Periodico di Matematica (IV) Vol. I (1-2), giugno-dicembre 2019, pp. 97-150

La possibilità non-archimedea

Raffaele Mascella*

*Dipartimento di Scienze della Comunicazione,
Università degli Studi di Teramo - rmascella@unite.it

Sunto. *La geometria non-archimedea è una costruzione teorica prettamente speculativa, nascendo dalla negazione del postulato di Archimede, da sempre strettamente legato al concetto di continuità. In questo articolo, la geometria non-archimedea viene discussa rispetto alla sua consistenza logica, alla sua dignità concettuale e alla sua possibile concreta utilizzazione come geometria per la rappresentazione del nostro spazio fisico. Nel fare ciò, oltre al suo sviluppo teorico che avviene sgretolandola nozione di continuità, vieneconsiderata la posizione ontologica ed epistemologica di matematici e filosofi che se ne occuparono a cavallo del 1900, con in primis quella del suo inventore Giuseppe Veronese.*

Parole chiave: *Fondamenti, Non-archimedeo, Continuità, Infinito, Infinitesimo, Storia della Geometria, Assiomatica.*

1 - Introduzione e premesse storiche

La possibilità di una geometria non-archimedea, ed il suo rapporto con l'intuizione, la logica e lo spazio fisico,emerse e venne affrontata in profondità nei due decenni a cavallo del 1900. Tale discussione si deve soprattutto all'opera di

Giuseppe Veronese, ma ad essa contribuirono altri matematici e filosofi di spicco, come Peano ed Hilbert, e fu proseguita da alcuni studenti di Veronese, tra cui Levi-Civita e Bindoni.

Questi studi sono stati da quel momento dimenticati, salvo sporadici interessamenti, alcuni dei quali recenti dovuti a Hehrilch (1987, 1994, 1997), che ne hanno riproposto l'importanza anche filosofico-matematica. Sono studi che interessano innanzitutto aspetti geometrici, analitici, algebrici di teoria degli insiemi, tirando in ballo l'annosa questione della continuità, nonché i concetti di infinito e infinitesimo. In un recente articolo (Mascella 2006), peraltro, lo stesso autore ha ripercorso la questione da un'angolazione storico-critica, epistemologica e fondazionale della geometria, per chiarire i modelli di questa geometria, da quello di Veronese (1891) a quelli di più recente formulazione di Eugeni-Mascella (2002, 2005), con questi ultimi che ripropongono in chiave moderna l'incisivo risultato di Hahn (1907) sulla classificazione dei gruppi ordinati abeliani.

Il problema ed una prima esauriente formulazione del continuo geometrico si deve a Dedekind, che ne ha proposto una chiave di lettura prima dell'approfondimento stimolato da Veronese, perché prima ancora, risalendo anche all'età classica, la continuità era data in forma implicita, sfruttando postulati e proposizioni della teoria delle grandezze. La continuità, per ciò che poteva esser compreso, vista anche la difficoltà di concepire numeri e grandezze che fossero incommensurabili, era sottintesa, inevitabile.

Anche i concetti di infinito e di infinitesimo, che alla continuità sono strettamente legati, come si può evincere dalla moderna analisi matematica che affonda le radici nel calcolo infinitesimale, hanno avuto una storia lunga e piena di difficoltà. Nell'età classica vi era una certa propensione a rifiutare questi concetti, tanto da indurre Aristotele a formulare la classica e invasiva (anche nei secoli successivi) idea che essi potevano essere espressi solo in potenza, come idea astratta di processi che proseguivano in maniera indefinita, e non potevano essere attuali, cioè pensati come proprietà di particolari oggetti realmente esistenti. In fondo, in molti passaggi della matematica greca, l'idea di infinito attuale viene tirata dentro, anche se in modo nascosto e indiretto, ma è chiara la difficoltà che a quel tempo si avvertiva, rimasta intatta fino a Dedekind e Cantor, di trattare direttamente e manipolare tali oggetti, con la semplice considerazione dell'infinità come proprietà emergente di particolari insiemi.

La continuità geometrica di Euclide, prende a prestito tutta la teoria delle grandezze (attribuita da molti ad Eudosso) e formulata nel libro V degli *Elementi*. In particolare le definizioni terza«il *rapporto* è una relazione tra due grandezze dello stesso tipo» e quarta«due grandezze sono in rapporto l'una con l'altra, quando, se moltiplicate, sono in grado l'una di superare l'altra» (Boyer 1980: p. 134), ma non è esente da critiche. Come si evince dalle due definizioni, infatti, c'è una sorta di circolo vizioso, per cui prima si definisce il rapporto come qualcosa che ha a che fare con grandezze omogenee, poi, dimenticando di precisare cosa siano due grandezze omogenee, richiede che le grandezze siano in grado di superarsi con il postulato di Archimede, e dunque, con quest'ultimo che diviene la definizione di omogeneità tra grandezze. In realtà, l'omogeneità è probabilmente data per scontata dal matematico greco, così come dai suoi predecessori. Ad ogni modo, nella quarta definizione sono tirate in ballo oltre l'omogeneità delle grandezze, anche una relazione d'ordine, i multipli e sottomultipli delle grandezze, che portano a basare il concetto su numeri, e sul loro rapporto. E inoltre, con la stessa definizione, Euclide può escludere tutte quelle grandezze che hanno comportamenti atipici, ad esempio gli angoli di contingenza, che non sono "archimedei" con gli altri angoli rettilinei. Ma di ciò Euclide è ampiamente cosciente, come dimostra la proposizione 16 del libro III, in cui si precisa che in un cerchio, tracciando una linea ad angolo retto all'estremità di un diametro, questa cade fuori dal cerchio e tra questa ed il cerchio non si può tracciare nessun'altra retta e, inoltre, «l'angolo del semicerchio è più grande, ed il rimanente più piccolo, di ogni angolo rettilineo acuto». Dunque esiste un angolo indivisibile, infinitesimo rispetto ad ogni angolo rettilineo acuto.

La discussione probabilmente ha avuto inizio già prima di Euclide, perché Archimede in un passaggio della "Quadratura della parabola", dove utilizza il postulato nella forma di lemma, solo successivamente denominato "archimedeo", afferma che «Anche i geometri anteriori a noi si sono serviti di questo lemma. […] Accade ora che dei suddetti teoremi ciascuno è considerato non meno degno di fiducia di quelli dimostrati senza quel lemma: a noi basta che venga concessa simile fiducia ai teoremi da noi qui dati.»

Come richiesta di continuità, quella degli *Elementi* appare molto debole, se si pensa che essa, così come è concettualizzata oggi, oltre al principio di Archimede, si avvale anche di quello di Cantor. O, in alternativa, è definita con il solo principio di Dedekind, che è equivalente ai due precedenti presi assieme. L'interesse per la continuità, in particolare, apre le porte all'analisi di quali e quante siano le forme che la contemplano. Dal punto di vista geometrico conosciamo assiomatizzazioni diverse che portano a geometrie continue diverse, ad esempio nel senso non-euclideo. Ma l'interesse principale, in questo caso è sulle proprietà caratteristiche che "riempiono" la struttura, sia essa algebrica o geometrica, sia nel senso della densità, sia nel senso della raggiungibilità indefinita.

Nel libro V degli *Elementi* e nei seguenti volumi dell'opera euclidea, il concetto di continuità viene spesso chiamato in causa e, visto che la definizione è lacunosa, sembra sia considerato un concetto ovvio. Ne è un esempio la dimostrazione della Proposizione 18 del libro V in cui, date tre grandezze, Euclide ammette in modo naturale che deve esistere anche la quarta grandezza proporzionale. Così anche nel metodo di esaustione, la continuità e gli infinitesimi giocano un ruolo decisivo, anche se implicito. Sono testimonianza della profonda compenetrazione di tali concetti nella cultura greca la posizione di Anassagora che, rispetto all'infinitesimo dice (Dupont, 1981, I: p. 236):

> ***Rispetto al piccolo non vi è un ultimo grado di piccolezza, ma vi è sempre un più piccolo, essendo impossibile che ciò che è, cessi di essere per divisione»; mentre rispetto***

all'infinitoafferma: «Così vi è sempre qualcosa di più grande di ciò che è grande.

Euclide, e con lui il mondo greco dell'antichità, decidono di bandire dalla loro scienza l'uso esplicito di quantità infinitesime, ispirati dall'idea aristotelica che quantità di siffatta specie possono potenzialmente venir considerate, ma in effetti non ci sono tracce significative della loro presenza, o perlomeno, se anche piccole tracce vi sono, queste non possono alterare una costruzione sicura e completa delle grandezze numeriche e geometriche, che tale risulta anche in virtùdell'esclusione in toto di quelle quantità.

D'altronde, è difficile immaginare gli infinitesimi in atto perché una quantità possiamo concepirla o come un qualcosa che c'è, oppure come qualcosa che non c'è. Anche quando da una quantità finita procediamo alla sua riduzione, fino a che sarà possibile esplicitarla, essa è non nulla, o altrimenti se è arrivata al di sotto di ogni quantità finita, si è letteralmente annullata. Con gli infinitesimi si suppone l'esistenza di uno stato intermedio tra un qualcosa e il niente, e ciò rende difficile la loro concettualizzazione soggettiva e la visualizzazione.

Anche in seguito, la storia della geometria e della matematica ha avuto lunghe discussioni sulla possibilità dell'infinito e dell'infinitesimo attuale, con filosofi e matematici schierati tra favorevoli e contrari, alcuni con posizioni intermedie, accettando l'uno e rifiutando l'altro, alcuni indecisi. Tali discussioni hanno anche avuto un lungo periodo di arresto con il prevalere del concetto di limite, che ha fornito di nuovo una chiave di lettura potenziale dell'infinito e dell'infinitesimo, così come aveva suggerito Aristotele, negandoli come entità in atto. D'altro canto la stessa definizione di queste entità è rimasta a lungo ambigua, non pienamente formalizzata o formulata in modo lacunoso.

Per queste ragioni, che possiamo estendere anche al problema delle parallele, fino alla fine dell'Ottocento nessuno ha mai posto in dubbio la validità della geometria euclidea, e dunque nessuno si è allontanato dai suoi assiomi, e dalla concettualizzazione greca, e pertanto non vi sono state alternative contemplate o plausibilmente contemplabili. Certamente, fin dall'antichità greca si sono susseguiti una serie di tentativi di dimostrazione del postulato delle parallele, ma è soltanto nell'Ottocento che si è sentito il bisogno di riformulare i principi della matematica e della geometria.

In matematica, la pietra miliare di quel periodo è la teoria cantoriana degli insiemi, che ha aperto uno spiraglio di luce attraverso i numeri transfiniti, in cui è trattato ed indagato l'infinito come entità a se stante, per cui viene utilizzato l'infinito attuale manon l'infinitesimo attuale. Nel considerare gli insiemi di numeri, a partire dai numeri naturali, razionali e reali, Cantor non si occupa dei numeri costituenti gli insiemi, ma degli insiemi stessi e dunque ha a che fare per la prima volta con entità cardinalmente infinite, di cui fornisce caratteristiche e gerarchie. Cantor indaga la cardinalità di insiemi infiniti, così ammettendo l'infinito attuale, ma non c'è strada nella sua teoria che porta a considerare cardinalità infinitesime, e dunque l'infinitesimo attuale.

