

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени В. Н. КАРАЗИНА

Серия «Проблемы теоретической
и математической физики»

ПРОБЛЕМЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Научные труды

Выпуск 4

Харьков – 2020

УДК 53.01
П 78

Серия «Проблемы теоретической и математической физики. Научные труды»
под общей редакцией академика А. Г. Загороднего, академика Н. Ф. Шульги

Рецензенты:

академик НАН Украины **Литвиненко Л. Н.**;
академик НАН Украины **Яковенко В. М.**

*Утверждено к печати решением Ученого совета
Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина
(протокол № 5 от 24 февраля 2020 года)*

Проблемы теоретической физики. Научные труды. Выпуск 4 = Problems of theoretical physics. Scientific works. Issue 4 / Н.А. Азаренков, С.С. Апостолов, В.Г. Барьяхтар, В.А. Буц, А.А. Голованов, А.Г. Данилевич, В.И. Карась, М.И. Копп, И.Ю. Костюков, З.А. Майзелис, А.М. Пухов, Т.Н. Рохманова, П.С. Стрелков, Й. Томас, А.В. Тур, В.А. Ямпольский, В.В. Яновский ; под общей редакцией А.Г. Загороднего, Н.Ф. Шульги, ред. вып. В.И. Карась. – Харьков: ХНУ имени В.Н. Каразина, 2020. – Вып. 4. – 548 с. (Сер. «Проблемы теоретической и математической физики» под общ. ред. А.Г. Загороднего, Н.Ф. Шульги).

ISBN 978-966-285-643-9

Представлены история, становление и современное состояние плазменной электроники и новых методов ускорения заряженных частиц. Проведен подробный анализ основных типов моделей описания взаимодействия спиновых и звуковых волн в магнитоупорядоченных материалах. Показано, что коэффициенты отражения и прохождения в слоистых сверхпроводниках зависят от амплитуды волн. Описаны некоторые важные стороны регулярной и хаотической динамики волновых процессов и формирования крупномасштабных вихревых и магнитных структур в электропроводящих средах.

Для ученых в области естествознания, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов физических факультетов.

УДК 53.01

ISBN 978-966-285-144-1 (вып. 1)	© Национальная академия наук Украины, 2014 © Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, 2014
ISBN 978-966-285-377-5 (вып. 2)	© Национальная академия наук Украины, 2017 © Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, 2017
ISBN 978-966-285-594-4 (вып. 3)	© Национальная академия наук Украины, 2019 © Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, 2019
ISBN 978-966-285-643-9 (вып. 4)	© Национальная академия наук Украины, 2020 © Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, 2020 © Н. А. Азаренков, С. С. Апостолов, В. Г. Барьяхтар, В. А. Буц, А. А. Голованов, А. Г. Данилевич, В. И. Карась, М. И. Копп, И. Ю. Костюков, З. А. Майзелис, А. М. Пухов, Т. Н. Рохманова, П. С. Стрелков, Й. Томас, А. В. Тур, В. А. Ямпольский, В. В. Яновский, 2020 © Дончик И. Н., макет обложки, 2020

О Г Л А В Л Е Н И Е

От редакторов научных трудов.....	8
ЧАСТЬ I. ИСТОРИЯ И СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАЗМЕННОЙ ЭЛЕКТРОНИКИ И НОВЫХ МЕТОДОВ УСКОРЕНИЯ.....	11
Н. А. Азаренков, В. И. Карась.	
1. Становление плазменной электроники и новых методов ускорения.....	12
2. Плазменная электроника и плазменные методы ускорения заряженных частиц.....	22
Примечания.....	32
3. Коллективные взаимодействия интенсивных электронных импульсных пучков с плазмой. Образование и азвите пучково- плазменного разряда.....	34
3.1. Коллективные взаимодействия с плазмой электронного пучка (системы осцилляторов).....	36
3.2. Образование пучково-плазменного разряда.....	46
3.3. Результаты экспериментов и их обсуждение.....	48
3.4. Коллективные взаимодействия интенсивных первоначально модулированных и немодулированных электронных импульсных пучков с плазмой. Развитие пучково плазменного разряда.....	56
3.5. Заключение.....	79
4. 2,5-мерное численное моделирование формирования плазменного канала ионами при распространении последовательности релятивистских электронных сгустков в плотной и разреженной плазме.....	80
4.1. Физическая и математическая модель.....	81
4.2. Моделирование.....	82
4.3. Результаты численного моделирования.....	84
4.4. Заключение.....	87
5. Взаимодействие с плазмой или газами микроволнового излучения со стохастически прыгающей фазой.....	87
5.1. Теоретические и экспериментальные исследования падения электромагнитных волн на границу вакуум – плотная плазма.....	88
5.2. Высокочастотный разряд полями волн со стохастически прыгающей фазой и его применение.....	89
5.3. Заключение.....	97
6. Современное состояние плазменной электроники и новых методов ускорения.....	97

6.1. Нелинейная теория плазменно-пучкового взаимодействия.....	97
6.2. Взаимодействие с заряженными частицами стохастического СВЧ излучения	100
6.3. Плазменные методы ускорения заряженных частиц	105
6.4. Ускорение заряженных частиц в вакууме	110
Список литературы.....	111

ЧАСТЬ II. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПЛАЗМЕННАЯ РЕЛЯТИВИСТСКАЯ СВЧ ЭЛЕКТРОНИКА..... 124

П. С. Стрелков	
1. Предмет плазменной свч электроники	124
2. Некоторые сведения из теории взаимодействия пространственно-ограниченной плазмы с релятивистским электронным пучком	126
3. Формирование электронных пучков	129
4. Методы создания плазмы	137
5. Схема и основные принципы работы ПРГ.....	142
5.1. Результаты исследований ПРГ с малой длительностью импульса тока пучка и сравнение с расчетом	146
5.2. Плазменный релятивистский генератор микросекундной длительности СВЧ импульса	153
5.3. Перестройка частоты ПРГ в импульсно-периодическом режиме.....	158
5.4. Плазменный релятивистский СВЧ усилитель	159
5.4.1. Плазменный релятивистский СВЧ усилитель с длительностью импульса тока РЭП 30 нс. Частоты 9 - 13 гГц.....	160
5.4.2. Плазменный релятивистский СВЧ усилитель микросекундной длительности. Частоты 2.4 – 3.1 гГц	163
6. Заключение	174
Список литературы.....	176

ЧАСТЬ III. ТЕОРИЯ СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНОЙ КИЛЬВАТЕРНОЙ ВОЛНЫ, ГЕНЕРИРУЕМОЙ ЭЛЕКТРОННЫМ СГУСТКОМ ИЛИ ЛАЗЕРНЫМ ИМПУЛЬСОМ В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ..... 178

А. А. Голованов, И. Ю. Костюков, Й. Томас, А. М. Пухов	
1. Введение	179
2. Формулировка задачи.....	183
3. Общие уравнения для кильватерной волны	185
3.1. Постановка общей задачи	185
3.2. Квазистационарное приближение	186
3.3. Уравнения для электромагнитного поля	187
4. Движение заряженных частиц	189
4.1. Кинетический подход	189
4.2. Движение электронов плазмы	191
4.3. Движение релятивистских сгустков частиц.....	193
5. Модель плазменной полости	194
6. Уравнение для границы плазменной полости.....	196
6.1. Влияние профиля электронного слоя.....	199
6.2. Приближение бесконечно тонкого слоя.....	200
6.3. Релятивистское приближение	201
6.4. Область применимости приближений.....	201
7. Электромагнитное поле в плазменной полости.....	205

7.1. Кильватерный потенциал	205
7.2. Продольное электрическое поле	206
7.3. Магнитное поле	208
7.4. Поперечное электрическое поле	210
7.5. Поперечная сила.....	211
8. Вычисление формы плазменной полости.....	213
9. Ненагруженная плазменная полость	215
10. Нагруженная плазменная полость	218
10.1. Эффективность ускорения.....	218
10.2. Прямоугольный электронный ступок.....	220
10.3. Ускорение в однородном поле	224
11. Заключение.....	229
Список литературы	231

ЧАСТЬ IV. СВЯЗАННЫЕ МАГНИТОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ В ФЕРРОМАГНЕТИКАХ

В. Г. Барьяхтар, А. Г. Данилевич	
Введение.....	234
1. Магнитоупругие волны в ферромагнетике кубической симметрии	236
1.1. Законы дисперсии связанных магнитоупругих волн в кубическом ферромагнетике.....	236
1.2. Взаимодействие первого поперечного звука со спиновыми волнами в сплавах с эффектом памяти формы	246
1.3. Взаимодействие второго поперечного звука со спиновыми волнами в сплавах с эффектом памяти формы	248
2. Магнитоупругие волны в ферромагнетике одноосной симметрии	254
2.1. Магнитоупругая щель в одноосном ферромагнетике как проявление эффекта Хиггса	254
2.2. Спектры связанных магнитоупругих волн в одноосном ферромагнетике	260
3. Затухание магнитоупругих волн в ферромагнетиках	265
Список литературы	270

ЧАСТЬ V. ПРОХОЖДЕНИЕ, ОТРАЖЕНИЕ И ТРАНСФОРМАЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В СЛОИСТЫХ СВЕРХПРОВОДНИКАХ

С. С. Апостолов, З. А. Майзелис, Т. Н. Рохманова, В. А. Ямпольский	
1. Введение.....	273
1.1. Высокотемпературные слоистые сверхпроводники	274
1.2. Джозефсоновская плазма. Джозефсоновские плазменные волны (ДПВ)	276
1.3. Прикладной аспект исследований слоистых сверхпроводников.....	278
1.4. Связанные синусоидальные уравнения Гордона	279
1.5. Закон дисперсии линейных ДПВ	282
1.6. Нелинейность джозефсоновских плазменных волн	283
1.7. Обыкновенные и необыкновенные ДПВ.....	284
2. Нелинейные ДПВ в слоистых сверхпроводниках, помещенных в волновод... 286	
2.1. Коэффициент прохождения нелинейной волны	287
2.2. Отрицательные отстройки частоты	291
2.3. Положительные отстройки частоты	293

3. Трансформация нелинейных джозефсоновских плазменных волн.....	295
3.1. Электромагнитные поля в вакууме и в образце слоистого сверхпроводника	296
3.2. Аналог принципа суперпозиции	299
3.3. Прохождение и отражение волн с E поляризацией.....	303
3.4. Трансформация TE и TM мод.....	306
4. Прохождение и отражение тм волн в присутствии постоянного магнитного поля	311
4.1. Отражение TM волн от полубесконечного образца	312
4.2. Прохождение TM волны через слоистый сверхпроводник конечной толщины	319
4.3. Анализ зависимостей коэффициента прохождения от параметров волны	324
5. Трансформация поляризации волн при отражении от слоистых сверхпроводников во внешнем постоянном магнитном поле	328
5.1. Поля в вакууме. Аналог принципа суперпозиции	329
5.2. Поля в образце слоистого сверхпроводника.....	331
5.3. Коэффициенты отражения и трансформации	335
5.4. Анализ результатов	338
6. Выводы.....	342
Список литературы.....	343

ЧАСТЬ VI. РЕГУЛЯРНАЯ И ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ.....347

В. А. Буц	
Введение	348
1. Фокусировка и динамический хаос лучей в неоднородных волноведущих средах (волновые процессы в приближении геометрической оптики)	351
1.1. Общие уравнения, описывающие динамику лучей в неоднородных средах	352
1.2. Динамика лучей в волноведущей среде с нарастающим вдоль оси коэффициентом Преломления	354
1.3. Фокусировка лучей в средах с пространственной неоднородностью.....	358
1.4. Возникновение хаотической динамики.....	360
1.5. Произвольные по амплитуде возмущения.....	361
2. Сингулярная теория возмущения. Влияние шума на динамику лучей	362
2.1. Уравнения для траекторий лучей. Резонансы	362
2.2. Стационарные точки и их характер (устойчивость).....	366
2.3. Влияние флуктуаций на динамику лучей.....	368
2.4. Обсуждение и выводы к разделам 1 и 2	372
3. Аналитический критерий возникновения режимов с динамическим хаосом.....	374
4. Каскад трехволновых взаимодействий	378
4.1. Динамика распада широкого (по частоте) волнового пакета	378
4.2. Динамика каскадов с учетом процессов слияния	383
4.3. Численный анализ.....	386
4.4. Повышение степени когерентности при трехволновом взаимодействии	389
4.5. Краткое заключение	391
5. О новых условиях взаимодействия волн.....	392
5.1. Известные условия взаимодействия волн	392

5.2. Постановка задачи и основные уравнения.....	394
5.3. Среда с одномерной неоднородностью	394
5.4. Среда с трехмерной неоднородностью.....	397
5.5. Взаимодействие волн в нелинейных средах	400
5.6. Возможность наблюдения. Взаимодействие в слое	403
5.7. Взаимодействие волн в квантовых системах.....	404
5.8. Краткое обсуждение результатов.....	406
6. Заключение.....	409
Список литературы	410

**ЧАСТЬ VII. КВАЗИДВУМЕРНЫЕ КРУПНОМАСШТАБНЫЕ
ВИХРЕВЫЕ И МАГНИТНЫЕ СТРУКТУРЫ
В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ**

В. В. Яновский, А. В. Тур, М. И. Копп	
Введение.....	414
1. Генерация вихревых и магнитных структур в стратифицированной магнитной гидродинамике мелкомасштабной спиральностью	419
1.1. Основные уравнения и формулировка проблемы.....	420
1.2. Многомасштабное асимптотическое разложение	423
1.3. Мелкомасштабные поля	429
1.4. Замкнутые уравнения для крупномасштабных полей	436
1.5. Крупномасштабная неустойчивость	444
2. Нелинейное магнито-вихревое динамо в стратифицированной электропроводящей среде с мелкомасштабной спиральностью.....	454
2.1. Уравнения нелинейного динамо в «квазидвумерной» модели.....	455
2.2. Стационарные крупномасштабные хаотические структуры	461
2.3. Стационарные нелинейные магнитные структуры.....	464
3. Нелинейное динамо во вращающейся электропроводящей жидкости	469
3.1. Основные уравнения и постановка задачи.....	470
3.2. Уравнения нелинейного магнито-вихревого динамо в «квазидвумерной» модели.....	472
3.3. Крупномасштабная неустойчивость	477
3.4. Нелинейные стационарные структуры	481
4. Нелинейное динамо в наклонно вращающейся электропроводящей жидкости	487
4.1. Постановка задачи и замкнутые уравнения для крупномасштабных полей	487
4.2. Крупномасштабная неустойчивость	491
4.3. Стационарные хаотические структуры крупномасштабных полей.....	497
Заключение.....	500
Список литературы	503

ОТ РЕДАКТОРОВ НАУЧНЫХ ТРУДОВ

Нет ничего практичнее хорошей теории — так писали многие выдающиеся философы, физики и математики (Кирхгоф, Кант, Планк, Больцман...). В любом случае это высказывание сформировалось независимо у многих выдающихся мыслителей. Действительно, любую проблему, любую задачу нужно сначала осмыслить, понять. Необходимо определиться с параметрами, которые определяют изучаемый объект, изучаемую проблему. Теория позволяет указать на значение тех параметров, которые необходимы для решения нужной задачи. Она радикально сокращает усилия и время для достижения (в эксперименте) желаемых результатов. Она позволяет увидеть основные особенности изучаемых процессов. Таким образом, теория (хорошая) позволяет быстрее построить здание нашего понимания окружающего нас мира, а также понять те процессы, которые в этом мире протекают. Она также способствует построению более совершенного здания нашего знания. Она постоянно достраивает оставшиеся недостроенными (оставшиеся неосознанными) участки этого здания. Отметим также, что обзорные работы являются наиболее важными работами. Они аккумулируют результаты большого числа предыдущих работ. Учитывая, что в настоящее время количество публикаций, даже по одному выбранному направлению в науке, чрезвычайно велико, то очевидным становится важность обзорных работ.

Предлагаемый читателю четвертый том содержит описание не только результатов чисто теоретических исследований, но и некоторые экспериментальные результаты. Важно, что в этих результатах явно прослеживается исходная теоретическая мысль. Четко видна большая предварительная работа теоретиков.

Первые два обзора в сборнике посвящены нерелятивистской и релятивистской плазменной электронике. В обзоре Н. А. Азаренкова и В. И. Караса изложена история и современное состояние плазменной электроники и новых методов ускорения. Это тот раздел физики плазмы, который связан не только с фундаментальными свойствами плазмы, но и с важными приложениями. Показано, что основные результаты плазменной электроники обусловлены тем, что в основе физических процессов этого направления находятся элементарные механизмы излучения и поглощения заряженных частиц. К сожалению, следует отметить, что этот обзор оказался не законченным, так как один из авторов обзора (Карась В. И.) безвременно ушел от нас.

Следующий, близкий по духу, обзор принадлежит П. С. Стрелкову, в котором описана история и развитие релятивистской плазменной электроники в Институте общей физики ИОФ РАН имени Прохорова А. М. В этом обзоре основное внимание уделено описанию результатов экспериментальных исследований в области релятивистской плазменной электроники. В обзоре указано, что экспериментальные исследования в ИОФ РАН основывались на теоретических работах А. А. Рухадзе, и главная идея экспериментальных работ была заложена в теоретических работах А. А. Рухадзе и Я. Б. Файнберга. Целью экспериментальных работ являлось построение мощных плазменно-пучковых СВЧ-генераторов с перестраиваемой частотой. В обзоре описаны трудности, с которыми столкнулись исследователи. В частности, оказалось, что релятивистский электронный пучок, проходя через тонкую металлическую фольгу, перестает эффективно взаимодействовать с плазмой. Выяснилось (теоретически), что это связано со значительным ухудшением параметров электронного пучка. Теоретический и численный анализы проблемы привели к тому, что были предложены, и в дальнейшем реализованы трубчатые электронные пучки и плазма с разными радиусами. В этом обзоре четко видно, как экспериментальные исследования стимулировали развитие теории.

В следующем обзоре А. А. Голованова, И. Ю. Костюкова, Й. Томаса, А. М. Пухова изложены результаты построения теории возбуждения электронным сгустком или лазерным импульсом сильно нелинейной кильватерной волны в неоднородной плазме. Описаны модели такого возбуждения. В наиболее простой из них постулируется феноменологическая модель плазменной полости. В этом обзоре наиболее интересным является процесс моделирования, когда авторы строят различного уровня модели от простых моделей до сложных моделей. Последние модели (сложные) анализируются численными методами, и получено достаточно хорошее согласие результатов между этими моделями.

В обзоре В. Г. Барьяхтара и А. Г. Данилевича дан подробный анализ основных типов моделей описания взаимодействия спиновых и звуковых волн в магнитоупорядоченных материалах. Описаны разработанные методики теоретических и экспериментальных исследований магнитоакустических свойств материалов с эффектом памяти формы.

Построена также модель для диссипативной функции, которая описывает релаксационные процессы, обусловленные затуханием магнитоупругих волн.

В пятом обзоре С. С. Апостолова, З. А. Майзелиса, Т. Н. Рохманова, В. А. Ямпольского предложен оригинальный метод решения задач о прохождении, отражении и трансформации нелинейных волн с произвольными поляризациями в слоистых сверхпроводниках. Важной особенностью этого обзора является тот факт, что анализ был проведен для волн терагерцового диапазона. Показано, что внешнее магнитное поле является эффективным инструментом управления характеристиками этих волн. Отметим, что терагерцовый диапазон длин волн является тем диапазоном, который до настоящего времени является практически неосвоенным диапазоном.

В обзоре В. А. Буца описаны результаты регулярной и хаотической динамики волновых процессов. Наиболее важным результатом этого обзора является доказательство того, что в распределенных системах условия эффективного взаимодействия волн могут быть существенно изменены. Они отличаются от общеизвестных условий, которые можно назвать локальными. Эти условия выражаются в том, что расстройка вдоль одного пространственно-временного направления может быть скомпенсирована расстройкой вдоль другого направления. Известные условия взаимодействия содержатся в этих условиях, как частный случай. В рамках геометрической оптики обнаружен новый тип фокусировки волн в неоднородных средах. Этот тип фокусировки во многом аналогичен эффекту автофазировки частиц Векслера – Макмиллана. В обзоре сформулированы аналитические критерии перехода регулярной динамики взаимодействия волн в хаотический режим. Показано, что в средах со случайной неоднородностью развивается флуктуационная неустойчивость. В частности, она может приводить к супердиффузии. Показано, что такие процессы могут быть описаны только либо в рамках теории дробных производных, либо методом моментов.

В обзоре В. В. Яновского, А. В. Тура и М. И. Коппа описаны последние достижения в области теории генерации крупномасштабных вихревых и магнитных структур в электропроводящих средах. Показано, что многие важные результаты могут быть получены методом крупномасштабных асимптотических разложений. В частности, описаны решения в виде спиральных кинков, нелинейных периодических волн и солитонов. Сформулированы условия формирования крупномасштабных хаотических структур. Показано, что в результате эффекта «отрицательной вязкости» в гидродинамических моделях плазмы возможна генерация крупномасштабных вихревых и магнитных полей.

**Академик НАН Украины
Академик НАН Украины**

**А. Г. Загородний
Н. Ф. Шульга**

ЧАСТЬ I

ИСТОРИЯ И СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАЗМЕННОЙ ЭЛЕКТРОНИКИ И НОВЫХ МЕТОДОВ УСКОРЕНИЯ

Н. А. Азаренков

*Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, пл. Свободы, 4, г.
Харьков, 61022, Украина*

В. И. Карась

*Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»
Национальной академии наук Украины, ул. Академическая, 1,
Харьков, 61108, Украина*

*Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, пл. Свободы, 4.
Харьков, 61022, Украина*

Плазменная электроника – это четко сформировавшийся раздел физики плазмы, который связан, с одной стороны, с фундаментальными свойствами плазмы, колебательными и волновыми процессами в ней, разнообразными неустойчивостями, стохастичностью и турбулентностью плазмы и, с другой – с важными приложениями. Среди них упомянем только следующие:

– сверхвысокочастотная нерелятивистская и релятивистская плазменная электроника, изучающая процессы возбуждения в плазме интенсивного электромагнитного излучения от микроволнового до светового диапазона длин волн;

– одно из основных направлений коллективных методов ускорения – метод ускорения заряженных частиц волнами плотности заряда в плазме и некомпенсированных пучках, создание на его основе сильноточных ускорителей электронов, протонов и ионов;

– создание сильноточных плазменных индукционных ускорителей электронов и ионов с коллективной фокусировкой, в том числе тяже-

лых ионов, которые могут быть использованы для инерциального управляемого термоядерного синтеза (УТС);

– новый тип газового разряда – плазменно-пучковый разряд (ППР) и плазменно-ионно-пучковый разряд. Плазменная электроника привела к открытию нового типа разряда, так называемого плазменно-пучкового разряда, который сейчас обнаружен в большинстве лабораторных и космических экспериментов;

– неравновесная пучковая плазмохимия, основанная на ППР, и ее использование для синтеза и диссоциации молекул, разложения вредных и создания полезных соединений, имплантации, сухой очистки поверхности, нанесения покрытий;

– коллективный пучковый и турбулентный нагрев плазмы вплоть до термоядерных температур и коллективные процессы при транспортировке и фокусировке сильноточных пучков заряженных частиц;

– активные эксперименты в околоземной и космической плазме, в основе которых лежит плазменно-пучковое взаимодействие (ППВ);

– исследование взаимодействия СВЧ-излучения, возбуждаемого при ППВ, с веществом.

Такое многообразие совершенно различных на первый взгляд направлений связано с тем, что в основе всех их лежит коллективное ППВ.

Ключевые слова: плазменная электроника, неустойчивость, стохастичность, турбулентность, плазменно-пучковое взаимодействие, плазменно-пучковый разряд.

1.1. СТАНОВЛЕНИЕ ПЛАЗМЕННОЙ ЭЛЕКТРОНИКИ И НОВЫХ МЕТОДОВ УСКОРЕНИЯ

Более шестидесяти лет назад были предложены коллективные методы ускорения заряженных частиц, основы которых заложили В. И. Векслер, Г. И. Будкер и Я. Б. Файнберг, один из которых – метод ускорения волнами плотности заряда в плазме – в настоящее время очень успешно развивается.

Целью данной статьи является краткое изложение истории и современного состояния, указанного стремительно развивающегося направления физики плазмы и ускорителей заряженных частиц.

Создателем плазменной электроники и новых методов ускорения по праву считается академик Яков Борисович Файнберг — легендарный, выдающийся физик, известный во всем мире, автор ряда основополагающих работ, приведших к созданию новых направлений в физике плазмы и физической электронике. Президент Национальной академии наук Украины академик Б. Е. Патон писал об академике Я. Б. Файнберге следующее:

«Для него как для ученого – прежде всего характерны оригинальность и смелость научных идей, глубокая физическая интуиция, тесная

связь теоретических построений с экспериментом. Именно поэтому исследования, проведенные Я. Б. Файнбергом, завершились обнаружением столь большого числа новых физических явлений, среди которых пучковая неустойчивость, плазменно-пучковый разряд, переменнo-фазовая фокусировка в ускорителях.

Пионерские исследования Я. Б. Файнберга по коллективным взаимодействиям в неравновесной плазме, приведшие к открытию пучковой неустойчивости, легли в основу нового быстро развивающегося направления в физике плазмы – плазменной электроники. Последующие работы Я. Б. Файнберга и его учеников в этой области включают экспериментальное обнаружение и построение теории плазменно-пучкового разряда, теоретические и экспериментальные исследования взаимодействия релятивистских пучков с плазмой, открытие явления пучкового нагрева.

Я. Б. Файнберг – один из инициаторов развития физики и техники линейных ускорителей в СССР. Он первым разработал теорию линейных ускорителей на бегущей волне, предложил идею переменнo-фазовой фокусировки и построил теорию такой фокусировки. В 1956 году Яков Борисович предложил и разработал совместно с В. И. Векслером и Г. И. Будкером принципиально новое направление в физике ускорителей – коллективные методы ускорения.

Выпускник Харьковского государственного университета академик Я. Б. Файнберг являлся одним из крупнейших физиков-теоретиков Украины, он в конце 50-х годов заложил основы нового направления в физике плазмы – плазменной электроники.

Я много работал с Яковом Борисовичем по проблемам физики плазмы и пучков заряженных частиц. При его активном участии был организован и проведен эксперимент по воздействию пучков на космическую плазму. В свое время это был абсолютно новый и очень важный эксперимент. Яков Борисович вместе с Александром Ильичом Ахиезером были руководителями теоретических исследований в программе создания крупнейшего по тому времени ускорителя электронов с энергией на 4 ГэВ.

Зная Якова Борисовича очень много лет, я всегда преклонялся и преклоняюсь перед его могучим талантом, огромной трудоспособностью и большой человечностью. Он был глубоко принципиальным, честным и одержимым ученым, вместе с тем это был человек, обладающий неиссякаемым чувством юмора, шутки и доброжелательности. Яков Борисович уделял большое внимание молодежи, воспитанию молодых талантливых ученых. Он воспитал замечательную теоретико-экспериментальную научную школу физиков в областях плазменной электроники, физики и техники ускорителей, инерциального управляемого термоядерного синтеза, которой гордится наша Академия наук. Уверен, что его школа будет и дальше развивать заложенные Яковом Борисовичем идеи и замыслы и внесет достойный вклад в мировую физику».

За время своей более чем шестидесятилетней научной деятельности академик Я. Б. Файнберг проявил себя как ученый, который сочетал глубокие теоретические исследования с решением насущных практических задач.

В 1947 г. Я. Б. Файнбергом проведены первые теоретические исследования динамики частиц, ускоряемых в поле бегущей волны [1]. В этих работах разработана теория фазовой и радиальной устойчивости частиц, ускоряемых в волноводах медленных волн: на основе теоретических исследований и расчетов были построены в ХФТИ АН УССР первые в СССР линейные ускорители (ЛУ) электронов. Я. Б. Файнберг и А. И. Ахиезер руководили и принимали непосредственное участие в создании теории и проведении расчетов ЛУ на большие энергии, в частности, крупнейшего в Европе линейного ускорителя на 2 ГэВ [2, 3]. Был выполнен большой цикл исследований динамики частиц и электродинамики ускоряющих систем протонных ускорителей, а также расчетов всех протонных ускорителей, построенных в ХФТИ АН УССР [1, 4-7]. Я. Б. Файнберг и Н. А. Хижняк [8] одними из первых в мире провели исследования по ускорению заряженных частиц в анизотропных средах и спиральных волноводах. В 1953 г. им предложен принципиально новый метод обеспечения одновременной радиальной и продольной устойчивости частиц в линейных ускорителях [1, 9] – создание двумерной динамической устойчивости ускоряемых частиц с помощью ВЧ ускоряющих полей, фаза которых периодически изменяется вдоль ускорителя, так называемая переменнo-фазовая фокусировка, осуществленная в последние годы на ряде моделей ускорителей.

В 1956 г. на Женевской конференции по физике высоких энергий были доложены вызвавшие огромный интерес работы В. И. Векслера [10], Г. И. Будкера [11] и Я. Б. Файнберга [12], в которых сформулированы основные идеи совершенно нового направления в физике ускорителей – коллективных методов ускорения. Предложенный Я. Б. Файнбергом метод ускорения с помощью волн плотности заряда в плазменных волноводах и некомпенсированных электронных и ионных пучках [12-14] (вопросы динамики ускорения в плазме исследованы совместно с Н. А. Хижняком [1]) в настоящее время проходит экспериментальную проверку.

Я. Б. Файнберг и А. И. Ахиезер внесли большой вклад в развитие физики плазмы. В 1948 г. ими [15] (и независимо Д. Бомом и Е. Ф. Гроссом [16]) была теоретически предсказана и исследована первая и наиболее распространенная микронеустойчивость неравновесной плазмы – пучковая неустойчивость, т.е. впервые было показано, что в такой плазме возможно обращение эффекта затухания Ландау [17]. Значение этого вывода, ставшего классическим, для теории коллективных процессов в плазме и разнообразных практических приложений трудно переоценить. В экспериментальных исследованиях Дж. Бойда и др. [18], а также независимо Я. Б. Файнберга, И. Ф. Харченко, А. К. Березина, Е. А. Корнилова [19-23] впервые обнаружена и изучена пучковая неустойчивость как в отсутствие, так и при наличии магнитного поля (1957-1960 гг.), открыт новый тип разряда – плазменно-пучковый [23, 24] и новый способ бесстолкновительного нагрева плазмы – пучковый нагрев [25, 26].

Я. Б. Файнберг, Е. К. Завойский, В. А. Супруненко и др. являются соавторами открытия «Турбулентный нагрев и аномальное сопротивление плазмы» (диплом № 112) [27, 28]. Им впервые (1961 г.) [21] постав-

лен вопрос об управлении микронеустойчивостями плазмы, в частности предложен метод управления пучковой неустойчивостью, который экспериментально осуществлен в 1961–1965 гг. [29-58].

Я. Б. Файнбергом и Н. А. Хижняком (1957) открыто параметрическое резонансное излучение [59].

Я. Б. Файнбергом, Е. А. Корниловым, С. А. Некрашевичем, Н. А. Шоховцевым в 1970 г. [60] было положено начало экспериментам по возбуждению электромагнитных волн в полупроводниковой плазме, основанному на коллективном плазменно-пучковом взаимодействии (ППВ) с использованием замечания Л. И. Мандельштама, об отсутствии влияния канала в полупроводнике на условия распространения в нем волн, если радиус канала меньше длины волны. Пропуская через канал (2 мм) в полупроводнике, находящемся при азотной температуре, электронный пучок, удалось в результате диссипативной пучково-плазменной неустойчивости эффективно возбуждать электромагнитную волну на частоте 37 ГГц.

Яков Борисович одним из первых понял и оценил большие возможности использования релятивистских пучков. Совместно с В. Д. Шапиро, В. И. Шевченко в 1969 г. им были выполнены первые исследования в области нелинейной теории взаимодействия релятивистских пучков с плазмой (РЭП) [61-63]. Нелинейная теория взаимодействия РЭП с плазменным резонатором развита им совместно с В. И. Курилко [64]. Экспериментальные исследования взаимодействия сильноточных РЭП с плазмой, проведенные Я. Б. Файнбергом, А. К. Березиным, А. М. Егоровым, Е. А. Корниловым, Ю. В. Ткачом и др., впервые убедительно продемонстрировали высокую эффективность такого взаимодействия [65-106]. Эти исследования позволили получить большие мощности СВЧ излучения (1974–1975 гг.) [91-92] и создать мощный лазер ультрафиолетового диапазона, использующий коллективные взаимодействия (1969–1971 гг.) [74, 82, 99]. Начиная с 1974 г. Я. Б. Файнбергом, А. К. Березиным, В. А. Киселевым проведен цикл экспериментальных исследований взаимодействия моноэнергетичных РЭП очень малой угловой расходимости с плотной плазмой (10^{15} - 10^{17} см⁻³), в результате которого впервые получена аномально быстрая релаксация пучка [72, 89-90, 93-94, 102]. Доказано Я. Б. Файнбергом, Ю. П. Блюхом, В. И. Карасем, М. Г. Любарским, И. Н. Онищенко (1984 г.) [103], что для сильноточных релятивистских электронных пучков, распространяющихся в плазменных волноводах, происходит смена черенковского механизма излучения на аномальный доплеровский, в результате которой эффективность излучения не уменьшается с ростом степени неравновесности системы и релятивизма пучка. Интересный цикл теоретических исследований неоднородного плазменно-пучкового разряда проведен Я. Б. Файнбергом совместно с С. С. Моисеевым (1971–1976 гг.) [65, 67-68, 77, 79-80]. Большие мощности излучения в длинном импульсе получены совместно с Е. А. Корниловым при взаимодействии сильноточных электронных пучков линейного плазменного бетатрона с плазмой, находящейся в открытом резонаторе [98].

Нельзя не отметить, что в последнее время получили широкое развитие теоретические и экспериментальные работы, выполненные Я. Б. Файнбергом, О. Г. Загородновым, А. М. Егоровым и другими сотрудниками еще в 1955–1960 гг., в которых был предсказан и наблюдался эффект умножения частоты, обусловленный двойным эффектом Доплера, при отражении от движущейся плазмы в системе медленных волн и разработана его теория [104-107]. Предложен и исследован совместно с В. И. Мирошниченко лазер на свободных электронах с плазменным заполнением (1986 г.) [108-110]. Благодаря рассеянию сильноточным РЭП плазменных волн возможно существенное укорочение длины волны и увеличение эффективности за счет использования тока пучка, существенно превышающего предельный вакуумный.

Я. Б. Файнбергом, Ю. В. Ткачом, И. И. Магдой, А. М. Егоровым, И. Ф. Харченко, Ю. Ф. Лониным созданы комплексы сильноточных ускорителей электронов с энергией до 1 МэВ и током до 100 килоампер [74, 76, 79, 97], а также ускоритель протонов «Урал-5» на энергию 5 МэВ [112].

Предложенная в НИИ ХФТИ (Е. А. Корнилов, В. А. Кияшко, Ю. Е. Коляда, Я. Б. Файнберг, 1976 г.) [113-116], разработанная и достаточно детально исследованная экспериментальная модель ионного индукционного ускорителя – ИИНДУС включает инжектор ионного пучка и две последовательные ускоряющие секции. Ускоряющее напряжение в инжекторной секции составляет 300 кВ при длительности импульса 10^{-6} с, а напряжение на каждой ускоряющей секции – 120 кВ для импульса $5 \cdot 10^{-7}$ с. В отличие от традиционных вакуумных индукционных ускорителей, в этом ускорителе с компенсацией пространственного заряда электронный ток почти отсутствует благодаря внешнему изолирующему магнитному полю $H_{\max} \approx 10$ кГс.

Исследованы (В. И. Голота, В. И. Карась) две наиболее опасные неустойчивости, которые существенно влияют на качество пучка, а именно: высокочастотная пучково-плазменная неустойчивость, предсказанная А. И. Ахизером, Я. Б. Файнбергом и независимо Д. Бомом, Е. Гроссом, а также филаментационная электромагнитная неустойчивость.

Для обеспечения очень жестких ограничений на параметры сильноточного ионного пучка, в частности, его эмиттанс и яркость, проведены детальные 2.5-мерное численное моделирование и экспериментальные исследования: зарядовой и токовой компенсации, ускорения, транспортировки и устойчивости сильноточного ионного пучка в нескольких магнитоизолированных ускоряющих и дрейфовых промежутках. Моделирование и экспериментальные исследования (О. В. Батищев, Н. Г. Белова, В. И. Голота, В. И. Карась, В. А. Кияшко, Я. Б. Файнберг) дали ответы на ряд важных вопросов:

– найдена максимально возможная плотность тока (100 А/см²) и ток ионного пучка, при которых обеспечивается однородность (устранение филаментации) плотности тока, заданный разброс продольной и поперечной энергии;

- определена оптимальная энергия специально инжектированного электронного пучка (около 1 МэВ), который обеспечивает достаточную зарядовую и токовую компенсацию;

- определены необходимые параметры (температура, плотность) электронов, используемых для компенсации объемного заряда ионов в дрейфовых промежутках;

- найдены оптимальные условия, обеспечивающие устойчивость сильноточного ионного пучка.

Результаты проведенных фундаментальных исследований (В. И. Карась, В. В. Мухин, В. Е. Новиков) вносят существенный вклад в понимание физических механизмов, определяющих процессы ускорения, формирования и управления интенсивными ионными пучками в плазмооптических системах. Построена теория компенсации сильноточного ионного пучка в магнитоизолированном ускоряющем промежутке с помощью специально инжектированного в систему электронного пучка, геометрические параметры которого тождественны параметрам ускоряемого ионного пучка, а плотности токов этих пучков совпадают.

С помощью 2,5-мерного полностью релятивистского электромагнитного кинетического кода было установлено (В. И. Карась, О. В. Батищев, Н. Г. Белова, Ю. С. Сигов), что приложенное внешнее электрическое поле, которое ускоряет ионы и тормозит электроны, не препятствует прохождению электронного пучка через ускоряющие промежутки, если разность потенциалов не превышает начальной энергии электронов пучка; имеет место не только зарядовая, но и токовая компенсация ионного пучка; ионный пучок в целом остается моноэнергетическим, а разброс электронного пучка в фазовом пространстве составляет почти 100%, что, однако, не препятствует зарядовой компенсации ионного пучка электронами; было получено (В. И. Карась, Н. Г. Белова) ограничение на толщину стенки трубчатого сильноточного ионного пучка, которое обеспечивает однородность по сечению пучка зарядовой и токовой компенсации, а также ускоряющего поля.

Полученные вследствие построения аналитической теории, 2,5-мерного численного моделирования и экспериментальных исследований результаты (В. И. Карась, Е. А. Корнилов, О. В. Батищев, Н. Г. Белова, Ю. С. Сигов, Я. Б. Файнберг, В. А. Кияшко, В. В. Мухин, В. И. Голота) по ускорению зарядово- и токово-компенсированного сильноточного ионного пучка в линейном индукционном ускорителе заложили физические основы создания сильноточных линейных индукционных ускорителей. Они могут быть успешно использованы при разработке сверхмощных ускорителей тяжелых ионов для инерциального термоядерного синтеза и разнообразных технологических применений.

Впервые (Е. А. Корнилов, В. А. Кияшко, Ю. Е. Коляда, Я. Б. Файнберг) создан модуль сильноточного индукционного ускорителя ИИНДУС с рекордными общим током (4 кА) и плотностью тока (1 кА/см²) при длительности импульса 0,5 мкс и энергии ионов (аргон, ксенон и др.) 600 кэВ. Изготовлены ускоряющие секции для увеличения энергии ИИНДУС до (3-5) МэВ.

Метод ускорения с помощью волн плотности заряда получил в последнее время широкое развитие и рассматривается как один из наиболее перспективных методов создания ускорителей нового поколения [4, стр. 4-6]. Разработаны новые методы ускорения заряженных частиц (Я. Б. Файнберг, В. А. Балакирев, А. К. Березин, В. А. Буц, В. И. Карась, В. А. Киселев, А. Ф. Линник, И. Н. Онищенко, Г. В. Сотников и др.), основанные на возбуждении ускоряющих полей большой амплитуды в плазме и других средах с помощью интенсивных электронных ступков или сверхкоротких лазерных импульсов.

В результате проведенных в НИЦ ХФТИ теоретических и экспериментальных исследований (А. К. Березин, Ю. П. Блюх, М. Ф. Горбатенко, А. М. Егоров, Е. А. Корнилов, О. Ф. Ковшик, Л. А. Митин, И. Н. Онищенко, Ю. Е. Коляда, Я. Б. Файнберг, 1960–1990 гг.), в которых были получены решающие результаты в области нерелятивистской плазменной электроники при использовании как чисто плазменных волноводов, так и комбинированных волноводов, в которых сочетаются достоинства плазменных и обычных волноводов, вопрос о высокой эффективности нерелятивистской плазменной электроники был окончательно решен, и работы в этой области получили широкое развитие (НИЦ ХФТИ, Всероссийский электротехнический институт (В. И. Переводчиков, Л. А. Митин, М. А. Завьялов)). Созданы пучково-плазменные генераторы и усилители нового типа регулярных и стохастических колебаний с мощностью более 100 киловатт в импульсе и повышенным КПД до 50%.

В 1994–1998 гг. Я. Б. Файнбергом, В. А. Балакиревым, Ю. П. Блюхом, В. И. Карасем, Е. А. Корниловым, М. Г. Любарским, О. В. Подобинским выполнены исследования, в которых самосогласованным образом в нерелятивистском приближении учитывается влияние изменения параметров плазмы, в первую очередь ее плотности, под действием возбуждаемых при плазменно-пучковом взаимодействии (ППВ) СВЧ-колебаний и волн на процессы генерации и усиления СВЧ-излучения. Показано, что в результате нелинейных эффектов в плазме (пондеромоторные продольные и поперечные силы и параметрические резонансы) происходит генерация СВЧ-колебаниями и волнами, возбуждаемыми при ППВ, ионных колебаний и волн, что сопровождается изменением плотности плазмы; плазма становится неоднородной и нестационарной, что может вызывать уменьшение интенсивности или даже срыв СВЧ-колебаний и волн, а также существенно изменить их спектр. Теория, учитывающая действие пондеромоторных сил в плазме, позволяет определить процессы, ограничивающие интенсивность возбуждаемых при ППВ СВЧ-колебаний и волн или даже обуславливающие их срыв. Исследован вопрос о влиянии на ППВ параметрических неустойчивостей. В приближении трехволнового взаимодействия – ионно-звуковая, электромагнитная и плазменная волны – рассмотрен вопрос о влиянии периодической неоднородности плазмы на ППВ. Показано, что в условиях пространственно-временного синхронизма трех волн и при ограничении амплитуды плазменной волны значениями, при которых еще не наступает захват электронов пучка, возможно также увеличение эффективности ППВ. Выводы теории находятся в согласии с экспериментами.

Я. Б. Файнберг, Ф. Г. Басс, В. Д. Шапиро в 1965 г. показали, что стохастические электрические поля с конечным временем корреляции фазы могут эффективно нагревать частицы в бесстолкновительной плазме, потому что обратное время корреляции при взаимодействии частица - волна фактически имеет физический смысл некоторой эффективной частоты столкновений [16]. Физический механизм такого нагрева довольно прозрачен. Как известно, при взаимодействии регулярного СВЧ поля с заряженной частицей в отсутствие парных соударений средняя (по периоду) энергия частицы не возрастает. При наличии соударений изменение средней энергии пропорционально частоте соударений. Элементарное объяснение заключается в том, что при соударениях изменяется фаза частицы в поле, в которую попадает частица после соударения, и поэтому средняя по периоду энергия, получаемая частицей, отлична от нуля. Естественно, что-то же произойдет, если изменение фазы частицы в поле произойдет не в результате парного соударения, а случайного скачка фазы электромагнитного поля. Но электромагнитные волны со случайно изменяющейся фазой являются частным случаем стохастических электромагнитных полей – во взаимодействии с частицей они играют роль, аналогичную парным соударениям, роль частоты парных соударений играет частота скачков фазы, а приобретаемая частицей средняя по периоду энергия пропорциональна частоте скачков фазы. Этот простой пример наглядно объясняет одну из особенностей взаимодействия заряженной частицы со случайными электромагнитными полями. Так как в основе многих процессов взаимодействия излучения с веществом лежит взаимодействие «электромагнитное поле – частица», то можно ожидать, что упомянутая выше особенность взаимодействия стохастического излучения с частицей будет иметь ряд существенных различий с процессами взаимодействия регулярного излучения (в частности – СВЧ). Можно утверждать, что исследование взаимодействия стохастических СВЧ полей с веществом приведет к существенному дополнению теории взаимодействия излучения с веществом и значительно расширит область возможных приложений этого взаимодействия. Как известно, в стохастических электромагнитных полях может эффективно осуществляться ускорение заряженных частиц, нагрев плазмы и целый ряд других полезных процессов. Напомним, что при этом происходит обмен энергией между СВЧ-стохастическими электромагнитными полями и заряженными частицами, несмотря на отсутствие парных соударений и отсутствие резонанса или синхронизма в движении частиц и распространении электромагнитных полей. Естественно, что средняя энергия, передаваемая от электромагнитного поля частицам, растет не как t (как это имеет место при резонансном взаимодействии), а пропорционально \sqrt{t} . Однако этот обмен энергией может быть весьма значительным. Поэтому взаимодействие заряженных частиц со стохастическими электромагнитными полями надо учитывать наряду с другими нелинейными эффектами, пропорциональными $\sim E^2$. Срав-

нивая соотношение для прироста энергии заряженной частицы при взаимодействии с регулярными СВЧ полями при наличии парных соударений с соотношением для случая взаимодействия со стохастическими электромагнитными полями в отсутствие парных соударений, следующим из квазилинейной частично феноменологической теории слабо турбулентной плазмы с учетом корреляции электромагнитных стохастических полей, замечаем, что эти соотношения подобны, в них частота парных соударений заменена на обратное время корреляции τ_{cor}^{-1} .

В ННЦ ХФТИ (Я. Б. Файнберг, А. М. Артамошкин, А. К. Березин, Е. А. Корнилов, О. Ф. Ковпик, Ю. М. Ляпкало) созданы нового типа плазменно-пучковые генераторы интенсивного стохастического излучения. Важным является вопрос о взаимодействии с различными средами стохастического электромагнитного излучения. В. И. Карасем, Я. Б. Файнбергом, А. М. Артамошкиным, А. Ф. Алисовым, И. В. Карась, В. Д. Левченко (ИПМ РАН), В. И. Мирным, И. Ф. Потапенко (ИПМ РАН), В. С. Усом проведены в 2002–2017 гг. теоретические и экспериментальные исследования и численное моделирование прямого и наклонного падения на поверхность раздела вакуум-плазма со сверхкритической плотностью линейно поляризованных электромагнитных волн. Основные результаты этих исследований следующие: 1) при рассмотренных параметрах коэффициент проникновения (КП) микроволн со стохастически прыгающей фазой (МВСПФ) на порядок величины выше, чем КП широкополосной регулярной электромагнитной волны (ШПРЭВ) с той же спектральной плотностью энергии; 2) в особенности, при наклонном падении МВСПФ нагрев электронов наиболее существен, а, кроме того, электронная функция распределения имеет высокоэнергетичный «хвост»; 3) указаны необходимые условия для газового пробоя и высокочастотного разряда в источнике света в стохастических полях. Аномальное поведение коэффициента проникновения, условий пробоя, СВЧ - газового разряда и бесстолкновительного нагрева электронов связаны с прыжками фазы МВСПФ.

На основе фундаментальных исследований (В. И. Голота и др.) в области низкотемпературной неравновесной плазмохимии разработан новый тип плазмохимического реактора с использованием тлеющего разряда высокого давления. Создан типоряд озонаторных установок с производительностью до 300 граммов в час.

Классическая основополагающая работа, выполненная А. И. Ахиезером и Я. Б. Файнбергом, по открытию пучковой неустойчивости «задала работу» поколениям физиков, привела в итоге к созданию нового направления в физике плазмы – плазменной электроники и новых методов ускорения, к созданию в ННЦ ХФТИ (1995 г.) целого института – Института плазменной электроники и новых методов ускорения (ИПЭНМУ ННЦ ХФТИ НАН Украины).

«Якову Борисовичу присуща удивительная черта весьма редкая для физиков-теоретиков такого крупного научного масштаба – это теснейшая связь с экспериментом, а точнее – прямое руководство экспериментальными исследованиями, – отмечал член-корреспондент НАН

Украины В. Т. Толлок. – *Прямой результат такой деятельности академика Я. Б. Файнберга – создание им своей мощной широко известной научной школы. Один из конкретных результатов – открытие «Турбулентный нагрев и аномальное сопротивление плазмы». Для школы Файнберга характерна эффективная подготовка научных кадров наивысшей квалификации. Полагаю, что этой школе принадлежит рекорд ХФТИ по количеству (по отношению к общему числу сотрудников) подготовленных в ней докторов наук не только теоретиков, но, что ещё более важно, экспериментаторов. Чрезвычайно деликатный в повседневном общении с людьми Яков Борисович мог быть довольно резким в принципиальных вопросах, касающихся его любимой работы. Мне запомнился эпизод, когда он с места в зале бросил уничтожающую реплику во время некоего научного доклада одного из академиков: «Что за чушь Вы несёте!»*

Все работы школы Файнберга отличаются высокой строгостью изложения и предельной чёткостью формулировок результатов.

Президент Национальной академии наук Украины, академик Б. Е. Патон отмечал: *«Вы, Яков Борисович, легендарный, выдающийся физик, известный во всем мире. Зная Вас очень много лет, я всегда преклонялся и преклоняюсь перед Вашим могучим талантом, огромной трудоспособностью и большой человечностью. Вы воспитали замечательную научную школу физиков, которой гордится наша Академия наук. Уверен, что Ваша школа будет и дальше развивать заложенные Вами идеи и замыслы и внесет достойный вклад в мировую физику».*

Академики Е. П. Велихов и Р. З. Сагдеев в отзыве о научной деятельности Я. Б. Файнберга писали: *«Яков Борисович Файнберг – крупный советский физик, автор ряда основополагающих работ, приведших к созданию новых направлений в физике плазмы и физической электронике. Для него как для ученого – прежде всего характерны оригинальность и смелость научных идей, глубокая физическая интуиция, тесная связь теоретических построений с экспериментом. Именно поэтому исследования, проведенные Я. Б. Файнбергом, завершились обнаружением столь большого числа новых физических явлений, среди которых пучковая неустойчивость, плазменно-пучковый разряд, переменнo-фазовая фокусировка в ускорителях.*

Пионерские исследования Я. Б. Файнберга по коллективным взаимодействиям в неравновесной плазме, приведшие к открытию пучковой неустойчивости, легли в основу нового быстро развивающегося направления в электронике – плазменной электроники СВЧ. Последующие работы Я. Б. Файнберга и его учеников в этой области включают экспериментальное обнаружение и построение теории плазменно-пучкового разряда, теоретические и экспериментальные исследования взаимодействия релятивистских пучков с плазмой, открытие явления пучкового нагрева».

Я. Б. Файнберг – один из инициаторов развития физики и техники линейных ускорителей в СССР. Он первым разработал теорию линейных ускорителей на бегущей волне, предложил идею переменнo-фазовой фоку-

сировки и построил теорию такой фокусировки. Наконец Я. Б. Файнберг является одним из авторов принципиально нового направления в физике ускорителей – направления коллективных методов ускорения.

Я. Б. Файнберг уже давно пользуется самым широким международным признанием как один из наиболее ярких и оригинальных ученых, связавших физику ускорителей и электронику с современной физикой плазмы. Несмотря на столь высокое положение в научном мире, Яков Борисович был исключительно демократичен. Но вместе с тем он не терпел бездельников и людей, которые работают «от и до». *«Заниматься в науке надо тем, что нравится. Без вдохновения, как правило, ничего не получается»*, – сказал он как-то в минуту откровенности.

2. ПЛАЗМЕННАЯ ЭЛЕКТРОНИКА И ПЛАЗМЕННЫЕ МЕТОДЫ УСКОРЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ^{1*}

Плазменная электроника – это четко сформировавшийся раздел физики плазмы, который связан, с одной стороны, с фундаментальными свойствами плазмы, колебательными и волновыми процессами в ней, разнообразными неустойчивостями, стохастичностью и турбулентностью плазмы и, с другой – с важными приложениями. Среди них упомянем только следующие:

– сверхвысокочастотная нерелятивистская и релятивистская плазменная электроника, изучающая процессы возбуждения в плазме интенсивного электромагнитного излучения от микроволнового до светового диапазона длин волн;

– одно из основных направлений коллективных методов ускорения – метод ускорения заряженных частиц волнами плотности заряда в плазме и некомпенсированных пучках, создание на его основе высокоточных ускорителей электронов, протонов и ионов;

– создание высокоточных плазменных индукционных ускорителей электронов и ионов с коллективной фокусировкой, в том числе тяжелых ионов, которые могут быть использованы для инерциального управляемого термоядерного синтеза (УТС);

– новый тип газового разряда – плазменно-пучковый разряд (ППР)¹ и плазменно-ионно-пучковый разряд². Несмотря на то, что физика газового разряда развивается уже многие годы, были открыты только несколько типов разряда – это тлеющий, искровой, дуговой, СВЧ-разряд, лазерный разряд. Плазменная электроника привела к открытию нового типа разряда, так называемого плазменно-пучкового разряда, который сейчас обнаружен в большинстве лабораторных и космических экспериментов;

^{1*}Примечания этого раздела приведены его конце.

– неравновесная пучковая плазмохимия³, основанная на ППР, и ее использование для синтеза и диссоциации молекул, разложения вредных и создания полезных соединений, имплантации, сухой очистки поверхности, нанесения покрытий;

– коллективный пучковый и турбулентный нагрев плазмы вплоть до термоядерных температур и коллективные процессы при транспортировке и фокусировке сильноточных пучков, заряженных частиц⁴;

– активные эксперименты в околоземной и космической плазме, в основе которых лежит плазменно-пучковое взаимодействие (ППВ)⁵;

– исследование взаимодействия СВЧ-излучения, возбуждаемого при ППВ, с веществом.

Такое многообразие совершенно различных на первый взгляд направлений связано с тем, что в основе всех их лежит коллективное ППВ. Напомним, что одной из наиболее распространенных неустойчивостей является плазменно-пучковая неустойчивость, которая была предсказана А. И. Ахиезером, Я. Б. Файнбергом в 1949 г. и независимо Д. Бомом и Е. Гроссом в 1949 г. и экспериментально обнаружена и исследована в 1957–1960 гг. И. Ф. Харченко, Я. Б. Файнбергом, А. К. Березиным, Е. А. Корниловым. Плазменно-пучковая неустойчивость является одним из основных элементов этого направления физики плазмы.

Для всех перечисленных выше направлений ПЭ общим является то, что лежащие в их основе элементарные механизмы излучения и поглощения одни и те же или представляют собой обращенные эффекты (эффект Черенкова, нормальный и аномальный эффекты Доплера, параметрический эффект Черенкова или резонансное переходное излучение, томсоновское, комптоновское и аномальное рассеяние, циклотронное и синхротронное излучение и поглощение, ондуляторное и параметрическое излучение, переходное излучение, эффекты Рамана, Манделъштамма–Ландсберга и Манделъштамма–Бриллюэна). В общем, практически все элементарные эффекты излучения и поглощения охватываются этими направлениями. Мы уже многие годы исходим из утверждения, теперь уже доказанного, о том, что генераторы и ускорители допускают обращение, в результате которого можно создавать новые виды ускорителей и генераторов. Физическая причина этого заключается в возможности обращения элементарных процессов, лежащих в основе механизмов излучения и ускорения. Последовательное проведение идеи о возможном обращении генераторов-ускорителей имеет важное значение для поисков новых видов генераторов и ускорителей, а также новых неустойчивостей и управления ими.

Подобно вакуумной и квантовой электронике плазменная электроника основана на явлении индуцированного (вынужденного) излучения или сверхизлучения и поглощения электромагнитных волн. В вакуумной электронике излучают потоки заряженных частиц, движущиеся в электродинамических структурах – металлических либо диэлектрических волноводах и резонаторах, а в плазменной электронике излучают потоки заряженных частиц, движущиеся в плазменных волноводах и резонаторах. Если

в вакуумной электронике частоты электромагнитного излучения определяются конечными геометрическими размерами электродинамических систем – волноводов и резонаторов, а в квантовой электронике – дискретностью энергетических уровней излучателей – возбужденных атомов и молекул, то в плазменной электронике собственные частоты электромагнитных волн зависят в основном от плотности плазмы и в значительно меньшей мере от геометрических размеров волноводов и резонаторов.

Основные достоинства плазменной электроники, определяющие перспективы ее развития:

- частоты волн и колебаний, возбуждаемых в плазме, в основном определяются плотностью плазмы, и поэтому, изменяя в широких пределах плотность плазмы, можно в очень широких пределах изменять диапазон возбуждаемых волн;

- возможность возбуждения в плазме электромагнитных полей очень большой напряженности, которые могут быть эффективно использованы для ускорения и фокусировки заряженных частиц в плазме. Напряженность этих полей возрастает вместе с плотностью плазмы, и в последнее время достигнуты напряженности полей 10 МВ/см, которые намного превышают напряженности ускоряющих полей в вакуумных ускорителях и могут быть повышены еще на 1 - 2 порядка;

- эффективное возбуждение объемных (а не поверхностных) мод, длины волн которых могут быть значительно меньше геометрических размеров плазменных волноводов и резонаторов;

- в плазменных системах благодаря явлению зарядовой и токовой компенсации можно использовать очень большие токи и мощности, которые существенно превышают достигаемые в вакуумной электронике;

- повышение эффективности плазменно-пучкового взаимодействия для релятивистских пучков с возрастанием релятивистского фактора в результате длительного синхронизма между пучком и возбуждаемой им волной.

Плазменная электроника сформировалась в важный успешно развивающийся раздел физики плазмы. Основные идеи и принципы, которые в ней заложены, прошли теоретическую и экспериментальную проверку.

Напомним, что для развития плазменной электроники или близких ей областей много было сделано также Е. К. Завойским, М. С. Рабиновичем, А. А. Рухадзе, Д. Д. Рютовым, М. В. Незлиным, М. Д. Габовичем, Р. А. Демирхановым, В. Я. Кисловым, А. Н. Диденко, А. А. Ивановым, В. П. Саранцевым.

Построена нелинейная теория взаимодействия релятивистских и нерелятивистских пучков с плазмой. Предложены методы управления плазменно-пучковыми неустойчивостями, создана их нелинейная теория, они прошли экспериментальную проверку. Обнаружены новый тип газового разряда – плазменно-пучковый разряд для лабораторной и космической плазмы, а также новый тип бесстолкновительного нагрева плазмы – пучковый и турбулентный нагрев. Предсказан параметрический эффект Черенкова в слоистых средах.

Для развития плазменной электроники наряду с исследованием динамики ППВ имели важное значение теоретические и экспериментальные исследования электродинамики плазменных волноводов и резонаторов. Недостаточно критическое перенесение результатов исследований распространения волн в безграничной плазме на плазменные волноводы и резонаторы привело к неправильным оценкам перспектив развития нерелятивистской плазменной электроники и в значительной степени замедлили ее развитие. Теперь, после проведенных в ХФТИ теоретических и экспериментальных исследований, в которых были получены решающие результаты в области нерелятивистской плазменной электроники при использовании как чисто плазменных волноводов, так и комбинированных волноводов, в которых сочетаются достоинства плазменных и обычных волноводов, вопрос о высокой эффективности нерелятивистской плазменной электроники можно считать решенным, и работы в области нерелятивистской плазменной электроники получили широкое развитие (ХФТИ, Всероссийский электротехнический институт и др.)⁶.

Перечисленными выше приложениями далеко не исчерпываются возможности плазменной электроники. Среди других следует также упомянуть стохастический нагрев плазмы, стохастическое ускорение и др. Следует, однако, заметить, что коллективное ППВ может в некоторых случаях играть и отрицательную роль. Поэтому для его эффективного использования в тех многочисленных случаях, когда оно полезно, и стабилизации или подавления ППВ, когда оно вредно, нужно научиться управлять плазменно-пучковыми неустойчивостями (ППН). Я. Б. Файнбергом был предложен метод управления ППН путем задания на входе системы сигнала нефлуктуационного характера или слабой предварительной модуляции, при этом величина управляющего сигнала на несколько порядков меньше возбуждаемого в результате ППН. Высокая эффективность этого метода была теоретически и экспериментально доказана.

Важным достоинством плазменной электроники является высокая эффективность и большое разнообразие способов возбуждения нерегулярных колебаний и волн сложной формы, хаотических колебаний и волн при взаимодействии пучков заряженных частиц с плазмой. Эта особенность была экспериментально и теоретически обнаружена в самых ранних исследованиях. Как известно, для возбуждения стохастических колебаний и волн необходимы: сильная неравновесность системы, возникновение нелинейности даже при сравнительно малой напряженности возбуждаемых электромагнитных полей. Значительно облегчается переход к стохастичности в широкополосных системах. Все эти элементы как раз имеют место при возбуждении волн при плазменно-пучковом взаимодействии. Как показали дальнейшие общие теоретические и экспериментальные исследования, большое число степеней свободы (большое количество мод колебаний) не является обязательным условием возникновения стохастичности в системе. В 1971 г. Рюэлем и Такенсом было теоретически показано, что странный аттрактор и связанная с ним стохастичность имеют место в системе с числом степеней свободы более полутора. Характерной особенностью плазмен-

но-пучкового метода возбуждения нерегулярных колебаний является многообразие механизмов перехода к стохастичности: наряду с фейгенбаумовским механизмом удвоения периода автомодуляции может иметь место перемежающаяся турбулентность и другие сценарии перехода.

Очень важным этапом развития плазменной электроники явилось возникновение релятивистской плазменной электроники. Развитие релятивистской плазменной электроники задерживалось в первую очередь из-за отсутствия сильноточных источников релятивистских электронов. Однако не меньшее значение имело и то, что на основе правильных выводов линейной теории взаимодействия релятивистских пучков с плазмой о сильном уменьшении инкремента неустойчивостей из-за релятивистского возрастания массы частиц электронного пучка делался неправильный вывод о малой эффективности коллективных взаимодействий релятивистских потоков электронов с плазмой. Как было показано⁷, нелинейная теория этого взаимодействия приводит к выводу о том, что эффективность рассматриваемого взаимодействия, определяемая как относительная доля энергии электронов пучка, расходуемая на возбуждение колебаний, с ростом релятивистского фактора γ не только не уменьшается, но и значительно возрастает, так что $W \approx n_b m c^2 \gamma^2 (n_b / n_p)^{1/3}$ (n_b – плотность пучка, n_p – плотность плазмы) на гидродинамической стадии взаимодействия.

Необходимо подчеркнуть, что повышение степени неравновесности системы благодаря возрастанию отношения плотности пучка к плотности плазмы позволяет в определенных пределах повысить долю энергии, передаваемую от пучка плазме. При одновременном возрастании релятивистского фактора вместе со степенью неравновесности системы, которая характеризуется параметром Судана $S = (n_b / (2n_p))^{1/3} \gamma$, доля энергии, передаваемая на возбуждение плазменных колебаний, вначале возрастает, а затем падает. Она достигает максимального значения эффективности при $S = 0,6$. Таким образом, большая доля энергии пучка расходуется на возбуждение электромагнитных волн в плазме. Физической причиной этого результата, коренным образом изменяющего перспективы релятивистской плазменной электроники, является то, что из-за релятивистского возрастания массы обратное влияние возбуждаемых волн на электроны пучка не приводит к значительному их разбросу по скоростям в пучке. Поэтому взаимодействие монохроматического пучка релятивистских электронов с плазмой сильное и происходит на гидродинамической стадии, когда имеет место резонанс между колебаниями электронов пучка и каждой гармоникой узкого волнового пакета (разброс электронов по скоростям, обусловленный обратным воздействием колебаний на пучок, $\Delta v / v_0 = \Delta \varepsilon / \varepsilon \gamma^2$, меньше ширины резонанса, равной δ / ω (δ – инкремент, ε – энергия частиц пучка), или, иными словами, условие резонанса $\Delta \omega / \omega \leq \delta / \omega$ нарушается при значительном уменьше-

нии энергии пучка $\Delta\varepsilon$, обусловленном возбуждением колебаний. Другой важной особенностью РЭП является то, что благодаря большой скорости РЭП ($v_b \approx c$) в условиях, например, черенковского резонанса возбуждаемые им волны с $v_{ph} \approx c$ легко излучаются из плазмы и, таким образом, значительно облегчается проблема ввода и вывода энергии возбужденных колебаний.

Так как источником энергии возбуждаемых колебаний является электронный пучок, а его предельный ток и энергия с ростом γ сильно возрастают, то интенсивность возбуждаемых колебаний в релятивистском случае может быть очень большой и достигать сотен МВт и больших значений.

В развитие релятивистской СВЧ-плазменной электроники внесли решающий вклад сотрудники ХФТИ, Института общей физики и других институтов и лабораторий⁸. Экспериментально продемонстрирована возможность возбуждения интенсивных волн в плазме и комбинированных плазменных волноводах с внешней замедляющей структурой благодаря использованию сильноточных релятивистских пучков (получена мощность выше 600 МВт)⁹. Создан лазер светового и ультрафиолетового диапазона, который использует коллективное плазменно-пучковое взаимодействие. Продемонстрирована возможность генерации без внешней замедляющей структуры регулярных интенсивных волн с фиксированными частотами и фазами и относительно узким спектром благодаря взаимодействию сильноточного РЭП с плазмой¹⁰ (излучаемая мощность 200 МВт). Среди наиболее важных результатов 70–90-х годов отметим такие. В США¹¹ подтвержден вывод ХФТИ о повышении мощности возбуждаемого излучения (от 60 до 400 МВт) и эффективности (в 6–8 раз) при заполнении замедляющей системы генератора плазмой. Предложена новая модификация плазменно-пучкового генератора (PASOTRON) без внешнего магнитного поля, который имеет большую длительность импульса (более 100 мкс) и большую энергию излучения (300–500 Дж). Благодаря приведенным выше результатам на Международной конференции 1992 г. «BEAMS 92» было узаконено и получило признание новое направление в электронике – плазменная электроника, и ее результаты отмечены как одни из наиболее важных в последние годы в высокочастотной электронике.

Одним из наиболее важных достижений плазменной электроники являются работы по пучковому нагреву плазмы мощными релятивистскими пучками в открытых магнитных ловушках¹². Этот нагрев осуществлен сверхмощными СВЧ-волнами, возбуждаемыми в результате коллективного взаимодействия сильноточных РЭП с плазмой. Существенно повысив степень моноэнергетичности и снизив угловую расходимость электронных пучков, сотрудники Института ядерной физики СО РАН с помощью созданных ими РЭП большой энергии (более 100 кДж) сумели осуществить нагрев в ловушке плазмы с плотностью 10^{15} см^{-3} (температура до 1 кэВ), а в результате взаимодействия с ней еще более

плотная (10^{17} см^{-3}) плазма была нагрета до температуры в несколько сотен эВ. При этом доля энергии пучка, идущая на нагрев плазмы, достигала 30 - 35%.

Еще одним важным направлением СВЧ-плазменной электроники являются лазеры на свободных электронах с плазменным заполнением¹³. Была указана возможность использования в качестве виглера (ондулятора) в лазере на свободных электронах (ЛСЭ) не пространственно-периодических магнитных полей, а электромагнитных или электростатических волн, возбуждаемых в плазме. В отличие от обычно используемого в настоящее время виглера (пространственно-периодические поля), где возможность укорочения длины волны ограничена из-за технических трудностей уменьшения периода структуры, в рассматриваемом случае длина волны определяется дисперсионными свойствами плазмы и может быть существенно уменьшена. Учитывая также возможность значительного увеличения предельного тока пучка по сравнению с вакуумным, снижения фазовой скорости волны и возможность использования аномального рассеяния, можно утверждать, что заполнение ЛСЭ плазмой существенно повышает эффективность. Другая возможность преобразования ленгмюровских волн, возбуждаемых РЭП в плазме, в электромагнитное излучение - рассеяние на ионно-звуковых волнах¹⁴.

В последнее время предложены две очень интересные возможности создания виглеров с помощью плазмы. Первая – использование электростатических полей ионного канала, образующегося при движении в плазме РЭП с $n_b < n_p$ ¹⁵. Возникающие в результате фокусировки РЭП в канале бетатронные колебания имеют очень короткую длину волны. Другой способ образования виглера при движении РЭП в плазме основан на создании гофрированного ионного остова (ion ripple)¹⁶. Очень важно, что в ЛСЭ с плазменным заполнением плазма выполняет две важные функции: создание виглера и очень сильной фокусировки РЭП. При этом отпадает необходимость во внешних магнитных полях и становится возможным сильное укорочение длины волны вплоть до ультрафиолетового диапазона. Направлением плазменной электроники, приобретающим все большее значение и очень быстро развивающимся в последнее время, является умножение или увеличение частоты при отражении электромагнитных волн от фронта движущейся плазмы. Как было показано еще А. Эйнштейном, при отражении света от движущегося зеркала имеет место двойной эффект Доплера, при этом частота отраженной волны $\omega_r = 2\omega_0 / (1 - \beta^2)$, где $\beta = v/c$, v – скорость зеркала.

Одновременно происходят увеличение в том же отношении амплитуды и полной энергии пучка отраженной волны и очень сильное укорочение импульса излучения. Этот эффект рассматривался все время как чисто академический, так как зеркалу, являющемуся макроскопическим телом, очень трудно сообщить релятивистскую скорость движения¹⁷. В 1951 г. было, однако, указано¹⁸, что таким отражающим волну «зеркалом» может служить релятивистский пучок электронов¹⁹. Для того чтобы

электромагнитная волна отразилась от фронта движущегося ей навстречу РЭП, необходимо, чтобы пересчитанная в систему отсчета фронта пучка частота излучения была меньше ленгмюровской частоты пучка. Но для этого требуется, чтобы плотность пучка была очень велика. В 1959 г.²⁰ была теоретически, а в 1960 г.²¹ экспериментально найдена другая возможность умножения частоты отраженной электромагнитной волны от движущейся плазмы. Однако в этом случае трудность заключается в том, что плазме необходимо сообщить релятивистские скорости, а это сделать для плазмы большой плотности также трудная задача. Для того, чтобы устранить эту основную трудность, Я. Б. Файнбергом с сотрудниками было предложено производить отражение от фронта плазмы, движущейся в волноводе медленных волн ($v_{ph} < c$). Так как большой эффект умножения частоты имеет место при $v \approx v_{ph}$, а v_{ph} в волноводе медленных волн может быть небольшой, то теперь становится возможным наблюдение большого эффекта умножения частоты и при малых нерелятивистских скоростях движения плазмы. Как и следовало ожидать, и это подтверждено теорией, при движении отражающей волну зеркала в среде в выражении для ω , необходимо c заменить на фазовую скорость распространяющихся в среде волн ($v_{ph} < c$)²². Таким образом, и в случае нерелятивистского движения отражающего фронта в среде или волноводах медленных волн должен иметь место сильный эффект умножения (увеличения) частоты. Такая возможность была предсказана теоретически (как и в случае РЭП, считалось, что для большого эффекта отражения необходимо, чтобы ленгмюровская частота плазмы была больше частоты падающего на нее излучения, пересчитанной в систему отсчета фронта) и экспериментально осуществлена в работах ХФТИ. В этих работах впервые удалось наблюдать такой эффект экспериментально, была также показана возможность значительного умножения частоты при многократном отражении от фронтов схлопывающейся плазмы. Существенное значение для развития метода умножения частоты от движущегося фронта имела работа²³, в которой было рассмотрено отражение от движущегося фронта ионизации и показана возможность значительного умножения частоты. Так как движущийся фронт ионизации (рекомбинации) не несет кинетической энергии, в этом случае, естественно, не происходит увеличения амплитуды отраженной волны.

Важный шаг в развитии рассматриваемого метода составила работа²⁴, в которой было показано, что большое умножение частоты имеет место также в том случае, когда частота излучения, пересчитанная в систему отсчета движущегося фронта ионизации, больше ленгмюровской частоты (under-dense ionization fronts). Движение фронта ионизации достигается с помощью лазера, излучение которого осуществляет ионизацию. Аналогичный эффект имеет место и при отражении от однородной, но мгновенно ионизированной плазмы.

Одним из перспективных методов коллективного ускорения, основы которых были заложены работами В. И. Векслера, Г. И. Будкера, Я. Б. Файнберга, представляется метод ускорения заряженных частиц волнами плотности заряда в плазме и некомпенсированных пучках заряженных частиц, предложенный Я. Б. Файнбергом в 1956 г. (CERN Symposium Geneva). Наибольшие напряженности ускоряющих полей в плазме были достигнуты с помощью лазерного излучения методом биения лазерных лучей BWA²⁵, который вместе с методом ускорения кильватерными полями (PWFA)²⁶ является модификацией вышеупомянутого метода ускорения заряженных частиц с помощью волн пространственного заряда²⁷. В Калифорнийском университете по BWA методу были получены напряженности полей 0,3-1 ГВ/м (1985). Канадской группой получены напряженности полей 6-10 МВ/см и зарегистрированы ускоренные электроны (1985).

Сейчас достигнуты (Калифорнийский университет)²⁸ напряженности поля порядка 10^7 В/см, это на два порядка превышает напряженности поля, которые имеются в традиционных ускорителях; при этом были зарегистрированы электроны, ускоренные до 9 МэВ (энергия инжекции составила 2 МэВ). Больше всего опасались влияния неоднородности плазмы. Если плазма неоднородна, то ее собственная частота изменяется и нарушается синхронизм между разностной частотой и ленгмюровской частотой плазмы. Однако как неоднородность плазмы, так и расфазировка между движущимися частицами и фазовой скоростью волны не оказались препятствием. Самым главным препятствием оказался старый, всем известный рэлеевский дифракционный предел. Это ограничение устранено путем создания волноводов, в которых дифракционное рассеяние не ограничивало ускоряющие поля. В ближайшее время, по-видимому, можно ожидать повышения, по крайней мере на порядок, напряженностей ускоряющих полей.

Довольно большие напряженности полей были получены в ХФТИ²⁹ при взаимодействии релятивистских электронных пучков, инжектируемых из традиционных линейных ускорителей, с плазмой, плотность которой менялась в широких пределах – от 10^{11} до 10^{17} см⁻³.

Плазменные волны, возбуждаемые электронными пучками, могут выполнять, по крайней мере, две важные функции: ускорения заряженных частиц в плазме (здесь определяющим является продольная вдоль движения РЭП компонента поля волны) и очень сильной радиальной фокусировки или, если это необходимо, дефокусировки, обусловленных поперечными составляющими поля волны. Этим определяется их значение для плазменных методов ускорения, создания новых типов виглеров и фокусировки РЭП в ЛСЭ с плазменным заполнением.

Все большее значение для фокусировки электронных и ионных пучков приобретают плазменные линзы. В случае $n_b < n_p$ плазма экранирует электрическое поле пучка и не экранирует магнитное поле пучка (если $r_b < c/\omega_p$), так что обратный ток протекает вне пучка. В случае $n_b > n_p$ все электроны плазмы «сдуваются» электронами пучка и резуль-

тирующая фокусировка обусловлена ионным остоном. Сравнивая фокусирующую силу в этом случае с фокусирующей силой при фокусировке квадрупольным магнитным полем, можно убедиться, что они на 3-4 порядка превосходят, для реальных приложений, традиционные способы фокусировки. Таким образом, существует хорошая перспектива использования плазменных линз в линейных коллайдерах³⁰.

Хорошие результаты получены на пути создания линейных сверхточных плазменных индукционных ускорителей электронов и ионов, которые были предложены в ХФТИ. В ХФТИ создан линейный индукционный ускоритель ионов с параметрами: ток пучка 4 кА, энергия ионов 600 кэВ, длительность импульса 0,5 мкс²¹.

Этот ускоритель предназначается для исследований по управляемому термоядерному синтезу на пучках тяжелых ионов. Следует отметить, что данное направление УТС представляет сейчас большой интерес. Предлагаемый нами путь существенно отличается от пути, которым идут исследователи США. Они ориентируются на вакуумные линейные ионные индукционные ускорители с начальным током ~1 А и конечным током, получаемым в результате бунчировок и сложения пучков (10^5), – 100 кА и энергией ионов 20 ГэВ. Мы предполагаем ускорять зарядово-компенсированные ионные пучки в магнитоизолированных ускоряющих системах с начальным током 10-100 кА и конечным током до 1000 кА, но существенно меньшей энергии – около 300 МэВ. Термоядерная мишень для таких параметров ионного пучка будет не традиционной, но ее параметры весьма реалистичны.

Естественно, что плазменная электроника, начатая работами ХФТИ, развивалась в целом ряде лабораторий Украины, России и других стран.

Отметим также следующие существенные результаты в области плазменной электроники.

В Институте физики НАН Украины создан эффективный стационарный объемный источник отрицательных ионов водорода на основе отражательного разряда с магнитной изоляцией. Исследована фокусировка широкотемпературного ионного пучка плазменной линзой³².

Изучено аналитически и численно влияние неоднородности плазмы на развитие взрывной неустойчивости. Получен критерий стабилизации этой неустойчивости (Институт ядерных исследований НАН Украины)³³.

Проведены впервые экспериментальные исследования области взаимодействия пучка с металлом в рентгеновских лучах при электронно-лучевой сварке (Институт электросварки им. Е. О. Патона АН Украины)³⁴.

Предсказано существование нового типа волн в неоднородных полупроводниковых структурах, которые находятся в постоянном магнитном поле, а именно:

- незатухающие магнитоплазмоны в сверхрешетках в условиях квантового эффекта Холла;
- сверхмедленные электромагнитные волны в слоисто-периодических средах.

Развита теория гидродинамической потоковой неустойчивости при взаимодействии пучка с поверхностными электромагнитными волнами

на границе полупроводник-вакуум (Институт радиофизики и электроники НАН Украины)³⁵.

Большой вклад в развитие плазменной электроники и плазменных методов ускорения был внесен учеными из США, Великобритании, Франции, Канады, Японии, а именно:

– в области плазменной электроники: И. Алексефф, Л. Смуллин, У. Гетти, Дж. Доусон, В. Гранатстейн, П. Спрэнгл, Т. Кацоулеас, Ю. Кармел, Г. Бенфорд, Дж. Бриггс и др.;

– в области плазменных методов ускорения: Н. Ростокер, А. Сесслер, Дж. Доусон, Дж. Лаусон, Ч. Джоши, Т. Кацоулеас, П. Спрэнгл, Ф. Чен, П. Чен, Т. Таджима, Н. Ибрахим, А. Огата и др.

Следует отметить также, что существенное значение для развития плазменной электроники и плазменных методов ускорения в ХФТИ имели работы: Н. А. Хижняка, К. Н. Степанова, Л. И. Болотина, А. М. Егорова, Б. И. Иванова, А. Н. Кондратенко, С. М. Криворучко, Ю. Е. Коляды, Н. М. Землянско, В. А. Киселева, О. Ф. Ковшика, В. А. Балакирева.

ПРИМЕЧАНИЯ

¹Плазменно-пучковый разряд обнаружен и исследован в ХФТИ И. Ф. Харченко, Я. Б. Файнбергом, Е. А. Корниловым, А. К. Березиным в 1961 году.

²Плазменно-ионно-пучковый разряд был обнаружен и исследован в Институте физики АН Украины М. Д. Габовичем, И. А. Солошенко.

³А. А. Иванов.

⁴Я. Б. Файнберг и Е. К. Завойский предложили идеи пучкового и турбулентного нагрева плазмы, которые привели Е. К. Завойского и Ф. Винтерберга к идее инерциального электронного УТС (Л. И. Рудаков, В. П. Смирнов, В. А. Скорюпин, М. В. Бабыкин, С. Д. Фанченко).

⁵Б. Е. Патон, О. К. Назаренко, Р. З. Сагдеев, А. А. Галеев, Г. Г. Манагадзе, С. М. Левитский, Ф. Камбой, В. Н. Ораевский.

⁶Большой вклад в развитие этих работ сделали А. К. Березин, Я. Б. Файнберг, Е. А. Корнилов, А. М. Егоров, И. Н. Онищенко, Ю. П. Блюх, М. Ф. Горбатенко, Л. А. Митин, О. Ф. Ковшик (ХФТИ), В. И. Переводчиков, Л. А. Митин, М. А. Завьялов (ВЭИ). В частности, разработанной в ХФТИ теорией таких плазменно-пучковых систем пользуются многие лаборатории. Следует также отметить существенный вклад, внесенный в развитие нерелятивистской электроники В. Я. Кисловым, З. С. Черновым, Е. В. Богдановым, Г. А. Бернашевским, М. В. Незлиным, И. Ф. Харченко, Е. Г. Шустинным, Р. М. Николаевым, В. А. Скорюпиным, М. В. Бабыкиным, С. Д. Фанченко, М. Д. Габовичем, Л. Л. Пасечником, Р. А. Демирхановым, М. Д. Райзером, В. А. Супруненко, Л. Г. Геворковым, А. Б. Михайловским, А. И. Рогашковой.

⁷Я. Б. Файнберг, В. Д. Шапиро, В. И. Шевченко (1965, 1969), А. А. Рухадзе, Р. И. Ковтун (1970), Л. И. Рудаков (1970), Р. Н. Судан (1971), А. А. Веденов, Д. Д. Рютов (1972). Напомним, что нерелятивистская квазилинейная теория была создана в работах А. А. Веденова, Е. П. Велихова,

Р. З. Сагдеева (1961), В. Д. Шапиро (1961) Ю. А. Романова, Г. Ф. Филиппова (1961); Драммонда и Пайнса (1962).

⁸Я. Б. Файнберг, М. С. Рабинович, А. А. Рухадзе, В. Д. Шапиро, В. И. Шевченко, Д. Д. Рютов, Г. А. Месяц, А. К. Березин, Ю. В. Ткач, Е. А. Корнилов, А. Н. Диденко, В. И. Курилко, П. С. Стрелков, М. Д. Райзер.

⁹ХФТИ, Ю. В. Ткач, Я. Б. Файнберг, И. И. Магда и др.

¹⁰Институт общей физики РАН, М. С. Рабинович, А. А. Рухадзе, П. С. Стрелков и др.

¹¹Мэрилендский университет (В. Гранатстейн, Ю. Кармел и др.).

Эти работы дали новый импульс существенному развитию сверхвысоко-частотной релятивистской плазменной электроники.

¹²Д. Д. Рютов, В. С. Койдан, Э. П. Кругляков. Двухступенчатый метод коллективного нагрева плазмы сильноточным РЭП в открытых ловушках был предложен Г. И. Будкером и Д. Д. Рютовым.

¹³Я. Б. Файнберг, В. И. Мирошниченко (1985).

¹⁴В. А. Буц, В. А. Балакирев (1981).

¹⁵D. H. Whittum, A. M. Sessler, J. M. Dawson (1990).

Исследования возбуждения электромагнитного излучения, обусловленного бетатронными колебаниями электронов РЭП в собственном магнитном поле, проводились Г. И. Будкером, Ю. П. Блюхом, А. Н. Лебедевым.

¹⁶K. R. Chen, J.M. Dawson (1992).

¹⁷A. Einstein.

¹⁸Ландекер.

¹⁹Впервые на возможность осуществления движения с релятивистской скоростью макроскопического тела указал В. И. Векслер, предложивший в качестве такого тела использовать релятивистский электронный пучок.

²⁰Я. Б. Файнберг, В. С. Ткалич.

²¹А. М. Егоров, О. Г. Загороднов, Я. Б. Файнберг.

²²Этот вывод сделан с использованием преобразования Минковского.

²³В. Семенова (1967).

²⁴W. Mori (1991).

²⁵J.M. Dawson, T. Tajima (1979).

²⁶P. Chen, J. M. Dawson, R. W. Huff, T. Katsouleas (1985).

Эти работы имели очень важное значение для развития плазменных методов ускорения заряженных частиц.

²⁷Отметим, что регулярные поля большой напряженности ~ 50 кВ/см были возбуждены в плазме с помощью внешних источников в ХФТИ А. М. Егоровым, Я. Б. Файнбергом (1975).

²⁸C. E. Clayton, C. Joshi et al. (1993).

²⁹А. К. Березин, В. А. Киселев, Я. Б. Файнберг (1976).

³⁰Подробнее о достоинствах и недостатках плазменных линз см., например: Кацоулеас. Лекция на школе по физике плазмы. Триест, 1989.

³¹Е. А. Корнилов, Я. Б. Файнберг, В. А. Кияшко, В. И. Карась и др.

³²М. Д. Габович, И. А. Солошенко.

³³Т. А. Давыдова.

³⁴Б. Е. Патон, О. К. Назаренко.

³⁵В. М. Яковенко.

3. КОЛЛЕКТИВНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ИНТЕНСИВНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ИМПУЛЬСНЫХ ПУЧКОВ С ПЛАЗМОЙ. ОБРАЗОВАНИЕ И РАЗВИТИЕ ПУЧКОВО-ПЛАЗМЕННОГО РАЗРЯДА

Теоретическому и экспериментальному исследованию коллективных взаимодействий пучков заряженных частиц посвящено большое количество работ [121, 122]. Это связано с тем, что пучковая неустойчивость, теоретически предсказанная А. И. Ахиезером и Я. Б. Файнбергом в 1948 г. [123, 15, 17]^{2*}, является одной из наиболее распространенных в лабораторной и космической плазме и представляет собой такой вид неустойчивости, в которой коллективное резонансное взаимодействие заряженных частиц с плазмой выступает в чистом виде и не маскируется другими физическими явлениями.

Первые экспериментальные исследования этой неустойчивости были выполнены Я. Б. Файнбергом, И. Ф. Харченко, Е. А. Корниловым, А. К. Березиным и др. [19, 22, 29, 32, 44, 124, 125].

Эта неустойчивость играет определяющую роль при решении таких важнейших задач, как создание мощных пучково-плазменных СВЧ-генераторов [126-129], разработка сильноточных ускорителей заряженных частиц [12, 130, 131], осуществление пучкового нагрева плазмы до высоких температур [21].

Пучково-плазменное взаимодействие лежит в основе нового типа разряда – пучково-плазменного разряда (ППР). Как известно, до настоящего времени было открыто всего несколько типов разрядов (дуговой, искровой, тлеющий, ВЧ-разряд, лазерный и т.д.), поэтому открытие нового типа разряда – это довольно редкое явление^{3*}.

Сотрудниками ХФТИ при экспериментальном исследовании взаимодействия пучков электронов с нейтральным или слабоионизированным газом в отсутствие внешних постоянных или ВЧ-электрических полей впервые было установлено неизвестное ранее явление ППР, заключающееся в интенсивной лавинообразной ионизации газа в высокочастотных электрических полях, возбуждаемых пучком электронов за счет

^{2*}К сожалению, следует заметить, что отчет [123] в настоящее время недоступен для просмотра.

^{3*}Подтверждением этому служит то, что Нобелевскую премию по физике за 1992 г. Ж. Шарпаку присудили, по сути, за исследования и применения искрового разряда в физике высоких энергий и элементарных частиц [132].

его кинетической энергии, как при наличии внешнего магнитного поля, так и без него, и образовании плазмы с плотностью n_p и поперечными размерами, значительно превышающими начальную плотность n_b и поперечные размеры электронного пучка. Отличие этого разряда от ВЧ- или СВЧ-разряда,

Отличие от чисто пучковых разрядов заключается в том, что ионизация в ППР осуществляется не непосредственно электронами пучка (такая ионизация в ППР происходит только на начальной стадии), а электронами плазмы, плотность которых значительно превосходит плотность пучка.

Другим важным обстоятельством, имеющим существенное значение для приложений, является то, что в ППР отпадает необходимость ввода ВЧ- или СВЧ- мощности в плазму высокой плотности и большого объема, что является очень трудной задачей из-за эффекта скинирования.

В ППР процесс передачи энергии электронам и ионам плазмы существенно отличается от аналогичных процессов в ВЧ- или СВЧ- разряде.

В частности, в случае возбуждения стохастических (хаотических) полей даже в условиях малой частоты упругих соударений энергия колебаний может быть очень значительной, так как частота перемешивания фаз в целом ряде случаев превосходит частоту парных соударений. Это явление имеет место как при наличии внешнего магнитного поля, так и в его отсутствие.

Явление ППР во внешнем магнитном поле было экспериментально открыто в ХФТИ АН УССР в 1960 г. Я. Б. Файнбергом, И. Ф. Харченко, Е. А. Корниловым [125] и изучено в работах указанных авторов, а также в работах А. К. Березина, Я. Б. Файнберга, Г. П. Березиной, О. Ф. Ковшика и др. [4 - 6, 8 - 10, 19 - 34].

Явление ППР в отсутствие внешнего магнитного поля было также экспериментально открыто в ХФТИ АН УССР в 1961 г. А. К. Березиным, Я. Б. Файнбергом, Г. П. Березиной [22]. Основные физические процессы, происходящие в таком разряде, изучены в работах указанных авторов, а также в работах И. Ф. Харченко, В. П. Поповича, Е. Г. Шустина и др. [146]. Важные исследования по изучению ППР были проведены Д. Д. Рютовым [147]. Как было показано в экспериментах с инъекцией мощных электронных пучков в околоземное пространство, выполненных Б. Е. Патонем, О. К. Назаренко, Р. З. Сагдеевым, В. В. Мигулиным, Г. Г. Манагадзе, П. В. Блюхом, С. К. Пацьорой и др. [148, 149], ППР играет в них определяющую роль и представляет собой прекрасный объект для моделирования в земных условиях развивающихся там основных процессов.

В последние годы благодаря теоретическим и экспериментальным работам, проведенным А. А. Ивановым и его сотрудниками, создано новое важное направление плазменной электроники – неравновесная плазмохимия, основанная на ППР [150, 151].

Таким образом, исследования коллективных взаимодействий пучков заряженных частиц с плазмой и условий образования ППР представляют огромный интерес не только для некоторых новейших областей современной физики, но и для целого ряда важнейших приложений.

В настоящем разделе приведены результаты исследований коллективного взаимодействия интенсивного электронного пучка с плазмой и условий образования ППР при малой длительности импульса тока ($T \sim 4,5$ нс), полученные в 1965–1975 годах. Такие разряды отличаются относительно небольшой плотностью турбулентной плазмы ($n_p \leq 2 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$), возбуждением в ней сильных стохастических (хаотических) СВЧ-электрических полей, малыми временами развития неустойчивостей.

Очень ценную информацию о процессах, происходящих в таких разрядах, можно получить, используя методы спектроскопии. Исследованию различных видов газового разряда в сильных электромагнитных полях посвящен важный цикл работ А. А. Рухадзе и др. (см., например, [151, 152]).

В отличие от многих предыдущих публикаций, в данном разделе описаны результаты экспериментов в условиях, когда энергия электрона плазмы E' , которую он приобретает в стохастическом СВЧ-электрическом поле возбужденной волны, существенно превосходит энергию ионизации нейтральной частицы рабочего газа E_i ($E' > E_i$). Раздел состоит из двух частей. В первой части раздела изложены результаты экспериментов по коллективному взаимодействию с плазмой электронного пучка (системы осцилляторов) и образованию ППР в таких условиях. В этом случае $W_{\perp} \neq 0$ (W_{\perp} – первоначальная поперечная энергия электронного пучка).

Во второй части раздела приведены результаты исследования коллективных взаимодействий с плазмой прямолинейного электронного пучка и условий образования ППР, когда $W_{\perp} \approx 0$ и возбуждаются в плазме главным образом интенсивные электронные ленгмюровские колебания ω_{pe} .

3.1. Коллективные взаимодействия с плазмой электронного пучка (системы осцилляторов)

В этом подразделе изложены результаты экспериментальных исследований коллективного взаимодействия с плазмой электронного пучка (системы осцилляторов), у которого первоначальная поперечная энергия $W_{\perp} \neq 0$. В этом случае генерируются интенсивные электронные циклотронные колебания на частоте ω_{He} , когда $\omega_{pe} \leq \omega_{He}$ (ω_{pe} – электронная ленгмюровская частота образованной плазмы). Изучены условия образования ППР на начальной стадии. Показано, что при определенных величинах поперечной энергии электронного пучка W_{\perp} в ППР возбуждаются ин-

тенсивные циклотронные колебания с мощностью до 40 кВт в импульсе. Изучено влияние параметров пучка, плазмы и напряженности продольного магнитного поля H_0 на условия возбуждения этих колебаний.

3.1.1. Экспериментальная установка и методики измерения основных параметров электронного пучка и плазмы

Эксперименты проводились на установке [135, 136], которая состояла из электронной пушки, области взаимодействия электронного пучка с плазмой, системы перепада давлений между камерой электронной пушки и областью взаимодействия, совмещенной с узлом начальной модуляции электронного пучка, системы съема и вывода возбуждаемых ВЧ-колебаний, натекателя для напуска рабочего газа в область взаимодействия, блока питания и модулятора электронной пушки, соленоида для создания продольного магнитного поля, коллектора тока, диагностической аппаратуры (рис. 3.1).

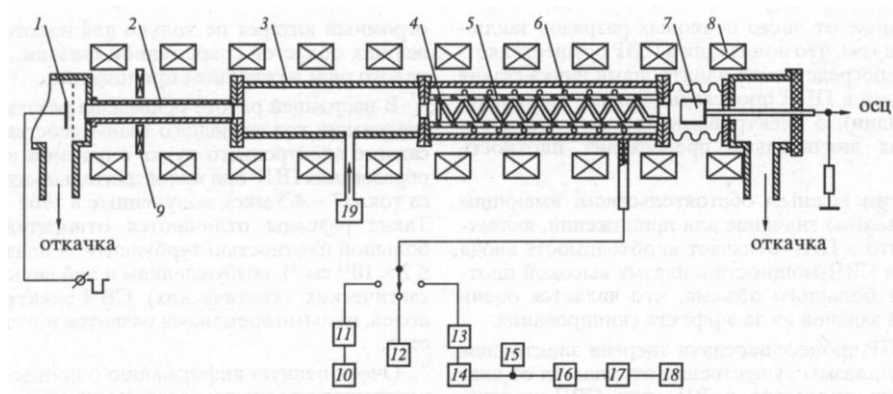


Рис. 3.1. Блок-схема установки: 1 – катод электронной пушки, 2 – трубка перепада давлений, 3 – область взаимодействия, 4 – внутренняя спираль спирального перехода, 5 – стеклянная трубка, 6 – внешняя спираль перехода, 7 – коллектор, 8 – соленоид, 9 – магнитное зеркало, 10 – измеритель временной корреляции, 11, 13 – переменные аттенюаторы, 12 – измеритель мощности, 14 – резонансный волномер, 15 – осциллограф, 16 – усилитель, 17 – интегратор, 18 – электронный потенциометр (ЭПП), 19 – натекатель рабочего газа

Основные параметры установки таковы: энергия пучка E_0 – до 25 кэВ, ток пучка $I_0 \sim 12 - 25$ А, длительность импульса тока $T \sim 4,5$ мкс, частота следования импульсов – 50 Гц, напряженность однородной части продольного магнитного поля H_0 изменялась в пределах 0,5 – 0,8 кЭ.

Область взаимодействия – медная труба с внутренним диаметром 3,5 см и длиной 33 см. В ряде случаев для исследования оптических спектров, излучаемых в поперечном направлении, нами использовалась стеклянная труба с такими же размерами. Давление рабочего газа (водород, аргон, гелий, азот) в области взаимодействия составляло $5 \cdot 10^{-5} - 2 \cdot 10^{-3}$ Тор.

Электронный пучок, проходя через систему перепада давлений, поступал в область взаимодействия, ионизовал находящийся в ней рабочий газ, создавал плазму и взаимодействовал с ней. Система перепада давлений, область взаимодействия и коллектор тока располагались в продольном однородном магнитном поле. Неоднородность магнитного поля составляла $\sim 5\%$.

Двухэлектродная электронная пушка располагалась в области спада внешнего магнитного поля. Напряженность магнитного поля в области катода электронной пушки H_k составляла 70% от напряженности однородной части магнитного поля H_0 . Диаметр дискового катода (гексаборид лантана) равнялся 2 см. Подогрев катода осуществлялся плоской вольфрамовой спиралью, расположенной за катодом и запитываемой от сети переменного тока.

В этих экспериментах с помощью специального устройства отрицательный импульс высокого напряжения, подаваемый на катод электронной пушки, был синхронизирован с фазой переменного тока и мог подаваться со сдвигом фазы $\Delta\varphi \approx \pm 240^\circ$ относительно фазы тока накала катода. Это позволило в данных экспериментах в широких пределах изменять поперечную энергию электронного пучка и изучать эффективность взаимодействия электронного пучка с плазмой в зависимости от нее. При этом z -компонента напряженности переменного магнитного поля в области катода достигала 200 - 250 Э.

В этом случае в зазоре анод-катод векторы напряженности электрического и магнитного полей не являются коллинеарными и связанное с этим радиальное смещение электронов приводит к изменению магнитного потока, охватываемого траекториями электронов, и к появлению у электронов угловой скорости. В предположении постоянства напряженности магнитного поля H_k в зазоре анод-катод угловая скорость $\dot{\Theta}$ по теореме Буша [154] равна

$$\dot{\Theta} = \frac{\omega_{Hk}}{2} \left[1 - \left(\frac{r_k}{r} \right)^2 \right], \quad (3.1)$$

где $\omega_{Hk} = eH_k / mc$ – электронная циклотронная частота, r_k – радиус катода, r – радиус электронного потока, e и m – заряд и масса электрона, c – скорость света в вакууме. Это соотношение позволяет оценить поперечную компоненту энергии пучка в эквипотенциальном пространстве, если известен радиус потока электронов на входе в него.

В экспериментах диаметр электронного пучка определялся по величине отверстий, которые пучок прожигал в алюминиевых фольгах, устанавливаемых на его пути. Дальнейшее увеличение поперечной энергии электронного пучка происходило в области нарастающего магнитного поля вследствие условия адиабатической инвариантности магнитного момента [155]:

$$\frac{W_{\perp k}}{H_k} = \frac{W_{\perp 0}}{H_0}, \quad (3.2)$$

где $W_{\perp k}$ и $W_{\perp 0}$ – поперечные энергии электронного потока на выходе из электронной пушки и в области взаимодействия. Максимальное значение поперечной компоненты энергии электронного пучка достигалось при условии совпадения z -компонент напряженностей магнитных полей, создаваемых переменным током подогрева катода и соленоидом.

Это можно объяснить следующим образом. Из соотношений (3.1) и (3.2) следует, что

$$W_{\perp 0} \sim H_k \times H_0. \quad (3.3)$$

Следовательно, $W_{\perp 0}$ будет тем больше, чем больше значения H_k и H_0 . Понятно, что максимальное значение H_k будет тогда, когда z -компоненты напряженностей переменного и постоянного магнитных полей в области катода будут совпадать.

По оценкам, максимальное значение поперечной компоненты энергии электронного пучка составляло $W_{\perp 0} \sim 2,0 - 2,5$ кэВ.

Для измерения поперечной энергии электронного пучка авторы использовали методику, описанную в [156] и заключающуюся в следующем. Между анодом электронной пушки и пространством взаимодействия с однородным магнитным полем создавалась локальная область адиабатически увеличивающегося, а затем спадающего магнитного поля с регулируемой высотой барьера H_1 (магнитное зеркало), которая не оказывала влияния на распределение и абсолютное значение магнитного поля в области катода электронной пушки. При прохождении этой области поперечная энергия электронного пучка будет возрастать и при условии [155]

$$\sin \alpha_0 \geq \sqrt{\frac{H_k}{H_1}} \quad (3.4)$$

пучок отразится от магнитного зеркала. Здесь α_0 угол, который составляет вектор скорости электронов пучка с вектором напряженности магнитного поля на выходе из электронной пушки.

Таким образом, измеряя зависимость тока электронов на коллекторе от H_1 , можно было определить величину поперечной энергии электронного пучка.

Полученные экспериментальные результаты находятся в хорошем соответствии с указанными выше расчетными значениями.

В этих экспериментах электронная плотность плазмы измерялась с помощью многомодового открытого резонатора [157 - 159]. По сравнению с обычным резонатором открытый резонатор обладает относительно разреженным спектром и позволяет проводить измерения одновременно на нескольких сильно отличающихся частотах.

В экспериментах в качестве открытого резонатора использовалась область взаимодействия – медная труба $\varnothing 3,5$ см и длиной $L = 33$ см с припаянными к ней 3-см и 0,8-см волноводами. Связь резонатора с волноводами осуществлялась при помощи отверстий $\varnothing 0,5$ и 0,25 см соответственно.

Открытый резонатор возбуждался на частотах $f_0 = 10,510$ ГГц (мода TM_{111}), $f_0 = 36,630$ ГГц (мода TM_{141}) и $f_0 = 37,200$ ГГц (мода TM_{621}). Плотность плазмы n_p , усредненная по объему резонатора V_r , вычислялась по формулам линейной теории возмущения [157]

$$n_p = \frac{2\Delta f}{f_0(p, s, q)} n_{cr} \frac{V_r}{M_v V_p}, \quad (3.5)$$

где Δf – смещение резонансной частоты, обусловленное плазмой; V_p – объем плазмы в резонаторе; M_v – формфактор, определяемый распределением электрического поля E по объему резонатора; $f_0(p, s, q)$ – резонансная частота открытого резонатора без плазмы; n_{cr} – критическая плотность ($f_0^2 = e^2 n_{cr} / \pi m$). Резонансные частоты для открытого резонатора без плазмы определяются следующим образом [157, 158]:

$$f_0(p, s, q) = f_{cr}(p, s) \left(1 + q^2 \frac{\lambda^2}{8L^2} \right), \quad (3.6)$$

где p, s – индексы, указывающие, какое число полувольт укладывается в поперечном направлении; q определяет число полувольт, укладываемых вдоль резонатора; $f_{cr}(p, s)$ – критическая частота для колебаний с «поперечными» индексами p, s ; λ – длина волны в свободном пространстве. Формфактор определяется из следующего соотношения [155 - 157]:

$$M_v = \frac{V_r \int_{V_p} n |E|^2 dV}{\int_{V_p} ndV \int_{V_r} |E|^2 dV} \tag{3.7}$$

Формфактор M_v предполагается постоянным в течение длительности импульса тока и определялся экспериментально с помощью электронного пучка с известными параметрами: ток $I \approx 28$ А, энергия пучка $E_0 \approx 25$ кэВ, диаметр пучка $2r \approx 2$ см. Коэффициент M_v вычислялся по формуле [157]

$$M_v = \frac{2\Delta f}{f_0} \frac{n_{cr}}{n_1} \tag{3.8}$$

где плотность пучка

$$\bar{n}_1 = \frac{I}{\pi e r^2} \sqrt{\frac{m}{2E_0}} \tag{3.9}$$

r – радиус пучка.

Экспериментальные значения M_v для различных мод приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Тип колебаний	Значение M_v
TM ₁₁₁	0,6
TM ₁₄₁	0,5
TM ₆₂₁	0,4

Блок-схема установки для измерения плотности плазмы приведена на рис. 3.2.

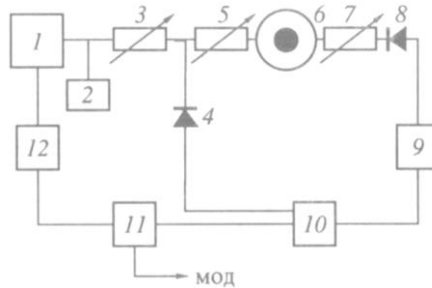


Рис. 3.2. Блок-схема установки для измерения электронной плотности плазмы методом открытого резонатора: 1 – клистронные генераторы 3- и 0,8-см диапазонов длин волн, 2 – резонансный волномер, 3 – аттенюатор, 4 и 8 – детекторы, 5 и 7 – импедансные трансформаторы, 6 – открытый резонатор, 9 – видеоусилитель, 10 – осциллограф, 11 – генератор импульсов, 12 – блок питания клистронов

Чтобы проверить измерения формфактора и идентификацию мод колебаний, пучок моделировался однородным стержнем $\varnothing 2$ см из пенопласта с диэлектрической постоянной $\varepsilon = 1,06 \pm 0,005$ для $f_0 = 10,500$ ГГц и $f_0 = 36,640$ ГГц. Теоретическое значение сдвига частоты резонатора определялось по формуле [157, 159]

$$\Delta f = \frac{f_0}{2} M_v (\varepsilon - 1). \quad (3.10)$$

Для $M_v = 0,53$ расчётные величины Δf равнялись:

$$\Delta f = 180 \text{ МГц} \quad \text{для ТМ}_{111},$$

$$\Delta f = 630 \text{ МГц} \quad \text{для ТМ}_{141}.$$

Экспериментально определенные значения составляли $\Delta f \cong 195 \pm 14$ МГц и $\Delta f \cong 600 \pm 50$ МГц соответственно.

Сигнал, проходящий через резонатор 6, детектировался детектором 8, усиливался усилителем 9 и тоже подавался на осциллограф. Настройка резонатора на заданную моду проводилась с помощью аттенуатора 3 и двух импедансных трансформаторов 5, 7. Генератор пилообразного напряжения 12, осциллограф 10 и модулятор электронной пушки запускались от генератора импульсов 11 с различными временами задержки.

Принцип измерения плотности для различных моментов времени проиллюстрирован на рис. 3.3.

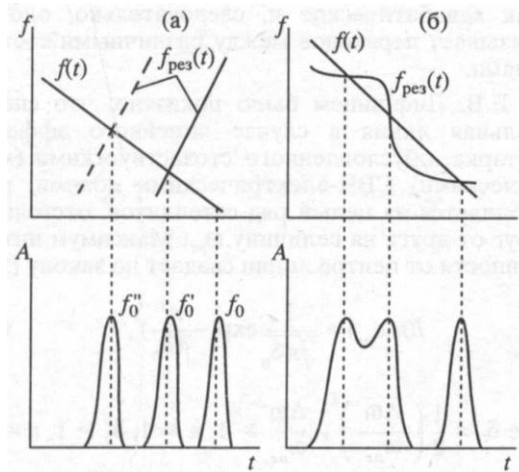


Рис. 3.3. График, поясняющий методику измерения электронной плотности плазмы методом открытого резонатора (пояснение в тексте)

Здесь $f(t)$ – кривая, показывающая изменение частоты клистрона во времени, $f_{рез}(t)$ – зависимость резонансной частоты резонатора от времени.

При совпадении частот на экране осциллографа появляются пики f_0'' , f_0' , f_0 . Если плавно смещать частоту клистрона (кривая $f(t)$ на (рис. 3.3б) относительно резонансной частоты резонатора $f_{рез}(t)$, то соответствующая точка пересечения кривых будет смещаться на сдвиг частоты $\Delta f = f_0' - f_0$, $\Delta f'' = f_0'' - f_0$, что будет соответствовать различным значениям электронной плотности плазмы n_p . В экспериментах измерения проводились до значений плотности $n_p \leq 6 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$ ($f_0 = 10,500 \text{ ГГц}$) и $n_p \leq 3 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$ ($f_0 = 36,640 \text{ ГГц}$). Разработанная нами аппаратура позволяла произвести одно или несколько измерений электронной плотности плазмы за импульс с временным интервалом $\sim 50 - 100 \text{ нс}$. Точность измерения плотности плазмы n_p составляла $\pm 10\%$.

Ряд важных результатов получен с помощью оптических методов диагностики [137, 160]. Все исследования проводились в видимой области спектра. Так как целью работы являлось изучение нестационарных процессов, то нами применялся фотоэлектрический способ регистрации светового излучения, позволивший наблюдать изменение интенсивности и контуров линий во времени. Наблюдения производились как вдоль оси, так и в перпендикулярном направлении. В работе измерялись электронная и ионная температуры плазмы, напряженности стохастических электрических СВЧ-полей, возбуждаемых при коллективном взаимодействии электронного пучка с плазмой. Для определения электронной температуры в экспериментах использовался известный метод, основанный на измерении отношения интенсивностей синглетной и триплетной линии HeI $\lambda_1 = 4922 \text{ \AA}$ и $\lambda_2 = 4713 \text{ \AA}$. Измерения интенсивности излучения в зависимости от времени проводились с помощью спектрографа ИСП-51, соединенного со специальной фотоэлектрической приставкой ФЭП-1. Для одновременного измерения интенсивностей двух спектральных линий к спектрографу ИСП-51 вместо кассетной части была присоединена ФЭП-1 с двумя выходными щелями. Между камерой и ФЭП-1 была вставлена дополнительная трубка с фокусирующим объективом $F = 50 \text{ мм}$. Полученный спектр фокусировался на щель ФЭП'а с увеличением в 6,8 раза. Затем свет попадал на призму, две грани которой были покрыты серебром, и отражался на два зеркала, направлявшие его на выходные щели. Предварительно было проверено, что оба световых канала полностью идентичны. Приемниками излучения служили ФЭУ, сигналы с которых через широкополосный усилитель (с коэффициентом усиления ~ 10) и катодный повторитель поступали на осциллограф. Одновременно с исследованием временного хода интенсивности отдельных спектральных линий проводилось наблюдение интегрального светового излучения плазмы. Для этого по коллимированному световоду излучение принималось ФЭУ, соединенным также с осциллографом. Измеренная постоянная времени всей системы состав-

ляла $2 \cdot 10^{-7}$ с. Запуск осциллографа осуществлялся специальным импульсом от запускающей системы синхронно с импульсом высокого напряжения, подаваемого на катод электронной пушки.

Как известно [135, 136, 139, 141, 142], при развитии неустойчивостей в плазме могут возбуждаться сильные СВЧ-электрические поля $\left(\sum_{k=1}^N E_k^2\right)^{1/2}$. Особенностью этих полей является то, что они большей частью являются стохастическими (хаотическими). Измерение напряженности таких электрических полей в ППР представляет значительный интерес. Достоинством этого метода измерения является то, что он не приводит к возмущению плазмы в ППР, а его эффективность повышается с ростом напряженности поля. Эффект Штарка во внешних регулярных переменных полях был изучен Э. Шредингером [161]. Частный случай монохроматических СВЧ-колебаний теоретически был изучен Д. И. Блохинцевым, а экспериментально В. Е. Мицуком, Е. В. Лифшиц, А. М. Егоровым и их сотрудниками [160, 162]. Эффект Штарка в стохастических СВЧ-полях был впервые рассмотрен в работе Е. В. Лифшиц [163]. В ней была определена форма спектральной линии, обусловленной стохастическими СВЧ-электрическими полями, получено соотношение между ее полушириной и напряженностью электрического СВЧ-поля E . При этом предполагалось, что эффект Штарка в СВЧ-полях значительно превосходит эффект Штарка, обусловленный внутренними кулоновскими полями. Поскольку частоты СВЧ-колебаний значительно меньше частот светового излучения, то воздействие, обусловленное этими полями, может рассматриваться как адиабатическое и, следовательно, оно не вызывает переходов между различными состояниями.

Е. В. Лифшиц было показано, что спектральная линия в случае линейного эффекта Штарка, обусловленного стохастическими (хаотическими) СВЧ-электрическими полями, расщепляется на целый ряд сателлитов, отстоящих друг от друга на величину ω_{pe} . Максимум интенсивности от центра линии спадает по закону [163]

$$I(n\omega_{pe}) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}\delta_0} \exp\left(-\frac{n^2}{4\delta_0}\right), \quad (3.11)$$

где $\delta_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_{pe}}\right)^2$, $\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_{pe}}\right) > 1$, $n > 1$, $\delta_0 > 1$, $n \leq \delta_0$, α – постоянная линейного эффекта Штарка, n – номер сателлита. При этом полуширина огибающей равна

$$n\omega_p \approx \Delta\omega \equiv \bar{\alpha} \left(\sum_{k=1}^N E_k^2\right)^{1/2}. \quad (3.12)$$

При относительно небольшой плотности плазмы $n_p \sim 10^{10} - 2 \times 10^{11} \text{ см}^{-3}$, имеющей место в нашем случае, ω_{pe} изменяется

в пределах $5,5 \cdot 10^9 - 2,2 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$, и поэтому расстояние между отдельными спутниками составляет сотую-десятую долю ангстрема, и их трудно экспериментально различить. Поэтому напряженность стохастического СВЧ электрического поля в основном определялась по форме огибающей.

В исследованиях по взаимодействию пучков с плазмой измерение контуров спектральных линий ионов и атомов представляет интерес также для определения температуры ионов. Так как в данных исследованиях энергия СВЧ-полей в основном передается электронам, а низкие частоты из-за малой длительности импульса не могут возбудиться, то можно ожидать, что энергия ионов и их температура будут сравнительно невелики. Энергия, передаваемая при соударениях электронами ионам, мала, а кроме того, вследствие малой длительности импульса число соударений также мало. Поэтому энергия, передаваемая электронами ионам и атомам, а следовательно, и температура должны быть относительно небольшими, и ожидаемая ширина спектральных линий H, He, Ar мала ($\delta\lambda \sim 0,05 - 0,5 \text{ \AA}$).

В связи с этим мы использовали спектрограф ИСП-51 с камерой 270 мм с внутренней установкой в него интерферометра Фабри–Перо. Расчетное значение аппаратной функции эталона Фабри–Перо для области $\lambda \sim 4800 \text{ \AA}$ равно $0,026 \text{ \AA}$, экспериментальное $0,03 \text{ \AA}$. Аппаратная функция определялась путем измерения полуширины линии ArI $\lambda \sim 4702 \text{ \AA}$, излучаемой тиратроном ТГ-235 с арговым наполнением, работающим в непрерывном режиме, и по компонентам сверхтонкой структуры линий ртути 4358,3 и 5790,7 \AA . Для разделения различных процессов, приводящих к уширению линий, одновременно измерялись контуры линий различных атомов и ионов. В работе определялись контуры спектральных линий атомов и ионов аргона, гелия, водорода, азота ArII 4726,91 \AA , ArII 4806,07 \AA , HeI 4921,93 \AA , HeI 5015,68 \AA , H β ($\lambda = 4861 \text{ \AA}$), NI 4630,6 \AA . В экспериментально измеренные полуширины вводилась поправка на аппаратную функцию [164].

Отбор СВЧ-мощности возбуждаемых колебаний осуществлялся при помощи широкополосного спирального перехода (ширина полосы 0,6 – 5,0 ГГц), располагаемого между областью взаимодействия и коллектором тока.

Спиральный переход представлял собой систему из двух связанных коаксиальных спиралей, расположенных внутри и снаружи диэлектрической трубки и намотанных в противоположные стороны. Параметры спиралей выбирались таким образом, чтобы фазовые скорости волн, распространяющихся в них, совпадали со скоростью пучка. Внешняя спираль через коаксиальный кабель присоединялась к измерителю больших мощностей либо через широкополосные СВЧ-аттенюаторы к широкополосному осциллографу или резонансному волномеру.

В работе также измерялись частотные спектры, инкременты нарастания и декремент затухания возбуждаемых колебаний. Для этого исследуемые колебания подавались на сверхскоростной осциллограф с полосой пропускания до 3 ГГц, и с его экрана фотографировалась форма возбужда-

емых колебаний в различные моменты времени (реализации) относительно начала токового импульса или начала развития плазменно-пучковых колебаний для различных давлений рабочего газа в области взаимодействия. Затем строилась огибающая возбуждаемых ВЧ-колебаний, и по ней определялся инкремент (декремент) колебаний δ .

Для определения огибающей возбуждаемых колебаний нельзя использовать метод детектирования исследуемого СВЧ-сигнала, так как в этом случае временное разрешение было бы значительно хуже ($\geq 10^2$ раз) по сравнению с использованной авторами методикой [165].

3.2. Образование пучково-плазменного разряда

В экспериментах плазма создается следующим образом. На начальной стадии ионизация газа происходит только за счет парных столкновений нейтральных частиц с электронами пучка. При прохождении электронного пучка с плотностью n_b и скоростью V_0 через область взаимодействия, в которой находится рабочий газ под давлением p за время τ_1 , происходят образование ионов с плотностью n_i и его нейтрализация [166]:

$$\tau_1 \approx (\sqrt{2}V_0 p \varepsilon_1)^{-1}, \quad (3.13)$$

где ε_1 – удельная ионизация рабочего газа, указывающая количество пар электронов и ионов, рождаемых в объеме на пути в 1 см при прохождении одного электрона с энергией $mV_0^2/2$ через газ, находящийся под давлением ~ 1 Тор [167].

Предполагается, что число молекул рабочего газа n_0 велико по сравнению с числом ионов n_i , необходимых для нейтрализации электронного пучка ($n_0 \gg n_i; n_i \sim n_p; n_i \sim n_b$). Для условий нашего эксперимента $\tau_1 \sim 1-1,2$ мкс. При $T > \tau_1$ происходят перенейтрализация пучка и образование плазмы с плотностью $n_p > n_b$. Здесь T – длительность импульса тока пучка.

Известно, что при коллективном взаимодействии электронного пучка с плазмой возможно возбуждение колебаний, обусловленных эффектом Вавилова–Черенкова (прямая и обратная волны) и аномальным эффектом Доплера (прямая и обратная волны) [21, 168]. Наибольшим инкрементом обладает неустойчивость, обусловленная эффектом Вавилова–Черенкова на электронной ленгмюровской частоте ω_{pe} (прямая волна). Но эта неустойчивость может развиваться только при условии достижения некоторой критической плотности плазмы n_{pcr} [136, 141, 142]:

$$n_{pcr} \approx \frac{m}{4\pi e^2} \frac{\chi^2 c^2}{a^2} \left[\left(\frac{c}{V_\phi} \right)^2 - 1 \right]^{-1}, \quad (3.14)$$

при которой скорость пучка примерно равна фазовой скорости волны $V_0 \sim V_\phi$, распространяющейся в плазменном волноводе. Здесь e и m – заряд и масса электрона, c – скорость света в вакууме, a – радиус волновода, $\chi = 2,4$ – постоянная.

Поэтому физическая картина процесса взаимодействия электронного пучка с плазмой может быть представлена следующим образом.

При плотности плазмы $n_b < n_{pcr} < n_p$ фазовая скорость волны в плазменном волноводе V_ϕ отличается от скорости пучка ($V_0 > V_\phi$), условия черенковского возбуждения ($\omega_{pe} \approx k_z V_\phi$, $V_\phi \sim V_0$) не выполнены и возможно возбуждение неустойчивости, обусловленной аномальным эффектом Доплера на частоте, близкой к электронной циклотронной ω_{He} . Ее максимальный инкремент равен [168]

$$\delta_{1T} \approx \frac{(\omega_{pe}')^2}{2\omega_{He}} \left(\frac{n_b}{n_p} \right)^{1/2} \frac{S_1}{S_2} \quad (n_b < n_p'), \quad (3.15)$$

здесь n_b – плотность пучка, n_p – плотность плазмы, при которой развивается указанная неустойчивость, ω_{pe}' – ее ленгмюровская частота, S_1 и S_2 – площади поперечных сечений электронного пучка и области взаимодействия. Инкремент этой неустойчивости меньше инкремента черенковской неустойчивости S_2 , но она не имеет порога по плотности плазмы [59, 60]. Взаимодействуя с возбуждаемыми колебаниями, электроны плазмы приобретают энергию, достаточную для ионизации рабочего газа $mV_e^2 > 2E_i$, где V_e – скорость электронов плазмы. Благодаря этому происходит дальнейший рост плотности плазмы, но при этом электронная циклотронная волна затухает.

С увеличением плотности плазмы фазовая скорость волны, распространяющейся в плазменном волноводе, возрастает и при условии $n_p \sim n_{pcr}$ становится порядка скорости электронного пучка ($V_0 \sim V_\phi$). Это соответствует возбуждению черенковской неустойчивости с максимальным инкрементом нарастания [15, 17, 123, 168]

$$\delta_{2T} = \frac{\sqrt{3}}{2^{4/3}} \omega_{pe} \left(\frac{n_b}{n_p} \right)^{1/3}, \quad (n_b < n_p), \quad (\delta_{2T} > \delta_{1T}), \quad (3.16)$$

благодаря чему в системе генерируются интенсивные СВЧ-колебания с частотой [21]

$$\omega_{pe}^* \sim \omega_{pe} \cos \psi, \quad (3.17)$$

где

$$\cos \psi \sim \frac{k_{\parallel}}{\sqrt{k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2}} < 1, \quad (3.18)$$

ψ – угол между волновым вектором k и магнитным полем H_0 , $k_{\parallel} = \omega / V_{\parallel}$ – продольное волновое число, $k_{\perp} = \pi / a$ – поперечное волновое число. Для условий нашего эксперимента $a = 1,75$ см, $V_{\parallel} \sim 9 \cdot 10^9$ см/с, $\omega_{pe} \sim 1,2 \cdot 10^{10}$ с⁻¹ и расчетная величина $\cos \psi = 0,5$. Экспериментально определенное значение $\cos \psi \approx 0,45$.

Для этих параметров электронного пучка и плазмы:

$$V_0 \approx 10^{10} \text{ см/с}, \quad n_b \approx 4 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}, \quad r_0 \approx 1,1 \text{ см}, \quad E_0 \approx 25 \text{ кэВ}, \quad I_0 \approx 25 \text{ А},$$

$$a \approx 1,75 \text{ см}, \quad \omega_{He} \approx (1,0-1,3) \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}; \quad \omega_{pe} \approx (1,14-1,25) \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}, \quad \omega'_{pe} \approx 7 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1},$$

$$\omega_b \approx 4 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}, \quad \delta_{1T} \approx (7 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}), \quad \delta_{2T} \approx (3,7-4,2) \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}; \quad n_{pcr} \approx 7 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3},$$

$$\omega_{pe}^* \approx 0,55 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}.$$

При плотности плазмы большей критической ($n_p > n_{pcr}$) развивается неустойчивость на электронных ленгмюровских колебаниях, обусловленная эффектом Черенкова, которая приводит к дальнейшему разогреву электронов плазмы и нарастанию плотности плазмы за счет дополнительной ионизации рабочего газа плазменными электронами. Этот механизм является определяющим при образовании плотной плазмы с высокой степенью ионизации при плотности $n_p > n_{pcr}$.

3.3. Результаты экспериментов и их обсуждение

Эксперименты проводились при энергии электронного пучка $E_0 \approx 25$ кэВ, токе $I_0 \sim 12-28$ А, длительности импульса тока $T \sim 4,5$ мкс, частоте посылок 50 Гц, напряженности продольного магнитного поля в области взаимодействия $H_0 \sim 500-800$ Э, а в некоторых случаях при проведении спектроскопических исследований до 1200 Э. Чем меньше была напряженность магнитного поля H_0 , тем меньше была поперечная энергия электронного пучка $W_{\perp 0}$. В этих условиях плазменная частота ω_{pe} становилась близкой к ω_{He} уже в начале импульса тока, что существенно ухудшало условия развития неустойчивости на ω_{He} .

В случае увеличения напряженности магнитного поля H_0 влияние магнитного поля тока накала уменьшалось, что вызывало понижение поперечной энергии электронного пучка.

Большинство экспериментов было выполнено при $H_0 \sim 700$ Э. Давление рабочего газа (водород, аргон, гелий, азот) изменялось в пределах $p \sim 1 \cdot 10^{-4} - 5 \cdot 10^{-3}$ Тор. В данном случае возбуждались колебания на частоте $\omega_{pe} \sim \omega_{He}$. Во время измерений подбирались такие условия, когда амплитуда колебаний на частоте ω_{pe} была незначительной и возбуждались они только вблизи заднего фронта импульса тока. Осциллограмма реализации колебаний, соответствующая указанным выше параметрам, приведена на рис. 3.4.

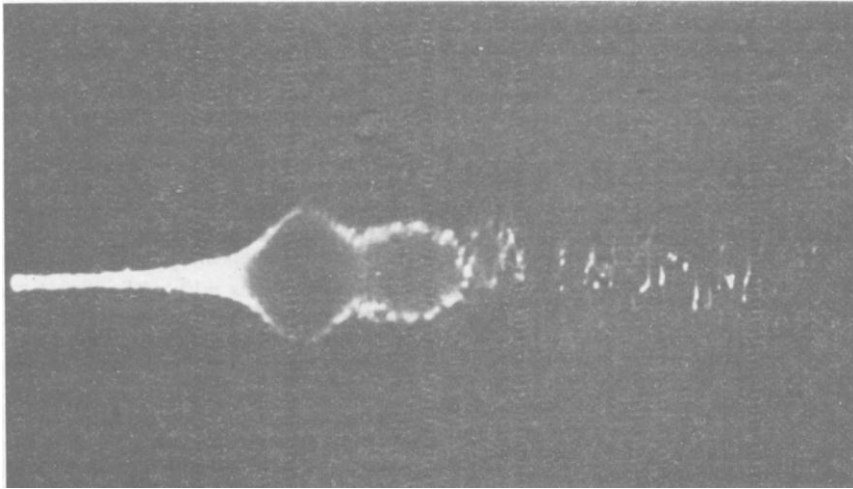


Рис. 3.4. Осциллограмма колебаний, возбуждаемых при коллективном пучково-плазменном взаимодействии

Из нее видно, что в системе пучок-плазма сначала возбуждаются электронные циклотронные колебания на частоте $f_{He} = \omega_{He} / 2\pi \sim 2$ ГГц, а после затухания генерируются колебания, обусловленные эффектом Вавилова–Черенкова $f_{pe}^* = \omega_{pe} / 2\pi \sim (0,7-0,9)$ ГГц. Полуширина частотного спектра возбуждаемых колебаний на частоте ω_{He} , определенная с помощью волномера, составляет $\Delta\omega / \omega_{He} \sim 0,1$. Результаты исследований характеристик колебаний на частоте ω_{pe} будут приведены во II части раздела. Зависимости амплитуды возбуждаемых колебаний и скорости нарастания плотности плазмы от времени приведены на рис. 3.5 (кривая 1 – изменение электронной плотности плазмы, кривая 2 – зависимость плотности пучка от времени). Огибающие колебаний соответ-

ствуют частотам: 3 - $\omega_{He} \sim 1,28 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$, 4 - $\omega_{pe} \sim 0,55 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$. Как видно из рисунка, при плотности плазмы $n'_p \sim 1,5 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$ ($n'_p > n_b$) начинается генерация колебаний на электронной циклотронной частоте ω_{He} . Изменение напряженности продольного магнитного поля H_0 вызвало соответствующие изменения частоты возбуждаемых циклотронных колебаний.

Из рис. 3.5 также видно, что амплитуда возбуждаемых колебаний на частоте ω_{He} растет с увеличением плотности плазмы, достигает максимального значения при плотности плазмы $n_p \approx 3 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$, после чего наблюдается затухание электронных циклотронных колебаний. Измеренный декремент затухания составлял $\gamma / \omega_{He} \sim 0,02$ ($\gamma \approx 2,4 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$).

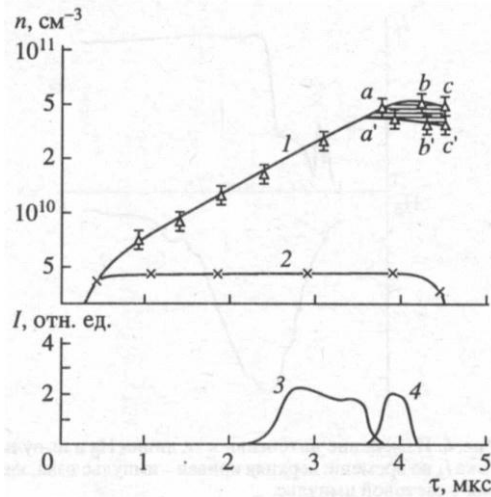


Рис. 3.5. Изменение электронной плотности пучка (кривая 2) и плазмы (кривая 1) в зависимости от времени $E_0 \sim 25 \text{ кэВ}$, $I_0 \sim 25 \text{ А}$, $H_0 \sim 700 \text{ Э}$, $r \sim 4 \cdot 10^{-4} \text{ Тор}$. Ниже приведены огибающие возбуждаемых колебаний на частотах: 3 - $\omega_{He} = 1,28 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$, 4 - $\omega_{pe} = 0,55 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$, полученные с помощью детекторов. Значения в точках a, a', b, b', c, c' сняты за одно измерение

Декремент затухания у электронной циклотронной волны можно определить из следующего соотношения, полученного К. Н. Степановым [168 - 171]:

$$\frac{\gamma}{\omega_{He}} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{\omega_{pe}}{\omega_{He}}\right)^2 \sin^2 \left[\psi \left(\frac{V_{\parallel}}{V_{Te}} \right) \right] \exp(-Z_-^2)}{\left(\frac{\omega_{pe}}{\omega_{He}}\right)^2 \cos^2 \psi + \frac{\omega_{He}^2 \omega_{pe}^2 \sin^2 \psi}{(\omega^2 - \omega_{He}^2)^2}}, \quad Z_-^2 > 1, \quad (3.19)$$

где $Z_-^2 = (\Delta\omega / \omega_{He})^2 E_0 / 4kT_e$, $\Delta\omega = \omega - \omega_{He}$ – ширина частотного спектра возбуждаемых колебаний, ψ – угол между волновым вектором k и магнитным полем H_0 .

В экспериментах $\omega_{pe} \approx \omega_{He}$, поэтому

$$\frac{\omega_{He}^2 \omega_{pe}^2 \sin^2 \psi}{(\Delta\omega)^2 4\omega_{He}^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{\omega}{\Delta\omega} \right)^2 \sin^2 \psi \gg \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2} \cos^2 \psi.$$

Тогда выражение (3.19) можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{\gamma}{\omega_{He}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\Delta\omega}{\omega} \right)^2 \left(\frac{V_{\parallel}}{V_{Te}} \right) \exp(-Z_-^2), \quad (3.20)$$

где kT_e и V_{Te} – тепловая энергия и тепловая скорость электрона плазмы в начале развития циклотронной неустойчивости. В данном случае $E_0 \sim 25$ кэВ, $V_{\parallel} \sim 9 \cdot 10^9$ см/с, $\Delta\omega / \omega \sim 0,1 kT_e$ и V_{Te} определялись из графика (рис. 7) и составляют соответственно 35 эВ и $4 \cdot 10^8$ см/с. Тогда расчетное значение $\gamma / \omega_{He} \approx 0,05$, а экспериментально определенное значение $\gamma / \omega_{He} \approx 0,02$, что находится в хорошем соответствии с теоретической величиной. Временной ход амплитуды генерируемых электронных циклотронных колебаний можно объяснить следующим образом. После возбуждения колебаний электроны плазмы взаимодействуют с ними, отбирают энергию у волны и ускоряются (нагреваются). Одновременно с этим возбуждаемые в плазме колебания воздействуют на электронный пучок и вызывают уширение функции распределения электронов пучка по скоростям (разогрев пучка).

Благодаря этим двум механизмам инкремент нарастания колебаний на частоте ω_{He} уменьшается и при условии $\delta_1 \sim \gamma$ наступает сначала стабилизация этой неустойчивости, а затем при дальнейшем уменьшении инкремента нарастания ($\delta_1 < \gamma$) – ее затухание. Необходимо подчеркнуть, что в области стабилизации и затухания электронная плотность плазмы $n_b \sim (3-4) \cdot 10^{10}$ см⁻³ ($\omega_{pe} \sim \omega_{He}$) и, следовательно, выполняются условия для резонансного поглощения энергии колебаний на частоте ω_{He} . Когда плотность плазмы достигала значения $n_b \approx (4-5) \cdot 10^{10}$ см⁻³, начиналась генерация электронных ленгмюровских колебаний на частоте $\omega_{pe}^* \approx 0,55 \cdot 10^{10}$ с⁻¹. При увеличении давления рабочего газа в области взаимодействия картина возникновения колебаний смещается к началу импульса тока пучка.

Изменение W_{\perp} приводит к изменению амплитуды и времени возникновения электронных циклотронных колебаний. При увеличении

W_{\perp} скорость нарастания плотности плазмы возрастала, амплитуда колебаний на частоте ω_{He} также возрастала, а момент начала генерации колебаний сдвигался к началу импульса тока. Максимальное значение мощности возбуждаемых циклотронных колебаний, соответствующее максимальной поперечной энергии электронного пучка $W_{\perp} \approx 2,5$ кэВ, достигало 40 кВт в импульсе. Электронный к.п.д. в этом случае составлял $\sim 7\%$ от энергии пучка. В случае использования стеклянной трубы при проведении спектроскопических измерений мощность возбуждаемых СВЧ колебаний на частоте ω_{He} составляла ~ 20 кВт в импульсе. Электронная плотность плазмы, при которой начиналась генерация, оставалась постоянной $(4-5) \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$.

Необходимо отметить, что при увеличении скорости нарастания плотности плазмы

$$\varphi = \frac{1}{n_p} \frac{dn_p}{dt} \quad (3.21)$$

инкремент нарастания электронных циклотронных колебаний также возрастал и в соответствии с теорией достигал максимального значения при $\omega_{pe} \approx \omega_{He}$ [166].

Экспериментально определенные значения составили $\delta_1 \approx 3 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$ и $n_{pcr} \sim (4-5) \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$, что находится в удовлетворительном согласии с теоретическими $\delta_1 \approx 1 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$ и $n_{pcr} \sim 7 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$. Измеренные значения скорости нарастания электронной плотности плазмы составляли $\varphi \sim (0,7-1) \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$, возрастая пропорционально давлению рабочего газа.

В настоящей работе был выполнен большой цикл спектроскопических исследований основных процессов, протекающих при коллективном взаимодействии электронных пучков с плазмой, были определены температуры электронов и ионов плазмы, напряженности возбуждаемых СВЧ-электрических полей. Часть полученного экспериментального материала была авторами ранее приведена в [137]. Результаты его обработки в соответствии с [163] впервые приведены в данном разделе. Как указывалось ранее, определение электронной температуры проводилось по измерению отношения интенсивностей синглетной и триплетной линий гелия HeI $\lambda_1 = 4921,93 \text{ \AA}$ и $\lambda_2 = 4713,15 \text{ \AA}$ с точностью до 15%. Измерения проводились при токе 12 – 15 А, энергии $E_0 \sim 25$ кэВ, длительности импульса тока $T \sim 4,6$ мкс. Напряженность продольного магнитного поля составляла 0,7 – 1 кЭ, плотность плазмы до $2 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$. Область давлений $8 \cdot 10^{-4} - 10^{-2} \text{ Тор}$.

В работе фотографическим способом измерялась усредненная по импульсу электронная температура. Кроме этого, в работе была определена временная зависимость температуры. Несмотря на малую дли-

тельность импульса тока и сравнительно небольшое давление рабочего газа в системе, электронная температура достигает довольно больших значений $\sim 80 - 90$ эВ. Возбуждение СВЧ-колебаний, которое имеет место в области низких давлений ($\sim 10^{-3}$ Тор), приводит к заметному увеличению температуры электронов (в 2,5 - 3 раза) по сравнению с температурой при больших давлениях ($\sim 10^{-2}$ Тор). Это находится в полном соответствии с предположением о том, что рост температуры обусловлен действием электрических полей возбуждаемых СВЧ-колебаний, интенсивность которых достигает максимума при давлениях $p \sim 5 \cdot 10^{-3}$ Тор, а затем резко уменьшается. Если бы температура электронов определялась только парными соударениями, то наблюдалась бы обратная зависимость. Интенсивность излучения линий достигает максимального значения почти в конце импульса тока. Такая временная зависимость интенсивности свечения может быть объяснена следующим образом. В начале импульса тока свечение связано с возбуждением атомов газа электронами пучка. В дальнейшем образуется плазма, и в результате взаимодействия пучка с этой плазмой возбуждаются колебания и происходит бесстолкновительный нагрев электронов плазмы. При этом электроны плазмы получают энергию, достаточную для возбуждения и ионизации, и тогда свечение обусловлено как электронами пучка, так и в еще большей степени электронами плазмы. Так как плотность плазмы больше плотности электронов пучка, интенсивность свечения сильно возрастает. Это подтверждается тем, что время возникновения интенсивного свечения сильно возрастает. Это подтверждается тем, что время возникновения и затухания интенсивных СВЧ-колебаний (рис. 3.6).

Сопоставляя временные зависимости изменения свечения для линий HeI 4922 Å и HeI 4713 Å, можно найти временной ход электронной температуры (рис. 3.7).

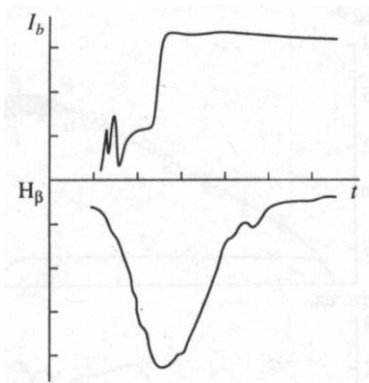


Рис. 3.6. Изменение интенсивности линии $H\beta$ и импульса тока I_b во времени: верхняя кривая – импульс тока, нижняя – световой импульс

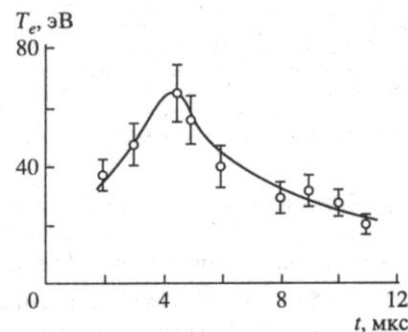


Рис. 3.7. Временной ход изменения электронной температуры плазмы

Максимальная температура достигала 80 - 90 эВ. В нашем случае температура электронов плазмы, измеренная в момент времени, когда интенсивность достигает максимума, изменяется от 60 до 90 эВ, что находится в удовлетворительном согласии с усредненными измерениями интенсивности, проведенными фотографическим путем.

При определении температуры по относительной интенсивности двух линий мы пользовались зависимостью I_1/I_2 от T_e , полученной в предположении, что возбуждение осуществляется электронами, имеющими максвелловскую функцию распределения. Так как в нашем случае возбуждение осуществлялось, по крайней мере на начальной стадии, не только электронами плазмы, но и электронами пучка, то этими зависимостями можно пользоваться только тогда, когда возбуждение в основном определяется электронами плазмы.

Измеренное отношение интенсивностей на начальной стадии равно ≈ 10 , что соответствовало бы температуре плазмы в несколько электронвольт. Однако это не означает, что температура электронов плазмы столь велика. Наоборот, в это время электроны плазмы еще не участвуют в возбуждении, которое осуществляется пучком большой энергии. Это подтверждается тем, что экспериментально измеренное отношение интенсивностей совпадает с теоретически вычисленным

$$\frac{I_1}{I_2} \approx \frac{\sigma_1 E_0}{\sigma_2 E_0}. \quad (3.22)$$

При вычислении эффективных поперечных сечений возбуждения $\sigma_1(E_0)$ и $\sigma_2(E_0)$ в этой области энергий мы пользовались для функций возбуждения формулами, полученными в [172, 173] в борновском приближении. В дальнейшем возбуждение, производимое пучком, существенно меньше, чем электронами плазмы. При этом наблюдаемое отношение интенсивностей, измеряемое с точностью $\sim 15\%$, составляло 2-5.

Измерения полуширин линий проводились для линий ArII 4726,91 Å, ArII 4806,07 Å, HeI 4921,9 Å, HeI 5015,68 Å, NI 4630.6 Å и линии H β ($\lambda_\beta = 4861$ Å). Измерения контуров линии водорода производились для обнаружения эффекта Штарка, обусловленного возбуждаемыми стохастическими СВЧ-колебаниями (в данных условиях уширения, обусловленные внутренними микрополями, незначительны и составляют $\sim 0,02$ Å). При измерении ширины линий атомов гелия уширение обусловлено только температурой этих атомов (эффект Доплера). Форма контура линий ионов (ArII, NII) обусловлена совместным действием эффекта Доплера и непосредственным воздействием стохастических СВЧ-электрических полей. На рис. 3.8, 3.9 приведены характерные формы контуров.

Как видно из сравнения полуширин этих линий и эталонной линии, аппаратная функция значительно меньше полуширин исследованных контуров.

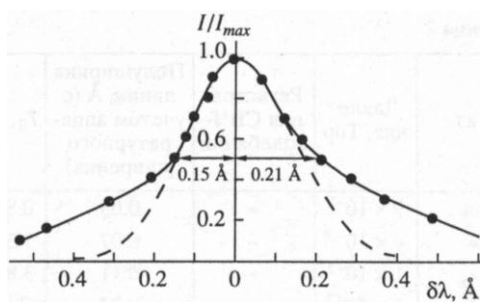


Рис. 3.8. Контур линии He I: сплошная кривая – экспериментальный контур, штриховая – рассчитанный теоретически доплеровский контур, совпадающий в центре линии с экспериментальным контуром

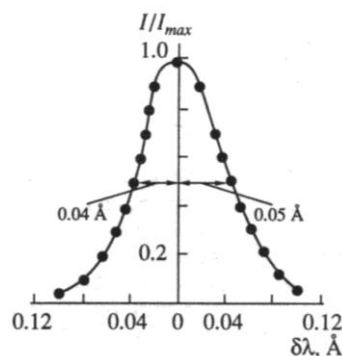


Рис. 3.9. Контур линии Ar II, $\lambda = 4806,07 \text{ \AA}$

В табл. 3.2 приведены результаты измерения полуширин линий и соответствующих им ионных температур для аргона, гелия, водорода.

Таблица 3.2

Газ	Давление, Тор	Регистрация СВЧ-колебаний	Полуширина линии, \AA (с учетом аппаратурного уширения)	T_0 , эВ
Аргон	$9 \cdot 10^{-3}$	–	0,05	0,8
»	$4 \cdot 10^{-3}$	–	0,07	1,55
»	$1 \cdot 10^{-3}$	+	0,11	3,8
Гелий	$1 \cdot 10^{-2}$	–	0,07	0,155
»	$4 \cdot 10^{-3}$	+	0,10	0,33
Водород	$1 \cdot 10^{-2}$	–	0,26	0,48
»	$6 \cdot 10^{-3}$	+	0,28	0,55
»	$2 \cdot 10^{-3}$	+	0,36	0,95
Азот + водород	$1 \cdot 10^{-2}$	–	0,4	1,1
»	$2 \cdot 10^{-3}$	+	0,55	2,2

Примечание. Знак «+» в третьей графе означает, что колебания регистрируются, знак «–» – что они отсутствуют.

Из приведенной таблицы следует, что, несмотря на низкое давление разряда и то обстоятельство, что в нем возбуждаются в основном высокие частоты, непосредственно не воздействующие на ионы, температура ионов не очень мала и составляет несколько электронвольт. Температура при наличии СВЧ-колебаний и в отсутствие их для Ar II, He I и He I отличается в 2 раза, возрастая при наличии СВЧ-колебаний. При этом надо заметить, что колебания отсутствуют в области больших дав-

лений, при которых частота парных соударений и пропорциональная ей температура должны были бы сильно возрасти. Абсолютное значение температуры составляет $0,9 \cdot 4,3$ эВ для ArII и $0,09 \cdot 0,9$ эВ для водорода.

Действие электрических полей должно существенно сказаться на атомах водорода, для которых имеет место линейный эффект Штарка.

Форма наблюдаемого контура линии водорода H_{β} сильно отличается от доплеровской. Из контура рис. 3.8 следует, что, хотя полуширина линий водорода сравнительно невелика ($\sim 0,3 - 0,5 \text{ \AA}$), что соответствует температуре, меньшей температуры азота и аргона, крылья линии очень сильно уширены. Так как другие механизмы уширения в плазменном эксперименте при столь малых плотности и давлении несущественны, то можно полагать, что наблюдаемые широкие крылья линии обусловлены эффектом Штарка. Однако штарк-эффект, связанный с микрополями, из-за малой плотности плазмы невелик (уширение $\sim 0,02 \text{ \AA}$). Кроме того, в отсутствие СВЧ-колебаний форма контура близка к доплеровской.

Таким образом, можно считать, что наблюдаемое уширение обусловлено высокочастотным штарк-эффектом в стохастических электрических полях. Сравнивая полученные экспериментальные контуры с рассчитанными, можно утверждать, что напряженность возбуждаемых стохастических СВЧ-электрических полей составляет $1,5 - 2$ кВ/см. Это значение находится в соответствии с величиной поля, определенной из мощности возбуждаемых СВЧ-колебаний P_k , с помощью следующего соотношения:

$$E_z \approx \sqrt{\frac{4\pi P_k}{V_o S}}, \quad (3.23)$$

где S – площадь поперечного сечения области взаимодействия. Для данных параметров $P_k \sim 20$ кВт, $S \sim 10 \text{ см}^2$ и $E_z \sim 1,5$ кВ/см.

34. Коллективные взаимодействия интенсивных первоначально модулированных и немодулированных электронных импульсных пучков с плазмой. Развитие пучково-плазменного разряда

Подраздел посвящен экспериментальному исследованию коллективных взаимодействий интенсивных электронных импульсных пучков как первоначально модулированных, так и немодулированных, с плазмой, условий образования и развития пучково-плазменного разряда, когда электронная ларморова частота ω_{He} превосходит электронную ленгмюровскую частоту $\omega_{pe} < \omega_{He}$. Приведены основные параметры возбуждаемых колебаний, обусловленных эффектом Вавилова–Черенкова (мощность, полуширина частотного спектра, корреляционные

функции, время корреляции, инкременты нарастания, напряженности возбуждаемых СВЧ-электрических полей и т.д.), и условий образования пучково-плазменного разряда (критическая плотность плазмы, инкременты ее нарастания и т.д.) как в случае первоначально немодулированного, так и для модулированного электронных пучков на частотах

$$f_M = f_{pe}^* = \alpha \omega_{pe} / 2\pi, \quad (\alpha \sim 0,45)$$

$$f_M \neq f_{pe} = \omega_{pe} / 2\pi.$$

Показано, что при коллективном взаимодействии немодулированного электронного пучка с плазмой возбуждаются стохастические (хаотические) колебания с мощностью 120 - 150 кВт в импульсе на частоте $\omega_{pe}^* \sim \alpha \omega_{pe}$. Изучено управление пучковой неустойчивостью («регуляризация» колебаний) с помощью начальной модуляции электронного пучка регулярным сигналом. Исследовано ускорение ионов в возбуждаемых стохастических СВЧ-электрических полях. Проведено сравнение полученных экспериментальных результатов с теоретическими и показано их хорошее соответствие.

Интенсивному исследованию коллективных взаимодействий пучков заряженных частиц с плазмой содействовало то обстоятельство, что наряду с отрицательными эффектами, обусловленными различными неустойчивостями и в основном связанными с аномальной диффузией и ограничением предельных токов в плазменных ускорителях и других устройствах, существует большое число возможностей полезного использования этих неустойчивостей [141, 164].

Сюда в первую очередь относятся возможности генерирования и усиления интенсивных (мощных) регулярных и стохастических (хаотических) колебаний, нагрева плазмы с помощью возбуждаемых стохастических СВЧ-полей, разработка новых плазменных методов ускорения заряженных частиц и т.д. При этом имеются неустойчивости, сопровождающиеся сильным обменом энергии пучка с плазмой, но не приводящие к увеличению диффузии. Это различные типы СВЧ-неустойчивостей для продольных электронных колебаний плазмы и др.

Отметим, что если для ряда приложений необходимы мощные стохастические (хаотические) колебания, то для решения таких задач, как разработка коллективных методов ускорения заряженных частиц в плазме, генерирование и усиление мощных регулярных колебаний и т.д., требуется возбуждение волн с фиксированной частотой и фазой.

Как известно [141, 164], при взаимодействии немодулированных пучков заряженных частиц с плазмой размытие функции распределения электронов пучка по скоростям, возникающее благодаря обратному воздействию возбуждаемых колебаний на пучок, приводило к сильному уширению спектров этих колебаний по фазовым скоростям и частотам, а колебания становились стохастическими (хаотическими).

Поэтому необходима была разработка способов сужения частотных спектров и превращения стохастических колебаний в регулярные, т.е. управление пучковыми неустойчивостями.

Управление пучковыми неустойчивостями сводится к их стабилизации или подавлению в тех случаях, когда они являются вредными, и возбуждению благодаря неустойчивостям интенсивных колебаний с заданным спектром по частотам, фазовым скоростям и степени стохастичности, когда они оказываются полезными, а также к воздействию на процессы, приводящие к переходу от регулярных к стохастическим, т.е. к «регуляризации» колебаний.

Решение этой задачи достигается благодаря начальной модуляции электронного пучка регулярным сигналом. Эта идея впервые была предложена Я. Б. Файнбергом и оказалась очень плодотворной [141].

Начальная модуляция с помощью регулярного сигнала или сторонних СВЧ-полей нарушает необходимую для развития неустойчивостей фазировку частиц тех колебаний, частота и длина волны которых отличаются от модуляционной, и поэтому она должна привести к срыву неустойчивостей в широком интервале частот и фазовых скоростей. Предварительная модуляция создает условия для преимущественного развития неустойчивостей на волне с заданной частотой и волновым числом.

Вследствие фазовой группировки частиц, обусловленной начальной модуляцией, разброс по энергиям частиц, возникающий в результате возбуждения колебаний, может быть значительно уменьшен и, следовательно, понижена эффективная температура пучка и плазмы.

Таким образом, если при взаимодействии с плазмой немодулированного пучка возбуждаются широкие волновые пакеты, то начальная модуляция пучка изменяет степень стохастичности генерируемых колебаний и должна привести к сильному сужению и разрежению частотных спектров. В случае задания начального возмущения регулярного характера должно иметь место сужение частотного спектра, аналогичное тому, которое происходит в квантовых генераторах и обусловлено индуцированным излучением. Наконец, в результате изменения характера взаимодействия частиц с возбуждаемыми ими полями из-за перехода свободных частиц в продольные осцилляторы, образованные воздействием периодических продольных электрических СВЧ-полей на электроны пучка, должны также измениться и инкременты возбуждаемых колебаний.

В этом разделе работы приведены результаты исследований коллективных взаимодействий с плазмой как первоначально модулированных, так и немодулированных интенсивных электронных импульсных пучков, у которых начальная поперечная энергия $W_{\perp 0} \cong 0$. Изучены условия образования пучково-плазменного разряда (ППР) (критическая плотность плазмы, инкремент ее нарастания и т.д.), когда электронная ленгмюровская частота плазмы ω_{pe} меньше электронной циклотронной частоты ω_{He} ($\omega_{pe} < \omega_{He}$). В данных экспериментах генерируются мощные электронные

ленгмюровские колебания, обусловленные эффектом Вавилова–Черенкова. Наиболее эффективным методом экспериментального исследования параметров этих колебаний является непосредственное наблюдение формы возбуждаемых колебаний (метод реализаций) с последующим определением временных автокорреляционных функций (времени корреляции), по которым с помощью соотношения Хинчина–Винера (приведенного ниже) можно вычислить распределение плотности спектральной мощности генерируемых колебаний (частотные спектры). Эти характеристики являются определяющими для турбулентной системы пучок–плазма.

Одной из основных целей работы являлось доказательство возможности управления пучковой неустойчивостью, т.е. подавления неустойчивости в широком интервале частот, сужения частотного спектра возбуждаемых СВЧ-колебаний, а также регулирования степенью стохастичности генерируемых колебаний.

Впервые определены оптимальные параметры ППР, измерены мощность возбуждаемых электронных ленгмюровских колебаний, их корреляционные функции, времена корреляции, частотные спектры, инкременты нарастания колебаний. Показана возможность управления пучковой неустойчивостью с помощью начальной модуляции электронного пучка регулярным сигналом.

В работе спектроскопическими методами измерены напряженности генерируемых СВЧ-электрических полей и энергии ионов, ускоренных в этих полях.

Проведено сравнение полученных экспериментальных результатов с теоретическими и показано их хорошее соответствие.

3.4.1. Экспериментальная установка и методики измерения основных параметров электронного пучка и плазмы

Эксперименты проводились на установке, которая состояла из электронной пушки, области взаимодействия электронного пучка с плазмой, системы перепада давлений между камерой электронной пушки и областью взаимодействия, совмещенной с узлом начальной модуляции электронного пучка, системы съема и вывода возбуждаемых ВЧ-колебаний, натекателей для напуска рабочего газа в начале и конце области взаимодействия, блока питания и модулятора электронной пушки, соленоида для создания продольного магнитного поля, коллектора тока, генератора СВЧ-колебаний, с помощью которого осуществлялась начальная модуляция электронного пучка, диагностической аппаратуры (рис. 3.10) [135, 136, 174].

Начальная модуляция электронного пучка и отбор ВЧ-мощности возбуждаемых колебаний осуществлялись при помощи широкополосных спиральных переходов, располагаемых между камерой электронной пушки и областью взаимодействия, а также между областью взаимодействия и коллектором тока. В ранее проведенных экспериментах начальная модуляция и съем возбуждаемых колебаний проводились с помощью узкополосных резонаторов [174].

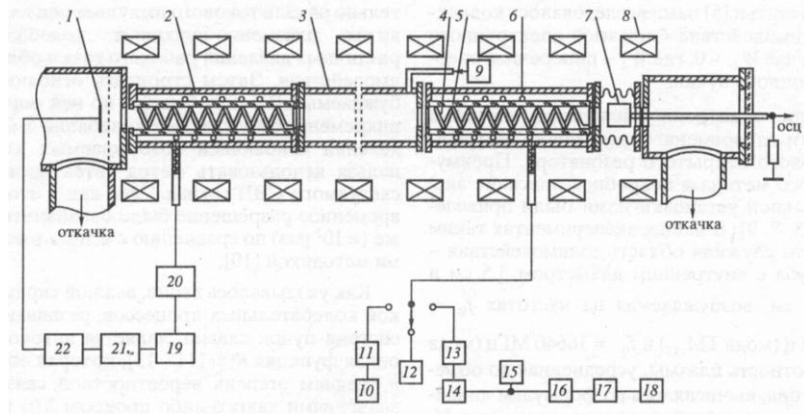


Рис. 3.10. Блок-схема установки: 1 – катод электронной пушки, 2 – модулирующая спираль, 3 – область взаимодействия, 4 – внутренняя спираль, 5 – стеклянная труба, 6 – внешняя спираль, 7 – цилиндр Фарадея, 8 – соленоид, 9 – натекатель, 10 – измеритель временной корреляции, 11, 13 – переменные аттенюаторы, 12 – измеритель мощности, 14 – резонансный волномер, 15 – осциллограф, 16 – усилитель, 17 – интегратор, 18 – электронный потенциометр (ЭПП), 19 – задающий генератор, 20 – СВЧ-генератор, 21 – подмодулятор, 22 – модулятор

Основные параметры установки таковы: энергия пучка E_0 – до 25 кэВ, ток пучка $I_0 \sim 25$ А, длительность импульса тока $T \sim 4,5$ мкс, частота следования импульсов – 50 Гц, напряженность однородного продольного поля H_0 изменялась в пределах 1,0 – 2,0 кЭ. Область взаимодействия – медная труба с внутренним диаметром 3,5 см и длиной 33 см. Давление рабочего газа (азот, воздух, гелий, аргон, водород) в области взаимодействия составляло $5 \times 10^{-5} - 10^{-3}$ Тор.

Электронный пучок через совмещенную систему перепада давлений и начальной модуляции поступал в область взаимодействия, проходил через нее, ионизовал находящийся в ней рабочий газ, создавал плазму и взаимодействовал с ней. Катод электронной пушки, система перепада давлений, область взаимодействия и коллектор тока располагались в продольном однородном магнитном поле, неоднородность которого не превышала $\sim 5\%$. Пучок электронов инжектировался из электронной пушки, катод которой из гексаборида лантана $\varnothing 2$ см располагался в однородной части постоянно продольного магнитного поля. Подогрев катода осуществлялся плоской вольфрамовой спиралью, расположенной за катодом и запитываемой от сети переменного тока. С помощью специального устройства отрицательный импульс высокого напряжения подавался на катод в тот момент, когда напряженность магнитного поля, образованного током в спирали подогрева, была равна нулю. Из соответствующих расчетов [43] следует, что угол поворота электронов пучка за время пролета области взаимодействия будет очень мал, и можно считать, что в описанных экспериментах в отличие от

предыдущей нашей статьи [176] исследовалось коллективное взаимодействие с плазмой электронного пучка в случае $W_{\perp 0} \cong 0$, где $W_{\perp 0}$ – поперечная энергия электронного пучка [174].

Изменение электронной плотности плазмы в зависимости от времени определялось методом многомодового открытого резонатора. Преимущества этого метода и подробное описание экспериментальной установки нами были приведены ранее [157, 159, 174]. В данных экспериментах таким резонатором служила область взаимодействия – медная труба с внутренним диаметром 3,5 см и длиной 33 см, возбуждаемая на частотах $f_0' = 10500$ МГц (мода TM_{111}) и $f_0'' = 36640$ МГц (мода TM_{141}). Плотность плазмы, усредненная по объему резонатора, вычислялась по формулам линейной теории возмущений, причем формфактор M_v предполагался постоянным и равным формфактору, полученному для электронного пучка ($M_v = 0,6$ для моды TM_{111} и $M_v = 0,5$ для моды TM_{141}). Измерения производились до значений плотности $n_p' \approx 6 \times 10^{10}$ см⁻³ ($f_0' = 10,5$ ГГц) и $n_p'' \approx 3 \times 10^{11}$ см⁻³ ($f_0'' = 36640$ МГц).

Используемая аппаратура позволяла произвести одно или несколько измерений плотности плазмы за импульс с интервалом ~50 - 100 нс.

Начальная модуляция электронного пучка и отбор СВЧ мощности возбуждаемых колебаний осуществлялись при помощи широкополосных спиральных переходов (ширина полосы 0,6 - 5,0 ГГц), располагаемых между камерой электронной пушки и областью взаимодействия, а также между областью взаимодействия и коллектором тока.

Спиральные переходы представляли собой систему из двух связанных коаксиальных спиралей, расположенных внутри и снаружи диэлектрической трубки и намотанных в противоположные стороны. Параметры спиралей выбирались таким образом, чтобы фазовые скорости волн, распространяющихся в них, совпадали со скоростью пучка. Внешняя спираль через коаксиальный кабель присоединялась к измерителю больших мощностей либо через широкополосные СВЧ-аттенюаторы к широкополосному осциллографу или резонансному волномеру или коррелометру.

В работе [174] также измерялись инкременты нарастания возбуждаемых колебаний как первоначально модулированных, так и немодулированных. Для этого исследуемые колебания подавались на сверхскоростной осциллограф с полосой пропускания до 3 ГГц, и с его экрана фотографировалась форма возбуждаемых колебаний (реализации) в различные моменты времени относительно начала токового импульса или начала развития плазменно-пучковых колебаний для различных давлений рабочего газа в области взаимодействия. Затем строилась огибающая возбуждаемых ВЧ-колебаний, и по ней определялся инкремент возбуждаемых колебаний δ . Для определения огибающей возбуждаемых колебаний нельзя использовать метод детектирования исследуемого СВЧ-сигнала, так как в этом слу-

чае временное разрешение было бы значительно хуже ($\geq 10^2$ раз) по сравнению с использованной нами методикой [165].

Как указывалось выше, важной характеристикой колебательных процессов, развивающихся в системе пучок-плазма, является автокорреляционная функция $R(\tau)$ [175-177], которая определяет в среднем степень вероятностной связи между значениями какого-либо процесса $X(t)$ в различные моменты времени t и $t + \tau$ и представляет собой усредненное значение произведения

$$R(\tau) = \overline{X(t)X(t+\tau)}, \quad (3.24)$$

где черта сверху обозначает усреднение по времени. Для стационарного случайного процесса, когда можно воспользоваться теоремой эргодичности [176], выражение для автокорреляционной функции принимает вид

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t)X(t+\tau)dt. \quad (3.25)$$

Спектральную плотность мощности $S(\omega)$ для стационарного случайного процесса можно получить из соотношения Хинчина–Винера [175-177]

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^T R(t) \exp(-i\omega t) dt. \quad (3.26)$$

Время корреляции τ_k определяется из корреляционной функции [176]

$$R(\tau_k) / R(0) \sim 0,1 \text{ —} \quad (3.27)$$

и связано с шириной частотного спектра возбуждаемых колебаний следующим соотношением [176, 177]:

$$\Delta\omega\tau_k \cong 2\pi. \quad (3.28)$$

Напомним, что время, которое характеризует степень связи между мгновенными значениями какого-либо флуктуирующего процесса, называется временем корреляции τ_k данного процесса. Есть несколько определений этого времени. В нашем случае τ_k определялось как временной интервал, для которого выполнялось соотношение (3.27). Турбулентное состояние плазмы характеризуется нерегулярной затухающей корреляционной функцией. Чем меньше τ_k , тем более стохастические (хаотические) колебания возбуждаются в исследуемой системе.

Если в плазме возбуждаются регулярные колебания, то они характеризуются осциллирующей корреляционной функцией с большим временем корреляции $\tau_k / T_1 < 1$, где T_1 — средний период исследуемых колебаний.

В данной работе автокорреляционные функции исследуемых колебаний $R(\tau)$ были не только определены с помощью фурье-анализа, но и экспериментально измерены как в случае первоначально модулированного, так и немодулированного электронных пучков.

Возможность экспериментального измерения корреляционных функций медленных случайных процессов в нелинейных системах (время корреляции $\tau_k \approx 0,1 - 1$ с) была предложена Н. Винером [175]. Непосредственное использование этого метода в нашем случае не представляется возможным. Однако основная идея, указанная им, была нами использована для исследования стохастических процессов, развивающихся при коллективном взаимодействии электронного пучка с плазмой. Насколько нам известно, такие измерения были выполнены нами впервые [135]. СВЧ-колебания, принимаемые петлей или электрическим зондом, через переменные аттенюаторы поступали по различным цепям I и II на квадратичный детектор. В цепи I находилась линия переменной задержки, благодаря чему на квадратичный детектор поступала сумма двух сигналов

$$A_{\Sigma} = A(t) + A(t + \tau), \quad (3.29)$$

где τ – время запаздывания (задержки) первого сигнала $A(t + \tau)$ по отношению ко второму $A(t)$, вызываемое различными электрическими длинами цепей I и II. После прохождения через квадратичный детектор и усредняющую по времени интегрирующую ячейку величина сигнала была

$$R(\tau) \sim \overline{A(t) + A(t + \tau)}, \quad (3.30)$$

где черта обозначает усреднение по времени. Затем сигнал $R(\tau)$ через усилитель поступал на автоматический электронный потенциометр (ЭПП). Изменяя время задержки τ в цепи I при помощи линии переменной длины или добавляя отрезок кабеля с известным временем задержки t , можно было получить автокорреляционную функцию $R(\tau)$ СВЧ-колебаний, возбуждаемых при коллективном пучково-плазменном взаимодействии, а затем определить время корреляции τ_k и с помощью соотношения Хинчина–Винера (4) – частотные спектры исследуемых колебаний.

Ряд важных результатов получен с помощью оптических методов диагностики. Наблюдения производились вдоль оси системы параллельно магнитному полю.

В работе измерялись контуры спектральных линий атомов и ионов аргона, гелия, водорода ArII 4348,1 Å, HeI 4921,93 Å, HeII 5016,68 Å, HeII 4686 Å, H α 4861 Å, H γ 4340 Å, по которым определялись ионная температура и напряженности возбуждаемых СВЧ-электрических полей в плазме. Из измерений эффекта Доплера, обусловленного движением ионов в возбуждаемых переменных регулярных или стохастических электрических полях, можно определить энергию ускоренных ионов и напряженности возбуждае-

мых СВЧ-электрических полей. Из измерений контуров линий H_β и H_γ , которые определяются эффектом Штарка в возбуждаемых СВЧ-электрических полях, можно оценить их напряженности.

В настоящей работе исследовался ППР малой длительности импульса ($\sim 4,5$ мкс). Особенности этого разряда являются относительно небольшая плотность турбулентной плазмы ($n_p \leq 2 \times 10^{11} \text{ см}^{-3}$), сильные ВЧ-электрические поля, малые времена развития неустойчивостей (0,1 – 0,3 мкс). Для исследования процессов в таком разряде по изменению формы спектральной линии необходимо было применить значительно более быстрые методы сканирования контура линии. Кроме того, так как интенсивность свечения разряда была мала, то для измерения контуров линий нужны приборы с большой чувствительностью. В качестве такого прибора для скоростного сканирования контуров спектральных линий нами применялся двойной электронно-оптический преобразователь (ДЭОП) типа ЛИ-602 [178].

Блок-схема установки для измерения контуров линий приведена на рис. 3.11.

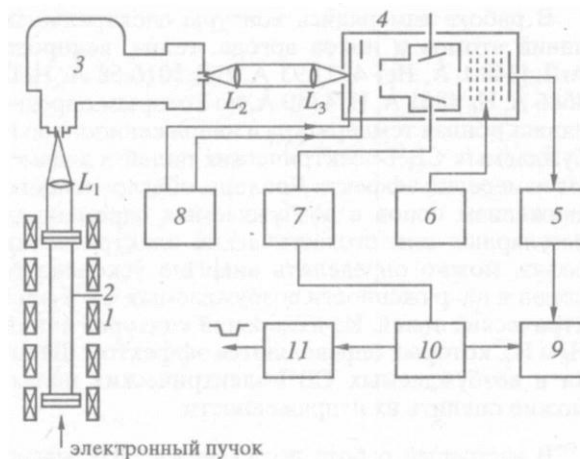


Рис. 3.11. Структурная схема для измерения контуров спектральных линий: 1 – соленоид, 2 – область взаимодействия, 3 – спектрограф, ИСП-51 с приставкой, 4 – ДЭОП, 5 – катодный повторитель и усилитель, 6, 8 – выпрямители, 7 – генератор пилообразного напряжения, 9 – осциллограф, 10 – блок синхронизации, 11 – модулятор, формирующий импульсы высокого напряжения

Для выделения спектральных линий ДЭОП 4 был соединен с системой, состоящей из спектрографа ИСП-51 3 и специальной фотоэлектрической приставки (ФЭП). Свечение разряда с помощью линзы L_1 проектировалось на входную щель спектрографа. Пройдя оптическую систему спектрографа, изображение спектральной линии, полученное на выходной щели ФЭПа с помощью системы линз L_2 и L_3 , фокусировалось на фотокатоде

ДЭОПа с увеличением 1:1. Высокое напряжение на фотокатод (-12 кВ) и подфокусирующий электрод (-11,8 кВ) подавалось от специального выпрямителя 8. Напряжение питания электронного умножителя (блок 6) составляло 2,2 кВ. Сканирование электронного изображения профиля линии перед щелью ДЭОПа производилось пилообразным напряжением от генератора, имеющего симметричный выход 7. Сигнал с ДЭОПа после усилителя с катодным повторителем 5 подавался на осциллограф 9. Запуск модулятора электронной пушки 11, генератора пилообразного напряжения и осциллографа осуществлялся от блока синхронизации 10. В области длины волны H_{β} дисперсия оптической системы была 6 Å/мм, входная щель спектрографа ~0,08 мм, выходная щель ФЭПа – не более 0,6 мм. Увеличение оптической системы ФЭПа порядка шести, щель в диафрагме ДЭОПа – 0,08 мм. Чувствительность отклоняющих пластин 0,007 мм/В, коэффициент усиления ЭУ по току – 10^6 . Полоса пропускания системы регистрации – 3 МГц. Точность оптической юстировки системы спектрограф - ДЭОП контролировалась на осциллографе по крутизне фронтов трапецеидального сигнала, получаемого от сканирования изображения выходной щели ФЭПа, освещенной источником сплошного спектра. Калибровка экрана осциллографа в области длины волны H_{β} производилась по расстоянию между линиями дугового спектра железа 4859,7, 4871,3, 4872,1, 4878 Å. Время записи контура линии было выбрано 1 мкс. Средняя ошибка измерений полуширины линии составляла $\sim \pm 10\%$. В ряде случаев сканирование проводилось с помощью синусоидального напряжения частотой 500 кГц от ВЧ-генератора. При этом время записи контура было 0,25 мкс, и в течение импульса тока можно наблюдать несколько контуров.

Аппаратная функция системы определялась по тонким линиям железа и линиям, излучаемым распадающейся плазмой, и на нее вводилась поправка в экспериментально измеренные полуширины контуров линий [164].

3.4.2. Определение оптимальных размеров области взаимодействия и напряженности продольного магнитного поля

В работе определены условия, при которых возбуждались мощные СВЧ-колебания в ППР, обусловленные эффектом Вавилова–Черенкова. Генерирование таких колебаний является необходимым условием развития ППР. Так как основными параметрами, определяющими частотный спектр, инкременты нарастания, мощность возбуждаемых колебаний при заданных характеристиках электронного пучка (ток и энергия) являются радиальные размеры области взаимодействия, напряженность продольного магнитного поля и плотность плазмы, нами были измерены зависимости мощности возбуждаемых СВЧ-колебаний от этих параметров. Экспериментально были изучены зависимости мощности возбуждаемых СВЧ-колебаний от поперечных размеров области взаимодействия. В экспериментах использовались медные трубы длиной 33 см с различными радиусами a : 1,3, 1,75, 2,5, 4,0 см.

Максимум интенсивности возбуждаемых колебаний наблюдался на частоте $f_{pe}^* - \omega_{pe}^* / 2\pi \approx 0,9$ ГГц, а их частотный спектр в соответствии с теорией почти не зависел от напряженности продольного магнитного поля H_0 , в то время как мощность возбуждаемых колебаний существенно зависела от H_0 . В то же время величина H_0 существенно влияла на мощность возбуждаемых колебаний. Зависимости мощности возбуждаемых СВЧ-колебаний на выходе системы пучок-плазма для различных радиусов плазменной камеры приведены на рис. 3.12. Для заданных параметров пучка ($E_0 \sim 25$ кэВ, $I_0 \approx 25$ А) и плотности плазмы $n_p \sim (4-6) \times 10^{10}$ см⁻³ имеется оптимальный радиус плазменной области взаимодействия, при котором мощность возбуждаемых СВЧ-колебаний в пучково-плазменной системе максимальна. В нашем случае он равен 1,75 см.

