h , para la escala temporal se emplea $T = h/u_\tau$ y para la escala de presión ρu_τ^2 . El flujo depende del número de Reynolds, $Re_\tau = u_\tau h/\nu$, donde ν es la viscosidad cinemática del fluido.

Se considera un dominio espacial como el de la Figura 1. En la dirección angular se imponen condiciones de borde periódicas. Debido a esta condición, la longitud en la dirección angular, $\Delta\theta$, debe ser suficientemente grande como para permitir el adecuado decaimiento de la correlación espacial de velocidades. Para la determinación de $\Delta\theta$ se utiliza como referencia el trabajo de Martorana *et al.* (2018) en el que se llevan a cabo cálculos DNS en un ducto recto de sección cuadrada de lado $2h$ y cuya longitud en la dirección de la corriente es igual a $4\pi h$. Esta longitud es suficiente para las simulaciones presentadas en este trabajo ya que se espera que el flujo desarrollado presente vórtices cuyo tamaño máximo sea del orden de $2h$.

Entonces, en variables adimensionales, la longitud de arco sobre el radio medio, S_m , debe ser tal que

$$S_m = R_m \Delta\theta = 4\pi,$$

$$\Delta\theta = \frac{4}{R_m} \pi.$$

donde R_m es el radio medio.

De esta forma, la amplitud angular del ducto depende del radio medio de curvatura adimensional.

3. Modelo numérico

3.1. Geometría

El dominio de interés consiste en un ducto curvo de sección transversal cuadrada de lado 2 y amplitud angular $\Delta\theta$. Se considera que la sección transversal del ducto tiene paredes rígidas y que el flujo presenta condiciones periódicas en la dirección angular, lo que implica que esta última dirección es estadísticamente homogénea.

El desarrollo que se exhibe a continuación toma como base el trabajo realizado por Martorana *et al.* (2018).

3.2. Método de paso fraccionado

La resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes (2.1) se lleva a cabo mediante el Método de Paso Fraccionado (Kim & Moin 1985). Este método consiste en introducir un campo de velocidades auxiliar con el fin de obtener una aproximación temporal a la solución resolviendo dos ecuaciones. Si se realiza una aproximación de la

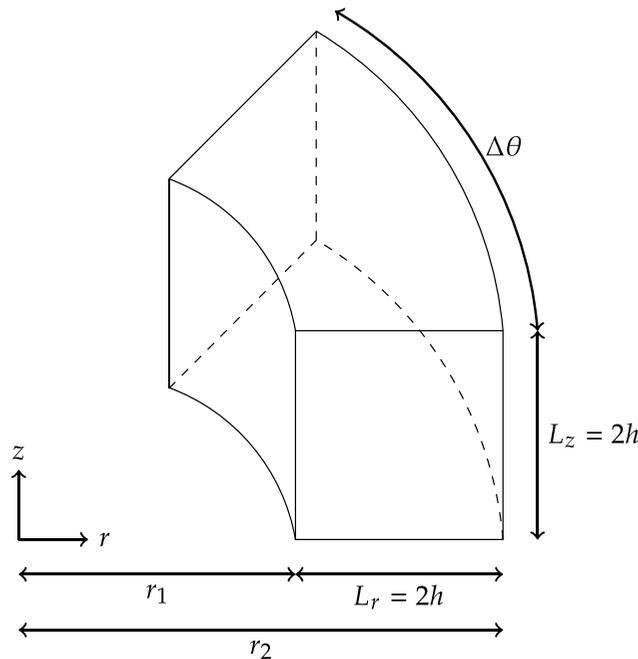


Figura 1. Esquema de la geometría del ducto curvo considerado.

derivada parcial temporal de la velocidad, la ecuación que se busca resolver es la siguiente

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \mathbf{A} = -p^{n+1} + \frac{1}{Re_\tau} \mathbf{D} - 2\delta_{i\theta}, \quad (3.1)$$

donde \mathbf{A} y \mathbf{D} son los términos advectivo y difusivo respectivamente, escritos de forma compacta.

Se introduce un campo de velocidades intermedio, \mathbf{u}^* , y se resuelve la ecuación auxiliar

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \mathbf{A} = \frac{1}{Re_\tau} \mathbf{D} - 2\delta_{i\theta}. \quad (3.2)$$

Debido al término faltante de la presión en la ecuación 3.2, la velocidad intermedia \mathbf{u}^* no posee divergencia nula. El segundo paso de este método consiste en corregir la velocidad intermedia de modo tal que

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} = -p^{n+1}. \quad (3.3)$$

Imponiendo la condición $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0$ en la expresión 3.3 se obtiene

$$2p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^*. \quad (3.4)$$

A partir de la ecuación 3.4 puede obtenerse el valor de p^{n+1} . Luego se reemplaza este valor en la ecuación 3.3 para obtener, por sustitución directa, el campo de velocidades \mathbf{u}^{n+1} .

3.3. Discretización temporal

Dada la geometría del dominio en análisis resulta conveniente utilizar un sistema en coordenadas cilíndricas para expresar las ecuaciones 2.1. En este sistema, las componentes del término advectivo de la ecuación 2.1a son

$$A_r = u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r}, \quad (3.5a)$$

$$A_\theta = u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r}, \quad (3.5b)$$

$$A_z = u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (3.5c)$$

y las componentes del término difusivo

$$D_r = \frac{1}{Re_\tau} \left(2u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right), \quad (3.6a)$$

$$D_\theta = \frac{1}{Re_\tau} \left(2u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \right), \quad (3.6b)$$

$$D_z = \frac{1}{Re_\tau} 2u_z. \quad (3.6c)$$

Los últimos dos términos de las expresiones 3.6a y 3.6b se introducen en las componentes radial y angular del término advectivo, respectivamente. Las componentes del nuevo término advectivo, denominado término pseudoadvectivo, son

$$A'_r = A_r + \frac{1}{Re_\tau} \left(\frac{u_r}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right), \quad (3.7a)$$

$$A'_\theta = A_\theta + \frac{1}{Re_\tau} \left(-\frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\theta}{r^2} \right), \quad (3.7b)$$

$$A'_z = A_z \quad (3.7c)$$

y las componentes restantes del término difusivo forman el término pseudodifusivo,

$$\mathbf{D}' = \frac{2\mathbf{u}}{Re_\tau}. \quad (3.8)$$

Los términos pseudoadvectivo y pseudodifusivo se utilizan en la expresión 2.1a en lugar de los términos advectivo y difusivo, respectivamente. El término pseudoadvectivo se discretiza de forma explícita mediante un esquema de Adams-Bashforth de tercer orden y el término pseudodifusivo de manera implícita por medio del esquema de Crank-Nicolson. Se tiene entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}^*}{\Delta t} - \frac{1}{2Re_\tau} 2\mathbf{u}^* &= \frac{\mathbf{u}^n}{\Delta t} - \frac{23}{12} (\mathbf{A}')^n + \frac{16}{12} (\mathbf{A}')^{n-1} \\ &\quad - \frac{5}{12} (\mathbf{A}')^{n-2} + \frac{1}{2Re_\tau} 2\mathbf{u}^n - 2\delta_{i\theta}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

3.4. Discretización espacial

De la discretización temporal resultan dos ecuaciones diferenciales en derivadas parciales elípticas de la forma

$$(\nabla^2 - \alpha) g(r, \theta, z) = rhs(r, \theta, z). \quad (3.10)$$

En el caso de la ecuación 3.9 se tiene

$$g(r, \theta, z) = \mathbf{u}^*,$$

$$\alpha = 2Re_\tau/\Delta t,$$

$$rhs(r, \theta, z) = 2Re_\tau \left[\begin{array}{l} -\frac{\mathbf{u}^n}{\Delta t} + \frac{23}{12}(\mathbf{A}')^n - \frac{16}{12}(\mathbf{A}')^{n-1} \\ + \frac{5}{12}(\mathbf{A}')^{n-1} + 2\delta_{i\theta} \end{array} \right] - {}^2\mathbf{u}^n; \quad (3.11)$$

mientras que para la ecuación 3.4,

$$\begin{aligned} g(r, \theta, z) &= p^{n+1}, \\ \alpha &= 0, \\ rhs(r, \theta, z) &= \frac{1}{\Delta t} \cdot \mathbf{u}^*. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Es posible notar que el reordenamiento realizado mediante las expresiones 3.7 y 3.8 permite que los operadores diferenciales para las ecuaciones 3.1 y 3.4 sean análogos y puedan escribirse de la forma 3.10. De esta manera, puede utilizarse el mismo algoritmo de cálculo para resolver ambas ecuaciones.