Ma la posizione di Cantor è ancora più netta. Non soltanto non utilizza gli infinitesimi, ma anzi combatte qualunque teoria che introduca gli infinitesimi. D'altro canto,gli infinitesimi mettono in dubbio perlomeno parte dell'edificio teorico di Cantor visto che l'infinitesimo richiama necessariamente anche l'infinito: se a è infinito, allora $1/a$ è infinitesimo, e viceversa. Cantor stesso afferma,secondo Veronese (1909, p. 198),di aver trovato una dimostrazione sull'impossibilità dell'infinitesimo attuale. Tuttavia,Veronese la rigetta facendo notare come anche Stolz l'avesse messa in discussione, rilevando come tale dimostrazione non possa riguardare gli infinitesimi così come li hanno definiti lui stesso e Du Bois-Reymond. Gli infinitesimi da loro definiti, infatti, non soddisfano l'assioma archimedeo ma non sono nemmeno grandezze lineari.

In geometria, la rivisitazione dei fondamenti ha luogo con la scoperta delle geometrie non-euclidee, peraltro dovuta, almeno in parte, ad un ulteriore tentativo di dimostrazione di detto postulato, stavolta in modo diverso (attraverso la sua negazione nel tentativo di giungere ad una contraddizione) ad opera di Girolamo Saccheri. Nascono così nuove possibilità geometriche, tutte logicamente fondate, ma ancora non rivestite di quell'importanza che il lavoro di Einstein ed i successivi progressi della fisica riescono a fornire in un secondo momento alla geometria ellittica.

È in questo contesto che arrivano le due decadi prima menzionate, ed il lavoro di Veronese che ispira un'ulteriore possibilità geometrica, stavolta prendendo in esame la non validità del postulato di Archimede, trascurato fino ad allora in ambito geometrico, ma in effetti utilizzato in modo implicito a piene mani. Se nel caso delle geometrie non-euclidee ad essere indagato e sottoposto a rivisitazione è il postulato delle parallele, nel caso delle geometrie non-archimedee ad essere indagato e rivisitato è il postulato della continuità. Dunque, da questo punto di vista, una genesi analoga.

Il problema, nella sua vera essenza, è così formulato da Veronese (1909, p. 198):

> *Non si trattava adunque di vedere se esistono grandezze infinite ed infinitesime, bensì se esistevano segmenti rettilinei infiniti ed infinitesimi attuali, tali da soddisfare le proprietà fondamentali della retta, eccetto l'assioma d'Archimede.*

La matematica dell'Ottocento, infatti, assume esplicitamente la corrispondenza tra continuo geometrico intuitivo e continuo numerico, ritenendo che i due insiemi siano correlati biunivocamente, e dunque identificandoli anche se questi appartengono a piani di argomentazione diversi. Questa posizione ha impedito l'indagine analitica, perché il continuo geometrico, una volta identificato con l'insieme dei reali, necessariamente soddisfa anche l'assioma archimedeo trasportato implicitamente dalla struttura numerica. E allora Veronese, accorgendosi delle conseguenze, ne ripensa formulazione e prospettive. L'utilità della geometria non-archimedea sta anche nell'aver permesso di chiarire il concetto di continuità e del rettilineo continuo geometrico. Quindi non si tratta semplicemente di un assioma che viene ammesso o negato, perché la sua profondità è più ampia di quanto non si potesse ammettere, anche in relazione con lo scarso interesse storico.

In questo articolo, farò riferimento direttamente al pensiero di Giuseppe Veronese, che oltre ad essere stato l'inventore della geometria non-archimedea è stato anche il suo ferreo sostenitore, in una sovrapposizione tra costruzione matematica e indagine filosofica, difendendo la sua possibilità logica e concettuale in un contesto peraltro ostile intorno alle sue posizioni. Ad esempio,nel difendere la sua opera, Veronese ritiene di aver risolto definitivamente la questione dell'infinitesimo attuale, attraverso la sua ricerca sul continuo lineare, e afferma (Veronese, 1905, p. 347):

> *Così ho risolto la secolare questione del segmento infinito e infinitesimo attuale, della quale si erano occupati insigni filosofi e matematici, non mai risolta perché non era stata mai bene posta.*

2 - Il modello di Veronese e la sua critica

Veronese per primo, nel 1891, formula la possibilità di una struttura rettilinea continua che prescinda dal postulato di Archimede e definisce due assiomi distinti che insieme equivalgono all'assioma di Dedekind, uno dei quali è proprio il postulato di Archimede. Il lavoro non è di facile comprensione, e viene giudicato in modo radicalmente diverso dai suoi contemporanei.

La primigenia della geometria non-archimedea di Veronese sta nel modello fornito, ma anche nello spiraglio aperto rispetto alla corretta formulazione dei postulati geometrici, con particolare riferimento ai postulati della continuità.

<u>Principio di Dedekind:</u> Se un segmento di retta AB è diviso in due parti in modo che:

(1) ogni punto del segmento AB appartiene ad una sola delle due parti;
(2) A appartiene alla prima parte, B alla seconda;
(3) un punto qualunque della prima parte precede un punto qualunque della seconda, nell'ordine AB del segmento;

allora esiste un punto C del segmento AB, che può appartenere all'una come all'altra parte, tale che ogni punto di AB che precede C appartiene alla prima parte, ed ogni punto che lo segue appartiene alla seconda parte.

Veronese si accorge che viene inglobato sia il carattere della continuità che intuitivamente percepiamo, ma anche qualcosa che nasce da questioni esperienziali, che non ha nulla a che fare con il continuo. Si tratta del fatto che le grandezze geometriche possano raggiungersi reciprocamente attraverso i propri multipli, e non soltanto all'interno del nostro spazio di osservazione. Con la formulazione di Dedekind, infatti, questa proprietà è deducibile dalle premesse, e dunque Veronese pensa di dividere il postulato, da un lato prendendo il postulato archimedeo, dall'altro completando nel senso della continuità facendo riferimento a classi contigue costruite con i segmenti invece che con i punti.

<u>Principio di Archimede:</u> *Due grandezze stanno in rapporto l'una con l'altra, quando, se moltiplicate, sono in grado l'una di superare l'altra.*

<u>Principio di Cantor</u> *Se due classi di segmenti di retta sono tali che:*

(1) nessun segmento della prima classe sia maggiore di qualche segmento della seconda;
(2) prefissato un segmento s piccolo a piacere, esistono un segmento della prima classe ed uno della seconda la cui differenza è minore di s

allora esiste un segmento che non è minore di alcun segmento della prima classe né maggiore di alcun segmento della seconda.

Dunque con un postulato del continuo in una nuova forma. D'altro canto l'uso di punti per spiegare la continuità sembra portare fuori strada, perché non è con i punti che il "complesso" continuo si può spiegare, non è con l'insieme dei punti che il continuo sembra potersi comporre.

Così Veronese introduce i segmenti infiniti ed infinitesimi attuali per via geometrica, rilegando in secondo piano la trattazione aritmetica, che in parte dà lui stesso, ma più in particolare demanda al suo studente Levi-Civita (1898) quando si accorge che questa differenza di approccio è giudicata diversamente dagli altri studiosi, come un'esposizione lacunosa, non chiara, confusionaria. Levi-Civita, dal suo canto, dà un contributo importante all'affermazione della concezione non-archimedea, dando una formulazione analitica più rigorosa in luogo di quella logico-sintetica di Veronese. Egli costruisce nuovi numeri denominati *monosemii* sulla scorta dell'idea di Veronese, ma da un'angolazione analitica, costruendo peraltro una teoria più completa di Veronese.

L'esemplificazione immediata della geometria non-archimedea è la cosiddetta *retta di Veronese*, che possiamo immaginare algebricamente nella struttura avente come dominio il prodotto cartesiano tra i numeri relativi ed i reali, fornita della congruenza tra segmenti e della relazione d'ordine lessicografica tra i punti. Geometricamente, invece, possiamo immaginare come in fig. 1, una sequenza di linee rette parallele a distanza predeterminata e considerare l'insieme così costituito come un'unica retta, in cui si definisce un ordine dato in modo naturale se i punti sono sulla stessa linea, e considerando un punto antecedente rispetto ad un altro punto se il primo si trova su una linea antecedente rispetto alla linea dell'altro. I numeri finiti, infiniti ed infinitesimi di Veronese d'ordine finito sono espressi con le unità $1, \infty_1, \infty_1^2, \ldots, \infty_1^n, \ldots, 1/\infty_1, 1/\infty_1^2, \ldots, 1/\infty_1^n$, e così via. Veronese stesso chiarisce la natura dei suoi numeri in una nota, con linguaggio sorprendentemente attuale (Veronese 1891: p. XXVI): «I nostri numeri infiniti ed infinitesimi sono in fondo numeri complessi speciali con infinite unità».

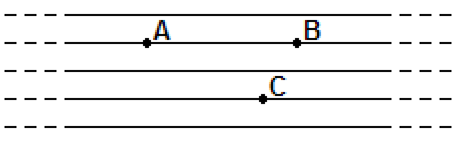

Fig. 1: I punti sono così ordinati: A < B, A < C, ma anche B < C

Le ragioni che in passato avevano fatto rifiutare le proposte degli infinitesimi attuali non si applicano agli infinitesimi di Veronese, ma non si applicano nemmeno alle proposte di Stolz e Du Bois-Reymond. E ciò viene così esplicitato (Veronese 1891: p. XXVII):

> *Sosteniamo l'infinitesimo attuale perché ne abbiamo dimostrato non solo la possibilità ma anche l'utilità nel campo geometrico; ché anzi per quanto possa essere per sé interessante una tale teoria non l'avremmo forse qui trattata senza le applicazioni geometriche che ne abbiamo fatte.*

Per dare forma alla sua idea, il matematico veneziano usa un approccio originale, che ha influenzato la scuola italiana per molti anni, basato su tecniche intuitive piuttosto che su tecniche algebriche ed analitiche. Per questa scelta, come vedremo, Veronese fornisce anche motivazioni logiche e filosofiche.

Ma la proposta non viene accolta positivamente da tutti. Viene accolta ad esempio da Hilbert, che ha una reazione positiva, così come da Hans Hahn, che proseguono nel programma di ricerca: il primo che si dà il problema della consistenza di un tale sistema, il secondo che si dà quello di dare una giustificazione algebrica al "continuo intuitivo" di Veronese. Ma anche Poincaré riconosce alla geometria non-archimedea la dignità esistenziale, e la sua possibilità logica derivante dall'indipendenza dell'assioma di Archimede (risultato, questo, riconosciuto ad Hilbert). Tuttavia, Poincaré inizialmente non sembra comprendere la differenza tra i numeri di Veronese, che formano un continuo numerico non-archimedeo, ed i numeri infiniti di Cantor che non sono affatto continui. Ma Veronese aveva da subito osservato (1891: p. XXVI): «Dai segmenti infiniti ed infinitesimi deduciamo nuovi numeri interi infiniti, i quali tanto nella somma come nella moltiplicazione sono soggetti alle leggi ordinarie, e quindi si distinguono dai numeri transfiniti di G. Cantor, i quali non si possono applicare alla costruzione dei segmenti infiniti della nostra forma fondamentale.»