Максимальное значение СВЧ-мощности возбуждаемых колебаний в импульсе на кривой 1 составляет 120 – 150 кВт ($H_0 \sim 2,0$ кЭ), а на кривой 2 – 45 кВт ($H_0 \sim 1,0$ кЭ) при начальной импульсной мощности электронного пучка 625 кВт.

Как видно из приведенных графиков для оптимального радиуса области взаимодействия, мощность возбуждаемых колебаний возрастала при увеличении напряженности продольного магнитного поля H_0 .

Объяснение полученных экспериментальных результатов было дано В. И. Курилко [141]. Из дисперсионного уравнения для тонкого электронного пучка, находящегося в продольном бесконечном магнитном поле [179], были получены выражения для инкрементов возбуждаемых колебаний.

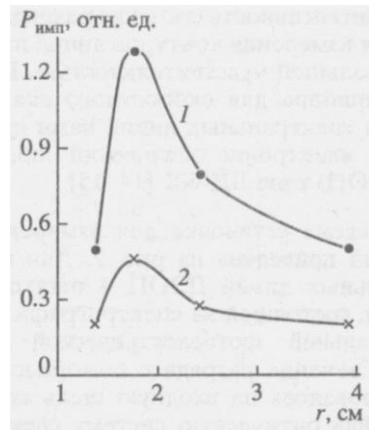


Рис. 3.12. Зависимость мощности возбуждаемых СВЧ-колебаний в ППР от радиуса области взаимодействия при различных напряженностях продольного магнитного поля H_0 : 1 - $H_0 = 2$ кЭ, 2 - $H_0 = 1$ кЭ

(электронная плотность плазмы $n_p \sim 6 \times 10^{10}$ см⁻³)

В случае, когда частота колебаний не слишком близка к резонансной частоте плазменного цилиндра (ω_{pe}), инкремент нарастания колебаний δ имеет вид [144]

$$\left(\frac{\delta}{\omega}\right)^2 = \frac{Y}{(\chi_n^2 - a^2 \gamma_0^2) J_1^2(\chi_0)}, \quad (|\omega_{pe} - \omega| \propto \delta), \quad (3.31)$$

$$\omega^2 < \omega_{pe}^2 < \omega_{He}^2,$$

где $\gamma_0^2 = -\frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}}(k_{\parallel}^2 - k^2 \varepsilon_{\perp})$, $\varepsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}$, $\varepsilon_{\perp} = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2 - \omega^2}$, $Y = -\frac{\omega_1^2}{\pi V_0^2}$,

$$\omega_1^2 = \frac{4\pi e \rho_0}{m}, \quad \rho_0 = 2\pi \int_0^a n_b(r) r dr$$
 – погонная плотность электронного пучка,

e и m – заряд и масса электрона, v_0 – скорость электронов пучка, ω_{pe} – электронная ленгмюровская частота плазмы, ω_{He} – электронная ларморова частота, k_{\parallel} – параллельное волновое число, k – волновое число, a – радиус области взаимодействия, χ_n – корни функции Бесселя нулевого порядка ($J_0(\chi_n) = 0$), $J_1(\chi_n)$ – функция Бесселя первого порядка.

Если разность $\omega_{pe} - \omega$ – мала, максимальный инкремент колебаний δ определяется уравнением

$$\left(\frac{\delta_{\max}}{\omega}\right)^3 = -\frac{\pi Y}{k_{\parallel}^2 a^2 J_1^2(\chi_0)}. \quad (3.32)$$

Физически наличие такого резонанса означает, что фазовая скорость волны плотности заряда оказывается равной скорости электронного пучка. Естественно, что при этом эффективность взаимодействия электронного пучка с плазмой максимальная. С помощью выражений (3.31), (3.32) была рассчитана зависимость δ/δ_{\max} от радиуса области взаимодействия a для следующих параметров пучка и плазмы: $v_0 = 10^{10}$ см/с, $\omega_{pe}^2 \approx 2,2 \times 10^{20}$ с⁻², $\omega_{He}^2 = 1,2 \times 10^{21}$ с⁻², длина области взаимодействия $L = 40$ см, $\omega_1^2 = 0,5 \times 10^{20}$ с⁻², $\chi = 2,4$, частота максимума интенсивности возбуждаемых колебаний $f_{pe}^* = 9 \times 10^8$ с⁻¹. Из расчетов следует, что инкремент нарастания колебаний возрастает при уменьшении радиуса области взаимодействия, достигая максимума при $a = 1,81$ см, а затем быстро спадает до нуля при значении радиуса

$$a_{\min} = a - \Delta a, \quad \text{где } \Delta a = 0,1 \text{ см.}$$

Следовательно, экспериментально определенное значение $a = 1,75$ см находится в хорошем соответствии с расчетным. Была исследована динамика образования ППР для первоначально модулированного и немодулированного электронных пучков, когда $\omega_{pe} < \omega_{He}$.

На рис. 3.13а приведены графики нарастания плотности плазмы во времени для модулированного (кривая 1) и немодулированного (кривая 2) электронных пучков. В последнем случае колебания возбуждаются в диапазоне 600 - 1200 МГц. Осциллограмма огибающей генерируемых СВЧ-колебаний для немодулированного пучка приведена на рис. 3.13б. Мощность колебаний составляла $\sim 50 - 70$ кВт. Начальная модуляция пучка осуществлялась регулярным сигналом на частоте 880 МГц, мощность модуляции составляла 3 кВт. В заштрихованных областях (рис. 3.13а, кривые 1, 2) за одно измерение наблюдалось одновременно два резонанса, разделенных по времени, что соответствует двум различным значениям электронной плотности плазмы (точки a и a' , b и b' и т.д.).

Так как в этих экспериментах временной интервал между двумя измерениями электронной плотности плазмы, равный 50 - 100 нс, значительно превосходил период возбуждаемых СВЧ-колебаний плотности плазмы (\bar{n}_p), то они воспринимались как одновременное присутствие двух различных значений плотности плазмы.

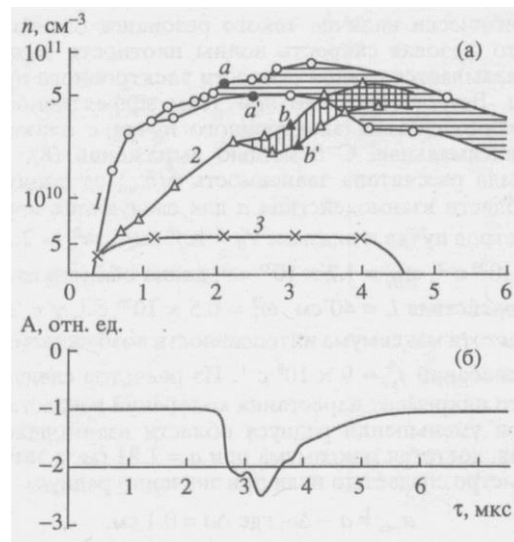


Рис. 3.13а. Изменение электронной плотности плазмы в зависимости от времени для модулированного (кривая 1) и немодулированного (кривая 2) электронных пучков при давлении 4×10^{-4} Тор (мощность и частота сигнала модуляции 3 кВт и 880 МГц соответственно); кривая 3 – график плотности электронного пучка

Рис. 3.13б. Осциллограмма огибающей СВЧ-колебаний в диапазоне 600 - 1200 МГц для немодулированного пучка (выходная СВЧ-мощность 50 - 70 кВт в импульсе)

Из измерений следует, что переменная составляющая электронной плотности плазмы составляла $\bar{n}_p \sim 10^{10} \text{ см}^{-3}$. Соответствующее значение напряженности СВЧ-электрического поля было

$$E = 4\pi \bar{n}_p e / k \sim 9 \text{ кВ/см.}$$

Как видно из приведенных кривых, генерация колебаний наблюдается тогда, когда плотность плазмы достигает порогового значения $(3-5) \times 10^{10} \text{ см}^{-3}$.

Как указывалось ранее, для черенковской неустойчивости, имеющей место для данных условий эксперимента, расчетное значение критической плотности плазмы $n_{p_{cr}}$, при которой скорость волны совпадает со скоростью пучка ($V_0 \sim V_\phi$), составляет $n_{p_{cr}} \sim 7 \times 10^{10} \text{ см}^{-3}$, что находится в удовлетворительном согласии с полученными экспериментальными значениями.

На рис. 3.13а (кривая Э) для сравнения приведен график плотности электронного пучка. Как видно из приведенных рисунков, скорость нарастания плотности плазмы во времени

$$\varphi = \frac{1}{n} \frac{dn}{dt} \quad (3.33)$$

для модулированного пучка выше, чем для первоначально немодулированного, и составляет $5 \times 10^5 \text{ с}^{-1}$ и $1,5 \times 10^6 \text{ с}^{-1}$ соответственно, возрастая пропорционально давлению газа.

В экспериментах с помощью широкополосного осциллографа регистрировались реализации (формы возбуждаемых колебаний) в различные моменты времени относительно начала импульса тока. Затем с помощью фурье-анализа (соотношения (3.25), (3.26)) определялись автокорреляционные функции и мгновенные частотные спектры возбуждаемых колебаний. На рис. 3.14 и 3.15 представлены реализации в различные моменты времени, соответствующие им автокорреляционные функции и частотные спектры возбуждаемых колебаний при отсутствии и наличии начальной модуляции (частота модуляции $f_M = 291 \text{ МГц}$, максимум спектра возбуждаемых колебаний $f_{pe}^* \sim \omega_{pe}^* / 2\pi = 880 - 900 \text{ МГц}$).

Как указывалось в [23, 24, 65], в данном случае на прямой волне ($\omega_{pe} < \omega_{He}$) генерируются мощные СВЧ-колебания с частотой

$$\omega_{pe}^* \sim \omega_{pe} \cos \psi,$$

где $\cos \psi \sim k_{\parallel} / \sqrt{k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2} < 1$, ψ – угол между волновым вектором k и магнитным полем H_0 , $k_{\parallel} = \omega_{pe} / V_{\parallel}$ – продольное волновое число, $k_{\perp} = \pi / a$ – поперечное волновое число, a – внутренний радиус области взаимодей-

ствия. Для условий нашего эксперимента $a = 1,75$ см, $V_{\parallel} \sim 9 \times 10^9$ см/с, $\omega_{pe} \sim 1,2 \times 10^{10}$ с⁻¹ и расчетная величина $\cos \psi \sim 0,45$.

Основной целью этих экспериментов являлось доказательство возможности сужения частотного спектра возбуждаемых СВЧ-колебаний, подавление неустойчивостей в широком интервале частот, а также управления степенью стохастичности возбуждаемых колебаний.

При начальной модуляции электронного пучка регулярным сигналом создаются условия для преимущественного возбуждения колебаний с заданными частотой и волновым числом [21, 139].

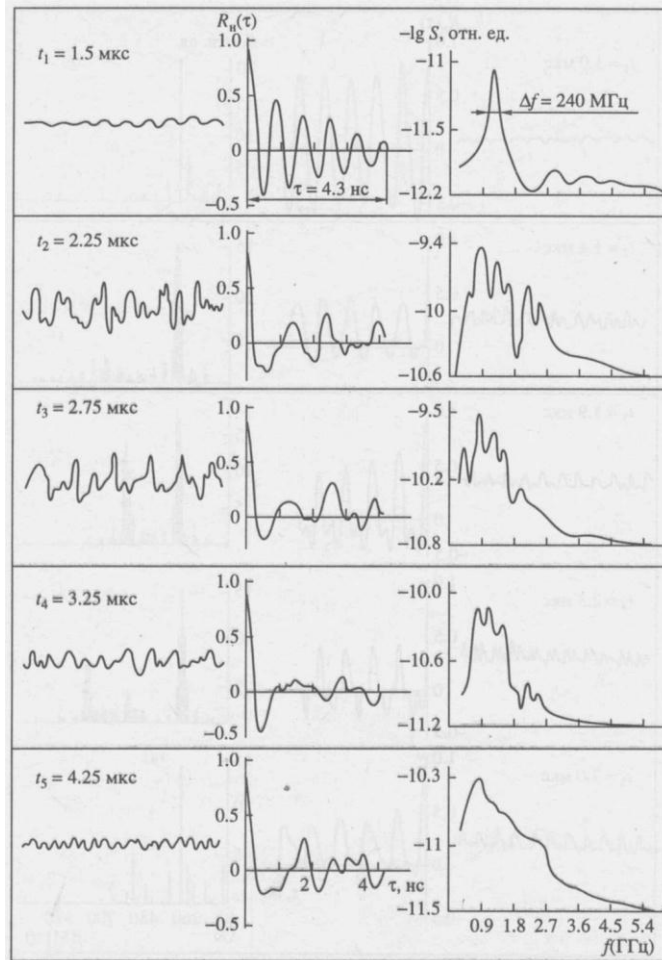


Рис. 3.14. Осциллограммы возбуждаемых колебаний, их автокорреляционные функции $R_n(\tau)$ и частотные спектры $S(f)$ для случая немодулированного электронного пучка. Энергия пучка $E \sim 25$ кэВ, ток пучка $I_0 \sim 25$ А, напряженность продольного магнитного поля $H_0 \sim 2$ кЭ

Как видно из приведенных графиков (рис. 3.14), при коллективном взаимодействии немодулированного электронного пучка с плазмой в случае, когда $\omega_{pe} < \omega_{He}$, возбуждаются прямые мощные (120 - 150 кВт в импульсе) стохастические (хаотические). СВЧ-колебания с малыми временами корреляции ($\tau_k \sim (4 - 5) T_1$, где T_1 – средний период возбуждаемых колебаний) с шириной частотного спектра $\Delta\omega / \omega_{pe}^* \sim 0,27$.

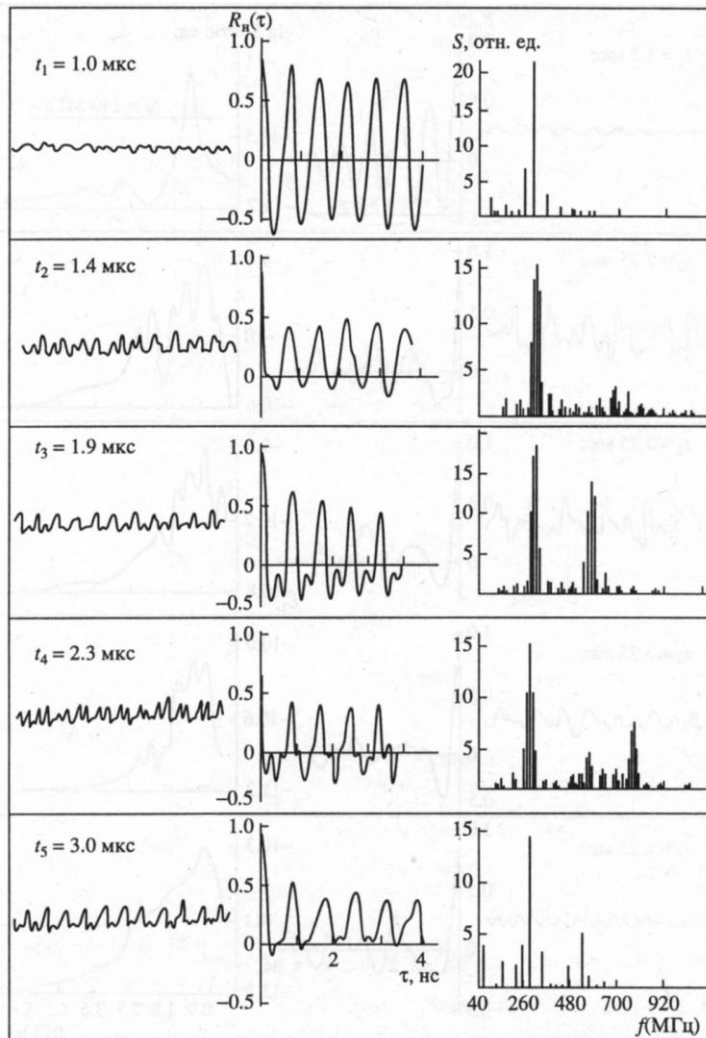


Рис 3.15. Осциллограммы возбуждаемых колебаний, их автокорреляционные функции $R_n(\tau)$ и частотные спектры $S(f)$ для случая модулированного электронного пучка. Частота и мощность модулирующего сигнала 291 МГц и 6,5 кВт в импульсе соответственно

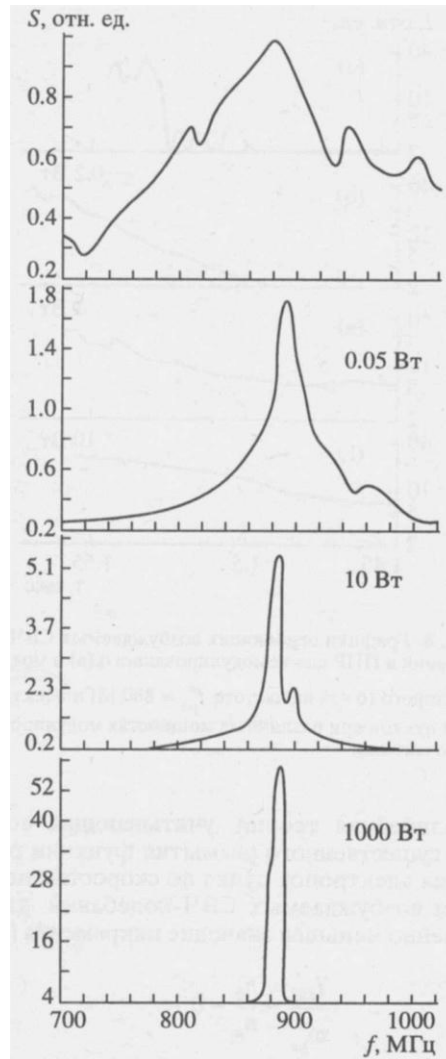


Рис 3.16. Частотные спектры колебаний, возбуждаемых в ПИП немодулированным и модулированным электронными пучками при различных мощностях модулированного сигнала (частота $f_M = 880$ МГц)

Существенным отличием этих графиков от приведенных на рис. 3.14 и 3.15 является то, что в первом случае модуляция осуществлялась на частоте $f_M = 291$ МГц, которая значительно меньше основной частоты возбуждаемых колебаний ($f_M < f_{pe}^*$). При этом существенное сужение частотного спектра достигалось при больших мощностях моду-

Из сравнения рис. 3.14 и 3.15 следует, что начальная модуляция электронного пучка привела к срыву колебаний на частотах, отличных от модуляционной $f \neq f_M$, сильному сужению частотного спектра возбуждаемых колебаний, возрастанию времени корреляции τ_k от 2 - 4 нс до 0,5 мкс и генерации гармоник частоты модуляции f_M . Проведенные специальные измерения показали, что время корреляции τ_k увеличивается с возрастанием мощности модуляционного сигнала следующим образом: при мощностях 6,5 кВт и 10 кВт в импульсе времена корреляции τ_k равны 250 и 500 нс соответственно, т.е. возбуждаемые колебания становятся значительно более регулярными. Очень важным представляется то обстоятельство, что управление мощными колебаниями в случае, когда $f_M \sim f_{pe}^*$, может быть осуществлено при подаче на вход системы пучок-плазма слабого регулярного сигнала с мощностью 0,1 - 1 Вт, т.е. в $10^5 - 10^6$ раз меньше мощности возбуждаемых колебаний. Частотные спектры в зависимости от мощности модуляционного сигнала ($f_M \sim f_{pe}^*$) приведены на рис. 3.16. Необходимо отметить, что суммарная мощность возбуждаемых колебаний при модуляции не уменьшалась.

ляционного сигнала $\sim 6 \cdot 10$ кВт в импульсе. В случае, приведенном на рис. 3.16, модуляция осуществлялась на $f_M \sim f_{pe}^*$ близкой к частоте, возбуждаемой с максимальной интенсивностью.

Заметим, что относительно большие мощности и сравнительно низкая частота модуляции были нами использованы для того, чтобы возбудить нелинейные волны в результате пучково-плазменного взаимодействия. Как видно из рис. 3.16, увеличение мощности модуляции приводило к сужению частотного спектра возбуждаемых колебаний, их регуляризации и сильной нелинейности.

Необходимо отметить, что значения ширины частотных спектров возбуждаемых СВЧ-колебаний ($\Delta\omega$), определенные из соотношения Хинчина–Винера (3), совпадают со значениями $\Delta\omega$, измеренными резонансными волномерами. С помощью методики, описанной выше, нами были определены автокорреляционные функции $R(\tau)$ возбуждаемых СВЧ-колебаний для пучков с начальной модуляцией и без нее. Частота сигнала модуляции равнялась $f_M = 827$ МГц, мощность составляла $6 \cdot 10$ кВт в импульсе.

Как и в описанном выше случае для первоначально немодулированного электронного пучка, время корреляции τ_k составляло $4 \cdot 5$ нс и возбуждаемые колебания являлись стохастическими (хаотическими).

При начальной модуляции электронного пучка время корреляции τ_k возрастало более чем в 100 раз, а степень стохастичности возбуждаемых СВЧ-колебаний существенно уменьшалась.

Таким образом, проведенные эксперименты подтвердили, что с помощью начальной модуляции регулярным сигналом интенсивных электронных пучков возможно управление пучковой неустойчивостью: подавление неустойчивости в широком диапазоне частот, срыв колебаний на частотах, отличных от частоты модуляции, сужение частотного спектра возбуждаемых СВЧ-колебаний, а также управление степенью стохастичности этих колебаний.

В работе с помощью описанной выше методики исследованы инкременты нарастания возбуждаемых колебаний. После обработки осциллограмм генерируемых СВЧ-колебаний можно было построить огибающие этих колебаний как для немодулированного электронного пучка (рис. 3.17а), так и для модулированного (рис. 3.17б – 3.17г) при различных мощностях сигнала модуляции. Частота сигнала модуляции $f_M = f_{pe}^* = 880$ МГц.

При коллективном взаимодействии с плазмой немодулированного пучка колебания генерируются главным образом в виде коротких пиков длительностью $5 \cdot 15$ нс, амплитуда которых достигает насыщения за время $100 \cdot 150$ нс. Экспериментально определенные значения относительного инкремента нарастания γ/ω_{pe}^* изменяются от 0,04 в начале процесса до

0,12 в его конце. Линейная теория для случая монохроматического электронного пучка дает максимальное значение инкремента [15]

$$\frac{\gamma_{lin}}{\omega_{pe}^*} = \frac{\sqrt{3}}{2^{4/3}} \left(\frac{n_b}{n_p} \right)^{1/3} \sim 0,3. \quad (3.34)$$

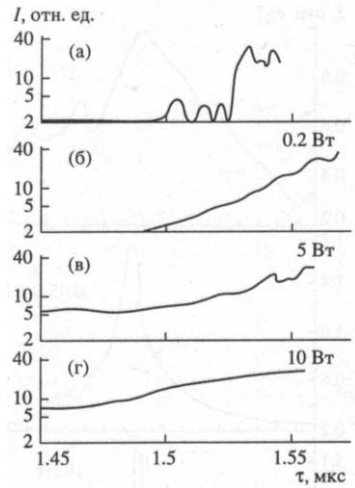


Рис. 3.17. Графики огибающих возбуждаемых СВЧ-колебаний в ППР для немодулированного (а) и модулированного (б - г) на частоте $f_{pe}^* = 880$ МГц электронных пучков при различных мощностях модулированного сигнала

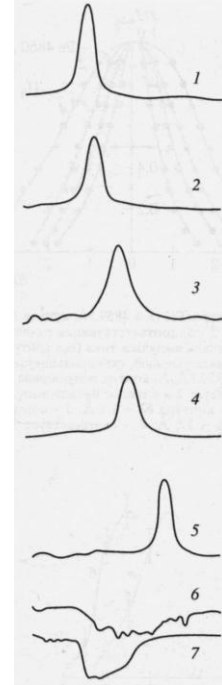


Рис. 3.18. Осциллограммы контуров линии $H\beta$, снятые в различные моменты от начала импульса тока (1 - 5), временной ход интенсивности линии $H\beta$ (6) и огибающая возбуждаемых СВЧ-колебаний (7). Масштаб на осциллограммах 1 - 5 - 1 деление - 2,2 А, на 6 - 7 - 1 деление - 1 мкс

Квазилинейная теория, учитывающая возможность существенного размытия функции распределения электронов пучка по скоростям под действием возбуждаемых СВЧ-колебаний, дает существенно меньшее значение инкремента [180, 181]

$$\frac{\gamma_{ква}}{\omega_{pe}^*} \approx \frac{n_b}{n_p} \sim 0,1. \quad (3.35)$$

Из данных следует, что линейная теория дает значения инкремента, превышающие величины, полученные в эксперименте, в то время

как инкременты нарастания в квазилинейной теории оказываются близкими к полученным в эксперименте.

Характер развития колебаний существенно изменяется при начальной модуляции электронного пучка, которая приводит к тому, что критическая плотность плазмы $n_{p\,cr} \sim (3 - 5) \times 10^{10} \text{ см}^{-3}$ достигается раньше (рис. 3.13а), а инкременты нарастания становятся меньше (рис. 3.17б – 3.17г), чем в случае немодулированного пучка. При увеличении мощности модуляционного сигнала от 0,2 до 10 Вт относительные инкременты γ/ω_{pe}^* уменьшаются от 8×10^{-3} до 3×10^{-3} и изменяется степень стохастичности возбуждаемых колебаний, которые становятся регулярными. Проведенные экспериментальные результаты качественно согласуются с теоретическими, полученными в [182].

Ранее в экспериментах было показано, что при коллективном взаимодействии немодулированного электронного пучка с плазмой в ней возбуждаются мощные стохастические (хаотические) СВЧ-колебания.

Впервые эффект Штарка, обусловленный переменными электрическими полями стохастических (хаотических) колебаний, возбуждаемых в плазме пучком электронов, был рассмотрен Е. В. Лифшиц [163]. Эффект Штарка в рассматриваемом случае приводит к довольно значительному уширению линий и поэтому может быть относительно просто обнаружен и в силу ряда своих специфических особенностей отделен от эффекта Штарка, обусловленного кулоновскими полями, и от других процессов, приводящих к уширению линий [163]. В случае линейного эффекта Штарка, обусловленного стохастическими (хаотическими) СВЧ-электрическими полями, спектральная линия расщепляется на целый ряд сателлитов, отстоящих друг от друга на величину ω_{pe} . Максимум интенсивности от центра линии спадает по следующему закону [163]:

$$I(n\omega_{pe}) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi\delta_0}} \exp\left(-\frac{n^2}{4\delta_0}\right), \quad (3.36)$$

где $\delta_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_{pe}} \right)^2$, $\Delta\omega/\omega_{pe} > 1$, $n > 1$, $\delta_0 > 1$, $n < \delta_0$, n – номер сателлита.

Полуширина огибающей равна [54]

$$n\omega_{pe} \approx \Delta\omega \equiv \bar{\alpha} \left(\sum_{k=1}^N E_k \right)^{1/2}, \quad (3.37)$$

где $\bar{\alpha}$ – постоянная линейного эффекта Штарка. Как отмечалось в [137, 138], при относительно небольшой плотности плазмы, имеющей место в нашем случае ($n_p \sim 10^{10} - 2 \times 10^{11} \text{ см}^{-3}$), ω_{pe} изменяется в пределах $5 \times 10^9 - 2 \times 10^{10} \text{ с}^{-1}$ и поэтому расстояние между отдельными сателлитами, составляющее сотые – десятые доли ангстрема, трудно эксперименталь-

но различить. Поэтому напряженность стохастического (хаотического) СВЧ-электрического поля определялась по форме огибающей.

Авторами были исследованы контуры линий водорода H_{β} ($\lambda = 4861 \text{ \AA}$) и H_{γ} ($\lambda = 4340 \text{ \AA}$), атомов гелия HeI ($\lambda = 5016,68 \text{ \AA}$), $HeII$ ($\lambda = 4921,93 \text{ \AA}$), ионов гелия $HeII$ ($\lambda = 4686 \text{ \AA}$) и аргона $ArII$ ($\lambda = 4348,1 \text{ \AA}$). Образцы осциллограмм записанных контуров линии H_{β} соответствующие различным моментам времени импульса тока, показаны на рис. 3.18 (кривые 1 - 4).

На осциллограмме 5 рис. 3.18 приведен контур линии водорода, излучаемой распадающейся плазмой, а на рис. 3.19 – контуры линии железа, снятые при тех же условиях. Полуширина этой линии, равная $\Delta\lambda = 1,4 \text{ \AA}$, была принята в этих условиях эксперимента за аппаратную функцию. Из рис. 3.18, 3.19 следует, что, несмотря на малую плотность плазмы, уширение спектральных линий весьма велико. В течение импульса тока полуширина линии H_{β} изменяется от 1.8 до 3.6 \AA , достигает максимального значения к концу импульса тока, а затем уменьшается.

В исследованном случае турбулентной плазмы форма контура спектральных линий аргона определяется эффектом Доплера, а водорода и некоторых линий гелия – совместным действием эффектов Доплера и Штарка в стохастических полях.

Оценки показали, что другие эффекты уширения (в частности, линейный эффект Штарка – ударный и статический, имеющий место в устойчивой плазме) малы. Для разделения вклада в ширину линии за счет эффекта Штарка и эффекта Доплера были исследованы две линии водорода H_{β} и H_{γ} . Так как постоянные линейного эффекта Штарка для этих линий различны, а доплеровская ширина линии пропорциональна длине волны, то, измерив полуширины этих линий, можно определить отдельно уширение за счет этих эффектов. Для этого также были использованы две линии ионов гелия $HeII$ 4686 \AA и $HeII$ 3203 \AA [27]. Измерения показали, что полуширины линий к концу импульса тока для водорода, гелия, аргона почти одинаковы. Из этого следует, что энергия ионов как и в работе [163] растет пропорционально массе.

Помимо контуров спектральных линий с помощью ДЭОПа измерены сдвиги спектральных линий в плазме. Зарегистрирован сдвиг линий водорода в коротковолновую область спектра и измерена его величина.

На рис. 3.20 показан сдвиг линии H_{β} в течение импульса тока при различных давлениях в области взаимодействия и приведены осциллограммы огибающих возбуждаемых СВЧ-колебаний. В качестве несмещенной (реперной) линии водорода использована линия H_{β} , излучаемая водородным тиратроном (ТГИ-1 400/16), поджигаемым прямоугольным импульсом.

На рис. 3.21 приведены осциллограммы реперной линии 1, линии, излучаемой из разряда 2, и интенсивность СВЧ-колебаний 3. Как видно из рис. 3.20, существует хорошая корреляция между максимальным сдвигом линии и СВЧ-колебаниями, возбуждаемыми при коллективном взаимодействии пучка с плазмой. Уменьшение интенсивности СВЧ-колебаний приводит к уменьшению сдвига спектральной линии.

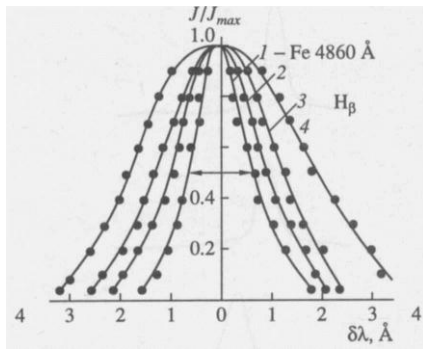


Рис. 3.19. Контуры FeI ($\lambda = 4859.7 \text{ \AA}$, кривая 1) и линии H β , (кривые 2 - 6), соответствующие различным моментам от начала импульса тока (все контуры сняты при одинаковых условиях сканирования): линии железа FeI $\lambda = 4859.7 \text{ \AA}$, 1 - контур, полуширина $\delta\lambda = 1,4 \text{ \AA}$; 2 - соответствует 2 и 6 мкс от начала импульса тока, полуширина контура $\delta\lambda \sim 1,8 \text{ \AA}$; 3 - соответствует 3-4 мкс, $\delta\lambda \sim 2,6 \text{ \AA}$; 4 - соответствует 4 и 5 мкс, $\delta\lambda \sim 3,6 \text{ \AA}$

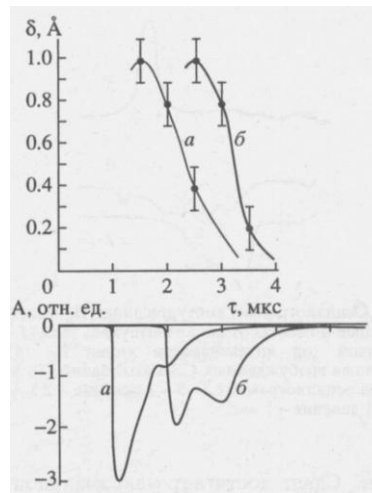


Рис. 3.20. Сдвиг спектральной линии H β в различные моменты времени от начала импульса тока (верхние кривые) и осциллограммы интенсивности возбуждаемых СВЧ-колебаний (нижние) для различных давлений рабочего газа в области взаимодействия: а - $3 \times 10^{-3} \text{ Тор}$, б - 10^{-3} Тор

Наличие сдвига линии H β свидетельствует о том, что часть ионов совершает направленное движение. Сдвиг достигает максимальной величины $\sim 1 \text{ \AA}$ через время $\Delta t \approx 1 \text{ мкс}$ после начала СВЧ-колебаний, что соответствует скорости $\Delta V \approx 6 \times 10^6 \text{ см/с}$ или энергии $E \approx 20 \text{ эВ}$. Можно предположить, что такую энергию ионы приобретают при взаимодействии со стохастическим (хаотическим) электрическим полем, возбуждаемым в плазме. Напряженность этого поля можно вычислить с учетом конечного времени корреляции и нарастания амплитуды СВЧ-поля в направлении движения пучка из соотношения [184]

$$E \approx \frac{2M_i}{e\tau_k} \left(\frac{V_0 \Delta V}{\omega_{pe}^* \Delta t} \right)^{1/2}, \quad (3.38)$$

где τ_k - время корреляции, определенное экспериментально, ω_{pe}^* - электронная ленгмюровская частота, e и M_i - заряд и масса протона, Δt - вре-

мя ускорения ионов, V_0 – скорость пучка. Для нашего случая $\tau_k \sim 2 - 4,5$ нс, $\Delta t - 1$ мкс, $\omega_{pe}^* = 5 \times 10^9$ с⁻¹.

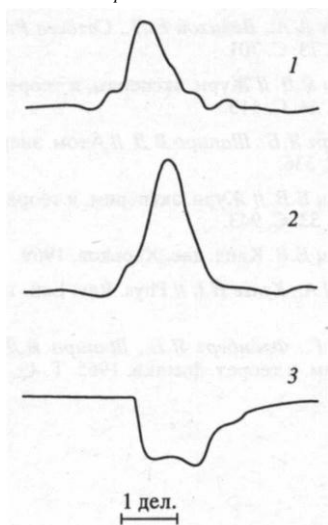


Рис. 3.21. Осциллограммы: 1 – контур линии H_β , излучаемой водородным тиратроном ТТИ-400/16; 2 – контур линии H_β , излучаемой из ППР; 3 – огибающая возбуждаемых СВЧ-колебаний для давления рабочего газа 10^{-3} Тор. Масштаб: 1 деление на осциллограммах 1 и 2 соответствует $2,2 \text{ \AA}$, 1 деление на осциллограмме 3 соответствует 1 мкс

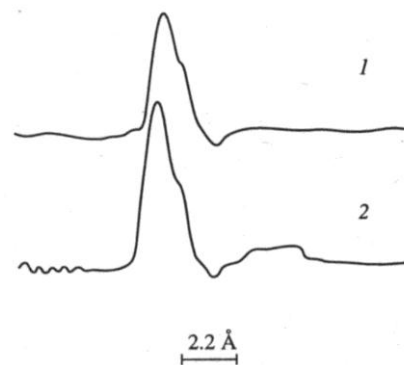


Рис. 3.22. Осциллограммы контуров линии H_β для случая немодулированного (1) и модулированного (2) электронных пучков

Тогда $E_k \approx 2$ кВ/см. Для подтверждения применимости в нашем случае этого соотношения было исследовано влияние времени корреляции на величину сдвига спектральной линии. Как показано в работе [174], предварительная модуляция электронного пучка увеличивает время корреляции, что должно привести к уменьшению энергии ионов, набираемой ими в СВЧ-стохастических (хаотических) электрических полях, и уменьшению сдвига спектральной линии. Экспериментальное исследование влияния предварительной модуляции пучка на величину сдвига подтверждает это.

На рис. 3.22 представлены осциллограммы контуров линии H_β в случае отсутствия модуляции 1 и при модуляции 2 (частота модуляции $f_M \approx 880$ МГц, мощность модуляции 3 кВт). Перемещение линии H_β при модуляции к началу развертки соответствует уменьшению сдвига контура линии. Максимальная величина сдвига контура линии при модуляции уменьшается с 1 до $0,5 \text{ \AA}$.

Таким образом, в проведенных экспериментах показано, что увеличение времени корреляции возбуждаемых СВЧ-полей приводит к уменьшению энергии ускоренных ионов.

3.5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В разделе изложены результаты исследований коллективных взаимодействий интенсивных как первоначально модулированных, так и немодулированных электронных импульсных пучков с плазмой ($W_{\perp 0} = 0$), определены условия образования ППР, когда $\omega_{pe}^2 < \omega_{ce}^2$.

Показано, что в этих условиях возбуждаются мощные электронные ленгмюровские колебания, обусловленные эффектом Вавилова–Черенкова (~ 120 - 150 кВт в импульсе).

Определены автокорреляционные функции, времена корреляции, частотные спектры этих колебаний и показано, что при коллективном взаимодействии с плазмой немодулированного электронного пучка в ней возбуждаются мощные стохастические (хаотические) колебания.

Изучена возможность управления пучковой неустойчивостью с помощью начальной модуляции электронного пучка регулярным сигналом, благодаря которой происходит срыв колебаний в широком диапазоне частот, когда частота модуляции отлична от частот возбуждаемых колебаний, сужение частотного спектра и регуляризация возбуждаемых колебаний. Измерены инкременты нарастания возбуждаемых колебаний для первоначально модулированного и немодулированного электронных пучков, проведено их сравнение с теоретическими значениями и показано их соответствие.

В обоих этих случаях измерены скорость нарастания плотности плазмы во времени, критическая плотность плазмы, при которой начинается образование ППР и возбуждение мощных колебаний на электронной ленгмюровской частоте, обусловленных эффектом Вавилова–Черенкова.

Проведено сравнение полученных результатов с теоретическими и показано их совпадение.

Спектрометрическими методами измерены напряженности возбуждаемых стохастических (хаотических) СВЧ-электрических полей, которые находятся в соответствии с напряженностями СВЧ-электрических полей, измеренными другими методами: по потоку мощности возбуждаемых колебаний, по переменной составляющей электронной плотности плазмы, по энергии ионов, ускоренных в СВЧ-стохастических полях.

Изучено ускорение ионов в стохастических СВЧ-полях, исследовано влияние времени корреляции на энергию ускоренных ионов.

Проведено сравнение полученных экспериментальных результатов с теоретическими и показано их соответствие.

Приведено описание экспериментальной установки, методик измерения основных параметров электронного пучка и ППР и изложены результаты исследований коллективных взаимодействий интенсивных электронных импульсных пучков (пучков осцилляторов) с плазмой

($W_{\perp 0} \leq 0,1 E_0$), определены условия образования ППР, когда $\omega_{pe} \approx \omega_{He}$. В работе исследовано влияние поперечной энергии электронного пучка $W_{\perp 0}$ на условия возбуждения электронной циклотронной неустойчивости и обнаружена сильная зависимость мощности возбуждаемых колебаний на частоте ω_{He} от $W_{\perp 0}$.

Показано, что в этом случае возбуждаются мощные колебания (~ 40 кВт в импульсе) на электронной циклотронной частоте ω_{He} , интенсивность которых возрастает с увеличением начальной поперечной энергии пучка $W_{\perp 0}$. Измерен частотный спектр возбуждаемых колебаний $\Delta\omega / \omega_{He}$. Экспериментально обнаружено сильное затухание этих колебаний при условии $\omega_{pe} \approx \omega_{He}$. Определены инкремент нарастания и декремент затухания этих колебаний, проведено сравнение с теоретическими значениями и показано их согласие. Описан механизм образования и развития мощного пучково-плазменного разряда в условиях, когда $\omega_{pe} \approx \omega_{He}$. Измерены степень нарастания плотности плазмы во времени, критическая плотность плазмы, при которой начинается образование ППР и возбуждение колебаний на электронной ленгмюровской частоте ω_{pe} . Проведено сравнение с теоретическими оценками и показано их соответствие.

Методами спектроскопии измерены также временная зависимость электронной температуры плазмы, напряженности возбуждаемых в плазме стохастических (хаотических) СВЧ-электрических полей, которые достигают значений $\sim 1,5 - 2$ кВ/см, проведено сравнение напряженностей возбуждаемых СВЧ-электрических полей со значениями, определенными по потоку мощности этих колебаний.

Показано, что в результате коллективного взаимодействия электронного пучка с плазмой в ней возбуждаются мощные СВЧ-колебания, в электрических полях которых электроны плазмы приобретают энергию, существенно превышающую энергию ионизации нейтральных частиц.

4.2,5-МЕРНОЕ ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОРМИРОВАНИЯ ПЛАЗМЕННОГО КАНАЛА ИОНАМИ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ СГУСТКОВ В ПЛОТНОЙ И РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЕ

Представлены результаты численного моделирования возбуждения кильватерных полей в разреженной и в плотной плазме [185]. Система релятивистские электронные сгустки - плазма описывается полной системой

релятивистских уравнений Власова для двух пространственных и трех скоростных координат для каждой компоненты плазмы и нелинейных уравнений Максвелла для самосогласованных электромагнитных полей. Компьютерное моделирование показало, что поперечный размер сгустка, распространяющегося в плазме, изменяется в очень широких пределах для обычно реализующихся в экспериментах условий, когда поперечный и продольный размеры сгустка много меньше скин-толщины. В этих условиях наблюдается нелинейное поведение как плазмы, так и сгустка. Ионы формируют плазменный канал благодаря их поперечному движению в самосогласованных полях. Это явление играет существенную роль при распространении релятивистских электронных сгустков в плазме.

4.1. Физическая и математическая модель

Ускорение заряженных частиц волнами плотности заряда в плазме и нескомпенсированных пучках заряженных частиц является одной из перспективных тенденций в коллективных методах ускорения [12, 186, 187]. Переменная часть плотности заряда может быть сделана очень высокой (вплоть до n_e , где n_e – невозмущенная плотность плазмы); следовательно, ускоряющие поля могут достигать значений $10^7 - 10^9$ В/см. П. Чен и др. [188] предложили модификацию метода ускорения Я. Б. Файнберга [12], состоящую в использовании последовательности сгустков (бунчей). Т. Кацоулеас [189] рассмотрел эту проблему для различных профилей электронных сгустков: сгусток с медленным нарастанием плотности и очень быстрым спаданием, а также гауссова типа распределения с различным временем нарастания и спадания. Он представил доказательство того, что использование таких неоднородных несимметричных сгустков вместо однородных может обеспечить значение ускоряющего поля E_{ac} во много раз (10-20) больше, чем величина тормозящего поля E_{st} . Так называемый коэффициент трансформации $T = E_{ac} / E_{st}$ равен $2\pi N$, где N – число длин волн вдоль сгустка. Возбуждение нелинейных стационарных волн в плазме периодической последовательностью электронных сгустков было изучено в [190, 191], где показано, что электрическое поле волны увеличивается с ростом γ (γ – релятивистский фактор сгустка) при сравнимых плотностях плазмы и сгустка. Проведенный эксперимент по ускорению кильватерными полями показал важность трехмерных эффектов [191, 192].

Рассматриваются два различных режима, в которых кильватерные плазменные поля могут обеспечивать большие поля, которые могут быть использованы в ускорительной физике. Если используется соответствующая плотность плазмы, то можно применять короткий, широкий сгусток для возбуждения волн большой амплитуды, полезных для ускорения других сгустков частиц с помощью высоко градиентных электрических полей. С другой стороны, длинный узкий сгусток можно хорошо сфокусировать его

собственным магнитным полем, которое несбалансировано при нейтрализации пространственного заряда плазмой.

Возбуждение кильватерных полей изучается при помощи 2D3V аксиально-симметричного электромагнитного кода COMPASS [193]. Ранее этот код был использован для моделирования индукционного ускорителя [194], модулированного релятивистского электронного пучка [195] и отдельного релятивистского электронного сгустка (РЭС) или последовательности таких сгустков в плазме [193, 196, 197]. Отметим, что как в экспериментах [191] поперечный R_0 и продольный L размеры сгустка малы по сравнению со скинковой длиной c/ω_p , при плотности РЭС $n_b \leq n_0/2$. Компьютерное моделирование [196, 197] показало, что поперечный размер сгустка, распространяющегося в плазме, изменяется в очень широких пределах. Это вызывает существенное изменение его плотности (более чем на порядок величины) и изменение возбуждаемых им кильватерных полей. Показано также, что амплитуды поперечного и продольного поля увеличиваются с каждым дополнительно инжектируемым сгустком. Однако эти амплитуды увеличиваются не пропорционально числу инжектированных сгустков (как это имеет место в случае «жестких» сгустков). В приближении неподвижных ионов в [198] отмечалась возможность формирования канала с нескомпенсированным положительным зарядом, когда плазменные электроны покидают область, в которой движется РЭС. Ранее в [193, 196, 197] уже отмечалось, что реально формирование ионного канала происходит при движении не только электронов плазмы, но и ионов в самосогласованных полях. Как показано в настоящей работе по детальному исследованию этого явления, динамика ионов является определяющей для формирования так называемого «ионного канала». Кроме того, такой канал впоследствии в существенной мере определяет поперечное движение частиц в РЭС, способствуя стабильному распространению сгустков и нарастанию возбуждаемых ими полей.

4.2. Моделирование

Для будущих экспериментальных исследований с целью возбуждения интенсивных кильватерных полей в плазме и использования этих полей для ускорения заряженных частиц предполагается использовать новый электронный ускоритель, созданный в ХФТИ [199]. Его параметры таковы: энергия $W = 18 \div 20$ МэВ, число электронов в сгустке $N \approx 10^{10}$, число сгустков – до 20, частота модуляции сгустков 2797,16 МГц. В экспериментах предполагается инжектировать релятивистские электронные сгустки в плазму, плотность которой предполагается изменять в широких пределах (более, чем на четыре порядка от 10^{10} до 10^{14} см⁻³) с минимальным градиентом по длине плазменного столба. Размеры сгустков при этом будут соизмеримы со скинковой длиной. Степень неоднородности плазмы будет поддерживаться не хуже, чем в пределах нескольких процентов. В этом случае теоретическое рассмотрение однородной плазмы в полной мере адекватно

эксперименту. В условиях эксперимента не должны проявляться азимутально неоднородные неустойчивости, поэтому в теоретическом рассмотрении мы применим азимутально симметричную математическую модель с инжекцией и выходом частиц из расчетной области. В условиях реальных экспериментов на ускорителе РЭС будут инжектироваться в плазму со следующими параметрами: длина столба $L=100$ см, радиус $R=10$ см (плотность плазмы изменяется в пределах $n_0 = 10^{10} \div 10^{14} \text{ см}^{-3}$) с минимальным продольным градиентом плотности. В нашем численном моделировании мы будем придерживаться именно этих параметров. Динамика РЭС описывается релятивистскими уравнениями Власова (уравнение Беляева–Будкера) для функций распределения каждой плазменной компоненты и системой уравнений Максвелла для самосогласованных электрического \vec{E} и магнитного \vec{B} полей. Двухкомпонентная плазма ($m_e/m_i = 1840$, где m_i и m_e – ионная и электронная масса соответственно) вначале холодная и заполняет полностью рассматриваемую область $[0, L] \times [0, R]$. Обычно L и R выбираются 100 см и 10 см соответственно. Конечная последовательность РЭС инжектируется в плоскости $z = 0$ в соответствии с

$$n_b \theta(R_0 - r) \theta(v_b t - z + (n-1)\lambda_p) \theta(z - v_p t + Z + (n-1)\lambda_p).$$

Здесь n означает номер инжектированного сгустка. Скорость сгустка $V_b = c\sqrt{1-1/\gamma_b^2}$, где начальные размеры сгустка $L_0 \times R_0$ в четырех вариантах (см. ниже таблицу) расчетов равны 0,4 см×0,5 см (в пятом – 0,4 см×0,1 см); $\lambda_p = 2\pi c/\omega_p$; n_b – средняя плотность РЭС. Величина $m_e \omega_p c/e$ является масштабом для электрического и магнитного полей. Частицы сгустка и плазмы могут покинуть рассматриваемую область через две граничные поверхности $z = 0$ и $z = Z$. Частицы плазмы могут также входить в область. На внутренней поверхности удовлетворяются следующие условия: металлическая поверхность при $r = R$ и открытые для излучения электромагнитных волн лицевая и тыльная поверхности. В расчетах используется явная схема. Вес модельных частиц является функцией поперечной координаты. Общее число модельных частиц около 10^6 . Отметим, что все расчеты проведены с использованием РС-Pentium-60 и ускоренного алгоритма метода частиц в ячейках.

В работе рассмотрены пять вариантов для изучения зависимости амплитуды возбуждаемых полей от числа инжектированных в плазму N_b сгустков, от соотношения поперечного размера сгустка R_0 и скин-длины c/ω_p . Параметры этих вариантов приведены в таблице.

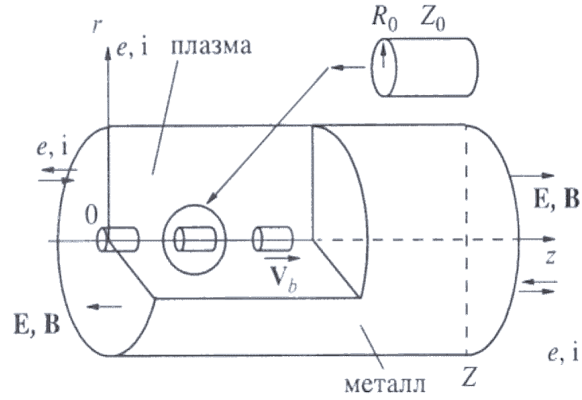


Рис. 4.1. Схема моделируемой области

Таблица 4.1

Параметры вариантов

№ варианта	Плотность ступка, $n_b, \text{см}^{-3}$	Плотность плазмы, $n_0, \text{см}^{-3}$	Плазменная частота, $\omega_{pe}, \text{с}^{-1}$	Скин-длина, $c/\omega_{pe}, \text{см}$	Число частиц в ступке, N_b
1	$2 \cdot 10^{10}$	$4 \cdot 10^{10}$	$1,13 \cdot 10^{10}$	2,66	$6,28 \cdot 10^9$
2	$2 \cdot 10^{10}$	$4 \cdot 10^{11}$	$3,57 \cdot 10^{10}$	0,84	$6,28 \cdot 10^9$
3	$4,86 \cdot 10^{10}$	$9,72 \cdot 10^{10}$	$1,76 \cdot 10^{10}$	1,71	$1,53 \cdot 10^{10}$
4	$4,86 \cdot 10^{10}$	$8,75 \cdot 10^{11}$	$5,27 \cdot 10^{10}$	0,57	$1,53 \cdot 10^{10}$
5	$2 \cdot 10^{11}$	$1 \cdot 10^{12}$	$5,76 \cdot 10^{10}$	0,52	$6,28 \cdot 10^9$

4.3. Результаты численного моделирования

Компьютерное моделирование показало, что поперечный размер ступки, распространяющегося в плазме, изменяется в широких пределах при условии, что $R_0 < c/\omega_{pe}$ и $L_0 < c/\omega_{pe}$. В противоположность к часто используемым условиям $L_0 > c/\omega_{pe} > R_0$ или $R_0 > c/\omega_{pe} > L_0$ мы рассматриваем условия $L_0 \approx R_0 < c/\omega_{pe}$ или $L_0 \approx R_0 \approx c/\omega_{pe}$ в соответствии с обычно имеющей место в эксперименте ситуацией (см. [191, 199]).

Формирование ионного канала во времени показано на рис. 4.2, 4.3.

На рис. 4.2 приведена зависимость ионной плотности n_i от координаты r для соответствующих моментов времени (время нормируется на ω_p^{-1}).

Видно, что ионы формируют плазменный канал благодаря их поперечному движению в самосогласованных полях. Параметры канала определяются соотношением плотностей ступки и плазмы (рис. 4.2а, 4.2б) и соотношением радиального размера ступки R_0 и скин-длины (рис. 4.2а, 4.2в). Как

видно из рис. 4.2, 4.3, эффективные размеры и глубина монотонно увеличиваются во времени и вдоль направления z . Для сравнения на рис. 4.4 (расположен под рис. 4.3) дана зависимость электронной плотности от координаты z в тот же момент времени. Видно, что ее существенные осцилляции вызваны продольной волной.

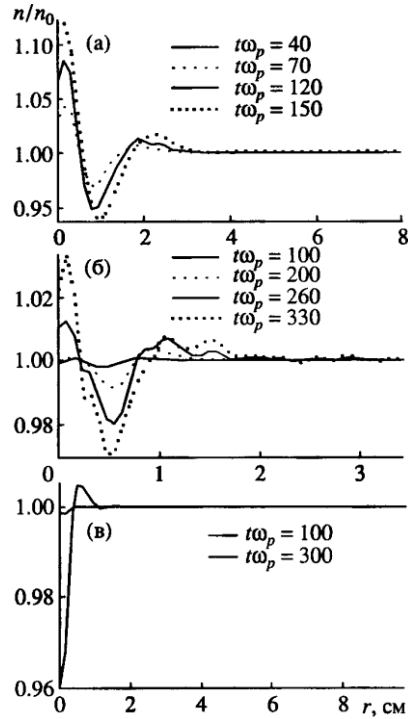


Рис. 4.2. Зависимость ионной плотности от поперечной координаты r ($z = 10$ см): а – вариант 1; б – вариант 4; в – вариант 5

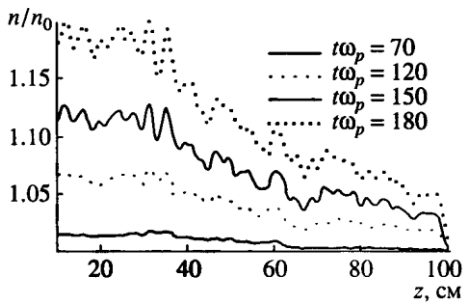


Рис. 4.3. Зависимость ионной плотности от продольной координаты z (вариант 1, $r = 0,5$ см, $t\omega_p = 180$)

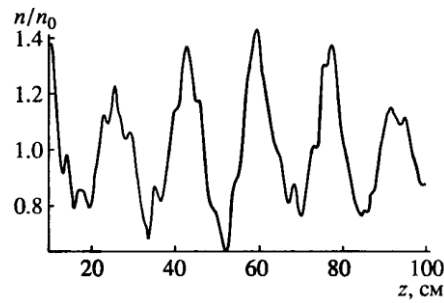


Рис. 4.4. Зависимость электронной плотности от продольной координаты z (вариант 1, $r = 0,5$ см)

Пространственные распределения продольного E_z и радиального E_r электрических полей представлены на рис. 4.5–4.8.

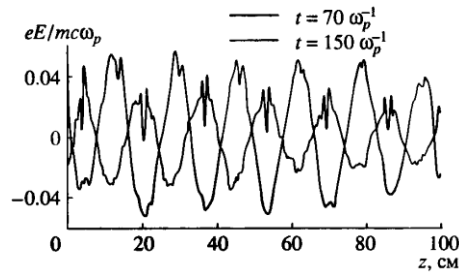


Рис. 4.5. Зависимость продольного электрического поля E_z от продольной координаты z (вариант 1, $r = R_0 = 0,5$ см)

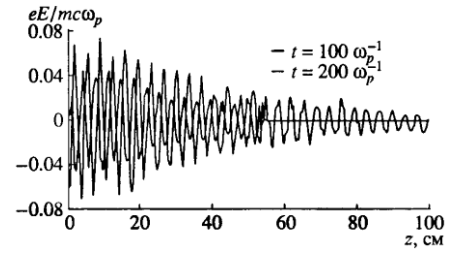


Рис. 4.6. Зависимость продольного электрического поля E_z от продольной координаты z (вариант 4, $r = R_0 = 0,5$ см)

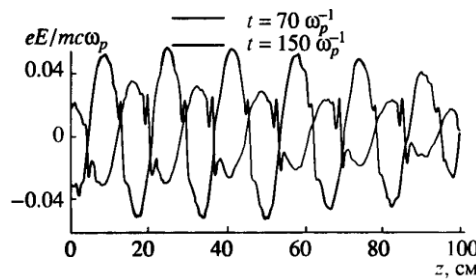


Рис. 4.7. Зависимость радиального электрического поля E_r от продольной координаты z (вариант 1, $r = R_0 = 0,5$ см)

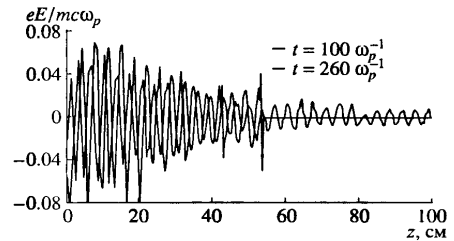


Рис. 4.8. Зависимость радиального электрического поля E_r от продольной координаты z (вариант 4, $r = R_0 = 0,5$ см)

Видно, что амплитуды E_r и E_z увеличиваются с инжекцией каждого дополнительного сгустка. Однако рост этих амплитуд не пропорционален числу инжектированных сгустков, как это было бы в случае «жестких» сгустков. Это происходит из-за поперечных осцилляций частиц сгустка в самосогласованных полях, вызванных процессами зарядовой и токовой компенсации.

Форма некоторых сгустков представлена на рис. 4.9, 4.10.

Видно, что огибающая не соответствует беннетовскому равновесному случаю. Однако расширение РЭС замедляется благодаря формированию ионного канала из-за поперечного движения ионов в самосогласованных полях. Проведенное рассмотрение позволяет понять трехмерное поведение сгустков в плазме при учете всех возможных нелинейностей, а также обеспечить наиболее оптимальные условия возбуждения кильватерных полей в плазме с помощью РЭС в режиме их динамической фокусировки.

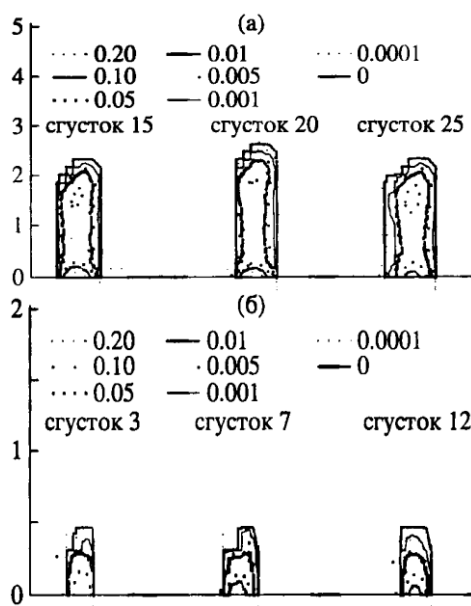


Рис. 4.9. Сечения равной плотности некоторых сгустков в момент прохождения ими сечения $z = 95$ см: а – вариант 1, – вариант 5

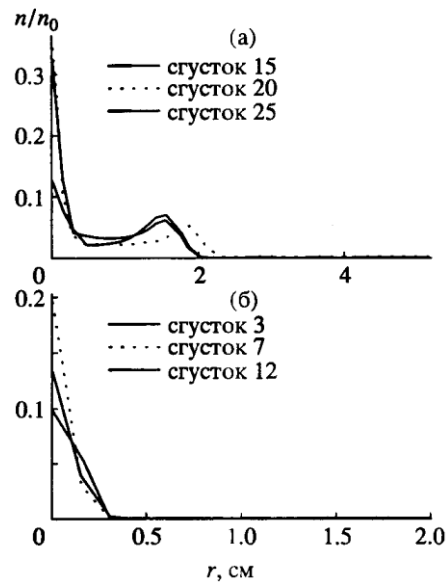


Рис. 4.10. Зависимость плотности сгустков от поперечной координаты r (а – вариант 1; б – вариант 3)

4.4.3 а к л ю ч е н и е

Проведенные численные эксперименты показали, что нелинейная динамика частиц плазменных компонент и сгустков приводит к следующим эффектам: поперечный размер сгустков изменяется в очень широких пределах; при увеличении числа сгустков электрические поля нарастают медленнее, чем в случае «жестких» сгустков; вблизи оси системы формируется ионный канал, способствующий стабилизации распространения сгустков и нарастанию возбуждаемых ими полей.

5. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С ПЛАЗМОЙ ИЛИ ГАЗАМИ МИКРОВОЛНОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ СО СТОХАСТИЧЕСКИ ПРЫГАЮЩЕЙ ФАЗОЙ

В НИЦ ХФТИ созданы нового типа плазменно-пучковые генераторы интенсивного стохастического излучения, основанные на взаимодействии электронного пучка с гибридным плазменным волноводом. В разделе обсуждаются результаты теоретических и экспериментальных исследований и численного моделирования некоторых перспективных направлений изучения механизмов взаимодействия такого излучения.

5.1. Теоретические и экспериментальные исследования падения электромагнитных волн на границу вакуум–плотная плазма

Исследовалось падение электромагнитных волн: монохроматической, стохастической с конечным временем корреляции фаз и широкополосной с той же спектральной плотностью сигнала на плазменное полупространство. Численное моделирование проводилось двумя способами с использованием: метода макрочастиц для решения уравнения Власова (PIC) или сеточной схемы расщепления (SUR). Основные результаты такого исследования изложены в работах [201]–[210], [215].

Экспериментальные исследования прохождения стохастического электромагнитного излучения, генерируемого широкополосным генератором [208], через плазму проводились на установке [209], блок–схема которой представлена на рис. 5.6. Плазма в резонаторе (2) создавалась с помощью магнетронного генератора (1) типа М 571 с регулируемой выходной мощностью $W \leq 2,5$ кВт, работающего на частоте $f = 2,475$ ГГц.

Резонатор (2) имеет длину 50 см и диаметр 50 см. Откачка и напуск рабочего газа (дейтерий) осуществлялась через патрубки (3) и (4). Магнитное поле пробочной конфигурации (распределение магнитного поля показано на рис. 5.6а) создавалось катушками (5), расположенными в торцах резонатора (2).

Сигнал от генератора регулярных колебаний типа Г4-76 (6) или широкополосного генератора микроволнового излучения со стохастически прыгающей фазой (7) через коаксиальный тройник (8) и ферритовый вентиль (9) типа Э6-32, включенный в прямом направлении, подавался через коаксиальную линию (10) на излучающий зонд (11), расположенный на оси установки. Сигнал, прошедший через резонатор (2), заполненный плазмой, принимался зондом (12) и через ферритовый вентиль (13) типа Э6-32, включенный в обратном направлении, подавался через коаксиальный тройник (14) на анализатор спектра (15) типа С4-60 или осциллограф (16) типа С7-19.

В результате проведенных экспериментальных исследований возбуждения и прохождения в плазме различной плотности регулярных и стохастических электромагнитных волн установлено:

– возбуждение резонатора регулярным сигналом менее эффективно, чем МВИСПФ (для получения одинаковой амплитуды прошедшего сигнала для МВИСПФ и регулярного требуется, чтобы амплитуда регулярного сигнала на один – два порядка была выше);

– отсутствует избирательность при возбуждении и прохождении резонатора регулярным монохроматическим сигналом относительно собственных и несобственных волн.

Результаты экспериментальных исследований находятся в удовлетворительном согласии с выводами теоретических исследований.

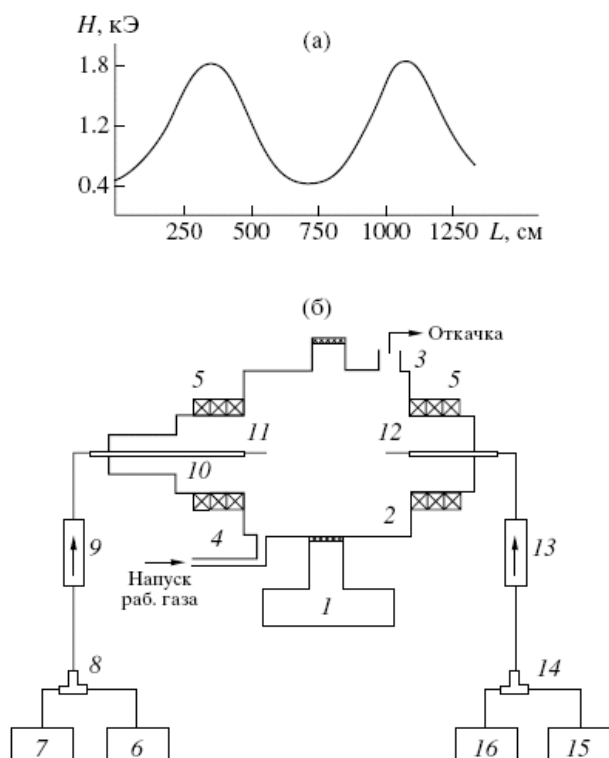


Рис. 5.1. Распределение напряженности магнитного поля вдоль установки (а) и блок-схема измерений основных параметров (б)

5.2. Высокочастотный разряд полями волн стохастически прыгающей фазой и его применение

В 1992 специалисты из Fusion System Corporation, Мериленд, США спроектировали высокоэффективный источник излучения квазисолнечного спектра – безэлектродный микроволновый газовый разряд в трубе с серой [211]. Высокомощное световое излучение лампы с серой характеризуется непрерывным (молекулярным) спектром, близким к спектру солнечного излучения, но с ослабленными уровнями ультрафиолетового и инфракрасного излучения. В октябре 1994 Fusion Lighting Inc. (FL) Company, Вашингтон продемонстрировала две эффективные излучающие системы, которые привлекли внимание экспертов-дизайнеров и перспективных потребителей к новым источникам света, введение которых было воспринято как наиболее значительный технологический прорыв на рубеже 21 века. Первые излучающие системы на основе трубки с серой, использующие микроволновое возбуждение с мощностью 3 - 4 кВт (от двух магнетронов по 1,7 кВт) в поло-

се частот 915 - 2450 МГц. Наивысшие результаты, достигнутые в 1996 г. с наилучшей световой мощностью, были: излучаемый поток 480 кЛм, выходная световая эффективность 95 лм/Вт.

Физический механизм работы серных ламп состоит в излучении фотонов в результате переходов между энергетическими состояниями испаренных молекул серы, возбужденных или ионизованных микроволновым разрядом в малом объеме, ограниченном сферической кварцевой оболочкой.

Процесс трансформации микроволновой энергии (энергия накачки) в оптическое излучение (ОИ) характеризуется последовательностью явлений. После включения магнетрона, как только амплитуда электрической компоненты микроволнового поля в резонаторе достигнет (в зоне расположения серной лампы) соответствующего потенциала зажигания, микроволновый разряд возникает в смеси буферного газа (аргона) и насыщенных паров серы, которая исходно была в твердом состоянии. На этой стадии лампа излучает скорее отдельные линии спектра, соответствующие типичным энергетическим переходам в атомах аргона и серы. При этом заметные уровни ультрафиолетового и инфракрасного представлены в спектре оптического излучения. В процессе поглощения микроволновой энергии разрядом низкого давления и ростом числа актов ионизации, концентрация зарядов в плазме растет, активность бомбардировки поверхности оболочки, покрытой осажденной серой в результате предыдущего включения - выключения и охлаждения лампы увеличивается главным образом за счет вклада наиболее мобильных носителей заряда - электронов. Как результат бомбардировки (главным образом в направлении силовых линий микроволнового электрического поля) температура оболочки быстро растет, а сера частично испаряется, растет также давление. Этот процесс проходит стадии плавления различных полиморфных мод серы (112,8°C; 119,3°C) и затем полную стадию испарения (температура кипения: $T_{boil} = 444,6^\circ\text{C}$), когда концентрация молекул серы в оболочке станет достаточно высокой. В стабильной плазменной моде (в разряде высокого давления) спектр результирующего оптического излучения имеет «молекулярный» характер, как отмечено выше, множество энергетических условий, включая вращательные и колебательные степени свободы молекул. Спектр становится непрерывным. Это свойство спектра сохраняется при различных уровнях накачки микроволновой энергии и при различных начальных вкладах серы в лампу данного размера.

Основные проблемы, относящиеся к системе накачки микроволн (см. например, [212]):

- выбор уровня мощности и формы микроволнового сигнала (непрерывный, амплитудно-моделированный);
- создание системы для «транспортировки» микроволновой энергии от источника (генератор) к нагрузке (безэлектродная лампа) и передающего устройства (зависящее от моды колебаний), топографии микроволнового поля в пространстве его взаимодействия с рабочей субстанцией лампы (в начальных условиях и в плазменной моде);

– обеспечение (поддержание) устойчивости работы микроволнового генератора на нагрузку, существенно изменяющуюся в течение развития микроволнового разряда (временной интервал от старта до достижения стационарной плазменной моды);

– предотвращение несанкционированного микроволнового излучения в окружающее пространство с частотой накачки f_ω (в случае, если только оптическое излучение является «полезным продуктом») и гармоник частоты ($2f_\omega \dots 5f_\omega \dots nf_\omega$) и так далее последующих осцилляций, соответственно, в обеспечении экологической безопасности и электромагнитной совместимости (ЭМС), с этим сопровождающая комплексная проблема – определение компромисса между световой прозрачностью и стенками микроволнового резонатора микроволновым засорением, в то время как взаимодействие микроволновых полей с плазменным факелом имеет место в резонаторе.

Выбор частоты высокочастотного поля, требующий минимальной мощности – определяющий вопрос. В порядке определения рабочей частоты микроволновых осцилляций необходимо сравнить 3 величины: диаметр оболочки D ($D \approx (1-2)$ см), длину свободного пробега l и амплитуду осцилляций электронов A . Разряд в аргоне, испаряющий электронегативный элемент серу, возможен, когда электроны будут совершать осцилляции в кварцевой оболочке, т.е. когда $A < D/2$. Захват части электронов молекулами серы может быть компенсирован только в случае интенсивной ионизации. Амплитуда осцилляций электронов в микроволновых полях

$$A = \frac{eE_0}{m\omega\sqrt{\omega^2 + \nu_c^2}}, \quad (5.1)$$

где ν_c – частота столкновений; E_0 – амплитуда электрического поля; ω – частота колебаний. Если $\nu_c < \omega$, нужное неравенство будет выполнено при $\frac{2eE_0}{m\omega^2 D} < 1$. Это означает, что граничная частота, а следовательно,

интенсивность электрического поля увеличивается, в зависимости от диаметра кварцевой оболочки, давления внутри оболочки и интенсивности высокочастотного или микроволнового полей. Обратим внимание на тот факт, что (см., например, [213]) зависимость порогового поля (поля, при котором происходит пробой газа) от давления для всех газов имеет минимум, разделяющий две ветви. На левой ветви, где порог падает с ростом давления, величина порогового поля тем больше, чем меньше размеры разрядной камеры и чем выше частота поля. На правой ветви, где порог растет с повышением давления, зависимость порогового поля от размеров и частоты становится все менее заметной и в пределе больших давлений почти совсем исчезает: все кривые сходятся к одной.

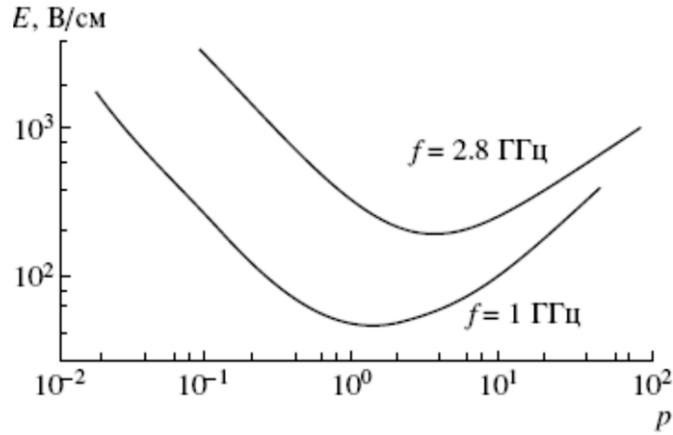


Рис. 5.2. Пороги СВЧ-пробоя аргона (из [15])

Все эти результаты качественно объясняются на основе элементарных представлений о скорости набора энергии электроном в переменном поле и при помощи критерия стационарного пробоя. Частота ионизации определяется, главным образом, временем, необходимым для набора энергии, чуть превышающей энергию ионизации газа (здесь и далее мы будем иметь в виду газ – аргон) $I_{Ar} = 15,76$ эВ. Оценивая пороги пробоя, рассмотрим вначале случай низких давлений. При низких давлениях диффузия происходит быстро и диффузионные потери электронов значительны. Для их компенсации требуется большая скорость ионизации, т.е. сильное электромагнитное поле. Но в сильных полях роль упругих потерь энергии электронов незначительна. Энергия электронов не превышает величину порядка I_{Ar} , так как столь энергичный электрон сразу же теряет свою энергию на ионизацию. Ограничена, следовательно, и упругая передача энергии атому при столкновении $(\Delta\varepsilon_{el})_{\max} \approx \left(\frac{2m}{M}\right)I_{Ar}$. Приобретение же энергии в переменном электрическом поле при столкновениях $\Delta\varepsilon_E$ пропорционально E_0^2 и в достаточно сильных полях, необходимых для компенсации существенных диффузионных потерь $\Delta\varepsilon_E \propto (\Delta\varepsilon_{el})_{\max}$. Пренебрегая потерями энергии при упругих соударениях, а также частотой упругих столкновений по сравнению с частотой электромагнитного поля ($v_c \ll \omega$), найдем, что в пределе низких давлений частота ионизации в аргоне приблизительно равна

$$v_i(E_0) = \left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_E \frac{1}{I_{Ar}} = \frac{e^2 E_0^2 v_p}{m\omega^2 I_{Ar}}, \quad (5.2)$$

где ν_p – транспортная частота столкновений. В соответствии со «стационарным» критерием пробоя $\nu_i(E_0) = \nu_D = D/\Lambda^2$ (где ν_D – частота столкновений, соответствующая диффузии электронов из области с характерным размером Λ , D – коэффициент диффузии). Отсюда среднеквадратичное пороговое поле в пределе низких давлений равно

$$E_{tr} = \left(\frac{Dm\omega^2 I_{Ar}}{e^2 \Lambda^2 \nu_p} \right)^{1/2}. \quad (5.3)$$

5.2.1. Для регулярного микроволнового излучения найденное значение поля прямо пропорционально частоте и обратно пропорционально плотности газа (давлению) и размерам разрядной области в полном соответствии с известными экспериментальными данными (см., например, [213]). Для аргона при частоте поля $f = 1$ ГГц минимальное пробойное поле $E_0 = 60$ В/см соответствует давлению около 133 Па. Необходимо отметить, что область микроволн предпочтительна с точки зрения минимизации интенсивности разрушения. Однако дальнейшее увеличение частоты нецелесообразно, потому что длина свободного пробега электрона равна $L = Af$. Действительно, $A \propto 1/f^2$, и длина пробега электрона уменьшается с частотой.

Очевидно, необходимо реализовать разряд во всем объеме оболочки. Это возможно, если глубина проникновения δ микроволнового поля в плазму сравнима с радиусом оболочки R . Глубина проникновения для проводящей плазмы есть $\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}} \geq R$, где σ – проводимость плазмы.

Определение мощности микроволнового генератора, необходимой для разряда в буферном газе и затем для разряда в плазме после испарения и ионизации серы, является важным вопросом.

Как уже было выше отмечено, для микроволнового разряда в регулярных электромагнитных полях минимальная напряженность поля достигается при равенстве частоты столкновений частоте электромагнитного поля (см., например, [213]). Так, минимальная напряженность поля для пробоя буферного газа Ar при $f \approx 3,0$ ГГц и давлении около 650 Па составляет 500 В/см. Такие интенсивности могут быть достигнуты в резонаторах с одной прозрачной для света стенкой. В рассматриваемой ситуации амплитуда электрического поля E_Q пропорциональна $\sqrt{100P(W)Q}$ (где $P(W)$ – мощность генератора в ваттах, Q – добротность резонатора), откуда получаем, что при $Q = 100$ микроволновая мощность должна быть 25 Вт. Эффективная амплитуда переменного поля E_{eff} меньше, чем E_0

$$E_{eff} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{v_c}{\sqrt{v_c^2 + \omega^2}} > E_{min}. \quad (5.4)$$

Таким образом, в случае регулярных волн необходимо использовать генератор с мощностью ≈ 100 Вт для возбуждения плазмы.

5.2.2. Мы предлагаем использовать микроволны со стохастически прыгающей фазой для микроволнового разряда в аргоне с парами серы. Это предложение имеет следующие достоинства:

- эти микроволны позволяют создавать разряд при более низких давлениях, потому что прыгающая фаза обеспечивает ограничение диффузии электронов;

- скачки фазы обеспечивают бесстолкновительный нагрев электронов без потерь энергии, связанных с упругими и неупругими соударениями;

- однородный микроволновый разряд легко получаем, так как такие микроволновые поля проникают в плазму со сверхкритической плотностью.

Разряд, начинающийся в атмосфере аргона, приводит к росту температуры кварцевой оболочки и, следовательно, к формированию пара серы и плазмы. После того люминесценция аргона сменяется люминесценцией полиморфной серы, которая имеет спектральные характеристики близкие к спектральным характеристикам солнечного света. Давление паров серы определяется количеством серы в кварцевой оболочке. Обычно достаточно иметь $\sim (2 - 5)$ мг/см³ серы в объеме оболочки.

Поддержание разряда в плазме требует существенно меньших напряженностей поля, чем пробой. Эта амплитуда электрического поля E_d и температура электронов плазмы связаны соотношениями [213]:

$$\sqrt{\frac{k_B T_e}{I_{Ar}}} \exp\left(\frac{I_{Ar}}{k_B T_e}\right) = const \cdot (pR)^2 = 1,27 \cdot 10^7 \cdot c_T^2 \cdot (pR)^2, \quad (5.5)$$

$$E_d = \frac{m}{e} \sqrt{\frac{3k_B T_e}{M} \cdot (\omega^2 + v_c^2)},$$

где R – радиус разрядного канала, M – атомная масса газа. Постоянное значение величины c_T зависит от сорта газа, так, к примеру, $c_T = 4 \cdot 10^2$ для аргона, радиус $R \propto 1$ см, т.е. при давлении около 100 Па электронная температура $T_e = 3 \cdot 10^4$ К и уменьшается, когда давление увеличивается. Мы подставим это значение T_e в выражение для E_d . Легко определить, что в состоянии (когда $v_c \propto \omega$) E_d равно

$$E_d = \frac{m\omega}{e} \sqrt{\frac{3k_B T_e}{M}} = \frac{2\pi m c^2}{e\lambda} \sqrt{\frac{3k_B T_e}{M c^2}}. \quad (5.6)$$

Молекулярная сера ($Mc^2=50$ ГэВ) имеет $E_d \sim 0,4$ В/см. Эта величина увеличивается до (1,0 - 2,0) В/см с увеличением от ν_c (когда $\nu_c < \omega$). Однако эта аргументация недостаточна, потому что T_e уменьшается, когда ν_c увеличилось. Мы хотели бы отметить, что формула (5.4) работает для упругих столкновений. Если неупругие столкновения играют существенную роль, необходимо увеличивать значение E_d приблизительно на порядок для обеспечения разряда.

Рассмотрим условия пробоя в аргоне для конкретного случая использования микроволнового излучения, получаемого с помощью генератора, описанного в [207]. Рабочая частота составляла 400 МГц, средняя частота прыжков фазы $\nu_{jp} = 2 \cdot 10^8$ с⁻¹. Полезно иметь в виду, что сечение упругих столкновений электронов с атомом аргона изменяется очень сильно (около 30 раз) при изменении энергии электрона от нуля и вплоть до энергии ионизации I_{Ar} , превышая в максимуме в несколько раз сечение ионизации, соответствующее энергии электронов около 15-20 эВ. Это позволяет нам для микроволнового излучения с прыгающей фазой работать при пониженном давлении аргона до 4 Па. В этом случае частота прыжков фазы равна максимальной частоте упругих столкновений, достигающейся при энергиях электронов, близких к энергии ионизации. Преимуществом работы в таких условиях является сведение к нулю потерь энергии в упругих столкновениях при сохранении незначительной диффузии и эффективной передачи энергии электромагнитного поля электронам, благодаря скачкам фазы. Подставляя в (5.3) в качестве ν_p эффективную частоту скачков фазы, получаем необходимую пороговую напряженность электромагнитного поля, которая не превышает в нашем случае 50 В/см, данное значение находится в хорошем согласии с проведенными предварительными экспериментами по определению порогового электрического поля для МВСПФ. Мы сделали только необходимые оценки напряженности электрического поля, которая необходима для начала разряда и поддержания разряда в оболочке с Ar-S смесью.

Расчеты и предварительные эксперименты показывают, что при частоте 450 МГц для пробоя аргона при давлении 4 Па необходимо иметь напряженность электрического поля порядка 50 кВ/см, а для возбуждения серы достаточна напряженность 25 В/см. Она легко достижима даже без использования микроволновых камер с резонаторами при запитывающей мощности несколько сотен ватт. При использовании таких камер можно существенно снизить мощность генератора. Блок – диаграмма микроволнового светового источника видимого света представлена на рис. 5.14 (из [214]).

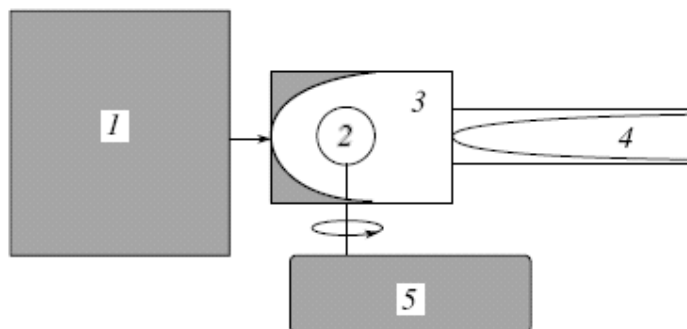


Рис. 5.3. Основные части микроволнового источника света: 1 – источник питания, мощный микроволновый генератор и согласующая система с микроволновой кюветой; 2 – кварцевая оболочка с Ar–S смесью; 3 – микроволновый резонатор со световой выходной системой; 4 – световодные системы; 5 – системы вращения и усиленного охлаждения кварцевой оболочки

В образце Fusion Lightning Inc. Company в световой системе на основе серы (ССС) оболочка расположена внутри камеры, которая удерживает микроволны, но прозрачна для видимого света.

Микроволновая частота, используемая в этой лампе, 450 ± 50 МГц, согласована для использования в промышленных, научных и медицинских приложениях. Предложенный вариант позволяет получать компактные световые источники ССС малой мощности [215], а не только киловаттного диапазона, как это имеет обычно место при применении магнетронов с частотой 2450 ± 50 МГц (традиционные источники ССС) [211, 212, 214]. Системы усиленного охлаждения и вращения оболочки обеспечивают такой тепловой режим, при котором кварцевая оболочка с Ar–S газовой смесью не разрушается. Оболочка внутри микроволновой камеры вращается со скоростью 600 оборотов в минуту.

Технологическое и конструкторское решение рассматриваемого устройства должно обеспечивать максимальный выход света из резонатора при поддержке микроволнового излучения безопасного уровня в аккомодации с установленными государственными нормами. Специалисты из компании Fusion Lightning Inc. Company предлагают изготавливать резонаторы из сетки и дополнительных сетчатых экранов. Важная часть этой системы – параболический рефлектор и призмный световод. Параболический рефлектор обеспечивает для практических целей излучение в полый призматический световод. Параболические геометрические конструкции характеризуются вертикальными оптическими осями и длиной фокуса. Оболочка вставлена в резонатор, расположенный в фокусе параболического рефлектора. Система световодов, разработанная по специальной технологии, использована для высокоэффективной передачи света потребителям. Техника позволяет использовать имитирующие световодные поверхности, которые частично отражают, а частично пропускают для распределения выходной интенсивности.

Параметры световодов следующие: материал – акрил; толщина стенки 3 мм; внешний диаметр 250 мм; длина 28 м.

Такие световые системы установлены в музее Астронавтики США и показывают результаты многократной экономии электрической мощности и улучшения уровня освещения.

5.3. З а к л ю ч е н и е

В НИЦ ХФТИ созданы нового типа плазменно-пучковые генераторы интенсивного стохастического излучения. Указаны необходимые условия для газового пробоя и высокочастотного разряда в источнике света в стохастических полях. Аномальное поведение условий пробоя, СВЧ - газового разряда и бесстолкновительного нагрева электронов связаны с прыжками фазы МВСПФ.

6. СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАЗМЕННОЙ ЭЛЕКТРОНИКИ И НОВЫХ МЕТОДОВ УСКОРЕНИЯ

Подведены предварительные итоги работ по плазменной электронике и плазменным методам ускорения заряженных частиц, проанализировано сделанное в последнее время и определены наиболее важные задачи, которые ожидают своего решения.