Para la resolución numérica de la ecuación 3.10 se discretiza el dominio en la dirección periódica θ en N_θ puntos equiespaciados utilizando expansiones de Fourier. En las direcciones espaciales r y z se utilizan polinomios de Chebyshev con puntos de cuadratura Gauss-Lobatto (Canuto *et al.* 1998) para discretizar la grilla en N_r y N_z puntos, respectivamente.

Realizando la transformada de Fourier en dirección θ a la ecuación 3.10 se tiene

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \left(\alpha + \frac{1}{r^2} \frac{k^2 4\pi^2}{\Delta\theta^2} \right) \right] \hat{g}(r, z) \\ = \hat{rhs}(r, z), \\ k \in \left[-\frac{N_\theta}{2}, \frac{N_\theta}{2} - 1 \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde \hat{g} y \hat{rhs} son los correspondientes coeficientes de Fourier. La ecuación 3.13 es una ecuación bidimensional de Helmholtz en r y z para cada coeficiente de Fourier correspondiente al número de onda k .

Se deben resolver las ecuaciones 3.13 con condiciones de borde de Dirichlet o Neumann aplicadas en los cuatro bordes discretizados en $N_r \times N_z$ puntos de colocación. Se utilizan condiciones de Dirichlet para las componentes de la velocidad y de derivada normal nula (Neumann) para la presión. El tratamiento de las condiciones de borde en la resolución de la ecuación bidimensional de Helmholtz resulta idéntico al presentado en el trabajo de Martorana *et al.* (2018) para ductos rectos de sección transversal cuadrada.

En las direcciones r y z se aplica una discretización espectral de Chebyshev (Canuto *et al.* 1998). Los cálculos de las derivadas en las direcciones r y z se expresan en términos de multiplicación matricial combinando

una transformación discreta de Chebyshev, diferenciación recursiva y una transformación discreta de Chebyshev inversa. La derivada segunda se obtiene mediante la multiplicación de dos operadores de derivada primera. En los puntos interiores del dominio, se aplica la forma discretizada de las ecuaciones gobernantes y, de forma similar, en los bordes se aplica la condición de borde específica. Esto produce un sistema de $N_r \times N_z$ ecuaciones. El procedimiento para la resolución de este sistema de ecuaciones se encuentra detallado en los trabajos de Martorana *et al.* (2018) y Berardini (2019).

4. Resultados

4.1. Validación

Para validar las implementaciones realizadas en el código se llevaron a cabo simulaciones de flujo Dean que involucran corrientes en régimen laminar y en régimen turbulento. En este código, por la imposición de la condición periódica sobre la dirección angular, los flujos modelados están completamente desarrollados. Debido a la escasez de trabajos que utilizan estas condiciones para este tipo de flujo turbulento en ductos de sección cuadrada, se realizó una simulación partiendo de una condición inicial de un cálculo turbulento DNS en un ducto recto. La condición inicial es una perturbación tridimensional del campo de velocidades. Por lo tanto, un correcto funcionamiento del código debe mostrar una atenuación de las velocidades a medida que avanza el tiempo de simulación. El resultado final debe ser análogo al obtenido cuando se utiliza la condición inicial de velocidad nula.

4.1.1. Flujo Dean laminar

Se presentan aquí simulaciones de flujo laminar en un ducto curvo de sección transversal cuadrada, sometido a un gradiente de presión uniforme (Dean 1927). Debido a la curvatura del ducto, en régimen laminar se desarrolla un flujo secundario de primer tipo que genera una recirculación en las secciones transversales. En secciones cuadradas el patrón de flujo secundario resulta dependiente del número de Dean (Bara *et al.* 1992),

$$De = \frac{Re_b}{\sqrt{\frac{R_m}{L_r}}}, \quad (4.1)$$

donde $Re_b = \frac{2hu_b}{\nu}$ es el número de Reynolds basado en la velocidad media en la dirección de la corriente, u_b , y la mitad del ancho del canal, h . El patrón de flujo secundario para $De = 125$ presenta dos vórtices

Tabla 1. Grillas utilizadas para las simulaciones del flujo Dean laminar.

Malla	$N_r \times N_z \times N_\theta$
1	31x31x52
2	61x61x104
3	93x93x156

contrarrotantes en las mitades superior e inferior de la sección transversal, mientras que para $De = 150$ se generan dos vórtices adicionales de menor tamaño sobre el radio externo del ducto (Bara *et al.* 1992).

Se llevaron a cabo simulaciones para $De = 125$ y $De = 150$ y se compararon los resultados con datos experimentales obtenidos por Bara *et al.* (1992). En la Tabla 1 se muestran las grillas utilizadas con el objetivo de verificar la convergencia de malla. Las simulaciones se iniciaron a partir de una condición inicial de velocidad nula en todo el dominio. El tiempo de simulación se extendió hasta alcanzar la solución estacionaria.

En la Figura 2 se exhibe la velocidad en la dirección del flujo, u_θ , adimensionalizada con la velocidad media, u_b , en función del radio en la mitad de la sección. De aquí en adelante se utiliza la variable independiente $\hat{r} = r - r_1$, $0 \leq \hat{r} \leq 2$ para identificar la dimensión del ducto en la dirección radial. Puede observarse que para el caso $De = 125$, tanto la malla más fina como la más gruesa reproducen los resultados experimentales de manera adecuada. En el caso $De = 150$, los resultados de la simulación para la malla 1 muestran diferencias en la región cercana al radio externo. Sin embargo, los resultados de las simulaciones se ajustan correctamente a los valores experimentales en los cálculos llevados a cabo con las mallas 2 y 3.

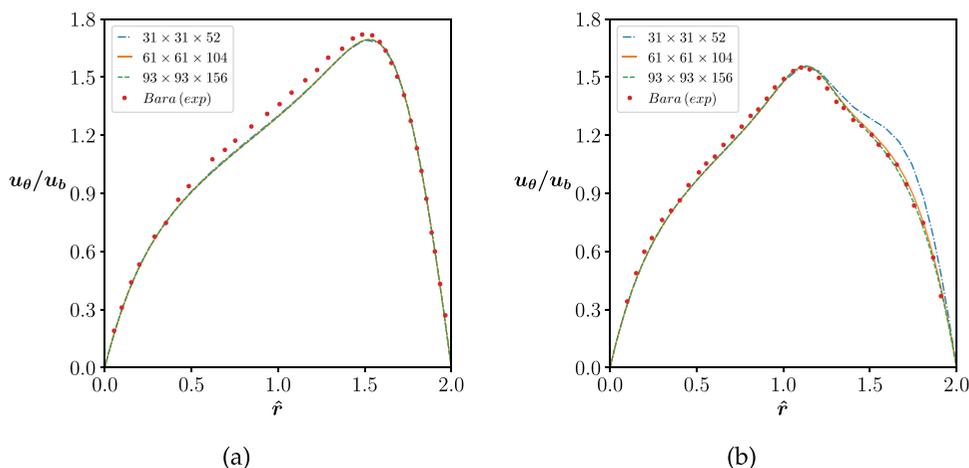
En el caso $De = 125$ para la grilla $93 \times 93 \times 156$ el mayor error relativo es menor a 13,5% y se obtiene en el punto correspondiente al dato experimental más cercano a la pared externa del ducto. El promedio de las diferencias porcentuales no alcanza el 2,5%. Con respecto a los resultados del caso $De = 150$ para la grilla $93 \times 93 \times 156$, los errores relativos mayores se encuentran en las regiones cercanas a las paredes verticales y el valor máximo alcanza el 8%. El promedio de los errores relativos porcentuales en este caso no supera el 3%.

En la Figura 3 pueden observarse las secciones transversales del ducto y el campo de velocidades secundarias para los dos casos analizados obtenidos con la malla 3. Se puede notar que el patrón de flujo secundario evoluciona de una configuración de dos vórtices para el caso de $De = 125$ a un patrón formado por cuatro vórtices para el caso $De = 150$ en coincidencia con lo presentado en Bara *et al.* (1992).

4.1.2. Flujo Dean a partir de condiciones iniciales perturbadas

Se realizó una simulación a $De = 125$ a partir de una condición inicial obtenida de un cálculo turbulento DNS en un ducto recto utilizando la malla 3. El objetivo de esta simulación es verificar el correcto funcionamiento del código en condiciones de flujos perturbados.

En la Figura 4 se exhibe un gráfico análogo al presentado en la Figura 2 que muestra la comparación de la solución estacionaria con la condición inicial impuesta en este caso. Puede verificarse que el resultado final coincide con el obtenido desde una condición inicial de velocidad nula y con observaciones experimentales. Este resultado valida la implementación del código de cálculo en coordenadas cilíndricas.