Dall'altra parte, diversi matematici attaccano l'introduzione di Veronese di grandezze infinitesime attuali. Tra questi, Peano, Cantor, Killing e Schoenflies. L'aspra critica di Peano, ad esempio,riguarda la mancanza di rigore nell'esposizione, ma anche la non giustificazione dell'uso di segmenti infiniti e infinitesimi.

Veronese rivendica e giustifica l'introduzione dei segmenti infinitesimi attuali e l'importanza fondazionale che questi rivestono, perché tali questioni vanno poste «in modo analogo a quelle relative ai postulati delle parallele e delle dimensioni dello spazio» (Veronese 1898: p. 80). E l'infinitesimo attuale, pur essendo una questione antica, non ha potuto avvalersi di una delineazione chiara del problema, anzi spesso complicata da «considerazioni filosofiche ad esso estranee» che hanno proposto orientamenti e declinato il problema in modo confuso e infruttuoso. Ciò ha probabilmente impedito la sua delineazione chiara, tanto nel senso della possibilità, quanto eventualmente dell'impossibilità logica.

È proprio la risposta che noi potremmo assegnare a questa richiesta di chiarezza, ad essere utile per delineare in profondità il legame del postulato di Archimede con gli altri postulati geometrici, e a rispondere, come conseguenza ultima, alla stessa analisi compiuta efficacemente sul postulato delle parallele, ovvero se esso può essere ottenuto deduttivamente dagli altri postulati o se invece ne è indipendente. Nei *Fondamenti* viene presentato un continuo rettilineo senza bisogno di postulati per la continuità, omettendo la proprietà archimedea e ottenendo la proprietà cantoriana attraverso una particolare definizione dei segmenti (che comunque richiama le classi contigue). In altri termini, tutta la continuità è ottenuta come proprietà degli elementi introdotti, e ciò butta luce ancora maggiore sulla continuità, ed in riferimento al postulato di Dedekind, dal quale si ottengonoi postulati di Archimede e Cantor come conseguenze.

Ciò dimostra che il postulato di Archimede sebbene possa sembrare un postulato che concede proprietà nuove alle grandezze interessate, assegnando la possibilità di superarsi a vicenda attraverso i propri multipli, va invece riguardato come una limitazione imposta a quegli stessi elementi, che invece sono vincolati all'essere "superabili" dagli altri elementi. E in definitiva è una limitazione sulla stessa ricerca scientifica, quando tale proprietà si presuppone senza eccezioni, ed a maggior ragione è limitante se interviene in modo implicito o sottinteso.

Tornando alle critiche, quella di Killing è dubbiosa circa i numeri transfiniti di Veronese, quella di Cantor è invece molto netta, affermando, anche se senza dimostrazione (Veronese 1905: p. 347), l'impossibilità dei segmenti infinitesimi attuali. A Cantor, che aveva introdotto con successo i numeri transfiniti, Veronese risponde che con tali numeri non è possibile costruire segmenti infinitesimi attuali e la geometria non-archimedea, ma soprattutto che i suoi numeri transfiniti cantoriani sono diversi dai numeri di Veronese, come abbiamo anticipato poco sopra, rispetto alla mancata comprensione di Poincaré sullo stesso punto.

Poi vi è la particolare posizione di Klein, che non si pone in opposizione, ma si astiene su tutta la polemica, sia sui nuovi concetti, sia sulle risposte e critiche degli altri matematici e filosofi, e ciò gli è in fondo possibile, a suo dire, perché da essi non si sono ancora ottenuti risultati geometrici rilevanti. A Klein, Veronese però obietta la visione intorno alla semplicità dei postulati, che per Klein devono essere in numero il più possibile ridotto, per non complicare il sistema fondazionale. Per Veronese ciò può farsi ma con alcune limitazioni, perché procedendo in quel modo su tutti i postulati geometrici, si perdono di vista gli aspetti salienti attorno a cui ruota la costruzione, su cui si lavora logicamente e deduttivamente e da cui possono scaturire anche novità future.

Alla base della difficoltà del lavoro di Veronese vi sono diverse questioni, che spaziano dalla natura dei concetti, alla natura del metodo adottato dal matematico italiano. Sulla prima tipologia di difficoltà, Veronese non utilizza nulla che possa semplificare la trattazione, ma d'altronde certe difficoltà gli paiono inevitabili come evidenzia più volte. Nel 1891 (p. XXXVIII) afferma:

> *… in questi argomenti nulla deve essere trascurato, e che la concisione quando trascina seco la indeterminatezza dei concetti è un grave difetto. In una sola reticenza possono essere nascoste tali proprietà la cui dimostrazione richieda una radicale trasformazione dei principi medesimi.*

Nel 1898 (p. 86 e seguenti) invece:

> *Più si discende e più difficili sono le questioni intorno ai fondamenti della scienza, di guisa che le maggiori difficoltà s'incontrano dapprincipio.*

E poiché lo scopo del lavoro complessivo non è centrato sul solo postulato di Archimede, la complessità concettuale della fondazione geometrica, associata alla nuova visione e ai perfezionamenti suggeriti, non può certo renderne più agevole la comprensione. Il metro della sua indagine, nella comprensione dello spazio e nella sua formalizzazione, parte dagli elementi di base della logica, che non hanno alcuna premessa alla loro chiara esplicitazione. Nulla viene dato per scontato, dunque è chiaro che tutta l'argomentazione di Veronese procede molto lentamente, con passaggi logico-deduttivi brevi, e con risultati parziali che evolvono in modo cauto nella costruzione dell'edificio teorico. Tanto per intenderci, Veronese difende il suo linguaggio e la sua trattazione che ha inizio dalle proposizioni più semplici che si possano immaginare, con un sapore classicheggiante e cartesiano (Veronese, 1891: p. 1): «1. Penso. 2. Penso una cosa o più cose. […] 3. Penso prima una cosa, poi una cosa» e così via.

Applicando un metodo «basato sul puro ragionamento» (1898: p. 83), Veronese stabilisce le proprietà fondamentali della forma geometrica rettilinea, che può vivere per suo conto senza riferimento alcuno al continuo numerico. Egli utilizza i segmenti, cui assegna una nomenclatura fatta di simboli per fissare le idee, su cui prova la possibilità di effettuare le operazioni fondamentali, seguendo le leggi ordinarie, finanche al prodotto e alla divisione di segmenti. Ma il problema in questo caso non è di natura tecnica, incentrata sulle regole del calcolo aritmetico ed analitico, che si può pure derivare su tali simboli (e come aveva d'altronde fatto lo stesso Levi-Civita), quanto piuttosto sulla possibilità geometrica dell'esistenza di tali segmenti, risultanti solo dall'approccio sintetico e non attraverso il tramite dei numeri reali, con l'associazione dei punti della retta ad insiemi numerici. Dunque lo scopo di questo programma di ricerca non consiste nell'individuazione di regole di calcolo semplici o algoritmi risolutivi per tali operazioni, ma è sulla possibilità di fondare la geometria della retta sugli infiniti e sugli infinitesimi attuali, non quali elementi analitici (come con Levi-Civita) ma come elementi propriamente geometrici. Ciò anche se la corrispondenza con i monosemi di Levi-Civita è immediata, quando si considerano i numeri di Veronese applicati non solo a valori interi, ma al completo campo dei reali. Al numero transfinito di Levi-Civita a_ν si può far comodamente corrispondere il numero di Veronese $a\infty_1^\nu$, lasciando in tal modo inalterate le proprietà analitiche. Se avesse utilizzato gli strumenti analitici, le sue ricerche intorno ai principi della geometria sarebbero state «più ristrette».

La risposta del matematico veneziano alla critica fatta dalla comunità scientifica rileva da un lato i proclami che si fanno sulla giustezza, l'utilità e l'insostituibilità del metodo sintetico, dall'altro illoro procedere nella costruzione teorica in maniera diversa, utilizzando gli strumenti più semplici e più diretti, con la stessa pretesa di validità generale. Veronese afferma (1898, p. 87):

> *Analisti insigni, compreso Klein, insegnano che deve preferirsi per la trattazione dei principi della geometria il metodo sintetico, ma questo metodo per sé e ancora più colle nuove forme assunte dall'intuizione geometrica che urtano vecchie abitudini e radicate convinzioni, è oggidì meno seguito e riesce a molti più difficile del metodo analitico.*

e ancora (Veronese, 1905, p. 350):

> *… mentre analisti insigni convengono che il metodo migliore per trattare i principi della geometria è quello sintetico, avviene poi che questo metodo è il più trascurato.*

In molti passaggi nella Prefazione dei *Fondamenti*, sembra quasi che Veronese abbia prestato il fianco agli attacchi della sua geometria ammettendo da subito una serie di possibili critiche e dando punto per punto in anticipo le sue risposte.

Un'ultima riflessione sulla risposta di Veronese a Poincaré. Sebbene Veronese in quegli anni risponde con alcuni articoli, ed in una qualche misura fa rispondere ai suoi allievi con altri articoli che precisano contorni e rapporti tra la sua ricerca e quella di altri matematici, non può, per sua stessa ammissione, rimanere in silenzio nei confronti dei giudizi di Poincaré, che egli stima profondamente, e che è talmente noto e rispettato che i suoi giudizi si diffondono rapidamente, e sono ormai riportati anche da altri scrittori nelle loro opere. Poiché Poincaré tocca anche la questione della priorità delle geometrie non archimedee, come Veronese precisa anche nel titolo di un articolo (Veronese, 1905), la risposta appare necessaria.Poincaré in una relazione all'opera di Hilbert, *Grundlagen der Geometrie* del 1899, scritta nell'occasione di un conferimento di un premio allo stesso matematico tedesco, individuanella geometria non-archimedea la concezione più originale dell'intero volume, seppure Hilbert ha avuto un precursore in Veronese. Ma per Veronese non esistono dubbi sulla scoperta del non-archimedeo (Veronese 1905: p. 349): «La priorità poi della geometria non archimedea debbo reclamarla intera», ma non per questo attacca l'opera di Hilbert, che invece ritiene meritevole (Veronese, 1905: p. 349) «per l'eleganza e la semplicità della sua esposizione, per la profondità delle sue vedute filosofiche, per le conseguenze che ha tratto dall'idea fondamentale, Hilbert ha ben fatto questa sua *nuova geometria*». Ma nonostante ciò, e forse a maggior ragione rende gli onori ad Hilbert, la sua geometria è più completa di quella hilbertiana (come dimostra Bindoni nel 1902), che nella prima edizione del volume utilizza un solo assioma di continuità, cioè quello espresso nella forma di Dedekind, per poi inserire "solo" nella seconda edizione due postulati, uno dei quali è quello di Archimede.