6.1. Н е л и н е й н а я т е о р и я

п л а з м е н н о - п у ч к о в о г о в з а и м о д е й с т в и я

Плазменная электроника и плазменные методы ускорения заряженных частиц вошли необратимым образом в физику плазмы и физику, и технику ускорителей [216 - 218]. До последнего времени при построении нелинейной и квазилинейной теории плазменно-пучкового взаимодействия (ППВ), а, следовательно, и теории плазменно-пучковых генераторов и усилителей, учитывалась только нелинейность пучка, плазма же предполагалась линейной. В самое последнее время выполнены исследования, в которых самосогласованным образом в нерелятивистском приближении учитывается влияние изменения параметров плазмы, в первую очередь ее плотности, под действием возбуждаемых при ППВ СВЧ-колебаний и волн на процессы генерации и усиления СВЧ-излучения. Показано, что в результате нелинейных эффектов в плазме (пандеромоторные продольные и поперечные силы и параметрические резонансы) происходит генерация СВЧ-колебаниями и волнами, возбуждаемыми при ППВ, ионных колебаний и волн, что сопровождается изменением плотности плазмы; плазма становится неоднородной и нестационарной, что может вызывать уменьшение интенсивности или

даже срыв СВЧ-колебаний и волн, а также существенно изменить их спектр [219, 220]. Теория, учитывающая действие пондеромоторных сил в плазме, позволяет определить процессы, ограничивающие интенсивность возбуждаемых при ППВ СВЧ-колебаний и волн или даже обуславливающие их срыв. Выводы теории находятся в согласии с экспериментами [221]. Следующим шагом должны быть исследования возможностей устранения вредных влияний пондеромоторных сил, действующих в плазме при ППВ.

Установление нелинейной связи между СВЧ и низкочастотными колебаниями и волнами в плазме, как известно, хорошо описывается в работах [222 - 224] и др. Сложность развития теории в рассматриваемом случае состоит в том, что необходимо одновременно и самосогласованно рассматривать как указанные выше процессы, так и процессы возбуждения и колебания волн при ППВ в нелинейном приближении.

В работах [225, 226] исследован вопрос о влиянии на ППВ параметрических неустойчивостей. В приближении трехволнового взаимодействия – ионно-звуковая, электромагнитная и плазменная волны – рассмотрен вопрос о влиянии периодической неоднородности плазмы на ППВ. При этом ионно-звуковая волна первоначально считается заданной. Показано, что в условиях пространственно-временного синхронизма трех волн и при ограничении амплитуды плазменной волны значениями, при которых еще не наступает захват электронов пучка, возможно также увеличение эффективности ППВ.

Из работ по плазменной электронике, выполняемых в последнее время, следует указать на успешное развитие исследований по созданию генераторов СВЧ большой мощности и большой длительности импульса, основанных на использовании плазмы. Среди этих работ в первую очередь заслуживает внимание исследование по созданию генератора СВЧ-диапазона «PASOTRON» (Plasma-Assisted Slow-Wave Oscillator) [227]. В нем уже достигнуты мощности порядка 5 МВт при длительности импульса порядка 100 нс. В создании такого высокоэффективного СВЧ генератора определяющая роль принадлежит плазме, хотя следует заметить, что большие возможности использования плазмы в электродинамических системах (волноводы, резонаторы) здесь, как можно судить по публикациям, не использованы. В частности, это относится к возможности управления дисперсионными свойствами с помощью плазмы. Вместе с тем, очень хорошо использованы другие функции плазмы в этом СВЧ генераторе. Прежде всего, плазма, создаваемая в полой катодной трубке, служит очень эффективным эмиттером электронов (плотность тока составляет 50-80 А/см²). Не менее существенным является возможность отказаться от применения в области взаимодействия постоянного магнитного поля для фокусировки электронного пучка. Вместо внешнего магнитного поля используется эффект пинчевания пучка электронов в плазме. Это несомненные и важные результаты использования плазмы в традиционных СВЧ-устройствах. Однако для более полного использования достоинств плазменной электроники необходимо было бы, чтобы и ускорение электронов пучка происходило не в ваку-

уме, а в плазме. При этом, как известно, может быть устранено ограничение на величину тока, связанное с объемным зарядом электронов в пучке.

Заметный вклад в развитие теоретических основ плазменной электроники внес проф. А. Н. Кондратенко и созданная им многочисленная научная группа в Харьковском университете. Накопленный опыт работы в ХФТИ в лаборатории ТЛ-2 под руководством академика Я. Б. Файнберга и дальнейшие исследования позволили А. Н. Кондратенко опубликовать в московском Атомиздате монографии «Плазменные волноводы» (1976) и «Поверхностные и объемные волны в ограниченной плазме» (1985), представляющие собой наиболее полное из существующих публикаций представление о характерных типах собственных колебаний волноводов. В монографии «Проникновение поля в плазму» (1979) А. Н. Кондратенко рассмотрел все виды воздействия внешних полей на плазму с резкой границей, а также опубликовал оригинальные результаты по теории проникновения НЧ поля в неоднородную плазму. Вопросы возбуждения потоками частиц колебаний плазменных волноводов, где уже был замечен вклад его учеников, обсуждались в монографии «Основы плазменной электроники» (1988), которая служила много лет базовым учебником по плазменной электронике в университетах Киева и Нижнего Новгорода. А. Н. Кондратенко и его ученики обнаружили эффект аномального отбора энергии у пучка заряженных частиц в режимах диссипативной неустойчивости [228, 229], представили методы управления спектром пучково-плазменной неустойчивости [230, 231], развили нелинейную теорию параметрической неустойчивости ленгмюровских волн в холодной плазме (см. обзор [232]), также обнаружили новые виды волн поверхностного типа на границе плазма-металл [233, 234], в неоднородной плазме [235, 236], в гиротропной плазме [237, 238], изучили дифракционные методы вывода энергии из плазменных волноводов [239, 240] и ряд других актуальных проблем плазменной электроники^{4*}.

Интересными и важными представляются появившиеся в последние годы работы, в которых предлагается использовать коллективное взаимодействие пучков заряженных частиц с плазмой для радикального совершенствования клистрона, использование клистронного метода группировки в новых плазменных методах ускорения заряженных частиц и для получения таким способом ультракоротких (менее 100 фемтосекунд) сгустков электронов, которые также могут быть использованы для создания интенсивных источников инфракрасного излучения.

В работе [241] предлагается возбуждать кильватерные электромагнитные волны в плазме с помощью интенсивного лазерного излучения, которое может быть использовано для ионизации слоя газа и создания слоя плазмы с управляемыми параметрами. Получивший импульс от кильватерного электромагнитного поля в слое плазмы, релятивистский электрон

^{4*} Дальнейшее развитие нелинейных режимов взаимодействия частиц и полей в плазме позднее было представлено в монографии ученика А. Н. Кондратенко, В. М. Куклина «Избранные главы» изд. ХНУ, выдержавшей несколько тиражей.

ный пучок (РЭП) затем движется в пространстве дрейфа и разбивается на периодическую последовательность коротких электронных сгустков. В другой работе предложен и создан мощный клистрон, в котором группировка осуществляется под воздействием кильватерной электромагнитной волны, возбуждаемой фронтом сильноточного РЭП, который движется в плазме. Благодаря модуляции электрическим полем кильватерной волны первоначально однородного по плотности РЭП он разбивается на периодическую последовательность очень коротких сгустков, которые возбуждают электромагнитное поле в традиционной структуре. Длина сгустка и частота следования сгустков изменяется путем простого изменения плотности плазмы. В этом случае по существу имеет место генерация электромагнитного излучения при ППВ с тем, однако, существенным различием, что в рассматриваемом случае отпадает непростоая задача преобразования электростатических волн плотности заряда в излучаемые электромагнитные.

Еще одна возможность использования плазмы для существенного повышения эффективности уже не в традиционных, а в современном устройстве для генерирования и усиления излучения особенно в миллиметровом, субмиллиметровом и более коротковолновом диапазоне заключается в переходе в лазерах на свободных электронах от механических виглеров, ограничивающих возможность укорачивания длины излучаемой волны, к использованию возбуждаемых в плазме косых плазменных волн [242].

6.2. Взаимодействие с заряженными частицами стохастического СВЧ излучения

Несмотря на большие успехи в развитии плазменной электроники, ряд важных вопросов до сих пор остается недостаточно или совсем неизученными. Среди них наиболее важный вопрос – это теоретическое и экспериментальное исследование взаимодействия стохастического электромагнитного излучения с веществом. Много усилий было затрачено на разработку и создание плазменно-пучковых СВЧ генераторов и усилителей. Теперь, когда их теория, пусть в первом приближении, построена, а такие источники электромагнитного излучения созданы, сделан определенный шаг в изучении процессов стохастизации при ППВ, одной из первоочередных задач является исследование взаимодействия стохастического излучения с веществом и, конечно, в частности, продолжение исследований взаимодействия стохастического излучения с заряженными частицами в плазме. В работе [184] была показана возможность эффективного нагрева плазмы стохастическим излучением при ППВ. Физический механизм такого нагрева тривиален. Как известно, при взаимодействии регулярного СВЧ поля с заряженной частицей в отсутствие парных соударений средняя (по периоду) энергия частицы не возрастает. При наличии соударений изменение средней энергии пропорционально частоте соударений. Элементарное объяснение заключается в том, что при соударениях изменяется фаза частицы в поле, в которую попадает частица после соударения, и поэтому

средняя по периоду энергия, получаемая частицей, отлична от нуля. Естественно, что-то же произойдет, если изменение фазы частицы в поле произойдет не в результате парного соударения, а случайного скачка фазы электромагнитного поля. Но электромагнитные волны со случайно изменяющейся фазой являются частным случаем стохастических электромагнитных полей – во взаимодействии с частицей они играют роль, аналогичную парным соударениям, роль частоты парных соударений играет частота скачков фазы, а приобретаемая частицей средняя по периоду энергия пропорциональна частоте скачков фазы. Этот простой пример наглядно объясняет одну из особенностей взаимодействия заряженной частицы со случайными электромагнитными полями.

Так как в основе многих процессов взаимодействия излучения с веществом лежит взаимодействие «электромагнитное поле – частица», то можно ожидать, что упомянутая выше особенность взаимодействия стохастического излучения с частицей будет иметь ряд существенных различий с процессами взаимодействия регулярного излучения (в частности – СВЧ). Можно утверждать, что исследование взаимодействия стохастических СВЧ полей с веществом приведет к существенному дополнению теории взаимодействия излучения с веществом и значительно расширит область возможных приложений этого взаимодействия. Как известно, в стохастических электромагнитных полях может эффективно осуществляться ускорение заряженных частиц, нагрев плазмы и целый ряд других полезных процессов. Напомним, что при этом происходит обмен энергией между СВЧ-стохастическими электромагнитными полями и заряженными частицами, несмотря на отсутствие парных соударений и отсутствие резонанса или синхронизма в движении частиц и распространении электромагнитных полей. Естественно, что средняя энергия, передаваемая от электромагнитного поля частицам, растет не как t (как это имеет место при резонансном взаимодействии), а пропорционально \sqrt{t} . Однако этот обмен энергией может быть весьма значительным. Поэтому взаимодействие заряженных частиц со стохастическими электромагнитными полями надо учитывать наряду с другими нелинейными эффектами, пропорциональными $\sim E^2$. Сравнивая соотношение для прироста энергии заряженной частицы при взаимодействии с регулярными СВЧ полями при наличии парных соударений с соотношением для случая взаимодействия со стохастическими электромагнитными полями в отсутствие парных соударений, следующим из квазилинейной частично феноменологической теории слабо турбулентной плазмы с учетом корреляции электромагнитных стохастических полей, замечаем, что эти соотношения подобны, в них частота парных соударений заменена на обратное время корреляции τ_{cor}^{-1} [184]^{5*}.

^{5*}В [184] нелинейность плазмы учитывается только путем введения коррелятора амплитуд Фурье-компонент стохастического электрического поля и не учитываются другие нелинейные эффекты.

Как было сказано выше, теоретически и экспериментально показано, что стохастическое СВЧ-излучение может эффективно взаимодействовать с заряженными частицами (нагрев плазмы, ускорение заряженных частиц). Поэтому естественным является вопрос об особенностях (по сравнению с регулярными электромагнитными полями) взаимодействия стохастического излучения с веществом. Перечислим несколько относительно простых теоретических и экспериментальных задач, которые желательно решить (они не отличаются чрезмерной сложностью):

1. Исследования поглощения стохастического СВЧ-излучения в плазме, металлах – обычных и сверхпроводниках, полупроводниках, диэлектриках, ферритах (в гидродинамическом и кинетическом приближениях).

2. Исследование нормального и аномального скин-эффектов в плазме, металлах, полупроводниках, ферритах.

3. Получение аналога граничных условий Леонтовича–Рытова для стохастических полей.

4. Исследование возможности получения аналогичного соотношения Крамерса–Кронига для стохастических полей.

5. Исследование параметрического резонанса в стохастических электромагнитных СВЧ-полях.

6. Получение соотношения для силы СВЧ давления в стохастических электромагнитных полях.

7. Исследование особенности генерации и усиления стохастического излучения в миллиметровом, субмиллиметровом, видимом световом, ультрафиолетовом и рентгеновском диапазонах.

8. Исследование взаимодействия стохастического излучения с плазмой твердых тел и космической плазмой.

9. Исследование возможности ускорения заряженных частиц стохастическими полями в вакууме.

10. Исследование воздействия стохастического излучения на процессы в джозефсоновых переходах.

11. Исследование «стохастического резонанса» и его применение в плазме и устройствах, основанных на эффекте Джозефсона (SQUIDы и др.)^{6*}.

Последняя задача требует некоторого разъяснения. В начале 80-х годов было предсказано и позже экспериментально подтверждено очень интересное явление, получившее название «стохастический резонанс». И хотя само название и физические механизмы, лежащие в его основе этого явления, определены кажется не совсем однозначно, дальнейшие многочисленные теоретические и экспериментальные исследования показали, что это фундаментальное явление свойственно многим

^{6*}В самое последнее время усилился интерес еще к двум задачам:

1. Исследование причин сокращения импульса в сверхмощных релятивистских СВЧ генераторах.
2. Исследование процессов, происходящих в плазменных размыкателях.

нелинейным системам (см. оригинальные статьи [243, 244], очень полезные обзоры [245, 246] и интересную статью [247], скромно названную ее автором «Методические заметки...», хотя статья явно выходит за рамки такого определения^{7*}). Из целого ряда свойств «стохастического резонанса» для приложений несомненно представляет интерес его особенность, кажущаяся на первый взгляд парадоксальной и заключающаяся в том, что при воздействии на бистабильную (в частности) систему стохастическое возмущение может привести к увеличению отношения сигнал/шум, где сигнал является регулярным, детерминированным возмущением. Таким образом, в отличие от установившейся точки зрения, что стохастическое возмущение (шум) приводит к ухудшению характеристик динамических систем, в данном случае стохастическое возмущение может существенно улучшить их характеристики. Заметим, что это не единственный случай, когда стохастическое возмущение играет полезную роль, как было упомянуто ранее, стохастическое возмущение может быть использовано для ускорения заряженных частиц (механизм Ферми), нагрева бесстолкновительной плазмы и других приложений. Например, «стохастический резонанс» может быть использован в самых современных устройствах – SQUID'ах, несмотря на значительные естественные и технические шумы.

Примыкает к «стохастическому резонансу» и усиленно исследуемое в настоящее время [248] явление синхронизации (по фазе) системы стохастических осцилляторов; исследования в этой области представляют интерес, в частности, для синхронизации многих генераторов стохастических колебаний и волн.

Второй (считая первой исследование взаимодействия стохастического излучения с веществом) большой задачей, стоящей перед плазменной электроникой, является переход к генерированию и усилению миллиметрового, субмиллиметрового и более короткого излучения – эта задача может быть решена либо путем увеличения плотности плазмы, или преобразования частоты, используя эффекты Доплера или Комптона на движущихся релятивистских электронах. Как известно, в настоящее время усиленно исследуются различные способы умножения частоты – так называемое «ускорение фотонов». Сложность перехода к плазме большой плотности состоит в росте диссипации энергии электронов пучка, плазмы и возбуждаемых электромагнитных волн из-за парных столкновений и коллективных взаимодействий.

Так, частота столкновений даже в полностью ионизированном газе $\nu_{st} \sim n_p / T_e^{3/2}$, в то время как ленгмюровская частота колебаний растет как $\omega_p \sim n_p^{1/2}$. Можно было бы уменьшить частоту соударений ν , увеличивая электронную температуру, но это путь малоэффективный. Конечно, можно исключить отрицательное действие соударений, переходя к коротким им-

^{7*} Для развития исследований воздействия стохастических возмущений на нелинейную систему важное значение имели работы А. А. Андропова, А. А. Витта, Л. С. Понтрягина (1933 г.) и Крамерса (1940 г.).

пульсам $\tau_{pul} < \nu_{st}^{-1}$, но это возможно только в случае очень коротких импульсов. Необходимо подчеркнуть, что в методах ускорения заряженных частиц в плазме кильватерными волнами плотности заряда, возбуждение таких волн уже осуществлено при плотностях газовой плазмы $\sim 10^{17} \div 10^{18} \text{ см}^{-3}$. Правда, такая плазма существовала очень короткое время.

Возбуждение волн миллиметрового и субмиллиметрового диапазона удалось осуществить при взаимодействии РЭП с плотной плазмой $\sim 10^{14} \div 10^{16} \text{ см}^{-3}$ при импульсе РЭП ~ 2 мкс.

Само собой напрашивается решение задачи укорочения длины возбуждаемой волны в плазме при переходе к твердотельной, достаточно однородной и «спокойной» плазме, плотность которой может быть очень большой – $10^{14} \div 10^{18} \text{ см}^{-3}$ для полупроводников и $10^{22} \div 10^{23} \text{ см}^{-3}$ для металлов. Начало экспериментам по возбуждению электромагнитных волн в полупроводниковой плазме, основанному на пучково-плазменном коллективном взаимодействии, было положено работой [249], в которой было использовано замечание Л. И. Мандельштама (приводимое в литературе) о том, что когда радиус канала в твердом теле меньше длины волны, то распространение электромагнитной волны будет происходить как в случае отсутствия канала. Пропуская через канал (2 мм) в полупроводнике (германий), находившимся при азотной температуре, электронный пучок удалось возбудить электромагнитную волну на частоте $3.7 \cdot 10^{10}$ Гц. Возбуждение обусловлено плазменно-пучковой диссипативной неустойчивостью (температура полупроводникового образца изменялась в пределах $250 \div 300$ К, плотность плазмы в полупроводнике изменялась от $2,3 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ до $2,6 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$).

Можно ожидать, что возросший в последнее время интерес к несколько экзотическому плазменно-лазерному методу ускорения заряженных частиц в кристаллах (где плотность плазмы изменяется в пределах $10^{22} \div 10^{23} \text{ см}^{-3}$) может привести к усилению теоретических и экспериментальных исследований по возбуждению очень коротковолнового излучения с помощью твердотельной плазмы.

Как известно, частота колебаний, возбуждаемых в плазме РЭП, в отсутствие магнитного поля не превосходит ω_p . Возникает задача о преобразовании этой частоты в частоту, значительно превосходящую ω_p . Эта задача может быть решена путем использования эффектов Дошлера, индуцированного эффекта Комптона на движущемся электронном пучке либо эффекта комбинационного рассеяния. В частности, это можно осуществить путем создания лазера на свободных электронах, заполненного плазмой, где в качестве виглера используется косая плазменная волна [242]. Серьезные перспективы для увеличения частоты волны, излучаемой в заполненных плазмой или газом системах, имеют методы, основанные на отражении излучения от движущейся плазмы или движущегося фронта ионизации [250 - 252].

Среди работ, выполненных в последние годы в области плазменной электроники, следует указать на фундаментальную работу А.А. Рухадзе и П. С. Стрелкова и на очень важные работы E. Shamiloglu et al., V. L. Granatstein et al., опубликованные в сборнике «Digest of Technical Papers of International Workshop on High-Power Microwave Generation and Pulse Shortening, Edinburg, June 10-12, 1997 (ed. F. I. Ogee et al.)».

6.3. Плазменные методы ускорения заряженных частиц

Одним из наиболее перспективных в настоящее время коллективных методов ускорения [10-12, 120, 130, 131, 253 - 255] является метод ускорения с помощью волн плотности заряда в плазме [12]. Развитию этого метода посвящено большое число исследований [11, 12, 130, 131, 253 - 255]. Среди них работа [12], в которой этот метод был предложен, и имевшая очень большое значение работа [256], в которой были предложены новые эффективные методы возбуждения плазменных волн с помощью лазерного излучения (PBWA) и (LWFA), а также рассмотрен ряд важных вопросов ускорения заряженных частиц в этом случае, и работа [257], где предполагалось плазменные волны возбуждать короткими электронными сгустками или их периодической последовательностью (PWFA). Очень существенно то, что ускорение предлагалось осуществлять кильватерными плазменными волнами. Важное значение для развития метода ускорения с помощью плазменных волн, возбуждаемых лазерным излучением, имели теоретические работы [258, 259] (см. также [260, 261]) и экспериментальные работы [262 - 265] (см. также [266]), а для метода возбуждения кильватерных плазменных волн электронными сгустками (PWFA) – работы [267, 268]. В последние годы была предложена существенная модификация метода WFA – метод SmWFA, основанный на самомодуляции лазерного импульса [269, 270] (см. также [271, 272]). Наиболее впечатляющие результаты по плазменным методам ускорения получены в работах по LWFA [273, 274]. Напряженности ускоряющих полей достигли на малых длинах $1.5 \div 20 \cdot 10^8$ В/см, а энергия ускоренных частиц на длине порядка сантиметра – $100 \div 300$ МэВ. Таким образом, метод плазменно-лазерного ускорения успешно развивается. Результаты, полученные с помощью метода ускорения кильватерными плазменными волнами, возбуждаемыми сгустками релятивистских электронов, значительно более скромные: ~ 50 кВ/см при заряде сгустка ~ 4 нанокюлона. Достигнутые в последнее время успехи в создании коротких плотных электронных сгустков позволяют надеяться, что и в методе PWFA будут достигнуты очень большие напряженности ускоряющих полей [241, 275]⁸.

⁸*Представлению теоретических и экспериментальных результатов в рассматриваемой области посвящены обзоры и статьи [276 - 280] и др. Современное состояние исследований очень хорошо изложено в работе [281] (см. также [274]).

Необходимо обсудить новые возможности дальнейшего увеличения напряженности ускоряющих полей. Напомним, что максимальная напряженность электрического поля релятивистской волны плотности заряда в плазме равна $E_{\max} = \frac{n_{\sim p}}{n_{0p}} \sqrt{4\pi e^2 n_{0p} mc^2 \gamma}$, где $n_{\sim p}$ – максимальное

значение плотности в волне пространственного заряда в плазме. Отношение $n_{\sim p}/n_{0p}$ определяется способом возбуждения волны плотности заряда. В экспериментах по лазерному способу возбуждения эта величина не превосходит 15 % (LWFA), а в экспериментах по возбуждению плазменной волны электронными сгустками она составляет порядка 3 % (PWFA). Согласно [274] для LWFA $\frac{n_{\sim p}}{n_{0p}} = \frac{a^2}{\sqrt{1+a^2}}$, где $a = \frac{eE_L \lambda_L}{2mc^2}$, E_L и λ_L –

соответственно напряженность электрического поля и длина волны лазерного излучения. Как известно, для возбуждения кильватерной плазменной волны сгустками электронов (PWFA) $\frac{n_{\sim p}}{n_{0p}} \sim \frac{n_b}{n_{0p}}$ [58], где n_b –

плотность электронов пучка. Таким образом, увеличение максимальной напряженности электрического поля плазменной волны может быть достигнуто путем увеличения напряженности электрического поля или длины волны лазерного излучения, или плотности сгустка электронов, возбуждающего плазменную волну, либо изысканием новых методов возбуждения этой волны. Сравнивая соотношения для $n_{\sim p}/n_{0p}$ в случае

LWFA и в случае PWFA, получим $\left(\frac{eE_L \lambda_L}{2mc^2}\right)^2 \approx \frac{n_b}{n_{0p}}$. Из этого соотношения

можно определить плотность электронов в сгустке n_b , которая обеспечивает возбуждение плазменной волны с той же максимальной напряженностью электрического поля, что и в плазменной волне, возбуждаемой лазерным излучением. Из этого соотношения следует, что для получения в PWFA плазменной волны с напряженностью электрического поля такой же, как в волне, возбуждаемой лазерным излучением, надо n_b/n_{0p} сделать как можно большим. Случай $n_b/n_{0p} \sim 1$ не может рассматриваться, так как использованное соотношение для E_{\max} в LWFA выведено в предположении, что $a < 1$.

Другая тривиальная возможность увеличения E_{\max} заключается в переходе к плазме большей плотности, в частности, плазме твердого тела. Как было указано в первой части обзора для укорочения длины волны, возбуждаемой в плазме, необходимо увеличивать плотность плазмы $\omega_p \approx \sqrt{n_p}$. Теперь ясно, что увеличение плотности плазмы необходимо также для увеличения максимальной напряженности электри-

ческого поля кильватерной волны плотности заряда. Таким образом, как в плазменных методах генерации и усиления, так и в плазменных методах ускорения заряженных частиц необходимо переходить к плазме большой плотности. Такой переход можно осуществить путем использования плазмы твердого тела. Такая возможность может быть осуществлена, в частности, путем использования плазмы полупроводников [249]. Но плотность плазмы в полупроводниках изменяется в пределах $n_p \sim 10^{14} \div 10^{18} \text{ см}^{-3}$, а в экспериментах по LWA была достигнута плотность газовой плазмы $\sim 10^{19} \text{ см}^{-3}$. Поэтому, естественно попытаться обратиться для создания плазменных ускорителей заряженных частиц к плазме металлов, где плотность свободных электронов составляет $10^{22} \div 10^{23} \text{ см}^{-3}$. Очень смелая, но несколько экзотическая⁹ идея осуществления LWA была предложена в работе [283, 284]. Для ее осуществления необходимо решить следующие довольно трудные задачи:

1. ввод светового излучения в металл;
2. возбуждение с помощью лазерного излучения волн плотности заряда в плазме металла;
3. ослабление эффекта многократного рассеяния пучка ускоряемых частиц на электронах, находящихся между плоскостями каналирования;
4. и, конечно, решить очень важную задачу предотвращения разрушения кристалла при вводе в него огромных мощностей лазерного излучения путем перехода к очень коротким ($\sim \omega_p^{-1}$) импульсам лазерного излучения.

По оценкам авторов [284] для получения ускоряющих полей $\sim 100 \text{ ГэВ/см}$ плотность энергии составит $3 \cdot 10^7 \text{ Дж/см}^3$.

Как было указано выше, напряженность электрического поля волны плотности заряда существенно зависит от способа ее возбуждения. Авторы [284] предлагают использовать два способа возбуждения плазменной волны лазерным излучением: способом, используемым в LWFA, и другим способом, предложенным в [285], использующим взаимодействие лазерного излучения с созданной в плазме пространственной периодической неоднородностью с помощью акустической волны или с помощью дифракционной решетки. Во втором способе используется трехволновое взаимодействие лазерной волны, ионно-акустической и плазменной ленгмюровской. Взаимодействие волн приводит к возбуждению плазменной волны с частотой ω_p и волновым числом k_p . Для этого необходимо, чтобы $\omega_L \approx \omega_p$, $\omega_s < \omega_p$, $k_L \omega_L$ было близко к нулю, а волновое число акустической волны было равно k_p . Фазовая скорость плазменной волны $v_{ph} = \omega_p / k_p$ близка к c .

⁹* Понятие экзотичности очень быстро изменяется со временем. Напомним, когда в 1956 г. были предложены коллективные методы, в частности, метод ускорения заряженных частиц с помощью волн плотности заряда в плазме, они рассматривались как еще более экзотические.

Второй способ, который собираются использовать авторы [284], сводится к возбуждению кильватерных плазменных волн с помощью короткого лазерного импульса (как это делается в методе LWFA). В этом случае необходимо, чтобы $\omega_L > \omega_p$. Так как в обоих случаях $\omega_p \approx 10^{16}$, то это приводит к необходимости создавать лазеры большой мощности в ультрафиолетовой области. Предполагается, что плотность плазмы $\sim 10^{23} \text{ см}^{-3}$ будет достигнута путем ионизации атомов твердого тела этим же лазером. Кроме того, что понадобится разработка сверхмощных лазеров в ультрафиолетовой области, надо учесть тот факт, что сильное поглощение лазерного излучения обусловит его сильное затухание. Для ответа на вопрос об осуществлении очень смелых и интересных идей, изложенных в [283, 284], надо изучить вопрос о глубине проникновения интенсивного ультрафиолетового лазерного излучения в металл с учетом его потерь на ионизацию и фотоэффект. Учитывая, что при огромных мощностях лазерного излучения даже при малой длительности твердое тело будет разрушаться, авторы предлагают осуществлять ускорение в оптических волокнах или металлических пленках малой толщины. Это может облегчить также задачу ввода лазерного излучения в кристалл. Авторы [283, 284] справедливо считают, что предварительные эксперименты могут быть проведены на полупроводниках с плотностью электронов $\sim 10^{18} \text{ см}^{-3}$. В связи с этим надо обратить внимание на очень интересные работы [286, 287], в которых предсказано и обнаружено явление аномального проникновения светового лазерного излучения в полупроводник. Эта аномалия связана, по мнению авторов [286, 287], с возбуждением поверхностных плазменных волн.

Заметим, что максимально возможная напряженность волны плотности заряда в плазме, ограниченная условием, что скорость электронов плазмы, приобретаемая в поле этой волны, равна ее фазовой скорости $v_e = v_{ph} = \sqrt{4\pi mc^2(2\gamma - 1)}$.

Второй, не менее важной идеей, заложенной в основу работ [283, 284], является использование твердотельных кристаллических тел не только для увеличения напряженности электрического поля с помощью плазменных волн, возбуждаемых лазерным излучением, но и использование кристаллических свойств твердого тела для получения пучков ускоренных частиц с большой светимостью с помощью эффекта каналирования ускоряемых частиц. Действительно, большая напряженность ускоряющих полей и сильно возрастающая энергия ускоряемых частиц могут в условиях каналирования привести к значительному уменьшению эммитанса пучка ускоренных частиц, но следует учесть тот факт, что угол каналирования равен $\psi \sim \sqrt{ev/\varepsilon_p}$, где ev – глубина потенциальной ямы (высота потенциального барьера, образованного в межплоскостной области кристалла). В случае очень больших энергий ε_p этот угол становится очень малым. Поэтому и по ряду других причин

использование возможности сильного снижения эммитанса при ускорении заряженных частиц в кристалле до очень больших энергий требует более подробного теоретического и экспериментального исследования.

Возможно, что идеи авторов [283, 284] в полном объеме и не смогут быть осуществлены в ближайшее время. Но отдельные элементы этого метода ускорения будут использованы при создании ускорителей на очень большие энергии (порядка $10^{13} \div 10^{18}$ эВ).

Другая возможность ускорения заряженных частиц в кристаллах предложена в работах [289, 290] и развивалась в последующих исследованиях. Она заключается в том, чтобы использовать аналогию с ускорителями заряженных частиц в микроволновых волноводах, периодически нагруженных металлическими или диэлектрическими дисками, и перейти к ускорению с помощью жесткого рентгеновского излучения. При этом периодическая структура кристалла играет для рентгеновского излучения такую же роль, как для микроволнового излучения волновода, периодически нагруженные дисками. Благодаря переходу к ускорению в кристаллах с помощью жесткого рентгеновского излучения и использованию эффекта Бормана [289] решается вопрос о проникновении излучения в кристалл и его распространения на относительно большие расстояния. В [289] также предлагается для уменьшения эффекта рассеяния ускоряемых заряженных частиц использовать каналирование частиц в кристалле. В [289] имеется ссылка на то, что в неопубликованной работе Хофштадтера содержатся аналогичные идеи.

Несколько слов о том, как развивались исследования вопроса об ускорении заряженных частиц в твердых телах. В [291] предлагалось использовать для ускорения продольные волны поляризации оптически активного вещества, образующиеся в результате биений двух электромагнитных волн, и указывалось на возможность использования эффекта каналирования для уменьшения расходимости пучка ускоряемых частиц, обусловленного их многократным рассеянием. В [289] предлагалось ускорять заряженные частицы в кристалле с помощью жесткого рентгеновского излучения и уменьшать расходимость пучка ускоряемых частиц с помощью каналирования, а также изучался целый ряд вопросов этого метода ускорения.

Как указывалось выше, значительный интерес представляют работы авторов [67, 68] с многообещающим названием и с возрастающей со временем основательностью. Мы выше кратко изложили результаты работ [283, 284]. Сделаем еще одно замечание по поводу этих работ. При оценке возможностей предлагаемого ими способа ускорения в твердом теле лазерным излучением авторы при определении напряженности электрического поля плазменной волны в металле исходят из соотношения, полученного при определении максимального поля нелинейной волны, распространяющейся в плазме, из решения задачи о собственных волнах. Естественно, что для оценки электрического поля в рассматриваемом случае необходимо исходить из решения для вынужденных колебаний и волн. Напряженность электрического поля волны очень чувствительна к способу возбуждения волны (см. выше). Поэтому для окон-

чательного ответа на вопрос о напряженности электрического поля плазменной волны, как нам кажется, необходимо решить задачу о возбуждении плазменной волны в рассматриваемом случае.

6.4. Ускорение заряженных частиц в вакууме^{10*}

Несмотря на большие успехи ускорения заряженных частиц в средах, в частности, в плазме, вопрос о том, исчерпаны ли возможности ускорения в вакууме, остается актуальным. Особенно в связи с созданием лазеров, мощность которых уже достигает величины порядка сотен тераватт. При этом плотность мощности в фокусе составляет 10^{19} – 10^{20} Вт/см², а напряженности электрических полей порядка 10^{12} В/см и превышают поля в атоме. Вопрос сводится к тому – можно ли с помощью этих полей ускорять заряженные частицы в вакууме до высоких энергий, когда скорость ускоряемых частиц близка к c и, следовательно, синхронная с ней фазовая скорость лазерной ускоряющей волны равна c . Для теоретического исследования этого вопроса важное значение имела работа [292]. Как теперь известно, ускорение заряженных частиц в вакууме объемными волнами или их сложными сочетаниями, при котором ускоряющие частицу силы линейны по электрическому полю, невозможно [293] из-за невозможности поддержания длительного синхронизма между движением ускоряемой частицы и ускоряющей ее электромагнитной волной (или из-за отсутствия необходимой для ускорения конфигурации электромагнитного поля). Вместе с тем ускорение заряженных частиц в вакууме силами нелинейными по электрическому полю, например, квадратичными, используя эффект вынужденного комптоновского рассеяния – эффект Капицы–Дирака, ускорение пондеромоторными силами радиационного давления, становится возможным [293]. Следует отметить, что ускорение заряженных частиц с помощью движущейся потенциальной ямы, образованной двумя встречными объемными электромагнитными волнами в гладком волноводе, было предложено в работе [294].

Существенный интерес для рассматриваемого вопроса представляет компьютерное моделирование, проведенное в работе [295]. В ней показано, что в зависимости от величины фактора нелинейности $\mu = eE_L \lambda_L / 2\pi mc^2$ ускорение либо отсутствует (при $\mu = 0,4$), либо имеет место (при $\mu = 4,0$). При этом выяснено, что в процессе ускорения основную роль играет перпендикулярная составляющая электрического поля лазерного излучения. Неясно, учитывали ли авторы излучение электрона в поле лазерной волны.

^{10*}В дальнейшем речь будет идти об ускорении в свободном вакууме, в котором либо не расположены какие-либо устройства: волноводы, зеркала, дифракционные решетки, либо расположены на значительном расстоянии от них так, что поверхностные волны не нужно учитывать.

Нам представляется, что интересны также способы ускорения в вакууме заряженных частиц с помощью светового «зайчика» [293] и устройства AXION [296].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теория и расчет линейных ускорителей. – М.: Госатомиздат, 1962. – 327 с.
2. Вальтер А.К., Гришаев И.А., Еременко Е.В. и др. Линейный ускоритель электронов на бегущей волне с энергией на выходе 2 ГэВ. // Труды Международной конференции ускорителям. – М., 1964. – С. 420-424.
3. Толоч В.Т., Болотин Л.И., Чечкин В.В. и др. Сильноточный ускоритель электронов. // Атомная энергия. – 1961. – Т. 11, № 1. – С.41-45.
4. Синельников К.Д., Зейдлиц П.М., Некрашевич А.М. и др. Линейный ускоритель протонов с энергией 20.5 МэВ. // Тр. Сессии АН УССР по мирному использованию атомной энергии. – К., 1958. – С. 55-115.
5. Bolotin L.I. et al. A linear accelerator of multicharged ions. // Proc. Int. Conf. on High-Energy Accelerators and Instrumentation. CERN, 1959. – P. 643-644.
6. Ревуцкий Е.И., Гончаренко И.И., Бомко В.А. Фокусировка пучка в основной секции линейного ускорителя многозарядных ионов ЛУМЗИ-10. // Журнал технической физики. – 1970. – Т. 40, № 5. – С. 1086-1088.
7. Бомко В.А., Ключарев А.П., Рудяк Б.И. Линейный ускоритель протонов с регулируемой энергией ускоренных частиц. // Атомная энергия. – 1971. – Т. 31, № 2. – С. 123-126.
8. Файнберг Я. Б., Хижняк Н. А. Искусственно анизотропные среды. // ЖТФ. — 1955. – Т. 25, вып. 4. – С. 711-719; Файнберг Я.Б., Хижняк Н.А. Потери энергии заряженной частицей при прохождении через слоистый диэлектрик. I. // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1957. – Т. 32, вып. 4. — С. 883-895.
9. Ya. B. Fainberg. Alternating phase focusing. // Proc. CERN Symp. on high-energy accelerator and pion phys., June 1956. Geneva: CERN. – V. 1. — P. 92-99.
10. Veksler V.I. Coherent principles of acceleration of charged particles. // Proc. CERN Symp. on high-energy accelerator and pion phys., June 1956. – Geneva: CERN. – V. 1. — P. 80-83.
11. Budker G.I. On high energy accelerators and pion physics. // Proc. CERN Symp. on high-energy accelerator and pion phys., June 1956. – Geneva: CERN. – V. 1. — P. 68-75.
12. Fainberg Ya.B. The use of plasma waveguides as accelerating structures in linear accelerators. // Proc. CERN Symp. on high-energy accelerator and pion phys., June 1956. – Geneva: CERN. – V. 1. — P. 84-90.
13. Akhiezer A.I, Fainberg Ya. B. and Liubarski G. Ya. Cerenkov radiation and the stability of beams in the waveguides of slow waves used in linear accelerators. // Proc. CERN Symp. on high-energy accelerator and pion phys., June 1956. – Geneva: CERN. – V. 1. — P. 220-230.
14. Sinel'nikov K. D., Fainberg Ya. B. and Zeidlitz P. M. Possible modification of the linear and cyclical methods of acceleration. // Proc. CERN Symp. on high-energy accelerator and pion phys., June 1956, – Geneva: CERN, – V. 1. — P. 215-217.
15. Ахиезер А. И., Файнберг Я. Б. О взаимодействии пучка заряженных частиц с электронной плазмой. // ДАН СССР. – 1949. – Т. 69, № 4. — С. 555-556.
16. Bohm D., Gross E.P. Theory of plasma oscillations. B. Excitation and damping of oscillations. // Phys. Rev. – 1949. – V. 75, #12. – P.1864-1876.
17. Ахиезер А.И., Файнберг Я.Б. О высокочастотных колебаниях электронной плазмы. // ЖЭТФ. – 1951. – Т. 21, вып. 11. — С. 1262-1269.
18. Boyd G.D., Field L.M., Gould R.W. Excitation of Plasma Oscillations and Growing Plasma Waves. // Phys. Rev. – 1958. – V. 109. – P. 1393-1394.
19. Харченко И. Ф., Файнберг Я. Б., Николаев Р. М., Корнилов Е. А., Луценко Е. А., Педенко Н. С. Взаимодействие электронного пучка с плазмой. // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1960. – Т. 38, вып. 3. — С. 685-692.
20. Kharchenko I.F., Fainberg Ya.B., Nikolaev R.M., Kornilov E.A., Lutsenko E.I., Pedenko N.S. Experimental and theoretical investigation of the interaction of an electron beam with plasma. // Proc. of the 4th Intern. Conf. on Ionization Phenomena in Gases. Uppsala, 17-21 August 1959. – Amsterdam, 1960. – V. 2. — P. 671-680.
21. Файнберг Я.Б. Взаимодействие пучков заряженных частиц с плазмой. // Атомная энергия. – 1961. – Т. 11, вып. 4. — С. 313-315.

22. Березин А.К., Файнберг Я.Б., Березина Г.П., Болотин Л.И., Ступак В.Г. О взаимодействии интенсивных электронных пучков с плазмой. // *Атомная энергия*. — 1961. — Т. 11, вып. 6. — С. 493-497.
23. Харченко И.Ф., Файнберг Я.Б., Николаев Р.М., Корнилов Е.А., Луценко Е.И., Педенко Н.С. Взаимодействие пучка электронов с плазмой в магнитном поле. // *Журнал технической физики*. — 1961. — Т. 31, вып. 7. — С. 761-765.
24. Файнберг Я.Б., Харченко И.Ф., Николаев Р.М. и др. Инжекция частиц в плазму. // *Тр. 2-й Междунар. конф. ООН по применению атомной энергии в мирных целях: т. 8.* — М., 1958. — С. 2211-2221.
25. Харченко И.Ф., Файнберг Я.Б., Николаев Р.М. и др. Взаимодействие пучка электронов с плазмой в магнитном поле. // *Доклад 230/A на Международной конференции по физике плазмы*. — Зальцбург, 1961.
26. Файнберг Я.Б., Курилко В.И., Шапиро В.Д.К вопросу о характере неустойчивостей при взаимодействии пучков заряженных частиц с плазмой. // *ЖТФ*. — 1961. — 31, вып. 6. — С. 633-639.
27. Открытие № 112 (СССР). Явление турбулентного нагрева и аномального сопротивления плазмы. / М. В. Бабыкин, Е. Д. Волков, П. П. Гаврин, Б. А. Демидов, Е. К. Завойский, Л. И. Рудаков, В. А. Скорюшин, В. А. Супруненко, Е. А. Сухомлин, Я. Б. Файнберг, С. Д. Фанченко // *Б. И.* — 1972. — № 32.
28. Супруненко В.А., Файнберг Я.Б., Толок В.Т., Сухомлин Е.А., Рева Н.И., Бурченко П.Я., Руднев Н.И., Волков Е.Д. Исследование электромагнитного излучения из плазмы прямолинейного сильноточного разряда. // *Атомная энергия*. — 1963. — 14, вып. 4. — С. 349-352.
29. Березин А.К., Березина Г.П., Болотин Л.И., Файнберг Я.Б. О взаимодействии импульсных сильноточных пучков с плазмой в магнитном поле. // *Атомная энергия*. — 1963. — 14, вып. 3. — С. 249-256.
30. Харченко И.Ф., Файнберг Я.Б., Николаев Р.М., Корнилов Е.А., Луценко Е.И., Педенко Н.С. Взаимодействие пучка электронов с плазмой в магнитном поле. // *Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза*. — К., 1963. — Вып. 3. — С. 118-125.
31. Файнберг Я.Б. Взаимодействие пучков заряженных частиц с плазмой. // *Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза*. — К., 1963. — Вып. 3. — С. 88-118.
32. Березин А.К., Березина Г.П., Болотин Л.И., Ляпкало Ю.М., Файнберг Я.Б. О взаимодействии импульсных сильноточных электронных пучков с плазмой в магнитном поле. // *Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза*. — К., 1963. — Вып. 3. — С. 125-138.
33. Файнберг Я.Б. Ускорение заряженных частиц с помощью света. // *Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза*. — К., 1963. — Вып. 3. — С. 300-317.
34. Харченко И.Ф., Файнберг Я.Б., Корнилов Е.А., Педенко Н.С. Возбуждение колебаний электронным пучком в плазме. // *ЖТФ*. — 1964. — Т. 34, вып. 6. — С. 1031-1036.
35. Файнберг Я.Б., Шапиро В.Д. Квазилинейная теория возбуждения колебаний при инжекции электронного пучка в плазменное полупространство. // *ЖЭТФ*. — 1964. — Т. 47, вып. 4 (10). — С. 1389-1404.
36. Березин А.К., Березина Г.П., Болотин Л.И., Горбатенко М.Ф., Егоров А.М., Загороднов О.Г., Корнилов Е.А., Курилко В.И., Луценко Е.И., Ляпкало Ю.М., Педенко Н.С., Файнберг Я.Б., Харченко И.Ф., Шапиро В.Д., Шевченко В.И. Ускорение заряженных частиц с помощью продольных волн в плазме и в плазменных волноводах. // *Тр. междунар. конф. по ускорителям*. Дубна, 21-27 авг. 1963. — М.: ОИЯИ, 1964. — С. 1023-1029.
37. Файнберг Я.Б., Шапиро В.Д. Взаимодействие модулированного потока с плазмой. // *Атомная энергия*. — 1965. — 19, вып. 4. — С. 336-342.
38. Березин А.К., Березина Г.П., Болотин Л.И., Ляпкало Ю.М., Файнберг Я.Б. Взаимодействие модулированных сильноточных электронных импульсных пучков с плазмой, находящейся в продольном магнитном поле. // *Атомная энергия*. — 1964. — 18, вып. 4. — С. 315-322.
39. Березин А.К., Файнберг Я.Б., Болотин Л.И., Березина Г.П. О высокочастотных колебаниях, возбуждаемых при взаимодействии электронного пучка с плазмой. // *Атомная энергия*. — 1964. — 18, вып. 1. — С. 5-14.
40. Березин А.К., Файнберг Я.Б., Болотин Л.И., Березина Г.П. Определение полной энергии, теряемой электронным пучком при его взаимодействии с плазмой. // *Атомная энергия*. — 1964. — 18, вып. 3. — С. 271-273.
41. Березин А.К., Ковпик О.Ф., Файнберг Я.Б., Болотин Л.И., Харченко И.Ф. Временные характеристики высокочастотных колебаний при развитии неустойчивости в системе плазма-пучок. // *ЖТФ*. — 1965. — Т. 35, вып. 8. — С. 1378-1384.
42. Корнилов Е.А., Ковпик О.Ф., Файнберг Я.Б., Харченко И.Ф. Механизм образования плазмы при развитии пучковой неустойчивости. // *ЖТФ*. — 1965. — Т. 35, вып. 8. — С. 1372-1377.
43. Басс Ф.Г., Файнберг Я.Б., Шапиро В.Д. Квазилинейная теория слаботурбулентной плазмы с учетом корреляции электрических полей. // *ЖЭТФ*. — 1965. — Т. 49, вып. 1. — С. 329-334.

44. Березин А.К., Березина Г.П., Болотин Л.И., Ляпкало Ю.М., Файнберг Я.Б. Взаимодействие модулированных сильнотоочных электронных пучков с плазмой, находящейся в продольном магнитном поле. // Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза: Докл. 4-й конф. по физике плазмы и проблемам управляемого термоядерного синтеза. Киев, май 1963. — К., 1965. — Вып. 4. — С. 129-143.
45. Березин А.К., Ковпик О.Ф., Файнберг Я.Б., Болотин Л.И., Харченко И.Ф. Временные характеристики высокочастотных колебаний при развитии неустойчивости в системе плазма-пучок. // Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза: Докл. 4-й конф. по физике плазмы и проблемам управляемого термоядерного синтеза. Киев, май 1963. — К., 1965. — Вып. 4. — С. 36-43.
46. Корнилов Е.А., Ковпик О.Ф., Файнберг Я.Б., Харченко И.Ф. Исследование энергии частиц и условия возбуждения низкочастотных колебаний в плазме, образованной за счет развития неустойчивости в системе плазма-пучок. // Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза: Докл. 4-й конф. по физике плазмы и проблемам управляемого термоядерного синтеза. Киев, май 1963. — К., 1965. — Вып. 4. — С. 24-35.
47. Файнберг Я.Б., Шапиро В.Д. К нелинейной теории взаимодействия релятивистского пучка с плазмой. // Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза: Докл. 4-й конф. по физике плазмы и проблемам управляемого термоядерного синтеза. Киев, май 1963. — К., 1965. — Вып. 4. — С. 92-103.
48. Березин А.К., Файнберг Я.Б., Болотин Л.И., Березина Г.П. О высокочастотных колебаниях, возбуждаемых при взаимодействии электронного пучка с плазмой. // Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза: Докл. 4-й конф. по физике плазмы и проблемам управляемого термоядерного синтеза. Киев, май 1963. — К., 1965. — Вып. 4. — С. 7-23.
49. Корнилов Е.А., Ковпик О.Ф., Файнберг Я.Б., Харченко И.Ф. Характеристики плазмы, образованной электронным пучком при развитии неустойчивости. // Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза: Докл. 4-й конф. по физике плазмы и проблемам управляемого термоядерного синтеза. Киев, май 1963. — К., 1965. — Вып. 4. — С. 145-151.
50. Файнберг Я.Б., Шапиро В.Д. О стабилизации низкочастотных неустойчивостей плазмы. // Письма в ЖЭТФ. — 1966. — Т. 4, вып. 1. — С. 32-36.
51. Корнилов Е.А., Файнберг Я.Б., Болотин Л.И., Ковпик О.Ф. Подавление низкочастотных колебаний при пучковой неустойчивости с помощью предварительной модуляции электронного пучка. // Письма в ЖЭТФ. — 1966. — Т. 3, вып. 9. — С. 354-357.
52. Корнилов Е.А., Файнберг Я.Б., Ковпик О.Ф. Пространственная и временная корреляция электрических полей в слаботурбулентной плазме. // Письма в ЖЭТФ. — 1966. — Т. 4, вып. 4. — С. 147-152.
53. Березин А.К., Файнберг Я.Б., Болотин Л.И., Березина Г.П., Безъязычный И.А., Ляпкало Ю.М., Лифшиц Е. В. Коллективное взаимодействие модулированных и немодулированных электронных пучков с плазмой. // Plasma physics and controlled nuclear fusion research. Proc. of a conf. on plasma physics and contr. nuclear fus. res. Culham, 6-10 Sept. 1965. — Vienna, 1966. — Vol. 1. — P. 512-535.
54. Безъязычный И.А., Березин А.К., Буц В. А., Курилко В.И., Файнберг Я.Б. Возбуждение интенсивных ВЧ-колебаний в плазменно-пучковом разряде. // Атомная энергия. — 1969. — 26, вып. 3. — С. 256-259.
55. Ткач Ю.В., Файнберг Я.Б., Болотин Л.И., Бессараб Я.Я., Гадецкий Н.П., Магда И.И., Богданович А.В., Черненко Ю.Н. Генерация когерентного излучения оптического диапазона в плазменно-пучковом разряде. // УФЖ. — 1969. — 14, № 9. — С. 1470-1475.
56. Березин А.К., Файнберг Я.Б., Болотин Л.И., Березина Г.П., Безъязычный И.А., Курилко В.И., Шапиро В.Д., Зейдлиц В.П., Улшмид И. Об управлении пучковыми неустойчивостями. // Plasma Physics and controlled nuclear fusion research: Proc. of 3th Internal Conf. on Plasma phys. and control, nucl. fusion research. Novosibirsk, 1-7 Aug. 1968. — Vienna, 1969. — Vol. 2. — P. 723-732.
57. Berezin A.K., Fainberg Ya.B., Bolotin L.I., Zeidlitz V.P., Berezina G.P., Bezzyazychny I.A., Kurilko V.I., Shapiro V.D., Ullschmied I. Control of beam instabilities. // Nuclear Fusion. — 1969. — Special suppl. — P. 251-255.
58. Krivulja S.S., Berezin A.K., Fainberg Ya.B., Bolotin L.I., Zemljansky N.M. Experimental investigation of the oscillations in the powerful electron beam. // Proc. 9th Intern. conf. on phenomena in ionized gases. Bucharest, Sept. 1-6, 1969. — Bucharest, 1969. — P. 577-586.
59. Файнберг Я.Б., Хижняк Н.А. Потери энергии заряженной частицей при прохождении через слоистый диэлектрик. I. // ЖЭТФ. — 1957. — Т. 32, вып. 4. — С. 883-895.
60. Корнилов Е.А., Некрашевич С.А., Файнберг Я.Б., Шоховцов Н.А. Исследование резистивной неустойчивости, возбуждаемой электронным пучком в твердотельной плазме. // Письма в ЖЭТФ. — 1970. — Т. 11, вып. 6. — С. 284-287.

61. Файнберг Я.Б., Шапиро В.Д., Шевченко В.И. К нелинейной теории взаимодействия с плазмой «монохроматического» пучка релятивистских электронов. // ЖЭТФ. — 1969. — Т. 57, вып. 3(9). — С. 966-977.
62. Файнберг Я.Б., Шапиро В.Д., Шевченко В.И. Нелинейные волны в релятивистском электронном пучке. // Письма в ЖЭТФ. — 1970. — Т. 11, вып. 8. — С. 410-413.
63. Файнберг Я.Б., Шапиро В.Д., Шевченко В.И. Нелинейные волны в некомпенсированных электронных пучках. // ЖЭТФ. — 1971. — Т. 61, вып. 1(7). — С. 198-207.
64. Березин А.К., Файнберг Я.Б., Болотин Л.И., Егоров А.М., Киселев В.А., Курилко В.И., Толстолужский А.П. Исследование взаимодействия модулированных электронных релятивистских пучков с плазмой. — Харьков, 1971. — 14 с. — (Препр. / АНУССР. ХФТИ; ХФТИ 71-12).
65. Березин А.К., Березина Г.П., Ерохин Н.С., Моисеев С.С., Файнберг Я.Б. Влияние продольного градиента плотности на трансформацию и излучение поперечных волн из плазменно-пучкового разряда. // Письма в ЖЭТФ. — 1971. — Т.14, вып. 3. — С. 149-152.
66. Березин А.К., Файнберг Я.Б., Болотин Л.И., Егоров А.М., Киселев В.А. Экспериментальное исследование взаимодействия модулированных релятивистских пучков плазмой. // Письма в ЖЭТФ. — 1971. — Т. 13, вып. 9. — С. 498-503.
67. Ерохин Н.С., Курилко В.И., Левин М.Б., Любарский М.Г., Мациборко Н.Г., Онищенко И.Н., Толстолужский А.П., Файнберг Я.Б., Шапиро В.Д., Шевченко В.И. Нелинейная теория взаимодействия релятивистских и нерелятивистских пучков с плазмой. Нелинейная теория трансформации волн. // Plasma phys. and controlled nucl. fusion research: Proc. 4th Internat. Conf. on plasma phys. and controlled nuclear fusion research. Madison, USA, 17-23 June 1971. — Vienna, 1971. — Vol. 2. — P. 195-219.
68. Бакай А.С., Березин А.К., Березина Г.П., Болотин Л.И., Егоров А.М., Ерохин Н.С., Зейдлиц В.П., Иванов Б.И., Измайлов А.Н., Кившик А.Ф., Киселев В.А., Ковпик О.Ф., Корнилов Е.А., Коляда Ю.Е., Криворучко С.М., Курилко В.И., Луценко Е.И., Педенко Н.С., Митин Л.А., Моисеев С.С., Толстолужский А.П., Файнберг Я.Б., Шапиро В.Д., Шевченко В.И. Экспериментальные исследования нелинейных эффектов при взаимодействии нерелятивистских и релятивистских пучков с плазмой. // Plasma phys. and controlled nucl. fusion research: Proc. 4th Internat. Conf. on plasma phys. and controlled nuclear fusion research. Madison, USA, 17-23 June 1971. — Vienna, 1971. — Vol. 2. — P. 113-139.
69. Курилко В.И., Толстолужский А.П., Файнберг Я.Б. Нелинейная теория возбуждения регулярных колебаний релятивистским электронным пучком. // Атом. энергия. — 1972. — Т.32, вып. 2. — С. 137-142.
70. Курилко В.И., Толстолужский А.П., Файнберг Я.Б. Черенковское возбуждение продольных волн в нелинейной плазме. // ВАНТ. Сер. Физика высоких энергий. — 1972. — Вып. 1(1). — С. 92-94.
71. Мациборко Н.Г., Онищенко И.Н., Файнберг Я.Б., Шапиро В.Д., Шевченко В.И. Взаимодействие конечных возмущений в системе плазма-пучок. // ЖТФ. — 1972. — Т.42, вып. 3. — С. 522-525.
72. Березин А.К., Файнберг Я.Б., Болотин Л.И., Егоров А.М., Киселев В.А., Буц В.А., Курилко В.И., Толстолужский А.П. Взаимодействие модулированного релятивистского пучка с плазмой. // ЖЭТФ. — 1972. — Т. 63, вып. 3. — С. 861-873.
73. Березина Г.П., Файнберг Я.Б., Березин А.К., Зейдлиц В.П. Взаимодействие электронного пучка, модулированного низкочастотными колебаниями, с плазмой. // ЖЭТФ. — 1972. — Т.62, вып. 6. — С. 2115-2120.
74. Ткач Ю.В., Файнберг Я.Б., Болотин Л.И., Бессараб Я.Я., Гадецкий Н.П., Магда И.И., Сидельникова А.В. Лазер на плазменно-пучковом разряде. // ЖЭТФ. — 1972. — Т.62, вып. 5. — С. 1702-1716.
75. Мациборко Н.Г., Онищенко И.Н., Файнберг Я.Б., Шапиро В.Д., Шевченко В.И. О возникновении турбулентности при взаимодействии «моноэнергетического» пучка с плазмой. // ЖЭТФ. — 1972. — Т. 63, вып. 3(9). — С. 874-885.
76. Ткач Ю.В., Файнберг Я.Б., Магда И.И., Шапиро В.Д., Шевченко В.И., Зыков А.И., Лемберг Е.А., Мондрус И.Н., Гадецкий Н.П. Коллективные процессы при прохождении сильноточных релятивистских пучков через газ и плазму. // Письма в ЖЭТФ. — 1972. — Т.16, вып. 7. — С. 368-371.
77. Ковпик О.Ф., Корнилов Е.А., Криворучко С.М., Моисеев С.С., Файнберг Я.Б. О влиянии различных типов колебаний на нагрев ионов в плазменно-пучковых разрядах. // Письма в ЖЭТФ. — 1972. — Т. 15, вып. 9. — С. 501-504. — Библиогр.: 9 назв.
78. Луценко Е.И., Файнберг Я.Б., Васильчук В.А., Шепелев Н.П. Взаимодействие интенсивного пучка электронов с неоднородной и однородной плазмой. // Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза. — 1972. — Вып. 3. — С. 5-15. — Библиогр.: 14 назв.

79. Bakai A.S., Berezin A.K., Berezina G.P., Bolotin L.I., Egorov A.M., Erokhin N.S., Zeidlits V.P., Ivanov B.I., Kivshik A.F., Kiselev V.A., Kovpik O.F., Kornilov E.A., Kolyada Yu.E., Krivoruchko S.M., Kurilko V.I., Lutsenko E.I., Pedenko N.S., Mitin L.A., Moiseev S.S., Tolstoluzhsky A.P., Fainberg Ya.B., Shapiro V.D., Shevchenko V.I. Experimental research on nonlinear effects in the interaction of nonrelativistic and relativistic beams with a plasma. // *Nuclear Fusion*. — 1972. — Suppl. — P. 113-126.
80. Erokhin N.S., Kurilko V.I., Levin M.B., Lyubarsky M.G., Matsiborko N.G., Moiseev S.S., Onishchenko I.N., Tolstoluzhsky A.P., Fainberg Ya.B., Shapiro V.D., Shevchenko V.I. Nonlinear theory of the interaction of relativistic and nonrelativistic beams with a plasma. // *Nuclear Fusion*. — 1972. — Suppl. — P. 135-146.
81. Криворучко С.М., Файнберг Я.Б., Шапиро В.Д., Шевченко В.И. О затухании и усилении ленгмюровского солитона. // *Письма в ЖЭТФ*. — 1973. — Т.17, вып. 7. — С. 344-348.
82. Ткач Ю.В., Файнберг Я.Б., Магда И.И., Лемберг Е.А., Гадецкий Н.П. Индуцированное излучение, обусловленное взаимодействием сильноточного релятивистского пучка с плазмой. // *УФЖ*. — 1973. — Т. 18, № 1. — С. 44-46.
83. Berezin A.K., Berezina G.P., Matsiborko N.G., Fainberg Ya.B., Shapiro V.D., Shevchenko V.I. Interaction of a modulated electron beam with an inhomogeneous plasma. // *Nucl. Fusion*. — 1973. — V.3, N 6. — P. 925-927.
84. Fainberg Ya.B., Shapiro V.D. Collective interaction of relativistic beams with a plasma. // *Proc. 6th Europ. conf. on controlled fusion and plasma physics. Moscow, USSR, July 30-Aug. 4, 1973*. — Moscow, 1973. — Vol. 2: Invited papers and supplementary papers. — P. 159-183.
85. Курилко В.И., Толстолужский А.П., Файнберг Я.Б. Распространение и возбуждение регулярных нелинейных волн в анизотропном плазменном волноводе. // *ЖТФ*. — 1974. — Т.44, вып. 5. — С. 985-994.
86. Землянский Н.М., Березин А.К., Файнберг Я.Б., Болотин Л.И., Кривуля С.С. Экспериментальное изучение взаимодействия трубчатого электронного пучка с плазмой. // *ЖТФ*. — 1974. — Т. 44, вып. 12. — С. 2500-2503.
87. Криворучко С.М., Файнберг Я.Б., Шапиро В.Д., Шевченко В.И. Уединенные волны плотности заряда в магнитоактивной плазме. // *ЖЭТФ*. — 1974. — Т. 67, вып. 6(12). — С. 2092-2103.
88. Коляда Ю.Е., Корнилов Е.А., Файнберг Я.Б., Кияшко В.А. Влияние поперечной составляющей скорости сильноточного высокоэнергетичного электронного пучка на его взаимодействие с плазмой в магнитном поле пробочной конфигурации. // *Письма в ЖЭТФ*. — 1974. — Т.20, вып. 3. — С. 195-198.
89. Киселев В.А., Файнберг Я.Б., Березин А.К. О коллективном взаимодействии релятивистского электронного пучка с плотной плазмой. // *Письма в ЖЭТФ*. — 1974. — Т.20, вып. 9. — С. 603-606.
90. Киселев В.А., Файнберг Я.Б., Березин А.К. Локализация рентгеновского излучения, возникающего при взаимодействии релятивистского пучка с плотной плазмой. // *ЖТФ*. — 1975. — Т.45, вып. 8. — С. 405-408.
91. Ткач Ю.В., Файнберг Я.Б., Гадецкий Н.П., Лемберг Е.А., Дятлова В.В., Ермоленко В.В., Сидельникова А.В. Микроволновое излучение при взаимодействии сильноточного релятивистского пучка микросекундной длительности с пространственно-периодическим магнитным полем. // *Письма в ЖЭТФ*. — 1975. — Т.22, вып. 3. — С. 136-139.
92. Ткач Ю.В., Файнберг Я.Б., Магда И.И., Гапоненко Н.И., Скачек Г.В., Пушкарев С.С., Гадецкий Н.П., Белуха А.А. Микроволновое излучение при взаимодействии сильноточного релятивистского пучка с замедляющей структурой, заполненной плазмой. // *Физика плазмы*. — 1975. — Т.1, вып. 1. — С. 81-87.
93. Киселев В.А., Березин А.К., Файнберг Я.Б. Взаимодействие релятивистского электронного пучка с плотной плазмой. // *ЖЭТФ*. — 1976. — Т.71, вып. 1(7). — С. 193-202.
94. Киселев В.А., Березин А.К., Файнберг Я.Б., Никольский И.К. Взаимодействие релятивистского пучка электронов с плотной плазмой. // *Письма в ЖТФ*. — 1976. — Т.2, вып. 2. — С. 53-57.
95. Коляда Ю.Е., Файнберг Я.Б., Корнилов Е.А., Огнивенко В.В., Кияшко В.А. Возбуждение колебаний при взаимодействии сильноточного электронного пучка с плазмой в открытом резонаторе, расположенном в пробкотроне. // *Письма в ЖТФ*. — 1976. — Т. 2, вып. 19. — С. 886-890.
96. Курилко В.И., Файнберг Я.Б. Об одной возможности модуляции сильноточных электронных пучков. // *Письма в ЖТФ*. 1976. — Т.2, вып. 9. — С. 297-300.
97. Ткач Ю.В., Файнберг Я.Б., Гадецкий Н.П., Лемберг Е.А., Дятлова В.В., Сидельникова А.В., Бондаренко В.А. Установка с мощным релятивистским электронным пучком микросекундной длительности для получения СВЧ генерации. // *ПТЭ*. — 1976. — Т.2. — С. 129-131.
98. Коляда Ю.Е., Корнилов Е.А., Файнберг Я.Б., Огнивенко В.В., Кияшко В.А., Педенко Н.С. Генерация колебаний СВЧ-диапазона при взаимодействии мощного электронного пучка с

плазмой в магнитном поле пробочной конфигурации. // Физика плазмы. — 1976. — Т. 2, вып. 5. — С. 795-803.

99. Ткач Ю.В., Файнберг Я.Б., Магда И.И., Скачек Г.В., Пушкарев С.С., Гапоненко Н.И. Мощный лазер на азоте с накачкой релятивистским пучком. // Физика плазмы. — 1976. — Т.2, вып. 3. — С. 473-485.

100. Лебедев П.М., Онищенко И.Н., Ткач Ю.В., Файнберг Я.Б., Шевченко В.И. Теория плазменно-пучкового разряда. // Физика плазмы. — 1976. — Т.2, вып.3. — С. 407-413.

101. Коляда Ю.Е., Корнилов Е.А., Файнберг Я.Б., Кияшко В.А. Нагрев ионов при взаимодействии сильноточного электронного пучка с плазмой и захвате части его в зеркальную магнитную ловушку. // ЖТФ. — 1977. — Т.47, вып. 1. — С. 83-92.

102. Киселев В.А., Березин А.К., Файнберг Я.Б. Взаимодействие моноэнергетического релятивистского электронного пучка с плотной плазмой. // Тр. 2-го симпоз. по коллективным методам ускорения. Дубна, 29-е сент.— 2-е окт. 1976. — Дубна: ОИЯИ, 1977. — С. 121-123.

103. Блюх Ю.П., Карась В.И., Онищенко И.Н., Любарский М.Г., Файнберг Я.Б. К теории взаимодействия сильноточного релятивистского электронного пучка с замагниченным плазменным волноводом. // ДАН СССР. — 1984. — Т. 275, вып. 1, — С. 56-59.

104. Файнберг Я.Б., Ткалич В.С. Об отражении электромагнитной волны от плазмы, движущейся через диэлектрическую среду при наличии постоянного магнитного поля. // ЖТФ. — 1959. — Т. 29, вып. 4. — С. 491-497.

105. Загороднов О.Г., Файнберг Я.Б., Егоров А.М. Об отражении электромагнитных волн от плазмы, движущейся в волноводах медленных волн. // ЖЭТФ — 1960. — Т. 38, вып. 1. — С. 7-9.

106. Загороднов О.Г., Файнберг Я.Б., Егоров А.М., Болотин Л.И. Умножение частоты с помощью «схлопывания» плазмы. // ЖТФ. — 1961. — Т.31, вып. 3. — С. 297-300.

107. Загороднов О.Г., Файнберг Я.Б., Егоров А.М., Кившик А.Ф. Отражение электромагнитных волн от движущейся плазмы. Исследование волноводных свойств плазмы. // Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза. — К., 1962. — Вып. 1. — С. 9-20.

108. Мирошниченко В.И., Файнберг Я.Б. Механизм развития неустойчивости при вынужденном когерентном рассеянии электромагнитной волны на релятивистском электронном пучке (РЭП). // ДАН УССР. Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. — 1986. — № 1. — С. 44-48.

109. Балакирев В.А., Мирошниченко В.И., Файнберг Я.Б. Вынужденное рассеяние плазменной волны на релятивистском электронном пучке. // Физика плазмы. — 1986. — Т.12, вып. 8. — С. 983-991.

110. Балакирев В.А., Мирошниченко В.И., Файнберг Я.Б. Вынужденное рассеяние плазменной волны на релятивистском электронном пучке. // Проблемы современной теоретической физики. — К.: Наук. думка, 1986. — С. 37-48.

111. Березин А.К., Березина Г.П., Болотин Л.И., Буц В.А., Егоров А.М., Зейдлиц В.П., Землянский Н.М., Кившик А.Ф., Киселев В.А., Курилко В.И., Луценко Е.И., Мациборко Н.Г., Онищенко И.Н., Педенко Н.С., Толстолужский А.П., Файнберг Я.Б., Шапиро В.Д., Шевченко В.И. Теоретические и экспериментальные исследования плазменных методов ускорения. — Харьков, 1972. — 32 с. (Препр. / АН УССР. ХФТИ; ХФТИ 72-7).

112. Файнберг Я.Б., Буц В.А., Егоров А.М., Иванов Б.И., Онищенко И.Н. Исследование методов ускорения волнами плотности заряда в плазменных волноводах и пучках заряженных частиц. // Плазменная электроника: Сб. науч. тр. Физико-технический институт АН УССР. — Киев: Наукова думка, 1989. — С. 252-277.

113. Коляда Ю.Е., Корнилов Е.А., Файнберг Я.Б., Кияшко В.А. Формирование и ускорение сильноточных высокоэнергетичных ионных пучков в плазме индукционными электрическими полями. // Письма в ЖТФ. — 1976. — Т.2, вып. 20. — С. 916-918.

114. Кияшко В.А., Коляда Ю.Е., Корнилов Е.А., Файнберг Я.Б., Линейный плазменный индукционный ускоритель — источник мощных сильноточных ионных пучков. // Письма в ЖТФ. — 1977. — Т. 3, вып. 23. — С. 1257-1259.

115. Коляда Ю.Е., Корнилов Е.А., Файнберг Я.Б. Создание плотного электронного облака в магнитном поле открытой ловушки. // ЖТФ. — 1973. — Т.43, вып. 10. — С. 2170-2172.

116. Коляда Ю.Е., Корнилов Е.А., Файнберг Я.Б. Формирование и удержание плотного электронного облака в открытой магнитной ловушке. // ЖТФ. — 1975. — Т. 45, вып. 10. — С. 2099-2104.

117. Коломенский А.А., Рабинович М.С., Файнберг Я.Б. Коллективные методы ускорения частиц в плазме и сильноточных электронных пучках. // Вестн. АН СССР. — 1972. — № 4. — С. 12-19.

118. Егоров А.М., Файнберг Я.Б., Курилко В.И., Кившик А.Ф., Болотин Л.И., Бац А.Ф. Ускорение электронов в поле медленной волны плазменного волновода. // Атом. энергия. — 1973. — Т. 34, вып. 3. — С. 181-184. — Библиогр.: 9 назв.

119. Егоров А.М., Файнберг Я.Б., Курилко В.И., Толстолужский А.П., Кившик А.Ф., Болотин Л.И. Теоретическое и экспериментальное моделирование ускорения электронов полем регулярной волны плазменного волновода. — Харьков. — 1974. — 32 с. — (Препр. /АН УССР, ХФТИ; ХФТИ 74-18).
120. Fainberg Ya.B. Plasma methods of acceleration. // Particle Accelerators. — 1975. — Vol. 6. — P. 96-106. — Ref.: 26.
121. Файнберг Я.Б. Плазменная электроника и плазменные методы ускорения заряженных частиц // Физика плазмы. —1994. —Т. 20, № 7,8. —С. 613-619.
122. Березин А.К., Лифшиц Е.В., Файнберг Я.Б., Безъязычный И.А., Ляпкало Ю.М., Артамошкин А.М. Коллективное взаимодействие интенсивных импульсных пучков с плазмой: формирование и развитие пучково-плазменного разряда II. // Физика плазмы. —1995. —Т.21, №3. — С.226-240.
123. Ахнезер А.И., Файнберг Я.Б. О взаимодействии пучка заряженных частиц с электронной плазмой. // Отчет ФТИ АН УССР. —1948.
124. Kharchenko I.F., Fainberg Ya.B., Kornilov E.A. et al. Взаимодействие пучка электронов с плазмой. // Nucl. Fusion. —1962. Suppl. —Pt.3. —P.1101-1106.
125. Харченко И.Ф., Файнберг Я.Б., Корнилов Е.А. и др. Взаимодействие пучка электронов с плазмой в магнитном поле. // Докл. на II Всесоюз. семинаре по магнитной гидродинамике и динамике плазмы. Рига, июль. 1960. Сб. аннотаций. С.475; Журн. техн. физики. —1961. —Т.31. —С.761-768.
126. Березин А.К., Файнберг Я.Б., Артамошкин А.М., Безъязычный И.А., Курилко В.И., Ляпкало Ю.М., Ус В.С. Пучково-плазменный генератор стохастических колебаний в дециметровом диапазоне длин волн. // Физика плазмы. —1994. —Т.20, №9. —С.782-789.
127. Березин А.К., Файнберг Я.Б., Ляпкало Ю.М., Ус В.С., Артамошкин А.М., Безъязычный И.А. Пучково-плазменный генератор стохастических сантиметровых осцилляций. // Физика плазмы. —1994. —Т.20, №9. —С.790-793.
128. Березин А.К., Лифшиц Е.В., Файнберг Я.Б., Безъязычный И.А., Ляпкало Ю.М., Артамошкин А.М. Коллективное взаимодействие интенсивных импульсных электронных пучков с плазмой: формирование и развитие пучково-плазменного разряда. // Физика плазмы. —1995. —Т.21, №3. —С. 214-226.
129. Блиох Ю.П., Корнилов Е.А., Митин Л.А., Файнберг Я.Б. Экспериментальное исследование возбуждения электронным пучком мощных микроволновых осцилляций в плазмонной гибридной замедляющей структуре. // Физика плазмы. —1994. —Т.20, №9. —С.767-776.
130. Файнберг Я.Б. Ускорение частиц в плазме. // Атом. энергия. —1959. —Т.6. —С.431-435.
131. Файнберг Я.Б. Ускорение заряженных частиц в плазме. // УФН. —1967. —Т.93. —С.617-631.
132. Шарпак Ж. Электронная визуализация ионизирующего излучения с помощью ограниченного лавинного разряда в газах. // УФН. —1993. —т.163, вып.10. —с.57-66.
133. Березин А.К., Файнберг Я.Б., Болотин Л.И., Березина Г.П. Определение полной энергии, теряемой электронным пучком при его взаимодействии с плазмой. // Атом. энергия. —1965. —Т.18. —С.271-273.
134. Березин А.К., Березина Г.П., Болотин Л.И. и др. Взаимодействие модулированных сильноточных электронных импульсных пучков с плазмой, находящейся в продольном магнитном поле. // Атом. энергия. —1965. —Т.18, вып. 4. —С.315-322.
135. Berezin A.K., Fainberg Ya.B., Bolotin L.I. et al. Коллективное взаимодействие модулированных и немодулированных электронных пучков с плазмой. // Plasma Phys. and Controll. Nucl. Fusion Res. Vienna: IAEA. —1966. —V.1. —P.512-535.
136. Berezin A.K., Fainberg Ya.B., Bolotin L.I. et al. Об управлении пучковыми неустойчивостями. // Plasma Phys. and Controll. Nucl. Fusion Res. Vienna: IAEA. —1969. —V.2. —P.723-732.
137. Лифшиц Е.В., Березин А.К., Ляпкало Ю.М. Коллективное взаимодействие модулированных и немодулированных электронных пучков с плазмой. // Журн. техн. физики. —1966. —Т.36. —С.1087-1093.
138. Bez'yazychniy I.A., Berezin A.K., Bolotin L.I., Fainberg Ya.B. Experimental research of excitation processes in plasma of intensive regular and stochastic oscillations. // Proc. Intern. Conf. on Phenomena in Ionized Gases, 1967. —Chapter 4.3.7.7. —P.380-391.
139. Березин А.К., Файнберг Я.Б., Безъязычный И.А. Экспериментальные исследования возможности управления пучковой неустойчивостью с помощью модуляции. // Письма в ЖЭТФ. —1968. —Т.7, вып.5. —С.156-160.
140. Безъязычный И.А., Березин А.К., Буц В.А., Курилко В.И., Файнберг Я.Б. Возбуждение интенсивных ВЧ-колебаний в плазменно-пучковом разряде. // Атом. энергия. —1969. —Т.26, вып.3. —С.256-259.

141. Безъязычный И.А., Березин А.К., Буц В.А. и др. Возбуждение интенсивных высокочастотных колебаний в плазменно-пучковом разряде. // Физика плазмы и проблемы УТС. Киев: Наук. думка, 1971. –Т.1.–С.119-124.
142. Getty W.D., Smullin L.D. Beam-plasma discharge: buildup of oscillation. // J. Appl. Phys. –1963. –V.34. –P.3421-3429.
143. Alexeff I., Neidigh R.N. Observation of burnout in a steady-state plasma. // Phys. Rev. Lett. –1964. –V.13. –P.179-181.
144. Безъязычный И.А., Улшмид И., Березин А.К., Курилко В.И. Исследование высокочастотных колебаний в плазменно-пучковом разряде. // Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза. – Киев: Наук. думка, 1971. –Т.1. –С.124-129.
145. Berezin A.K., Berezina G.P., Fainberg Ya.B. et al. Interaction of a modulated electron beam with an inhomogeneous plasma. // Nucl. Fusion. –1973. –V.13. –P.925-927.
146. Попович В.П., Харченко И.Ф., Шустин Е.Г. Пучково-плазменный разряд без магнитного поля. // РЭ. –1973. –Т.18. –С.649-651.
147. Ryutov D.D. Contribution to the theory of beam heating of a plasma in an open trap. // Nucl. Fusion. –1969. –V.9. –P.297-306.
148. Cambou F., Dokoukine V., Ivchenko V.N. et al. The Zarnitza Rocket Experiment of Electron Injection. COSPAR, SPACE RESEARCH, XV. Sun Paulo, June, 1974.
149. Патон Б.Е., Назаренко О.К., Пацюра С.К. и др. Формирование пучков электронов для технологических и исследовательских работ в космосе. // Космические исследования на Украине. – Вып. 6. – Киев: Наук. думка, 1975. –С.3-7.
150. Иванов А.А. Физика химически активной плазмы. // Физика плазмы. –1975. –Т.1. –С.147-159.
151. Иванов А.А., Соболева Т.К. Неравновесная плазмохимия. – М.: Атомиздат, 1978.
152. Глазов Л.Г., Рухадзе А.А. Пробой газа низкого давления в поле сверхсильной СВЧ волны эллиптической и круговой поляризации. // Физика плазмы. –1993. –Т.19. –С.1289-1294.
153. Игнатъев А.В., Рухадзе А.А. К теории пробоя газов в сверхсильных СВЧ полях. // Плазменная электроника. Сб. научных трудов. – Киев: Наук. думка, 1989. –С.155-162.
154. Пирс Дж.Р. Теория и расчет электронных пучков. – М.: Сов. радио, 1946. –С.40.
155. Арцимович Л.А. Управляемые термоядерные реакции. – М.: Физматгиз, 1961. –С.30.
156. Гусев Е.В., Ермаков А.И., Лебедев П.М. и др. Влияние магнитного поля тока накала катода на параметры электронного пучка. // Журн. техн. физики. –1973. –Т.43. –С.109-112.
157. Голант В.Е. СВЧ-методы исследования плазмы. – М.: Наука, 1968.
158. Вайнштейн Л.А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. – М.: Сов. радио, 1966.
159. Улшмид И., Безъязычный И.А. Исследование высокочастотных колебаний в плазменно-пучковом разряде. // Отчет ХФТИ № 69-51, Харьков, 1970.
160. Лифшиц С.В., Кривуля С.С., Ус В.С. Вимірювання напруженості високочастотного поля в плазмі за допомогою ефекта Штарка I. // Укр. фіз. журн. –1963. –Т.8. –С.1328-1334.
161. von Traubenberg Rausch H., Gebauer R., and Schrodinger E. Uber das Verhalten des Starkeffekts bei Plotslichen Feldanderungen. // Zs. fur Phys. –1932. –Bd.78. –S.809-817.
162. Лифшиц С.В., Сгоров О.М., Завгороднов О.Г. Вимірювання напруженості високочастотного поля в плазмі за допомогою ефекта Штарка. // Укр. фіз. журн. –1961. –Т.6. –С.793-796.
163. Лифшиц Е.В. Эффект Штарка в высокочастотных стохастических полях в плазме. // Журн. эксперим. и теорет. физики. –1967. –Т.53. –С.943-952; канд. дис. Харьков, 1969.
164. Раутиан С.Г. Реальные спектральные приборы. // УФН. –1958. –Т.66. –С.475-517.
165. Кристаллические детекторы. Т. I, II. – М.: Сов. радио, 1960.
166. Linder E.G., Hernqvist K.G. Space-charge effects in electron beam and their reduction by positive ion trapping. // J. Appl. Phys. –1950. –V.21. – P. 1088-1097.
167. Энгель А. Ионизованные газы. М.: Физматгиз, 1959. – С.36.
168. Ахиезер А.И., Ахиезер И.А., Половин Р.В. и др. Электродинамика плазмы. – М.: Наука, 1974. – С.298.
169. Ситенко А.Г., Степанов К.Н. Осцилляции электронной плазмы в магнитном поле. // Журн. эксперим. и теорет. физики. –1957. –Т.31. –С.642-649.
170. Степанов К.Н. Кинетическая теория магнитогидродинамической волны. // Там же. –1958. –Т.34. –С.1292-1301.
171. Степанов К.Н. Затухание электромагнитных волн в плазме, помещенной в магнитное поле. // Там же. –1959. –Т.35. –С.283-292.
172. von Drawin H.W. Zur formelmasigen darstellung for ionisierungs-querschnitte gegenuber elektronenstos. // Zs. fur Phys. –1961. –Bd.164. –S.513-521.

173. Бейгман И., Вайнштейн Л. Эмпирические формулы для эффективных сечений возбуждения и ионизации. // Изв. АН СССР. Сер. физ. –1963. –Т.27. –С.1018-1021.
174. Березин А.К., Лифшиц Е.В., Файнберг Я.Б. и др. Физика плазмы. –1995. –Т.21, №3. – С.241-256.
175. Винер Н. Нелинейные задачи теории случайных процессов. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
176. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Физматгиз, 1962.
177. Ланге Ф. Корреляционная электроника. – Л.: Судпромгиз, 1963.
178. Бутслев М.М., Котельников В.С., Нестерихин Ю.Е. О люминисцентной камере. // Успехи научн. фотографии. –1964. –Т.9. –С.72-76.
179. Михайловский А.Б., Юнгвирт К. О роли конвективных эффектов при возбуждении электронных колебаний плазмы ограниченным пучком. // Журн. техн. физики. –1966. –Т.36. – С.777-790.
180. Веденов А.А., Велихов Е.П., Сагдеев Р.З. Устойчивость плазмы. // УФН. –1961. – Т.73. – С.701.
181. Шапиро В.Д. Нелинейная теория взаимодействия моноэнергетичного пучка с плазмой. //Журн. эксперим. и теорет. физики. –1963. –Т.44. –С.613-625.
182. Файнберг Я.Б., Шапиро В.Д. Взаимодействие модулированного потока с плазмой. //Атом. энергия. –1965. –Т.19. –С.336-342.
183. Griem H.A., Kynze H.I. Stark broadening of two ionized-helium lines by collective electric fields in a laboratory plasma. //Phys. Rev. Lett. –1969. –V.23. –P.1279.
184. Басс Ф.Г., Файнберг Я.Б., Шапиро В.Д. Квазилинейная теория слаботурбулентной плазмы с учетом корреляции электрических полей. //Журн. эксперим. и теорет. физики. –1965. – Т.49. –С.329-334.
185. Карась В.И., Карась И.В., Левченко В.Д., Сигов Ю.С., Файнберг Я.Б. 2,5-мерное численное моделирование формирования плазменного канала ионами при распространении последовательности релятивистских электронных сгустков в плотной и разреженной плазме. //Физика плазмы. –1997. –Т. 23, № 4. –С.311-315.
186. Файнберг Я.Б. Ускорение заряженных частиц волнами плотности заряда в плазме, возбуждаемыми лазерным излучением и релятивистскими электронными пучками. // Физика плазмы. –1987. –Т. 13, вып. 5. –С. 607-625.
187. Файнберг Я.Б. Плазменная электроника и плазменные методы ускорения заряженных частиц. // Физика плазмы. –1994. –Т. 20, вып. 7. –С. 613-622.
188. Chen P., Dawson J.M., Huff R.W., Katsouleas T. Acceleration of electrons by the interaction of a bunched electron beam with a plasma. // Phys. Rev. Lett. –1985. –V. 54. –P. 693-695.
189. Katsouleas T. Physical mechanisms in the plasma wake-field accelerator // Phys. Rev. A. –1986. –V.33. –P. 2056-2064.
190. Амагуни А.Ц., Сехпосян Э.В., Элбакян С.С. Возбуждение сильных продольных волн в плазме электронными сгустками. // Физика плазмы. –1986. –Т. 12, вып. 9. –С. 1145-1147.
191. Rosenzweig J. Nonlinear regime of PBFA. // FERMILAB Conf.90/40. FNAL. Batavia, Illinois, February 1990.
192. Rosenzweig J.B., Breizman B.N., Katsouleas T., Su J.J. Acceleration and focusing of electrons in two-dimensional nonlinear plasma wake-fields // Phys. Rev. A. –1991. –V.44. –P. 6189-6192.
193. Batishchev O., Karas' V., Levchenko V., and Sigov Yu. // Plasma Physics Reports. – 1994. –V. 20. –P.587-591.
194. Karas' V.I., Batishchev O.V., Sigov Yu.S., and Fainberg Ya.B. Studies of space-charge neutralized ion beam induction linac for inertial confinement fusion. // Particle Accelerators. –1992. – V.37-38. – P.281-288.
195. Батищев О.В., Красовицкий В.Б., Нагучев О.Ю. и др. Самофокусировка модулированного ленточного РЭП в плотной плазме. // Физика плазмы. –1993. –Т. 19, вып. 6. –С. 738-747.
196. Karas' V.I., Fainberg Ya.B., Levchenko V.D., Sigov Yu.S. 2.5-Dimensional numerical simulation of propagation of the finite sequence of relativistic electron bunches in tenuous and dense plasmas. // Proc. of the 1995 Particle Accelerator Conference and International Conference on High-Energy Accelerators. Dallas: IEEE, 1996. –V.2. –P. 1230-1232.
197. Karas' V.I., Fainberg Ya.B., Levchenko V.D., Sigov Yu.S. 2.5-Dimensional numerical simulation of propagation of the finite sequence of relativistic electron bunches in tenuous and dense plasmas. // Proc. of the XVIIth International Symposium on Discharge and Electrical Insulation in Vacuum. Berkeley: LBL, 1996. –V.1. –P. 532-535.
198. Barov N., Rosenzweig J.B. Channel forming with noncompensated positive charge. // Phys. Rev. E. –1994. –V. 44, # 5. –P. 4407-4414.
199. Айзацкий Н.И., Биллер Е.З., Борискин В.Н. и др. Новый электронный ускоритель с высокочастотной пушкой. // Физика плазмы. –1994. –Т. 20, № 7-8. –С. 671-679.