**Figura 2.** Velocidad en la dirección del flujo en función del radio, en la línea horizontal central de la sección para los casos (a) $De = 125$ y (b) $De = 150$.

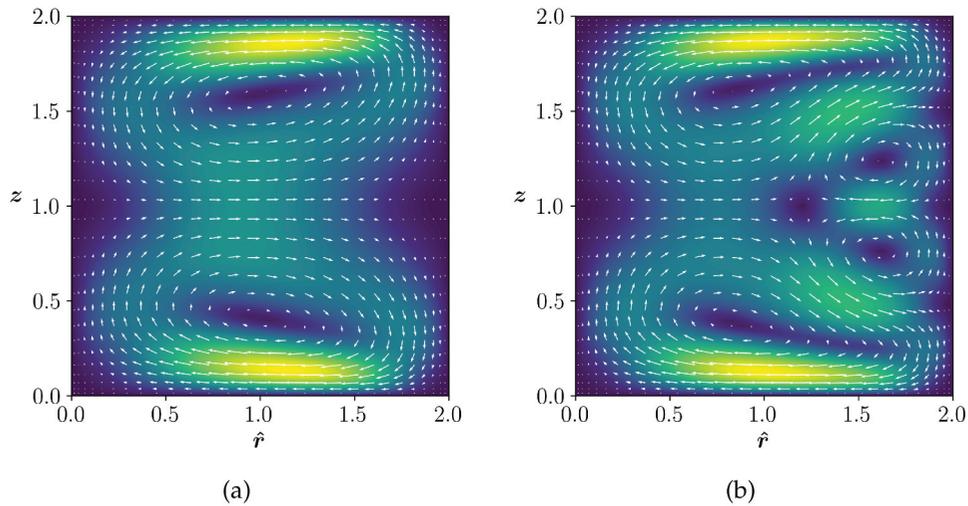


Figura 3. Vectores de flujo secundario de los casos (a) $De = 125$ y (b) $De = 150$ obtenidos con la malla 3. Los colores más claros están asociados a mayores valores del flujo secundario.

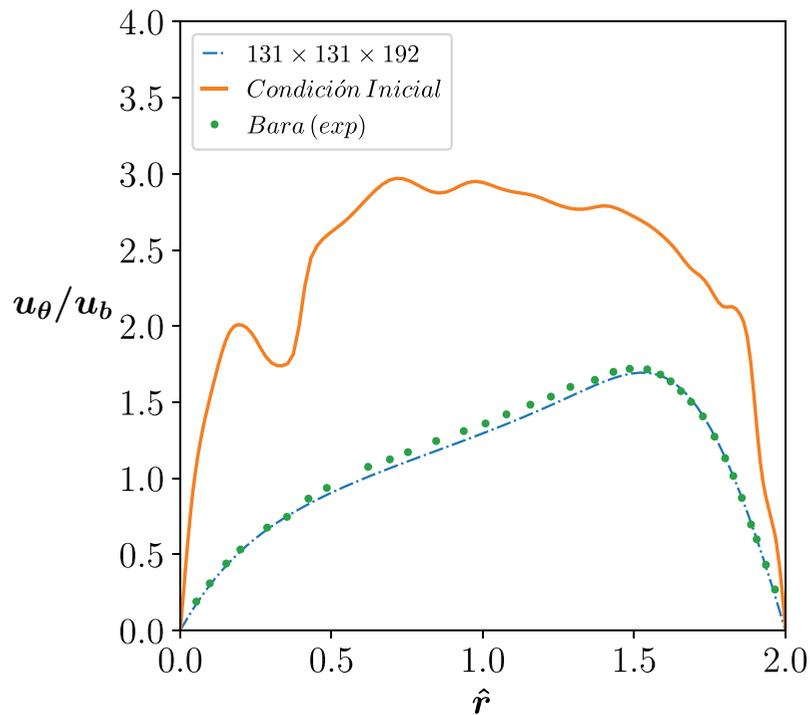


Figura 4. Velocidad en la dirección del flujo en función del radio para un flujo Dean de $De = 125$ obtenido a partir de una condición inicial perturbada.

4.2. Flujo turbulento en ductos curvos

El dominio espacial se discretiza considerando una grilla de $N_r \times N_z \times N_\theta$ puntos, con $N_r = N_z = 131$ y $N_\theta = 192$. La cantidad de puntos seleccionada se basa en experiencias anteriores de cálculos DNS para ductos rectos, en los que tal resolución es suficiente para resolver todas las escalas turbulentas

de importancia (Vinuesa *et al.* 2014). La discretización temporal se dimensiona siguiendo el criterio de la condición de Courant-Friedrichs-Lewy y al mismo tiempo resulta suficiente para capturar las escalas pequeñas del flujo.

Se llevaron a cabo simulaciones para dos valores del radio de curvatura R_m . Como condición inicial se utilizó

un campo de velocidades turbulento obtenido del cálculo DNS en un ducto recto. Se simuló durante un intervalo de 125 unidades de tiempo para alcanzar el estado estadísticamente estacionario y el promediado se llevó a cabo en un intervalo de 300 unidades de tiempo adicionales. Además, debido a la simetría de la corriente respecto de la horizontal por el centro de la sección, se realizó un promediado entre la mitad superior e inferior del ducto.

Se presentan aquí dos casos estudiados para valores de $R_m = 100$ y $R_m = 250$. En la [Tabla 2](#) se muestran los casos analizados junto con las principales propiedades del flujo. Se indican los valores del número de Reynolds basado en la velocidad principal media, u_b , y los valores de esta velocidad normalizados con la velocidad de corte promedio, $u_{\tau,avg} = \sqrt{\bar{\tau}_w/\rho}$, donde $\bar{\tau}_w$ es el esfuerzo de corte promedio en la pared. Se presenta también el número de Dean, definido en este caso como $De = Re_b \sqrt{R_m/L_r}$. Además, se indica la velocidad máxima en la dirección de la corriente, $\bar{u}_{\theta,max}$, la coordenada radial en donde ocurre este máximo, $\hat{r}_{u_{max}}$, y las velocidades de corte locales en la pared externa, $u_{\tau,r}$, e interna, $u_{\tau,l}$, calculadas sobre $z = 1$.

Tabla 2: Casos analizados en el presente trabajo.

Se observa que para el radio medio mayor, el número de Reynolds, Re_b , es levemente mayor, lo que implica que la imposición de una fuerza externa igual en ambos casos deriva en una velocidad media en la dirección del

flujo mayor. Los valores presentados en la [Tabla 2](#) muestran los valores de velocidad máxima en la dirección de la corriente y la ubicación de dicho máximo, que se desplaza hacia el centro de la sección. Este comportamiento se encuentra en concordancia con la existencia de un máximo en el centro de la sección para el caso de flujo turbulento en un ducto recto de sección cuadrada.

4.2.1. Flujo principal

En un ducto recto, el perfil de velocidad principal media presenta un máximo en el centro de la sección transversal y una distribución simétrica respecto a la línea vertical central. Además, por la simetría del mismo, los perfiles obtenidos sobre las mediatrices de las paredes horizontales y verticales resultan idénticos (Gavrilakis 1992; Martorana *et al.* 2018).

En los casos en los que el ducto presenta una curvatura puede verse que la ubicación del valor máximo se desplaza hacia el radio externo y el perfil se vuelve asimétrico. Este fenómeno ocurre debido al efecto de aceleración centrífuga experimentada por una parcela de fluido que se desplaza en la dirección angular. Vista desde la parcela de fluido, la fuerza de inercia que actúa sobre esta tiende a desplazarla hacia radios mayores, generando una redistribución del flujo que origina un gradiente de presión opuesto en la dirección radial. La distribución asimétrica de velocidad resultante es tal que el

R_m	$u_b/u_{\tau,avg}$	Re_b	De	$\bar{u}_{\theta,max}/u_{\tau,avg}$	$\hat{r}_{u_{max}}$	$u_{\tau,l}/u_{\tau,avg}$	$u_{\tau,r}/u_{\tau,avg}$
100	15.07	2713	271	19.66	1.40	0.780	1.177
250	15.12	2722	172	19.97	1.29	0.896	1.158