3 - Consistenza e dignità concettuale

Costruendo un campo ordinato non-archimedeo nella seconda edizione del suo *Grundlagen*, Hilbert dimostra che una geometria non-archimedea può in effetti esistere logicamente. Per fare questo, Hilbert si serve di un procedimento costruttivo per generare un campo di numeri infiniti ed infinitesimi. Hilbert considera il dominio$\Omega(t)$ delle funzioni algebriche reali di variabile reale, che si ottengono attraverso addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione ed estensione pitagorica (cioè l'operazione$\left|\sqrt{1+\omega^2}\right|$, dove $\omega(t)$ è una qualunque altra funzione del dominio). Sull'insieme $\Omega(t)$ viene quindi costruita una relazione d'ordine considerando il comportamento asintotico delle funzioni, o se vogliamo per valori sufficiente grandi oltre gli zeri (che sono in numero finito) delle funzioni. In altri termini, risulta $a(t) \leq b(t)$se la funzione differenza$c(t) = b(t) - a(t)$da quel punto in poi ènon negativa. È facile dimostrare che la struttura $(\Omega(t), \leq)$ non soddisfa l'assioma archimedeo. Poi, una geometria tridimensionale non-archimedea è costruibile sul dominio $\Omega(t)^3$, con l'ordinamento lessicografico (cioè $(x, y, z) < (x', y', z')$se $x < x'$, oppure $x = x'$ e$y < y'$, oppure $x = x'$e$y = y'$e$z < z'$).

Questa struttura ideata da Hilbert è essenziale per dimostrare la consistenza della geometria non-archimedea, che non si evinceva dai lavori di Veronese e Levi-Civita. È sulla base di questo risultato, peraltro, che lo statuto del non-archimedeo geometrico acquisisce linfa vitale e strutture del genere vengono definitivamente considerate ammissibili.

A rafforzare ulteriormente i risultati di Hilbert intervengono dapprima il lavoro di Dehn (1900), poi quello di Hahn (1907). Dehn affronta il problema della possibilità logica non-archimedea anche nel contesto di geometrie non-euclidee, accorgendosi che la proprietà archimedea è stata utilizzata nella dimostrazione del teorema di Saccheri sugli angoli interni ad un triangolo. In particolare, Dehn prova l'esistenza di una geometria non legendriana e di una geometria semi-euclidea, nelle quali non vale il postulato euclideo, esistono infinite parallele per un punto ad una retta data, ma nel primo caso la somma degli angoli interni ad ogni triangolo è maggiore di due retti, nel secondo è invece uguale a due retti. Hahn, invece, classifica completamente le geometrie non-archimedee, in modo indiretto attraverso la classificazione completa dei gruppi abeliani ordinati.

Nello specifico, Hahn prende un gruppo linearmente ordinatoed abeliano G di grandezze non-archimedee. Al suo interno, si considera il comportamento reciproco degli elementi, in funzione del principio di Archimede. Se a e b si raggiungono attraverso opportuni multipli, li diremo "archimedei", o dello stesso rango, se invece non si raggiungono per nessun multiplo, li diremo "non-archimedei", o di rango diverso. L'uguaglianza di rango, che denotiamo con "≈", è una relazione di equivalenzae permette di dividere il gruppo in classi (ottenendo l'insieme quoziente G/≈), ognuna consistente di elementi aventi stesso rango, per cui le classi o coincidono o sono disgiunte. In tal modo Hahn dimostra che le quantità di G possono essere partizionate in classi di equivalenza, entro ciascuna delle quali l'assioma di Archimede è soddisfatto. D'altro canto, essendo G ordinato e non-archimedeo, esistono almeno due classi differenti in G, e la relazione "essere rango inferiore", se vale per un elemento di una classe rispetto ad un elemento della seconda, vale nello stesso modo per tutti gli altri elementi della prima classe con rispetto a quelli della seconda classe. Dunque possiamo anche parlare di ordinamento delle classi. L'insieme G/≈ha così un ordinamento naturale indotto da G. Viceversa, Hahn prova che se abbiamo un insieme semplicemente ordinato I, allora esiste sempre un gruppo abeliano G semplicemente ordinato tale che G/≈ è isomorfo all'insieme di partenza I.

Tracce dell'idea percorsa da Hahn si ritrova anche in Veronese (1909, p. 200): «[…] in un campo infinitesimo intorno ad un punto, considerando soltanto i segmenti finiti fra loro, o che soddisfano all'assioma d'Archimede, vale la geometria euclidea.»

Con la classificazione di Hahn, che completa il trittico Veronese-Hilbert-Dehn, la traiettoria logica delle geometrie non-archimedee è completa, con la dimostrazione esplicita della sua consistenza. Certamente il processo è avvenuto con meno sforzo rispetto alle geometrie non-euclidee, per la relativa maggiore facilità del postulato messo in discussione, per le minori resistenze nei confronti della sua negazione, ma anche per aver giovato del clima di apertura creato solo qualche decennio prima dalle geometrie non-euclidee. Ma ciò non dovrebbe essere sufficiente a diminuire la sua importanza e la sua profondità concettuale, visto anche il fatto che, mentre nel caso non-euclideo si trattava di un postulato già fornito nella geometria euclidea, in questo caso l'assioma archimedeo viene sì dalla trattazione aritmetica delle grandezze, ma non aveva mai avuto in geometria un ruolo chiaro e centrale, come invece acquisisce con l'avvento di questo programma di ricerca. A mio avviso, è per questo importante soffermare la nostra attenzione sulle caratteristiche degli assiomi, per comprendere se la non-archimedea sia plausibile degna di nota come possibilità concettuale. In questa direzione, ripartiamo dalle argomentazioni di Veronese, tendenzialmente provenienti dal lavoro pionieristico (Veronese, 1891) e dal lavoro conclusivo (Veronese, 1909) sull'argomento.

Per Veronese gli assiomi e i postulati della geometria che possiamo considerare sono innanzitutto quelli che valgono nello spazio esterno osservabile, cioè nel campo limitato d'osservazione del «filosofo empirista», dei quali non occorre fornire dimostrazioni, e quelli che estendono una proprietà anche allo spazio illimitato, dei quali occorre provarne matematicamente la possibilità. Per questa ragione non possiamo ammettere la validità dell'assioma delle parallele, dell'assioma di Archimede, o dell'assioma di Cantor come se questi fossero suggeriti dall'osservazione. Poi ci sono altre proposizioni che possono essere aggiunte, più propriamente postulati, che invece sono geometricamente ammissibili, non contraddicendo le premesse e non contraddicendosi tra loro. Il loro scopo è quello di completare o limitare il campo geometrico formalizzato ed idealizzato, come sono ad esempio tutti gli assiomi del continuo, da Dedekind a Cantor, e l'assioma archimedeo, nonché quelli che permettono la costruzione di spazi con più dimensioni. Ciò avviene quando la geometria da scienza sperimentale diventa parte della matematica pura. Per tale ragione, le proposizioni di questa tipologia permettono logicamente nuove e diverse geometrie, quali sono le geometrie non-euclidea, non-archimedea e iperspaziale (Veronese 1905: p. 350-351).

Il problema a questo punto è sul come regolarsi nella scelta dei postulati: è totalmente arbitraria o ci sono regole da rispettare? Veronese sintetizza la questione in questo modo (1891, p. X): «Se si prova l'indipendenza dell'ipotesi dalle premesse, allora è dimostrata anche la sua possibilità». Per il matematico veneziano è dunque sufficiente la consistenza logica per rendere una geometria plausibile concettualmente e degna di considerazione, in quanto «[…] la possibilità diventa per la matematica realtà sebbene astratta, perché le forme del pensiero matematico sono vere quanto le forme della sensibilità che hanno una realtà concreta. Nessuno infatti può dubitare dell'esistenza del nostro intelletto e delle sue funzioni logiche senza contraddirsi.»

Ciò non vuol dire che possiamo concepire ipotesi in modo del tutto arbitrario. Certamente, perché un'ipotesi sia geometricamente possibile, essa non deve contraddire i principi e le operazioni logiche, più in particolare (Veronese

1891: p. XI-XII): «Per i caratteri che distinguono una geometria, un'ipotesi astratta è geometricamente possibile quando essa non contraddice agli assiomi necessari allo svolgimento teorico della geometria, che prendiamo dall'esperienza, ossia alle proprietà dell'intuizione spaziale nel campo limitato di essa». Pertanto, una teoria geometrica che affermasse che una linea è determinabile da tre punti invece che da due, sarebbe ammissibile nella matematica astratta, ma non nella geometria.

Ma in fondo la geometria, pur essendo una scienza «mista», fa parte della matematica e non della fisica (Veronese, 1891: p. VIII):

> *La scienza sperimentale più esatta è la geometria, perché gli oggetti fuori dal pensiero, che servono alla determinazione degli assiomi, vengono sostituiti nella nostra mente da forme astratte, e quindi le verità degli oggetti si dimostrano colla combinazione delle forme già ottenute indipendentemente da ciò che succede di fuori. E per questo che non senza qualche ragione la geometria [...] va considerata fra le matematiche pure; sebbene essa sia nella sua radice una scienza sperimentale.*

D'altronde, come afferma successivamente (Veronese 1909: p. 201, il corsivo è dell'autore): «*La Geometria* [...] *ha la sua origine nell'osservazione diretta degli oggetti del mondo esteriore, che è lo spazio fisico, e dall'osservazione idealizzata di essi trae le sue prime e precise verità indimostrabili e necessarie al suo svolgimento teoretico, che sono gli assiomi propriamente detti* [...] Ma per essere esatta la geometria *essa deve rappresentare gli oggetti forniti dall'osservazione per mezzo di forme astratte o mentali e gli assiomi con ipotesi bene determinate, indipendenti* *cioè dall'intuizione spaziale* cosicché la geometria diventi parte della matematica pura» in cui non c'è più bisogno di verificare ogni volta la corrispondenza dei risultati ottenuti con il mondo fisico esteriore, pur potendoci avvalere ancora dell'intuizione geometrica per la visione delle figure o per qualche altro vantaggio, finché naturalmente la corrispondenza non venga riproposta con qualche obiettivo.

Per Veronese la geometria non ha dunque natura puramente formale, né puramente sperimentale, ma è invece una scienza che raccoglie entrambe gli approcci; e tanto le sue premesse, tanto i suoi oggetti, possono essere considerati in modo duplice. Da un lato, infatti, vi è l'astrazione a partire dagli oggetti fisici osservati, dall'altro vi è la produzione di oggetti e modelli ideali che nascono nel nostro intelletto, con una chiave interpretativa di natura formale. L'astrazione dagli oggetti fisici è possibile a partire dall'intuizione, che permette di cogliere le proprietà più rilevanti, da cui noi successivamente generalizziamo nel senso della ripetizione o della estensione delle proprietà, e nel senso dell'eliminazione delle imperfezioni non significative al concetto stabilito. Dunque intuizione ed astrazione.

Scendendo più in dettaglio nella fattispecie della geometria non-archimedea, quando ci si sofferma sull'osservazione diretta, per due segmenti rettilinei l'assioma di Archimede è verificato, ma quando proviamo ad estenderlo allo spazio illimitato, la validità non è giustificata allo stesso modo. L'assioma di Archimede ha una natura empirica, dettata dalla nostra intuizione che ci fa vedere tutti gli oggetti come raggiungibili. Quando idealizziamo dei segmenti che non si possono osservare, fatti di altri punti oltre agli estremi, non ci sono dati osservativi e non c'è un'intuizione che ci spinge a considerarli validi. E siccome un segmento infinitesimo svanisce nel nulla rispetto ad un segmento finito, «… se anche esistesse fisicamente un tale segmento, noi non potremmo vederlo».