200. Litvak A.G. and Tokman M.D. Classical Plasma Analog of Electromagnetically Induced Transparency // *Phys. Rev. Lett.* –2002. –V. 88. –P. 095003.
201. Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. – М.: Наука, 1981.
202. Levchenko V.D., Sigov Yu.S. // *Dynamics of Transport in Fluids, Plasmas and Charged Beams* / ed. G. Maino and A. Provenzale. World Scientific: Singapore, 1995. –P. 121.
203. Иньков Л.В., Левченко В.Д. Оптимизация PIC метода в рамках объектно-ориентированной модели в коде SUR. Препринт 133, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 1995.
204. Karas' V.I., Levchenko V.D. Penetration of microwave with a stochastic jumping phase into overdense plasmas and electron collisionless heating by it. // *Proc of the V International Workshop "Strong Microwaves in plasmas" Nizhny Novgorod (Russia), August 1-9, 2002* /ed. by A.G. Litvak in two volumes Nizhny Novgorod: IAP of RAS, 2003. –V. 2. –P. 550; Karas' V.I., Levchenko V.D. Penetration of microwave with a stochastic jumping phase into overdense plasmas and electron collisionless heating by it. // *Problems of Atomic Science and Technology. Ser. Plasma Electronics and New Acceleration Methods.* –2003. –V. 4(3). –P. 133-136.
205. Антонов А.Н., Блиох Ю.П., Дегтярь Ю.А., Егоров А.М., Ковник О.Ф., Корнилов Е.А., Лодыгин А.В., Любарский М.Г., Митин Л.А., Мирошниченко В.А., Онищенко И.Н., Свищевский В.Г., Сотников Г.В., Файнберг Я. Б. Плазменно-пучковый генератор, основанный на взаимодействии электронного пучка с плазменно-волноведущей структурой, находящейся внутри цепочки индуктивно связанных резонаторов. // *Физика плазмы.* – 1994. – Т. 20, №9. – С. 777-781.
206. Березин А.К., Файнберг Я. Б., Артамошкин А.М., Безъязычный И.А., Курилко В.И., Ляпкало Ю.М., Ус В.С. // *Физика плазмы.* – 1994. – Т. 20, № 9. – С. 782-789.
207. Березин А.К., Файнберг Я. Б., Ляпкало Ю.М., Ус В.С., Артамошкин А.М., Безъязычный И.А. // *Физика плазмы.* – 1994. – Т. 20, № 9. – С. 790-793.
208. A. Alisov, V. Antipov, A. Artamoshkin, I. Zagrebelny, N. Zemlyansky, V. Mirny, V. Karas', Ya. Fainberg. Экспериментальное исследование прохождения микроволнового излучения со стохастически прыгающей фазой в сверхплотной плазме. // *Proc. of the International School and Conference "Plasma Physics and Controlled Fusion". Alushta (Ukraine), September 16-21, 2002. Book of abstracts.* P. 140-145.
209. Солодовченко С.И., Штань А.Ф. и др. Характеристики установки с ЭЦР-разрядом для ионноплазменной установки. // *Труды III-го Межрегионального совещания «Тонкие пленки в электронике».* – Москва – Йошкар-Ола, 1992. –С. 13-16.
210. Алисов А.Ф., Артамошкин А.М., Загребельный И. и др. Экспериментальное исследование прохождения микроволнового излучения со стохастически прыгающей фазой в сверхплотной плазме. // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Плазменная электроника и новые методы ускорения.* –2003. –Т. 4(3). –С. 69-73.
211. Dolan J.T., Ury M.G., MacLellan D.A. Microwave powered electrodeless light source. // *Proc.VI International Symposium on Science and Technology of Light Sources.* – Budapest (Hungary), 1992. –P. 301-305.
212. Kozlov A., Perevodchikov V., Umarhodzhaev R., Shlifer E. Electroless microwave discharges as sources of light and UVmission for the illumination and biomedical Applications. // *Proceedings of IV International Workshop «Microwave Discharges: Fundamentals and Applications»*, September 18-22, 2000, Zvenigorod, Russia /ed. by Yu.A. Lebedev. – М.: Yanus-K, 2001. –P. 235-244.
213. Райзер Ю.П. Основы современной физики газоразрядных процессов. – М.: Наука, 1980. –416 с.
214. Didenko A., Zverev B., Koljashkin A., Prokopenko A. Development of microwave powered electrodeless light source in MEPhI. // *Proceedings of IV International Workshop «Microwave Discharges: Fundamentals and Applications»*, September 18-22, 2000, Zvenigorod (Russia) /ed. by Yu.A. Lebedev. – М.: Yanus-K, 2001. –P. 205-214.
215. Карась В.И., Файнберг Я.Б., Алисов А.Ф., Артамошкин А.М., Бингхам Р., Гавриленко И.В., Левченко В.Д., Лонгано М., Мирный В.И., Потапенко И.Ф., Старостин А.Н. Взаимодействие с плазмой или газами микроволнового излучения со стохастически прыгающей фазой. // *Физика плазмы.* –2005. –Т.31, вып. 9. –С.810-822.
216. Файнберг Я.Б. Некоторые вопросы плазменной электроники. // *Физика плазмы.* – 1985. –Т. 11. –С. 1398-1410.
217. Файнберг Я.Б. Плазменная электроника и плазменные методы ускорения заряженных частиц. // *Физика плазмы.* –2000. –Т. 26, № 4. –С. 362-370.
218. Файнберг Я.Б., Рухадзе А.А. Плазменная электроника. // *Физическая энциклопедия.* –1992. –Т. 3. –С. 606-609.
219. Блиох Ю.П., Любарский М.Г., Подобинский В.О. Влияние нелинейности плазмы на спектр излучения в плазмонаполненной лампе беущей волны. // *Физика плазмы.* –1994. –Т. 20. – С. 265-273.

220. Bliokh Yu.P., et al. Effect of plasma nonlinearity on radiation spectrum in plasma-filled traveling-wave tubes. // Proc. of the Inter. Conference «BEAMS'98», Haifa, 7-12 June, 1998. –P. 699-702.
221. Kornilov Ye.A., et al. The spectrum broadening of excited oscillations in coaxial slowing structure when filling by plasma. // Proc. of the Inter. Conference «BEAMS'98», Haifa, 7-12 June, 1998. –P. 432-435.
222. Захаров В.Е. Коллапс ленгмюровских волн. // ЖЭТФ. –1972. –Т. 62. –С. 1745-1759.
223. Ораевский В.Н., Сагдеев Р.З. Об устойчивости установившихся продольных колебаний плазмы. // ЖТФ. –1962. –Т. 32. –С. 1291-1296.
224. Силин В.П. Параметрический резонанс в плазме. // ЖЭТФ. –1965. –Т. 48. –С. 1669-1674.
225. Karas' V.I., Balakirev V.A., et al. Accelerating wake-field enhancement of excited by long relativistic electron bunch owing to self-modulation. // Proc. of the XVIII-th Inter. Symposium on discharges and electrical insulation in vacuum, 17-21 August, 1998, Eindhoven, The Netherlands. – Vol.2. –P. 781-784.
226. Карась В.И., Балакирев В.А., Карась В.И., Корнилов Е.А., Файнберг Я.Б. Параметрическое возбуждение электромагнитного излучения электронным пучком в слоистом плазменном волноводе. // Физика плазмы. –1998. –Т. 24, вып. 8. –С. 738-744.
227. Goebel O.M., Schumacher R.W., Butler J.M., et al. Plasma-Assisted Slow-Wave Oscillator. // Proc. SPIE Intense Microwave and Particle Beams. –1996. –V. 2843. –P. 69-75.
228. Кондратенко А.Н., Куклин В.М., Ткаченко В.И. Нелинейная теория пучковой неустойчивости в столкновительной плазме. // Изв. вузов. Радиофизика. –1978. –Т. 21, № 10. –С. 1535.
229. Кондратенко А.Н., Куклин В.М., Ткаченко В.И. Об аномальном уровне потерь энергии пучка при развитии диссипативной пучковой неустойчивости. // УФЖ, –1979. –Т. 24, № 4. –С. 559.
230. Кондратенко А.Н., Круша Й. Взаимодействие колебаний и управление спектром частот при развитии пучково-плазменной неустойчивости // УФЖ. –1982. –Т. 27. – № 10. –С. 1519-1523.
231. Воробьев В.М., Гирка В.А., Кондратенко А.Н. О влиянии плазменных флуктуаций на управление пучковой неустойчивостью. // УФЖ. –1985. –Т. 30. – №5. –С. 713-715.
232. Загородний А. Г., Киричок А. В., Куклин В. М. Одномерные модели модуляционной неустойчивости интенсивных ленгмюровских колебаний в плазме на основе уравнений Захарова и Силина // УФН. –2016. –Т. 186, №7. –С. 743–762.
233. Азаренков Н.А., Кондратенко А.Н. Поверхностные волны на границе плазма-металл при учете пространственной дисперсии // УФЖ. –1984. –Т. 29. – №12. –С. 1785–1792.
234. Азаренков Н.А., Загинайлов Г.И., Кондратенко А.Н. Поверхностные волны на границе плазма-металл, распространяющиеся вдоль магнитного поля // УФЖ. –1984. –Т. 20, №11. –С. 1612–1615.
235. Воробьев В.М., Кондратенко А.Н. Граничные частоты поверхностной волны в полужограниченной плазме с произвольной неоднородностью плотности // УФЖ. –1981. –Т. 26, №4. –С. 689–692.
236. Кондратенко А.Н., Пенева Й.Х., Сархад И. Поверхностные волны в диэлектрических образованиях, находящихся в неоднородной плазме // Болг. Физ. Журн. –1984. –Т. 11. – №10. –С. 1281–1287.
237. Кондратенко А.Н., Круша Й. Поверхностные НЧ волны в ограниченной магнитоактивной неизотермической плазме // УФЖ. –1980. –Т. 25. – №5. –С. 866–868.
238. Гирка В.А., Кондратенко А.Н. Поверхностные циклотронные волны в полугограниченной гиротропной плазме // Изв. ВУЗов. Радиофизика. –1980. –Т. 23. – №5. –С. 1416–1420.
239. Загинайлов Г.И., Кондратенко А.Н., Куклин В.М. К вопросу о выводе энергии поверхностной волны из плазменного волновода // Изв. ВУЗов. Радиофизика. –1984. –Т. 27, №9. –С. 1178–1184.
240. Азаренков Н.А., Загинайлов Г.И., Кондратенко А.Н. Дифракция и возбуждение поверхностных волн, распространяющихся на границе плазма-металл // Радиотехника и электроника. –1986. –Т. 26. – №10. –С. 1889–1894.
241. Katsouleas T., Clayton C., et al. A plasma klystron for generating ultra-short electron bunches. // IEEE Transaction Plasma Science. –1996. –V. 24. –P. 443-447.
242. Балакирев В.А., Мирошниченко В.И., Файнберг Я.Б. Вынужденное рассеяние плазменной волны на релятивистском электронном пучке. // Физика плазмы. –1986. –Т. 12. –С. 983-991.
243. Hibbs A., et. al. Stochastic resonance in a superconducting loop with a Josephson junction. // J. Appl. Phys. –1995. –V. 77. –P. 2582-2590.
244. Дыкман М.И. и др. Стохастический резонанс при линейном и нелинейном отклике бистабильной системы на периодическое поле. // Письма в ЖЭТФ. –1990. –Т. 52, вып. 3. –С. 780-783.
245. Анищенко В.С. и др. Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка. // УФН. –1999. –Т. 169. –С. 7-38.
246. Bulsara A.L, Cammattoni L. Tuning in to noise // Physics Today. –March 1996. –P. 36-41.

247. Климонтович Ю.Л. Что такое стохастическая фильтрация и стохастический резонанс? // УФН. –1999. –Т. 169. –С. 39-47.
248. Rosenblum M., et al. Phase synchronization of chaotic oscillators. // Phys. Rev. Lett. – 1996. –V. 76. –P. 1804-1807.
249. Корнилов Е.А., Файнберг Я.Б. и др. Исследования резистивной неустойчивости, возбуждаемой электронным пучком в твердотельной плазме. // Письма в ЖЭТФ. –1970. –Т. 11. –С. 284-287.
250. Загороднов О.Г., Егоров А.М., Файнберг Я.Б. Об отражении электромагнитных волн от плазмы, движущейся в волноводах медленных волн. // ЖЭТФ. –1960. –Т. 38, вып. 1. –С. 7-9.
251. Семенова В. Об отражении от фронта ионизации. // Радиофизика и квантовая электроника. –1967. –Т. 10. –С. 399-408.
252. Wilks S.C., Dawson J.M., et al. Photon accelerator. // Phys. Rev. Lett. –1989. –V. 62. –P. 2600-2603.
253. Векслер В.И. Принципы ускорения заряженных частиц. // Атомная энергия. – 1956. –Т. 2. –С. 427-435.
254. Векслер В.И., Саранцев В.П. Коллективное линейное ускорение ионов. // Атомная энергия. –1968. –Т. 24. –С. 317.
255. Будкер Г.И. Релятивистский стабилизированный электронный пучок. // Атомная энергия. –1956. –Т. 5. –С. 9-19.
256. Tajima T., Dawson J.M. Laser electron accelerator // Phys. Rev. Lett. –1979. –V. 43. –P. 267-270.
257. Chen P., Dawson J.M., Huff R.W., Katsouleas T. Acceleration of Electrons by the Interaction of a Bunched Electron Beam with a Plasma. // Phys. Rev. Lett. –1985. –V. 54. –P. 693-697.
258. Горбунов Л.М., Кирсанов В.И. Возбуждение плазменных волн электромагнитным волновым пакетом. // ЖЭТФ. –1987. –Т. 93. –С. 509-518.
259. Sprangle P., et al. Laser wake-field acceleration and relativistic optical guiding. // Appl. Phys. Lett. –1988. –V. 53. –P. 2146-2149.
260. Буланов С.В. и др. «Вакуумный нагрев электронов» и ускорение ионов при взаимодействии ультракороткого лазерного импульса с плазмой. // Физика плазмы. –1994. –Т. 20. –С. 640-649.
261. Батищев О.В., Карась В.И., Левченко В.Д., Сигов Ю.С. Кинетическое моделирование открытых пучково-плазменных систем. // Физика плазмы. –1994. –Т. 20. –С. 654-662.
262. Joshi C., et al. Ultrahigh gradient particle acceleration by intense laser-driven plasma density waves. // Phys. Rev. Lett. –1981. –V. 47. –P. 1585-1588.
263. Clayton C.E., et al. Relativistic Plasma-Wave Excitation by Collinear Optical Mixing. // Phys. Rev. Lett. –1985. –V. 54. –P. 2343-2346.
264. Joshi C., et al. Ultrahigh gradient particle acceleration by intense laser-driven plasma density waves. // Nature. –1984. –V. 311. –P. 525-529.
265. Clayton C.E., et al. Ultrahigh-gradient acceleration of injected electrons by laser-excited relativistic electron plasma waves. // Phys. Rev. Lett. –1993. –V. 70. –P. 37-40.
266. Amiranoff F., et al. Observation of modulational instability in Nd-laser beat-wave experiments // Phys. Rev. Lett. –1992. –V. 68. –P. 3710-3713.
267. Rosenzweig J.B. Nonlinear regime PBFA. // Preprint Fermilab Conf. 90/40. Feb., 1990.
268. Амагуни А.Ц. и др. Возбуждение нелинейных стационарных волн в плазме электронными сгустками. // Физика плазмы. –1979. –Т. 5. –С. 85-89.
269. Андреев Н.Е. Резонансное возбуждение кильватерных волн лазерным импульсом в плазме. // Письма в ЖЭТФ. –1992. –Т. 55. –С. 551-554.
270. Krall J., et al. Enhanced acceleration in a self-modulated-laser wake-field accelerator. // Phys. Rev. E. –1993. –V. 48. –P. 2157-2161.
271. Antonsen T.M., Mora P. Self-focusing and Raman scattering of laser pulses in tenuous plasmas. // Phys. Rev. Lett. –1992. –V. 69. –P. 2204-2207.
272. Sprangle P., et al. Propagation and guiding of intense laser pulses in plasmas. // Phys. Rev. Lett. –1992. –V. 69. –P. 2200-2203.
273. Modena A., Najmudin Z., Dangor A.E., et al. Electron acceleration from the breaking of relativistic plasma waves. // Nature. –1995. –V. 377. –P. 606.
274. Nakajma K., Fisher D., Kawakubo T. et. al. Observation of ultra high gradient electron acceleration by a self-modulated intense short laser pulse. // Phys.Rev. –1995. –V. 74. –P. 4428; Nakajma K., Ogata A. // Proc. of the 11-th Symposium of Accelerator Science and Technology, Harima. –1997. –P. 36.

275. Umstadter D., Kim J., Dodd E. Laser Injection of Ultrashort Electron Pulses into Wakefield Plasma Waves. // *Phys. Rev. Lett.* –1996. –V. 76. –P. 2073-2076.
276. Буланов С.В. и др. Лазерное ускорение заряженных частиц в неоднородной плазме. I // *Физика плазмы.* –1997. –Т. 23. –С. 259-269.
277. Андреев Н.Е., Горбунов Л.М. и др. Теория возбуждения трехмерной плазменной волны высокоинтенсивным лазерным импульсом в разреженной плазме. // *Физика плазмы.* –1997. –Т. 23. –С. 277-284.
278. Карась В.И., Карась И.В., Левченко В.Д., Сигов Ю.С., Файнберг Я.Б. 2.5-мерное численное моделирование формирования плазменного канала ионами при распространении конечной последовательности релятивистских электронных сгустков в плотной и разреженной плазме. // *Физика плазмы.* –1997. –Т. 23. –С. 311-315.
279. Файнберг Я.Б. Ускорение заряженных частиц в плазме. // *Физика плазмы.* –1997. –Т. 23. –С. 251-258.
280. Sprangle P., et al. Nonlinear interaction of intense laser pulses in plasmas. // *Phys. Rev. A.* –1990. –V. 41. –P. 4463-4469.
281. Андреев Н.Е., Горбунов Л.М. Лазерно-плазменное ускорение электронов // *УФН.* –1999. –Т. 169. –С. 53-59.
282. Katsouleas T. Physical mechanisms in the plasma wake-field accelerator. // *Phys. Rev. A.* –1986. –V. 33. –P. 2056-2064.
283. Chen P., Nable R. // *Advanced Acceleration Concepts* / ed. S. Chattopadhyay, S. McCullough and P. Dane, AIP Press, New York, 1997. –P. 273-295.
284. Chen P., Nable R. // *New Modes of Particle Acceleration* / ed. Z. Parsa. AIP. –1997. –P. 95-120.
285. Kitson S.C., et al. Full Photonic Band Gap for Surface Modes in the Visible. // *Phys. Rev. Lett.* –1996. –V. 17. –P. 2670-2673.
286. Katsouleas T., Dawson J. et al. A side-injected-laser plasma accelerator. // *IEEE Trans. Nucl.Sci.* –1985. –V. NS-32. –P. 3554-3557.
287. Ebbesen, et al. Extraordinary optical transmission through sub-wavelength hole arrays. // *Nature.* –1998. –V. 391 (Feb. 12). –P. 667-669.
288. Ахизер А.И., Половин Р.В. Теория движения волн электронной плазмы. // *ЖЭТФ.* –1956. –Т. 30. –С. 915-921.
289. Tajima T., Covenago M. Crystal X-ray accelerator. // *Phys. Rev. Lett.* –1987. –V. 59. –P. 1440-1443.
290. Newberger B.S., Tajima T. High-energy beam transport in crystal channels. // *Phys. Rev. A.* –1989. –V. 40. –P. 6897-6903.
291. Гришаев И.А., Насонов Н.Н. О возможности ускорения заряженных частиц в кристаллах. // *Письма в ЖТФ.* –1977. –Т. 3. –С. 1084-1086.
292. Lawson J. *Lasers and accelerators.* // *IEEE Transactions Nuclear Science.* –1979. –V. NS-26. Issue 3. –P. 4217-4219.
293. Баранова Н.Б., Скалли М.О., Зельдович Б.Я. Ускорение заряженных частиц лазерными пучками. // *ЖЭТФ.* –1994. –Т. 105. –С. 469-486.
294. Гапонов А.В., Миллер М.А. Использование движущихся высокочастотных потенциальных источников для ускорения заряженных частиц. // *ЖЭТФ.* –1958. –Т. 34. –С. 751-752.
295. Katsouleas T., Mori W.B., Wurtele J.S., et al. Laser plasma accelerator. // *New Modes of Particle Acceleration* / ed. Z. Parsa. AIP. –1997. –P. 21-42.
296. Steinhauer L.C., Kimura W.D. A new approach for laser particle acceleration in vacuum // *J. Appl. Physics.* –1992. –V. 72. –P. 3237-3245.
297. В.А.Буц, К.Н.Степанов. Стохастический нагрев плазмы полем лазерного излучения. *Письма в ЖЭТФ.* Т.58, в. 7, 1993. Англ. V.A.Buts, K.N.Stepanov. Stochastic plasma heating by laser light. *JETP Lett.* Vol. 58, N 7, 10 Okt. 1993. 524-527.

Примечание редакции: Представленный выше обзор представлен в неоконченном виде. Прежде всего, это видно по материалам, которые касаются ускорения заряженных частиц. Кроме того, в обзоре отсутствуют результаты, которые касаются взрывных неустойчивостей, а также результаты, связанные с исследованиями режимов с динамическим хаосом. Обращаем внимание, что такие режимы в плазме открывают большие возможности для их использования. В частности укажем на работу [297], в которой показано, что нагрев плазмы регулярными волнами при реализации режима с динамическим хаосом значительно эффективнее, чем нагрев плазмы шумовыми полями. В обзоре также отсутствуют результаты, которые касаются развития релятивистской плазменной электроники. Отметим, что все эти темы планировались для обзора (насколько это известно редакции).

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПЛАЗМЕННАЯ РЕЛЯТИВИСТСКАЯ СВЧ ЭЛЕКТРОНИКА

П. С. Стрелков

*Институт общей физики имени А. М. Прохорова РАН,
ул. Вавилова 38, г. Москва, 119991, Российская Федерация*

В статье представлен обзор экспериментальных работ по плазменной релятивистской СВЧ электронике, выполненных в лаборатории «Плазменная электроника» Института общей физики РАН им. А. М. Прохорова в 1980–2017 годах. Созданы плазменные релятивистские СВЧ генераторы и усилители. Эти приборы принципиально отличаются от вакуумных релятивистских СВЧ приборов возможностью широкой перестройки частоты излучения. Результаты экспериментальных исследований сравниваются с выводами аналитической теории, а также с результатами численного моделирования.

1. ПРЕДМЕТ ПЛАЗМЕННОЙ СВЧ ЭЛЕКТРОНИКИ

Экспериментальная плазменная СВЧ электроника основана на эффектах возбуждения электромагнитных волн в плазме электронным пучком, которые были открыты в теоретических работах советских учёных А. И. Ахиезера и Я. Б. Файнберга [1], а также американских учёных D. Bohm and E. P. Gross [2]. Первые эксперименты по обнаружению плазменно-пучковой неустойчивости были проведены в 1959–1960 годах в работах [3–5]. Исследовались спектры излучения из плазмы и изменение функции распределения электронов пучка при взаимодействии с плазмой.

Решались прикладные задачи: ускорение ионов в электрических полях, возбуждаемых в плазме, и нагрев плазмы при развитии плазменно-пучковой неустойчивости. Но эти исследования нельзя отнести к плазменной СВЧ электронике, хотя без них плазменная СВЧ электроника не могла бы появиться. К плазменной СВЧ электронике относятся только те экспериментальные исследования взаимодействия электронного пучка с плазмой, в которых специально подбираются условия для обеспечения максимально возможной передачи энергии электронного пучка в энергию электромагнитного излучения. В плазменной СВЧ электронике основными являются две задачи: возбуждение в плазме максимально больших амплитуд электромагнитных волн и создание условий для эффективного излучения их из плазмы. Причем задача эффективного вывода СВЧ излучения из плазмы решается только в рамках плазменной СВЧ электроники.

В различных работах экспериментально исследовались два типа СВЧ источников излучения, заполненных плазмой. Заполнение обычного вакуумного источника СВЧ излучения плазмой может приводить к улучшению некоторых его параметров – к повышению мощности излучения, увеличению рабочего диапазона частот и т.д. Такие источники излучения получили название *гибридных СВЧ приборов*. Механизм возбуждения волн в гибридном приборе совпадает с механизмом работы его вакуумного аналога (лампы бегущей волны, лампы обратной волны, гиротрона и т.д.); поэтому такой прибор может работать и без плазмы. Это направление плазменной нерелятивистской СВЧ электроники интенсивно развивалось в нашей стране в ХФТИ (г. Харьков) и в ВЭИ (г. Москва), а также в США.

Мы будем рассматривать только такие СВЧ приборы, действие которых основано на возбуждении собственных волн в цилиндрическом металлическом волноводе с постоянным диаметром, заполненным плазмой. Такие приборы получили название *плазменных СВЧ источников*. Эти источники, в отличие от гибридных, в отсутствие плазмы не излучают.

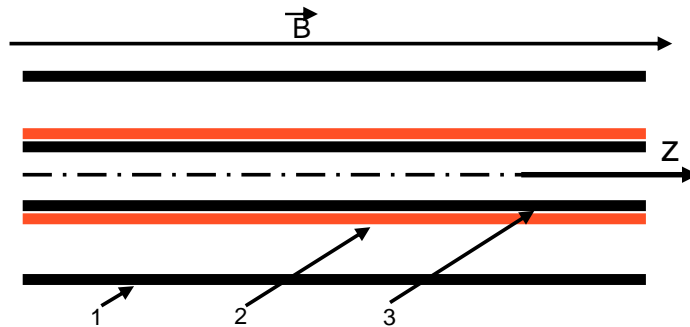
Первые эксперименты по плазменной СВЧ электронике проводились в 1960–1970 годах. При этом использовались нерелятивистские электронные пучки с энергией электронов 0,6–30 кэВ $\ll 511$ кэВ = mc^2 . Исследования проводились во многих странах мира. Большой вклад в эти исследования внесли ученые Института радиоэлектроники, г. Москва [6]. Обзор работ по нерелятивистской плазменной СВЧ электронике можно найти в [7]. В этом обзоре и в книге [6] рассмотрены плазменные СВЧ приборы, которые в плазме не излучают. Описанные ниже исследования являются прямым продолжением экспериментов [6, 7]. Они отличаются только переходом от нерелятивистских (<30 кэВ, <20 А) микросекундных ($T > 1$ мкс) электронных пучков к сильнооточным (~ 500 кэВ, ~ 2 кА) наносекундным ($T < 1$ мкс) релятивистским электронным пучкам.

Экспериментальные работы в ИОФ РАН по плазменной релятивистской СВЧ электронике были начаты по инициативе А. А. Рухадзе при поддержке М. С. Рабиновича. Эксперимент сопровождался теоретическими исследованиями коллектива под руководством А. А. Рухадзе [8–10].

Эксперименты проводились на сильноточных релятивистских ускорителях, либо полностью изготовленных в ИСЭ СОРАН [11], либо при участии инженеров из ИСЭ СОРАН. Обзор экспериментальных исследований, проведённых до 2001 года, можно найти в книгах [12, 13] и в обзоре [14]. При обсуждении результатов эксперимента использовались результаты теории [8-10, 12] и расчётов, проведённых на основе этой теории для конкретных условий эксперимента. Кроме того, эксперимент сравнивался с результатами численного моделирования при помощи кода «КАРАТ» [15, 16]. В настоящем обзоре описана часть экспериментов, проведённых до 2001 года, и приводятся результаты экспериментов, проведённых в 2001–2017 годах.

2. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО ОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЫ С РЕЛЯТИВИСТСКИМ ЭЛЕКТРОННЫМ ПУЧКОМ

В эксперименте в металлическом круглом волноводе создавалась трубчатая плазма, внутрь которой инжектировался трубчатый релятивистский электронный пучок, рис. 1.



*Рис. 1. Трубчатый электронный пучок в плазменном волноводе:
1 – металлическая труба, 2 – плазма, 3 – электронный пучок*

Резкие радиальные границы плазмы и пучка достигались наложением продольного магнитного поля, причём $\Omega_e > \omega_p$. Здесь $\Omega_e = eB/m$ – циклотронная частота, e – заряд электрона, B – индукция магнитного поля, m – масса электрона, c – скорость света, $\omega_p = (4\pi n e^2 / m)^{1/2}$ – плазменная частота, n – плотность электронов плазмы.

Качественная картина дисперсии медленных электромагнитных волн $\omega(k_z)$ в таком волноводе без электронного пучка для различных значений плотности плазмы показана на рис. 2. Здесь ω – частота, а k_z –

продольное волновое число. На кривые дисперсии плазменных волн на рис. 2 наложена кривая дисперсии медленной волны пространственного заряда $\omega = k_z u$ в приближении $\omega_b \ll \omega$, где u – скорость электронов пучка, а ω_b – плазменная частота пучка.

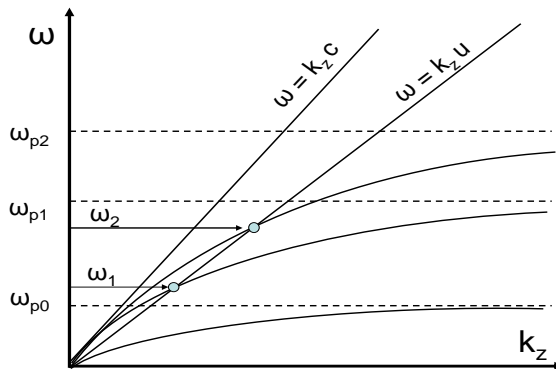


Рис. 2. Дисперсия плазменных мод E_{01} для трёх значений плотности плазмы

Частота медленных плазменных волн при $k_z = 0$ равна нулю, а при $k_z = \infty$ равна плазменной частоте ω_p . В точках пересечения кривой дисперсии волны пучка с кривыми дисперсии плазменных волн фазовые скорости волн пучка и плазмы совпадают и возможно возбуждение плазменных электромагнитных волн на основе черенковского механизма, $u > v_{ph}$, где v_{ph} – фазовая скорость плазменной волны. С увеличением плотности плазмы (при переходе от ω_{p1} к ω_{p2}) частота возбуждаемых волн растёт. Это позволяет управлять частотой излучения от одного импульса тока пучка к другому за счёт смены плотности плазмы. При малом значении плотности плазмы ω_{p0} резонансное условие не выполняется и возбуждение плазменной волны невозможно. Здесь надо отметить, что на рис. 2 изображена дисперсия мод E_{01} . Дисперсионные кривые более высоких азимутально-симметричных мод, а также несимметричных мод лежат ниже кривой моды E_{01} . Поэтому существует *критическое значение плазменной частоты* $\omega_p^* = \sqrt{3.19 \cdot 10^9 \cdot n^*}$, только начиная с которого возможно возбуждение плазменных волн

$$\omega_p^* = k_0 u \gamma. \tag{1}$$

Здесь k_0 – поперечное волновое число плазменной волны E_{01} , γ – релятивистский фактор электронов пучка. Возбуждается только одна азимутально-симметричная мода E_{01} , если

$$k_0 u \gamma < \omega_p < k_1 u \gamma. \tag{2}$$

Здесь k_l – поперечное волновое число плазменной волны E_{0l} . Подставляя значения волновых чисел k_0 и k_l , получаем диапазон значений плазменной частоты ω_p , в котором возможно возбуждение только одной азимутально-симметричной моды E_{0l} в геометрии эксперимента рис. 1:

$$\frac{1}{\ln R/r_p} < \omega_p^2 \cdot \frac{r_p \Delta}{u^2 \gamma^2} < \frac{2}{1 - (r_p/R)^2}. \quad (3)$$

При фиксированном значении плотности плазмы, превышающей пороговое значение, возбуждение плазменных волн происходит не только на резонансных частотах, отмеченных точками на рис. 2. Линейный коэффициент усиления в типичных условиях эксперимента не равен нулю также и в окрестности резонансных частот рис. 3.

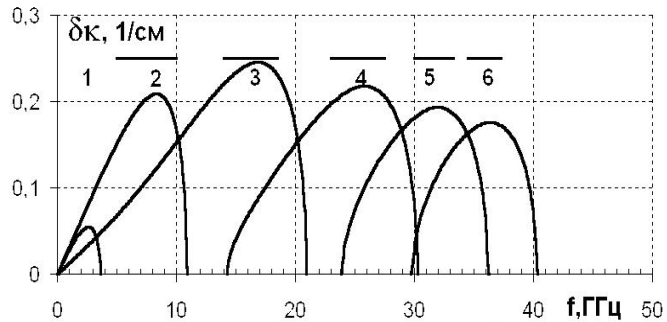


Рис. 3. Зависимость δk от частоты $f = \omega / 2$ п для разных значений плотности плазмы. С увеличением номера кривой плотность плазмы возрастает

В линейном режиме напряжённость электрического поля на каждой из частот будет нарастать вдоль длины плазмы по закону $E = E_0 e^{\delta k z}$, где E_0 – амплитуда напряжённости электрического поля в точке влёта пучка в плазму $z = 0$. Если отражение от концов плазменного волновода отсутствует, то будет реализован режим усилителя. Рис. 3 позволяет оценить линейный коэффициент усиления – $e^{\delta k L}$ и полосу частот усилителя. Здесь L – длина плазмы. Если входной сигнал отсутствует, то на выходе плазменного волновода будет наблюдаться усиление собственных шумов электронного пучка в полосе частот, максимальные размеры которых даёт рис. 3.

Если коэффициенты отражения плазменной волны от концов плазменного волновода не равны нулю, то может возникнуть режим генерации. Режим генерации возникает при условии $k_1 k_2 e^{\delta k L} > 1$. Здесь k_1 и k_2 – коэффициенты отражения электрического поля волны от концов плазменного волновода. Генерация происходит в полосе усиливаемых частот рис. 3, когда на длине плазмы укладывается целое число полуволн, на частотах $\omega \approx N \pi u / L$.

Для эффективного возбуждения плазменных волн необходимо иметь моноэнергетичный электронный пучок, у которого отсутствует угловой

разброс, $u \equiv u_z$. Кроме того, необходимо наличие в плазменной волне на радиусе трубчатого пучка большого значения компоненты E_z . Именно эта компонента электрического поля тормозит электроны, приводит к бунчировке пучка, к процессам, близким к тем, которые имеют место в обычной вакуумной лампе бегущей волны.

3. ФОРМИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ

Эксперименты плазменной СВЧ электроники проводились как с нерелятивистскими электронными пучками ($1 - 20 \text{ кэВ} \ll 510 \text{ кэВ} = mc^2$), так и с релятивистскими ($500 - 1000 \text{ кэВ} \geq mc^2$). Схема формирования электронного пучка представлена на рис. 4. Импульсное напряжение от источника — 1 прикладывается между катодом — 2 и анодом — 3, которые находятся внутри вакуумной камеры — 4. Катод внутри камеры — 4 закреплён на изоляторе — 5. Электроны рождаются на катоде — 2, ускоряются в диодном промежутке (2-3), затем двигаются по инерции в дрейфовом пространстве — 6 и попадают на коллектор — 7. Вакуумная камера помещена в сильное магнитное поле B , поэтому электронный пучок — 8 имеет постоянный радиус от катода — 2 до коллектора — 7, примерно равный радиусу катода. Для формирования нерелятивистских пучков используются традиционные *термоэмиссионные катоды* (часто эти катоды изготавливаются из гексаборида лантана, способного работать при низком вакууме). В релятивистских электронных пушках используются холодные катоды, действие которых основано на *эффекте взрывной эмиссии* [17].

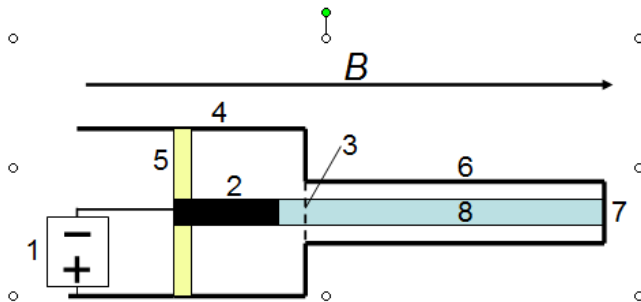


Рис. 4. Схема электронной пушки: 1 — источник импульса напряжения, 2 — катод, 3 — анодная сетка, 4 — металлическая труба, 5 — изолятор, 6 — дрейфовое пространство, 7 — коллектор, 8 — электронный пучок

Этот эффект состоит в том, что на микроостриях катода возникает автоэлектронная эмиссия при усредненной напряженности электрического поля по поверхности катода $\sim 10^6 \text{ В/см}$. Если источник высокого напряжения имеет малое внутреннее сопротивление, то наблюдается взрыв микроострий и образование тонкого слоя плотной плазмы ($10^{17} - 10^{19} \text{ см}^{-3}$) на

поверхности катода. Внешнее поле, приложенное к плазменному слою, сосредотачивается на катоде в области порядка дебаевского радиуса и обеспечивает большие плотности тока эмиссии электронов из катода. Обычно максимальный ток сильноточного релятивистского электронного пучка (РЭП) ограничен внутренним сопротивлением источника импульсного напряжения (1-100 Ом). Отсюда видно, что такие источники дают токи до 1 МА при напряжении на диоде 1 МВ. Однако в релятивистской СВЧ электронике не удается использовать эффективно пучки с большим током. Например, при энергии электронов 1 МэВ ток пучка обычно не превышает 10 кА. Это связано с неблагоприятным влиянием собственного заряда пучка на эффективность СВЧ прибора.

Электроны, вылетая из диода, попадают в дрейфовое пространство – 6, рис. 4. В дрейфовом пространстве обычно располагается электродинамическая система, в которой генерируется СВЧ излучение. Оценим величину магнитного поля, достаточную для постоянства поперечного размера пучка вдоль длины. Если магнитное поле достаточно велико, то радиус пучка r_b будет почти равен радиусу катода — r_c . Найдём величину магнитного поля, в котором $\Delta r = r_c - r_b$ мало. На электрон на краю цилиндрического пучка радиуса r_b действует радиальная сила F_1 от поля пространственного заряда пучка, направленная от оси пучка:

$$F_1 = \frac{2eQ}{r_b} = \frac{2eI}{ur_b}. \quad (4)$$

Здесь Q – заряд единицы длины пучка, I – ток пучка, u – продольная скорость электронов.

На электрон действует также сила Лоренца – F_2 , пропорциональная величине собственного магнитного поля электронного пучка – $B\varphi$:

$$F_2 = \frac{2eI\beta^2}{ur_b}. \quad (5)$$

Сила F_2 направлена к оси пучка, в результате сила F , действующая на электрон, равна

$$F = \frac{2eI}{ur_b\gamma^2}. \quad (6)$$

Под действием этой силы в продольном магнитном поле B электрон будет дрейфовать в азимутальном направлении по траектории, близкой к циклоиде с амплитудой Δr :

$$\Delta r = \frac{cF\gamma}{eB\Omega_e}. \quad (7)$$

Здесь $\Omega_e/\gamma = eB/mc\gamma$ – частота вращения электрона с релятивистским фактором γ в магнитном поле B . Для выполнения условия $r_b/\Delta r > k$, где

k – произвольное число, много большее единицы, получаем ограничение на величину B :

$$B > \frac{18.5 \sqrt{I_b}}{r_b \sqrt{\beta \gamma}} k, \quad (8)$$

где B в Гс, I_b в А, r_b в см.

Оценим величину B для формирования пучка с параметрами $r_b = 0.5$ см и $k = 5$ в типичных условиях эксперимента. При $eU = 1$ кэВ, $I_b = 0.1$ А имеем $B > 200$ Гс; $eU = 10$ кэВ, $I_b = 10$ А - $B > 1250$ Гс; $eU = 500$ кэВ, $I_b = 2$ кА - $B > 6250$ Гс.

Поэтому в плазменной нерелятивистской СВЧ электронике использовались магнитные поля до 2 кГс, а в релятивистской — 4 - 20 кГс.

В электронных пушках с термокатодом при заданном значении напряжения ток пучка может ограничиваться как температурой катода, так и собственным пространственным зарядом, если температура катода достаточно велика. В последнем случае ток пучка определяется величиной приложенного напряжения и геометрией электродов пушки. В электронных пушках, использующих *взрывоэмиссионные катоды*, ток пучка всегда ограничен только собственным пространственным зарядом и определяется величиной приложенного напряжения и геометрией диода. Максимальное значение тока, достижимое в схеме рис. 4, называется предельным вакуумным током. В этой схеме транспортировки электронного пучка в дрейфовом пространстве до влёта электронов пучка отсутствует электрическое поле и энергия у всех электронов при влёте в трубу дрейфа одинакова и равна eU_0 . Здесь e – заряд электрона, а U_0 – напряжение диода.

Предельный вакуумный ток I_0 равен [18]:

$$I_0 = \frac{mc^2 (\gamma_0^{2/3} - 1)^{3/2}}{e \cdot 2 \ln(R/r_b)}. \quad (9)$$

Здесь $\gamma_0 = 1 + \frac{eU_0}{mc^2}$, γ_0 – релятивистский фактор электрона,

а R – радиус металлической трубы дрейфа.

Ясно, что ток пучка в схеме рис. 4 при заданном потенциале катода должен быть ограничен. Действительно, с увеличением тока пучка растет по величине отрицательный относительно стенок камеры потенциал в области пучка, созданный его пространственным зарядом. Очевидно, что при некотором токе потенциал внутри пучка станет равным потенциалу катода и стационарный электронный пучок с таким током будет невозможен. Из этих качественных соображений ясно также, что пучок вдали от катода должен быть трубчатым, хотя эмиссия возможна со всей торцевой поверхности катода. Дело в том, что при повышении тока электроны, находящиеся на оси пучка, остановятся из-за возникновения потенциала, равного потенциалу катода, тогда как электроны на радиусе катода r_c будут иметь возможность распространяться. Это связано с тем, что потенциал, определяемый пространственным зарядом пучка на оси, всегда по абсо-

плотной величине больше потенциала на краю пучка. Если плотность тока эмиссии и индукция внешнего магнитного поля бесконечно велики, то толщина трубчатого пучка будет бесконечно малой. В эксперименте, конечно, толщина пучка конечна, но если $\Delta_b \ll l_b$, то приведенная выше формула подтверждается экспериментом. При этом, конечно, предполагается, что этот ток меньше, чем максимально возможный ток высоковольтного источника.

Схема электронной пушки, представленная на рис. 4, в экспериментах с сильноточными релятивистскими пучками сейчас практически не используется. Предложена новая схема, в которой отсутствует анодная сетка. Анодная сетка сгорает, если плотность тока и длительность импульса тока пучка превышают некоторые значения. Эти ограничения по плотности тока и длительности импульса уменьшают возможность изменения параметров пучка в широких пределах.

На начальной стадии работ по плазменной релятивистской СВЧ электронике для разделения области диода и плазмы использовалась тонкая металлическая фольга, прозрачная для электронов пучка. Металлическая фольга абсолютно не пропускает в диод плазму и электромагнитное излучение. В то же время прозрачность фольги для электронов пучка велика, например, прозрачность фольги из титана толщиной 50 мкм при энергии электронов 500 кэВ равна 0.9. Однако электроны, пройдя через такую фольгу, получают разброс по углам $\sqrt{\Theta^2} = 46^\circ$. При толщине фольги 10 мкм прозрачность близка к единице, но угловой разброс также достаточно велик $\sqrt{\Theta^2} = 17^\circ$. Применять более тонкие фольги невозможно, так как при типичных параметрах пучка (500 кэВ, 2 кА/см², 30 нс – 1 мкс) они сгорают. Разброс по углам при движении электронов вдоль силовых линий продольного магнитного поля означает разброс по продольным скоростям электронов пучка. Разброс же электронов по продольным скоростям приводит к снижению эффективности СВЧ прибора.

Итак, перейдем к описанию новой геометрии диода – схеме магнитоизолированного диода, рис. 5. Сплошной цилиндрический катод – 2 изготовлен из металла или графита. Катод расположен на оси вакуумной камеры 3 с радиусом R_1 , длина этой камеры $L_1 \gg R_1$. Затем вакуумная камера с радиусом R_1 переходит в вакуумную камеру – 4 с меньшим радиусом R_2 , $R_2 < R_1$. В этой трубе с радиусом R_2 и располагают СВЧ источник. Снаружи вакуумных камер с радиусами R_1 и R_2 расположен соленоид, который создает однородное магнитное поле B вдоль оси камер. Электронный пучок рождается на катоде – 2 и распространяется под действием внешних электрического и магнитного полей вдоль оси камер. Металлические камеры заземлены, а на катод подается отрицательный потенциал. Если величина магнитного поля достаточно велика (8), то радиус пучка равен радиусу катода. Величина тока в предположении бесконечной плотности эмиссии тока катода определяется двумя факторами: внешним электрическим полем, ускоряющим электроны, и электрическим

полем собственного заряда пучка, тормозящим электроны. Ток магнито-изолированного диода I_m равен (формула Федосова) [19]:

$$I_m = \frac{mc^3}{e} \frac{1}{2 \ln R_1 / r_b} \frac{(\gamma_0 - \gamma_1) \sqrt{\gamma_1^2 - 1}}{\gamma_1}. \quad (10)$$

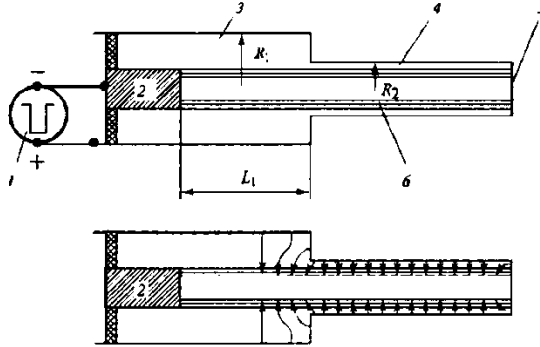


Рис. 5. Схема формирования РЭП при помощи магнитоизолированного диода: 1 – источник импульса высокого напряжения, 2 – катод, 3 – труба большого диаметра, 4 – труба малого диаметра, 5 – коллектор, 6 – электронный пучок. Внизу приведена качественная картина силовых линий электрического поля собственного заряда пучка в дрейфовой камере 4 и при входе в неё

Здесь $\gamma_0 = 1 + \frac{eU_0}{mc^2}$ где U_0 – потенциал катода, γ_1 – релятивистский фактор электрона в дрейфовом пространстве, он равен $\gamma_1 = \sqrt{2\gamma_0 + 0.25} - 0.5$. Укажем также, что константа $\frac{mc^3}{e} = 17 \text{кА}$.

Если ток пучка равен I_m , то потенциал внутри трубчатого пучка равен

$$\Phi_1 = \frac{mc^2}{e} (\gamma_0 + 0.5 - \sqrt{2\gamma_0 + 0.25}). \quad (11)$$

Пучок, сформированный в трубе – 3 с радиусом R_1 , затем попадает в трубу – 4 с меньшим радиусом R_2 . При этом потенциал пучка в трубе – 4 уменьшается и становится Φ_2 . Потенциал Φ_2 можно найти из системы уравнений

$$I_{m1} = Q_2 u_2, \quad (12)$$

$$mc^2 \gamma_0 = mc^2 \gamma + e\Phi_2, \quad (13)$$

$$\Phi_2 = 2Q_2 \ln(R_2 / r_b). \quad (14)$$

Здесь Q_2 – заряд единицы длины пучка в трубе 4, u_2 – скорость электронов в трубе 4, I_{m1} – ток, сформированный в трубе 1. Уравнение (12) – закон непрерывности тока, (13) – закон сохранения полной энергии электрона, уравнение (14) – связь между потенциалом и зарядом в цилиндрическом конденсаторе. Добавив соотношение между γ_2 и u_2 , а именно $\gamma_2 = (1 - \frac{u_2^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$, из уравнений (12-14) можно найти потенциал

$$\Phi_2 = f(I_{m1}, \gamma_0, R_2, r_b)$$

Качественно эффект уменьшения потенциала пучка в трубе – 4 ($\Phi_2 < \Phi_1$) можно понять следующим образом. При переходе электронов из широкой трубы – 3 в узкую – 4 возникает компонента электрического поля собственного заряда пучка, ускоряющая электроны (рис. 5, внизу). Это приводит к тому, что заряд в пучке уменьшается согласно уравнению $Q_1 u_1 = Q_2 u_2$. Потенциал пучка в трубе – 3 связан с зарядом соотношением, аналогичным уравнению (14). Из неравенств $Q_2 < Q_1$ и $\ln(R_2/r_b) < \ln(R_1/r_b)$ следует неравенство $\Phi_2 < \Phi_1$.

Решение $\Phi_2 = f(I_{m1}, \gamma_0, R_2, r_b)$ имеет громоздкий вид. Приведем результат расчёта Φ_2 для конкретных условий, которые были осуществлены в одном из экспериментов, который будет описан позже.

$eU_0 = 511$ кэВ, $\gamma_0 = 2$, $R_1 = 2.8$ см, $R_2 = 1.8$ см, $r_b = 0.6$ см, $I_{m1} = 1.86$ кА, $e\Phi_1 = 225$ кэВ, $e\Phi_2 = 150$ кэВ.

Таким образом, в рассмотренном выше примере при расчёте возбуждения пучком электромагнитного поля в трубе – 4 надо учитывать, что кинетическая энергия электронов пучка равна 361 кэВ, а не 511 кэВ. Ток пучка $I_{m1} = 1.86$ кА в трубе – 4 при этом получается меньше предельного вакуумного тока I_0 при инжекции в неё пучка электронов с релятивистским фактором $\gamma_0 = 2$. Изменение отношения R_1/R_2 позволяет получить необходимое отношение I_{m1}/I_0 . В данном случае $R_1/R_2 = 1.55$, $I_{m1}/I_0 = 0.53$.

Приведённые выше формулы справедливы при распространении электронного пучка в вакууме. При возбуждении электромагнитных волн только кинетическая энергия электронов преобразуется в энергию излучения, поэтому желательно иметь в пучке малый потенциал. Кроме того, при черенковском взаимодействии энергия излучения возникает из-за уменьшения продольной скорости электронов. Если ток пучка несколько меньше I_0 для трубы с радиусом R_2 , то из-за уменьшения скорости электронов в процессе излучения пучок может начать запыраться пространственным зарядом, что резко уменьшит эффективность взаимодействия. Кроме того, трубчатый пучок реально имеет конечную толщину. Это приводит к тому, что электроны, находящиеся на разных расстояниях от оси пучка, находятся в точках с разным потенциалом и, следовательно, имеют разные кинетические энергии. Если ток пучка близок к величине I_0 , то разброс по энергиям будет велик. Высокое значение *эффективности СВЧ источника* можно достичь только при малом разбросе по кинетическим энергиям электронов. Поэтому в релятивистской вакуумной СВЧ электро-

нике ток пучка по сравнению с предельным вакуумным током мал, он не превышает $0.3 I_0$.

При инжекции электронного пучка в плазму происходит нейтрализация пространственного заряда пучка. Это позволяет транспортировать токи, значительно превышающие значение предельного вакуумного тока. Однако эффективность плазменных СВЧ приборов уменьшается с увеличением тока. Поэтому максимальные значения мощности СВЧ излучения достигаются по-прежнему при токах, меньших значения предельного вакуумного тока, для плазменных СВЧ приборов при $\sim 0.5 I_0$ [12].

В заключение этого параграфа рассмотрим ещё один важный вопрос. Сильноточные РЭП инжектируются из некоторой области катодной плазмы. Граница *катодной плазмы* двигается в продольном и поперечном направлениях из-за наличия у частиц плазмы тепловой скорости, а также внешнего электрического поля. Это приводит к тому, что параметры РЭП изменяются во времени.

Параметры катодной плазмы известны с малой точностью, поэтому расчётов продольной и поперечной диффузии плазмы не существует. Обзор экспериментальных исследований параметров катодной плазмы можно найти в [20]. Экспериментально скорость продольного движения катодной плазмы определялась по измерению времени пробоя диода с переменным значением расстояния между катодом и коллектором. Плазма, влетая в пучок, компенсирует его пространственный заряд. В результате вблизи катода образуется область, где заряд пучка нейтрализован. Со временем фронт области нейтрализации пучка удаляется от катода. Второй способ измерения скорости продольного движения катодной плазмы состоит в измерении скорости движения этого фронта. Оба метода дают значение $v_{\parallel} = 1 - 5 \cdot 10^7$ см/с [21, 22]. Для того чтобы не происходил пробой диода необходимо, чтобы длина магнитоизолированного диода L_d рис. 5 была больше $v_{\parallel} T$, где T — длительность импульса напряжения на катоде. При типичном значении и $T = 1$ мкс получаем $L_d = 10 - 50$ см. Движение плазмы поперек магнитного поля приводит к увеличению радиуса пучка. Экспериментально измеренная скорость увеличения радиуса пучка v_{\perp} зависит от конструкции катода и профиля продольного направляющего магнитного поля. В случае однородного продольного магнитного поля и геометрии рис. 5 v_{\perp} равна $\approx 5 \cdot 10^5$ см/с [22, 23]. Это означает, что радиус пучка увеличивается на 5 мм за 1 мкс. Такое изменение радиуса пучка часто бывает недопустимо для создания эффективного СВЧ источника с длительностью ~ 1 мкс.

Для *стабилизации радиуса пучка* были предложены *многоострийные катоды* [24]. Принцип работы этих катодов состоит в ограничении плотности потока плазмы с поверхности катода. Если поток плазмы ограничен и величина $n_p^* v_{Te}^* S_p$ равна $n_b^* u^* S_b$, то образуется стабильная граница плазмы, с которой происходит отбор тока электронного пучка. Здесь n_p — плотность плазмы, v_{Te} — тепловая скорость электронов плазмы, S_p — площадь сечения плазмы, n_b — плотность электронов пучка, u — продольная скорость электронов пучка, S_b — площадь сечения пучка.

Опишем конструкцию и приведём конкретные параметры одного из таких катодов. На катоде площадью $1.5 \cdot 10^3 \text{ см}^2$ расположены 500 острий, причем в цепь каждого острия было включен резистор с сопротивлением 2 кОм. Вблизи катода пучок распространялся в ослабленном магнитном поле – 2 кГс, а далее в дрейфовой камере пучок распространялся вдоль магнитного поля величиной 10 кГс. В этих условиях в дрейфовой камере получался трубчатый пучок диаметром 4.5 см и толщиной 0.7 см, при энергии электронов 300 кэВ, токе 400 А и длительности импульса 25 мкс.

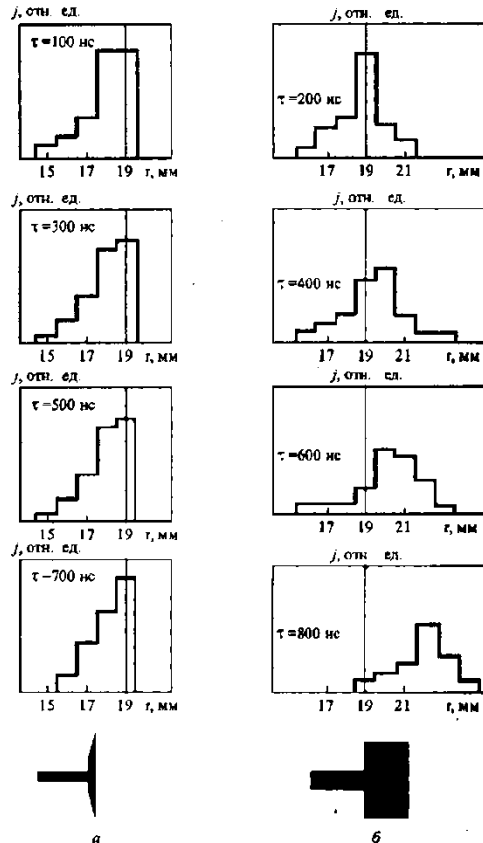


Рис. 6. Профиль плотности РЭП в разные моменты времени:
а) катод в виде тонкого диска, б) катод в виде торца сплошного цилиндра

Другой способ ограничения скорости радиального расширения катодной плазмы состоит в подборе специальной геометрии катода. Если катод выполнить в виде тонкого диска, то поперечная структура пучка не изменяется в течение 700 нс, рис. 6 (а) [25-27]. Для сравнения показана структура пучка при использовании катода в виде торца сплошного цилиндра, рис. 6 (б). Объяснение стабилизации радиуса РЭП при использовании катода в виде тонкого диска заключается в следующем. В катоде в виде торца сплошного цилиндра эмиссия электронов может происходить

как с его боковой поверхности на радиусах $r = r_c$, так и с торцевой. Поэтому сначала эмиссия электронов возникает на боковой поверхности, где напряжённость поля максимальна. Катодная плазма, удаляясь от катода вдоль силовых линий магнитного поля, экранирует электрическое поле на торце катода. Поэтому эмитирует в основном боковая поверхность. В дисковом катоде эмитирует только торцевая поверхность на радиусах $r \leq r_c$. Это происходит потому, что плотность тока эмиссии катодной плазмы ограничена, и малая боковая поверхность дискового катода не может обеспечить ток магнитоизолированного диода. Итак, у катода в виде торца сплошного цилиндра эмитирует его боковая поверхность и образуется протяжённый слой плазмы вдоль силовой линии магнитного поля с резким градиентом плотности плазмы в радиальном направлении, так как на боковой поверхности катода находится плазма с максимальным значением плотности. В дисковом катоде плотная плазма существует только вблизи торцевой поверхности, а затем вдоль силовой линии магнитного поля плотность плазмы уменьшается. В результате при использовании дискового катода не образуется плазма с резким градиентом плотности в радиальном направлении на её боковой поверхности. Это приводит к тому, что скорость поперечной диффузии плазмы для дискового катода не велика и диаметр пучка почти стабилен.

4. МЕТОДЫ СОЗДАНИЯ ПЛАЗМЫ

Электронный пучок, проходя через газ, производит его ионизацию. На этом эффекте основана самая простая конструкция экспериментальной установки для исследования взаимодействия электронного пучка с плазмой. Если учитывать ионизацию газа только быстрыми электронами и пренебречь процессом ионизации газа плазменными электронами, то плотность плазмы n_p определяется уравнением

$$\frac{dn_p}{dt} = (N_0 - n_p)n_b\sigma u - \frac{n_p}{\tau}. \quad (15)$$

Здесь σ – сечение ионизации атома газа электроном пучка, τ – время распада плазмы. Пусть параметры электронного пучка n_b , u и плотность газа N_0 – заданы. Тогда стационарное значение плотности плазмы даётся равенством

$$n_p^{\max} = N_0 \frac{\tau}{\tau + \tau_b}. \quad (16)$$

Здесь $\tau_b = \frac{1}{n_b\sigma u}$. Видно, что если выполняется условие $\tau_b \ll \tau$, то

пучок будет создавать полностью ионизованную плазму, а плотностью плазмы можно управлять изменением плотности газа. Если плотность плазмы превышает значение *критической плотности плазмы* (см. гл. 2), то возникает пучковая неустойчивость и СВЧ могут приводить к допол-

нительной ионизации газа. Если СВЧ поля сосредоточены внутри плазмы, то ионизация газа СВЧ полями не имеет значения, поскольку только ионизация электронным пучком достаточна для полной ионизации газа

Очевидно, что наиболее просто интерпретировать результаты эксперимента, в котором электронный пучок взаимодействует с полностью ионизованной плазмой. Именно такой процесс обычно рассматривается теоретически. Если же условие $\tau_b \ll \tau$ не выполняется, то наблюдаются две стадии образования плазмы. На первой стадии накопление плазмы описывается уравнением (15) и, когда плотность плазмы достигает критического значения, возникают СВЧ поля. Эти поля производят дополнительную ионизацию, которая и определяет стационарное значение плотности плазмы – возникает так называемый *плазменно-пучковый разряд* [28]. Если стационарное значение плотности плазмы определяется в основном не ударной ионизацией электронами пучка, а высокочастотным электрическим полем, то задача исследования взаимодействия пучка с плазмой усложняется. Плотность плазмы становится не внешним параметром, а определяется свойствами самого изучаемого явления. При этом в плазме возникают релаксационные колебания плотности. При оптимальном значении плотности плазмы, когда напряженность высокочастотного поля велика, происходит интенсивная ионизация газа [29]. Это, в свою очередь, приводит к повышению плотности плазмы, уходу от ее оптимального значения и уменьшению напряженности электрического поля. Цикл заканчивается достижением оптимального значения плотности плазмы.

Итак, метод создания плазмы в условиях $\tau_b \ll \tau$ очень привлекателен. Плотность плазмы плавно регулируется давлением газа и не зависит от интенсивности возбуждаемых полей. В обратном случае, когда условие $\tau_b \ll \tau$ не справедливо, задача взаимодействия пучка с плазмой чрезвычайно сложна.

Рассмотрим теперь вопрос: «Можно ли реализовать в лабораторной установке условие $\tau_b \ll \tau$?» Время распада плазмы определяется амбиполярной диффузией, т.е. $\tau = \frac{L}{\sqrt{\frac{T_e}{M_i}}}$. Будем считать, что $T_e = 4$ эВ,

и выберем тяжелый газ ксенон, тогда $\sqrt{\frac{T_e}{M_i}} = 3 \cdot 10^5$ см/с. Плазма находится

в сильном продольном магнитном поле, и ионы с $T_i = 3 \cdot 10^2$ эВ могут уходить из плазмы только на торцы, поэтому для $L = 30$ см получаем $\tau = 10^{-4}$ с. Оценим теперь величины τ_b для некоторых типичных случаев и для радиуса пучка $r_b = 0.5$ см.

$$eU = 1 \text{ кэВ} \quad \sigma = 10^{-16} \text{ см}^2 \quad I = 1 \text{ А} \quad n_b = 4.2 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3} \quad \tau_b = 1.25 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

$$eU = 10 \text{ кэВ} \quad \sigma = 10^{-17} \text{ см}^2 \quad I = 10 \text{ А} \quad n_b = 1.3 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3} \quad \tau_b = 1.25 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

$$eU = 500 \text{ кэВ} \quad \sigma = 10^{-18} \text{ см}^2 \quad I = 2 \text{ кА} \quad n_b = 6 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3} \quad \tau_b = 6 \cdot 10^{-5} \text{ с.}$$

Таким образом, для нерелятивистских пучков условие $\tau_b \ll \tau$ не выполняется, и при использовании самого простого метода — ионизации газа пучком — плотность плазмы определяется процессами в плазменно-пучковом разряде. Сильноточные релятивистские электронные пучки имеют длительность тока не более 1 мкс, поэтому стационарное состояние не достигается. Это означает, что плотность плазмы изменяется в течение импульса тока РЭП, а также, что максимальное значение плотности плазмы $n_p \ll N_0$. Это означает, что метод создания плазмы самим РЭП в релятивистской плазменной СВЧ электронике очень неудобен.

Работам по плазменной СВЧ электронике предшествовали экспериментальные исследования явления плазменно-пучковой неустойчивости. Эти исследования проводились на нерелятивистских электронных пучках, $eU < 30$ кэВ. В этих исследованиях плазма создавалась за счёт ионизации газа самим электронным пучком. С одной стороны, это позволило, во-первых, в простых экспериментах обнаружить явление плазменно-пучковой неустойчивости, во-вторых, открыть новый вид разряда — плазменно-пучковый разряд. Наконец, при такой постановке эксперимента удалось создать мощные источники шумового СВЧ излучения [30]. Тем не менее, оглядываясь назад, можно сказать, что для исследования физики взаимодействия пучка с плазмой желательно было бы создавать плазму дополнительным источником. В этом случае плотность плазмы становится независимым параметром, и интерпретация эксперимента упрощается.

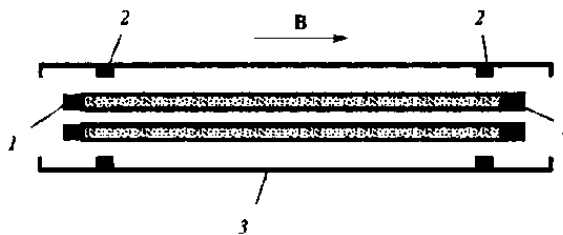


Рис. 7. Схема плазменного источника: 1 – катоды, 2 – аноды, 3 – диэлектрическая труба

При создании источников монохроматического СВЧ излучения в нерелятивистской СВЧ электронике плазма часто создавалась дополнительным источником. Одна из схем создания плазмы представлена на рис. 7 [6]. Разряд зажигался в газе (водород, воздух) при давлении $8 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-2}$ Тор между катодами – 1 и анодами – 2. Напряжение между электродами было равно 200 – 600 В, ток разряда 10 – 100 мА. Источник работал в однородном магнитном поле 60 – 900 Гс. Плотность плазмы изменялась от $8 \cdot 10^9$ до $5 \cdot 10^{10}$ см⁻³. Обратим внимание, что $N_0 = 3 \cdot 10^{14} - 7 \cdot 10^{14}$ см⁻³ $\gg n_p$. В плазменном СВЧ приборе электронный пучок с энергией электронов 300 – 1000 эВ и током 2 – 3 мА распространялся вдоль оси плазменного источника. Ток пучка был мал по сравнению с током разряда и, по-видимому, мало изменял величину плотности плазмы. В работах по нерелятивистской СВЧ электронике, как правило, не прово-

дидлись измерения плотности плазмы, а указывались только параметры разряда. Не измерялось также и пространственное распределение плотности плазмы.

В экспериментах плазменной релятивистской СВЧ электроники плазма создаётся дополнительным источником [30]. Схема плазменного источника показана на рис. 8. На оси вакуумной камеры располагается катод – 1, кольцо из вольфрама с разрезом. Катод нагревается током трансформатора – 2 до температуры $\sim 3100^\circ\text{K}$. На катод подаётся отрицательный относительно стенки волновода импульс от генератора – 3 ($U = 600 \text{ В}$, $T = 30 - 100 \text{ мкс}$). Эта электронная пушка в сильном продольном магнитном поле формирует трубчатый электронный пучок – 4 с поперечным сечением, равным сечению катода. Трубчатый электронный пучок ионизирует газ и создаёт плазму за счет ударной ионизации. Плазменный источник включался импульсно, обычно за 30 мкс (или за 100 мкс) до включения импульса тока ускорителя. Плотность плазмы в момент включения тока РЭП можно было регулировать изменением задержки между включением плазменного источника и ускорителя, изменением давления газа или изменением температуры катода.

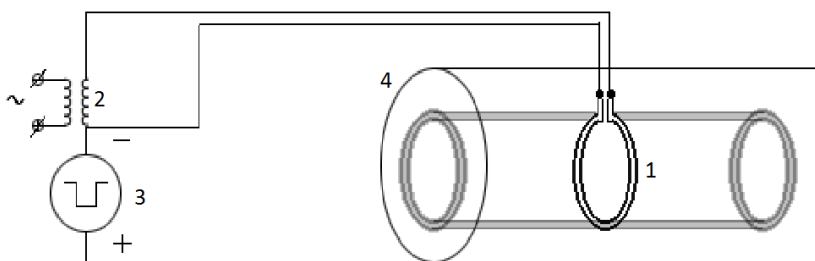


Рис. 8. Схема плазменного источника: 1 – катод, 2 – трансформатор нагрева катода, 3 – генератор импульса напряжения, 4 – электронный пучок

Может ли этот электронный пучок создать полностью ионизованную плазму? Оценим величину $\tau_b = 1/n_b \sigma u$ для следующих параметров $eU_0 = 600 \text{ эВ}$, $\sigma = 1.5 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2$, $I = 50 \text{ А}$, $S = 0.5 \text{ см}^2$. Получаем значение $\tau_b = 10 \text{ мкс}$, т.е. $\tau_b < \tau = 100 \text{ мкс}$, т.е. возможна полная ионизация газа, см. (16). Это наблюдалось экспериментально, и даже была измерена плотность плазмы, превышающая плотность газа в несколько раз. Это, возможно, объясняется образованием многократно ионизованных атомов ксенона. Второе возможное объяснение заключается в эффекте ионного насоса. Атом, попавший в сечение трубчатого электронного пучка, ионизуется и остается в этом сечении из-за действия магнитного поля. В результате плотность ионов в плазменной трубке может превышать плотность нейтральных атомов.

В плазме, полученной этим способом, развивается плазменно-пучковая неустойчивость. Это подтверждается регистрацией СВЧ излу-

чения из плазмы. Но электрические СВЧ поля сосредоточены в сечении трубчатой плазмы (согласно расчету), поэтому ионизация этими полями (если она и существенна) не приводит к уширению трубчатой плазмы.

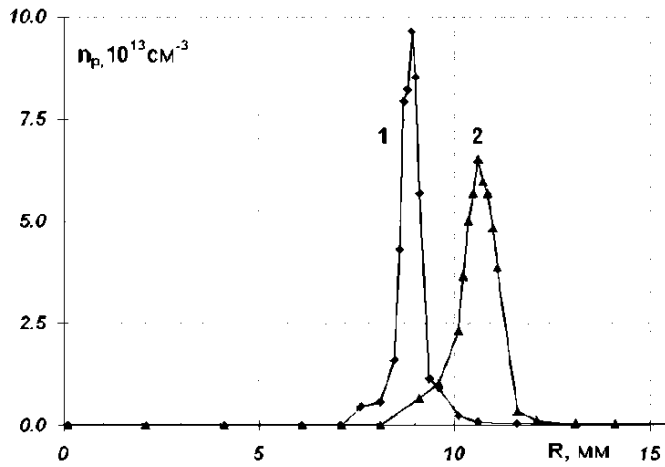


Рис. 9. Радиальный профиль плотности плазмы в дрейфовом пространстве:
 1 – магнитное поле в области катода плазменного источника ослаблено,
 2 – величина магнитного поля в области катода равна величине поля в дрейфовом пространстве

На рис. 9 представлен поперечный профиль плотности плазмы, видно, что толщина плазменной трубки примерно равна ширине вольфрамового кольца. Как будет ясно из последующих глав, реализация *плазменной трубки* с малой толщиной стенки по сравнению с её радиусом сыграла определяющую роль в создании плазменных релятивистских СВЧ источников.

Абсолютное значение плотности плазмы было измерено резонаторным СВЧ методом [30]. Было показано, что абсолютное значение плотности плазмы пропорционально току пучка, создающего плазму. Этот факт использовался в дальнейшем для относительных измерений плотности плазмы.

Напомним, что были измерены параметры РЭП в вакууме и параметры плазмы в отсутствие РЭП. Можно считать, что параметры РЭП и плазмы в момент влета электронного пучка в плазму известны. Никаких прямых измерений параметров РЭП, плазмы и электромагнитных полей в электродинамической системе плазменного релятивистского СВЧ генератора (ПРГ) или плазменного релятивистского СВЧ усилителя (ПРУ) в процессе взаимодействия РЭП с плазмой не проводилось.

5. СХЕМА И ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ РАБОТЫ ПРГ

Первые результаты экспериментального исследования плазменного релятивистского СВЧ-генератора были опубликованы в 1982 году [31]. Схема ПРГ представлена на рис. 10.

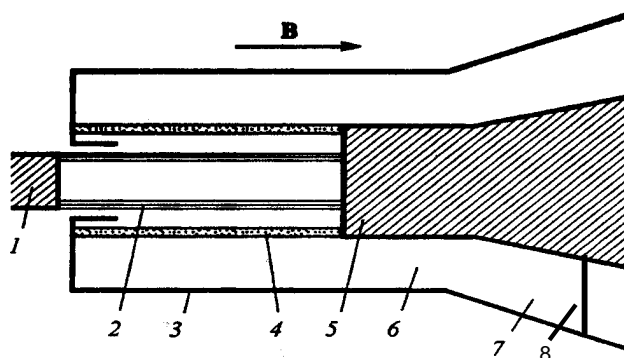


Рис. 10. Схема плазменного релятивистского СВЧ генератора: 1 – катод ускорителя, 2 – РЭИ, 3 – металлический волновод, 4 – плазма, 5 – коллектор РЭИ, 6 – коаксиальный вакуумный волновод, 7 – рупор, 8 – радиальный стержень

Отрицательный импульс высокого напряжения подается на катод ускорителя – 1. Электронный пучок – 2 инжектируется вдоль оси z круглого металлического волновода – 3, предварительно заполненного трубчатой плазмой – 4. Пучок и плазма находятся в однородном продольном магнитном поле, $B \equiv B_z$. Электроны пучка имеют только продольную компоненту скорости, $u \equiv u_z$. Длина электронного пучка и плазмы ограничивается торцом центрального проводника – 5 коаксиального выходного излучающего устройства – 6. Ток РЭИ и ток плазмы проходят по коллектору и замыкаются на металлический волновод – 3. В первых экспериментах ток замыкался через металлические радиальные стержни – 8, расположенные в области рупора – 7. СВЧ волна возбуждается в плазменном волноводе, затем распространяется по вакуумному коаксиальному волноводу – 6 и потом излучается рупором – 7.

В эту схему заложены следующие основные идеи.

1. Радиус трубчатой плазмы больше радиуса пучка, и поэтому плазма не попадает в диод сильноточного ускорителя. Другой способ разделения областей плазма-диод состоит в использовании тонкой металлической фольги, прозрачной для релятивистских электронов. Однако применение фольги приводит к появлению поперечной компоненты скорости электронов, что резко снижает эффективность черенковского взаимодействия.

2. Групповые скорости плазменных волн E_{01} и E_{02} при $k_z = 0$ значительно больше отличаются в трубчатой плазме, чем в сплошной цилиндрической плазме с таким же радиусом. Это облегчает *селекцию мод*, т.е. в более широких пределах изменения плотности плазмы электронный пучок может возбуждать только одну поперечную моду E_{01} . Это утверждение поясняется ниже при обсуждении рис. 11.

3. Подбирая радиусы трубчатой плазмы и трубчатого РЭП, можно осуществлять селекцию мод. Например, если $r_b < r_p$, можно возбуждать моды, имеющие большое значение E_z внутри трубчатой плазмы и малое значение E_z при $r = r_b < r_p$.

4. Все поперечные размеры (пучок, плазма, волновод), а также плотности плазмы и пучка, величина магнитного поля постоянны вдоль длины. Это обстоятельство значительно упрощает теоретический анализ.

Постоянные параметры плазмы и пучка вдоль оси волновода обеспечиваются однородностью магнитного поля и применением коллектора в виде торца центрального проводника коаксиального волновода. В вакуумных черенковских релятивистских СВЧ источниках электронный пучок проходит электродинамическую систему в сильном однородном поле и затем высаживается на боковые стенки волновода в области ослабленного магнитного поля. Если использовать эту схему коллектора, то в области коллектора плазма будет неоднородна вдоль длины. Кроме того, при использовании такой схемы для плазменного СВЧ источника возникает опасность возникновения *резонансного поглощающего* вблизи боковой стенки волновода, где может выполняться равенство частоты излучения и гибридной частоты $\omega^2 = \omega_p^2 + \Omega_e^2$. Если магнитное поле однородно и $\Omega_e > \omega_p$, то образование резонансного поглощающего слоя невозможно.

5. Значительная часть энергии возбуждаемой волны содержится в вакуумном зазоре между плазмой и стенкой волновода. Близость структуры поля этой части плазменной волны к структуре волны ТЕМ коаксиального излучающего устройства, высокая фазовая скорость, близкая к скорости света, обеспечивают высокую эффективность вывода энергии медленной плазменной волны в коаксиальное излучающее устройство.

6. Применение коаксиального выходного излучающего устройства обеспечивает возможность эффективного вывода излучения в широкой полосе частот.

Дисперсия плазменного волновода в конечном магнитном поле показана на рис. 11 [12]. На нём также изображена кривая, соответствующая дисперсии медленной пучковой волны, для $eU = 500$ кэВ, $I_b = 2$ кА, $r_b = 0.6$ см, $\Delta r_b = 0.1$ см. В окрестности пересечения этой кривой дисперсионных кривых плазмы происходит возбуждение плазменных волн. На рис. 11 представлено семейство кривых – 1. Это медленные плазменные азимутально-симметричные моды E_{01} , E_{02} , E_{03} и E_{04} ,

Все они имеют частоту $\omega = 0$ при $k_z = 0$ и частоту $\omega = \omega_p$ при $k_z \rightarrow \infty$. Кроме того, на рис. 11 представлено семейство кривых – 2. При малых k_z это быстрые волны, структура поля которых близка к структуре E -мод пустого волновода (изображены только азимутально-симметричные моды).

Добавление плазмы при малых k_z приводит только к сдвигу вакуумных аналогов E -мод вверх по частоте. Однако при больших значениях k_z эти моды в присутствии плазмы становятся медленными и при $k_z \rightarrow \infty$ их частота стремится к значению $\sqrt{\omega_p^2 + \Omega_e^2}$. Из рис. 11 следует, что электронный пучок может возбуждать низшую аксиально-симметричную моду E_{01} на частотах в окрестности точки «а» и другие моды из семейства кривых – 2. Низшая по частоте мода семейства – 2 может возбуждаться в точке «б». Как следует из рис. 11 (а) и рис. 11 (б), компонента высокочастотного поля максимальна внутри плазмы при $r = r_p$ и спадает к оси. Однако на радиусе пучка ($r = r_b$) поле E_z в точке «а» спадает в 1.8 раза, а в точке «б» в 3,8 раза. Это позволяет возбуждать только моду E_{01} и не возбуждать волны в точке «б». E_z -поле в более высокочастотных резонансах семейства кривых – 2 сосредоточено практически только в плазме, и поэтому эти волны пучком с $r_b < r_p$ возбуждаться не могут. Обратим внимание ещё раз на утверждение, сделанное выше в пункте 2, о том, что групповые скорости мод E_{01} и E_{02} при $k_z = 0$ у трубчатой плазмы сильно отличаются (в данном случае более чем в 4 раза), рис. 11. Это позволяет изменять в широких пределах только один параметр – плотность плазмы, возбуждая моду E_{01} и не возбуждая моду E_{02} .

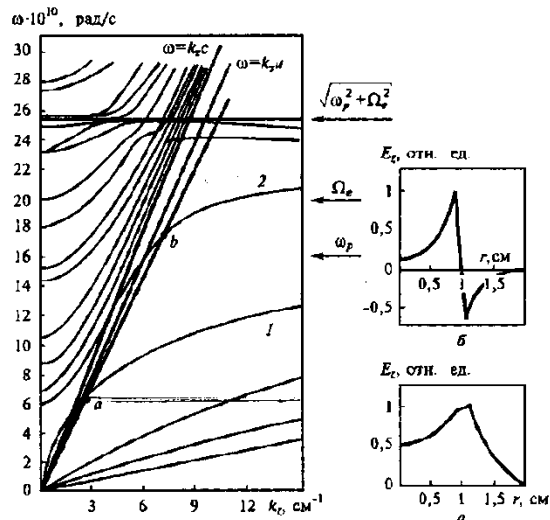


Рис. 11. Дисперсия плазменного волновода ($R = 2$ см, $r_p = 1$ см, $\Delta r_p = 0.2$ см, $\omega_p = 1.6 \cdot 10^{11}$ рад/с, $\Omega_e = 2 \cdot 10^{11}$ рад/с) и электронного пучка ($eU = 500$ кэВ, $I_b = 2$ кА, $r_b = 0.6$ см, $\Delta r_b = 0.1$ см) – слева. Справа – радиальная структура компоненты электрического поля E_z в резонансных точках **а** и **б**, выделенных на рис. 11, слева

Картина силовых линий электрического поля в точке «а» рис. 11 изображена на рис. 12, она качественно подтверждает распределение $E_z(r)$, показанное на рис. 11.

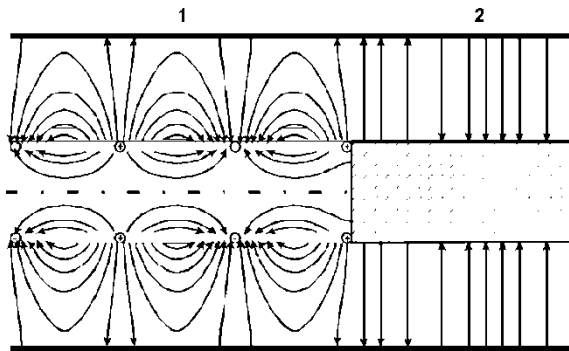


Рис. 12. Картина силовых линий электрического поля в ПРГ, соответствующая точке *а*) на рис. 11. Область плазменного волновода – 1, металлический коаксиальный волновод – 2

На рис. 12 видно, что компонента электрического поля E_z максимальна в плазме и спадает как к оси, так и к стенке волновода. Нетрудно также догадаться, что энергия поля вне плазмы велика, когда длина волны $2\pi/k_z \geq R - r_p$. Анализируя рис. 12 можно сделать два важных вывода. Во-первых, распределение поля в зазоре между плазмой и стенкой волновода напоминает картину поля *ТЕМ* моды коаксиального волновода. Это способствует хорошей трансформации этой волны в волну коаксиального металлического волновода, через которое излучение выводится в окружающее пространство. Во-вторых, на стенке металлического волновода поле относительно малое (особенно при небольших длинах волн) и имеет только радиальную компоненту. Это обстоятельство, а также наличие сильного внешнего продольного магнитного поля снижает вероятность *высокочастотного пробоя на стенке волновода*.

Большинство исследований ПРГ проведены в режиме одиночных импульсов, которые повторяются с периодом в несколько минут. Последовательность включения элементов электрической схемы ПРГ представлена на рис. 13. Сначала включается импульсное магнитное поле с периодом 7 мс. Здесь приводятся конкретные значения времени для первых экспериментов, в которых длительность импульса тока РЭП была 30 нс. Импульсное поле с такой длительностью проникает сквозь стенки вакуумной камеры, выполненные из нержавеющей стали. В результате, несмотря на разную толщину стенок вакуумной камеры, магнитное поле на оси камеры однородно. Через 3,5 мс, когда магнитное поле достигает максимального значения, включается плазменный источник. Через время ~ 30 мкс после включения плазменного источника плотность плазмы достигает максимального значения. В этот момент времени подается импульс отрицательного напряжения на катод ускорителя длительностью 30 нс. Величину магнитного поля как в процессе создания плазмы, так и при прохождении РЭП через плазму можно считать неизменной во времени.