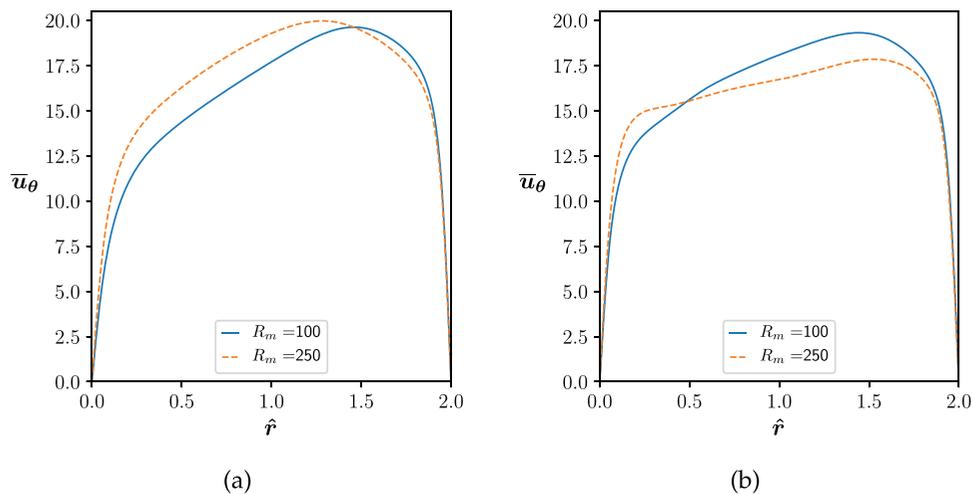


Figura 5. Velocidad media \bar{u}_θ en función del radio en $z = 1$ (a) y en $z = 0.5$ (b).

gradiente de presión equilibra a la fuerza inercial. A medida que crece el radio medio del ducto, este fenómeno se vuelve menos importante y entonces el máximo de los perfiles de velocidad se traslada hacia el centro de la sección. Aquí, para ambos casos, se observa una asimetría del perfil lo que indica que el efecto de este fenómeno no resulta despreciable.

En la [Figura 5](#) se puede observar que en la línea horizontal $z = 1$, el caso $R_m = 250$ posee un valor máximo mayor al del caso $R_m = 100$, mientras que en la línea horizontal $z = 0.5$ el valor máximo del caso $R_m = 250$ es menor que el valor del caso $R_m = 100$. Los valores de los máximos para el caso $R_m = 100$ son muy similares en ambas posiciones verticales. Esto muestra que la distribución en la dirección vertical tiende a ser más uniforme para el caso de radio menor. Este comportamiento también se observa en la [Figura 6](#), que exhibe la velocidad media \bar{u}_θ en función de la altura de la sección, para valores de $\hat{r} = 0.5$ y $\hat{r} = 1.5$.

La variación de la velocidad media \bar{u}_θ a lo largo de la altura de la sección en $\hat{r} = 0.5$ ([Figura 6a](#)) muestra un mínimo local en el centro de la sección para ambos casos. Este mínimo local es menor en el caso $R_m = 100$. La variación en $\hat{r} = 1.5$, en cambio, muestra un máximo local en la región central en el caso $R_m = 250$ mientras que el perfil para $R_m = 100$ permanece prácticamente constante sobre la mayor parte de la altura ([Figura 6b](#)). De la comparación entre estas figuras, se observa que cerca de las paredes horizontales las velocidades son muy similares en la vertical $\hat{r} = 0.5$, mientras que en $\hat{r} = 1.5$, los valores correspondientes al caso $R_m = 100$ son mayores. En el centro de la sección, en cambio, en $\hat{r} = 0.5$ la velocidad media \bar{u}_θ es mayor en el caso

$R_m = 250$, mientras que en $\hat{r} = 1.5$ las velocidades son similares.

En ausencia de flujos secundarios de primer tipo, la distribución de velocidad en la sección transversal es simétrica respecto a las dos líneas medias de la sección, con el máximo ubicado el centro de la misma. El flujo secundario genera en este caso, una transferencia de flujo desde regiones de elevado momento lineal en el radio externo del ducto hacia regiones de bajo momento lineal en el radio interno, mediante una recirculación desde el radio externo hacia el radio interno por las paredes superior e inferior del ducto. De esta forma, cuando el efecto del flujo secundario es significativo, las regiones cercanas a las paredes horizontales alcanzan valores de velocidad mayores que la región central de la sección. Este efecto puede observarse en la [Figura 6a](#) y la diferencia entre las velocidades es mayor en el caso de radio medio $R_m = 100$.

La distribución de la velocidad \bar{u}_θ , adimensionalizada con la velocidad media, u_b , sobre la sección transversal se presenta en la [Figura 7](#). En esta puede observarse el efecto de la fuerza centrífuga y del flujo secundario actuando de forma conjunta sobre el flujo medio. Mientras que la fuerza centrífuga ocasiona una asimetría de la distribución de velocidad desplazando las regiones de valor máximo hacia el radio externo, el flujo secundario genera una modificación cerca de las paredes superior e inferior por transferencia de momento lineal, originando la aparición de regiones de elevado momento lineal desplazadas hacia el radio interno del ducto.

Además, el gradiente de velocidad principal sobre la pared externa resulta mayor que el correspondiente a la pared interna debido a la asimetría del flujo medio. Este efecto es menor para el caso de radio mayor. Por otro

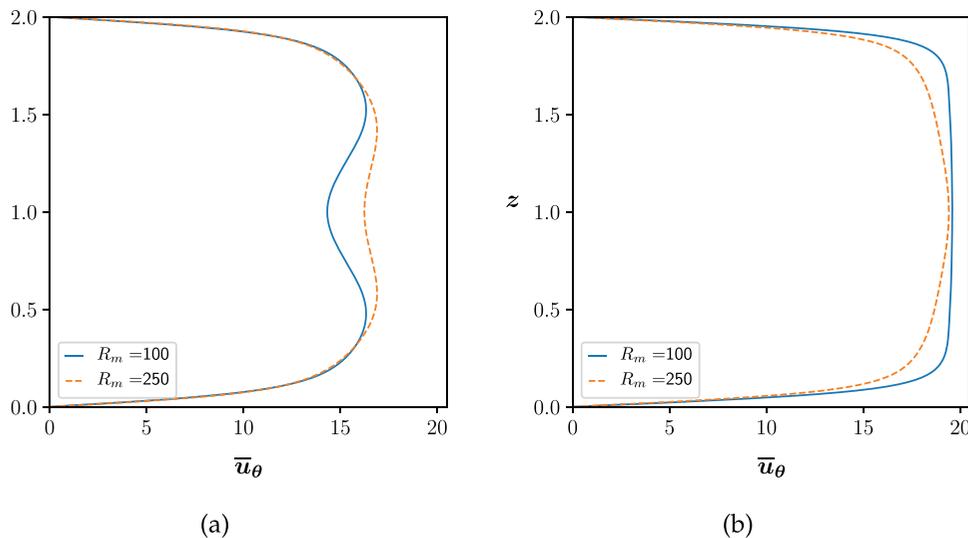


Figura 6. Velocidad media \bar{u}_θ en función de la altura en $\hat{r} = 0.5$ (a) y en $\hat{r} = 1.5$ (b).

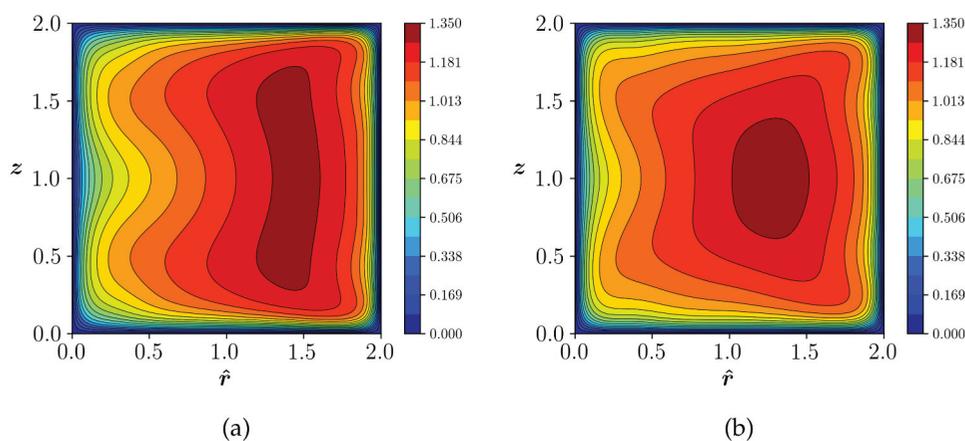


Figura 7. Velocidad principal \bar{u}_θ adimensionalizada con la velocidad media u_b para los casos (a) $R_m = 100$ y (b) $R_m = 250$.

lado, debido al desplazamiento de la posición del valor máximo de velocidad hacia el centro, los gradientes de velocidad en la dirección vertical de las paredes superior e inferior son menores en el caso de radio mayor.