La nostra capacità percettiva degli oggetti, in tal senso ha già in sé la possibilità di poterli afferrare e raggiungerli, dunque la validità di Archimede è in un certo senso una premessa delle nostre facoltà sensoriali. Per questa ragione l'intuizione spaziale ci suggerisce, come avevano colto già i primi geometri della storia, che tutte le grandezze fisiche che possiamo considerare a livello empirico sono perciò esse stesse grandezze archimedee: né infinite, né infinitesime. Ma non per questo la nostra intuizione si ferma ai dati empirici, con la capacità d'astrazione che generalizza globalmente proprietà intuite localmente. Se dunque non imponiamo aprioristicamente la validità dell'assioma archimedeo, la geometria che ne scaturisce rispetta l'intuizione spaziale «[…] e quindi il suo contenuto è geometricamente giustificato» (Veronese, 1909: p. 206).

Inoltre, potrebbero intervenire altre osservazioni che potrebbero migliorare le nostre ipotesi, magari andando a giustificare o a rendere più accurate le premesse. Nel caso del non-archimedeo questo difficilmente potrebbe accadere, perché da un lato l'esistenza dell'infinito e dell'infinitesimo attuale non contraddice la nostra intuizione, ma nessuna esperienza ci può mai condurre esternamente alle grandezze finite, perché in tal caso (Veronese, 1909: p. 206): «[…] se lo spazio fisico fosse infinito attuale rispetto al campo delle nostre osservazioni, nello spazio fisico finito, supposto anche limitato, varrebbe la geometria euclidea» dove in questo caso sarebbe meglio parlare di geometria "semplicemente archimedea", onde evitare la questione dell'esistenza di eventuali parallele.

La concettualizzazione geometrica, a partire dalle premesse intuitive, è dunque di fondamentale importanza, e nel caso non-archimedeo sembra che questo sia rispettato. Va altresì rilevato che l'intervento di una filosofia matematica nella definizione di entità geometriche può essere di grande aiuto, come risulta per lo stesso Veronese, ma può rivelarsi anche un elemento di conflittualità. In particolare, sulla non accettazione dell'infinitesimo e di altre possibilità matematiche attraverso strumenti filosofici, Veronese è dubbioso, non vedendo nell'indagine filosofica uno strumento così potente da permeare la validità delle ipotesi matematiche. È la matematica che deve indagare sulle ipotesi, e la filosofia dovrebbe nella fattispecie evitare considerazioni e spiegazioni metafisiche, per limitarsi a chiarire la genesi di tali concetti, a comprendere perché si fanno certe scelte e non altre, e ad ispirare la formazione dei concetti. La geometria, in particolare, fa parte della matematica pura e (Veronese, 1891: p. XIII):

> *La matematica pura non respinge ciò che è falso, e quindi per combattere un'ipotesi matematica bisogna dimostrare che è falsa, ma la dimostrazione deve essere logico-matematica non filosofica nello stretto senso della parola.*

Dunque il problema dell'ammissibilità e dell'accettazione degli infinitesimi attuali è ricondotto alla sua accettazione matematica che è regina nel decretarne l'ammissibilità, e solo in parte dipende dalla indagine filosofica. Nelle parole di Veronese (1891: p. XIII): «Se il problema matematico sui fondamenti della matematica e della geometria si spinge fino alla soglia del problema filosofico intorno all'origine delle idee matematiche e geometriche, però non la oltrepassa. Questo è certo un gran bene per la nostra scienza, perché altrimenti essa sarebbe in balìa nei suoi principi delle molteplici opinioni filosofiche che si disputano la verità. Però, per timore di cadere nell'indeterminato non è neppure conveniente il ridurre la matematica e la geometria nei loro fondamenti a un puro convenzionalismo di segni, ma bensì esse vogliono essere trattate con metodo filosofico, vale a dire rendendo più chiara che è possibile la natura delle cose di cui si occupano». Ovvero, non bisogna dimenticare la genesi dei concetti, non bisogna svuotare i simboli matematici dei contenuti fattuali. Se invece della semplicità dell'equazione, è privilegiata la semplicità della descrizione, la lettura è apparentemente più complessa, ma sostanzialmente più agevole.

Quando Veronese ritorna sull'argomento nel 1909, ha le idee ancora più chiare (Veronese, 1909: p. 204-205, il corsivo è dell'autore): «[…] *le ricerche matematiche sui principi della scienza sono bene distinte e devono tenersi distinte, da quelle filosofiche intorno alla genesi delle idee matematiche* […] *La filosofia deve perciò accettare le nuove idee matematiche quando esse sieno formate definitivamente*. Però se le ricerche matematiche si devono distinguere dalle filosofiche, è opportuno d'altro canto che il matematico si attenga dal giustificare i suoi concetti con considerazioni filosofiche o con finzioni che si prestano facilmente alla critica». La chiarezza di idee è stavolta indotta da Du Bois-Reymond e Cantor, che da un lato si comportano da matematici fornendo nuove idee e costruendo strutture teoriche, dall'altro giustificano filosoficamente le loro idee, sia nel percorso della trattazione, sia a posteriori contro le teorie alternative. Il matematico, in tal senso, deve tener conto di ciò che emerge dalla sua teoria, e da ciò che emerge dalle critiche su di essa, senza trincerarsi dietro l'astratto o un inutile formalismo e senza rimanere indifferente davanti a critiche matematiche, come lui stesso cerca di fare. Occorre che «*il metodo non sia artificioso senza vita o non appaia giuoco di simboli o di parole* […] *ma sia filosofico*» (Veronese, 1909: p. 205).

Infine qualche riflessione sulla questione metodologica, cui Veronese tiene in modo particolare fin dal principio, ma su cui ritorna sistematicamente dopo i violenti attacchi ricevuti sulla scarsa eleganza, lo stile incerto, i risultati approssimativi.

Il metodo adottato nell'indagine scientifica è prioritario, così come da sempre è stato riconosciuto, anche se con argomentazioni e chiavi di lettura storicamente e filosoficamente differenti. Veronese parte proprio da questa premessa per costruire l'edificio geometrico che vuole essere intuitivo, semplice e formalizzato senza invasioni di campo. Occorre ricordare che (Veronese, 1891: p. XXIV):

> *… la matematica ha la sua filosofia, e che in questa ha non piccola importanza il modo con cui si arriva alla verità.*

La difesa del metodo adottato, come anticipato nel paragrafo precedente, fa il pari con la replica a chi ne predica l'uso per poi comportarsi all'opposto. Hilbert ha fornito la prova della consistenza logica della geometria non-archimedea con strumenti analitici, ma lo stesso hanno fatto anche altri matematici, sfruttando risorse non propriamente geometriche. Probabilmente è eccessivo considerare tali metodi sgradevoli, ma è questa la sensazione che si avverte nella lettura dei *Fondamenti* di Veronese abbinata con quella dei *Grundlagen* di Hilbert. Già nei *Fondamenti* Veronese afferma (1891, p. XX-XXI):

> *Come si può ammettere ad es. quale assioma fondamentale della geometria l'ipotesi che l'elemento lineare dello spazio sia la radice quadrata di una espressione differenziale quadratica e positiva delle coordinate; oppure che la curvatura dello spazio sia costante [...] o ancora che lo spazio sia una varietà a tre dimensioni corrispondente al continuo numerico (x, y, z), ed altre simili? Ma dove sono i fatti intuitivi e semplici che le spiegano e le giustificano?.*

Sono critiche rivolte implicitamente all'impostazione di Riemann (di cui Veronese comunque apprezza il grande lavoro) che nelle sue varietà considera la curvatura, che è costante, e l'elemento lineare che "sorprendentemente" è dato da una radice quarta di un'espressione differenziale di quarto grado. Se non si sapesse il risultato preliminare del caso euclideo, in cui l'elemento lineare è dato da$ds = \sqrt{\sum dx^2}$, il risultato riemanniano non verrebbe certo in mente, non essendo né geometricamente semplice, né intuitivo.

Ad ogni modo, Veronese ritiene che tutti i metodi siano ammissibili se sono in grado di condurre a risultati, ed anzi i metodi andrebbero più fruttuosamente combinati, come è successo con l'algebra e la geometria che erano rimasti limitati fino a che erano rimaste separate ma poi, dall'unione, se ne sono giovate a vicenda verso un rapido sviluppo. Su questo aspetto non si possono adottare regole troppo rigide, occorre invece lasciar «... libere come nell'arte, tutte le manifestazioni del pensiero scientifico» (Veronese 1891: p. XXIV). Forse non potrebbe esserci modo migliore di concludere la questione, dopo le argomentazioni sulla giustezza e sulla bontà di un metodo rispetto agli altri, ovvero con un richiamo, anche se appena accennato, ad una concezione più verosimilmente anarchico-metodologica.

4 - Sulla possibilità fisicadi un universo continuo non-archimedeo

Molti autori, filosofi e matematici, geometri e fisici, sono concordi nello stabilire che esistono uno spazio fisico, uno spazio percepito ed uno spazio concettuale-geometrico. Lo spazio percepito e quello concettuale derivano dalla stessa esperienza dello spazio fisico, anche se lo interpretano differentemente, cercando in entrambi i casi di semplificarlo e sistematizzarlo attraverso semplici leggi o un sistema assiomatico di definizione. Lo spazio geometrico, seppure derivi da quello percepito, nasce sulla base di principi e metodi d'astrazione, forse gli stessi che trasformano lo spazio fisico reale in quello psicologico. Poi l'interpretazione fisica trasforma una teoria geometrica pura in un sistema di ipotesi fisiche che, se vere, costituiscono una teoria della struttura dello spazio fisico (Hempel 1945: p. 14).

Come mostrano Poincaré (1902, pp. 74-78) e Schiller (1896, pp. 176-177) tra gli altri, noi formiamo la nostra nozione di spazio reale mettendo assieme i dati ottenuti dalle sensazioni visuali, tattili e motorie. Molto spesso effettuiamo un'unificazione dei dati, facendoli convergere a risultati complementari, anche ignorando alcune differenze che emergono dai sensi, a volte correggendo le apparenze di un senso con un altro, ma sempre facendo in modo che la percezione degli oggetti sia la più completa ed affidabile. I dati oggettivi sono manipolati per percepire le cose, e ad un livello più alto un processo analogo crea lo spazio concettuale, partendo stavolta dai dati percepiti, ed ovviamente all'inizio creando la sua forma più semplice, coincidente a grandi linee con lo spazio euclideo.