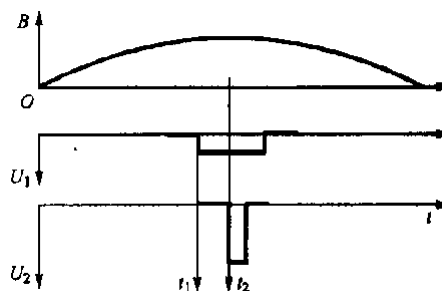


Рис. 13. Последовательность включения элементов электрической схемы ПРГ в первых экспериментах. B – индукция магнитного поля, U_1 – напряжение на катоде плазменного источника, U_2 – напряжение на катоде ускорителя.
 $t_1 = 3.5$ мс, $t_2 = t_1 + 30$ мкс

5.1. Результаты исследований ПРГ с малой длительностью импульса тока пучка и сравнение с расчетом

Первые эксперименты проводились при следующих условиях: радиус плазмы $r_p = 7$ мм, радиус пучка $r_b = 6$ мм, радиус металлического волновода $R = 18$ мм, длина плазмы $L = 10$ см ÷ 20 см, величина магнитного поля $B = 1.2$ ÷ 2.2 Т, плотность плазмы $n_p = 0$ ÷ $8 \cdot 10^{13}$ см⁻³, энергия электронов пучка $eU = 0.5$ МэВ и ток пучка $I = 2$ ÷ 5 кА. Длительность импульса тока РЭП 30 нс. Исследовалось изменение мощности и спектра СВЧ-излучения при изменении плотности плазмы от одного импульса к другому и длины плазмы в другой серии экспериментов.

Зависимости полной энергии СВЧ импульса от плотности плазмы показаны на рис. 14 [32].

Полная энергия СВЧ импульса измерялась калориметром [33]. Кривые сняты для нескольких длин плазменного волновода ($L = 10, 12.5, 15, 20$ см). При $L = 20$ см энергия СВЧ импульса в широком диапазоне значений плотности плазмы почти постоянна и равна 0.7 - 0.9 Дж. Полная энергия РЭП в одном импульсе ≈ 30 Дж (500 кэВ, 2 кА, 30 нс). Это означает, что эффективность преобразования энергии электронного пучка в энергию излучения равна 2.5-3 %. Длительность СВЧ импульса равна 20 нс, так что мощность излучения находится в пределах от 35 до 50 МВт, а к.п.д. по мощности равно 3.5-5 %.

Излучение при $L = 20$ см (кривая 1) возникает, когда плотность плазмы равна $2.5 \cdot 10^{12}$ см⁻³. Это значение близко к расчетному значению критической плотности плазмы $n_p = 3 \cdot 10^{12}$ см⁻³, при котором возникает черенковская неустойчивость, т.е. когда пространственный коэффициент усиления $\delta k > 0$, рис. 15 [32].

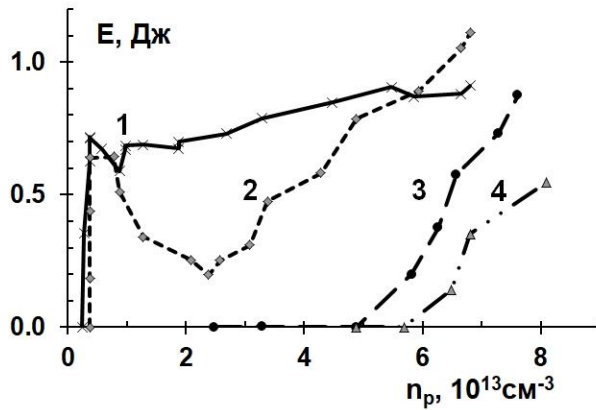


Рис. 14. Зависимости полной энергии излучения W от плотности плазмы n_p для нескольких длин плазменного волновода L , 1 – $L = 20$ см, 2 – 15 см, 3 – 12.5 см, 4 – 10 см. Условия эксперимента: $B = 2.2$ Т, $r_p = 0.9$ см, $r_b = 0.6$ см, $p = 4.5 \cdot 10^{-4}$ Тор (ксенон)

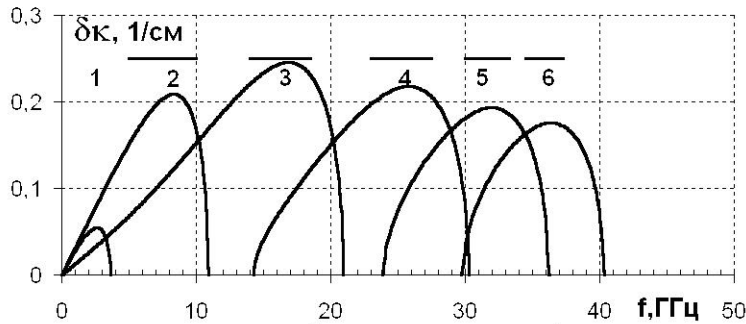


Рис. 15. Зависимость инкремента δk от частоты f для разных значений плотности плазмы, 1 – 0.3, 2 – 0.8, 3 – 2.3, 4 – 4.4, 5 – 6, 6 – 7 10^{13} $см^{-3}$

Из рис. 15 следует, что с увеличением плотности плазмы от уровня $n_p \approx 3 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$ до значения плотности $n_p \approx 3 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ инкремент неустойчивости возрастает, а затем уменьшается. Поэтому увеличение порога по плотности на рис. 14 от $n_p \approx 2.5 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$ до $n_p \approx 4 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$ при переходе от длины 20 см к длине 15 см не противоречит расчёту. При переходе к длине 12.5 см согласно расчёту излучение должно было возникнуть при $4 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3} < n_p < 3 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, поскольку при $n_p > 3 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ инкремент уменьшается. В эксперименте излучение возникает при более высоком значении плотности плазмы $n_p \approx 5 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$. Это расхождение находится в пределах точности как расчёта, так и эксперимента.

Итак, совпадение расчетного значения пороговой плотности плазмы, найденного из условия $\delta k > 0$, с экспериментальным значением для достаточно большой длины плазмы свидетельствует о черенковском механизме возбуждения медленной плазменной волны E_{01} . Важно, что в

широком диапазоне значений плотности плазмы энергия излучения почти постоянна ($L = 20$ см). Физическая причина этого факта состоит в постоянстве оптимальной длины усиления в широком диапазоне значений плотности плазмы [12].

Спектры излучения ПРГ для различных значений плотности плазмы при длине плазменного волновода $L = 20$ см показаны на рис. 16 [32].

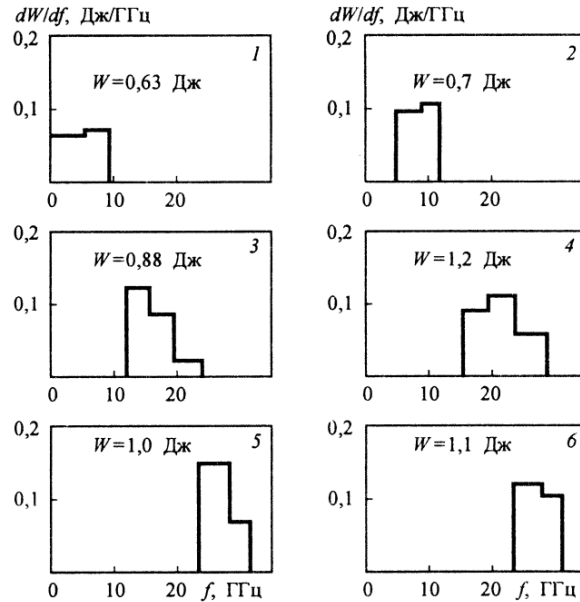


Рис. 16. Спектры ПРГ для нескольких значений плотности плазмы: 1 – $n_p = 4 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$, 2 – $9 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$, 3 – $2 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, 4 – $4,5 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, 5 – $6 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, 6 – $7 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$. На каждом из графиков указана полная энергия СВЧ импульса в Джоулях

На каждом из шести графиков указана полная энергия импульса СВЧ-излучения в Джоулях. Видно, что средняя частота излучения увеличивается от 4 до 28 ГГц при изменении плотности плазмы от $4 \cdot 10^{12}$ до $7 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$. Точность измерения ширины спектра невелика. Из наших измерений следует, что ширина спектра превышает ширину полосы спектрометра, т.е. $\Delta f > 3$ ГГц. Такой вывод нельзя сделать, если спектрометр имеет разрешение ~ 3 ГГц и проведено однократное измерение. Вывод о том, что $\Delta f > 3$ ГГц, следует из двух фактов. Было обнаружено, что средняя частота излучения плавно зависит от плотности плазмы и что ширина спектров для разных значений плотности плазмы всегда превышает ширину полосы спектрометра. Максимально возможная ширина спектра определяется границами, указанными на рис. 16, т.е. составляет 2 или 3 полосы спектрометра. Итак, уже в первых экспериментах было показано, что в условиях, при которых реализуется широкая перестройка частоты, СВЧ импульс имеет широкий спектр.

Сравнение расчетной зависимости средней частоты излучения от плотности плазмы для СВЧ-усилителя в предположении $B \rightarrow \infty$ с экспериментальными зависимостями для ПРГ для двух значений магнитного поля $B = 1.2 \text{ Т}$ и $B = 2.2 \text{ Т}$ приведено на рис. 17.

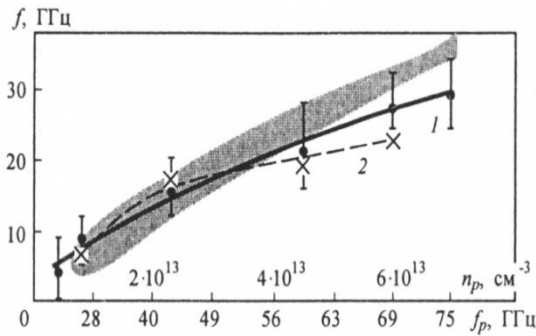


Рис. 17. Зависимости средней частоты излучения от плотности плазмы (плазменной частоты $f_p = \omega_p/2\pi$). Кривые 1 – $B = 2.2 \text{ Т}$ и 2 – $B = 1.2 \text{ Т}$ получены в эксперименте, заштрихованная область – расчет по нелинейной теории. Вертикальные отрезки на кривой 1 указывают максимально возможную измеренную ширину спектра

Заштрихована область, где по расчёту $dP/df > 0.3 (dP/df)_{\max}$. Видно, что в области малых значений плотности плазмы (малых частот излучения) результаты эксперимента совпадают с расчётом. При больших значениях плотности плазмы возникает расхождение между расчётом и экспериментом. Например, в эксперименте для $n_p = 6 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ при $\Omega_e = 0.5\omega_p$ частота излучения f равна 21 ГГц и с увеличением магнитного поля $\Omega_e = 0.9\omega_p$ частота излучения возрастает до $f = 27 \text{ ГГц}$. По расчёту для $n_p = 6 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ при $\Omega_e \gg \omega_p$ частота $f = 32 \text{ ГГц}$. Напомним, что при $\Omega_e < \omega_p$ будет возбуждаться ветвь колебаний, частота которой стремится

$$\text{к } \sqrt{\frac{\omega_p^2 + \Omega_e^2}{2}} \text{ при } k_z \rightarrow \infty, \text{ а не к } \omega_p, \text{ как это имеет место при } \Omega_e > \omega_p \text{ [12].}$$

Это означает, что частота резонанса при фиксированном значении плотности плазмы и уменьшении величины магнитного поля должна уменьшаться. Таким образом, расхождение между расчётом и экспериментом может объясняться невыполнением в эксперименте условия $\Omega_e > \omega_p$ при больших значениях плотности плазмы.

На рис. 17 (вертикальные отрезки на кривой 1) показаны максимально возможные ширины экспериментальных спектров. Как уже было указано, ширина спектра измеряется грубо. Тем не менее, можно утверждать, что при малых значениях плотности плазмы ширина экспериментального спектра примерно равна расчетной, а при больших значениях ширина экспериментального спектра превышает расчётные значения.

Совпадение экспериментальной и расчетной зависимостей частоты излучения от плотности плазмы $f(n_p)$ при выполнении условия $\Omega_e > \omega_p$ является наиболее надежным доказательством того, что действительно возбуждается низшая по радиальному индексу азимутально-симметричная мода медленной плазменной волны.

Как известно, заполнение волновода плазмой позволяет транспортировать токи, превышающие значение предельного вакуумного тока I_0 , поэтому представляет интерес исследовать зависимость мощности СВЧ излучения от величины тока. Все результаты, приведенные выше, были получены при токе 2 кА, тогда как предельный вакуумный ток был равен 3.5 кА. Повышение тока пучка до 3 кА не привело к увеличению мощности СВЧ генерации. Согласно теории [12] максимальная мощность достигается при токе пучка $I = 0.45 I_0$, в эксперименте получен близкий результат $I = 0.6 I_0$. Подчеркнем, что соотношение $I = 0.45 I_0$ справедливо при коэффициенте связи плазменной и пучковой волн, равном единице. В данном эксперименте коэффициент связи был близок к единице.

Таким образом, экспериментально доказано, что в плазменном релятивистском черенковском СВЧ генераторе в широком диапазоне значений плотности плазмы возбуждается низшая по радиальному индексу азимутально-симметричная собственная медленная волна плазменного волновода. Впервые получена электронная перестройка частоты в 7 раз от 4 до 28 ГГц на уровне мощности 30-50 МВт за счет изменения одного параметра — плотности плазмы. С прикладной точки зрения важно, что такая перестройка частоты может быть осуществлена в импульсно-периодическом режиме работы ускорителя с частотой следования импульсов 1 кГц. Время 1 мс между импульсами ускорителя с запасом достаточно, чтобы плазма от предыдущего импульса распалась и была заготовлена новая плазма с другой плотностью.

Существует простой способ увеличения транспортируемого тока в ПРГ. Он заключается в увеличении отношения радиуса электронного пучка к радиусу волновода. При этом радиус плазмы не изменяется, то есть радиус пучка становится больше радиуса плазмы. В этой геометрии пучок распространяется в области, где продольная компонента электрического поля плазменной волны мала и коэффициент связи уменьшается. При переходе к этой геометрии мы можем увеличить ток пучка I , не увеличивая при этом отношение I/I_0 , но снижаем эффективность взаимодействия.

Перейдем к описанию эксперимента, в котором радиус пучка превышал радиус плазмы [34]. В волноводе с радиусом $R = 3.05$ см создавалась плазма длиной 19 см и радиусом $r_p = 1.5 - 1.75$ см. РЭП имел следующие параметры: радиус $r_b = 2.05 - 2.15$ см, ток РЭП изменялся от 2.5 до 5 кА при ускоряющем напряжении 400 кВ. Радиус коллектора РЭП был равен $r_c = 1.95$ см. Величина магнитного поля была равна $1.2 T$ по всей длине плазмы до торца коллектора. Затем в области коаксиального волновода 6 (рис. 10) магнитное поле уменьшалось, и пучок высаживался на внешнюю стенку коаксиального волновода 6.

Была получена зависимость энергии СВЧ импульса от плотности плазмы. Максимальный уровень энергии импульса 0.8 Дж был получен при токе РЭП 3.8 кА, что соответствует величине СВЧ мощности 40 МВт. Увеличение тока от 3.8 кА до 5 кА приводило к уменьшению мощности излучения. Такой же эффект уменьшения мощности с ростом тока наблюдался и при инъекции РЭП внутри плазмы. Были проведены измерения спектра генератора. Измерения спектров проводились методом запердельных волноводов. Излучение, прошедшее через запердельные волноводы, регистрировалось СВЧ-детектором. Этот метод позволял измерять спектр с разрешением 1 ГГц. В результате было установлено, что перестройка частоты составляет 2 ГГц с нижней границей более 7 ГГц и верхней менее 9 ГГц. Итак, если радиус пучка превышает радиус плазмы, то не удаётся получить повышение мощности СВЧ излучения, кроме того, исчезает возможность управления частотой излучения. Это обусловлено тем, что при большом различии между радиусами пучка и плазмы коэффициент связи пучковой и плазменной волн мал и сильно зависит от частоты, рис. 18.

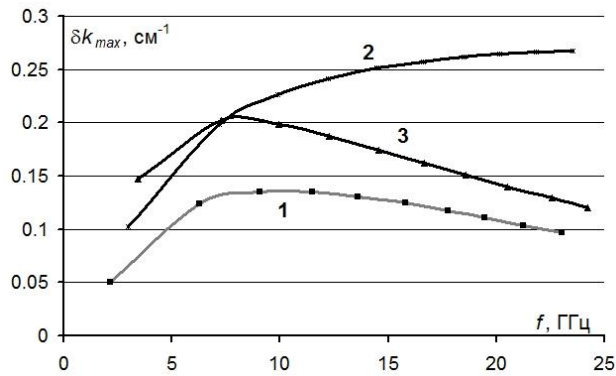


Рис. 18. Расчётная зависимость максимального значения пространственного инкремента δk_{max} от частоты (400 кэВ, 2.5 кА, $R = 3.05 \text{ см}$, $r_p = 1.6 \text{ см}$).
 1 – $r_b = 2.1 \text{ см}$, 2 – $r_b = 1.8 \text{ см}$, 3 – $r_b = 1.1 \text{ см}$

На рис. 18 приведена расчётная зависимость максимального значения пространственного инкремента от частоты. Каждая точка этого графика соответствует различным значениям плотности плазмы, при которых наблюдается δk_{max} . Продольная компонента электрического поля E_z плазменной волны максимальна на радиусе плазмы, см. рис. 11, причём к оси волновода E_z спадает медленно, а при $r > r_p$ более быстро. Поэтому при большом радиусе пучка $r_b/r_p = 1.4$ (кривая – 1) инкремент δk_{max} мал и имеет максимум в области частот 10 ГГц, то есть примерно в той области частот, где наблюдалась генерация СВЧ излучения в эксперименте. Качественно это объясняет отсутствие возможности перестройки частоты в эксперименте. Кривая 3 представляет зависимость $\delta k_{max}(f)$ в условиях, когда $r_b < r_p$ при таком же зазоре между плазмой и пучком, как и на

кривой 1. Видно, что из-за медленности спада E_z к оси, см. рис. 11, величина δk_{max} значительно больше, чем на кривой 1. Наконец, если радиус пучка близок к радиусу плазмы $r_b/r_p = 1.1$ – кривая 2, то величина δk_{max} велика в широком диапазоне частот, то есть появляется возможность перестройки частоты СВЧ генератора в широком диапазоне частот. Заметим, что расчёт проведён в приближении бесконечно малой толщины стенок трубчатых плазмы и пучка. В эксперименте трубчатые плазма и пучок имеют конечную толщину, поэтому зазор между средними радиусами плазмы и пучка неизбежен, поскольку пучок и плазма в радиальном направлении должны быть разделены. Такое разделение обеспечивает отсутствие плазмы в диоде ускорителя. Отсюда следует, что для достижения возможности перестройки в широком диапазоне частоты в эксперименте желательно иметь малый зазор между пучком и плазмой, а также иметь пучок с радиусом меньшим, чем радиус плазмы.

В эксперименте при энергии электронов 500 кэВ ускоритель может создать пучок с током 10 кА, то есть при реальном к.п.д. для черенковских СВЧ приборов 20 % можно рассчитывать на мощность излучения около 1 ГВт. Оценим часть мощности ускорителя, которую можно использовать для эффективного возбуждения плазменной волны. К сожалению, в плазменном СВЧ приборе использование высокого значения тока невозможно. Как следует из рис. 12, энергия плазменной волны находится во всём сечении волновода как при $r > r_p$, так и при $r < r_p$. Поэтому для обеспечения эффективного излучения плазменной волны из плазменного волновода в излучающий рупор необходимо, чтобы доля энергии волны при $r < r_p$ была мала. Это означает, что радиус плазмы должен быть существенно меньше радиуса волновода, например, $r_p/R \approx 0.3$. Для достижения высокой эффективности взаимодействия пучка с плазменной волной и сохранения возможности управления частотой излучения необходимо, чтобы радиус пучка был близок к радиусу плазмы. При $r_b/R \approx 0.3$ и $eU = 500$ кэВ абсолютное значение предельного вакуумного тока мало, $I_0 \sim 3.4$ кА. Оптимальное значение тока I для эффективного возбуждения плазменной волны $I = 0.45 I_0$ [12], то есть в нашем примере $I = 1.5$ кА $\ll 10$ кА. В плазменной СВЧ электронике, несмотря на возможность транспортировки тока $I > I_0$ [12], сохраняется *проблема использования больших токов* сильноточных ускорителей при заданной энергии электронов.

Самый простой способ повышения мощности СВЧ источника, с точки зрения физики (но не техники), состоит в одновременном увеличении энергии электронов и тока пучка. Например, в ПРГ на пучке с энергией электронов 1 МэВ и токе пучка 5 кА была достигнута мощность СВЧ излучения $P = 500$ МВт [35].

Для некоторых приложений важно на выходе СВЧ генератора возбуждать моду H_{11} . Для этого на выходе ПРГ помещался преобразователь моды ТЕМ в моду H_{11} . Было показано, что РЭП с энергией электронов 570 кэВ и током 3 кА генерирует в излучающем рупоре только моду H_{11} с мощностью 100 МВт (КПД ≈ 6 %) [36]. Наличие моды H_{11} регистри-

ровалось по прожиганию СВЧ-излучением металлизированной диэлектрической плёнки, расположенной на апертуре рупора.

5.2. Плазменный релятивистский генератор микросекундной длительности СВЧ импульса

Описанные выше эксперименты были выполнены при длительности импульса тока РЭП 30 нс, и было получено излучение на частотах более 4 ГГц. Одним из основных параметров источника СВЧ излучения является его спектр, а он измерялся грубо при помощи полосовых фильтров. Сейчас существуют скоростные осциллографы с регистрацией одиночных импульсов с полосой частот до 30 ГГц. Они позволяют получать зависимость напряжённости электрического поля излучения от времени. Обработка этих осциллограмм даёт полную информацию об излучении в данной точке пространства, в том числе и спектр. Мы располагали относительно низкочастотными осциллографами, сначала с полосой частот до 3 ГГц, а затем с полосой частот до 4 ГГц, поэтому была создана новая экспериментальная установка, рассчитанная на генерацию частот менее 3 ГГц. Переход к микросекундной (≤ 1 мкс) длительности импульса тока РЭП позволяет перейти к генерации таких частот.

Исследование ПРГ при микросекундной (≤ 1 мкс) длительности импульса тока РЭП было направлено также на выяснение возможностей получения в плазменных релятивистских СВЧ источниках мощных СВЧ импульсов с большой (≤ 1 мкс) длительностью. Одной из основных проблем вакуумной релятивистской СВЧ электроники является так называемый эффект «укорочения СВЧ импульса» [37-40], который проявляется следующим образом. Релятивистский электронный пучок инжектируется в электродинамическую систему, начинается процесс генерации мощного СВЧ излучения, но через некоторое время этот процесс полностью прекращается, хотя ток электронов пучка в момент срыва СВЧ импульса не изменяется. Поэтому рекордные значения мощности на уровне 1 – 4 ГВт получены в СВЧ импульсах длительностью менее 30 нс.

Причиной эффекта укорочения СВЧ импульса в вакуумной релятивистской СВЧ электронике является появление плазмы в различных частях установки. Плазма взрывоэмиссионного катода, разлетаясь поперек магнитного поля, приводит к изменению формы РЭП и нарушению условий его оптимального взаимодействия с электродинамической структурой. Плазма, образующаяся на коллекторе в результате его бомбардировки электронами, распространяется навстречу сильнооточному РЭП со скоростью до 10^8 см/с и может проникнуть в электродинамическую структуру или просто «запереть» излучение, не давая ему выйти из прибора. И наконец, плазма может рождаться непосредственно на стенках электродинамической структуры вследствие СВЧ-пробоя.

Срыв процесса генерации может происходить из-за изменения качества пучка в течение 1 мкс. Необходимо, чтобы электронный пучок имел постоянный радиус и разброс электронов по поперечным скоростям

был мал. В разделе 2 показано, что электронный пучок, формируемый на поперечно-лезвийном катоде, имеет стабильный радиус. Экспериментально доказано, что электронный пучок, формируемый на поперечно-лезвийном катоде, имеет малый разброс углов между скоростью электронов и силовой линией магнитного поля. Оказалось, что угловой разброс не превышает всего нескольких градусов по всему сечению электронного потока в течение всего импульса тока микросекундной длительности. Это означает, что такой электронный поток полностью отвечает всем требованиям для использования в черенковском СВЧ генераторе большой мощности и микросекундной длительности импульса.

Проблема коллекторной плазмы в вакуумной релятивистской СВЧ-электронике также решается. Самый простой способ состоит в увеличении площади коллектора с целью снижения плотности энергии, выделяемой электронами пучка на коллекторе. Если плотность энергии ниже пороговой ($0.1 - 1 \text{ Дж/см}^2$), то плазма не создается. Другой способ состоит в удалении коллектора от электродинамической системы на достаточно большое расстояние.

Самым серьезным препятствием на пути преодоления эффекта укорочения СВЧ-импульса плазмы в вакуумной релятивистской СВЧ электронике оказалось образование плазмы на стенках электродинамической структуры. При прохождении через электродинамическую структуру электронный поток частично разрушается под действием сильного СВЧ поля, и часть электронов, сравнительно небольшая, оседает на стенках. Тем не менее, эта бомбардировка стенок электронами инициирует образование плазмы, объем которой быстро возрастает вследствие пристеночного СВЧ разряда [41]. Единственной возможностью уменьшить число оседающих на стенки электронов является увеличение расстояния от электронного пучка до поверхности электродинамической структуры. К сожалению, в рамках вакуумной сильноточной электроники возможность увеличить это расстояние сильно ограничена. В наиболее удачном приборе вакуумной релятивистской СВЧ электроники, использующем для замедления волны гофрированный волновод, пучок должен иметь радиус, близкий к радиусу волновода. Это связано с тем, что компонента электрического поля, с которой взаимодействуют электроны пучка, максимальна у стенки волновода и резко уменьшается на меньших радиусах. Поэтому для достижения высокой эффективности СВЧ прибора радиус трубчатого пучка должен быть близок к радиусу гофрированного волновода. Кроме того, увеличение расстояния между пучком и стенкой волновода приводит к росту электростатического потенциала пучка, снижению кинетической энергии электронов и, следовательно, мощности СВЧ-излучения. В реальных СВЧ приборах сильноточной электроники сантиметрового диапазона длин волн зазор между электронным пучком и металлической стенкой не превышает, как правило, нескольких миллиметров. Таким образом, оказалось, что существует механизм ограничения длительности СВЧ-импульсов, трудно устранимый в приборах вакуумной релятивистской электроники.

Плазменная СВЧ электроника, однако, позволяет преодолеть это препятствие. Выше указывалось, что в ПРГ с коаксиальной геометрией электронный пучок экранирован снаружи более плотной плазмой, находящейся на небольшом (нескольких миллиметрах) расстоянии от пучка, рис. 10. В такой ситуации электростатическое поле РЭП не мешает поместить электронный пучок и плазму в металлический волновод с радиусом, значительно превышающим радиус пучка, и избежать попадания электронов РЭП на стенки. Кроме того, напряжённость электрического поля плазменной волны при удалении от плазмы быстро уменьшается, рис. 11, и на стенке волновода электрическое поле имеет значительно меньшую амплитуду, чем в плазме. Таким образом, в ПРГ можно сравнительно легко устранить одну из главных причин укорочения СВЧ импульса вакуумной релятивистской СВЧ электроники – СВЧ пробой на стенке электродинамической структуры.

Перейдём к описанию результатов исследования ПРГ с электронным пучком микросекундной длительности [42]. Схема этого СВЧ генератора совпадает со схемой, приведённой на рис. 10. Для генерации частот менее 3 ГГц были увеличены диаметры волновода, пучка, плазмы и длина плазмы ($R = 6$ см, $r_b = 2.2 \div 2.35$ см, $r_p = 2.65 \div 2.9$ см, $L = 70$ см, $B = 1.7 \text{ Т} \div 2.2 \text{ Т}$, $I = 2.5 - 1.6$ кА, $eU = 500 - 400$ кэВ). Формы импульсов напряжения и тока пучка представлены на рис. 19.

Длительность переднего фронта импульса напряжения на катодe 40 нс, полная длительность равна 700 нс. От 40 до 700 нс амплитуда напряжения непостоянна, изменяется от 540 до 370 кэВ, что осложняет интерпретацию результатов эксперимента.

Результаты измерения спектра СВЧ генератора в разные отрезки времени и результаты численного расчёта спектра приведены на рис. 20. Результаты численного моделирования получены с помощью кода «КАРАТ». Решалось уравнение Максвелла и релятивистское уравнение движения частиц. Использовалась осесимметричная геометрия. Пучок моделировался методом крупных частиц. Зависимости энергии электронов и тока пучка от времени повторяли экспериментальные зависимости рис. 19. Плазма считалась линейной средой с неизменными во времени свойствами.

Обратим внимание на то, что с ростом плотности плазмы средняя частота излучения растёт как в эксперименте, так и в расчёте. Сначала рассмотрим результат расчёта. Спектры состоят из линий на выделенных частотах, причём частоты этих линий с точностью до 1 % не изменяются во времени. Итак, если плотность плазмы не изменяется во времени, а энергия электронов пучка изменяется значительно от 380 до 500 кэВ, то значения выделенных частот не изменяются. Изменяется только соотношение амплитуд этих линий в течение СВЧ импульса.

Для объяснения данных результатов учтем то, что в плазменном генераторе возбуждается собственная волна плазменного волновода, частота которой $\omega(k_z)$ зависит от плотности плазмы, но не зависит от параметров пучка. Поскольку длина генератора ограничена, то продольное волновое число k_z принимает только дискретные значения

$$k_z = \frac{N\pi}{L} \equiv k_{zN}, \quad (17)$$

где u – скорость электронов, N – номер продольной моды, L – длина генератора. Следовательно, в генераторе могут быть возбуждены волны с дискретным набором частот

$$\omega = \omega(k_{zN}) \equiv \omega_N. \quad (18)$$

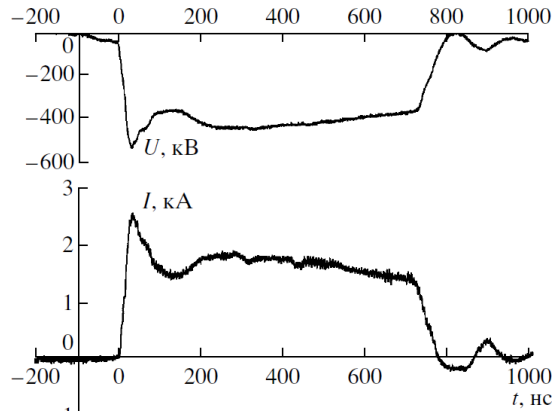


Рис. 19. Форма импульсов напряжения на катоде и тока пучка

Какие из этих частот реально могут быть возбуждены в генераторе, определяется их близостью к резонансной частоте ω_0 (на рис. 2 это частоты ω_1 и ω_2) и шириной черенковского резонанса, определяемой инкрементом неустойчивости $\delta\omega$, рис. 3. Резонансная частота ω_0 зависит от плазменной частоты, геометрии системы и скорости пучка. Резонансные частоты в общем случае определяются только численно. Условие возбуждения колебаний с частотой ω_N можно записать в виде

$$|\omega_N - \omega_0| < |\delta\omega|. \quad (19)$$

Те линии, частоты которых удовлетворяют условию (19) и присутствуют в спектре плазменного генератора. Анализ показывает, что набор допустимых N слабо зависит от скорости электронов, но из-за изменения резонансной частоты эффективность возбуждения волн с разными ω_N оказывается разной. Поэтому на рис. 20 справа набор пиков в спектре на разных временах примерно одинаков, но амплитуды этих пиков существенно разные.

Если частота какого-либо пика экспериментально измерена, то величину k_z можно приблизительно оценить по формуле

$$k_z = \omega / u. \quad (20)$$

Например, для частоты 2.6 ГГц и $u = 2.5 \cdot 10^{10}$ см/с получаем $k_z = 0.65$ см⁻¹, длина волны в плазме $\lambda = 9.6$ см, $N \approx 14$.

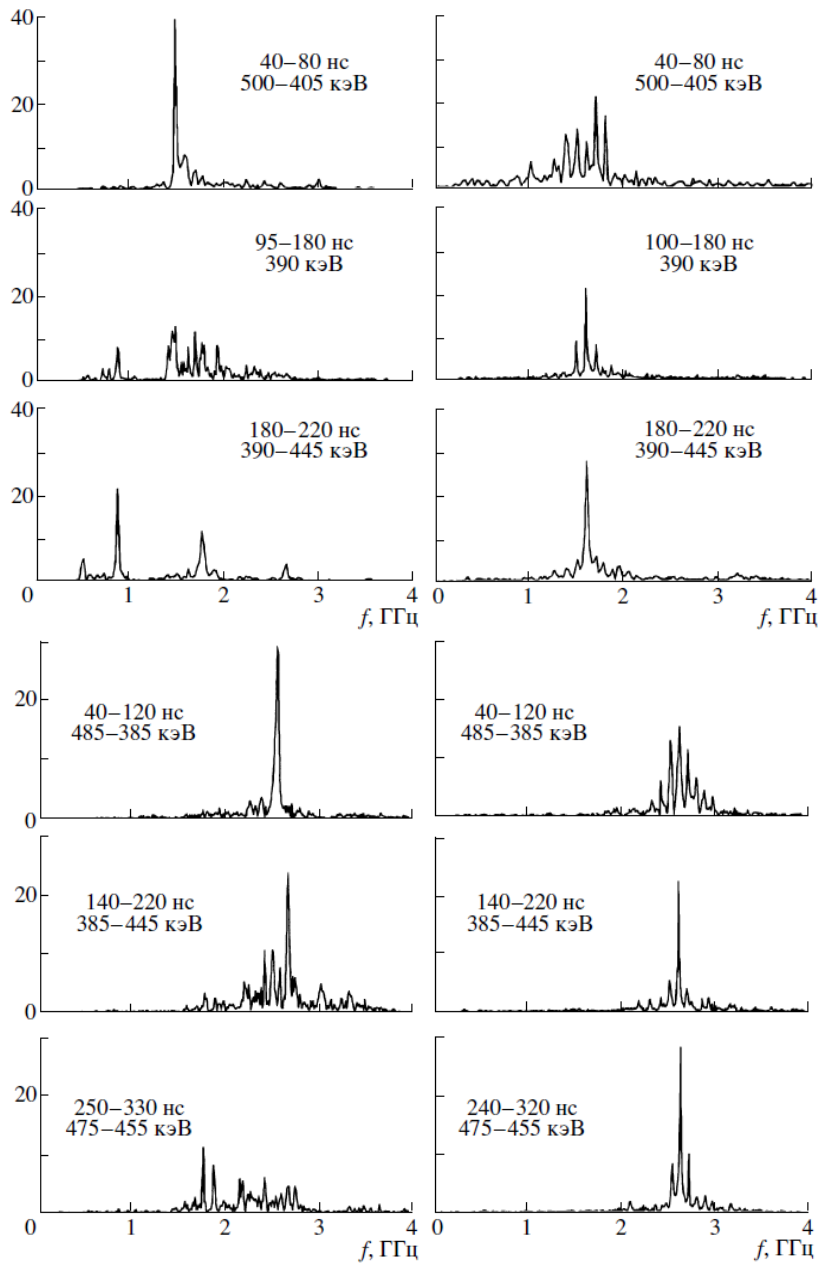


Рис. 20. Спектры СВЧ излучения. Верхние 6 графиков – плотность плазмы $5.25 \cdot 10^{11}$ см⁻³, нижние 6 графиков – плотность плазмы $9 \cdot 10^{11}$ см⁻³. Слева – эксперимент, справа – расчёт

Рассмотрим экспериментальные спектры. На графиках рис. 20 (слева) спектры также имеют вид отдельных линий, сдвинутых на 0.09 ГГц, но на среднем и нижнем спектре нет линий, которые совпадают по частоте с линией на верхнем спектре. Такое различие спектров в расчёте и в эксперименте можно объяснить изменением параметров плазмы в течение СВЧ импульса за характерное время 200 нс. Установлены два факта. Во-первых, длительность СВЧ импульсов в эксперименте короче импульса напряжения. При малом начальном значении плотности плазмы $5.25 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$ генерация продолжается до 220 нс, а при более высоком $9 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$ до 330 нс. Во-вторых, на отрезке времени в конце СВЧ импульса в спектре появляются низкие частоты. Оба факта можно объяснить одним предположением, согласно которому плотность плазмы существенно уменьшается при инжекции РЭП за характерное время 200 – 300 нс. Предполагаемое уменьшение плотности плазмы в течение импульса тока РЭП должно приводить к уменьшению частоты генерации, а при достижении плотности, близкой к критической плотности плазмы, – к выключению процесса генерации. Увеличение начального значения плотности плазмы приводит к тому, что выключение генерации происходит позже, СВЧ импульс становится длиннее. Это же предположение нам пришлось сделать позже при исследовании плазменного СВЧ усилителя, см. гл. 4.3. Анализ экспериментальных данных и применение метода крупных частиц как для пучка, так и для плазмы в численном моделировании показало, что при инжекции РЭП в плазму действительно имеет место аномально быстрый процесс распада плазмы, см. гл. 4.3. Таким образом, в плазменной СВЧ электронике также существуют механизмы ограничения длительности СВЧ импульса.

Итак, получены СВЧ импульсы с длительностью до 500 нс и с уровнем мощности 50 МВт. Увеличение начального значения плотности плазмы перед очередным импульсом тока РЭП, как и ранее, приводит к увеличению средней частоты излучения. Этот эксперимент подтвердил сделанный ранее вывод о генерации широкого спектра. Получена новая информация – спектр состоит из отдельных линий, связанных с возбуждением разных продольных мод. Спектр излучения нестабилен в течение СВЧ импульса, и это связано с нестационарностью плотности плазмы в течение импульса тока РЭП.

5.3. Перестройка частоты ПРГ в импульсно-периодическом режиме

Существенное отличие плазменных релятивистских СВЧ источников от вакуумных релятивистских СВЧ приборов состоит в возможности быстрой электронной перестройки частоты. До сих пор рассматривались эксперименты с сильноточными ускорителями, которые генерируют одиночные импульсы тока РЭП. Перейдём к описанию ПРГ, работающего в импульсно-периодическом режиме [43]. Источником электронного пучка

был ускоритель «Sinus 550-80», изготовленный в ИСЭ РАН (г. Томск). В эксперименте [44] в плазменный СВЧ генератор поступали 20 импульсов электронного пучка в течение одной секунды с энергией электронов 500 кэВ, током 2 кА, длительностью 80 нс. Компьютерная программа обеспечивала определённое значение плотности плазмы перед каждым импульсом РЭП.

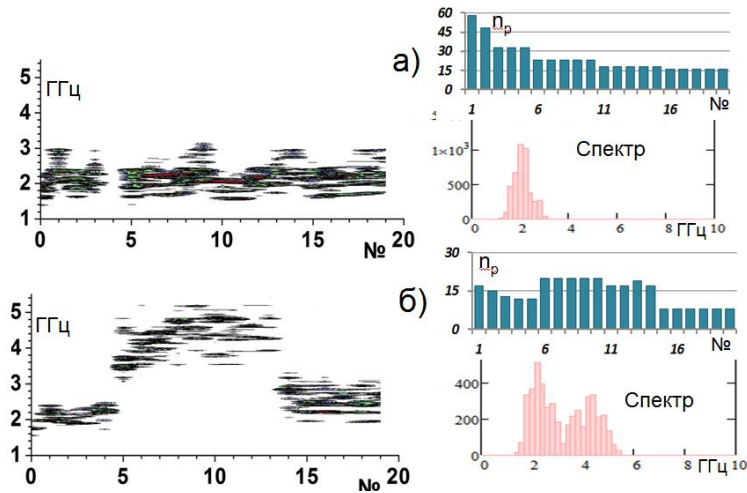


Рис. 21. Перестройка частоты ПРГ в импульсно-периодическом режиме

На рис. 21 (справа) показаны две гистограммы значений плотности плазмы а) и б) в каждом из 20 импульсов. Зависимость а) плотности плазмы от номера выстрела приводит к относительно узкому суммарному спектру а). Зависимость б) плотности плазмы от номера импульса приводит к генерации более широкого суммарного спектра б). Об изменении спектра в каждом из 20 СВЧ импульсов можно судить по графикам, расположенным слева. При заданном законе а) изменения плотности плазмы от импульса к импульсу среднее значение частоты сохраняется. Изменение плотности плазмы по закону б), в котором плотность плазмы повышена в импульсах от номера 6 до 14, приводит к повышению средней частоты примерно в 2 раза, график б) слева. Таким образом, продемонстрирована возможность управления средней частотой ПРГ в импульсно периодическом режиме.

5.4. Плазменный релятивистский СВЧ усилитель

Эксперименты по плазменному релятивистскому СВЧ-генератору (ПРГ) продемонстрировали уникальную его особенность: возможность перестройки частоты СВЧ-излучения в широких пределах (4 ГГц – 28 ГГц) за счет изменения плотности плазмы при примерном постоянстве мощ-

ности СВЧ-излучения. Широкий спектр излучения ПРГ, $\sim 30\%$ от средней частоты излучения, представляет интерес для решения ряда прикладных задач. Однако создание источников монохроматического излучения с электронной перестройкой частоты тоже имеет большое практическое значение.

Задача усиления монохроматического сигнала наиболее проста для теоретического рассмотрения и имеет детальное теоретическое описание. Поэтому было бы естественно начать экспериментальное исследование с изучения именно усилителя, а не генератора (ПРГ). Однако оказалось, что реализация в эксперименте СВЧ усилителя чрезвычайно сложна, а причиной этого является самовозбуждение прибора, т.е. смена режима усиления СВЧ-волны на режим генерации. Усиление СВЧ волн в широком диапазоне частот и одновременное подавление автоколебаний оказалось очень трудоемкой задачей, и по этой причине экспериментальные работы по плазменному релятивистскому СВЧ усилителю были выполнены позже.

5.4.1. Плазменный релятивистский СВЧ усилитель с длительностью импульса тока РЭП 30 нс. Частоты 9 - 13 ГГц

Усилитель [45] был рассчитан для усиления входного сигнала на частотах 9 – 13 ГГц. Схема усилителя изображена на рис. 22.

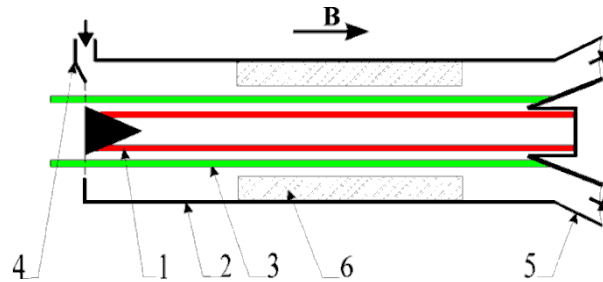


Рис. 22. Схема плазменного релятивистского СВЧ усилителя: 1 – плазма, 2 – металлический волновод, 3 – релятивистский электронный пучок, 4 – вход усилителя, 5 – коаксиальный конический излучающий рупор, 6 – СВЧ поглотитель

Трубчатая плазма (1) со средним радиусом $r_p = 7.5$ мм и толщиной $\Delta_p = 1$ мм расположена в продольном однородном магнитном поле с индукцией $B = 1.6$ Тл в цилиндрическом металлическом волноводе (2) с радиусом $R = 22$ мм. Вдоль оси волновода распространяется трубчатый РЭП (3) с энергией электронов 550 кэВ, током 1.5 кА и длительностью импульса около 100 нс. Средний радиус электронного пучка $r_b = 10$ мм, толщина пучка $\Delta_b = 1$ мм. На входе усилителя установлен преобразователь СВЧ волны – (4), возбуждающий на входе усилителя моду ТЕМ, которая трансформируется в быструю и медленную моды плазменного волновода. Медленная плазменная волна с модой E_{01} усиливается релятивистским электронным пучком. Затем она трансформируется в моду ТЕМ выходного металлического коаксиального волновода и излучается выходным коак-

сиальным рупором большого сечения – (5). Длина плазменного волновода, на которой происходит взаимодействие РЭП и плазмы, равна 29 см. Поглотитель СВЧ-излучения (6) с внешним радиусом 22 мм, внутренним радиусом 11.5 мм и длиной 14 см устанавливался на расстоянии 3 см от конусного коллектора РЭП на выходе системы. Поглотитель предназначен для предотвращения самовозбуждения прибора, т.е. возникновения режима автоколебаний. Коэффициент поглощения СВЧ мощности составил: 20 дБ для волны ТЕМ в коаксиальном волноводе с внутренним радиусом 5 мм и внешним радиусом 22 мм; 50 дБ для волны ТМ₀₁ в круглом волноводе радиусом 22 мм. Измерения были проведены на частоте 9.1 ГГц. В качестве источника входного СВЧ сигнала использовался один из двух импульсных магнетронов. Первый магнетрон имел частоту $f_1 = 12.9$ ГГц, длительность импульса 2 мкс и мощность $P_{вх} = 75$ кВт. Параметры второго магнетрона были, соответственно, $f_2 = 9.1$ ГГц, 20 мкс, 40 кВт.

Полная энергия СВЧ импульса измерялась широкополосным СВЧ калориметром [33]. Знание энергии СВЧ импульса и его огибающей давало возможность вычисления мощности выходного СВЧ излучения. Для оценки спектра излучения использовался приемный тракт, представляющий собой волновод 23×10 мм², в котором принимаемая СВЧ мощность регистрировалась двумя детекторами. Первый из них – широкополосный приемник – измерял всю СВЧ мощность в приемном тракте. На входе второго, узкополосного приемника устанавливался один из двух узкополосных СВЧ фильтров, настроенных на частоту магнетрона: ширина полосы частот $\Delta f = 0.29$ ГГц при $f_1 = 12.9$ ГГц или $\Delta f = 0.51$ ГГц при $f_2 = 9.1$ ГГц. Чувствительности обоих приемников были приблизительно одинаковыми. Если ширина спектра излучения была меньше, чем полоса пропускания СВЧ фильтра, то отношение сигналов с обоих приемников было равно единице. Если же ширина спектра излучения была больше полосы пропускания СВЧ фильтра, это отношение уменьшалось. Таким образом, существовала возможность оценить ширину спектра выходного СВЧ-излучения.

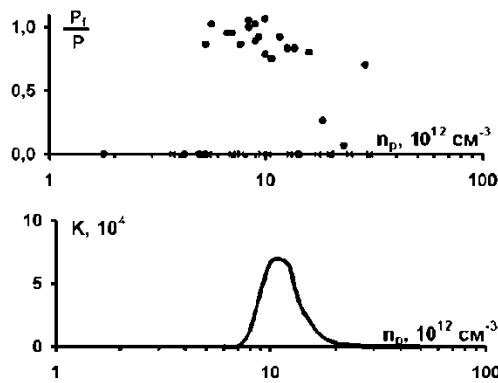


Рис. 23. Зависимости от плотности плазмы n_p : сверху – отношения мощностей, регистрируемых узкополосным P_t и широкополосным P приемниками на частоте $f = 9.1$ ГГц, «●» – при наличии входного сигнала 40 кВт, «x» – при его отсутствии; внизу – однопроходного линейного коэффициента усиления мощности K

Перейдём к изложению результатов эксперимента. На рис. 23 показано отношение мощностей сигналов, зарегистрированных узкополосным и широкополосным приемниками. Видно, что в диапазоне значений плотности плазмы $5 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3} < n_p < 1.5 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ выходной сигнал СВЧ усилителя всегда лежит внутри полосы пропускания узкополосного приемника (отношение мощностей близко к единице).

Сравнение экспериментальной зависимости P/P_f (вверху на рис. 23) с зависимостью однопроходного линейного коэффициента усиления мощности K от плотности плазмы (внизу на рис. 23) показывает, что эффект усиления СВЧ-волны в эксперименте имеет место в предсказанном теорией диапазоне значений плотности плазмы. Важно отметить, что в отсутствие входного СВЧ-сигнала во всем диапазоне значений плотности плазмы СВЧ-излучение на выходе не регистрируется. Это означает, что рис. 23 доказывает наличие эффекта усиления, а не другого известного эффекта — сужения спектра СВЧ генератора под воздействием внешнего управляющего монохроматического сигнала [46, 47]. Расчёт указывает на возможность перестройки частоты излучения в широком диапазоне частот. Для проверки этого положения теории были проведены эксперименты по исследованию режима усиления также и на частоте $f = 12.9 \text{ ГГц}$ ($P_{\text{вх}} = 75 \text{ кВт}$). На этой частоте режим усиления наблюдался при больших значениях плотности плазмы, а именно в диапазоне $1 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3} < n_p < 3 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, что совпадает с расчётом.

Зависимости мощности выходного излучения от мощности входного сигнала доказывают, что реализуется режим усиления на двух частотах входного сигнала (рис. 24).

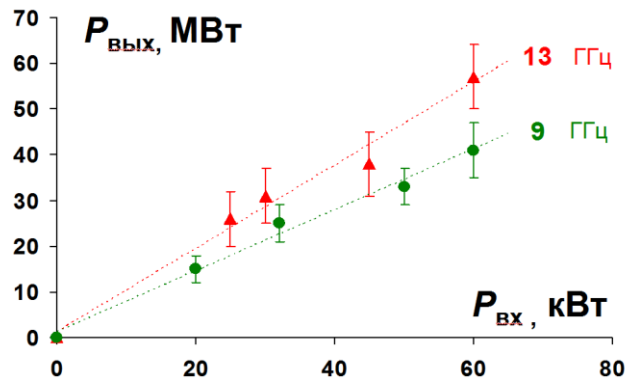


Рис. 24. Зависимости мощности выходного излучения СВЧ усилителя от мощности входного сигнала (550 кэВ, 2 кА, длина плазмы 28 см)

В линейном режиме усиления получена выходная мощность 60 МВт (усиление 30 дБ) на частоте 13 ГГц и выходная мощность 40 МВт (усиление 29 дБ). Полоса перестройки частоты не менее 40 %.

5.4.2. Плазменный релятивистский СВЧ усилитель микросекундной длительности. Частоты 2.4 – 3.1 ГГц

Экспериментальные исследования СВЧ усилителя были продолжены в диапазоне частот 2 – 3 ГГц [48-53]. Это позволило использовать скоростной осциллограф с полосой частот до 4 ГГц и иметь полную информацию о зависимости напряжённости электрического поля излучаемой волны в каждом одиночном СВЧ импульсе. Качество экспериментальной информации перешло на более высокий уровень.

Кроме измерения параметров СВЧ излучения на оси СВЧ пучка проводились измерения полной энергии СВЧ импульса модернизированным калориметром, первый вариант которого описан в [32].

Калориметр состоит из прозрачной для СВЧ излучения диэлектрической коробки, заполненной спиртом. Принцип действия калориметра основан на регистрации увеличения объема спирта при нагреве его СВЧ излучением. Калориметр (рис. 25) диаметром 50 см располагался напротив рупора. На оси калориметра закреплена штыревая антенна. Сигнал с этой приёмной антенны поступал на коаксиальный кабель, которой проходил сквозь калориметр и через аттенуатор 63 дБ подсоединялся к скоростному осциллографу с полосой частот до 4 ГГц. Таким образом, одновременно регистрировалась энергия СВЧ импульса и зависимость электрического поля от времени на оси СВЧ пучка.

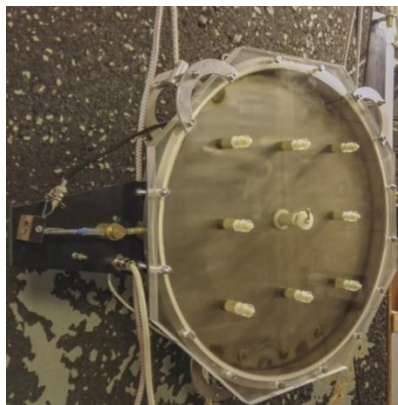


Рис. 25. Калориметр

Для усиления входного СВЧ сигнала на частотах 2 – 3 ГГц были увеличены диаметры волновода, плазмы и пучка, а также длина плазменного волновода. Была также изменена конструкция *излучающего устройства* (рис. 26) с целью уменьшения коэффициента отражения СВЧ излучения от него.

Электронный пучок плазменного релятивистского СВЧ усилителя формируется в магнитоизолированном диоде, изображенном на рис. 26. Магнитоизолированный диод состоит из взрывоэмиссионного дискового поперечно-лезвийного катода – 1 с радиусом 1,25 см и анода – 2 с радиусом 5,5 см, величина магнитного поля $B = 4.5$ кГс. РЭП – 3 распространяется в трубе – 5 в продольном магнитном поле до коллектора – 4. Радиус трубы 5 равен $R = 4.9$ см. Радиусы трубчатой плазмы – 6 равны $r_p = 1.9$ и 2.2 см, а радиусы РЭП – $r_b = 1.3 - 1.6$ см. Источником внешнего СВЧ сигнала является один из трёх сменных магнетронов с частотами 2.4, 2.7 и 3.1 ГГц. От магнетрона внешний сигнал мощностью около 50 кВт по коаксиальному кабелю подаётся на две штыревые антенны – 7. В состав СВЧ усилителя

еще входят СВЧ поглотитель 8 и излучающее устройство, которое состоит из коллектора – 4 и рупора – 9.

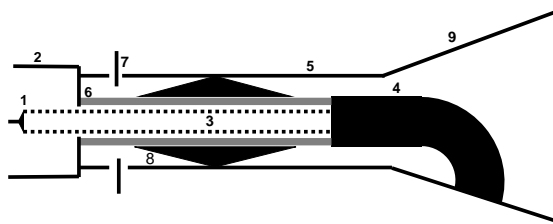


Рис. 26. Схема плазменного релятивистского СВЧ усилителя: 1 – катод сильноточного ускорителя, 2 – анод, 3 – РЭП, 4 – коллектор, 5 – металлический волновод, 6 – плазма, 7 – антенны, 8 – СВЧ поглотитель, 9 – излучающий рупор

Сигнал с приёмной антенны, расположенной на оси калориметра на расстоянии 70 см от рупора, представлен на рис. 27. Чёрным цветом показана осциллограмма выходного сигнала усилителя $U(t)$, серым цветом часть сигнала – $U_f(t)$, пропущенная через фильтр 2710 ± 15 МГц. На левом графике рис. 27 на осциллограмму СВЧ сигнала наложена осциллограмма напряжения на катоде ускорителя. Амплитуда напряжения 500 кВ. Видно, что процесс усиления начинается и заканчивается при напряжении на катоде, примерно равном 400 кВ. Длительность СВЧ импульса 350 нс, а длительность плато на импульсе напряжения 280 нс. Видно, что осциллограмма близка к гармоническому сигналу.

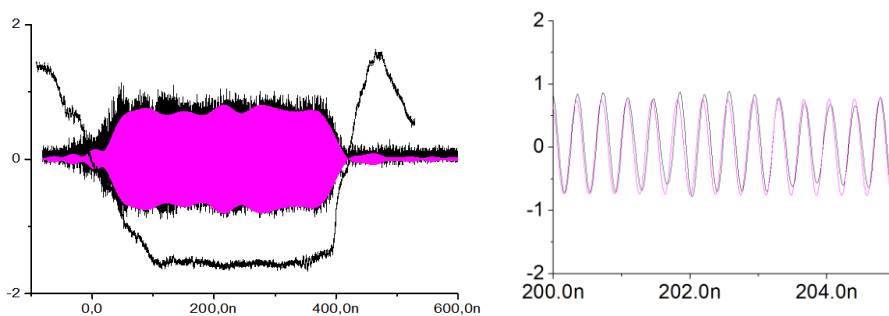


Рис. 27. СВЧ импульс и импульс напряжения на катоде ускорителя – слева. Сигнал, пропущенный через фильтр 2710 ± 15 МГц, – серый цвет, полный сигнал – чёрный цвет. СВЧ импульс в другом масштабе по времени – справа

Вычислим величины $\int U^2 dt$ и $\int U_f^2 dt$. Величина $\int U^2 dt$ пропорциональна плотности энергии на оси калориметра в полосе частот до 4 ГГц, а величина $\int U_f^2 dt$ в полосе частот 2710 ± 15 МГц. Зависимости этих величин от плотности плазмы в относительных единицах представлены на рис. 28. Видно, что при всех значениях плотности плазмы более 85 % энергии излучения находится в полосе частот 2710 ± 15 МГц.

Сравним величину $\int U^2 dt$ с полной энергией СВЧ импульса, измеренной калориметром в Джоулях при различных значениях плотности плазмы (рис. 29).

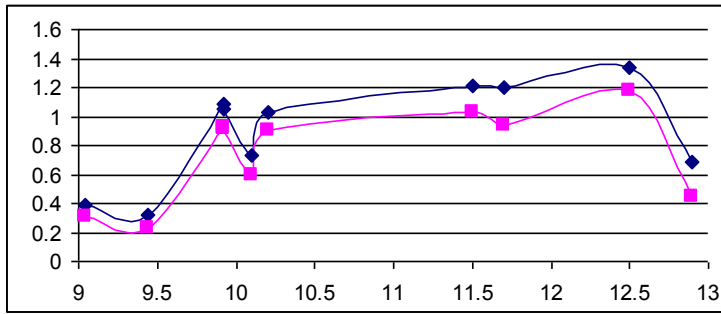


Рис. 28. Зависимости от плотности плазмы в отн. ед. Ромбы – плотность СВЧ энергии ($\int U^2 dt$), в диапазоне частот 1 – 4 ГГц, квадраты – плотности энергии ($U^2 dt$) в диапазоне частот 2710 ± 15 МГц

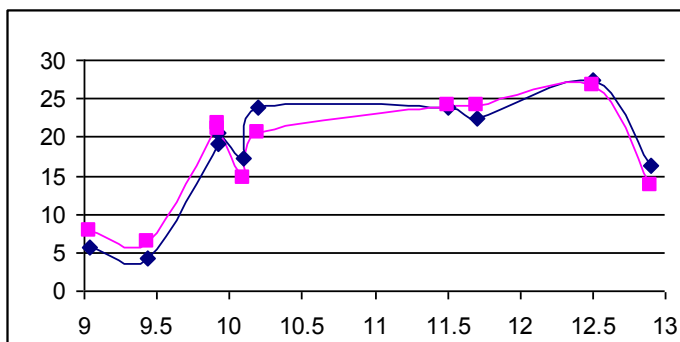


Рис. 29. Зависимости от плотности плазмы в отн. ед. Ромбы – энергия СВЧ импульса в Дж, квадраты – плотность энергии излучения на оси СВЧ пучка в отн. ед.

Оказалось, что отношение этих двух величин почти постоянно. Это означает, что структура СВЧ пучка в поперечном сечении постоянна во всём диапазоне изменения плотности плазмы. Это утверждение позволяет рассчитать мощность СВЧ пучка в полосе частот $f_0 \pm 15$ МГц по формуле

$$P_f = \frac{W \cdot U_f^2}{2 \int U^2 dt} \tag{21}$$

Важно, что в формулу (21) входят только экспериментально измеренные величины, и в неё явно не входит структура поля в СВЧ пучке. Величина P_f будет равна полной мощности СВЧ усилителя, если диаметр СВЧ пучка равен или меньше, чем диаметр калориметра. Для измерения полной мощности СВЧ усилителя надо калориметр придвинуть близко к рупору, поскольку диаметр калориметра 50 см больше диаметра апертуры рупора 24 см. Оказалось, что это сделать нельзя. Калориметр

отражает 10 % падающей на него мощности, и при малом расстоянии до рупора часть отражённой мощности попадает в усилитель, что изменяет режим усиления. Кроме того, при малом расстоянии возникает пробой на приёмной антенне, поэтому калориметр стоит на расстоянии 70 см от апертуры рупора. Возникает вопрос: «Какую часть энергии регистрирует калориметр?».

Для ответа на этот вопрос на некотором расстоянии от апертуры рупора была помещена тонкая диэлектрическая плёнка с приклеенными к ней металлическими микрочастицами с размером около 100 микрон [51]. Под действием мощного СВЧ излучения на этом экране зажигался разряд. Серия фотографий свечения экрана на разных расстояниях от апертуры рупора представлена на рис. 30. На фотографиях видны светящиеся нити, а также видно, что размер светящейся области увеличивается при удалении экрана от рупора.

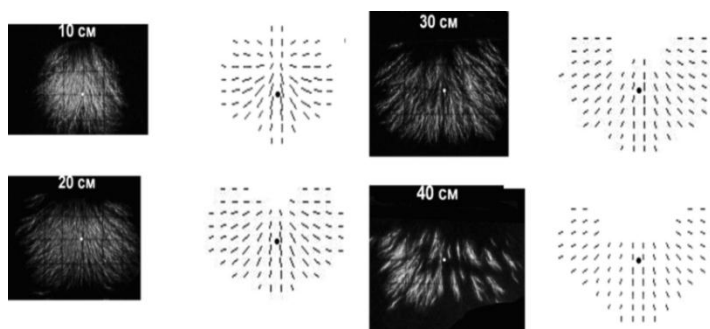


Рис. 30. Фотографии свечения экрана на разных расстояниях от апертуры рупора. Результат расчёта поперечной структуры СВЧ пучка – справа от фотографий

Мы предположили, что разряд на экране развивается вдоль силовых линий электрического поля СВЧ излучения. Для подтверждения этой гипотезы был произведён расчёт при помощи кода «Карат». В вакуумном коаксиальном волноводе излучающего устройства возбуждалась волна *ТЕМ*. Вычислялась поперечная структура СВЧ пучка на разных расстояниях от рупора, рис. 30 (справа от фотографий). Наклон отрезков отражает направление вектора напряжённости электрического поля в данной точке, а длина отрезков пропорциональна его амплитуде. Компьютерная картинка позволяет судить о ходе силовых линий СВЧ поля. Видно, что картина светящихся нитей подобна расчётной, то есть разряд действительно развивается вдоль силовых линий электрического поля.

Масштаб на фотографиях и компьютерных картинках одинаков. На фотографиях видна сетка с шагом 5 см. Размер одной из расчётных картинок был подобран так, чтобы он совпал с соответствующей фотографией. Для этого в расчёте была выбрана минимальная амплитуда электрического поля, которая соответствует самой малой длине отрезка. На остальных расчётных картинках те же короткие отрезки соответствуют той

же пороговой амплитуде электрического поля. Таким образом, можно сравнивать расходимости СВЧ пучка в эксперименте и в расчёте. Совпадение структур и расходимости СВЧ пучка в эксперименте и в расчёте даёт нам право доверять результату расчёта доли энергии, регистрируемой калориметром на расстоянии 70 см от рупора. Оказалось, что в расчёте и в эксперименте изменение расстояния от 70 см до 40 см приводит к увеличению энергии в калориметре в 2 раза. При изменении расстояния от 70 см до 20 см в расчёте энергия в калориметре увеличивается в 2.6 раза, а в эксперименте менее 2 раз. Поэтому для определения полной мощности излучения мощность, измеряемая на расстоянии 70 см, умножается на коэффициент 2.6.

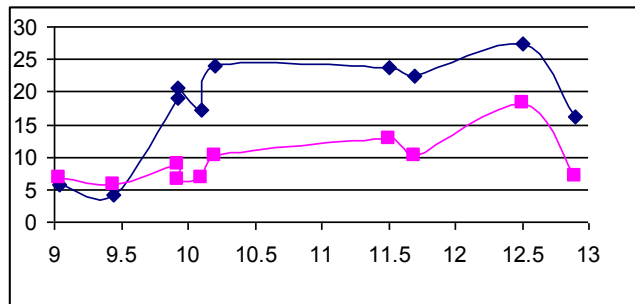


Рис. 31. Зависимости от плотности плазмы в отн. ед. Ромбы – энергия СВЧ импульса в Дж, квадраты – мощность в единицах МВт/10, частота 2.71 ГГц

Зависимости мощности усилителя и энергии СВЧ импульса от плотности плазмы представлены на рис. 31. Видно, что в диапазоне значений плотности плазмы от 10 до 12.5 отн. ед. мощность СВЧ излучения превышает 100 МВт.

Из эксперимента по визуализации структуры СВЧ пучка следует ещё один важный вывод. Совпадение структур электрического поля в расчёте и в эксперименте наблюдается только в таком расчёте, в котором в излучающее устройство усилителя вводится волна с модой TEM . Если вводить в коаксиальный волновод волну с модой H_{11} , то расчётная структура резко отличается от экспериментальной. Итак, мы точно знаем, что плазменная волна преобразуется в вакуумном коаксиальном волноводе в аксиально-симметричную TEM волну. Это даёт основания полагать, что в плазменном волноводе распространяется также аксиально-симметричная мода. Напомним, что в плазменном волноводе дисперсионные кривые с модами E_{01} и E_{02} сильно отличаются, см. рис. 11. Поэтому легко сделать так, чтобы в плазме возбуждалась только мода E_{01} . А вот дисперсии волн E_{01} и E_{11} близки, и осуществить возбуждение только моды E_{01} сложнее. Из эксперимента по визуализации структуры поля СВЧ пучка следует, что в плазме с большой долей вероятности распространяется азимутально-симметричная плазменная волна E_{01} , как это часто полагалось в теории плазменных СВЧ приборов. Получено ещё одно подтверждение возбуждения плазменной волны на единственной поперечной моде E_{01} .

Выше были приведены данные усиления входного сигнала только на частоте 2.71 ГГц. Были получены фотографии свечения экрана и на двух других частотах 2.4 и 3.1 ГГц. Фотографии на этих частотах качественно не отличаются от приведённых выше. Все графики, представленные выше, получены также и на частотах 2.4 и 3.1 ГГц.

Представим формы СВЧ сигналов для разных частот входного СВЧ сигнала (рис. 32). По-прежнему, чёрным цветом показаны полные сигналы выходного излучения, серым сигналы, пропущенные через фильтр $f_0 \pm 15$ МГц, где f_0 – частота магнетрона. Слева направо плотность плазмы растёт, сверху вниз растёт частота входного сигнала 2.4, 2.71 и 3.1 ГГц.

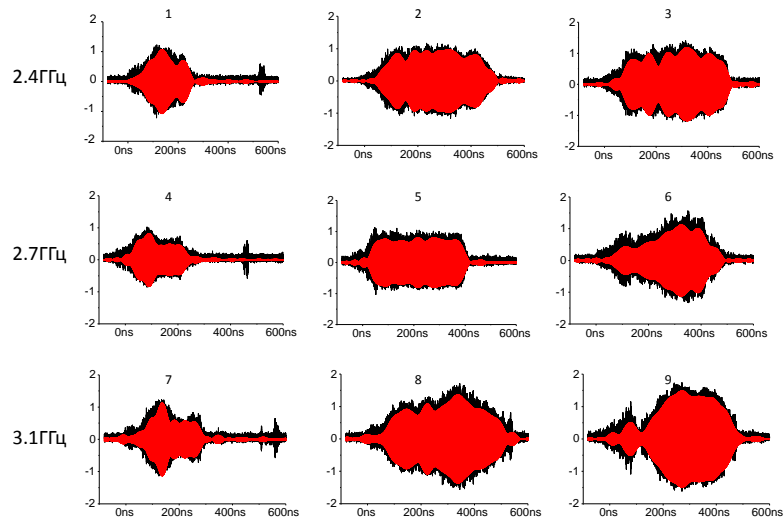


Рис. 32. Зависимость формы СВЧ сигналов выходного излучения от плотности плазмы на разных частотах. Плотность плазмы увеличивается слева направо, частота входного сигнала увеличивается сверху вниз

Параметры этих СВЧ импульсов и условия, при которых они получены, приведены в таблице 1.

Таблица 1

Параметры СВЧ импульсов и условия, при которых они получены

Частота (ГГц)	№	Ток плазмы (А)	W (Дж)	P_{max} (МВт)	P_f/P (%)
2.4	1	8.8	10	90	84
	2	9.4	21	80	93
	3	9.7	27	110	91
2.7	4	9.0	5.6	50	86
	5	9.9	19	70	87
	6	11.5	22	130	85
3.1	7	9.4	3	45	71
	8	10.1	14	80	90
	9	11.3	20	95	94

Из таблицы 1 видно, что доля мощности в полосе частот $f_0 \pm 15$ МГц почти всегда превышает 85 % от полной мощности. Значения плотности плазмы, при которых наблюдается усиление, с ростом частоты входного сигнала увеличиваются, как это следует из теории. Максимальная мощность на частотах 2.7 ГГц и 3.1 ГГц достигается при одном и том же значении плотности плазмы, т. е. для перестройки частоты от 3.1 до 2.7 ГГц достаточно изменить только частоту входного сигнала. Для перестройки частоты от 2.7 до 2.4 ГГц необходимо перестраивать и плотность плазмы.

Спектры СВЧ сигналов при максимальном значении мощности представлены на рис. 33. Отношение сигнал-шум 25 – 30 дБ.

Обсудим причину возникновения шума на спектрах (рис. 33). При распространении РЭП в вакууме на приёмной антенне на оси калориметра регистрируются собственные шумы РЭП (перед входом осциллографа установлен аттенюатор 23 дБ). Эксперимент проведён при остаточном газе с давлением $2 \cdot 10^{-5}$ Торр. Плазма отсутствует, поскольку РЭП не успевает создать плазму и при давлении $2 \cdot 10^{-4}$, а плазменный источник выключен. Эти шумы возникают из-за нестационарности тока пучка, генерируемого взрывоэмиссионным катодом. Их спектр с почти постоянной амплитудой расположен от 1 ГГц и по крайней мере до 4 ГГц (рис. 34).

При включении плазмы в отсутствие входного сигнала от магнетрона эти шумы усиливаются в полосе частот усилителя для данного значения плотности плазмы. Уровень мощности этого усиленного СВЧ импульса превышает мощность СВЧ импульса в вакууме примерно на 40 дБ (перед входом осциллографа установлен аттенюатор 63 дБ), его спектр представлен на рис. 35.

Чтобы подчеркнуть резкое отличие спектра усилителя шумов РЭП, от спектра СВЧ генератора (рис. 20), представим спектр отдельных участков спектра, рис. 36.

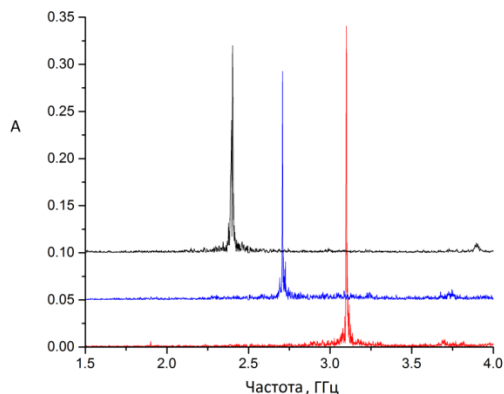


Рис. 33. Спектры сигналов на частотах 2.4, 2.71 и 3.1 ГГц с мощностью 95 – 130 МВт

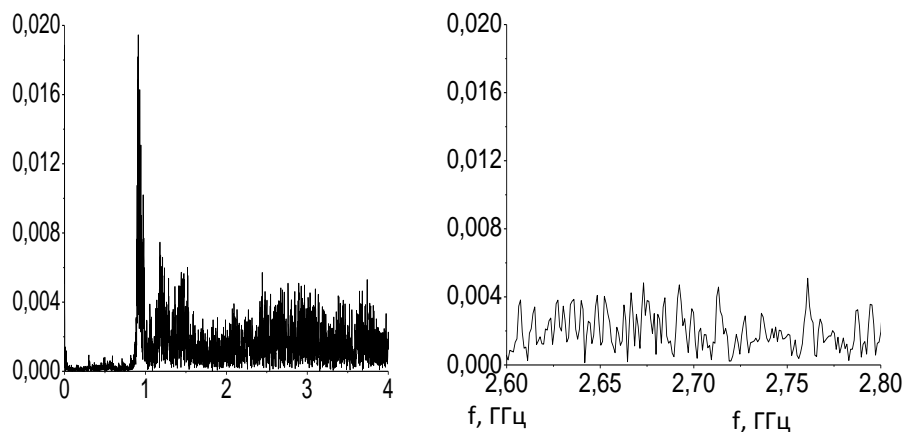


Рис. 34. Спектр излучения РЭП в вакууме

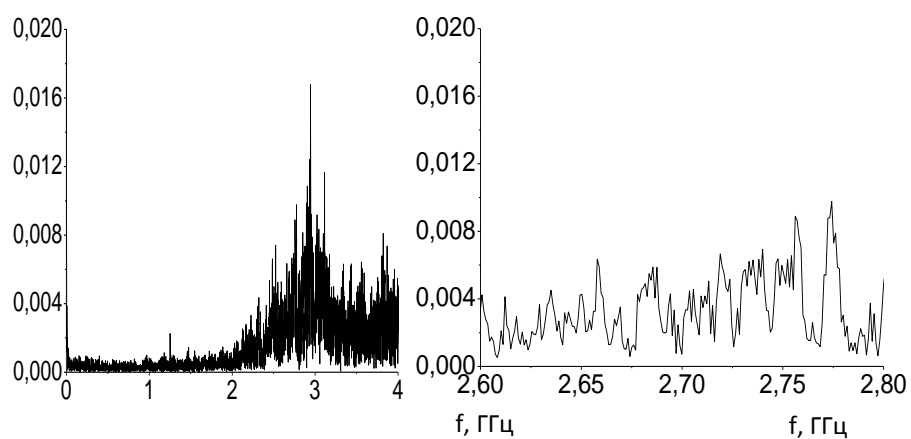


Рис. 35. Спектр излучения РЭП в плазме

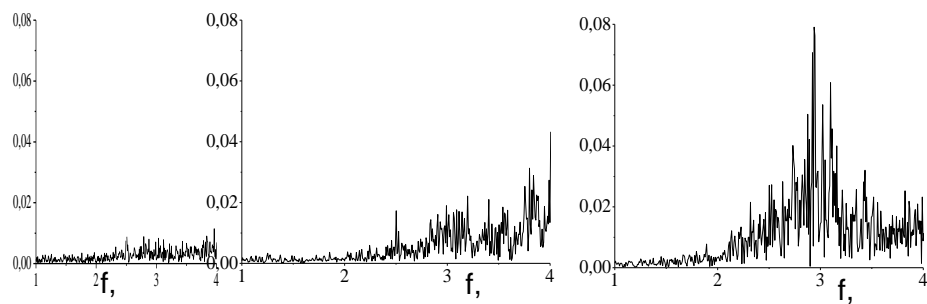


Рис. 36. Спектр усилителя шумов РЭП на отрезках времени 0 – 140 нс, 140 – 280 нс, 280 – 420 нс. Время отсчитывается от начала плато на импульсе напряжения ускорителя

Итак, использование СВЧ поглотителя, а также конструкций входного и выходного устройств СВЧ усилителя позволило избежать процесса его самовозбуждения. Заметим, что из рис. 36 следует, что средняя частота шумового излучения со временем уменьшается, что может быть интерпретировано как уменьшение плотности плазмы в течение импульса РЭП. Такое же предположение было сделано при анализе рис. 20. Более убедительное доказательство наличия ускоренного уменьшения плотности плазмы в течение импульса РЭП следует из анализа параметров плазменного СВЧ усилителя.

Обратим внимание на то, что на всех частотах входного сигнала при увеличении плотности плазмы форма сигнала изменяется примерно одинаково (рис. 32). Установлены три факта [53]. Во-первых, при малых значениях плотности плазмы СВЧ импульс имеет малую длительность, увеличение плотности плазмы приводит к увеличению длительности СВЧ импульса. Во-вторых, при малых значениях плотности плазмы максимальная мощность наблюдается в начале импульса, при увеличении плотности плазмы максимальное значение мощности появляется в конце СВЧ импульса. В-третьих, оказывается, что максимум спектра излучения при малых значениях плотности сдвигнут в сторону малых частот на 10 МГц (рис.37).

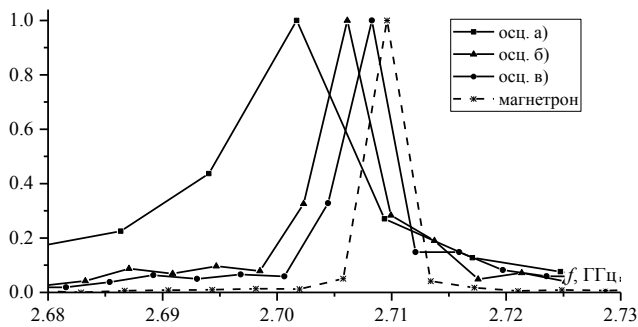


Рис. 37. Спектры СВЧ сигналов усилителя при частоте входного сигнала 2.71 ГГц и магнетрона, для значений плотности плазмы а) – 9.0 А, б) – 9.9 А, в) – 11.5 А. Спектр осциллограммы а) вычислялся по промежутку времени 100 – 230 нс, остальные спектры – по промежутку времени 100 – 360 нс

Построена аналитическая модель [53], которая объясняет эти три факта одним предположением – плотность плазмы существенно уменьшается за время около 100 нс. Изложим суть этой модели. Известно, что коэффициент усиления плазменного СВЧ усилителя резко снижается при уменьшении плотности плазмы от оптимального значения и более плавно снижается при увеличении плотности плазмы сверх оптимального значения (см. рис. 38).

Поэтому можно ожидать разные формы СВЧ сигналов при разных значениях начальной плотности плазмы. Далее для конкретности будем рассматривать наблюдаемые в эксперименте явления на примере усиления входного сигнала на частоте 2.71 ГГц. Если считать, что начальное

значение плотности плазмы 9 отн. ед. менее оптимального значения или незначительно превосходит его, то уменьшение плотности плазмы в течение импульса тока РЭП должно приводить к быстрому срыву усиления. Этот срыв и наблюдается – осциллограмма 4 (рис. 32). Если считать, что начальное значение плотности плазмы 11.5 отн. ед. значительно превосходит оптимальное значение, то его уменьшение в течение импульса тока РЭП должно приводить к наблюдаемому увеличению амплитуды СВЧ сигнала со временем и его длительности. Это и наблюдается – осциллограмма 6 (рис. 32). Наконец, наблюдаемый сдвиг частоты выходного излучения происходит из-за изменения фазовой скорости волны в плазме в течение СВЧ импульса. Уменьшение плотности плазмы в течение импульса тока РЭП приводит к изменению набега фазы на длине плазменного столба, что регистрируется как смещение частоты выходного сигнала усилителя в течение СВЧ импульса. При аналитическом анализе для объяснения наблюдаемых трёх фактов пришлось допустить, что плотность плазмы уменьшается в два раза за 150 нс. Отметим, что время распада заранее заготовленной плазмы, согласно измерениям, превышает 100 мкс.

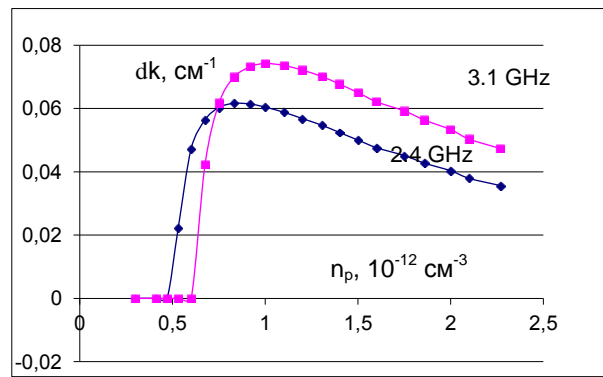


Рис. 38. Зависимость инкремента δk от плотности плазмы на частотах 2.4 и 3.1 ГГц

Процессы усиления плазменной волны, изменения во времени плотности частиц плазмы, средней энергии электронов плазмы и потенциала плазмы численно моделировались РЭС кодом KARAT [53]. Решалась полная система уравнений Максвелла. Была выбрана осесимметричная постановка, в которой рассматривалась область взаимодействия пучка с плазмой и усиливаемой волной. Асимметричный выводящий излучение рупор, асимметричные поглощающие элементы, расположенные на периферии области взаимодействия пучка и плазмы, область формирования электронного пучка, узел ввода излучения от внешнего СВЧ источника не рассматривались. Зависимости энергии электронов пучка и его тока от времени, геометрия области взаимодействия электронного пучка с электромагнитной волной взяты из эксперимента. Численное моделирование кодом «KARAT» показывает, что в плазме при инжекции РЭП появляются

ускоренные электроны. Средняя энергия электронов плазмы повышается до 30 кэВ. Это приводит к ускорению процесса вылета электронов и ионов из плазмы (рис. 39).

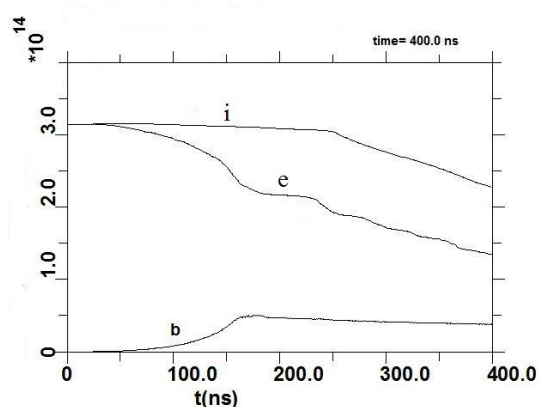


Рис. 39. Зависимость полного числа частиц от времени: *i* – ионы, *e* – электроны плазмы, *b* – электроны пучка

Из рис. 39 следует, что полное число электронов плазмы уменьшается в два раза за 250 нс. Замагниченные электроны плазмы разлетаются вдоль оси волновода, а незамгниченные ионы – как вдоль, так и поперёк оси волновода.

Итак, в рамках поставленной задачи о выяснении причин изменения частоты излучения плазменного релятивистского СВЧ усилителя и изменения формы СВЧ импульса при изменении начального значения плотности плазмы, наиболее важный результат численного моделирования состоит в обнаружении быстрого распада плазмы. При этом в численном моделировании плотность плазмы уменьшается примерно в 2 раза за 250 нс, а в аналитическом расчёте на основе анализа данных эксперимента [53] получено, что плотность плазмы должна уменьшаться в 2 раза за 150 нс. С учётом всех приближений можно считать, что обе модели дали близкие результаты.

Заметим, что в плазменном СВЧ генераторе механизм изменения частоты при изменении плотности плазмы иной, а именно, в этом случае изменяются условия резонансного возбуждения электромагнитной волны электронным пучком. Это приводит к более значительному смещению частоты излучения генератора в течение СВЧ импульса (см. гл. 3.2), частота максимума спектра излучения уменьшается в 1.5 раза. В СВЧ усилителе наблюдаемое максимальное смещение частоты не превышает 0.3 %, а при увеличении плотности плазмы сдвиг частоты излучения от частоты магнетрона становится менее 0.1 %.

Итак, на начальной стадии проведения экспериментов анализ результатов приводил к выводу, что плотность заранее заготовленной плазмы не изменяется при инъекции РЭП. Один из главных аргументов состоял в том, что средняя частота излучения плазменного СВЧ генератора монотонно увеличивалась с ростом начального значения плотности

плазмы. Другими словами, начальное значение плотности плазмы однозначно определяло среднее значение частоты излучения. Эти эксперименты были проведены при длительности импульса тока РЭП 30-80 нс. Переход к генераторам и усилителям микросекундной длительности привёл к обнаружению нового явления – ускоренного распада плотности плазмы при инжекции РЭП.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработаны конструкции плазменных релятивистских СВЧ генераторов и СВЧ усилителей. Решены задачи создания трубчатой плазмы с заданной плотностью, ввода релятивистского электронного пучка в плазму, ввода СВЧ излучения в плазменный волновод и его вывода в окружающее пространство. Эти задачи решались с целью создания эффективных СВЧ излучателей со свойствами, не достижимыми в пределах вакуумной релятивистской СВЧ электроники.

Параллельно решалась другая задача – разработать простейшую схему для экспериментального изучения плазменно-пучковой неустойчивости в лабораторной плазме. Трубчатый пучок и плазма помещены в круглый металлический волновод с гладкими стенками, однородное продольное магнитное поле обеспечивает постоянство поперечных размеров трубчатых пучка и плазмы вдоль длины волновода. Начальное значение плотности плазмы, в которую влетает пучок, легко изменяется и всегда точно известно в относительных единицах. Напомним, что многие экспериментальные исследования плазменно-пучковой неустойчивости проводились при инжекции пучка в газ. В этих экспериментах в начальный момент инжекции пучка плотность плазмы равна нулю, и дальнейший рост плотности плазмы определялся возникновением СВЧ полей той неустойчивости, свойства которой изучаются. Предложенная схема эксперимента позволила аналитически исследовать явления в схеме, очень близкой к экспериментальной. При проведении эксперимента постоянно использовались результаты этого анализа. Эта схема плазменных СВЧ источников оказалась достаточно простой и для численного моделирования.

Эксперименты по плазменной СВЧ электронике подтвердили основные выводы аналитической теории. Неустойчивость возникает только в плазме, плотность которой превышает пороговое значение. Доказана возможность возбуждения одной поперечной моды E_{01} собственной волны пространственно-ограниченной плазмы. Средняя частота плазменного СВЧ генератора в эксперименте растёт с увеличением плотности плазмы в соответствии с расчётом. Коэффициент усиления этой волны, измеренный экспериментально, не противоречит аналитическому расчету. Доказано экспериментально, что максимальная мощность достигается при токе, равном примерно половине предельного вакуумного тока, и при дальнейшем увеличении тока не возрастает.