4.2.2. Flujo secundario

En la **Figura 8** se muestran los patrones de flujo secundario medio representados por los vectores de velocidad secundaria sobre la sección. Los vectores representados en la mitad superior de cada figura poseen módulo unitario para exhibir con claridad el sentido de rotación y el tamaño relativo de las celdas de recirculación que se generan. En la mitad inferior de cada figura se exhiben los vectores con módulo normalizado con el valor máximo de cada caso con el objetivo de evaluar la intensidad relativa de las celdas de recirculación.

Además, se presenta la ubicación aproximada de los centros de las celdas de recirculación.

La importancia del flujo secundario de primer tipo relativa al flujo medio depende de la curvatura del ducto. A medida que se aumenta el radio medio, la componente de vorticidad en la dirección de la corriente disminuye y, por lo tanto, también lo hace la magnitud del flujo secundario de primer tipo. El flujo secundario de segundo tipo depende de la turbulencia y es esperable que sea más significativo para valores de número de Reynolds crecientes, es decir, para valores crecientes del radio medio.

El caso $R_m = 100$ presenta dos celdas de recirculación contrarrotantes mayoritarias, una de sentido antihorario en la mitad superior de la sección y otra de sentido horario en la mitad inferior. Estos vórtices transportan fluido desde el radio externo hacia el radio interno en las

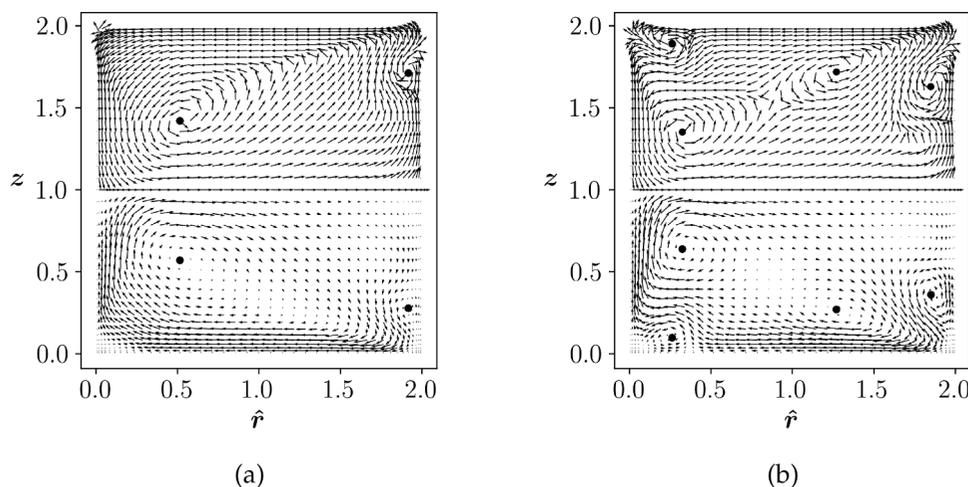


Figura 8. Vectores de flujo secundario medio para los casos (a) $R_m = 100$ y (b) $R_m = 250$. En la mitad superior los vectores poseen módulo unitario y en la mitad inferior están normalizados con el valor máximo de cada una de las secciones. Los puntos indican los centros de las celdas en forma aproximada.

regiones cercanas a las paredes horizontales y en dirección opuesta en la región central de la sección, modificando el flujo medio en concordancia con lo observado en la Figura 7. La magnitud de la circulación que se produce desde el radio interno hacia el radio externo es menor que la magnitud de la circulación que se genera cerca de las paredes horizontales. Además, se pueden observar dos celdas de vórtices pequeños ubicadas cerca de los vértices de la pared externa.

En el caso $R_m = 250$ se pueden observar ocho celdas de recirculación bien definidas. Se generan las dos celdas de gran tamaño que aparecen en el caso $R_m = 100$, con tamaños y magnitudes semejantes, pero con sus centros desplazados hacia el radio interno. También se originan las celdas ubicadas en la región cercana al radio externo, pero su tamaño es mayor que en el caso $R_m = 100$. Adicionalmente, se generan dos celdas de tamaño significativo en, $\hat{r} = 1, 3$, aproximadamente. Estas celdas poseen sentido opuesto al de las celdas menores generadas cerca de la pared externa en el caso $R_m = 100$. El patrón de flujo secundario lo completan dos celdas pequeñas que aparecen en los vértices de la pared interna. El sentido de estas celdas es el opuesto al de las celdas mayoritarias.

En un flujo turbulento en un ducto recto se genera un par de vórtices contrarrotantes en cada uno de los vértices de la sección (Gavrillakis 1992). En el caso $R_m = 250$ es posible distinguir una interacción entre los ocho vórtices generados por el flujo secundario de segundo tipo con las celdas que se originan debido al flujo secundario de primer tipo. Se obtiene así un patrón en el que los vórtices de menor tamaño se encuentran desplazados respecto a los generados en un ducto recto en el sentido del flujo secundario de primer tipo. Esto se debe a que para el caso $R_m = 250$, las contribuciones al flujo

secundario de la vorticidad y de la turbulencia resultan comparables.

En las Figuras 9 y 10 se muestran las velocidades radial, \bar{u}_r , y vertical, \bar{u}_z , respectivamente, adimensionalizadas con la velocidad media, u_b . Puede observarse que el flujo de mayor magnitud en dirección radial ocurre en las regiones cercanas a las paredes horizontales en dirección desde el radio externo hacia el radio interno. Los valores de la velocidad radial disminuyen del caso $R_m = 100$ al caso $R_m = 250$ debido a que la contribución de la curvatura al flujo secundario se ve atenuada. En el caso de radio medio menor se puede observar que la recirculación de mayor intensidad ocurre en las celdas generadas por el flujo secundario de primer tipo. En cambio, en el caso $R_m = 250$ la influencia de los vórtices originados por el flujo secundario de segundo tipo es de mayor relevancia y la contribución de ambos tipos de flujos secundarios es comparable. La Figura 10 muestra que la velocidad vertical se orienta desde la horizontal central de la sección hacia las paredes superior e inferior en la región cercana al radio externo, y en sentido contrario en el radio interno. Las celdas de recirculación no son simétricas respecto a la línea vertical central debido a que el flujo secundario de primer tipo transporta parcelas de fluido desde el centro hacia las paredes superior e inferior en la región donde $\hat{r} > 1.5$. Estas parcelas son advectadas hacia el radio interno y luego descienden en una región muy cercana a la pared interna.

La existencia de vórtices de menor tamaño que se generan por la turbulencia tiene un efecto minoritario pero no despreciable sobre el flujo medio. Se pueden observar vórtices cercanos a los vértices de la pared externa en el caso $R_m = 100$ y cerca de los cuatro vértices en el caso $R_m = 250$. Estos vórtices, que se pueden

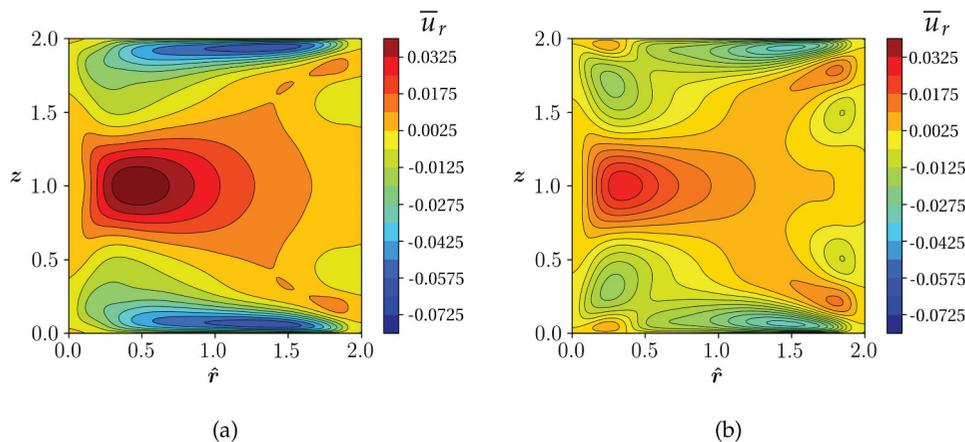


Figura 9. Velocidad radial, \bar{u}_r , adimensionalizada con la velocidad media u_b para los casos (a) $R_m = 100$ y (b) $R_m = 250$.