Probabilmente, tutte le caratteristiche dello spazio euclideo sono costruite in questo modo. Quando ignoriamo le apparenze divergenti dei diversi sensi, per arrivare allo spazio concettuale rappresentativo, stiamo eliminando deformazioni e irregolarità, stiamo ponendo le basi che portano allo spazio omogeneo. Sono discrepanze abbastanza piccole, che si possono facilmente trascurare, ma se fossero più grandi e seguissero leggi semplici e ben definite, potrebbero suggerire una geometria diversa, ad esempio non-euclidea. Nello stesso modo, lo spazio geometrico è unico, perché deriva dalla proiezione restituita a partire dai dati percepiti, è infinito ed infinitamente divisibile, perché l'abolizione di una limitazione nel pensiero ci porta facilmente ad abolire tutte le limitazioni fisiche. Dunque la moltiplicazione infinita e la divisibilità infinita dello spazio, non appena moltiplicazione e divisione sono concepite come processi nel pensiero, si possono ripetere tutte le volte che vogliamo. E così via, generiamo lo spazio geometrico, che appare come una costruzione dell'intelletto, procedendo con i metodi ordinari dello stesso intelletto nel raggiungimento dei suoi propositi specifici. «E non c'è nulla di nuovo o misterioso sul processo; non deve essere invocata nessuna nuova facoltà, non deve essere formulata nessuna nuova operazione mentale.» (Schiller, 1896: p. 177)

Dal punto di vista concettuale, la certezza della geometria appare soltanto come certezza del procedimento logico-deduttivo, in cui le conclusioni si ottengono logicamente da premesse non contraddittorie. Date le definizioni di ciascuna geometria, le conseguenze derivano dal processo deduttivo, per cui postulare nello spazio geometrico l'esistenza di nessuna, una o più parallele ad una retta per un punto dato, fornisce lo stesso grado di certezza alle tre possibilità che ne derivano, rispettivamente che la somma degli angoli di un triangolo è inferiore, uguale o maggiore di due angoli retti. Le tre alternative hanno, da questo punto di vista, lo stesso grado di certezza. Ciò mostra che la reale validità di una geometria non ha nulla a che fare con la consistenza logica dello stesso sistema, sebbene le procedure logichepossano fornire risultati che informanocon maggiore profondità su tale questione.

Per la nostra percezione del mondo, la geometria più semplice e più efficace per spiegare i fatti e le divergenze tra risultati attuali e ideali è la geometria euclidea, e perciò la preferiamo alle altre, ma con esperienze diverse potremmo anche preferire un sistema non-euclideo. Dunque abbiamo a che fare con una scienza che non è puramente sperimentale, né puramente concettuale, ed il modello che utilizziamo non è quello "certo", ma quello "utile", cercando di concordare la geometria astratta, svuotata da contenuti fattuali e senza riferimenti allo spazio fisico, con quella pregna di significato, in cui l'interpretazione semantica rimanda alla costruzione strutturale dello spazio fisico. Tra queste due possibilità diametralmente opposte, vi è la geometria che noi percepiamo, a cui ci riferiamo e che siamo portati ad utilizzare, deformata dalla lente dei nostri sensi in molteplici modi.

Perciò, il nostro mondo fisico non è né euclideo, né non-euclideo, in quanto entrambi sono astrazioni concettuali, la questione è piuttosto su quale sia il metodo più appropriato per calcolare fenomeni spaziali. E non possiamo equivalentemente decidere e affermare se lo spazio fisico sia archimedeo o non-archimedeo, cantoriano o non-cantoriano, perché ciò che va fatto è la disamina dei rispettivi postulati e della loro interpretazione fisica.Ma questa strada non è direttamente percorribile, in quanto alcune ipotesi non sono direttamente sperimentabili, e come nel caso dei postulati delle parallele, di Archimede e della continuità, la prova deve procedere in modo indiretto (così come in ogni altra scienza sperimentale). Dai postulati si deducono le conseguenze, e queste ultime sono sottoposte all'esame sperimentale, che conferma la teoria o la confuta. In presenza di un numero rilevante di conferme sperimentali, gli scienziati accettano la teoria "fino a prova contraria".

L'opinione di Poincaré su questo punto, nota come *convenzionalismo geometrico*, ci permette comunque di conservare una certa teoria geometrica se la riteniamo più semplice di altre, cambiando opportunamente le ipotesi fisiche, adeguando cioè lo struttura formale alla teoria geometrica voluta. Ciò è possibile perché in ogni descrizione fisica si possono introdurre elementi fittizi, di comodo, che modificano l'edificio dedotto nel senso voluto.

Come abbiamo accennato nel paragrafo precedente, la concezione epistemologica di Veronese della geometria è di una scienza mista in cui «… la libertà dello spirito non è soltanto limitata dal principio di contraddizione, come nella matematica pura, ma bensì anche dai dati dell'intuizione spaziale» (Veronese 1909: p. 203). Per Veronese non si possono ammettere geometrie che vanno contro l'intuizione, in cui ad esempio non vale il teorema di Desargues, in cui una retta si determini con tre invece che con due punti, in cui una retta di un fascio non si possa sovrapporre ad un'altra retta dello stesso fascio, e così via. Se queste forme sono possibili nella geometria astratta, esse non sono ammissibili come rappresentazioni dello spazio fisico. Ma le leggi matematiche non sono che leggi generate nelnostro intelletto in seguito alla nostra intuizione, per cui anche queste, in qualche forma, sono leggi presenti nella natura. Per questo, e per l'armonia esistente fra leggi del pensiero e leggi del mondo, non possiamo aprioristicamente affermare che una concezione matematica astratta non possa fornire alcuna applicazione utile (Veronese, 1909: p. 207), e ciò basta per evitare che l'empirismo puro detti regole e preclusioni alla ricerca matematica.

La geometria fisica oggi unanimemente accettata è una generalizzazione dello spazio curvo riemanniano, cioè una geometria ellittica tridimensionale con curvatura localmente non costante, dipendente dalla distribuzione delle masse nel cosmo, ma globalmente costante. Quando fu costruita da

Riemann come teoria geometrica astratta, non esistevano possibilità concrete di una sua applicazione come scienza sperimentale dello spazio fisico. Proprio la sua storia ci insegna che, da speculazione matematica qual era inizialmente, è divenuta ad un certo punto utile, nello specifico ad Einstein, per descrivere lo spazio fisico nella sua teoria della relatività. Questo fatto getta una luce profonda sull'importanza del progresso scientifico indipendentemente dalla sua utilità diretta, sia esso foriero immediatamente di applicazioni, sia esso consistente unicamente nella speculazione matematica. E naturalmente la certezza matematica di una teoria geometrica non può essere mai raggiunta, perché o si ottiene al prezzo dello svuotamento di contenuto fattuale, o al massimo si può raggiungere sperimentalmente un alto grado di conferma. Secondo Einstein, la completa chiarezza si ottiene attraverso il passaggio della realtà dentro l'assiomatica matematica che però separa l'aspetto logico-formale dal contenuto oggettivo o intuitivo.

Non può essere, come dice Kant, che lo spazio sia una forma a priori della nostra intuizione, perché non ne è stata data alcuna prova, come non potremmo escludere a priori il postulato delle parallele perché è ciò che la nostra intuizione visiva e tattile ci suggerisce. Ma non è l'unica intuizione che possiamo avere dello spazio, perché anche la visualizzazione della geometria non-euclidea, spesso considerata una barriera per la mente, non costituisce per il nostro intelletto un compito così complicato. Come osserva Einstein (1983): «… la facoltà umana di visualizzazione non è in alcun modo costretta a capitolare di fronte alla geometria non-euclidea.»

Anche la differenza paventata da Russell di una diversità tra a priori logico e a priori psicologico non trova d'accordo Veronese perché non crede che tutti gli assiomi comuni alle tre geometrie (euclidea, ellittica, iperbolica) siano necessari per ogni esperienza. Dove la mettiamo la geometria non-archimedea? E poi, noi attingiamo dall'esperienza e dal nostro pensiero, ed è difficile dire esattamente se i dati di cui veniamo a disporre siano frutto dell'uno o dell'altro. Per il fatto che dall'osservazione, guardando oggetti imprecisi, siamo in grado di idealizzare e costruire forme precise con la costruzione teorica della matematica, ciò non implica che quegli oggetti o quelle forme siano per ciò stesse forme trascendentali del nostro spirito (Veronese, 1909: p. 208).

In particolare, le dispute sull'infinito generato dal nostro intelletto sono state molteplici nella storia e nella filosofia della matematica, anche a causa del fatto che il concetto ha avuto difficoltà a divenire chiaro, accurato ed unico. Ne sono esempi l'analisi matematica, dove l'infinitamente grande e l'infinitamente piccolo sono ricondotti ad affermazioni e relazioni tra grandezze finite, ela teoria degli insiemi, in cui il concetto è presente attraverso la totalità di alcuni insiemi, a cominciare dai naturali e dai reali. Ma il raggiungimento di questa chiarezza è fondamentale, seguendo Hilbert (1925, cit. in Cellucci 1967):

> *… la chiarificazione definitiva della natura dell'infinito non riguarda esclusivamente l'ambito degli interessi scientifici specializzati ma è necessaria per la dignità stessa dell'intelletto umano. Una delle prime impressioni che possiamo trarre guardando il mondo, da osservatori ingenui, è proprio la continuità, data dalla permanenza delle forme e della materia degli oggetti veduti, toccati, percepiti.*

> *Percepiamo oggetti solidi e liquidi, che danno l'idea di essere divisibili, e sappiamo che possiamo farlo anche più volte, tanto da rendere naturale l'idea che possiamo procedere nella divisione illimitatamente, avendo ogni volta pezzi più piccoli che presentano le stesse proprietà degli oggetti iniziali. Il tutto ispirato al conclamato principio leibniziano che «la natura non fa salti.*

Anche per Poincaré il continuo numerico trattato dal matematico deriva con molta probabilità dalla conoscenza di una materia concepita come divisibile all'infinito, dunque è ispirato dall'esperienza, ovvero siamo (Poincaré 1902: p. 47):

> *.... portati a concludere che questa nozione è stata creata per intero dall'intelletto, ma che è stata l'esperienza a fornirne l'occasione.*

E una simile difficoltà rimane anche con l'utilizzo di strumenti di osservazione più sofisticati, perché se anche sarà possibile guardare più in profondità le relazioni tra le grandezze, e magari renderci conto che due grandezze che ad occhio nudo apparivano uguali al microscopio appaiono diverse, la nostra esperienza rispetto al continuo si comporterà sempre nello stesso modo, presentandoci la materia sempre con tali caratteri. Se osserviamo una parte o la sua metà, esse ci appaiono omogenee se sottoposte ad un opportuno ingrandimento. Il "tutto" omogeneo alla "parte", finché si rimane in ambito finitista, è una contraddizione. Ne usciamo considerando insiemi continui, e come tali formati da infiniti termini. Dunque sarebbe il nostro intelletto, per Poincaré, a formare il concetto del continuo, e ciò avviene perché è l'esperienza che glie ne dà l'occasione; poi, con la creazione di una serie di simboli, poiché subentrano anche contraddizioni, le proposizioni che all'inizio appaiono intuitive, divengono a mano a mano più complesse, fino a raggiungere uno stadio in cui il sistema di simboli, oltre ad essere esente da contraddizioni interne, diventa anche privo di contraddizioni con le proposizioni intuitive che in tale direzione ci hanno mosso. Poi, la «potenza creatrice dell'intelletto» non si esaurisce con la creazione del continuo matematico, ma si spinge fino alle quantità infinitesimali, che aprono la strada a quantità infinite di gradi diversi, ma sono «un vano gioco intellettuale» (Poincaré 1902: p. 53). E una volta che il continuo matematico è creato ed in nostro possesso, siamo pronti anche a sostenerlo contro la nostra stessa intuizione, in quei casi dove il continuo genera situazioni ad essa contrarie (Poincaré, 1902: p. 53):

> *Piuttosto che cercare di conciliare l'intuizione con l'analisi, ci si è contentati di sacrificare una delle due, e, dal momento che l'analisi deve risultare impeccabile, si è dato torto all'intuizione.*

Eppure, fin dall'antichità, il processo di divisione insito nel concetto di continuità portava alla fine ad aver a che fare con entità indivisibili, elementi "atomici". Oggi sappiamo che un processo infinito di tale genere non siamo in grado di compierlo, perché abbiamo stabilito un limite alle quantità indefinitamente piccole, fornito dai componenti particellari della materia, perlomeno quelli che siamo riusciti a "raggiungere" nelle profondità degli elementi della natura. Da quando la fisica della materia ha conseguito questa serie di risultati sulla composizione microscopica del mondo, i limiti alla divisibilità non sono stati più conseguenti alla mancanza di sforzi o di tempo destinato all'esecuzione del processo, ma all'impossibilità conseguente alla "presunta" natura stessa delle cose. Dunque si è passati da una materia continua ad una materia fatta di atomi, da un'elettricità e in generale da onde elettromagnetiche viste come correnti fluide a onde composte da transiti di elettroni, da energie che presentavano un aspetto continuo ad energie fatte di "quanti", e via dicendo. Tenendo conto di tutto ciò, oggi è arduo affermare che la materia ed il mondo siano continui, perché al meglio delle nostre conoscenze, al meglio dell'approssimazione che abbiamo saputo e sappiamo condurre sul mondo, esso ci appare discreto e finito, perlomeno nella direzione dell'indefinitamente piccolo.Ma ovviamente su questo aspetto la discussione metafisica è aperta. Pur tuttavia, le ragioni contrarie alla continuità fisica sono probabilmente maggioritarie e la nostra esperienza sia pratica che scientifica è più forte in quella direzione. È perfino arduo pensare che esista un elemento del mondo che si presenti come continuo omogeneo, visto che tutti gli altri, finora, al meglio del nostro approfondimento, non si presentano in tal modo. Non va però dimenticato che la trattazione dei fenomeni quantistici si avvale di modelli continui, che introducono elementi di complessità ed infinità, per via delle infinite interazioni che avvengono al livello delle particelle elementari.Nelle parole di Luminet (2005: p. 141): «Gli scambi sempre più aggrovigliati tra differenti tipi di particelle virtuali tessono una sorta di rete; particelle fantasma entrano ed escono, appaiono e scompaiono in un groviglio vibrante di energia. L'infinita complessità di questa situazione sembra sfidare calcolo e comprensione.» E situazioni inizialmente paradossali, come quella di un elettrone che nel generare un campo quantistico riceve energia infinita, sono state superate con la rinormalizzazione della materia, per cui invece di considerare le energie si considerano le differenze di energia, che permettono l'eliminazione delle quantità infinite fino a lasciare quantità finite. Un artificio matematico, ma che ben si accosta ai dati sperimentali, su cui d'altronde si basa l'intera fisica quantistica. Ma anche in questo caso, un'ultima osservazione può chiarire meglio che l'infinitamente piccolo, al solito, potrebbe esser frutto del solo nostro pensiero. Le quantità infinite della quantistica vengono fuori dall'avvicinarsi sempre di più ad una fonte di radiazione come è l'elettrone, in cui il campo energetico diventa sempre più intenso, fino all'infinito. Ma la struttura dell'universo potrebbe non essere continua bensì granulare, e questo avvicinamento potrebbe essere possibile fino ad un certo punto, ad una scala piccolissima. Dunque avremmo a che fare con quantità complessivamente finite.

La divisibilità infinita è nata come operazione del pensiero, e dopo aver tentato per secoli di riportare l'idea sul mondo, attribuendogli questa proprietà in realtà solo fisio-psicologica, siamo tornati a considerarla un'operazione che non esiste, confutata dalle osservazioni e dagli esperimenti della chimica e della fisica. Una semplice rappresentazione di un'idea, sfortunata nel suo intimo contenuto, ma molto fortunata per la scia di conoscenza che le indagini per essa condotte hanno lasciato dietro di sé.

Dall'altra parte, nella direzione dell'infinitamente grande, le cose non appaiono epistemologicamente molto diverse, sebbene lo statuto dell'infinito presenta aspetti differenziali notevoli rispetto all'infinitesimo. Nel mondo greco era inizialmente diffusa l'idea di finitezza dell'universo, che a partire da Parmenide e Platone, veniva immaginato come una "sfera perfettamente rotonda" la cui sfera ultima conteneva tutte le stelle. Ma si tratta una finitezza che non riesce a dare risposte soddisfacenti ad alcuni paradossi, come quello attribuito ad Archita di Taranto che si chiedeva (Luminet 2005): «[…] se sono all'estremità del cielo e delle stelle fisse, posso allungare la mano o un bastone?» Pensare di non poterlo fare è assurdo, ma il poterlo fare ci introduce in una nuova porzione di spazio che è oltre la sfera celeste.

Per dare risposte soddisfacenti a questi paradossi geometrici e cosmologici, occorreranno le geometrie non-euclidee, che ad esempio con il modello ellittico della sfera ci consente di aver a che fare con un modello finito ma senza confini. Per cui posso allungare la mano o il bastone dovunque io mi trovi su di essa, senza per questo abbattere l'ipotesi della finitezza. La concezione infinitista dello spazio ha il padre riconosciuto in Giordano Bruno che, mescolando fede, immaginazione e conoscenze fisiche, critica la frontiera cosmica e dà una spiegazione logica dello spazio infinito. Una concezione che trova la sua esplicitazione e legittimazione più alta nella fisica di Newton, in cui la geometria euclidea fa da sfondo e sottostrato alla sua concezione dello spazio, che dunque è inevitabilmente infinito.

La geometria euclidea porta necessariamente allo spazio infinito, per via del postulato archimedeo e delle parallele, che postulano l'esistenza di forme rettilinee illimitate ed infinite e di un certo comportamento che si estende all'infinito. Ma sebbene l'illimitatezza dà allo spazio la proprietà di avere sempre una sua parte oltre quella considerata, aspetto suggerito dalla nostra intuizione, esso non è incompatibile con l'ipotesi della finitezza, che giocoforza deve prodursi con una geometria differente. La teoria della relatività, e le osservazioni astronomiche che ne hanno indicato dapprima la compatibilità con le nostre conoscenze quindi ne hanno sancito il trionfo sulla geometria classica, ha portato proprio all'abbandono della geometria euclidea, che non è avvenuta per ragioni filosofiche, né per ragioni legate alla finitezza dell'universo. L'Universo proposto da Einstein è diventato finito, perché ha una dimensione precisa, un'ampiezza approssimativamente nota; ma nello stesso tempo è illimitato, perché in esso, in qualunque direzione si viaggi, non si incontrano mai ostacoli, fino a ritornare al punto di partenza da cui il viaggio può ripartire, senza soluzione di continuità.Sempre con Hilbert (1925, cit. in Cellucci 1967): «Attraverso la geometria "ellittica" la ricerca matematica fornisce il modello naturale di un universo finito». E la cosmologia relativistica ha formulato delle ipotesi per spiegare certi comportamenti del cosmo in rapporto al suo essere finito/infinito, alcune centrate sulla risoluzione del paradosso del "buio di notte". Possiamo avere uno spazio finito, o un tempo finito, oppure uno spostamento verso il rosso. In particolare, nel primo caso la cosmologia relativistica ci offre modelli tanto finiti che infiniti, mentre nel secondo caso avremmo unconfine spazio-temporale, l'*orizzonte cosmologico*, utile per spiegare anche il nostro passato (pensando alla storia evolutiva dell'universo in espansione).

Ma la situazione attuale della cosmologia appare in bilico tra un universo mediamente ellittico o mediamente euclideo. Le possibilità non-euclidee sono esemplificabili con il valore assunto dalla costante di curvatura spaziale, che in generale potrebbe essere negativa, nulla o positiva ad indicare, rispettivamente, uno spazio iperbolico, euclideo o ellittico. Questa curvatura è calcolabile, secondo la relatività generale, attraverso la presenza (o densità) media di materia ed energia e da una costante cosmologica. Assumendo questa costante come nulla, come viene spesso fatto nella moderna cosmologia, rimane la densità della materia/energia a decretare la finitezza/infinitezza dell'universo, e ciò a seconda che venga superato o no il valore critico calcolato in 10^{-29} g/cm^3, a meno di altri fattori legati all'espansione cosmica. Altre osservazioni, però, sembrano fornire valori per la costante cosmologica diversa da zero, che implicherebbe una curvatura, seppur debole, dello spazio. La questione, su questo aspetto, è ancora aperta. A seconda che i risultati osservativi forniscano risultati di un tipo o di un altro, prevarranno l'ipotesi di uno spazio finito, oppure infinito.

Al momento, sembra che l'universo, al meglio delle nostre conoscenze, e in entrambe le direzioni, verso l'infinitamente grande e l'infinitamente piccolo, sia finito. In altri termini, se dobbiamo basare le nostre deduzioni sulle scienze fisico-chimiche moderne, siamo indotti a ritenere ancora plausibili l'infinito e l'infinitesimo "potenziali", ed inesistenti quelli "attuali".

Ma la presenza dell'infinito nelle teorie è spesso mascherato, innanzitutto per ragioni di semplicità. Oggi si tende a pensare la costante cosmologica come nulla (anche se alcuni dati dicono il contrario), a pensare ad una curvatura dell'universo nulla (che in realtà avrebbe un raggio di curvatura infinito), ad associare alla luce una velocità finita (trascurando che per portare un corpo in movimento a quella velocità occorre un'energia infinita), ad associare allo zero termico un valore finito (sebbene per portarvi un corpo occorrerebbe energia infinita). Con queste posizioni, possiamo relegare l'infinito ad un ruolo da comprimario, nascosto nelle pieghe della nostra conoscenza, ma non possiamo costringerlo in ogni caso a cedere completamente il passo, ad uscire di scena. Ce lo dicono i dati, ce lo dicono le teorie.

Dunque sembra che l'infinito non sia concretamente presente nell'universo, ma esso è presente nel nostro pensiero, che così sembra discostarsi bruscamente dalla realtà. Ed anche le strutture formali che abbiamo messo in piedi sembrano avere una doppia rilettura, in quest'ottica. Da un lato abbiamo la matematica e la logica che rispondono ad intuizioni finitiste, in cui non c'è traccia del concetto avulso di infinito, dall'altro abbiamo proposizioni che rispondono a concetti immaginati, ideali, che non hanno riscontro nell'alveo delle nostre osservazioni, ma di cui ci serviamo per riempire le lacune delle nostre teoria, per dare una forma più semplice e più comprensibile alle strutture formali. Una visione neo-aristotelica, che utilizza finzioni necessarie al pensiero, ma inesistenti nella realtà fisica.