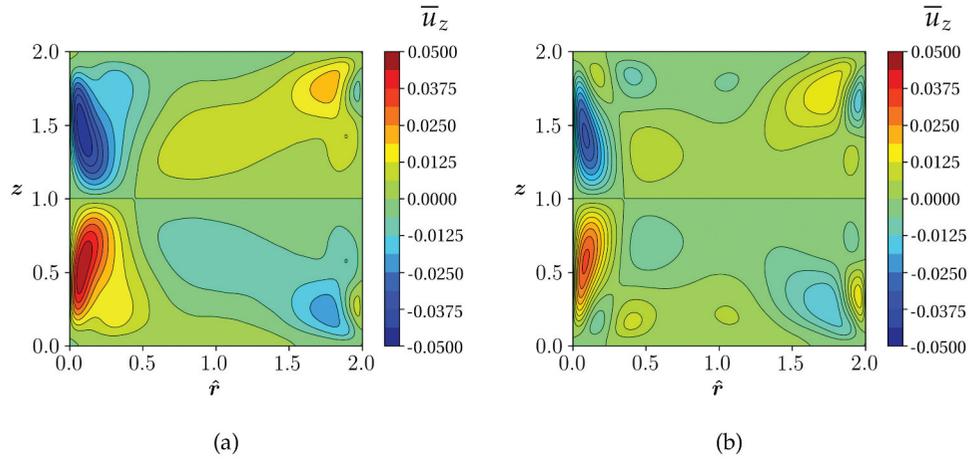


Figura 10. Velocidad vertical, \bar{u}_z , adimensionalizada con la velocidad media u_b para los casos (a) $R_m = 100$ y (b) $R_m = 250$.

observar con mayor claridad en la [Figura 8](#), tienden a transferir momento lineal hacia los vértices de la sección por las bisectrices de los mismos. Este fenómeno genera una distorsión en los contornos de flujo medio que es apreciable al comparar la distribución de velocidad media sobre los vértices internos en la [Figura 7](#).

La [Figura 11](#) exhibe los perfiles de velocidad radial y vertical en $\hat{r} = 1$ y en $z = 1.5$, respectivamente. En este caso, los resultados se muestran adimensionalizados con la escala de velocidad, $u_{\tau,avg}$. Se puede apreciar en la [Figura 11a](#) que la velocidad con signo negativo que se dirige hacia el radio interno es menor en módulo para el caso de radio medio mayor. En contraposición, los valores de velocidad en sentido contrario por la región central de la sección son mayores en el caso $R_m = 100$.

Respecto a la velocidad vertical ([Figura 11b](#)), en la región cercana a la pared externa, la velocidad vertical es positiva en el caso $R_m = 100$ y mayormente positiva en el caso $R_m = 250$. En particular, se puede observar que en este caso la velocidad vertical en la región cercana a la pared externa es negativa. Esto es producto de la formación de una celda de recirculación debida al flujo secundario de segundo tipo ([Figura 10](#)). En la zona cercana a la pared interna, en cambio, la velocidad vertical posee signo negativo en ambos casos.

Los contornos de intensidad de flujo secundario $\sqrt{\bar{u}_r^2 + \bar{u}_z^2}$ normalizados con la velocidad media se exhiben en la [Figura 12](#). Es posible observar que los valores máximos ocurren en las regiones cercanas a las paredes. En particular, en el caso $R_m = 100$ la magnitud de los valores cercanos a las paredes horizontales son mayores a la magnitud de los valores cerca de la pared interna. En cambio, para el caso de radio medio mayor, la magnitud de los valores máximos en las paredes horizontales es similar a la del valor de la pared interna.

De las comparaciones entre ambos casos se observa que la importancia relativa del flujo secundario respecto a flujo medio es menor para el caso de radio medio mayor. Los mecanismos responsables de este efecto son dos. Por un lado, a mayor radio medio, mayor velocidad media u_b ([Tabla 2](#)), y por otro lado la magnitud de la velocidad secundaria es menor utilizando la escala de velocidad $u_{\tau,avg}$ ([Figura 11](#)). Ambos efectos contribuyen a la disminución de la intensidad del flujo secundario.

El flujo secundario es mayor en magnitud para el caso $R_m = 100$. Su valor máximo sobre la sección, representado como porcentaje del flujo medio, $\max(\sqrt{\bar{u}_r^2 + \bar{u}_z^2}/u_b)$, es 6.2% en el caso $R_m = 100$ mientras que para el caso $R_m = 250$ es 3.3%. Para el caso de un ducto recto, la máxima velocidad sobre la sección corresponde aproximadamente a un 2% de la media ([Martorana et al. 2018](#)).

4.2.3. Distribución de corte en las paredes

En la [Figura 13](#) se presenta la distribución de la tensión de corte $\tau_{r\theta}$ para las paredes interna y externa. Los esfuerzos de corte adimensionales presentados aquí se obtienen mediante las expresiones 4.2.

$$\tau_{r\theta} \Big|_{\hat{r}=0} = \frac{1}{Re_\tau} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\bar{u}_\theta}{r} \right) \Big|_{\hat{r}=0}, \quad (4.2a)$$

$$\tau_{r\theta} \Big|_{\hat{r}=2} = -\frac{1}{Re_\tau} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\bar{u}_\theta}{r} \right) \Big|_{\hat{r}=2}, \quad (4.2b)$$

$$\tau_{rz} \Big|_{z=0} = \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial r} \Big|_{z=0}, \quad (4.2c)$$

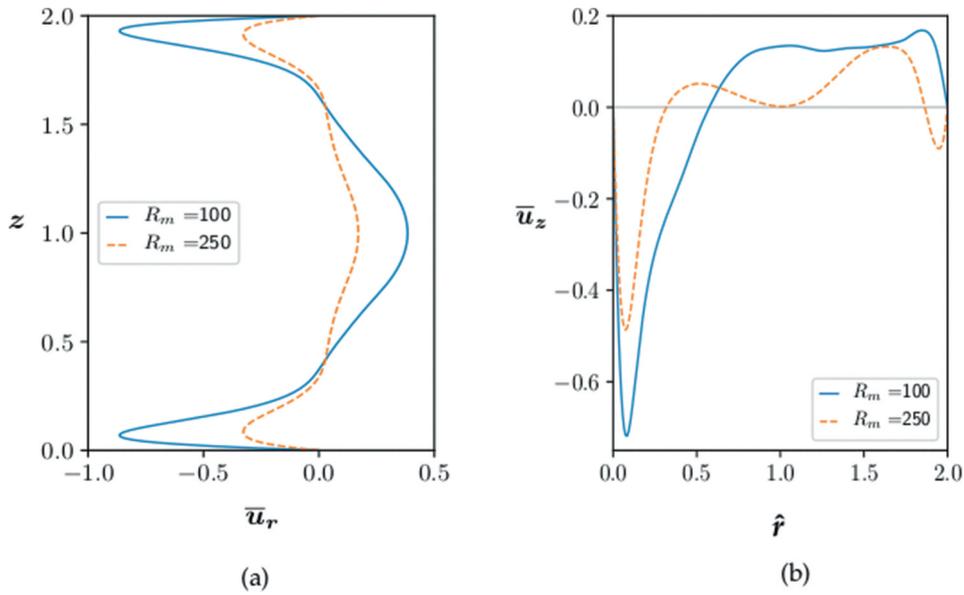


Figura 11. (a) Velocidad \bar{u}_r en función de la altura en $\hat{r} = 1$. (b) Velocidad \bar{u}_z en función del radio en $z = 1.5$.

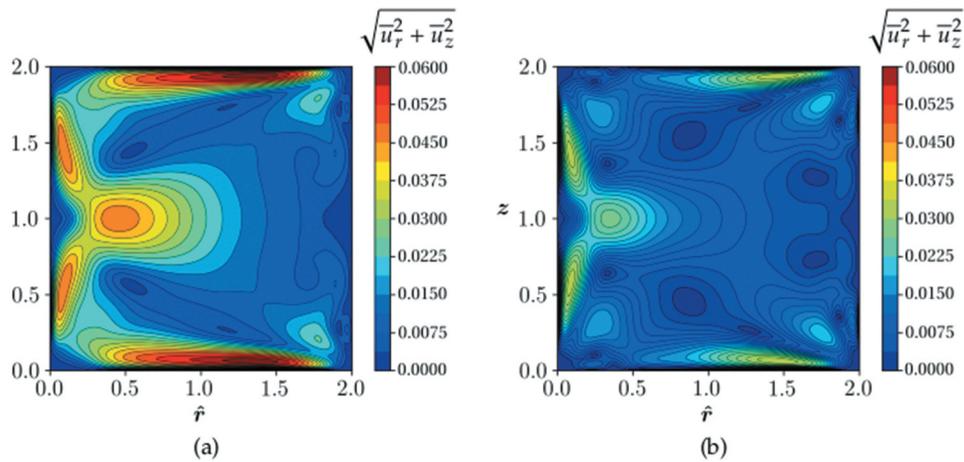


Figura 12. Magnitud del flujo secundario $\sqrt{\bar{u}_r^2 + \bar{u}_z^2}$ adimensionalizada con la velocidad media, u_b , para los casos (a) $R_m = 100$ y (b) $R_m = 250$.