Dunque la geometria non-archimedea potrebbe essere semplicemente il frutto del nostro pensiero, un concetto immaginario ed ideale che non ha riscontro nelle osservazioni, e non ha riscontro nemmeno al di fuori dello spazio osservabile. Ma potrebbe anche essere il caso che l'Universo sia nel suo complesso strutturale non-archimedeo, e noi non in grado di coglierlo perché è irraggiungibile, sia verso il molto piccolo, sia verso il molto grande. Se anche possiamo immaginare fuori dalla nostra osservazione, se anche possiamo estendere il nostro raggio di osservazione, in ogni caso avremo sempre un limite oltre il quale non potremo andare. Questa sembra un'ipotesi accettabile, ma se così non fosse, cioè se tutto lo spazio fosse in linea teorica osservabile, allora lo spazio nel suo complesso sarebbe archimedeo. Ma se la nostra osservazione avesse dei limiti, se esistesse uno spazio non osservabile, allora lo spazio complessivo, includendo entrambe le parti, osservabile e non, sarebbe non-archimedeo, perché le nostre grandezze finite, che sono costruite in stretto rapporto con i nostri sensi, non potrebbero raggiungere quella parte esclusa, dando così luogo all'infinito attuale e all'infinitesimo attuale nel rispetto tra i due tipi di grandezze.

Dunque a risolvere la possibilità fisica del non-archimedeo non è né l'allargamento del nostro spazio osservativo, perché ci rimarrà probabilmente sempre una sua parte ignota, probabilmente anche più grande della parte conosciuta. Semmai è l'immaginazione che possiamo utilizzare per superare l'orizzonte dettato dalla nostra "ignoranza". Oppure è la possibilità fisica di uno spazio inaccessibile, magari perché si comporta come un universo parallelo. Se così fosse, ci ritroveremmo grandezze non-archimedee confrontando grandezze del nostro e dell'altro universo.

In definitiva, probabilmente viviamo in una porzione di spazio fisico archimedeo, ma non sappiamo e forse non potremo mai sapere se lo spazio nel suo complesso presenti, con l'inclusione di luoghi irraggiungibili, anche la possibilità fisica non-archimedea.

Bibliografia

[1] Bindoni A. (1902). Sui numeri infiniti ed infinitesimi attuali, *Rend. Reale Acc. Lincei*, vol. XI, II sem., pp. 205-209.

[2] Bonola R. (1906). *La geometria non-euclidea*, Zanichelli, Bologna.

[3] Boyer C. B. (1968). *A History of Mathematics*; trad. it. (1980).*Storia della Matematica*, Arnoldo Mondadori, Milano.

[4] Cantù P. (2004). La concezione epistemologica di Giuseppe Veronese, in *50 anni di Veronese*, Il Leggio, Venezia, pp. 147-162.

[5] Cellucci C. (1967). *La filosofia della Matematica*, Laterza, Bari.

[6] Dehn M. (1900). Die Legendreschen Satze uber die Winkelsumme *in Dreieck, Mathematische Annalen,* vol. 53, pp. 404-439.

[7] Dupont P. (1981). *Appunti di storia dell'analisi infinitesimale*, Cortina, Torino.

[8] Ehrlich P. (1987). The Absolute Arithmetic and Geometric Continua, in Fine A. E Machamer P. (a cura di), *PSA 19986*, vol. 2, Philosophy of Science Association, Lansing MI.

[9] Ehrlich P. (1994). *Real numbers, Generalizations of the reals, and theorems of continua*, (a cura di), Kluwer Academic Publisher,

coll. Synthese Library: Studies in epistemology, Logic, Methodology, and Philosophy of Science, vol. 242.

[10] Ehrlich P. (1997). From Completeness to Archimedean Completeness: An Essay in the Foundations of Euclidean geometry, in Tauber A. e Kanamori A. (a cura di), *A Symposium on David Hilbert*, Synthese, vol. 110, n. 1, pp. 57-76.

[11] Einstein A. (1983). *Sidelights on Relativity*, Dover, Londra.

[12] Enriques, F. (1938). *Le matematiche nella storia e nella cultura*, Zanichelli, Bologna.

[13] Eugeni F., (cur.), (1999. *Critica dei fondamenti*, Edigrafital, Teramo.

[14] Eugeni F. e Mascella R. (2001). La retta euclidea reale a partire da una relazione d'ordine, *Periodico di Matematiche*, vol. 3, pp. 45-56.

[15] Eugeni F. e Mascella R. (2002a). Su alcuni modelli geometrici non archimedei; in F. Eugeni (a cura di), *Critica dei fondamenti*, coll. I quaderni di Ratio Mathematica, Teramo, 2002.

[16] Eugeni F. e Mascella R. (2002b). Un'assiomatica per la retta euclidea reale alla maniera di Peano; in F. Eugeni (a cura di), *Critica dei fondamenti*, coll. I quaderni di Ratio Mathematica, Teramo, 2002.

[17] Eugeni F. e Mascella R. (2005). A complete characterization of non-Archimedean lines, *Memoriile Sectiilor Stiintifice*, Editura Academiei Romane, Bucarest, pp. 257-270.

[18] Eugeni F., (2018). Gli algebristi italiani del secolo XVI furono gli artefici di una rivoluzione scientifica? Bollettino dell'AFSU, Vol. 1, pp. 11-54.

[19] Fano G. (1950). Geometrie non euclidee e non archimedee; in Berzolari L., Vivanti G. e Gigli D. (a cura di), *Enciclopedia delle*

Matematiche Complementari e Complementi, vol. II, p. II, Hoepli, Milano, pp. 437-511

[20] Geymonat L. (1970).*Storia del pensiero filosofico e scientifico*, Garzanti, Milano.

[21] Gillies D., Giorello G. (1995).*La filosofia della scienza del XX secolo*, Laterza, Bari.

[22] Giorello G. (1972). Strutture non-standard della teoria dei numeri reali, *Archimede*, vol. XXIV, n. 3-4, pp. 152-163.

[23] Hahn H. (1907). Uber die nichtarchimedischen Grossensysteme, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften, Mathematisch Naturwissenschaftliche Klasse, vol. 116, pp. 601-655.

[24] Hempel C. G. (1945). Geometry and Empirical Science, *The American Mathematical Monthly*, vol. 52, n. 1, pp. 7-17.

[25] Hilbert D. (1899).*Grundlagen der Geometrie*; trad. it. P. Canetta (1970), *Fondamenti della Geometria*, Feltrinelli, Milano.

[26] Hilbert D. (1925). Uber das Unendliche, Mathematische Annalen, vol. 95; in C. Cellucci (1967), *La filosofia della Matematica*, Laterza, Bari.

[27] Levi-Civita T. (1893). Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici, *Atti Ist. Veneto di Sc. lett. ed arti*, t. IV, sez. VII, pp. 1765-1815.

[28] Levi-Civita T. (1898). Sui numeri transfiniti, *Rend. Reale Acc. Lincei*, vol. VII, I sem., pp. 113-121.

[29] Luminet J. P. e Lachièze-Rey M. (2005).*De l'infini... Mystères et limites de l'Univers*; trad. it. S. Moriggi (2006),

Finito o infinito? Limiti ed enigmi dell'Universo, Raffaello Cortina, Milano.

[30] Mascella R. (2006). La geometria non-archimedea. Dalle premesse agli infiniti modelli Attuali, *Ratio Mathematica*, n. 17.

[31] Peano G. (1889). I Principii di Geometria logicamente esposti, in *Opere scelte* (1958), a cura dell'UMI, Cremonese, vol. 11, pp. 59-78.

[32] Peano G. (1894). Sui Fondamenti della Geometria, in *Opere scelte* (1959), a cura dell'UMI, Cremonese, vol. III, pp. 115-157.

[33] Poincaré J. H. (1902).*La science et l'Hypothèse*, Flammarion, Paris; trad. it. *La scienza e l'ipotesi*, Dedalo, Bari 1989.

[34] Russell B. (1897).*An Essay on the Foundations of Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge-London; trad. it. *I Fondamenti della Geometria*, Newton Compton, Roma 1975.

[35] Schiller F. C. S.(1896). "Non-Euclidean Geometry and the Kantian a Priori", *The Philosophical Review*, vol. 5, n. 2, pp. 173-180.

[36] Veronese G. (1891).*Fondamenti di Geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare*, Tipografia del Seminario, Padova.

[37] Veronese G. (1897).Sul postulato della continuità, *Rend. Reale Acc. Lincei*, vol. VI, II sem., pp. 161-167.

[38] Veronese G. (1898).Segmenti e numeri trasfiniti, *Rend. Reale Acc. Lincei*, vol. VII, I sem., pp. 79-87.

[39]Veronese G. (1905).La geometria non archimedea. Una questione di priorità, *Rend. Reale Acc. Lincei*, vol. XIV, I sem., 347-351.

[40] Veronese G. (1909). La geometria non archimedea, *Proceedings of IV Mathematicians International Congress*, vol. I, 197-208.

Approvato su parere favorevole di Franco Eugeni ed Ezio Sciarra

==

La funzione di Eulero

Dedichiamo questa pagina alla funzione$\boldsymbol{\varphi}$ di Eulero, la quale per ogni naturale n $>$ 0, è data dal numero dei numerinaturali m, non superiori ad n e primi con esso. Se **N** è l'insieme dei numeri naturale ed (m;n) denota il MCD dei due numeri, si ha:

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathrm{n}) =\{\boldsymbol{m}|\boldsymbol{m} < n\,, (\boldsymbol{m};\boldsymbol{n}) = \mathbf{1},\ \forall\, \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\ \in \mathbf{N}\}$$

È nota una espressione della $\boldsymbol{\varphi}$(n) in funzione dei divisori primi di n, cioè:$\boldsymbol{\varphi}(\mathrm{n}) = \mathrm{n}\prod_{\boldsymbol{p}|\boldsymbol{n}}(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}})$.

La funzione di Eulero entra in gioco in varie questioni. Ne riportiamo due.

a.- Sia (Z_m /(0),·) la parte moltiplicativa dell'anello delle classi resto modulo m. Sappiamo che un elemento a ∈ Z_m è invertibile se e solo se (a;m) =1. Segue dal Teorema di Eulero sulle congruenze:

$$(a;\mathrm{m}) =1 \text{ implica } \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{m})} \equiv \mathbf{1}\ (\boldsymbol{mod}\ \boldsymbol{m})$$

che l'inversa della classe a è la classe $\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{n})-\mathbf{1}}$.

b.- Nella Teoria dei codici a chiave pubblica se p,q sono due primi ed N = pq, sappiamo che $\boldsymbol{\varphi}$(N) = (p-1) (q-1), combinando le due espressioni si ha :

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathrm{N}) = \mathrm{N} +1 - (\mathrm{p}+\mathrm{q}),\mathrm{N} = \mathrm{pq}$$

Il problema fondamentale dell'aggressione al codice RSA, alla base della firma elettronica è ricavare p e q supposti noti N, che lo è, e $\boldsymbol{\varphi}$(N), che allo stato attuale si ricava solo in funzione di p e q. Dunque il problema non è risolubile allo stato attuale delle conoscenze e il codice è sicuro.

==