$$\tau_{rz} \Big|_{z=2} = - \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial r} \Big|_{z=2}. \quad (4.2d)$$

En la pared interna se puede observar que el valor máximo de la tensión de corte es mayor para el radio medio más grande. Esto se debe a que, con respecto al caso de radio medio $R_m = 100$, el máximo de velocidad \bar{u}_θ se desplaza hacia el centro del ducto y que, al mismo tiempo, aumenta la velocidad media. La combinación de estos efectos provoca un incremento en la derivada de \bar{u}_θ respecto al radio sobre esta pared. Respecto a la pared externa, se observa que los valores máximos de tensión de corte son menores para el radio medio mayor,

a diferencia de lo ocurrido en la pared interna. Esto se debe principalmente a que, si bien la velocidad \bar{u}_θ es mayor para el radio mayor, también la posición del valor máximo se desplaza hacia el centro del ducto, disminuyendo la pendiente cerca de la pared.

En la Figura 14 se muestra la tensión de corte τ_{rz} sobre las paredes verticales. Sobre la pared externa, a diferencia de la tensión $\tau_{r\theta}$, los valores extremos son menores para el radio medio mayor debido a que esta tensión depende exclusivamente de la intensidad del flujo secundario. En cuanto a lo ocurrido en la pared externa, se observan valores extremos locales cerca de las paredes superior e inferior. Estos valores extremos representan la celdas de

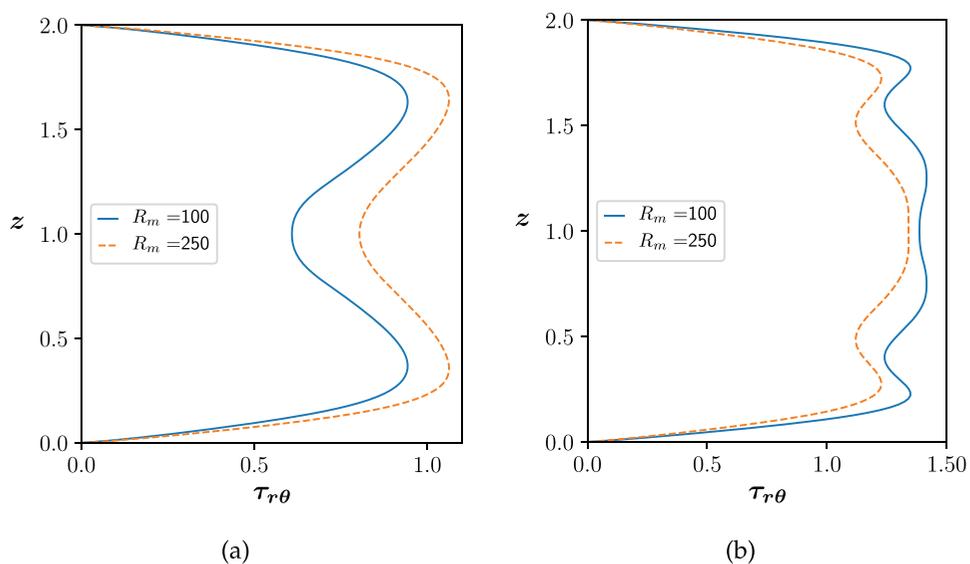


Figura 13. Tensión de corte en la dirección del flujo, $\tau_{r\theta}$ en las paredes verticales. (a) Pared interna y (b) pared externa.

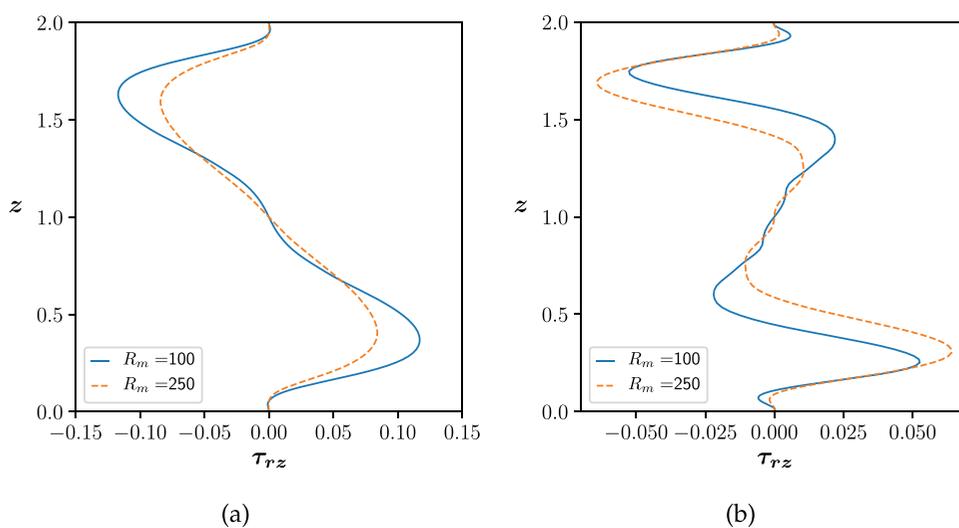


Figura 14. Tensión de corte τ_{rz} en las paredes verticales. (a) Pared interna y (b) pared externa.

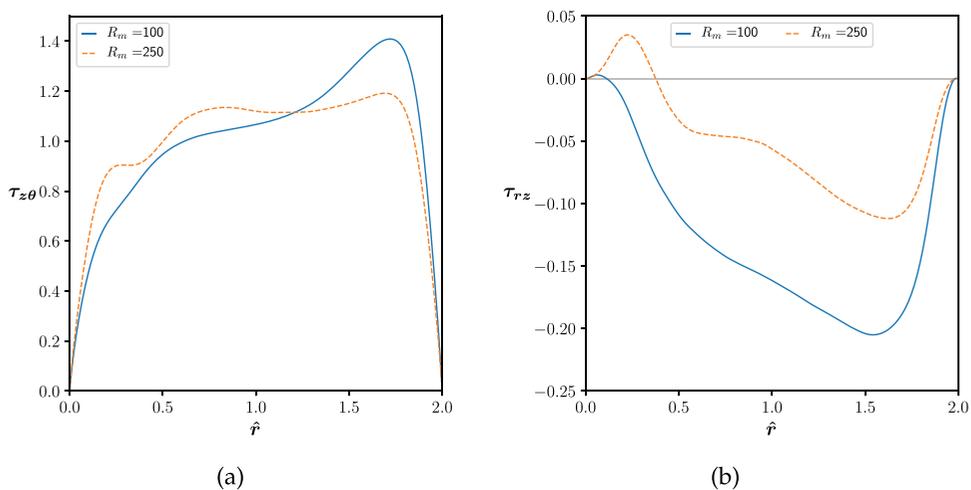


Figura 15. Tensiones de corte en las paredes horizontales. (a) Tensión de corte $\tau_{z\theta}$ y (b) tensión de corte τ_{rz} .

recirculación de segundo tipo y las mismas tienen un tamaño mayor para el caso de radio medio mayor (Figuras 9 y 10).

En la Figura 15 se muestran las tensiones de corte $\tau_{z\theta}$ y τ_{rz} en las paredes superior e inferior. En la distribución del esfuerzo de corte $\tau_{z\theta}$ que se presenta en la Figura 15a, se observa un punto de inflexión de la curva para el caso $R_m = 100$ cerca de $\hat{r} = 0.4$ que se transforma en un máximo local para el caso $R_m = 250$. Este máximo se debe a la existencia de los vórtices de segundo tipo que se generan sobre el radio interno. Respecto a la componente τ_{rz} (Figura 15b), se observan valores negativos y decrecientes en magnitud para el caso $R_m = 100$. Esto es producto de la disminución de intensidad de la circulación secundaria en dirección radial, dirigida hacia el radio interno. Para el caso $R_m = 250$ aparecen regiones de tensión de corte positiva generadas por las celdas de segundo tipo.

5. Conclusiones

En este trabajo se estudiaron las características de los flujos en ductos curvos de sección transversal cuadrada en régimen turbulento mediante simulaciones directas de turbulencia (DNS, por sus siglas en inglés). Se consideraron ductos en los cuales el flujo se encuentra sometido a un forzado homogéneo en la dirección azimutal. Se realizaron simulaciones a partir de la implementación de un código de cálculo pseudoespectral en coordenadas cilíndricas. Este código se obtuvo a partir de la modificación de un código utilizado para estudiar el flujo en ductos rectos (Martorana 2017; Martorana *et al.* 2018).

Se analizó la interacción de los flujos secundarios de primer y segundo tipo. Se estudiaron los patrones de flujo secundario y la estructura del flujo medio para dos valores de radio medio de curvatura.

Los perfiles de velocidad media en la dirección principal presentan una asimetría con respecto a la mediatrices de las paredes horizontales. Los valores máximos se encuentran desplazados hacia el radio externo debido al efecto de la aceleración centrífuga que experimenta una parcela de fluido que se desplaza en la dirección azimutal a través de un ducto curvo. La distribución en la sección del ducto de la velocidad en la dirección principal exhibe la asimetría generada por el desplazamiento del valor máximo hacia el radio externo y la modificación de los contornos de velocidad cerca de las paredes superior e inferior por la transferencia de momento lineal provocada por el flujo secundario de segundo tipo. En este sentido, en el caso del radio medio mayor se pueden observar variaciones en los contornos de la velocidad media en la dirección principal en las

regiones cercanas a los vértices internos con respecto al caso de radio medio menor.

La recirculación que se genera desde el radio externo hacia el radio interno, y que ocurre en las regiones cercanas a las paredes horizontales, es mayor para el caso de radio medio menor. El flujo secundario para el caso de radio medio menor muestra dos celdas contrarrotantes principales y dos vórtices pequeños en la región superior cercana a la pared externa. El caso de radio medio mayor, en cambio, presenta ocho celdas de recirculación bien definidas. A partir del patrón obtenido, se puede percibir la interacción entre los ocho vórtices que se originan debido al flujo secundario de segundo tipo y las celdas que se generan a partir del flujo secundario de primer tipo. La magnitud del flujo secundario respecto al flujo medio en el caso de mayor radio medio es mayor que el valor del caso de un ducto recto, por lo que se observa que la contribución del flujo secundario de primer tipo para este radio es apreciable.

El flujo medio se observa en la distorsión de las líneas de velocidad principal constante. Estas variaciones en la velocidad conducen a modificaciones de los perfiles de esfuerzo de corte sobre las paredes y estos esfuerzos pueden provocar la alteración del lecho del ducto a través de procesos de erosión y deposición del material erosionado o de sedimentos. Las distribuciones de corte en las paredes del ducto muestran que los valores máximos de tensión en la dirección del flujo en la pared interna son mayores para el caso de radio medio mayor y que en la pared externa son mayores para el caso de radio menor. También se pudo relacionar la presencia de flujos secundarios con la existencia de máximos locales en las distribuciones de corte, cuya ubicación sobre la pared se modifica para el caso de radio medio mayor con respecto al caso de radio medio menor.

Agradecimientos

Queremos agradecer el apoyo y la financiación de la Comisión Nacional de Energía Atómica (CNEA), del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) y de la Universidad Nacional de Cuyo (Proyecto SIIP bienal 2019-2020, 06/C557).

Referencias

- Bara, B., Nandakumar, K. & Masliyah, J. H. 1992 An experimental and numerical study of the Dean problem: flow development towards two-dimensional multiple solutions. *Journal of Fluid Mechanics* **244**, 339–376.
- Berardini, L. 2019 Caracterización de flujos secundarios turbulentos en ductos curvos. Proyecto Integrador, Instituto Balseiro, Universidad Nacional de Cuyo.
- Bradshaw, P. 1987 Turbulent secondary flows. *Annual Review of Fluid Mechanics* **19**, 53–74.

- Breuer, M & Rodi, W. 1994 Direct and Large-Eddy Simulation I. En *ERCOFTAC Workshop on Direct and Large-Eddy Simulation* (ed. P. R. Voke & J.P. Kleiser, L. Chollet), pp. 273–285. Kluwer Academic Publishers.
- Canuto, C., Hussaini, M., Quarteroni, A. & Zang, T. 1998 *Spectral methods in fluid dynamics*. New York: Springer-Verlag.
- Castiglia, F., Chiovaro, P., Ciofalo, M., Di Liberto, M., Di Maio, P. A., Piazza, I., Giardina, M., Mascari, F., Morana, G. & Vella, G. 2010 Modelling flow and heat transfer in helically coiled pipes. Part 2: Direct numerical simulations for laminar, transitional and weakly turbulent flow in the case of zero pitch. *Reporte Técnico*. Agenzia Nazionale per le Nuove Tecnologie, l'Energia e lo Sviluppo Economico Sostenibile.
- Cheng, K. C., Lin, R. & Ou, J. 1976 Fully developed laminar flow in curved rectangular channels. *J. Fluids Eng* **98**(1), 41–48.
- Dean, W. E. 1928 Fluid motion in a curved channel. *Proceedings of the Royal Society of London* **121** (A), 402–420.
- Dean, W. R. 1927 XVI. Note on the motion of fluid in a curved pipe. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **4**(20), 208–223.
- Gavrilakis, S. 1992 Numerical simulation of low-Reynolds-number turbulent flow through a straight square duct. *Journal of Fluid Mechanics* **244**, 101–129.
- Ghia, K. N. & Sokhey, J. S. 1977 Laminar incompressible viscous flow in curved ducts of regular cross-sections. *Journal of Fluids Engineering* **99**(4), 640–648.
- Hille, P., Vehrenkamp, R. & Schulz-Dubois, E. O. 1985 The development and structure of primary and secondary flow in a curved square duct. *Journal of Fluid Mechanics* **151**, 219–241.
- Hüttl, T. & Friedrich, R. 2001 Direct numerical simulation of turbulent flows in curved and helically coiled pipes. *Computers & Fluids* **30**, 591–605.
- Huser, A. & Biringen, S. 1993 Direct numerical simulation of turbulent flow in a square duct. *Journal of Fluid Mechanics* **257**, 65–95.
- Kim, J. & Moin, P. 1985 Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equations. *Journal of Computational Physics* **59** (2), 308–323.
- Madabhushi, R. K. & Vanka, S. P. 1991 Large eddy simulation of turbulence-driven secondary flow in a square duct. *Journal of Physics Fluids* **A3 11**, 2734–2744.
- Martorana, J. V. 2017 Simulación directa de turbulencia de flujo secundario con forzado no homogéneo. Maestría en Ingeniería, Instituto Balseiro, Universidad Nacional de Cuyo.
- Martorana, J. V., Cantero, M. I. & Dari, E. A. 2018 Simulación directa de turbulencia de flujo secundario en ductos con forzado no homogéneo. *Ribagua* **5**(2), 143–156.
- Münch, C. & Métais, O. 2006 Large eddy simulations of the turbulent flow in curved ducts: influence of the curvature radius. En *Direct and Large-Eddy Simulation VI* (ed. Eric Lamballais, Rainer Friedrich, Bernard J. Geurts & Olivier Métais), pp. 209–216. Dordrecht: Springer Netherlands.
- Münch, C. & Métais, O. 2007 Large eddy simulations in curved square ducts: variation of the curvature radius. *Journal of Turbulence* **8**, N28.
- Nikora, V. & Roy, A. G. 2012 *Secondary Flows in Rivers: Theoretical Framework, Recent Advances, and Current Challenges*, chap. 1, pp. 1–22. John Wiley & Sons, Ltd.
- Orlandi, P. & Pirozzoli, S. 2020 Turbulent flows in square ducts: physical insight and suggestions for turbulence modellers. *Journal of Turbulence* **21**(2), 106–128, arXiv: <https://doi.org/10.1080/14685248.2020.1740238>.
- Pinelli, A., Uhlmann, M., Sekimoto, A. & Kawahara, G. 2010 Reynolds number dependence of mean flow structure in square duct turbulence. *Journal of Fluid Mechanics* **644**, 107–122.
- Vinuesa, R., Noorani, A., Lozano-Durán, A., K., El Khoury G., Schlatter, P., Fischer, P. F. & Nagib, H. M. 2014 Aspect ratio effects in turbulent duct flows studied through direct numerical simulation. *Journal of Turbulence* **15**(10), 677–706.
- Yao, J., Zhao, Y. & Fairweather, M. 2015 Numerical simulation of turbulent flow through a straight square duct. *Applied Thermal Engineering* **91**, 800–811.
- Zhang, H., Trias, F. X., Gorobets, A., Tan, Y. & Oliva, A. 2015 Direct numerical simulation of a fully developed turbulent square duct flow up to Re_τ . *Journal of Heat and Fluid Flow* **54**, 258–267.