Сравнение измеренной в эксперименте структуры СВЧ пучка после выхода из рупора с расчётной подтвердили факт возбуждения волны с

модой E_{01} в плазменном волноводе. Были проведены расчёты спектров генератора в предположении постоянства плотности плазмы. Обнаружено отличие расчётных спектров от экспериментальных. Возникло предположение, что плотность плазмы при инжекции РЭП ускоренно распадается. Анализ экспериментальных данных по СВЧ усилителю микросекундной длительности опять привёл к мысли об ускоренном распаде плазмы. Расчёт параметров плазмы кодом «Карат» подтвердил это утверждение.

При реализации СВЧ генераторов и усилителей были разработаны оригинальные способы создания плазмы, метод формирования РЭП микросекундной длительности, методы диагностики параметров плазмы, РЭП и СВЧ излучения.

Как уже было заявлено выше, одна из целей данных экспериментальных исследований состояла в создании СВЧ источников, которые нельзя реализовать в рамках вакуумной релятивистской СВЧ электроники. Сравним параметры приборов плазменной и вакуумной СВЧ электроники. Прежде всего надо сказать, что для решения задачи получения максимальной мощности монохроматического излучения на заданной частоте при заданной энергии электронов РЭП вакуумная СВЧ электроника вне конкуренции. Вакуумная релятивистская лампа обратной волны (карсиотрон) с энергией электронов 500 кэВ использует ток 6 кА и излучает мощность 600 МВт. Во-первых, в плазменной СВЧ электронике не удалось создать СВЧ генератор монохроматического СВЧ излучения. Во-вторых, в плазменном СВЧ генераторе с энергией электронов 500 кэВ с широким спектром используется пучок с током только 2 кА и получена мощность 50 МВт. Отметим, однако, что длительность мощных СВЧ импульсов в вакуумной релятивистской СВЧ электронике резко уменьшается с ростом мощности излучения. Мощность излучения на гигаваттном уровне получена при длительности импульса менее 20 нс. Представляет интерес и другая задача – создания релятивистских СВЧ источников с импульсом относительно большой длительности. Здесь возможности вакуумной СВЧ электроники ограничены. Так в диапазоне частот 2 - 4 ГГц длительность импульса существующих релятивистских вакуумных СВЧ генераторов не превышает 150 нс. При такой длительности СВЧ импульса не удаётся получить мощность излучения более 100 МВт [13]. В плазменном СВЧ усилителе в диапазоне частот 2 – 3 ГГц при энергии электронов 500 кэВ достигнута мощность более 100 МВт при длительности СВЧ импульса 300 нс. Отметим также, что вакуумные релятивистские СВЧ генераторы работают на фиксированной частоте или с механической перестройкой частоты, а в плазменном СВЧ усилителе частота перестраивается в 40 % полосе частот электронным образом.

Получен очень важный результат – осуществлена перестройка частоты плазменного СВЧ генератора в импульсно-периодическом режиме, которая не реализована в вакуумных релятивистских СВЧ источниках. Этот результат демонстрирует, что возможна перестройка частоты по заранее выбранной программе и плазменного СВЧ усилителя в импульсно-периодическом режиме. Для этого необходим перестраиваемый по частоте источник входного сигнала, на уровне мощности 50 кВт. Современный уровень СВЧ техники в России позволяет создать такой источник.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер А.И., Файнберг Я.Б. О взаимодействии пучка заряженных частиц с электронной плазмой // ДАН СССР, 1949 – Т. 69 – №4 – С.555 – 556.
2. Bohm D., Gross E. Theory of plasma oscillation // Phys. Rev. – 1949 – V.75 – P. – 1851-1861.
3. Boyd G.D., Field L.M., Gould R.W. Excitation of plasma oscillations and growing plasma waves // Phys.Rev. – 1958 – V.109 – P. 1393-1394.
4. Харченко И.Ф., Файнберг Я.Б., Николаев Р.М., Корнилов Е.А., Луценко Е.И. Взаимодействие электронного пучка с плазмой // ЖЭТФ. – 1960 – Т. 38. – В.3. – С. – 685-692.
5. Демирханов Р.А., Геворкян А.К., Попов А.Ф., Зверев Г.И. Высокочастотные колебания в электронной плазме // ЖТФ. – 1960 – Т. 30, В.3 – С. – 306-314.
6. Бернашевский Г.А., Богданов Е.В., Кислов В.Я., Чернов З.С. Плазменные и электронные усилители и генераторы СВЧ. – М.: Советское радио, 1965. – С.96.
7. Трубецков Д.И., Пищик Л.А. Нерелятивистские плазменные СВЧ-приборы, основанные на черенковском излучении // Физика плазмы. – 1989. –Т.15, в.3. – С – 342-353.
8. Кузелев М.В., Рухадзе А.А. Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. – М.: Наука, 1990. –333 с.
9. Кузелев М.В., Рухадзе А.А. Методы теории волн в средах с дисперсией. – М.: Физматлит, 2007. – 270 с.
10. Рухадзе А.А., Богданкевич Л.С., Росинский С.Е., Рухлин В.Г. Физика сильноточных релятивистских электронных пучков. –Изд.2-е, доп. – М.: ЛЕНАНД, 2016. – 193 с.
11. Месяц Г.А. Импульсная энергетика и электроника. – Москва. Наука, 2004. – 704 с.
12. Кузелев М.В., Рухадзе А.А., Стрелков П.С. Плазменная релятивистская СВЧ-электроника. – Москва: Изд-во МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2002. – 543 с.
13. Barker R.G., Schamiloglu E. High-power microwave sources and technologies. // IEEE. – New York. – 2001. – 485 p.
14. Стрелков П. С., Шкварунец А.Г. Плазменная релятивистская СВЧ-электроника // Энциклопедия низкотемпературной плазмы: Под ред. В. Е. Фортова – Т. 4. – С. 93-05 (М.: Наука, 2000)
15. Тараканов В.П. Математическое моделирование. Проблемы и результаты. – М.: Наука, 2003. – С. 456-476.
16. Tarakanov V.P. User's Manual for Code KARAT. (Berkley Research Associates, Springfield, VA. 1992). – 127 p.
17. Бугаев С. П., Литвинов Е. А., Месяц Г. А., Проскуровский Д. И. Взрывная эмиссия электронов // УФН. – 1975. – Т. 115, в.1. – С. 101-120.
18. Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Устойчивость релятивистских электронных пучков в плазме и проблема критических токов// УФН. – 1971. – Т. 10, в. 4. – С. 609-640.
19. Федосов А.И., Литвинов Е.А., Беломытцев С.Я., Бугаев С.П. К расчёту характеристик электронного пучка, формируемого в диодах с магнитной изоляцией// Изв. вузов. Физика. – 1977. – № 10. – С. 134 – 135.
20. Бугаев С.П., Канаев В.И., Кошелев В.И., Черепенин В.А. Релятивистские многоволновые СВЧ генераторы. – Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1991.
21. Бугаев С.П., Ким А.А., Климов А.И., Кошелев В.И. О механизме вакуумного пробоя и разлёта катодной плазмы вдоль магнитного поля в бесфольговых диодах // ЖТФ. – 1980. – Т.50, в.11. – С. 2463–2465.
22. Зайцев Н.И., Кораблёв Г.С., Шемякин Б.П. Элементы динамики катодной и коллекторной плазмы в диоде с магнитной изоляцией // Физика плазмы. –1981. – Т.7. – С. 560-563.
23. Бакшт Р.Б., Бугаев С.П., Кошелев В.И. и др.// Письма в ЖТФ. – 1977 – Т.3, в.13. – С. 593-597.
24. Василевский М. А., Ройфе И. М., Энгелько В. И. Об особенностях работы взрывоэмиссионных многоострижных катодов в микросекундном диапазоне длительности импульса //ЖТФ. – 1981. – Т. 51. – С. 1183-1194.
25. Loza O.T., Strelkov P.S. Generation of an annular REB of microsecond pulse duration and stabilized transverse dimensions in a diode with field emission cathode // 12th Int. Conf. on High Power Particle Beams (Beams'98). Haifa, Israel, 1998. – V. 1. – P. 357-360.
26. Лоза О.Т. Генерация сильноточных релятивистских электронных пучков со стабильными в течение микросекунды параметрами с помощью взрывоэмиссионных катодов //ЖТФ. – 2008. – Т. 78, в. 11. –С. 93-98.
27. Стрелков П. С., Тараканов В. П., Иванов И. Е., Шумейко Д. В. Динамика сильноточного релятивистского электронного пучка// Физика плазмы. – 2015. – Т. 41, в. 6. – С. 533-541.
28. Харченко И.Ф., Файнберг Я.Б., Корнилов Е.А., Николаев Р.М., Педенко Н.С., Луценко Е.И. Взаимодействие пучка электронов с плазмой в магнитном поле // ЖТФ. – 1961. – Т. 31. – С.761 -765.
29. Лебедев П.М., Онищенко И.Н., Ткач Ю.В., Файнберг Я.Б., Шевченко В.И. Теория плазменно-пучкового разряда // Физика плазмы, –1976 – Т. 2, в. 3. – С. 407-413.

30. Лоза О.Т., Пономарев А.В., Ульянов Д.К., Стрелков П.С., Шкварунец А.Г. Источник трубчатой плазмы с управляемым радиусом для плазменного релятивистского СВЧ-генератора // Физика плазмы. – 1997. – Т. 23, в.3. – С. 222-229.
31. Кузелев М.В., Мухаметзянов Ф.Х., Рабинович М.С., Рухадзе А.А., Стрелков П.С., Шкварунец А.Г. Релятивистский плазменный СВЧ генератор // ЖЭТФ. – 1982. – Т. 83, в.4(10). – С. 1358-1367.
32. Стрелков П.С., Ульянов Д.К. Спектры излучения плазменного релятивистского черенковского СВЧ-генератора // Физика плазмы. – 2000. – Т. 26, в.4. – С. 329-333.
33. Шкварунец А.Г. Широкополосный СВЧ калориметр большой площади // ПТЭ. – 1996. – № 4. – С.72 – 75.
34. Bekhovskaya K.S., Bogdankevich I.L., Strelkov P.S., Tarakanov V.P., Ulyanov D.K. The use of a high-current electron beam in plasma relativistic microwave oscillator // Plasma physics report. – 2011. – V. 37, No 13. – P. 1119-1124.
35. Birau M., Buzzi J-M., Caillez Y., Wiolland R., Saulle C., Krasilnikov M.A., Kuzelev M.V., Loza O.T., Rukhadze A.A., Strelkov P.S., Shkvarunets A.G., Ulyanov D.K. Generation of high-power microwaves due to propagation of a relativistic electron beam in plasma // IGPIG-97, Toulouse, July 17-22 – 1997. – P. 46-47.
36. Селиванов И.А., Стрелков П.С., Федотов А.В., Шкварунец А.Г. Одномодовый релятивистский плазменный СВЧ генератор // Физика плазмы. – 1989. – Т.15, в.11. – С. 1283-1289.
37. Int. Workshop on high power microwave generation and pulse shortening, Edinburgh, 10-12, June, 1997. – P. 368.
38. Ельчанинов Ф.С., Загулов Ф.Я., Коровин С.Д. Ограничение длительности мощных импульсов СВЧ излучения в релятивистском карсинотроне // Письма в ЖТФ. – 1981. – Т. 7, в.9. – С. 1168-1171.
39. Воронков С.Н., Лоза О.Т., Стрелков П.С. Причина срыва излучения вакуумного релятивистского СВЧ-генератора // Физика плазмы. – 1994. – Т.20, в.7–8. – С. 686-688.
40. Kovalev N.F., Nechaev V.E., Petelin M.I., Zaitsev N.I. Scenario for output pulse shortening in microwave generators driven by relativistic electron // IEEE Trans. on Plasma Science. 1998. –V. 26 (3). – P. 246 - 251.
41. Бляхман Л.Г., Нечаев В.Е. Пристеночный вторично-эмиссионный СВЧ разряд в изолирующем магнитостатическом поле // ЖТФ. – 1984. – Т.54, в.11. – С. 2163-3168.
42. Богданкевич И. Л., Иванов И. Е., Лоза О. Т., Рухадзе А.А., Стрелков П.С., Тараканов В.П., Ульянов Д.К. Тонкая структура спектров излучения плазменного релятивистского СВЧ-генератора // Физика плазмы. – 2002. – Т. 28, в.8. – С. 748-757.
43. Богданкевич И.Л., Гришин Д.М., Гунин А.В., Коровин С.Д., Иванов И.Е., Лоза О.Т., Месяц Г.А., Павлов Д.А., Ростов В.В., Стрелков П.С., Ульянов Д.К. Импульсно-периодический плазменный релятивистский СВЧ-генератор с управляемой в каждом импульсе частотой излучения // Физика плазмы. – 2008. – Т. 34, в.10. – С. 926-930.
44. Андреев С. Е., Ульянов Д. К. Метод управления спектром плазменного релятивистского СВЧ-генератора в частотно-периодическом режиме // Прикладная физика. – 2014. – № 4. – С. 26-29.
45. Пономарев А. В., Стрелков П. С. "50-мегаваттный широкополосный плазменный СВЧ-усилитель // Физика плазмы. – 2004. – Т. 30, в.1. – С. 66-72.
46. Fainberg Ya.V. Interaction of beams of charged particles with plasma // Czech. J. Phys. B. – 1968. – V. 18, n.5. – P. 652 - 677.
47. Митин Л.А., Переводчиков В.И., Завьялов М.А., Цхай В.Н., Шапиро А.Л. Мощные широкополосные пучково-плазменные усилители и генераторы СВЧ // Физика плазмы. – 1994. – Т. 20, в.7,8. – С.733 - 746.
48. Иванов И.Е., Стрелков П.С., Шумейко Д.В. Спектр излучения плазменного релятивистского микроволнового усилителя // Радиотехника и электроника. – 2009. – Т.54, №9. – С. 1091-1098.
49. Стрелков П. С., Иванов И. Е., Шумейко Д. В. Плазменный релятивистский СВЧ усилитель с плавной перестройкой частоты от 2.4 до 3.2 ГГц // Физика плазмы. – 2012. – Т. 38, в. 6. – С. 536-543.
50. Стрелков П. С., Тараканов В. П., Иванов И. Е., Шумейко Д. В. Изменение мощности выходного излучения плазменного релятивистского СВЧ усилителя в течение импульса тока релятивистского электронного пучка длительностью 500 нс // Физика плазмы. – 2014. – Т. 40, в. 8. – С. 738-748.
51. Алексеев И. С., Иванов И. Е., Стрелков П. С., Тараканов В. П., Ульянов Д. К. Визуализация структуры СВЧ-пучка релятивистского плазменного СВЧ-усилителя // Физика плазмы. – 2017. – Т. 43, в. 3. – С. 277-283.
52. Стрелков П.С., Иванов И.Е., Шумейко Д.В. Шумы плазменного релятивистского СВЧ-усилителя // Физика плазмы. – 2016. – Т. 42, в. 7. – С. 644-648.
53. Карташов И.Н., Кузелев М.В., Стрелков П.С., Тараканов В.П. Влияние нестабильности плазмы на спектр и форму СВЧ импульсов плазменного релятивистского СВЧ усилителя // Физика плазмы. – 2018. – Т. 44, в. 2. – С. 250-260.

УДК 533.9

PACS numbers: 52.35.Fp, 52.35.Mw, 52.38.Kd, 52.40.Mj, 52.65.Rr

ЧАСТЬ Ш

ТЕОРИЯ СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНОЙ КИЛЬВАТЕРНОЙ ВОЛНЫ, ГЕНЕРИРУЕМОЙ ЭЛЕКТРОННЫМ СГУСТКОМ ИЛИ ЛАЗЕРНЫМ ИМПУЛЬСОМ В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ

А. А. Голованов, И. Ю. Костюков

¹Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород, Россия

Й. Томас, А. М. Цухов

²Institut für Theoretische Physik I, Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf, Düsseldorf,
Germany

Рассматривается задача о возбуждении мощным коротким лазерным импульсом или релятивистским сгустком заряженных частиц кильватерной волны в плазме в сильно нелинейном режиме (режиме плазменной полости). Последовательно излагается построение теории сильно нелинейного режима, исследуются важные следствия этой теории. Важной особенностью представляемой теории является рассмотрение поперечно-неоднородной плазмы, что представляет интерес для ускорения частиц в плазменных каналах. Постулируется феноменологическая модель плазменной полости, в рамках которой выводится дифференциальное уравнение, описывающее форму ее границы. Находятся явные выражения для компонент электромагнитного поля внутри и снаружи плазменной полости. Рассматривается как полость без ускоряемых электронов, так и влияние ускоряемого сгустка на форму полости. Исследуется эффективность передачи энергии ускоряемому сгустку, а также возможность его ускорения в однородном поле. Предсказания теории показывают хорошее согласие с результатами численного моделирования методом «частиц в ячейках».

1. В В Е Д Е Н И Е:

Ускорители заряженных частиц играют большую роль в современной науке и являются одним из главных инструментов в физике высоких энергий. В частности, ускорители электронов используются в лептонных коллайдерах, а также для генерации электромагнитного излучения в труднодоступных рентгеновском и гамма-диапазонах. Традиционные ускорители электронов основаны на использовании для ускорения электрического поля в радиочастотных резонаторах. Амплитуда ускоряющего поля в них ограничена развитием мультипакторного разряда и обычно достигает величин порядка нескольких десятков МВ/м. Из-за этого размер установок, позволяющих разогнать электроны до энергии порядка нескольких ГэВ, может достигать существенных размеров. Так, для достижения рекордной на данный момент энергии электронов в 104 ГэВ использовался кольцевой ускоритель LEP (Large Electron-Positron Collider) [1] с диаметром 27 км. Несмотря на отсутствие ограничения по длине ускорения в кольцевых ускорителях, рост достижимой энергии ограничен потерями на синхротронное излучение электронов при их движении по криволинейной траектории. Такого недостатка лишены линейные ускорители, ярким представителем которых является линейный ускоритель в комплексе SLAC (Stanford Linear Accelerator Center) в Стэнфорде, позволяющий ускорять электроны до энергии 50 ГэВ на длине ускорения 3.2 км [2]. Для дальнейшего увеличения достигаемой энергии ускоренных частиц необходимо пропорциональное увеличение размеров установок. Например, в проекте Международного линейного коллайдера (International Linear Collider, ILC) планируется достижение энергии 500 ГэВ при размере ускорителя порядка 30 км [3]. При рассмотрении перспектив достижения энергии порядка ПэВ требуемые размеры ускорителей увеличиваются до астрономических масштабов.

Одним из решений проблемы большого размера традиционных ускорителей является использование плазменных методов ускорения [4, 5], основанных на использовании для ускорения продольного электрического поля плазменной волны. Характерная напряженность поля, достижимая в такой волне, определяется концентрацией плазмы: $E_p[\text{В/м}] \approx 96\sqrt{n_p[\text{см}^{-3}]}$. Для концентрации плазмы $n_p = 10^{19} \text{ см}^{-3}$ эта напряженность достигает величины 300 ГВ/м, что на несколько порядков превышает значения ускоряющих градиентов в современных ускорителях. В качестве источника кильватерной волны может использоваться релятивистский электронный сгусток [6, 7]. За счет воздействия кулоновского поля он расталкивает электроны плазмы, приводя к разделению заряда и образованию плазменной кильватерной волны позади сгустка. Фазовая скорость такой волны близка к скорости света и определяется скоростью возбуждающего ее сгустка, поэтому ускоряемые электроны могут долго оставаться в синхронизме с волной, эффективно ускоряясь в ее продольном поле. Схожим образом генерировать плаз-

менную волну могут сгустки положительно заряженных частиц (позитронов, протонов). Еще одним вариантом возбуждения кильватерной волны является использование мощного короткого лазерного импульса [8]. Современные лазерные установки, основанные на использовании метода усиления chirпированных импульсов [9], позволяют получать лазерные импульсы с пиковой мощностью, достигающей петаваттного уровня, при длине импульса в несколько десятков фемтосекунд. При фокусировке такого импульса его интенсивность оказывается достаточной для полной ионизации газов из легких элементов, таких как водород или гелий, уже на переднем фронте импульса. В образованной плазме происходит разделение заряда за счет воздействия пондеромоторной силы, выталкивающей легкие электроны плазмы из области с большей интенсивностью лазерного поля, но практически не влияющей на тяжелые ионы. Фазовая скорость образованной кильватерной плазменной волны определяется групповой скоростью лазерного импульса. В разреженной плазме групповая скорость близка к скорости света, что позволяет использовать полученную кильватерную волну для эффективного ускорения. Для эффективной генерации кильватерной волны оптимальна короткая длительность «драйвера» (сгустка частиц или лазерного импульса), составляющая порядка половины плазменной длины волны. Для концентрации плазмы порядка 10^{18} см⁻³ характерная длительность драйвера составляет 50 фс, что легко достижимо в современных лазерных установках. В то же время стоит отметить, что и более длинные сгустки частиц, и лазерные импульсы могут приводить к генерации волны за счет развития различных неустойчивостей в плазме. Характер возбуждаемой кильватерной волны зависит от степени воздействия драйвера на плазму. В случае использования электронного сгустка определяющей характеристикой является плотность заряда в сгустке, а при использовании лазерного импульса — его безразмерная амплитуда $a_0 = eE/(mc\omega)$. На рис.1 показаны различные режимы кильватерной волны при использовании лазерного импульса. В случае, когда интенсивность лазерного импульса достаточно мала, кильватерная волна возбуждается в линейном режиме: концентрация электронов в плазме слабо возмущается, а продольное электрическое поле, используемое для ускорения, имеет характерную синусоидальную форму.

При увеличении интенсивности лазерного импульса проявляются нелинейные эффекты, в частности, зависимость продольного электрического поля от продольной координаты становится пилообразной. В итоге, при дальнейшем увеличении интенсивности, происходит переход в сильно нелинейный режим, впервые обнаруженный в численном моделировании в 2002 году [10]. В этом режиме воздействие лазерного импульса оказывается настолько сильным, что он полностью расталкивает электроны от оси своего распространения. Кулоновское притяжение оставшихся у оси ионов возвращает электроны обратно, приводя к образованию за лазерным импульсом области сферической формы, практически полностью свободной от электронов плазмы, которую называют

плазменной полостью или «пузырьком» («bubble» в англоязычной литературе). На границе этой полости образуется тонкий электронный слой, экранирующий полость от окружающей плазмы. Подобные режимы кильватерной волны наблюдаются и в случае использования электронного сгустка.

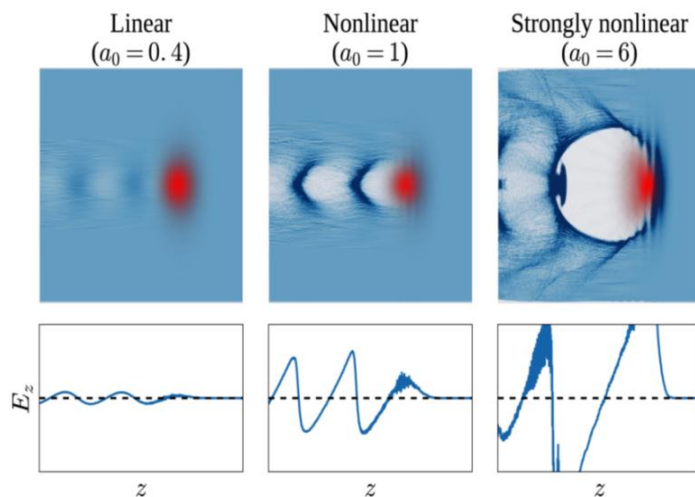


Рис. 1: Режимы плазменных кильватерных волн, возбуждаемых коротким циркулярно поляризованным лазерным импульсом: линейный, нелинейный, сильно нелинейный. На верхних графиках показано распределение концентрации электронов в кильватерной волне, полученное в результате численного моделирования взаимодействия импульса с плазмой. Интенсивность лазерного импульса, распространяющегося в направлении оси z (на рисунках вправо), показана красным цветом. На нижних графиках продемонстрированы соответствующие распределения продольного электрического поля на оси распространения импульса

Сильно нелинейный режим кильватерной волны не только обеспечивает самые большие ускоряющие градиенты, но также примечателен тем, что в случае использования лазерного драйвера в нем может наблюдаться самоинжекция: электроны плазмы захватываются в плазменную полость и ускоряются в ней до больших энергий [11]. Таким образом, для получения ускоренных электронных сгустков не требуется внешний источник электронов; оказывается достаточно иметь лазерную установку и газовую мишень, обычно представляющую из себя газовую струю или газовую ячейку. Лазерный импульс, взаимодействуя с такой мишенью, приводит к полной ионизации газа, генерации кильватерной волны в получившейся плазме и захвату и ускорению в ней электронов плазмы. Уже ранние эксперименты, в которых рассматривалось взаимодействие коротких лазерных импульсов тераваттного уровня мощности с газовыми струями, показали возможность получения ускоренных электронных сгустков с зарядом больше

100 пКл, энергией порядка 100 МэВ и сравнительно малым (несколько процентов) разбросом по энергии [12-14]. Эксперименты с использованием параболического канала в плазме, созданного в результате капиллярного разряда и предотвращающего дефокусировку лазерного импульса, позволили получить ускоренные электронные пучки с рекордным значением энергии 4.2 ГэВ на длине ускорения всего 9 см [15].

Результаты экспериментов свидетельствуют о больших перспективах использования плазменных методов ускорения и, в частности, сильно нелинейного режима кильватерной волны. Однако существует достаточно много проблем, ограничивающих применение этих методов. Так, качество получаемых электронных пучков, несмотря на достаточно малый разброс по энергии, все еще оказывается недостаточным для их использования, например, в лазерах на свободных электронах. Еще одной важной проблемой является плохая стабильность параметров пучков при одинаковых условиях эксперимента, обусловленная, видимо, высокой сложностью происходящих при самозахвате электронов нелинейных процессов. В связи с этим большой интерес представляет теоретическое исследование этого режима. Одним из главных методов исследования является численное моделирование методом «частиц в ячейках» (particle-in-cell, PIC) [16]. В рамках этого метода эволюция электромагнитного поля описывается дискретизованными уравнениями Максвелла на трехмерной пространственной сетке, а плазма представляется в виде газа неделимых макрочастиц, каждая из которых состоит из большого числа реальных частиц. Движение макрочастиц описывается релятивистскими уравнениями Ньютона. Подобное описание, основанное на базовых физических принципах, позволяет достаточно точно моделировать очень широкий класс задач и поэтому используется для проведения «численного эксперимента». В частности, изображения, показанные на рис. 1, построены именно с использованием подобного численного моделирования. Большой интерес представляет и аналитическое описание сильно нелинейного режима. Различные теоретические подходы привели к созданию простейших феноменологических моделей [17, 18], в которых предполагается идеально сферическая форма плазменной полости, а также теории подобия [19], позволяющей установить общие закономерности в данном режиме. Одним из основных достижений было создание аналитической теории, позволяющей описать форму плазменной полости в однородной плазме при помощи дифференциального уравнения для ее границы с учетом воздействия на нее ускоряемого электронного пучка [20, 21]. Однако по-прежнему не существует само согласованной теории данного режима.

Большая часть аналитических результатов была получена для однородной плазмы. Однако использование неоднородности в плазме открывает дополнительные степени свободы для оптимизации параметров плазменного ускорителя. В частности, создание полого плазменного канала (с концентрацией плазмы близкой к нулю) на оси распространения лазерного импульса позволяет независимо контролировать длину дефазировки

(расстояние, на котором электроны обгоняют кильватерную волну и попадают в ее замедляющую фазу) и длину истощения лазерного импульса. Кроме того, как показало численное моделирование, использование полого канала может позволить получить ускоренные электронные сгустки с очень малым разбросом по энергии в 0.3% [22]. Интерес к описанию плазмы с подобными каналами стимулировал обобщение более ранних теорий для однородной плазмы на случай плазмы с поперечной неоднородностью [23-26].

Целью данной работы является систематическое изложение теории сильно нелинейного режима кильватерной волны для плазмы с поперечной неоднородностью в наиболее общем виде. Работа структурирована следующим образом. В разделе 2 представлен краткий план построения теории, описывающий общие шаги и основные используемые приближения. Раздел 3 посвящен описанию произвольной кильватерной волны и электромагнитного поля в ней. В разделе 4 вводится описание движения частиц плазмы и релятивистских частиц драйвера и ускоряемых сгустков. В разделе 5 вводится феноменологическая модель плазменной полости, позволяющая задать распределения плотностей заряда и тока в сильно нелинейном режиме на основе формы границы плазменной полости. В разделе 6 выводится уравнение, описывающее границу плазменной полости, и находятся предельные случаи, при которых данное уравнение может быть упрощено. Раздел 7 посвящен описанию пространственного распределения компонент электромагнитного поля в сильно нелинейном режиме. В разделе 8 приводится общий способ аналитического решения уравнения для границы полости, который применяется для нахождения формы ненагруженной полости (без ускоряемых сгустков) в разделе 9. Наконец, в разделе 10 исследуется плазменная полость с ускоряемыми сгустками. Полученные общие результаты рассматриваются на примере некоторых частных случаев: однородной плазмы, плазмы с вакуумным каналом с резкими стенками и со степенным каналом. Также производится сравнение полученных результатов с численным моделированием методом частиц в ячейках.

2. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Перед тем, как приступить к построению теории сильно нелинейной кильватерной волны, кратко опишем план ее построения и основные приближения, используемые для описания плазмы и драйвера (электронного сгустка или лазерного импульса). Для нахождения точного ответа на вопрос о генерации кильватерной волны при взаимодействии драйвера с полностью ионизованной плазмой, необходимо самосогласованное решение кинетических уравнений Власова для компонент плазмы и уравнений Максвелла для электромагнитного поля. Самосогласованное описание можно упростить, используя следующие допущения:

- Построение теории ведется в цилиндрической геометрии в приближении аксиальной симметрии задачи относительно оси распростра-

нения драйвера. Заданный поперечно-неоднородный профиль плазмы является цилиндрически-симметричным.

- Кильватерная волна описывается в установившемся режиме (так называемое квазистационарное приближение). Эволюция кильватерной волны и драйвера по мере его распространения в плазме (в частности, дефокусировка и поглощение лазерного импульса, различные неустойчивости, развивающиеся в результате взаимодействия лазерного импульса или сгустка частиц с плазмой) в данной работе не рассматривается. Также предполагается, что фазовая скорость волны, определяемая скоростью драйвера, в точности равна скорости света.

- С учетом малой длительности драйвера, составляющей обычно лишь несколько десятков фемтосекунд, и релятивистского характера движения электронов в кильватерной волне делается несколько допущений при описании плазмы. В частности, плазма считается полностью ионизованной, бесстолкновительной и холодной (не учитывается тепловое движение). Также предполагается, что сравнительно тяжелые ионы плазмы можно считать полностью неподвижными.

- Для описания электромагнитного поля кильватерной волны используются уравнения Максвелла. При этом в них не учитывается поле лазерного импульса, воздействие которого на плазму описывается при помощи усредненной пондеромоторной силы.

Тем не менее, уравнения, полученные с учетом этих допущений и приближений, остаются слишком сложными. Поэтому далее теория сильно нелинейного режима строится феноменологическим образом, опираясь преимущественно на наблюдения, получаемые при численном моделировании. План построения теории состоит из следующих пунктов:

1. Постулируется феноменологическая модель для распределений плотности заряда и тока в сильно нелинейном режиме кильватерной волны. В рамках модели предполагается полное отсутствие электронов плазмы внутри плазменной полости и наличие на ее границе тонкого электронного слоя, экранирующего ее от окружающей плазмы.

2. На основе уравнений движения и запостулированной модели плазменной полости выводится дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее границу плазменной полости с учетом влияния драйвера и ускоряемых электронных сгустков.

3. Предполагается малость толщины электронного слоя на границе плазменной полости по сравнению с ее размерами, на основе чего производится упрощение уравнения для границы плазменной полости.

4. С использованием малости толщины электронного слоя выводятся упрощенные выражения для пространственных распределений компонент электромагнитного поля как внутри, так и снаружи плазменной полости.

5. Уравнение для границы плазменной полости используется для аналитического описания ненагруженной плазменной полости, т. е. полости без ускоряемых электронов.

6. Анализируется влияние ускоряемых сгустков на форму плазменной полости. Вычисляется эффективность ускорения, а также находится профиль плотности заряда в электронном сгустке, обеспечивающий его ускорения в однородном поле.

3. ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КИЛЬВАТЕРНОЙ ВОЛНЫ

3.1. Постановка общей задачи

Рассмотрим кильватерную волну, возбуждаемую драйвером (в роли которого может выступать лазерный импульс или релятивистский электронный сгусток), движущимся вдоль оси z в неограниченной полостью ионизированной плазме. Пусть вдоль этой оси плазма является однородной, а в поперечном направлении имеет неоднородность, обладающую свойством осевой симметрии. Тогда концентрация плазмы в цилиндрической системе координат (r, ϕ, z) описывается функцией $n(r)$. Мы будем предполагать, что свойством осевой симметрии обладают и все остальные величины, используемые в задаче. Невозмущенные электронная и ионная плотности заряда равны по модулю и пропорциональны концентрации плазмы: $\rho_e(r) = -\rho_i(r) \propto n(r)$. Соответственно, плотность заряда в пространстве складывается из трех компонент: плотностей электронов ρ_e и ионов ρ_i плазмы, а также плотности заряда релятивистских сгустков частиц ρ_B (как драйвера, так и ускоряемых сгустков):

$$\rho(t, z, r) = \rho_e(t, z, r) + \rho_i(t, z, r) + \rho_B(t, z, r). \quad (1)$$

Аналогичным образом складываются компоненты плотности тока \mathbf{J} . В роли частиц, дающих вклад в ρ_B и \mathbf{J}_B , могут выступать электроны, позитроны, ионы. Электромагнитное поле кильватерной волны в условиях осевой симметрии обладает тремя компонентами: E_z, E_r, B_ϕ . При этом в электромагнитном поле мы не будем учитывать поле лазерного драйвера, который будет описываться в пондеромоторном приближении. В рамках этого приближения вместо учета поля лазера в силе Лоренца воздействие лазерного импульса на частицу описывается дополнительной пондеромоторной силой

$$\mathbf{F}_L = -\frac{q^2}{2m\gamma\omega_L^2} \nabla \langle \mathbf{E}_L^2 \rangle, \quad (2)$$

где q и m — заряд и масса частицы соответственно, γ — ее Лоренц-фактор, $\mathbf{E}_L(t, z, r)$ — электрическое поле лазерного импульса, ω_L — его циклическая частота. При использовании пондеромоторного приближения мы можем потребовать осевой симметрии функции $\langle \mathbf{E}_L^2 \rangle$, что позволяет рассматривать лазерный импульс с произвольной поляризацией без нарушения свойств симметрии задачи.

Для удобства будут использоваться безразмерные величины, в которых время нормировано на ω_p^{-1} , пространственные координаты на $k_p^{-1} = c/\omega_p$, импульсы и энергии на mc и mc^2 , заряды на e , концентрации на n_p , а электрическое и магнитное поля на $mc\omega_p/e$. Здесь $e > 0$ и m — модуль заряда и масса электрона, c — скорость света в вакууме, n_p — характерная концентрация электронов в плазме, а $\omega_p = (4\pi e^2 n_p/m)^{1/2}$ — характерная электронная плазменная частота. В качестве характерной концентрации может быть выбрана концентрация плазмы в какой-то точке. Например, для случая плазмы с глубоким каналом она может соответствовать концентрации плазмы снаружи канала. Поле лазерного импульса, в отличие от полей в кильватерной волне, нормируется на $mc\omega_L/e$. Безразмерная пондеромоторная сила при этом записывается как

$$\mathbf{F}_L = -\frac{Q^2}{2M\gamma} \nabla \langle \mathbf{a}^2 \rangle, \quad (3)$$

где $\mathbf{a} = e\mathbf{E}_L/(mc\omega_L)$ — безразмерное поле лазерного импульса, Q и M — безразмерные заряд и масса.

3.2. Квазистационарное приближение

Скорость распространения плазменной кильватерной волны определяется скоростью движения драйвера — возбуждающего ее лазерного импульса или электронного сгустка. Эта скорость близка к скорости света, равной единице в безразмерных переменных. Поскольку драйвер и структура кильватерной волны достаточно медленно изменяются по мере их распространения в плазме, удобно перейти к новым переменным

$$\xi = t - z, \quad \tau = t, \quad (4)$$

в которых сопутствующая продольная координата ξ движется со скоростью света в направлении распространения кильватерной волны. Соответствующее данной замене преобразование производных можно записать как

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial \xi}. \quad (5)$$

Покажем, что при этом новое время τ становится медленной переменной по сравнению с пространственными координатами r и ξ .

Типичным масштабом по ξ и по r может служить плазменная длина волны $\lambda_p = 2\pi \sim 1$. Если предположить, что структура драйвера и кильватерной волны остаются неизменными, то все величины в кильватерной волне зависят от комбинации $z - V_{ph}t = -\xi + (1 - V_{ph})\tau$, где V_{ph} — фазовая скорость кильватерной волны. В этом случае производная по τ будет пропорциональна $1 - V_{ph}$, т. е. отличию фазовой скорости кильватер-

ной волны V_{ph} от скорости света 1. Для релятивистского электронного драйвера с Лоренц-фактором частиц $\gamma_0 \gg 1$ это отличие мало и пропорционально $\gamma_0^{-2} \ll 1$. Для лазерного драйвера фазовая скорость кильватерной волны приблизительно равна групповой скорости лазерного импульса, поэтому ее отличие от 1 пропорционально отношению квадратов лазерной и плазменной длин волн $\lambda_L^2/\lambda_p^2 \ll 1$. Таким образом, вклад от отличия фазовой скорости волны от скорости света мал. Учтем также эволюцию драйвера при его распространении в плазме. Для сфокусированного лазерного импульса наиболее сильным эффектом является дефокусировка, характерная длина которой называется рэлеевской длиной, равной $\pi\lambda_p^2/\lambda_L$ для гауссова импульса. Соответственно, характерное время эволюции лазерного импульса в $\lambda_p/\lambda_L \gg 1$ больше плазменных масштабов λ_p , поэтому производная по τ мала. Стоит заметить, что влияние дефокусировки сильнее влияния отличия групповой скорости лазерного импульса от скорости света. В случае использования электронного драйвера наиболее сильный эффект обусловлен поперечными бетатронными колебаниями [27], период которых пропорционален $\sqrt{\gamma_0}\lambda_p \gg \lambda_p$. Соответственно, влияние этого эффекта также мало. Таким образом, производной по τ в уравнениях можно пренебречь, поэтому в дальнейших вычислениях мы не будем учитывать зависимость величин в кильватерной волне от «времени» τ . Данное приближение, в котором все величины предполагаются зависящими только от переменных $\xi = t - z$ и r , называется квазистационарным [28].

3.3. У р а в н е н и я д л я э л е к т р о м а г н и т н о г о п о л я

Электромагнитное поле плазмы удобно описывать с использованием векторного потенциала \mathbf{A} и кильватерного потенциала $\Psi = \varphi - A_z$, где φ — обычный скалярный потенциал. В квазистационарном приближении Ψ и A_z являются функциями от $\xi = t - z$ и r . Как уже было отмечено ранее, в условиях осевой симметрии задачи существует только три проекции электромагнитного поля, которые могут быть выражены через потенциалы:

$$E_z = \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}, \tag{6}$$

$$E_r = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} + B_\phi, \tag{7}$$

$$B_\phi = -\frac{\partial A_r}{\partial \xi} - \frac{\partial A_z}{\partial r}. \tag{8}$$

Для потенциалов используется калибровка Лоренца:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) = -\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}, \tag{9}$$

которая приводит к жесткой связи между A_r и Ψ :

$$A_r(\xi, r) = -\frac{1}{r} \int_0^r \frac{\partial \Psi(\xi, r')}{\partial \xi} dr'. \quad (10)$$

Таким образом, двумя независимыми потенциалами, полностью определяющими распределение электромагнитного поля в кильватерной волне, являются A_z и Ψ . Использование калибровки Лоренца приводит к разделению волновых уравнений для потенциалов:

$$\Delta A_z - \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} = -J_z, \quad (11)$$

$$\Delta \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\rho, \quad (12)$$

где J_z — продольная компонента плотности тока, а ρ — плотность заряда. Переход к кильватерному потенциалу и переменным ξ и r позволяет получить уравнения для потенциалов A_z , Ψ :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) = -J_z, \quad (13)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) = J_z - \rho. \quad (14)$$

В разности $J_z - \rho$ отсутствует множитель c , так как в безразмерных переменных скорость света равна единице. Важным свойством этих уравнений является их локальность по ξ : распределения потенциалов в произвольной плоскости $\xi = \xi_0$ зависят только от распределений плотностей заряда и тока в той же плоскости. Это обстоятельство обусловлено использованием квазистационарного приближения. Учет эффектов, связанных с эволюцией «драйвера» и отличием фазовой скорости кильватерной волны от скорости света, приведет к появлению производных по ξ и τ в уравнениях (13), (14).

Интегрируя уравнения (13) и (14) по координате r , мы можем получить

$$\frac{\partial A_z}{\partial r} = -\frac{1}{r} \int_0^r J_z(\xi, r') r' dr', \quad (15)$$

$$\Psi = -\int_r^\infty \frac{dr'}{r'} \int_0^{r'} r'' (J_z - \rho) dr''. \quad (16)$$

Здесь использовано предположение, что кильватерный потенциал Ψ обращается в нуль на большом удалении от оси z (при $r \rightarrow \infty$), поскольку плазма на удалении от оси должна оставаться невозмущенной. Также, поскольку в выражение (8) для магнитного поля B_ϕ входит лишь радиальная производная от A_r , дальнейшее интегрирование в (15) не требуется. В итоге, использование выражений (8), (10), (15) позволяет выразить магнитное поле B_ϕ через кильватерный потенциал

$$B_\phi = \frac{1}{r} \int_0^r \left(J_z(\xi, r') + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2}(\xi, r') \right) r' dr'. \quad (17)$$

Выражения (6), (7), (17) совместно с решением для кильватерного потенциала (16) позволяют найти пространственные распределения компонент электромагнитного поля для известных распределений источников ρ и J_z . Способ самосогласованного нахождения распределений этих источников в плазме будет рассмотрен далее.

4. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

4.1. Кинетический подход

Для самосогласованного нахождения пространственных распределений плотностей тока и заряда необходимо дополнить уравнения Максвелла для электромагнитного поля уравнениями, описывающими динамику плазмы. В наиболее полном описании каждой из компонент плазмы отвечает функция распределения $f_\alpha(\mathbf{t}, \mathbf{r}, \mathbf{p})$, где индекс α соответствует сорту частиц. Эволюция функции распределения подчиняется уравнению Власова [29]

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{M_\alpha \gamma_\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (18)$$

где

$$\mathbf{F}_\alpha = Q_\alpha \mathbf{E} + \frac{Q_\alpha}{\gamma_\alpha} \mathbf{p} \times \mathbf{B} - \frac{Q_\alpha^2}{2M_\alpha \gamma_\alpha} \nabla \langle \mathbf{a}^2 \rangle, \quad (19)$$

$$\gamma_\alpha = \sqrt{1 + \mathbf{p}^2 + \frac{Q_\alpha^2}{M_\alpha} \langle \mathbf{a}^2 \rangle}, \quad (20)$$

M_α и Q_α — безразмерные масса и заряд частицы сорта α . В частности, для электрона $M_e = 1$, $Q_e = -1$. Сила (19), входящая в уравнение Власова, включает в себя силу Лоренца со стороны полей кильватерной волны и электронных сгустков и ponderomotorную силу со стороны лазерного импульса. При этом быстрое осцилляторное движение электронов в поле лазерного импульса вносит вклад в усредненный Лоренц-фактор γ_α [30]. Уравнение (18) записано в бесстолкновительном приближении. Это обусловлено тем, что частота столкновений электронов в плазме ν_e обычно много меньше плазменной частоты ω_p . Поскольку кильватерная волна распространяется примерно со скоростью света, учет столкновений становится важен на расстоянии c/ν_e позади драйвера, которое значительно превышает плазменную длину волны $\lambda_p = 2\pi c/\omega_p$.

Решение уравнения Власова (18) в заданном поле можно найти, используя сохранение функции распределения на характеристиках:

$$f_\alpha(\mathbf{t}, \mathbf{r}(\mathbf{t}, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0), \mathbf{p}(\mathbf{t}, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)) = f_\alpha(\mathbf{0}, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0), \quad (21)$$

где характеристики находятся путем решения релятивистских уравнений Ньютона

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_\alpha, \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{M_\alpha \gamma_\alpha} \quad (22)$$

с начальными условиями $\mathbf{p}(\mathbf{0}, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) = \mathbf{p}_0$, $\mathbf{r}(\mathbf{0}, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) = \mathbf{r}_0$. Если знать начальную функцию распределения и решение уравнений Ньютона, то функцию распределения в любой момент времени можно вычислить как

$$f_\alpha(\mathbf{t}, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = \int f_\alpha(\mathbf{0}, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}(\mathbf{t}, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(\mathbf{t}, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)) d^3 \mathbf{r}_0 d^3 \mathbf{p}_0. \quad (23)$$

Таким образом, решение уравнений Ньютона (22) эквивалентно решению уравнения Власова (18). Необходимые для уравнений Максвелла распределения плотностей тока и заряда могут быть вычислены из функций распределения компонент плазмы

$$\mathbf{n}(\mathbf{t}, \mathbf{r}) = \sum_\alpha Q_\alpha \int f_\alpha(\mathbf{t}, \mathbf{r}, \mathbf{p}) d^3 \mathbf{p}, \quad (24)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{t}, \mathbf{r}) = \sum_\alpha Q_\alpha \int \frac{\mathbf{p}}{M_\alpha \gamma_\alpha} f_\alpha(\mathbf{t}, \mathbf{r}, \mathbf{p}) d^3 \mathbf{p}. \quad (25)$$

В случае учета осевой симметрии задачи, перехода к координатам $\xi = \mathbf{t} - \mathbf{z}$, $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{t}$ и использования квазистатического приближения подход с использованием функции распределения может быть упрощен. Поскольку мы предполагаем медленность изменения структуры кильватерной волны, производной по $\boldsymbol{\tau}$ в уравнении Власова можно пренебречь:

$$\left(1 - \frac{p_z}{M_\alpha \gamma_\alpha}\right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial \xi} + \frac{p_r}{M_\alpha \gamma_\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial r} + \mathbf{F}_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{0}. \quad (26)$$

В этом случае явная зависимость функции распределения от времени отсутствует, поэтому в качестве начального условия можно выбрать невозмущенное распределение плазмы до воздействия на нее драйвера

$$f_{\alpha,0}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} f_\alpha(\xi, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0). \quad (27)$$

В кильватерной волне характерные скорости движения частиц значительно превышают скорость теплового движения, поэтому начальным распределением частиц по импульсам мы пренебрежем и будем считать плазму холодной. Изначальная функция распределения в таком случае может быть записана в виде

$$f_{\alpha,0}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) = \mathbf{n}(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{p}_0), \quad (28)$$

где функция $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ описывает поперечный осесимметричный профиль плазмы. В этом случае решение для функции распределения во всем пространстве задается интегралом

$$f_\alpha(\xi, \mathbf{r}, p_z, p_r) = \int_0^\infty \frac{n(r_0)}{1 - \beta_z(\xi, r_0)} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}(\xi, \mathbf{r}_0)) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(\xi, \mathbf{r}_0)) d\mathbf{r}_0, \quad (29)$$

где $\beta_z = p_z/\gamma_\alpha$. Таким образом, для нахождения функции распределения в квазистационарном приближении необходимо знать траектории частиц $\mathbf{r}(\xi, \mathbf{r}_0)$ и их импульс на траекториях $\mathbf{p}(\xi, \mathbf{r}_0)$. Нахождение траекторий будет рассмотрено далее.

4.2. Движение электронов в плазме

Рассмотрим движение электронов плазмы в квазистационарном приближении. На электрон действует сила Лоренца и пондеромоторная сила со стороны лазерного импульса:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\mathbf{E} - \frac{1}{\gamma} [\mathbf{p} \times \mathbf{B}] - \frac{1}{2\gamma} \nabla \langle \mathbf{a}^2 \rangle, \quad (30)$$

где $\gamma = \sqrt{1 + \mathbf{p}^2 + \langle \mathbf{a}^2 \rangle}$ — Лоренц-фактор электрона. Движение по координатам описывается следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\mathbf{p}_r}{\gamma}, \quad \frac{d\xi}{dt} = 1 - \frac{p_z}{\gamma}. \quad (31)$$

В силу аксиальной симметрии задачи, движение по координате ϕ отсутствует.

Система уравнений (30) и (31) является гамильтоновой, соответствующая функция Гамильтона в переменных $(-\xi, \mathbf{r}, \mathbf{P})$ запишется в виде:

$$H(-\xi, \mathbf{r}, \mathbf{P}_z, \mathbf{P}_r) = \gamma(\xi, \mathbf{r}, \mathbf{P}) - \varphi(\xi, \mathbf{r}) - P_z, \quad (32)$$

где $\mathbf{P} = \mathbf{p} - \mathbf{A}$ — канонический импульс, φ — электростатический потенциал,

$$\gamma(\xi, \mathbf{r}, \mathbf{P}) = \sqrt{1 + (\mathbf{P} + \mathbf{A}(\xi, \mathbf{r}))^2 + \langle \mathbf{a}^2 \rangle(\xi, \mathbf{r})}. \quad (33)$$

В записанных переменных в квазистационарном приближении функция Гамильтона (32) не зависит от времени явно, а значит, сохраняется на траектории. Поскольку электроны плазмы изначально покоятся, а поля и потенциалы при $\xi \rightarrow -\infty$ ($\mathbf{z} \rightarrow \infty$) могут быть выбраны равными нулю, то $H = 1$. Если учесть определение кильватерного потенциала, то

$$H = \gamma - \varphi - P_z = \gamma - \Psi - p_z = 1, \quad (34)$$

откуда следует, что на траекториях частиц выполнено соотношение

$$p_z = \gamma - \Psi - 1. \quad (35)$$

Таким образом,

$$\frac{d\xi}{dt} = 1 - \frac{p_z}{\gamma} = \frac{1 + \Psi}{\gamma}. \quad (36)$$

Зависимость $\xi(t)$ монотонна в силу ограниченности скорости движения частицы скоростью света, поэтому ξ можно использовать вместо времени в качестве параметра траектории, при этом уравнение (36)

определяет преобразование от дифференцирования по t к дифференцированию по ξ . Переход от переменной времени к переменной ξ позволяет найти уравнение для траектории электрона. Требование положительности $d\xi/dt$ автоматически ограничивает величину кильватерного потенциала Ψ снизу значением -1 .

Используем определение Лоренц-фактора и соотношение (35) для нахождения γ через другие величины:

$$\gamma^2 = 1 + p_r^2 + (\gamma - \Psi - 1)^2 + \langle a^2 \rangle, \quad (37)$$

откуда легко можно получить

$$\gamma = \frac{1 + (1 + \Psi)^2 + p_r^2 + \langle a^2 \rangle}{2(1 + \Psi)}. \quad (38)$$

Далее запишем уравнение для поперечного импульса:

$$\frac{dp_r}{d\xi} = \frac{\gamma}{1 + \Psi} \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\gamma}{1 + \Psi} \mathbf{E}_r + \frac{p_z}{1 + \Psi} \mathbf{B}_\phi - \frac{1}{2(1 + \Psi)} \frac{\partial}{\partial r} \langle a^2 \rangle. \quad (39)$$

Учитывая (7), (35), (38) и уравнение

$$\frac{dr}{d\xi} = \frac{p_r}{1 + \Psi'} \quad (40)$$

в итоге получим

$$\frac{d}{d\xi} \left[(1 + \Psi) \frac{dr}{d\xi} \right] = \left[\frac{1 + (1 + \Psi)^2}{2(1 + \Psi)^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\xi} \right)^2 \right] \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \mathbf{B}_\phi - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\langle a^2 \rangle}{1 + \Psi}. \quad (41)$$

Данное уравнение второго порядка позволяет найти решение $r(\xi, r_0)$ для траектории частицы с начальными условиями

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} r(\xi, r_0) = r_0, \quad \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \frac{dr}{d\xi} = 0 \quad (42)$$

в заданных электромагнитных полях. Подстановка всех таких траекторий в уравнение (29) позволяет восстановить функцию распределения частиц. Аналогичным образом можно получить уравнение для траекторий ионов плазмы. Однако, поскольку масса ионов значительно превышает массу электронов, их движением мы пренебрежем и будем полагать их покоящимися: $\rho_i(\xi, r) = \rho_i(r) \propto n(r)$.

Очевидно, что используемое нами приближение о независимости функции Гамильтона H от времени τ справедливо, только если время движения электрона по траектории мало по сравнению со временем изменения полей \mathbf{B} и \mathbf{E} , а также огибающей лазерного импульса $\langle a^2 \rangle$. Для электронов и ионов плазмы данное приближение справедливо для траекторий, длина которых по порядку величины не сильно превышает плазменную длину волны. Таким образом, уравнение для траекторий электронов (41) может быть использовано для самосогласованного нахождения электронной плотности $\rho_e(\xi, r)$ в кильватерной волне.

Однако для релятивистского электронного драйвера и ускоряемых в кильватерной волне заряженных частиц, продольная скорость которых близка к скорости света и распределение плотности заряда которых описывается функцией $\rho_{\mathbf{v}}(\xi, \mathbf{r})$, движение по ξ является очень медленным, поэтому для них описание в рамках квазистационарного подхода неприменимо. Поскольку динамика ускоряемых в кильватерной волне электронов чрезвычайно важна для выявления их параметров на выходе из плазменного ускорителя, их движение рассмотрим отдельно.

4.3. Движение релятивистских сгустков частиц

Рассмотрим движущийся вдоль оси \mathbf{z} сгусток произвольных заряженных частиц (электронов, позитронов, ионов) с плотностью заряда $\rho_{\mathbf{v}}(\xi, \mathbf{r})$ и Лоренц-фактором $\gamma_0 \gg 1$, которому соответствует скорость $V_0 \approx 1$. Соответствующая этому сгустку продольная плотность тока $J_{\mathbf{v},z} = V_0 \rho_{\mathbf{v}} \approx \rho_{\mathbf{v}}$ совпадает с плотностью заряда. Поскольку характерное время эволюции таких сгустков обычно велико, с точки зрения уравнений (13), (14) распределение $\rho_{\mathbf{v}}$ можно считать заданным. Таким образом, в рамках квазистационарного приближения самосогласованное нахождение распределения плотности заряда сгустков не требуется. Однако, поскольку динамика ускоряемых частиц представляет большой интерес, отдельно рассмотрим силу Лоренца, действующую на такие релятивистские частицы в кильватерной волне.

У силы Лоренца есть только продольная и поперечная компоненты. С учетом уравнений (6–8) продольная компонента для частицы с зарядом Q равна

$$F_z = QE_z = Q \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}, \quad (43)$$

а поперечная:

$$F_r = QE_r - QV_0 B_\phi \approx Q(E_r - B_\phi) = -Q \frac{\partial \Psi}{\partial r}. \quad (44)$$

Данные выражения будут справедливы и для электронов с ненулевым поперечным импульсом \mathbf{p}_r , если он достаточно мал: $\mathbf{p}_r \ll \gamma_0$. Видно, что компоненты силы пропорциональны производным от кильватерного потенциала, что подчеркивает важность этой величины для описания кильватерной волны.

Таким образом, мы научились описывать все три слагаемых, входящих в пространственные распределения плотности заряда ρ и плотности тока J_z . В приближении неподвижности ионов плотность их заряда $\rho_i(\mathbf{r})$ считается заданной и однородной по продольной координате, при этом их вклад в плотность тока нулевой. Плотности заряда ρ_e и тока J_e электронов плазмы могут быть найдены путем решения уравнения (41) и последующего восстановления функции распределения электронов (29). Плотности заряда $\rho_{\mathbf{v}}$ и тока $J_{\mathbf{v}} \approx \rho_{\mathbf{v}}$ релятивистских сгустков счита-

ются заданными функциями. Совместное самосогласованное решение уравнений (16), (15), (41) позволяет полностью решить задачу о возбуждении произвольной кильватерной волны драйвером в квазистатическом приближении. Эта система уравнений используется в квазистатических численных кодах для упрощения расчетов по сравнению с совместным решением уравнений Максвелла и уравнений движения частиц. Однако аналитическое решение в общем случае найти не представляется возможным. Стоит также отметить, что использование квазистационарного подхода не позволяет нам рассматривать достаточно важный процесс самоинжекции электронов, при котором электроны плазмы захватываются в кильватерную волну и ускоряются в ней. При этом процессе невозможно провести четкую границу между плотностью электронов плазмы ρ_e , описываемую функцией распределения, и плотностью релятивистских сгустков ρ_B , полагаемой заданной, поскольку осуществляется обмен частицами между этими двумя категориями. Для описания подобных процессов необходимо пользоваться полными уравнениями.

Описанный нами подход позволяет находить возбуждаемую заданным драйвером кильватерную волну самосогласованным образом. Далее мы перейдем к рассмотрению частного случая сильно нелинейной кильватерной волны (плазменной полости).

5. МОДЕЛЬ ПЛАЗМЕННОЙ ПОЛОСТИ

Самосогласованное описание режима плазменной полости с использованием уравнений Максвелла и уравнений движения частиц представляет большие трудности и на данный момент возможно только с использованием численных методов. Поэтому для возможности дальнейшего теоретического исследования мы будем разрабатывать феноменологическую теорию этого режима, в рамках которого распределение источников ρ и J_z не будет находиться полностью самосогласованным образом. Вместо этого для данных источников будет использована феноменологическая модель, основанная на результатах численного моделирования методом частиц в ячейках.

Типичная плазменная полость в моделировании показана на рис. 2(a).

Из распределения электронной плотности видно, что существует очень резкая граница между областью, в которой отсутствуют электроны плазмы, и электронным слоем. Поэтому эту границу мы будем считать линией, описываемой функцией $r_b(\xi)$. Пространство будет разграничено на области внутри плазменной полости ($r < r_b$) и снаружи нее ($r > r_b$). Непосредственно на границе плазменной полости образуется достаточно тонкий электронный слой. Зададим модель для источника $J_z - \rho$, опираясь на результаты моделирования для этой разности (рис. 2(b), (e)). Внутри плазменной полости нет электронов плазмы: $\rho_e = 0$, поэтому плотность заряда внутри полости составляет из суммы плотности заряда электронных сгустков ρ_B и

плотности заряда ионов ρ_i . Поскольку ионы неподвижны, продольная компонента тока включает в себя лишь компоненту, связанную с током электронных сгустков $J_{B,z} \approx \rho_B$. Таким образом, в разность $J_z - \rho \approx \rho_i$ релятивистские электронные сгустки не вносят вклада. Это отчетливо видно на рис. 2(b), на котором практически не заметен электронный драйвер. В то же время, драйвер явно различим на рис. 2(a), (c). Снаружи плазменной полости источник $J_z - \rho$ быстро спадает к нулю. Замеченные нами особенности $J_z - \rho$ можно описать следующей моделью:

$$J_z - \rho = \begin{cases} -\rho_i(r), & r < r_b(\xi), \\ S_0(\xi)g\left(\frac{r-r_b(\xi)}{\Delta}\right), & r \geq r_b(\xi). \end{cases} \quad (45)$$

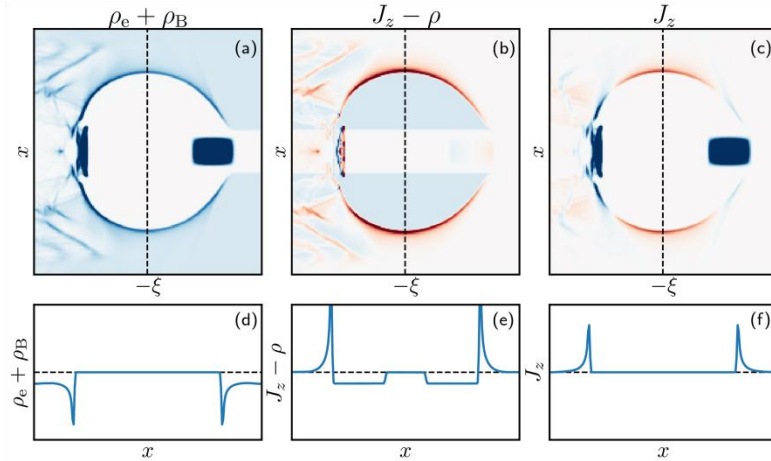


Рис. 2: Результаты численного моделирования плазменной полости, возбуждаемой электронным сгустком в плазме с полым каналом. Распределения в пространстве (a) плотности заряда электронов (включая драйвер), (b) разности $J_z - \rho$, (c) продольного тока J_z . На рисунках (d)–(f) показаны те же распределения в поперечном сечении, показанном на рисунках (a)–(b) штриховой линией

Функция $g(X)$, спадающая к нулю при росте X , описывает профиль электронного слоя на границе полости, а постоянная величина Δ — характерную его толщину. Мы полагаем, что функция g нормирована таким образом, что $M_0(0) = M_1(0) = 1$, где

$$M_n(X) = \int_X^\infty g(Y)Y^n dY \quad (46)$$

являются обобщенными моментами функции g . Подобной нормировки всегда можно добиться путем домножения $S_0(\xi)$ и Δ на некоторые постоянные множители. В качестве примеров функций g , использованных в предшествующих работах (см., например, [20, 21, 23]), можно привести $g = \exp(-X)$, описывающую экспоненциальное спадание профиля, и $g(X) = \theta(2 - X)/2$, описывающую простой прямоугольный профиль электронного слоя. Здесь $\theta(X)$ — ступенчатая функция Хевисайда.

Из условия сходимости интеграла в выражении (16) для кильватерного потенциала Ψ можно найти

$$S_0(\xi) = \frac{S_i(r_b(\xi))}{\Delta(r_b(\xi) + \Delta)}, \quad (47)$$

где

$$S_i(r) = \int_0^r \rho_i(r') r' dr' \quad (48)$$

является функцией, определяемой только профилем плотности плазмы. Например, для однородной плазмы $\rho_i = 1$ эта функция равна $r^2/2$.

Как показывает моделирование (рис. 2(c)), продольный ток J_z проявляет схожее с $J_z - \rho$ поведение, поэтому мы используем аналогичную модель:

$$J_z(\xi, r) = \begin{cases} \rho_B(\xi, r), & r < r_b(\xi), \\ J_0(\xi) g_J\left(\frac{r - r_b(\xi)}{\Delta_J}\right), & r \geq r_b(\xi). \end{cases} \quad (49)$$

Внутри плазменной полости в продольную компоненту тока вносят вклад только релятивистские электронные ступки $J_{z,B} \approx \rho_B$. В общем случае типичная толщина электронного слоя Δ_J для функции J_z может не совпадать с шириной Δ . В целях общности введена и отличная от $g(X)$ функция $g_J(X)$, которая нормализована таким же образом, как $g(X)$, т.е. ее моменты $M_{J,0}(0) = M_{J,1}(0) = 1$. Значение $J_0(\xi)$ может быть найдено из граничного условия спада азимутального магнитного поля $\lim_{r \rightarrow \infty} r B_\phi = 0$, что будет продемонстрировано в разделе 7.

Таким образом, модель плазменной полости полностью задается функцией $r_b(\xi)$, описывающей положение ее границы, а также функциями $g(X)$, $g_J(X)$ с характерными толщинами Δ , Δ_J , описывающими электронный слой на границе. Зная лишь эти три функции, мы можем рассчитать распределение электромагнитного поля в пространстве. Параметры электронного слоя можно подобрать эмпирически на основе результатов численного моделирования. Однако для функции $r_b(\xi)$ может быть найдено уравнение, которое позволяет найти эту функцию аналитически, что будет показано в следующем разделе.

6. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ГРАНИЦЫ ПЛАЗМЕННОЙ ПОЛОСТИ

Нетрудно заметить, что граница плазменной полости $r_b(\xi)$ также описывает траекторию электрона плазмы, движущегося в электронном слое. Это означает, что уравнение (41) для траекторий электронов в плазме может быть применено для описания границы. Для этого в него необходимо подставить значения полей в кильватерной волне на границе r_b . Всего для использования уравнения (41) понадобится найти Ψ ,

$\partial\Psi/\partial\xi$, $\partial\Psi/\partial r$ и B_ϕ на границе плазменной полости. Вычислим их, пользуясь введенной нами моделью плазменной полости.

Сначала найдем распределение потенциала Ψ в пространстве, используя уравнение (16) с учетом постулированной нами модели плазменной полости (45). Для $r > r_b$ получим

$$\begin{aligned} \Psi(\xi, r) &= \int_r^\infty \frac{dr'}{r'} \left[S_i(r_b) - \frac{S_i(r_b)}{\Delta(r_b+\Delta)} \int_{r_b}^{r'} r'' g\left(\frac{r''-r_b}{\Delta}\right) dr'' \right] = \\ &= \frac{\epsilon S_i(r_b)}{1+\epsilon} \int_R^\infty \frac{M_0(R')+\epsilon M_1(R')}{1+\epsilon R'} dR', \end{aligned} \quad (50)$$

где введены следующие обозначения:

$$R = R(r, r_b) = \frac{r-r_b}{\Delta}, \quad \epsilon = \epsilon(r_b) = \frac{\Delta}{r_b}. \quad (51)$$

Для $r < r_b$ будем иметь

$$\Psi(\xi, r) = \int_r^{r_b} \frac{S_i(r')}{r'} dr' + S_i(r_b)\beta(r_b), \quad (52)$$

где

$$\beta(r_b) = \frac{\epsilon(r_b)}{1+\epsilon(r_b)} \int_0^\infty \frac{M_0(R')+\epsilon(r_b)M_1(R')}{1+\epsilon(r_b)R'} dR'. \quad (53)$$

Таким образом, $\Psi(\xi, r_b) = S_i(r_b)\beta(r_b)$. Важно, что под r_b всюду подразумевается функция $r_b(\xi)$.

Для нахождения частных производных кильватерного потенциала Ψ при $r = r_b$ будем использовать предел при стремлении к r_b снизу, который совпадает с пределом сверху в силу гладкости функции Ψ . Внутри плазменной полости ($r < r_b$) производная от Ψ по поперечной координате

$$\frac{\partial\Psi}{\partial r}(\xi, r) = -\frac{S_i(r)}{r}, \quad (54)$$

в то время как производная по продольной координате

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}(\xi, r) = \left(\frac{S_i(r_b)}{r_b} + S_i'(r_b)\beta(r_b) + S_i\beta'(r_b) \right) r_b'. \quad (55)$$

Из этих выражений также видно, что внутри плазменной полости радиальная производная не зависит от продольной координаты, а продольная производная — от поперечной. Поскольку эти производные соответствуют силам (44), (43), действующим на ускоряемые в полости частицы, это свойство однородности зависимости производных только от одной координаты важно с точки зрения физики ускорения.

После нахождения потенциала и его производных остается найти магнитное поле на границе $B_\phi(\xi, r_b)$. Для этого используем (17). Тогда

$$B_\phi(\xi, r_b) = \frac{r_b}{2} \frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2}(\xi, r_b) - \frac{\lambda(\xi)}{r_b}, \quad (56)$$

где

$$\lambda(\xi) = -\int_0^{r_b} \rho_B(\xi, r') r' dr'. \quad (57)$$

Первый член в (56) получен с использованием независимости $\partial^2\Psi/\partial\xi^2$ от координаты r внутри плазменной полости (при $r < r_b$). Функция $\lambda(\xi)$, в силу отсутствия электронов плазмы внутри плазменной полости, определяется только лишь релятивистскими электронными сгустками внутри полости (либо возбуждающими ее, либо ускоряемыми в ней). При использовании только электронов она является знакоположительной. Вообще говоря, в общем случае эта функция содержит зависимость от ξ как напрямую в результате зависимости от плотности заряда сгустков $\rho_B(\xi, r)$, так и через зависимость от ξ положения границы $r_b(\xi)$, которая является верхним пределом интегрирования. Однако если электронные сгустки находятся полностью внутри плазменной полости, т. е. $\rho_B = 0$ при $r > r_b$, то предел r_b в (57) можно заменить на бесконечность и функция $\lambda(\xi)$ перестает зависеть от формы границы полости r_b :

$$\lambda(\xi) = - \int_0^\infty \rho_B(\xi, r') r' dr'. \quad (58)$$

Это свойство независимости функции λ от r_b понадобится нам при дальнейших вычислениях.

Поскольку все величины, которые необходимо подставить в уравнение (41) для нахождения уравнения для $r_b(\xi)$ найдены, перейдем к рассмотрению этого уравнения. Левая часть уравнения (41) для траектории $r_b(\xi)$ преобразуется в

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} [(1 + \Psi)r_b'] &= (1 + \Psi)r_b'' + \frac{\partial\Psi}{\partial r} r_b'^2 + \frac{\partial\Psi}{\partial\xi} r_b' = \\ &= (1 + S_i\beta)r_b'' - \frac{S_i}{r_b} r_b'^2 + \left(\frac{S_i}{r_b} + S_i'\beta + S_i\beta'\right) r_b'^2 = \\ &= (1 + S_i\beta)r_b'' + (S_i'\beta + S_i\beta')r_b'^2. \end{aligned} \quad (59)$$

Нетрудно заметить, что правая часть (41) будет содержать члены, пропорциональные r_b'' , $r_b'^2$, а также члены, не содержащие производной от r_b . Таким образом, примененное к границе плазменной полости уравнение (41) сведется к виду

$$A(r_b)r_b'' + B(r_b)r_b'^2 + C(r_b) = \lambda(\xi) + L(\xi, r_b). \quad (60)$$

Как уже было отмечено ранее, функция $\lambda(\xi)$, описывающая электронные сгустки внутри плазменной полости, для простоты полагается независимой от функции $r_b(\xi)$. Член $L(\xi, r_b)$ описывает влияние лазерного импульса на границу плазменной полости. Таким образом, уравнение (60) описывает эволюцию границы плазменной полости с учетом воздействия на нее находящихся в ней электронных сгустков и лазерных импульсов. Коэффициенты этого уравнения имеют следующий вид:

$$A(r_b) = \frac{r_b}{2} (2 + S_i + 2S_i\beta + S_i'\beta r_b + S_i\beta' r_b), \quad (61)$$

$$B(r_b) = \frac{r_b}{2} (S_i' + 2S_i'\beta + 2S_i\beta' + S_i''\beta r_b + 2S_i'\beta' r_b + S_i\beta'' r_b), \quad (62)$$

$$C(r_b) = S_i \frac{1+(1+S_i\beta)^2}{2(1+S_i\beta)^2}, \quad (63)$$

$$L(\xi, r_b) = -\frac{r_b}{2(1+S_i\beta)} \frac{\partial \langle \mathbf{a}^2 \rangle}{\partial r}(\xi, r_b) - \frac{S_i}{2(1+S_i\beta)^2} \langle \mathbf{a}^2 \rangle(\xi, r_b). \quad (64)$$

В дальнейшем мы не будем учитывать слагаемое L , предполагая, что уравнение написано для области пространства, где лазерное поле отсутствует.

Всюду у функций S_i , β и их производных аргументом является r_b . Коэффициенты A , B , C зависят как от профиля плазмы (посредством функции S_i), так и от свойств электронного слоя на границе (посредством функции β). Профиль плазмы, а следовательно и функция S_i , определяются условиями задачи, однако свойства электронного слоя в нашей модели (45) постулируются и не могут быть определены исходя из условий задачи. В связи с этим важным является определить, насколько сильно свобода выбора параметров электронного слоя может влиять на уравнение для границы плазменной полости.

6.1. Влияние профиля электронного слоя

Рассмотрим свойства функции $\beta(r_b)$, задаваемой выражением (53), для различных профилей электронного слоя $g(X)$. Во-первых, заметим, что функция β зависит только от функции $\epsilon(r_b) = \Delta/r_b$ и не содержит зависимости от r_b в другой форме, поэтому мы можем рассматривать поведение альтернативной функции:

$$\hat{\beta}(\epsilon) = \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \int_0^\infty \frac{M_0(R') + \epsilon M_1(R')}{1+\epsilon R'} dR', \quad (65)$$

которая очевидным образом связана с исходной: $\beta(r_b) = \hat{\beta}(\Delta/r_b)$. Во-первых, легко заметить, что при $\epsilon \rightarrow 0$

$$\hat{\beta}(\epsilon) \approx \epsilon \int_0^\infty M_0(R') dR' = \epsilon M_1(0) = \epsilon. \quad (66)$$

Таким образом, если аргумент ϵ мал, что соответствует малости толщины электронного слоя Δ по сравнению с радиусом плазменной полости r_b , функция $\hat{\beta}$ линейна по нему и перестает зависеть от свойств функции $g(X)$, описывающей профиль электронного слоя.

Рассмотрим, насколько сильно отличие функций $\hat{\beta}$ для двух частных случаев профиля плазмы: экспоненциального профиля $g(X) = \exp(-X)$ и прямоугольного профиля $g(X) = \theta(2-X)/2$. Обобщенные моменты (46) функции g для экспоненциального профиля

$$M_0(X) = \exp(-X), M_1(X) = (1-X)\exp(-X), \quad (67)$$

а для прямоугольного

$$M_0(X) = \frac{2-X}{2} \theta(2-X), M_1(X) = \frac{4-X^2}{4} \theta(2-X). \quad (68)$$

Соответствующие функции $\hat{\beta}(\epsilon)$ показаны на рис. 3. Из этих рисунков видно, что, несмотря на очень сильное различие между формой слоя

в экспоненциальной и прямоугольной модели, функция $\hat{\beta}(\epsilon)$, а следовательно, и $\beta(r_b)$, входящая в уравнение (60) для формы плазменной

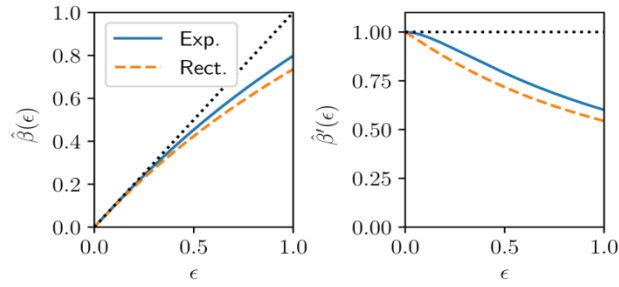


Рис. 3: Графики функций $\hat{\beta}(\epsilon)$ и их производных $\hat{\beta}'(\epsilon)$ для экспоненциального (сплошная линия) и прямоугольного (штриховая линия) профилей электронного слоя. Пунктирной линией показано решение в приближении $\epsilon \ll 1$

полости, очень слабо изменяется при замене формы слоя. Это позволяет рассчитывать на то, что наша модель, несмотря на наличие произвола в выборе формы электронного слоя, будет корректно описывать форму реальной плазменной полости, даже если выбранная нами форма слоя плохо соответствует реальной.

6.2. Приближение бесконечно тонкого слоя

В общем случае, для произвольных параметров плазменной полости и электронного слоя, уравнение (60) может быть решено численно. Однако существует два предельных случая, при которых это уравнение можно в значительной степени упростить.

Предположим, что толщина электронного слоя на границе плазменной полости бесконечно мала ($\Delta \rightarrow 0$). Это отвечает тому, что функция $\epsilon(r_b) = \Delta/r_b$ также стремится к нулю. Как нами показано ранее, при $\epsilon \rightarrow 0$ функция $\beta(r_b) \approx \epsilon$. Таким образом, величиной β также можно пренебречь. Нетрудно показать, что все производные функции β также пропорциональны ϵ и аналогичным образом являются бесконечно малыми. Тогда коэффициенты (61–63) сильно упрощаются, и уравнение (60) принимает вид

$$\left(1 + \frac{S_i}{2}\right) r_b r_b'' + \frac{S_i'}{2} r_b r_b'^2 + S_i = \lambda(\xi). \quad (69)$$

Важно, что в данном приближении коэффициенты уравнения перестают зависеть как от формы электронного слоя $g(X)$, так и от его толщины Δ , и определяются лишь профилем плазмы, от которого зависит функция $S_i(r)$. В частности, при использовании однородной плазмы данное уравнение выглядит следующим образом:

$$\left(1 + \frac{r_b^2}{4}\right) r_b r_b'' + \frac{r_b^2}{2} r_b'^2 + \frac{r_b^2}{2} = \lambda(\xi). \quad (70)$$

6.3. Р е л я т и в и с т с к о е п р и б л и ж е н и е

Рассмотрим другой предельный случай. Предположим, что толщина электронного слоя на границе плазменной полости мала по сравнению с размером полости, т.е. $\Delta \ll r_b$. Тогда функция $\epsilon = \Delta/r_b \ll 1$, и справедливо приближение $\beta(r_b) \approx \epsilon(r_b)$. Однако, в отличие от предыдущего, случая предположим, что

$$S_i \beta \approx S_i \epsilon \gg 1, \tag{71}$$

то есть $S_i/r_b \gg \Delta^{-1}$. Поскольку S_i/r_b для типичных профилей плазмы растет с ростом размера плазменной полости, это соответствует предположению о том, что плазменная полость является достаточно большой. С учетом выражения (38) для Лоренц-фактора γ и равенства $\Psi = S_i \beta$ на границе это неравенство также соответствует приближению $\gamma \gg 1$ для электрона, движущегося по границе плазменной полости. Таким образом, релятивистское приближение справедливо, если электроны в электронном слое являются релятивистскими, что и обуславливает его название.

В рамках этого приближения уравнение (60) запишется как:

$$S_i r_b r_b'' + S_i' r_b r_b'^2 + S_i = 2\lambda(\xi). \tag{72}$$

Это уравнение, как и уравнение (69), не зависит как от формы электронного слоя $g(X)$, так и от его толщины Δ . Среди отличий от уравнения (69) можно отметить в два раза меньший коэффициент C , а также отсутствие единицы в коэффициенте A , поскольку ей необходимо пренебречь при $S_i \gg 1$. Для однородной плазмы в этом приближении получится следующее простое уравнение:

$$r_b r_b'' + 2r_b'^2 + 1 = \frac{4\lambda(\xi)}{r_b^2}, \tag{73}$$

которое впервые было выведено в работе [20].

6.4. О б л а с т ь п р и м е н и м о с т и п р и б л и ж е н и й

Важным является понять, в какой области параметров справедливо каждое из найденных нами приближений. Для этого мы проведем сравнение коэффициентов, полученных в релятивистском приближении и приближении бесконечно-тонкого слоя, с истинными значениями коэффициентов (61–63). В качестве примера плазмы будем использовать однородную плазму $\rho_i(r) = 1$, а при описании электронного слоя предположим его форму экспоненциальной $g(X) = \exp(-X)$. Как мы уже показали ранее, выбор функции g не сильно влияет на значения коэффициентов. В результате, при заданном профиле плазмы и профиле электронного слоя, истинное значение коэффициентов будет зависеть от выбранной толщины электронного слоя Δ и текущего значения r_b , а значения коэффициентов в рассмат-

риваемых нами приближениях — лишь от значения r_b . Для количественной оценки ошибки вычисления коэффициентов в сделанных нами приближениях будем использовать функцию

$$D(a, b) = 2 \left| \frac{a-b}{a+b} \right|, \quad (74)$$

для знакоопределенных величин принимающую значения от 0 при полном совпадении значений до 2 при росте степени различия.

Построим на плоскости Δ, r_b распределения ошибок вычисления коэффициентов. Из-за наличия в задаче только одного пространственного масштаба, плазменной длины волны, ожидаемо, что толщина электронного слоя на границе полости по порядку величины соразмерна с ней. В то же время размер плазменной полости может быть значительно больше толщины электронного слоя, что было использовано нами в приближениях. Поэтому параметр Δ на плоскости параметров мы будем варьировать от 0 до 1, а размер полости r_b — от 0 до 20. Для коэффициента A , определяемого формулой (61), зависимость ошибки от толщины слоя Δ и размера полости r_b показана на рис. 4. Из данного рисунка следует, что наличие дополнительного единичного слагаемого в A в приближении бесконечно тонкого слоя более точно описывает действительную зависимость A от радиуса плазменной полости для малых значений Δ . В то же время, при толщине электронного слоя $\Delta \gtrsim 0.4$ разница между приближениями становится несущественной. Коэффициент B в обоих приближениях задается одинаковой формулой $B = S_1' r_b / 2$, отличие которой от истинного значения (62) показано на рис. 5. Сделанные нами приближения вносят серьезную ошибку при вычислении этого коэффициента только при очень малых величинах r_b . Наиболее существенно в двух приближениях отличается коэффициент C , истинное значение которого задается формулой (63). Для приближения бесконечно тонкого слоя (рис. 6(a)) расчет этого коэффициента оказывается справедливым только в малом диапазоне параметров для малых Δ и r_b , в то время как релятивистское приближение (рис. 6(b)), напротив, оказывается справедливым для достаточно больших значений r_b . Если мы теперь учтем ошибки во всех трех коэффициентах и оценим общую ошибку для каждого из приближений (для чего используем корень из суммы квадратов ошибок отдельных коэффициентов), то мы можем получить области параметров, при которых можно пользоваться тем или иным приближением. Данные области показаны на рис. 7. Можно сделать вывод, что приближение тонкого слоя может быть справедливым, только если характерная толщина слоя $\Delta \lesssim 0.1$. В численном моделировании обычно наблюдаются большие значения Δ , поэтому возможность наблюдения режима, соответствующего этому приближению, сомнительна. С другой стороны, релятивистское приближение оказывается хорошо применимым при размере плазменной полости $r_b \gtrsim 10$ (рис. 7(b)) для ожидаемых нами значений толщины электронного слоя.

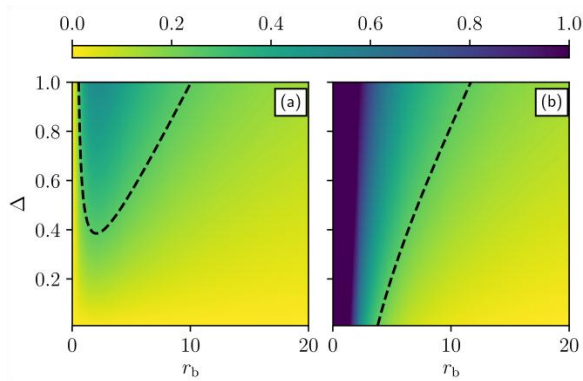


Рис. 4: Относительная ошибка вычисления коэффициента A (а) в приближении бесконечно тонкого слоя $A = r_b(1 + r_b^2/4)$ и (б) в релятивистском приближении $A = r_b^3/4$ при сравнении с истинным значением (61). Штриховой линией показан уровень 0.25

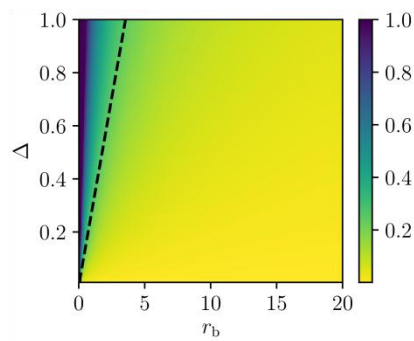


Рис. 5: Относительная ошибка вычисления коэффициента B в обоих приближениях ($B = S_1 r_b/2$) при сравнении с истинным значением (62). Штриховой линией показан уровень 0.25

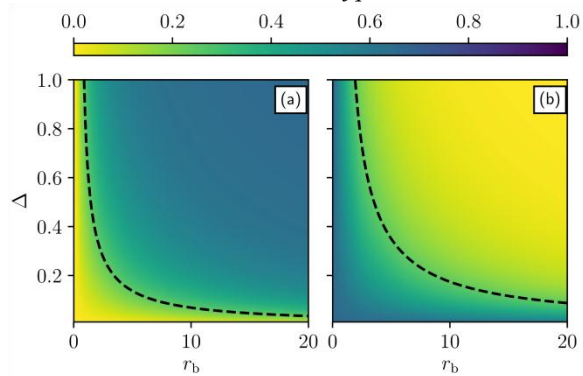


Рис. 6: Относительная ошибка вычисления коэффициента C (а) в приближении бесконечно тонкого слоя $C = r_b^2/2$ и (б) в релятивистском приближении $C = r_b^2/4$ при сравнении с истинным значением (63). Штриховой линией показан уровень 0.25

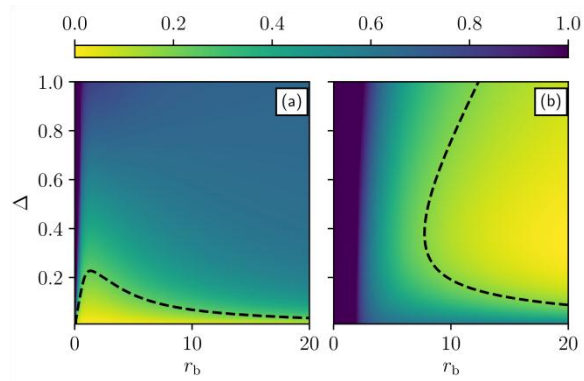


Рис. 7: Корень суммы квадратов ошибок вычисления коэффициентов A , B , C для (а) приближения бесконечно тонкого слоя и (б) релятивистского приближения. Штриховой линией показан уровень 0.25

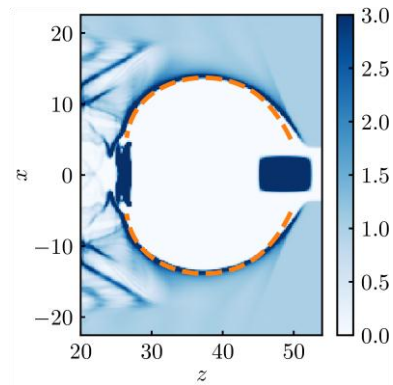


Рис. 8: Распределение электронной плотности в плазменной полости, возбуждаемой релятивистским электронным сгустком в плазме с полным каналом. Граница плазменной полости, вычисленная по формуле (72) в релятивистском приближении, показана штриховой линией. Все линейные размеры нормированы на $k_p^{-1} = \lambda_p/2\pi$

Для демонстрации применимости релятивистского приближения было проведено численное моделирование методом частиц в ячейках с использованием численного кода Smilei [31, 32]. Данный код использует безразмерные величины, аналогичные используемым в этой работе. В этом моделировании для возбуждения плазменной полости в плазме с полным каналом радиуса $r_c = 1.2\pi$ использовался электронный сгусток с параболическим профилем плотности с поперечным размером $\sigma_{B,r} = 1.6\pi$, продольным размером $\sigma_{B,z} = 2.4\pi$, полным зарядом 6.4 нКл и энергией электронов 2 ГэВ . Сравнение результатов моделирования с описанием границы в релятивистском приближении показано на рис. 8. Оцененная толщина электронного слоя в моделировании составляла $\Delta \approx 0.75$ при максимальном размере плазменной полости $\max r_b \approx 13.8$, что соответствует области применимости релятивистского приближения (рис. 7(b)). Незначительные рас-

хождения моделирования с теорией наблюдаются в передней и задней частях плазменной полости, где размер плазменной полости r_b становится меньше и справедливость релятивистского приближения нарушается. Поскольку уравнение (72) в релятивистском приближении намного проще полного уравнения (60), но при этом достаточно хорошо описывает реальную задачу, в последующих разделах мы будем пользоваться только этим приближенным уравнением.

7. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ПЛАЗМЕННОЙ ПОЛОСТИ

Для задач инжекции и самоинжекции заряженных частиц в плазменную полость важно знать распределение электромагнитного поля в пространстве как снаружи плазменной полости, так и внутри нее. В общем случае, построенная нами теория позволяет находить распределение полей с использованием следующего алгоритма: задать функции $g(X)$, $g_j(X)$ и параметры Δ , Δ_j , описывающие форму и толщину электронного слоя на границе (например, эти параметры можно подобрать на основе численного моделирования); решить уравнение для границы плазменной полости (60); используя модели (45), (49), найти распределения $J_z - \rho$ и J_z в пространстве; вычислить распределение кильватерного потенциала в пространстве, пользуясь формулой (16); вычислить распределения компонент электромагнитного поля, пользуясь формулами (6), (7), (17). Однако данный подход требует большого количества вычислений, которые в общем случае могут быть сделаны только лишь численно.

Как было показано в разделе 6, использование приближения малости толщины электронного слоя Δ по сравнению с размером плазменной полости r_b позволяет существенно упростить получаемые выражения. Поэтому мы можем предположить, что данное приближение позволит нам получить и более простой способ вычисления компонент электромагнитного поля. Для этого введем два параметра $\epsilon = \Delta/r_b$ и $\epsilon_j = \Delta_j/r_b$, которые будем предполагать малыми, и разложим пространственные распределения величин в ряд Тейлора по данным параметрам, оставляя лишь члены наиболее высокого порядка. Также мы будем предполагать, что граница плазменной полости описывается уравнением в релятивистском приближении (72).

7.1. Кильватерный потенциал

Общие выражения для кильватерного потенциала (50), (52) уже были получены в разделе 6. В силу их важности для дальнейших вычислений, приведем их здесь еще раз. Для $r > r_b$

$$\psi = \frac{\epsilon S_1(r_b)}{1+\epsilon} \int_R^\infty \frac{M_0(R') + \epsilon M_1(R')}{1+\epsilon R'} dR'. \quad (75)$$

где $R = (r - r_b)/\Delta$, а для $r < r_b$

$$\Psi = \int_r^{r_b} \frac{S_i(r')}{r'} dr' + \frac{\epsilon S_i(r_b)}{1+\epsilon} \int_0^\infty \frac{M_0(R') + \epsilon M_1(R')}{1+\epsilon R'} dR'. \quad (76)$$

В пределе $\epsilon \ll 1$ уравнение (75) линейно по ϵ , поэтому приближенное выражение для Ψ снаружи плазменной полости (для $r > r_b$):

$$\Psi(\xi, r) \approx \epsilon(r_b) S_i(r_b) \int_{R(r, r_b)}^\infty M_0(R') dR', \quad (77)$$

а внутри плазменной полости ($r < r_b$)

$$\Psi(\xi, r) \approx \int_r^{r_b} \frac{S_i(r')}{r'} dr' + S_i(r_b) \epsilon(r_b). \quad (78)$$

Второй член в этом уравнении оставлен для обеспечения непрерывности функции Ψ на границе.

7.2. Продольное электрическое поле

Выражений (77) и (78) достаточно, чтобы найти распределение продольного электрического поля $E_z = \partial\Psi/\partial\xi$ (см. (6)). Для нахождения поля внутри плазменной полости мы дифференцируем только первый член в (78) и получаем:

$$E_z(\xi) \approx \frac{S_i(r_b)}{r_b} r_b', \quad (79)$$

Продольное электрическое поле в плазменной полости не зависит от поперечной координаты r , что является важным для ускорения электронов свойством: электроны в произвольном поперечном сечении ускоряемого ступка испытывают влияние одного и того же ускоряющего поля, что обеспечивает равномерное ускорение электронов независимо от их поперечной координаты.

Для нахождения поля снаружи плазменной полости необходимо продифференцировать уравнение (77) по ξ , что эквивалентно дифференцированию по r_b и домножению на r_b' . Нетрудно заметить, что производная от R

$$\frac{\partial R}{\partial r_b} = -\frac{1}{\Delta} = -\frac{1}{r_b \epsilon} \quad (80)$$

имеет порядок малости ϵ^{-1} по параметру ϵ , в то время как дифференцирование S_i и ϵ не меняет порядок малости выражения, поэтому его можно не производить. Таким образом, снаружи плазменной полости ($r > r_b$) продольное электрическое поле будет равно

$$E_z \approx \frac{S_i(r_b)}{r_b} r_b' M_0(R). \quad (81)$$

Оно спадает к нулю с удалением от плазменной полости в соответствии с функцией $M_0(R)$. Например, если электронный слой имеет экспоненциальный профиль $g(X) = \exp(-X)$, то для него $M_0(X) = \exp(-X)$,

соответственно электрическое поле спадает по экспоненциальному закону $\exp(-R) = \exp(-(r - r_b)/\Delta)$ с характерным масштабом Δ .

Для сравнения аналитических выражений с численным моделированием нам необходимо задать функцию $g(X)$ и толщину Δ . На основе результатов моделирования, соответствующих рис. 8, мы предполагаем, что $g(X) = \exp(-X)$. При этом наилучшее соответствие результатам моделирования дает значение $\Delta = 0.75$. Сравнение результатов моделирования с аналитическими выражениями (79), (81) показано на рис. 9. На рис. 10 также показаны продольное и поперечное сечения распределений поля.

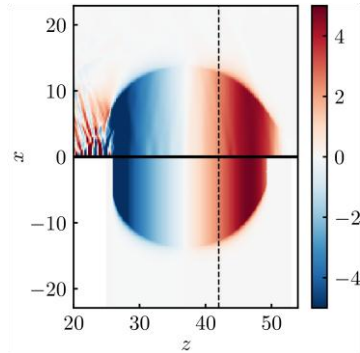


Рис. 9: Численное (сверху) и аналитическое (снизу) распределения продольного электрического поля E_z в плазменной полости, показанной на рис. 8. Аналитическое распределение вычислено по формулам (79), (81). Штриховая линия соответствует сечению, показанному на рис. 10(b)

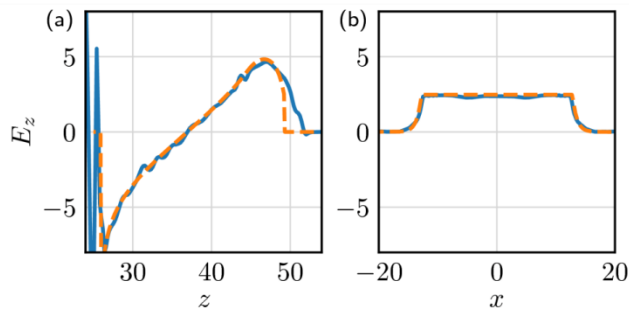


Рис. 10: Распределения продольного электрического поля E_z вдоль (a) $x = 0$, (b) $z = 42$, соответствующие распределению на рис. 9. Сплошные и штриховые линии соответствуют численным и аналитическим результатам

Это сравнение показывает, что модель хорошо описывает как электрическое поле внутри плазменной полости, которое действительно однородно по поперечной координате, так и характер спада электрического поля к нулю снаружи полости. Как уже отмечалось ранее, отличие между нашей моделью и результатами моделирования наблюдается в передней и задней части плазменной полости, где не выполнены условия применимости релятивистского приближения.

7.3. Магнитное поле

Магнитное поле в рамках аксиально-симметричной геометрии имеет только азимутальную компоненту B_ϕ , вычисляемую по формуле (17), которую удобно переписать как

$$rB_\phi(\xi, r) = r_b B_\phi(\xi, r_b) + \int_{r_b(\xi)}^r \left(J_z + \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \right) r' dr'. \quad (82)$$

Как уже показано ранее в (56),

$$r_b B_\phi(\xi, r_b) = \frac{r_b^2}{2} \frac{\partial E_z}{\partial \xi} - \lambda(\xi). \quad (83)$$

Преобразуем это равенство, используя выражение (79) для продольного электрического поля и уравнение для границы полости (72):

$$\begin{aligned} r_b B_\phi(\xi, r_b) &\approx -\lambda(\xi) + \frac{r_b^2}{2} \left[\frac{S_i(r_b)}{r_b} r_b'^2 - \frac{S_i(r_b)}{r_b^2} r_b'^2 + \frac{S_i}{r_b} r_b'' \right] = \\ &= -\frac{S_i(r_b)}{2} (1 + r_b'^2). \end{aligned} \quad (84)$$

Аналогичным образом, используя однородность продольного электрического поля по поперечной координате, можно получить выражение для магнитного поля внутри плазменной полости (для $r < r_b$):

$$B_\phi(\xi, r) \approx -r \left[\frac{S_i(r_b)}{2r_b^2} (1 + r_b'^2) - \frac{\lambda(\xi)}{r_b^2} \right] - \frac{\tilde{\lambda}(\xi, r)}{r}, \quad (85)$$

где

$$\tilde{\lambda}(\xi, r) = -\int_0^r \rho_B(\xi, r') r' dr'. \quad (86)$$

Очевидно, что $\tilde{\lambda}(\xi, r = r_b) = \lambda(\xi)$ по определению (57). Таким образом, магнитное поле в поперечном сечении, в котором отсутствуют электронные сгустки, т. е. $\tilde{\lambda} = \lambda = 0$, линейно зависит от поперечной координаты r для произвольного профиля плазмы и произвольной формы плазменной полости. К тому же знак B_ϕ всегда отрицателен.

Для вычисления магнитного поля снаружи плазменной полости необходимо подставить модель (49) для распределения продольной компоненты плотности тока J_z и выражение (81) для продольного поля E_z в (82). В результате интегрирования получим:

$$\int_{r_b}^r J_z r' dr' \approx J_0(\xi) r_b \Delta_J (1 - M_{J,0}(\alpha R)), \quad (87)$$

$$\int_{r_b}^r \frac{\partial E_z}{\partial \xi} r' dr' \approx S_i(r_b) r_b'^2 (1 - M_0(R)), \quad (88)$$

где $\alpha = \Delta/\Delta_J$. Значение $J_0(\xi)$ может быть получено исходя из условия $\lim_{r \rightarrow \infty} rB_\phi = 0$:

$$J_0(\xi) = \frac{S_i(r_b)}{2r_b \Delta_J} (1 - r_b'^2). \quad (89)$$

В итоге, магнитное поле снаружи плазменной полости ($r > r_b$) равно:

$$B_\phi \approx \frac{s_i(r_b)}{2r_b} [M_{J,0}(\alpha R)(r_b'^2 - 1) - 2M_0(R)r_b'^2]. \quad (90)$$

Это уравнение вместе с уравнением (85) дают полное пространственное распределение азимутального магнитного поля. Из (89) следует еще один интересный результат: продольная компонента плотности тока J_z зануляется на границе плазменной полости в точках, где $|r_b'(\xi)| = 1$, что наблюдалось в работе Yi *et al.* [33].

Для сравнения с результатами численного моделирования мы предположили, что $g_j(X) = \exp(-X)$, и задали $\Delta_j = 0.81$ для наиболее точного соответствия результатам моделирования. Сравнение показано на рис. 11 и 12. Оно снова демонстрирует справедливость нашей приближенной модели для описания полей снаружи и внутри плазменной полости. Продольные возмущения магнитного поля, наблюдаемые в результатах моделирования, не являются физически значимыми и обусловлены проявлением численных эффектов. Существует два численных источника этих возмущений: отражения от стенок моделируемого объема и численное черенковское излучение релятивистского драйвера [34].

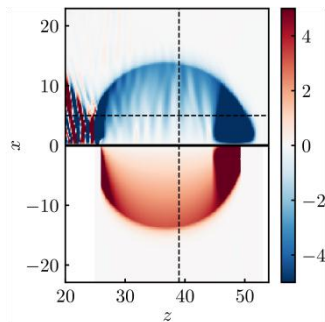


Рис. 11: Численное (сверху) и аналитическое (снизу) распределения азимутального магнитного поля B_ϕ в плазменной полости, показанной на рис. 8.

Аналитическое распределение вычислено по формулам (85), (90). Штриховые линии соответствуют сечениям, показанным на рис. 12

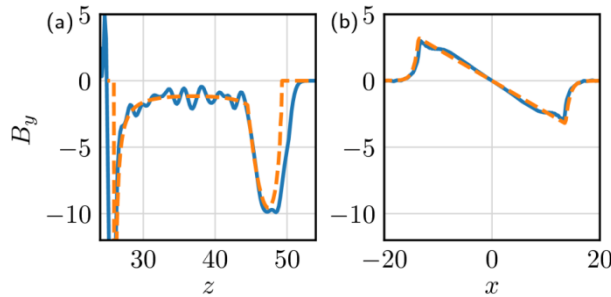


Рис. 12: Распределения азимутального магнитного поля B_ϕ вдоль (a) $x = 5$, (b) $z = 39$, соответствующие распределению на рис. 11. Сплошные и штриховые линии соответствуют численным и аналитическим результатам

Используемый в моделировании размер пространства (18π во всех трех направлениях) достаточен для подавления влияния отражений. Однако, численное черенковское излучение не может быть подавлено изменением параметров моделирования; методы его подавления еще не реализованы в трехмерной версии кода Smilei.

7.4. Поперечное электрическое поле

Зная магнитное поле B_ϕ , достаточно легко вычислить поперечное электрическое поле E_r , используя (7). Для этого достаточно вычислить радиальную производную от кильватерного потенциала Ψ , задаваемого выражениями (78), (77):

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \begin{cases} -\frac{S_i(r)}{r}, & r < r_b(\xi), \\ -\frac{S_i(r_b)}{r_b} M_0(R), & r \geq r_b(\xi). \end{cases} \quad (91)$$

Тогда поле E_r внутри плазменной полости ($r < r_b$):

$$E_r(\xi, r) = B_\phi(\xi, r) + \frac{S_i(r)}{r}, \quad (92)$$

где B_ϕ вычислено в (85), а снаружи ($r > r_b$):

$$E_r \approx \frac{S_i(r_b)}{2r_b} [M_{J,0}(\alpha R) - 2M_0(R)] (r_b'^2 - 1). \quad (93)$$

Внутри плазменной полости знаки $S_i(r)/r$ и B_ϕ являются противоположными, причем в окрестности центра плазменной полости типично, что $E_r > 0$. Для однородной плазмы вне областей с электронными сгустками

$$E_r = \frac{r}{4} (1 - r_b'^2), \quad (94)$$

т. е. поперечное электрическое поле, как и магнитное, линейно растет с увеличением координаты, что хорошо известно из более ранних моделей [17].

Однако в неоднородной плазме зависимость E_r от r в отличие от магнитного поля становится нелинейной. В частности, в плазме с полым каналом $S_i = 0$ внутри канала, поэтому проекция E_r может иметь разный знак внутри и вне канала, что наблюдалось в работе [23]. Также можно отметить, что поперечное электрическое поле E_r , как и продольная компонента тока J_z , обращается в нуль в точках, где $|r_b'(\xi)| = 1$.

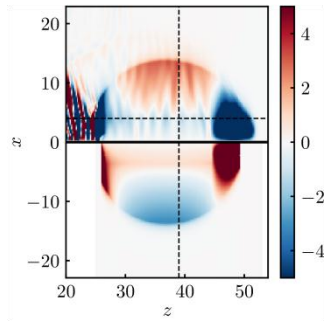


Рис. 13: Численное (сверху) и аналитическое (снизу) распределения радиального электрического поля E_x в плазменной полости, показанной на рис. 8. Аналитическое распределение вычислено по формулам (92), (93). Штриховые линии соответствуют сечениям, показанным на рис. 14

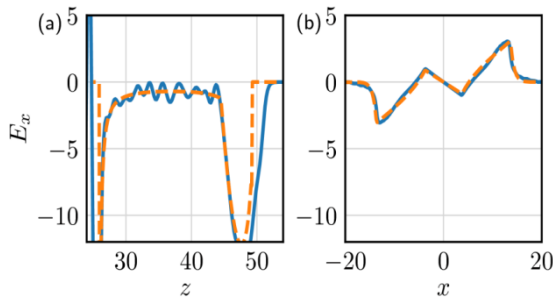


Рис. 14: Распределения радиального электрического поля E_x вдоль (a) $x = 4$, (b) $z = 39$, соответствующие распределению на рис. 13. Сплошные и штриховые линии соответствуют численным и аналитическим результатам

Данное поведение наблюдается в результатах моделирования, показанных на рис. 13, 14. Наличие полого канала в плазме вызывает изменение знака E_r внутри него. Продольные возмущения в результатах численного моделирования, как и в случае магнитного поля, вызваны численным черенковским излучением.

7.5. Поперечная сила

Как было показано в разделе 4 (см. (44)), поперечная сила, действующая на релятивистские электроны, ускоряемые в полости, совпадает с производной от кильватерного потенциала (91):

$$F_r(\xi, r) = \begin{cases} -\frac{S_i(r)}{r}, & r < r_b(\xi), \\ -\frac{S_i(r_b)}{r_b} M_0(R), & r \geq r_b(\xi). \end{cases} \quad (95)$$

Важно, что данная сила внутри полости не зависит от продольной координаты. Сила является фокусирующей для электронов и дефокусирующей

щей для позитронов. В однородной плазме сила $F_r = -r/2$ является линейной, а в плазме с каналом она обращается в 0 внутри канала, что позволяет потенциально использовать подобную плазму для ускорения позитронов.

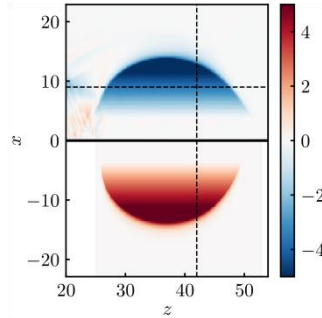


Рис. 15: Численное (сверху) и аналитическое (снизу) распределения поперечной силы $F_x = B_y - E_x$ в плазменной полости, показанной на рис. 8. Аналитическое распределение вычислено по формуле (95). Штриховые линии соответствуют сечениям, показанным на рис. 16

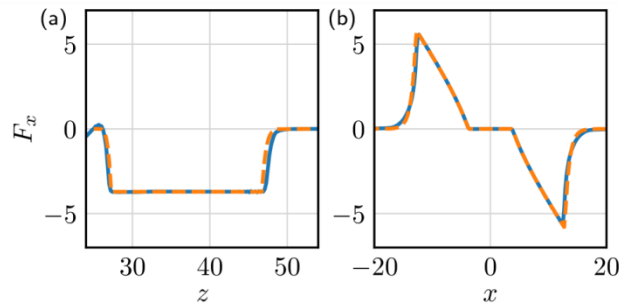


Рис. 16: Распределения поперечной силы F_x вдоль (a) $x = 9$, (b) $z = 42$, соответствующие распределению на рис. 15. Сплошные и штриховые линии соответствуют численным и аналитическим результатам

Результаты моделирования наглядно демонстрируют данный эффект от использования плазменного канала (рис. 15, 16). На рисунках наблюдаются зануление поперечной силы в области внутри канала $r < r_c$ и фокусирующий ее характер снаружи канала. Численное распределение $F_r = B_\phi - E_r$, в отличие от распределений E_r и B_ϕ , в данном случае демонстрирует практически полное совпадение с предсказаниями модели, что служит дополнительным подтверждением того, что видимые на рис. 11 и 13 продольные возмущения являются поперечными электромагнитными волнами, излученными драйвером посредством механизма численного черенковского излучения.

8. ВЫЧИСЛЕНИЕ ФОРМЫ ПЛАЗМЕННОЙ ПОЛОСТИ

Рассмотрим аналитические методы вычисления формы плазменной полости. Для этого вернемся к рассмотрению уравнения (72) для плазменной полости в релятивистском приближении:

$$S_i(r_b)r_b r_b'' + S_i'(r_b)r_b r_b'^2 + S_i(r_b) = 2\lambda(\xi), \quad (96)$$

где $S_i(r) = \int_0^r \rho_i(r')r' dr'$ определяется лишь поперечным профилем плазмы $\rho_i(r)$, а $\lambda(\xi) = -\int_0^{r_b} \rho_B(\xi, r')r' dr'$ зависит от электронных сгустков, помещенных внутрь плазменной полости. Несмотря на то что мы явно не пишем слагаемые, отвечающие воздействию лазерного импульса, это уравнение справедливо и для случая лазерного драйвера в области пространства, где лазерный импульс отсутствует, например, в задней части плазменной полости.

Наибольший интерес с точки зрения ускорения представляют силы, действующие на электроны в ускоряемых сгустках. Как было показано ранее в соотношении (95), поперечная сила $F_r = -S_i(r)/r$, действующая на релятивистские электроны, не зависит от формы плазменной полости и определяется лишь профилем плазмы. Она также зависит только от поперечной координаты. Для электронов эта сила всегда является фокусирующей. Продольная сила $F_z \approx -E_z$ полностью определяется продольной компонентой электрического поля в плазменной полости, которое зависит только от продольной координаты ξ и определяется как профилем плазмы, так и формой плазменной полости (см. (79)):

$$E_z(\xi) = \frac{S_i(r_b)}{r_b} r_b'. \quad (97)$$

Таким образом, для нахождения продольной силы необходимо знать решение уравнения (96).

Как было показано в разделе 6.3, релятивистское приближение не может быть справедливым при $r_b \rightarrow 0$, поэтому приближенное уравнение (96) не может описать процесс возбуждения плазменной полости электронным сгустком или лазерным импульсом. Поэтому для задания начальных условий мы будем предполагать, что нам известен поперечный размер плазменной полости в точке, где функция $r_b(\xi)$ достигает максимума: $R_b = \max r_b$. Для простоты мы будем полагать, что этот максимум достигается в точке $\xi = 0$. Тогда начальные условия для уравнения (96) можно записать как:

$$r_b(0) = R_b, \quad r_b'(0) = 0. \quad (98)$$

При этом, в силу того что координата ξ направлена в противоположном направлении оси z , $\xi = 0$ отвечает центру плазменной полости, $\xi > 0$ отвечает задней части полости, а $\xi < 0$ — передней. В большинстве

случаев электрическое поле в передней части плазменной полости всюду является замедляющим для электронов, а в задней — ускоряющим.

В данном разделе мы будем искать решение для задней части плазменной полости ($\xi > 0$), предполагая, что лазерный импульс либо электронный сгусток, возбуждающий плазменную полость, полностью находится в ее передней части ($\xi < 0$). Таким образом, источник $\lambda(\xi)$, стоящий в правой части (96), будет содержать только ускоряемые электронные сгустки. В этом случае нам нет необходимости знать свойства драйвера, возбуждающего плазменную полость, и результаты будут применимы к плазменной полости размера R_b , возбуждаемой произвольным драйвером.

В задней части плазменной полости она замыкается к оси $r = 0$ за счет кулоновского притяжения со стороны ионов, действующего на электроны в слое на границе полости. Поэтому мы будем предполагать монотонное убывание функции $r_b(\xi)$ при $\xi > 0$. Данная монотонность может быть нарушена, если источник $\lambda(\xi)$ (т. е. ускоряемый электронный сгусток) оказывает достаточно сильное воздействие, способное скомпенсировать ионное притяжение. В случае, когда функция $r_b(\xi)$ монотонна, существует обратная к ней функция $\xi_b(r)$. Это позволяет нам произвести замену $\xi = \xi_b(r)$ в уравнении (96). Также введем новую функцию, заменяющую производную r'_b :

$$Y(r) = r'_b(\xi_b(r)). \quad (99)$$

Тогда вторая производная r''_b заменится следующим образом:

$$r''_b(\xi_b(r)) = \frac{d}{d\xi} Y(r) = Y'(r) r'_b(\xi_b(r)) = Y'(r) Y(r). \quad (100)$$

Таким образом, уравнение (96) преобразуется в уравнение первого порядка:

$$S_i(r) r Y Y' + S'_i(r) r Y^2 + S_i(r) = 2\Lambda(r), \quad (101)$$

где $\Lambda(r) = \lambda(\xi_b(r))$. Путем умножения данного уравнения на S_i и деления на r мы можем выделить полную производную в его левой части:

$$\frac{d}{dr} (S_i^2 Y^2) = \frac{2S_i}{r} (2\Lambda - S_i). \quad (102)$$

Путем прямого интегрирования этого уравнения и дальнейшего возврата к исходной переменной ξ получим

$$r'_b(\xi) = -\frac{1}{S_i(r_b)} \sqrt{2F_i(r_b, R_b) - \int_{r_b}^{R_b} \frac{4S_i \Lambda}{r'} dr'}, \quad (103)$$

$$F_i(r_1, r_2) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{S_i^2(r')}{r'} dr'. \quad (104)$$

Отрицательный знак перед корнем в (103) выбран из условия того, что при монотонном спадании $r'_b(\xi)$ всегда отрицательна. Соответствующее продольное электрическое поле, задаваемое (97), вычисляется как

$$E_z(\xi) = -\frac{1}{r_b} \sqrt{2F_1(r_b, R_b) - \int_{r_b}^{R_b} \frac{4S_i \Lambda}{r'} dr'}. \quad (105)$$

В случае использования однородной плазмы $S_i(r) = r^2/2$, и уравнение (103) приобретает более простой вид [21]:

$$r_b'(\xi) = -\frac{1}{r_b^2} \sqrt{\frac{R_b^4 - r_b^4}{2} - 8 \int_{r_b}^{R_b} \Lambda r' dr'}. \quad (106)$$

Таким образом, нам удалось свести дифференциальное уравнение второго порядка (96) к уравнению первого порядка (103). Однако в общем случае уравнение (103) не является обыкновенным дифференциальным уравнением, так как функция $\Lambda(r) = \lambda(\xi_b(r))$ зависит от решения $r_b(\xi)$ и поэтому в общем случае неизвестна. Тем не менее, в некоторых особых случаях можно найти явный вид этой функции. Об этих случаях пойдет речь далее.

9. НЕ НАГРУЖЕННАЯ ПЛАЗМЕННАЯ ПОЛОСТЬ

Рассмотрим ненагруженную плазменную полость, т. е. полость, в которой отсутствуют ускоряемые сгустки. Для такого случая источник $\lambda(\xi) = 0$, что автоматически означает, что в (103) мы должны положить $\Lambda(r) = 0$. С учетом замены переменных $\xi = \xi_b(r)$, уравнение (103) примет вид:

$$\xi_b(r) = \int_r^{R_b} \frac{S_i(r') dr'}{\sqrt{2F_1(r', R_b)}} \quad (107)$$

Данное уравнение задает решение в квадратурах для функции $\xi_b(r)$, являющейся обратной к искомой функции $r_b(\xi)$. При подстановке $r = 0$ оно позволяет оценить длину плазменной полости. Электрическое поле в такой ненагруженной полости запишется как

$$E_z(\xi) = -\frac{\sqrt{2F_1(r_b, R_b)}}{r_b(\xi)}. \quad (108)$$

Поскольку функция $r_b(\xi)$ является монотонно убывающей, а $F_1(r_b, R_b)$ и r_b^{-1} монотонно растут с уменьшением r_b , зависимость продольного электрического поля $E_z(\xi)$ в ненагруженной плазменной полости всегда является монотонно возрастающей функцией. Таким образом, только лишь путем подбора профиля плазмы невозможно создать произвольную зависимость $E_z(\xi)$, допускающую зануление производной E_z' .

Для частного случая плазмы со степенным профилем концентрации $\rho_i(r) = (r/R_b)^n$ выражение (107) можно проинтегрировать аналитически:

$$\xi(r_b) = R_b \sqrt{n+2} \frac{t^{n+3}}{n+3} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{n+3}{2(n+2)}; \frac{3n+7}{2(n+2)}; t^{2n+4}\right) \Big|_{\frac{r_b}{R_b}}^1, \quad (109)$$

где ${}_2F_1(a, b; c; z)$ — гипергеометрическая функция. Профиль плазмы нормирован таким образом, что плотность достигает единицы на границе плазменной полости, поэтому увеличение n соответствует углублению канала в плазме. Длину задней части плазменной полости при этом можно выразить более простым выражением:

$$\xi_{\max} = \xi(0) = R_b \sqrt{\pi} \sqrt{n+2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+3}{2n+4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2n+4}\right)}. \quad (110)$$

Задаваемая этим выражением длина уменьшается с ростом n , т. е. с углублением канала в плазме. Границы плазменных полостей и электрические поля в плазме со степенным профилем показаны на рис. 17. Длина плазменной полости и величина электрического поля уменьшаются с увеличением глубины канала. При этом наблюдается особенность в зависимости $E_z(\xi)$ в задней части плазменной полости. Эта особенность вызвана неприменимостью используемого нами релятивистского приближения при малых r_b и пропадает в случае решения более точного уравнения (60).

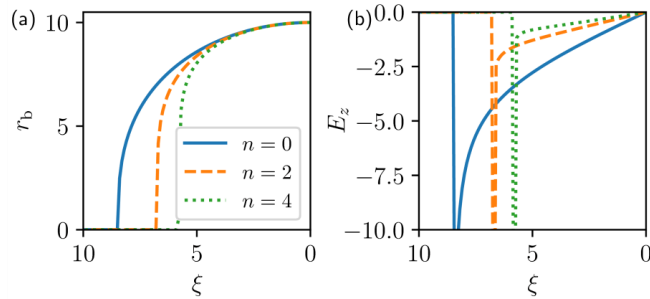


Рис. 17: Зависимости (а) границ ненагруженных плазменных полостей r_b и (б) продольного электрического поля E_z в них от продольной координаты ξ в плазме со степенным профилем с различными показателями степени n , рассчитанные по формулам (109) и (108). Максимальный радиус плазменной полости $R_b = 10$

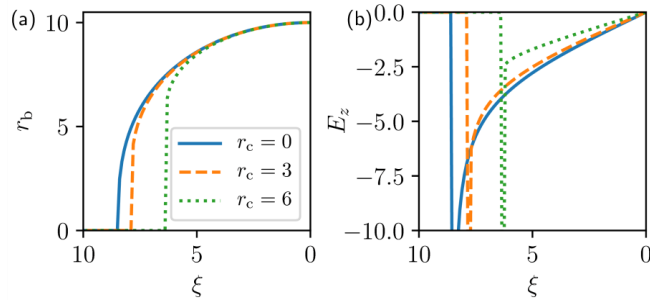


Рис. 18: Зависимости (а) границ ненагруженных плазменных полостей r_b и (б) продольного электрического поля E_z в них от продольной координаты ξ в плазме с каналами различного радиуса r_c , рассчитанные по формулам (107) и (108). Максимальный радиус плазменной полости $R_b = 10$

Схожие свойства проявляют и плазменные полости в плазме с вакуумным каналом. Границы плазменных полостей и соответствующие электрические поля, рассчитанные по формулам (107) и (108) для плазмы с вакуумным каналом $\rho_i = \theta(r - r_c)$, где $\theta(X)$ — степ-функция Хевисайда, показаны на рис. 18. При увеличении размера канала в плазме длина плазменной полости сокращается, а ускоряющее электрическое поле становится меньше.

Из более общих формул (107) и (108) можно получить поведение границы плазменной полости и продольного электрического поля в окрестности центра плазменной полости, т. е. точки $\xi = 0$. Для этого в (107) положим

$$S_i(r') \approx S_i(R_b), F_i(r', R_b) \approx \frac{S_i^2(R_b)}{R_b} (R_b - r') \quad (111)$$

и получим

$$\xi_b(r) \approx \sqrt{2R_b(R_b - r)}. \quad (112)$$

Переходя от обратной функции $\xi_b(r)$ к $r_b(\xi)$, получим

$$r_b(\xi) \approx R_b \left(1 - \frac{\xi^2}{2R_b^2} \right). \quad (113)$$

Первое, на что стоит обратить внимание, это отсутствие зависимости формы плазменной полости в окрестности ее центра от профиля плазмы, что наблюдается на рис. 17(а) и 18(а). Также можно заметить, что это выражение соответствует окружности с радиусом R_b . Близость формы плазменной полости к окружности наблюдается и в численном моделировании, что использовалось при построении наиболее ранних моделей плазменной полости, предполагавших, что она является идеальной сферой [17]. Тем не менее, более точное выражение (107) не описывает окружность. Как можно видеть из рис. 17, 18, продольный размер плазменной полости оказывается меньше ее поперечного размера.

Поскольку приближенная зависимость $r_b(\xi)$ в окрестности $\xi = 0$ является квадратичной, соответствующее электрическое поле E_z оказывается линейным:

$$E_z \approx -\frac{S_i(R_b)}{R_b^2} \xi. \quad (114)$$

Если концентрация всегда нормируется таким образом, что $\rho_i(r) \leq 1$ внутри плазменной полости, то $S_i(R_b) \leq R_b^2/2$. Таким образом, градиент электрического поля ограничен: $|E_z| \leq \xi/2$. Максимальный коэффициент 1/2 соответствует случаю однородной плазмы. Отсюда следует, что использование канала в плазме приводит к уменьшению электрического поля. Данный вывод подтверждается и при использовании более точного выражения (108), что демонстрирует рис. 18(б).

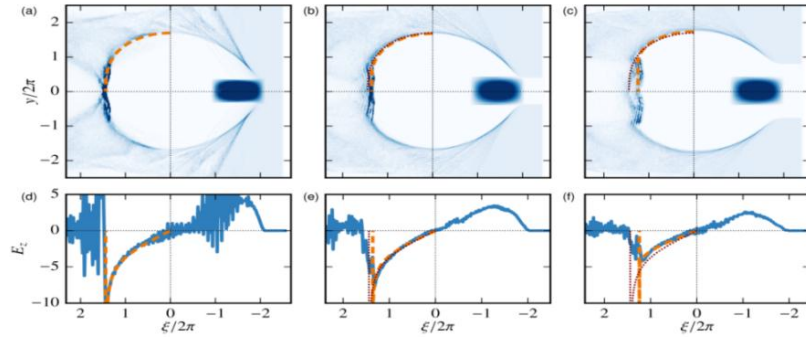


Рис. 19: Распределение плотности заряда электронов в пространстве (a)–(c) и соответствующее продольное электрическое поле на оси плазменной полости (d)–(f), наблюдаемые в численном моделировании методом частиц в ячейках для плазмы с каналом ($\rho_i(r) = \theta(r - r_c)$) и радиусов канала $r_c = 0, 0.8\lambda_p$ и $1.6\lambda_p$ соответственно. Аналитические решения для границы плазменной полости и продольного электрического поля, задаваемые выражениями (107) и (108), показаны штриховыми линиями. Пунктирные линии в (b), (c), (e), (f) для сравнения показывают решение для $r_c = 0$.

Все пространственные масштабы нормированы на $\lambda_p = 5$ мкм

Более того, линейность зависимости электрического поля от координаты, предсказываемая упрощенной формулой (114), наблюдается не только в окрестности центра плазменной полости, но практически на всей ее длине. Для проверки предсказаний модели была проведена серия численных моделирований плазменной полости, возбуждаемой в плазме с полым каналом различного радиуса r_c , при помощи трехмерного кода QUILL, основанного на методе частиц в ячейках [35]. Результаты моделирования для плазмы с различными радиусами каналов r_c показаны на рис. 19. В моделировании использовалась плазма с концентрацией $n_p = 4.5 \times 10^{19} \text{ см}^{-3}$, что соответствовало плазменной длине волны 5 мкм. Во всех случаях использовался электронный сгусток с полным зарядом 3.2 нКл, энергией частиц 1 ГэВ и характерными продольным и поперечным размерами 6 мкм и 4 мкм соответственно. Из рис. 19 очевидно, что длина плазменной полости действительно сокращается с увеличением радиуса канала, а градиент продольного электрического поля уменьшается. Результаты также в очередной раз демонстрируют хорошее согласие между предсказаниями нашей теории и численным моделированием.

10. НАГРУЖЕННАЯ ПЛАЗМЕННАЯ ПОЛОСТЬ

10.1. Эффективность ускорения

Поскольку режим плазменной полости используется, прежде всего, с целью ускорения, большой интерес представляет случай нагруженной плазменной полости, то есть полости, в которой ускоряются электроны.

Одним из ключевых моментов эффективного ускорения является использование как можно большей доли доступной в плазменной полости энергии. Поэтому данная секция будет посвящена расчету эффективности передачи энергии из плазменной полости ускоряемому сгустку.

Предположим, что сгусток с произвольным продольным профилем $\lambda(\xi)$ помещен в заднюю часть плазменной полости, имеющей максимальный размер R_b . Пусть передний и задний фронт сгустка имеют координаты ξ_{inj} и $\xi_{tr} > \xi_{inj}$ соответственно. Данному сгустку соответствует некоторое решение $r_b(\xi)$ уравнения (96). Мы будем полагать, что оно является монотонным: $r'_b(\xi) < 0$, что в силу (97) означает, что продольное электрическое поле E_z всюду является ускоряющим. Мы также предполагаем, что сгусток целиком находится внутри плазменной полости, т. е. длина плазменной полости удовлетворяет условию $\xi_{max} \geq \xi_{tr}$, где длина определяется из равенства $r_b(\xi_{max}) = 0$. В этом случае, точкам ξ_{inj} и ξ_{tr} соответствуют поперечные размеры плазменной полости $r_{inj,tr} = r_b(\xi_{inj,tr})$. Соответственно, для $\xi > \xi_{tr}$ уравнение (103) запишется как

$$r'_b(\xi) = -\frac{1}{s_i} \sqrt{2F_i(r_b, R_b) - \int_{r_{tr}}^{r_{inj}} \frac{4S_i A}{r'} dr'}. \tag{115}$$

Можно заметить, что это уравнение может быть записано в виде, совпадающем с уравнением (107) для ненагруженной плазменной полости:

$$r'_b = -\frac{1}{s_i(r_b)} \sqrt{2F_i(r_b, \tilde{R}_b)}, \tag{116}$$

где \tilde{R}_b определяется из уравнения

$$F_i(0, \tilde{R}_b) = F_i(0, R_b) - \int_{r_{tr}}^{r_{inj}} \frac{2S_i(r')A(r')}{r'} dr'. \tag{117}$$

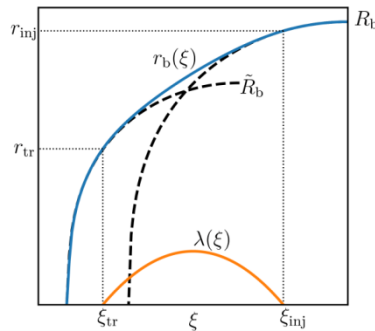


Рис. 20: Граница нагруженной плазменной полости $r_b(\xi)$ с электронным сгустком $\lambda(\xi)$ с параболическим профилем. Максимальный размер плазменной полости R_b . Штриховыми линиями показаны решения для ненагруженных плазменных полостей с размерами R_b и \tilde{R}_b

Таким образом, задняя часть плазменной полости в области $\xi > \xi_{tr}$ за пределами электронного сгустка описывается уравнением, соответствующим уравнению для ненагруженной плазменной полости меньше-

го размера \tilde{R}_b . То есть воздействие данного электронного сгустка приводит к эффективному уменьшению размера полости (см. рис. 20). Требование знакоположительности выражения (117) накладывает ограничение на ускоряемый электронный сгусток:

$$\int_{r_{tr}}^{r_{inj}} \frac{2S_i(r')\Lambda(r')}{r'} dr' \leq F_1(0, R_b). \quad (118)$$

Наличие такого ограничения позволяет ввести величину

$$\eta = \frac{1}{F_1(0, R_b)} \int_{r_{tr}}^{r_{inj}} \frac{2S_i(r')\Lambda(r')}{r'} dr', \quad (119)$$

которая может принимать значения на отрезке $[0; 1]$. Поэтому данную величину логично назвать эффективностью ускорения заданного электронного сгустка. Чтобы понять ее физический смысл, перейдем от интегрирования по r к интегрированию по ξ , а также используем определение функции λ (57):

$$\int_{r_{tr}}^{r_{inj}} \frac{2S_i\Lambda}{r'} dr' = -2 \int_{\xi_{inj}}^{\xi_{tr}} \int_0^{r_e} E_z(\xi') \rho_e(\xi', r') dr' d\xi'. \quad (120)$$

Поскольку для релятивистских электронных сгустков $\rho_e \approx J_{e,z}$, то данный интеграл по объему электронного сгустка с точностью до константы есть не что иное, как мощность P , вырабатываемая электрическим полем плазменной полости при ускорении данного электронного сгустка:

$$\int_{r_{tr}}^{r_{inj}} \frac{2S_i\Lambda}{r'} dr' = \frac{1}{\pi} P. \quad (121)$$

Таким образом, эффективность η может быть записана как отношение мощности P , вырабатываемой электрическим полем полости при ускорении данного сгустка, к максимальной достижимой мощности P_{max} :

$$\eta = -\frac{2}{F_1(0, R_b)} \int_{\xi_{inj}}^{\xi_{tr}} E_z(\xi') \lambda(\xi') d\xi' = \frac{P}{P_{max}}, \quad P_{max} = \pi F_1(0, R_b). \quad (122)$$

Данное выражение позволяет рассчитать эффективность ускорения произвольного электронного сгустка. Стоит отметить, что максимально достижимая мощность для заданного поперечного профиля плазмы определяется лишь размером плазменной полости R_b . В частности, для однородной плазмы $P_{max} = \pi R_b^4/16$, что демонстрирует быстрый рост мощности при увеличении размера плазменной полости. В силу закона сохранения энергии очевидно, что максимальная мощность не может превышать скорости передачи энергии от драйвера к кильватерной волне.

10.2. Прямоугольный электронный сгусток

Некоторые общие свойства нагруженной плазменной полости можно рассмотреть, используя простой прямоугольный электронный сгусток с профилем $\lambda(\xi) = \lambda_0 \theta(\xi - \xi_{inj})$, где $\theta(X)$ — шаг-функция Хевисайда, ξ_{inj} —

координата переднего фронта сгустка, также называемая точкой инжекции сгустка. Длину сгустка мы будем считать неограниченной; естественным ограничением для длины будет являться длина плазменной полости. Для такого сгустка в области $\xi < \xi_{inj}$ $\lambda = 0$, а значит, решение на отрезке $0 < \xi < \xi_{inj}$ совпадает с решением (107) для ненагруженной плазменной полости, из которого можно найти размер плазменной полости в точке инжекции: $r_{inj} = r_b(\xi_{inj})$. При $\xi > \xi_{inj}$ мы можем воспользоваться уравнением (103), в котором нужно положить $\Lambda(r) = \lambda_0 \theta(r_{inj} - r)$:

$$r'_b(\xi) = -\frac{1}{S_i} \sqrt{2F_i(r_b, R_b) - \lambda_0 \int_{r_b}^{r_{inj}} \frac{4S_i(r')}{r'} dr'}. \quad (123)$$

Заметим, что это уравнение, в отличие от общего уравнения (103), является обыкновенным дифференциальным. Для любого наперед заданного r_b подкоренное выражение достигает нуля для порогового значения постоянной λ_0 :

$$\hat{\lambda}_{th}(r_b) = F_i(r_b, R_b) \left(\int_{r_b}^{r_{inj}} \frac{2S_i(r')}{r'} dr' \right)^{-1}. \quad (124)$$

Используя свойства функции S_i , можно показать, что $\hat{\lambda}$ является монотонно возрастающей функцией r_b . Таким образом, существует глобальное пороговое значение

$$\lambda_{th} = \hat{\lambda}_{th}(0) = F_i(0, R_b) \left(\int_0^{r_{inj}} \frac{2S_i(r')}{r'} dr' \right)^{-1}. \quad (125)$$

Если $\lambda_0 < \lambda_{th}$, производная r'_b всегда остается строго отрицательной, значит, граница плазменной полости $r_b(\xi)$ в итоге достигнет нуля. Если же значение плотности заряда λ_0 в сгустке превышает пороговое значение, найдется такая точка ξ_0 и соответствующий ей локальный радиус полости $r_0 = r_b(\xi_0)$, для которых $r'_b(\xi_0) = 0$. Это означает, что при превышении порога плотность заряда в сгустке становится достаточной для компенсации смыкания плазменной полости к ее оси. После прохождения точки, где $r'_b = 0$, производная меняет знак на положительный, что уже не описывается уравнением (123), и плазменная полость начинает снова расширяться. При этом также меняется знак электрического поля. Таким образом, хвостовая часть сгустка с плотностью заряда выше пороговой вместо ускорения начинает замедляться и, фактически, становится драйвером для плазменной полости. Если нашей целью является ускорение всего сгустка, то мы должны ограничить его длину точкой, в которой достигается $r'_b = 0$. В итоге, длина ускоряемого сгустка ограничена либо длиной плазменной полости (в случае $\lambda_0 < \lambda_{th}$), либо точкой разворота границы плазменной полости (в случае $\lambda_0 > \lambda_{th}$).

Используя полученную предельную длину прямоугольного сгустка, мы можем рассчитать эффективность его ускорения, используя выражение (119). Если $\lambda_0 < \lambda_{th}$, электронный сгусток ограничен длиной плазменной полости, а значит, в уравнении (119) $r_{tr} = 0$. Тогда

$$\eta = \frac{\lambda_0}{F_i(0, R_b)} \int_0^{r_{inj}} \frac{2S_i(r')}{r'} dr' = \frac{\lambda_0}{\lambda_{th}}. \quad (126)$$

Здесь использовано определение (125) для пороговой плотности заряда λ_{th} . Если же $\lambda_0 > \lambda_{th}$, то существует точка ξ_0 , при которой $r'_b(\xi_0) = 0$. Этой точке соответствует некий локальный радиус r_0 , который может быть найден из условия зануления производной (123):

$$F_i(r_0, R_b) - 2\lambda_0 \int_{r_0}^{r_{inj}} \frac{S_i(r')}{r'} dr' = 0. \quad (127)$$

Длина ускоряемого сгустка будет ограничена точкой ξ_0 . Тогда в уравнении (119) для эффективности мы должны положить $r_{tr} = r_0$:

$$\eta = \frac{2\lambda_0}{F_i(0, R_b)} \int_{r_0}^{r_{inj}} \frac{S_i(r')}{r'} dr' = \frac{F_i(r_0, R_b)}{F_i(0, R_b)}. \quad (128)$$

Таким образом, если $\lambda_0 < \lambda_{th}$, эффективность ускорения (126) линейно нарастает от 0 до 1 при увеличении λ_0 . Когда плотность сгустка λ_0 равна пороговой плотности λ_{th} , эффективность ускорения достигает 1. При превышении над порогом радиус r_0 , при котором наблюдается разворот границы, начинает расти с ростом λ_0 , приводя к уменьшению эффективности (128). То есть наиболее оптимальным с точки зрения эффективности ускорения является использование сгустка с плотностью, равной пороговой плотности (125). Стоит заметить, что данная плотность зависит от точки инжекции сгустка ξ_{inj} . Если мы при этом возьмем сгусток короче оптимальной длины, то эффективность также будет меньше теоретически возможной.

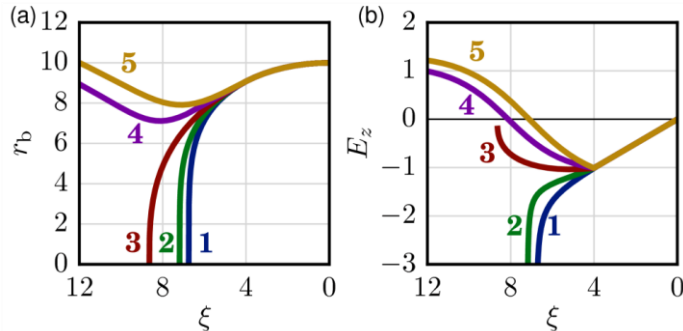


Рис. 21: Зависимости (а) границ плазменных полостей r_b и (б) продольных электрических полей E_z от продольной координаты ξ для разных плотностей заряда электронного сгустка λ_0 . Зависимости рассчитаны численно с использованием уравнений (96) и (97) соответственно. Линии 1–5 показывают решения для плотностей λ_0 от 0 до $2\lambda_{th}$ с шагом $0.5\lambda_{th}$. При вычислении использован параболический профиль плазмы ($n = 2$), максимальный радиус плазменных полостей $R_b = 10$, точка инжекции электронного сгустка $\xi_{inj} = 4$

Для примера рассмотрим случай плазмы со степенным каналом $\rho_i(r) = (r/R_b)^n$. Профиль плазмы нормирован таким образом, что плот-

ность достигает единицы на границе плазменной полости. Таким образом, увеличение n приводит к углублению канала в плазме. Характерные границы плазменных полостей с плоским электронным сгустком для различных погонных плотностей заряда λ_0 в сгустках и соответствующие продольные электрические поля показаны на рис. 21. Этот рисунок демонстрирует, что наличие ускоряемого сгустка приводит к удлинению плазменной полости по сравнению со случаем отсутствия сгустка (линия 1 на рис. 21). Рисунок также подтверждает наш вывод о наличии предсказанной нами пороговой плотности заряда λ_{th} (линия 3). При превышении над порогом (линии 4 и 5) локальный радиус плазменной полости, вместо смыкания к нулю, начинает увеличиваться, при этом меняется знак продольного поля E_z , которое становится положительным и, следовательно, замедляющим для электронов.

Пороговое значение, определяемое формулой (125), для плазмы со степенным каналом равно:

$$\lambda_{th} = \frac{R_b^{n+4}}{4(n+2)r_{inj}^{n+2}}. \tag{129}$$

Это значение растет при увеличении координаты инжекции ξ_{inj} (большие значения ξ_{inj} соответствуют меньшим значениям r_{inj}). Наименьший возможный пороговый заряд достигает при $\xi_{inj} = 0$ и равен

$$\lambda_{th,min} = \frac{R_b^2}{4(n+2)}. \tag{130}$$

Данное минимальное значение уменьшается с увеличением показателя степени n , что соответствует углублению канала.

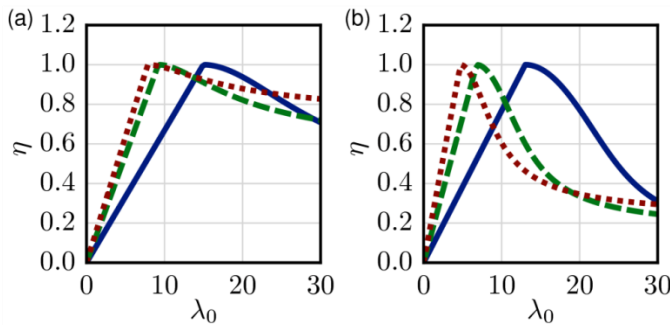


Рис. 22: Зависимости эффективности η от плотности заряда λ_0 , вычисленные по формуле (131) для различных показателей степени n ($n = 0, 2, 4$ для сплошной, штриховой и пунктирной линий соответственно) для точки инжекции (a) $\xi_{inj} = 2$ и (b) $\xi_{inj} = 4$. Максимальный радиус плазменной полости $R_b = 10$

Эффективность ускорения плоского сгустка для данного типа канала может быть вычислена аналитически из уравнений (126) и (128):

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{th}}}, & \lambda_0 < \lambda_{\text{th}}, \\ \eta &= 1 - X^2, & \lambda_0 > \lambda_{\text{th}}, \end{aligned} \quad (131)$$

где

$$X = \frac{\lambda_0}{2\lambda_{\text{min}}} - \sqrt{\left(\frac{\lambda_0}{2\lambda_{\text{min}}}\right)^2 - \frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{th}}} + 1}. \quad (132)$$

Зависимости, задаваемые уравнением (131), показаны на рис. 22 для различных профилей плазмы и различных точек инжекции. Видно, что пороговое значение λ_{th} меньше для плазмы с более глубокими каналами, соответствующими большим значениям n . Также можно заметить, что эффективность быстрее спадает с увеличением λ_0 для более близких к центру полости точек инжекции ξ_{inj} . Это можно объяснить тем, что для меньших ξ_{inj} поперечная скорость электронов в границе плазменной полости меньше, поэтому электроны более чувствительны к изменению плотности заряда в ускоряемом электронном пучке.

10.3. Ускорение в однородном поле

Для получения ускоренных пучков с малым разбросом по энергии, что необходимо для многих приложений, важно ускорять разные части пучка в одинаковых полях. Продольное электрическое поле в плазменной полости всегда является однородным по поперечной координате, поэтому на конечный разброс частиц по энергии влияет только неоднородность поля по продольной координате. Идеальным для ускорения было бы создание полностью однородного ускоряющего поля во всем объеме пучка. Как было показано в разделе 9, в ненагруженной плазменной полости зависимость продольного поля от координаты всегда является монотонной, поэтому в ней добиться однородности E_z невозможно. Однако, как уже было продемонстрировано ранее, ускоряемый электронный пучок сам влияет на форму плазменной полости, а следовательно, и на распределение поля в ней. Поэтому мы можем попытаться подобрать такой профиль электронного пучка $\lambda(\xi)$, что электрическое поле внутри пучка будет однородным. Для однородной плазмы данная задача была решена в работе [21], а для поперечно-неоднородной — в работе [25].

Предположим, что передний фронт электронного пучка находится в точке инжекции ξ_{inj} . Тогда при $0 \leq \xi < \xi_{\text{inj}}$ решение для границы плазменной полости $r_b(\xi)$ совпадает с решением для ненагруженной полости (107). Точке ξ_{inj} соответствует некий локальный радиус полости $r_{\text{inj}} = r_b(\xi_{\text{inj}})$ и электрическое поле $E_z(\xi_{\text{inj}}) = -E_{\text{inj}}$, которое может быть найдено из уравнения (108):

$$E_{\text{inj}} = -E_z(\xi_{\text{inj}}) = \frac{1}{r_{\text{inj}}} \sqrt{2F_1(r_{\text{inj}}, R_b)}. \quad (133)$$

Знак E_{inj} для удобства выбран положительным. При $\xi > \xi_{inj}$ будем искать такое решение для $\lambda(\xi)$, которое обеспечивает постоянство продольного поля $E_z(\xi) = -E_{inj}$ (см. рис. 23). Используя (105), найдем условие на функцию Λ , обеспечивающую постоянство поля:

$$E_{inj}^2 = \frac{1}{r_b^2} \left(2F_i(r_b, R_b) - \int_{r_b}^{R_b} \frac{4S_i \Lambda}{r'} dr' \right). \quad (134)$$

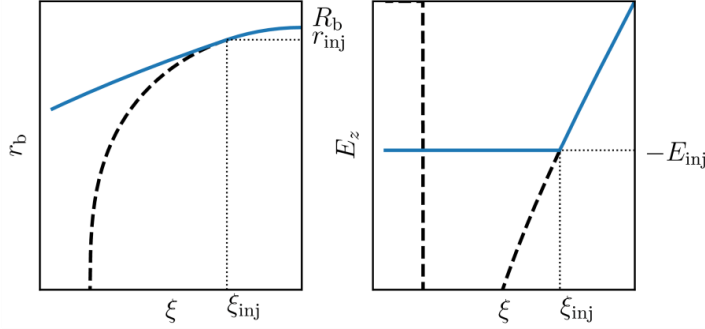


Рис. 23: Схематическое изображение искомой формы плазменной полости $r_b(\xi)$ и продольного электрического поля E_z в ней. Штриховой линией показано решение для ненагруженной плазменной полости

Дифференцируя по r_b и заменяя $r_b(\xi)$ на r , получим явное выражение для $\Lambda(r)$:

$$\Lambda(r) = \frac{S_i(r)}{2} + \frac{E_{inj}^2 r^2}{2S_i(r)}. \quad (135)$$

Из уравнения (97) можем получить выражение для функции $\xi_b(r)$:

$$E_{inj}(\xi_b(r) - \xi_{inj}) = \int_r^{r_{inj}} \frac{S_i(r')}{r'} dr'. \quad (136)$$

Решение для $\Lambda(r)$ вместе с функцией $r_b(\xi)$, обратной к найденной $\xi_b(r)$, позволяет найти $\lambda(\xi) = \Lambda(r_b(\xi))$ для произвольной точки инжекции и произвольного профиля плазмы.

Длина ускоряемого сгустка ограничена длиной плазменной полости, поэтому предельную длину можно найти, подставив $r = 0$ в (136):

$$\Delta\xi = \frac{1}{E_{inj}} \int_0^{r_{inj}} \frac{S_i(r')}{r'} dr'. \quad (137)$$

Зная предельную длину сгустка, можно рассчитать максимальный допустимый заряд в нем:

$$Q_{max} = 2\pi \int_{\xi_{inj}}^{\xi_{inj} + \Delta\xi} \lambda(\xi') d\xi' = \frac{2\pi F_i(0, R_b)}{E_{inj}}. \quad (138)$$

Можно заметить, что произведение $Q_{max} E_{inj}$, равное мощности, вырабатываемой полем полости по ускорению сгустка, не зависит от точки инжекции. Это значит, что путем выбора точки инжекции ξ_{inj} мы можем

добиться нужного нам баланса между величиной ускоряемого заряда и темпом его ускорения. Интересно также то, что средняя плотность заряда в найденном нами ступке

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{4\xi} \int_{\xi_{inj}}^{\xi_{inj}+4\xi} \lambda(\xi) d\xi = F_i(0, R_b) \left(\int_0^{r_{inj}} \frac{2S_i(r')}{r'} dr' \right)^{-1} \quad (139)$$

совпадает с выражением (125) для пороговой плотности заряда λ_{th} в случае использования электронного ступка прямоугольной формы. Как нетрудно убедиться, эффективность ускорения η для ступка с наибольшим зарядом также равна 1. Таким образом, специальный подбор продольного профиля ступка позволяет добиться его ускорения в однородном электрическом поле, причем эффективность ускорения при этом может достигать 100%.

В качестве одного из примеров рассмотрим плазму со степенным профилем $\rho_i(r) = (r/R_b)^n$. Для такого типа профиля функция $\lambda(\xi)$, задаваемая в параметрическом виде уравнениями (135), (136), может быть найдена аналитически:

$$\lambda(\xi) = \frac{r_{inj}^{n+2}}{2(n+2)R_b^n} - \frac{(n+2)E_{inj}}{2} (\xi - \xi_{inj}) + \frac{R_b^n E_{inj}^2 (n+2)}{2} \frac{1}{r_b^n(\xi)}, \quad (140)$$

где

$$r_b(\xi) = [r_{inj}^{n+2} - R_b^n E_{inj} \cdot (\xi - \xi_{inj})(n+2)^2]^{\frac{1}{n+2}}, \quad (141)$$

а E_{inj} определяется уравнением (133).

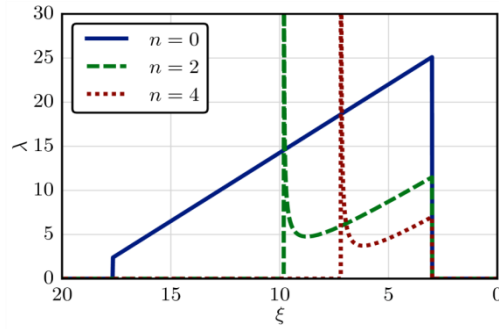


Рис. 24: Зависимости плотности заряда λ в ускоряемых ступках от продольной координаты ξ , вычисленные по формуле (140) для различных показателей степени n степенных профилей плазмы. Точка инжекции $\xi_{inj} = 3$, максимальный радиус плазменной полости $R_b = 10$

Профили ступков, задаваемые уравнением (140) для профилей плазмы с различными показателями степени n , показаны на рис. 24. Этот рисунок демонстрирует, что зависимость плотности заряда от координаты в таком ступке является практически линейной. В случае однородной плазмы ($n = 0$) зависимость является строго линейной, в то время как для $n > 0$ существует особенность в хвостовой части электронного ступка, обуслов-

ленная занулением плотности плазмы при $r = 0$ для данных профилей. Эта особенность усложняет использование электронного сгустка наибольшей возможной длины, ограничивая эффективность ускорения.

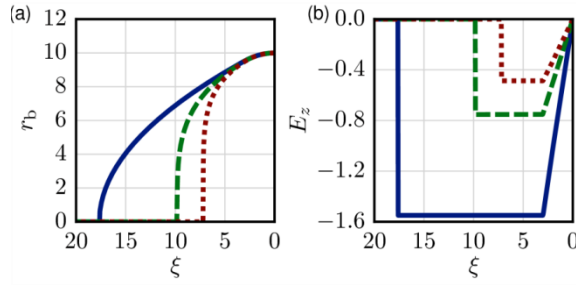


Рис. 25: Зависимости (а) границ плазменных полостей r_b и (б) продольных электрических полей E_z в них от продольной координаты ξ , рассчитанные численно по формулам (96) и (97) соответственно для различных показателей степени n и электронных сгустков, определяемых выражением (140). Сплошная, штриховая и пунктирная линии соответствуют $n = 0, 2, 4$. Максимальный радиус плазменной полости $R_b = 10$, точка инжекции $\xi_{inj} = 3$

На рис. 25 показаны границы плазменных полостей и соответствующие продольные электрические поля для электронных сгустков с рис. 24. Этот рисунок показывает, что продольное поле действительно является однородным в области, где присутствует электронный сгусток. Также видно, что присутствие электронного сгустка приводит к существенному удлинению плазменной полости. рис. 24 и 25 также показывают, что полная мощность ускорения заметно меньше для плазмы с более глубоким каналом (т. е. с большими значениями n), что подтверждается уравнением (138), которое для степенного профиля имеет вид

$$Q_{\max} = \frac{1}{E_{inj}} \frac{\pi R_b^2}{(n+2)^3}. \tag{142}$$

Это уравнение показывает, что произведение $Q_{\max} E_{inj}$, равное мощности ускорения, быстро уменьшается с увеличением n , соответствующим углублению канала в плазме. Рассмотрим также плазму с вакуумным каналом, для которого плотность определена как $\rho_i = \theta(r - r_c)$. В этом случае профили электронных сгустков $\lambda(\xi)$, обеспечивающие однородность электрического поля, могут быть найдены численно; они показаны на Рис. 26. Форма этих электронных сгустков, как и в случае плазмы со степенным профилем, очень близка к трапецевидной. Они также обладают тем же свойством уменьшения полного заряда в сгустке при увеличении размера канала. Для проверки возможности создания однородного ускоряющего поля в плазме с каналом при использовании специальным образом подобранного электронного сгустка было проведено трехмерное численное моделирование методом частиц в ячейках с использованием кода QUILL [35].

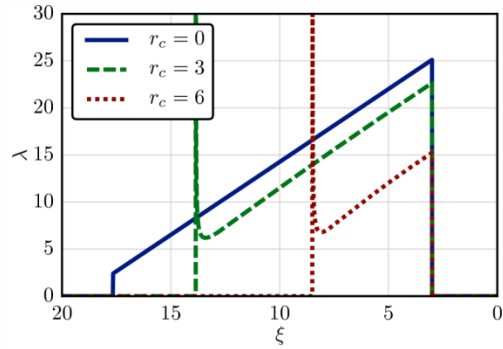


Рис. 26: Зависимости плотности заряда λ в ускоряемых сгустках от продольной координаты ξ для различных радиусов канала r_c . Зависимости рассчитаны численно по формулам (135) и (136). Максимальный радиус плазменной полости $R_b = 10$, точка инжекции $\xi_{inj} = 3$

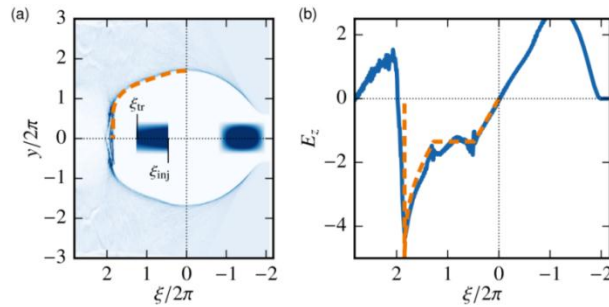


Рис. 27: (а) Плазменная полость и (б) усредненное по времени продольное электрическое поле E_z на оси полости для ускоряемого электронного сгустка с профилем, выбранным по формулам (135), (136). Радиус канала $r_c = 1.2\pi$. Аналитические решения, вычисленные по формулам (96) и (97), показаны штриховыми линиями. Все размеры нормированы на $\lambda_p = 5$ мкм

Результаты этого моделирования показаны на рис. 27. В моделировании использовалась плазма с каналом с плотностью плазмы снаружи канала $n_p = 4.5 \times 10^{19} \text{ см}^{-3}$. Плазменная полость создавалась электронным сгустком с полным зарядом 3.2 нКл и характерными продольным и поперечным размерами 6 мкм и 4 мкм соответственно. Ускоряемый сгусток имел такой же характерный поперечный размер, как и драйвер, в то время как его продольный профиль задавался уравнениями (135), (136). Энергия частиц в обоих сгустках равнялась 30 ГэВ. Сравнение результатов моделирования с аналитическими решениями показывает, что рассчитанный нами профиль электронного сгустка действительно позволяет создать участок однородного электрического поля. Таким образом, ускорение в плазменном канале и специальный подбор профиля сгустка позволяют ускорять электронный сгусток в однородном поле в отсутствие поперечной силы, действующей на него, что может позволить сохранить малый разброс по энергии и малый поперечный эмиттанс сгустка.

11.3 А К Л Ю Ч Е Н И Е

В данной работе была описана теория сильно нелинейного режима кильватерной волны, в котором воздействие драйвера (мощного ультракороткого лазерного импульса или релятивистского электронного сгустка) оказывается достаточно сильным для практически полного вытеснения электронов плазмы от оси его распространения, что приводит к образованию позади драйвера плазменной полости сферической формы. При этом, при построении теории, в отличие от многих предшествующих моделей, рассматривалась плазма с поперечно-неоднородным профилем концентрации, который может быть использован в качестве дополнительной степени свободы для управления параметрами ускорения.

В рамках теории была введена феноменологическая модель плазменной полости, в которой предполагалось, что внутри полости отсутствуют электроны плазмы, а на ее границе находится тонкий электронный слой, экранирующий полость от плазмы. Разработанная теория позволяет описать многие важные характеристики сильно нелинейного режима:

- Было получено обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее форму границы плазменной полости в зависимости от профиля плазмы. Данное уравнение также позволяет учитывать воздействие драйвера и ускоряемых сгустков на форму полости.

- Были найдены области параметров плазменной полости и электронного слоя, при которых это уравнение существенно упрощается и может быть рассмотрено аналитически.

- В рамках такого аналитического рассмотрения была описана ненагруженная плазменная полость, т. е. полость без ускоряемых электронных сгустков.

- Было получено общее выражение для расчета эффективности ускорения электронного сгустка в плазменной полости.

- Для прямоугольного ускоряемого сгустка было показано, что существует пороговое значение плотности заряда в нем, при превышении которого сгусток компенсирует притяжение ионов и предотвращает замыкание полости. При этом выбор плотности заряда равной пороговому значению позволяет добиться эффективности ускорения до 100%.

- Было показано, что для произвольного поперечного профиля плазмы можно подобрать такой профиль ускоряемого электронного сгустка, что его ускорение будет происходить в полностью однородном электрическом поле. Это может позволить сохранить малый разброс по энергии частиц в ускоряемом сгустке.

- Для произвольной плазменной полости были получены явные выражения для компонент электромагнитного поля как внутри полости, так и в электронном слое снаружи нее. Данные выражения могут быть использованы для расчета динамики электронов при их ускорении внутри плазменной полости, а также в процессе инжекции и самоинжекции.

Большинство из полученных аналитических результатов были проверены при помощи трехмерного численного моделирования методом частиц в ячейках, которое показало хорошее согласие между предсказаниями разработанной теории и численным экспериментом.

В то же время, несмотря на большие возможности разработанной теории, существует достаточно широкий спектр проблем, требующих более тщательного рассмотрения:

- Главным недостатком теории является отсутствие самосогласованности: для пространственных распределений плотности заряда и тока мы использовали феноменологическую модель, постулирующую свойства таких распределений. Несмотря на то что данная модель способна достаточно хорошо описывать плазменную полость, что подтверждается сравнением с численным экспериментом, в рамках этой модели необходимо иметь априорные сведения о структуре электронного слоя на границе плазменной полости, в частности, о его характерной толщине.

- Одним из следствий использования феноменологического подхода является невозможность корректного описания возбуждения кильватерной волны драйвером. На самом деле, при возбуждении волны происходит плавный переход от линейной стадии на фронте драйвера, для которой еще нельзя явно выделить границу плазменной полости, к сильно нелинейной в его задней части. Этот переход не может быть описан в рамках нашей модели, поэтому при аналитическом рассмотрении в качестве начальных условий задачи мы задавали не только сам драйвер, но и размер возбуждаемой им плазменной полости.

- Отдельного рассмотрения заслуживают боковые волны, не учитываемые в нашей модели, в которой предполагается, что все вытесненные драйвером электроны участвуют в образовании. Однако, как показывает численное моделирование, существуют боковые волны, т. е. потоки электронов, отрывающиеся от границы плазменной полости и далеко уходящие от нее [36, 37]. В частности, они хорошо видны на рис. 8, 19а. Так как результаты численного моделирования, в которых эти волны видны, не сильно отличаются от предсказаний разработанной теории, можно сделать предположение, что влияние этих волн несущественно. Тем не менее, возможность существования параметров, при которых их наличие оказывается важным эффектом, нельзя исключать.

Существует также много задач, которые не рассматривались в рамках данной работы, однако представляют большой интерес при рассмотрении сильно нелинейного режима кильватерной волны. В частности, сложным для описания является процесс самоинжекции электронов, при котором электроны плазмы захватываются и ускоряются в плазменной полости. Как было отмечено ранее, он не может быть описан в рамках квазистатического приближения, используемого в данной работе. Этот процесс оказывает решающее влияние на характеристики получаемых ускоряемых сгустков, однако полного его теоретического описания не существует. Тем не менее, полученные выражения для распределений компонент электромагнитного поля могут оказаться полезными для анализа

этого процесса. Еще одной проблемой, для которой не существует подробного описания, является распространение лазерного импульса в плазме при возбуждении кильватерной волны в сильно нелинейном режиме. Динамика лазерных импульсов с малой интенсивностью, возбуждающих кильватерную волну в линейном режиме, может быть описана теоретическими моделями. Однако в сильно нелинейном режиме плазменный отклик (распределение плазменной концентрации) имеет сложную структуру, при этом передняя часть импульса находится в плазме, а задняя — фактически в вакууме, что приводит к высокой сложности описания эволюции лазерного импульса в данном случае.

Авторы выражают благодарность Фонду развития теоретической физики и математики «БАЗИС» за поддержку (грант №17-11-101).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Assmann R., Lamont M., Myers S. A brief history of the LEP collider // Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) — 2002. — Т. 109, № 2-3. — С. 17-31.
2. SLAC National Acceleration Laboratory, <https://www6.slac.stanford.edu/>.
3. International Linear Collider, <http://www.linearcollider.org/ILC>.
4. Esarey E., Schroeder C. B., Leemans W. P. Physics of laser-driven plasma-based electron accelerators // Rev. Mod. Phys. — 2009. — Т. 81, № 3. — С. 1229-1285.
5. Kostyukov I. Yu., Pukhov A. M. Plasma-based methods for electron acceleration: current status and prospects // Phys.-Usp. — 2015. — Т. 58, № 1. — С. 81.
6. Fainberg Ia. B. The use of plasma waveguides as accelerating structures in linear accelerators // Proc. CERN Symp. on High-Energy Accelerators and Pion Physics. — 1956. — С. 84-90.
7. Rosenzweig J. B., Cline D. B., Cole B., Figueroa H., Gai W., Konecny R., Norem J., Schoessow P., Simpson J. Experimental observation of plasma wake-field acceleration // Phys. Rev. Lett. — 1988. — Т. 61, № 1. — С. 98.
8. Tajima T., Dawson J. M. Laser electron accelerator // Phys. Rev. Lett. — 1979. — Т. 43, № 4. — С. 267.
9. Strickland D., Mourou G. Compression of amplified chirped optical pulses // Opt. Commun. — 1985. — Т. 55, № 6. — С. 447-449.
10. Pukhov A., Meyer-ter-Vehn J. Laser wake field acceleration: the highly non-linear broken-wave regime // Appl. Phys. B. — 2002. — Т. 74, № 4-5. — С. 355-361.
11. Froula D. H., Clayton C. E., Döppner T., Marsh K. A., Barty C. P. J., Divol L., Fonseca R. A., Glenzer S. H., Joshi C., Lu W., Martins S. F., Michel P., Mori W. B., Palaastro J. P., Pollock B. B., Pak A., Ralph J. E., Ross J. S., Siders C. W., Silva L. O., Wang T. Measurements of the Critical Power for Self-Injection of Electrons in a Laser Wakefield Accelerator // Phys. Rev. Lett. — 2009. — Т. 103, № 21. — С. 215006.
12. Faure J., Glinec Y., Pukhov A., Kiselev S., Gordienko S., Lefebvre E., Rousseau J.-P., Burgy F., Malka V. A laser-plasma accelerator producing monoenergetic electron beams // Nature. — 2004. — Т. 431, № 7008. — С. 541-544.
13. Geddes C. G. R., Toth Cs., Van Tilborg J., Esarey E., Schroeder C. B., Bruhwiler D., Nieter C., Cary J., Leemans W. P. High-quality electron beams from a laser wakefield accelerator using plasma-channel guiding // Nature. — 2004. — Т. 431, № 7008. — С. 538-541.
14. Dangor A. E., Divall E. J., Foster P. S., Gallacher J. G., Hooker C. J., Jaroszynski D. A., Langley A. J., Mori W. B., Norreys P. A., Tsung F. S., Viskup R., Walton B. R., Krushelnick K. Monoenergetic beams of relativistic electrons from intense laser-plasma interactions // Nature. — 2004. — Т. 431, № 7008. — С. 535.
15. Leemans W. P., Gonsalves A. J., Mao H.-S., Nakamura K., Benedetti C., Schroeder C. B., Tóth Cs., Daniels J., Mittelberger D. E., Bulanov S. S., Vay J.-L., Geddes C. G. R., Esarey E. Multi-GeV electron beams from capillary-discharge-guided subpetawatt laser pulses in the self-trapping regime // Phys. Rev. Lett. — 2014. — Т. 113, № 24. — С. 245002.
16. Pukhov A. Particle-In-Cell Codes for Plasma-based Particle Acceleration // CERN Yellow Rep. — 2016. — Т. 1. — С. 181.

17. Kostyukov I., Pukhov A., Kiselev S. Phenomenological theory of laser-plasma interaction in “bubble” regime // *Phys. Plasmas*. — 2004. — T. 11, № 11. — C. 5256.
18. Kostyukov I., Nerush E., Pukhov A., Seredov V. Electron Self-Injection in Multidimensional Relativistic-Plasma Wake Fields // *Phys. Rev. Lett.* — 2009. — T. 103, № 17. — C. 175003.
19. Gordienko S., Pukhov A. Scalings for ultrarelativistic laser plasmas and quasimonoeenergetic electrons // *Phys. Plasmas*. — 2005. — T. 12, № 4. — C. 043109.
20. Lu W., Huang C., Zhou M., Tzoufras M., Tsung F. S., Mori W. B., Katsouleas T. A nonlinear theory for multidimensional relativistic plasma wave wakefields // *Phys. Plasmas*. — 2006. — T. 13, № 5. — C. 056709.
21. Tzoufras M., Lu W., Tsung F. S., Huang C., Mori W. B., Katsouleas T., Vieira J., Fonseca R. A., Silva L. O. Beam loading by electrons in nonlinear plasma wakes // *Phys. Plasmas*. — 2009. — T. 16, № 5. — C. 056705.
22. Pukhov A., Jansen O., Tueckmantel T., Thomas J., Kostyukov I. Yu. Field-Reversed Bubble in Deep Plasma Channels for High-Quality Electron Acceleration // *Phys. Rev. Lett.* — 2014. — T. 113, № 24. — C. 245003.
23. Thomas J., Kostyukov I. Yu., Pronold J., Golovanov A., Pukhov A. Non-linear theory of a cavitated plasma wake in a plasma channel for special applications and control // *Phys. Plasmas*. — 2016. — T. 23, № 5. — C. 053108.
24. Golovanov A. A., Kostyukov I. Yu., Pukhov A. M., Thomas J. Generalised model of a sheath of a plasma bubble excited by a short laser pulse or by a relativistic electron bunch in transversely inhomogeneous plasma // *Quantum Electron.* — 2016. — T. 46, № 4. — C. 295-298.
25. Golovanov A. A., Kostyukov I. Yu., Thomas J., Pukhov A. Beam loading in the bubble regime in plasmas with hollow channels // *Phys. Plasmas*. — 2016. — T. 23, № 9. — C. 093114.
26. Golovanov A. A., Kostyukov I. Y., Thomas J., Pukhov A. Analytic model for electromagnetic fields in the bubble regime of plasma wakefield in non-uniform plasmas // *Phys. Plasmas*. — 2017. — T. 24, № 10. — C. 103104.
27. Esarey E., Shadwick B., Catravas P., Leemans W. Synchrotron radiation from electron beams in plasma-focusing channels // *Phys. Rev. E*. — 2002. — T. 65, № 5. — C. 056505.
28. Sprangle P., Esarey E., Ting A. Nonlinear interaction of intense laser pulses in plasmas // *Phys. Rev. A*. — 1990. — T. 41, № 8. — C. 4463.
29. Власов А. А. Теория вибрационных свойств электронного газа и ее приложения. — МГУ, 1945.
30. Mora P., Antonsen Jr. T. M. Kinetic modeling of intense, short laser pulses propagating in tenuous plasmas // *Phys. Plasmas*. — 1997. — T. 4, № 1. — C. 217.
31. Derouillat J., Beck A., Pérez F., Vinci T., Chiaramello M., Grassi A., Flé M., Bouchard G., Plotnikov I., Aunai N., Dargent J., Riconda C., Grech M. Smilei: A collaborative, open-source, multi-purpose particle-in-cell code for plasma simulation // *Comp. Phys. Commun.* — 2018. — T. 222. — C. 351-373.
32. Smilei, <http://www.maisondelasimulation.fr/smilei/>.
33. Yi S. A., Khudik V., Siemon C., Shvets G. Analytic model of electromagnetic fields around a plasma bubble in the blow-out regime // *Phys. Plasmas*. — 2013. — T. 20, № 1. — C. 013108.
34. Godfrey B. B. Numerical Cherenkov instabilities in electromagnetic particle codes // *J. Comp. Phys.* — 1974. — T. 15, № 4. — C. 504-521.
35. QUILL, http://iapras.ru/structure/dep_330/quill.html.
36. Esirkepov T. Zh., Kato Y., Bulanov S. V. Bow Wave from Ultraintense Electromagnetic Pulses in Plasmas // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — T. 101, № 26. — C. 265001.
37. Luo J., Chen M., Zhang G.-B., Yuan T., Yu J.-Y., Shen Z.-C., Yu L.-L., Weng S.-M., Schroeder C. B., Esarey E. Dynamics of boundary layer electrons around a laser wakefield bubble // *Phys. Plasmas*. — 2016. — T. 23, № 10. — C. 103112.

ЧАСТЬ IV

СВЯЗАННЫЕ МАГНИТОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ В ФЕРРОМАГНЕТИКАХ

*В. Г. Барьяхтар ***, А. Г. Данилевич ****

** Институт Магнетизма НАН и МОН Украины,
бульв. Акад. Вернадского, 36б, 03142, Киев, Украина*

*** Национальный технический университет Украины «КПИ им. И. Сикорского»
пр. Победы, 37, 03056, Киев, Украина*

Рассчитаны законы дисперсии связанных магнитоупругих волн для ферромагнетиков кубической и одноосной симметрии. Показано, что взаимодействие между звуковыми и спиновыми волнами зависит как от направления волнового вектора колебаний, так и от направления магнитного момента ферромагнетика.

Проанализировано поведение спектров связанных магнитоупругих волн в окрестности фазовых переходов в решетке, а именно в окрестности мартенситных фазовых превращений в материалах с эффектом памяти формы. Теоретически объяснено явление резкого уменьшения упругих модулей таких сплавов при приближении к мартенситным фазовым переходам. Показано, что при этом основное влияние на упругие характеристики материала оказывает неоднородная магнитострикция.

Исследовано влияние магнитоупругого взаимодействия на закон дисперсии квазиспиновых волн в вырожденном основном состоянии одноосного ферромагнетика «легкая плоскость». Магнитоупругое взаимодействие снимает вырождение и приводит к появлению магнитоакустических щелей в спектре.

Построена модель диссипативной функции, описывающей релаксационные процессы, обусловленные затуханием связанных магнитоупругих волн в ферромагнетиках кубической и одноосной симметрии.

ВВЕДЕНИЕ

Магнитоупругое взаимодействие приводит к «сцеплению» спиновых волн, распространяющихся в магнитоупорядоченных кристаллах, со звуковыми (упругими) волнами. Такие магнитоупругие колебания исследуются уже в течение многих лет [1, 2], и феноменологическая модель их описания хорошо развита [3, 4]. Но на сегодняшний день изучение явления взаимодействия магнитной и упругой подсистем приобретает новую актуальность, что связано с многочисленными экспериментами [5-8], которые проводятся на магнитоупорядоченных системах, в которых такое взаимодействие может быть достаточно большим.

Такое взаимодействие существенно проявляется тогда, когда частота спиновой волны приближается к частоте звука, и в случае магнитоакустического резонанса наблюдается «отталкивание» квазиспиновой и квазизвуковой ветвей волнового спектра [3, 4]. Также хорошо известно, что магнитоупругое взаимодействие увеличивается с приближением магнитоупорядоченной системы к спинпереориентационным фазовым переходам [4, 9]. Это происходит потому, что энергетическая щель в спектре спиновых волн уменьшается по мере приближения к точке фазового перехода. Когда энергетическая щель становится сравнимой по величине с «отталкиванием» квазиспиновой и квазизвуковой ветвей спектра, магнитоупругое взаимодействие приводит к существенному снижению скорости квазизвуковых волн. Такое поведение магнитоупорядоченных систем в окрестности спинпереориентационных фазовых переходов побудило к проведению активных исследований связанных магнитоупругих волн при фазовых превращениях других типов.

В последнее время структурные фазовые переходы являются объектами интенсивных исследований за их определяющую роль в таких эффектах, как сверхупругость и память формы. Особый интерес вызывают так называемые «мартенситные превращения» – структурные фазовые переходы первого рода из высокосимметричной структуры в низкосимметричную искаженную структуру, которая существует при низких температурах [5-8]. Для материалов, в которых имеют место такие фазовые переходы, было открыто явление гигантской магнитострикции, что обусловлено резким снижением упругой энергии в окрестности мартенситных превращений [10]. Такие системы получили название «ферромагнитные сплавы с эффектом памяти формы». Мартенситное превращение в сплавах с эффектом памяти формы сопровождается спонтанной деформацией кристаллической решетки и выраженным смягчением (уменьшением) упругого модуля сдвига [6, 7, 11, 12]. В частности, на сегодняшний день интенсивно изучаются сплавы $NiMnGa$, в которых имеет место мартенситное превращение из кубической в тетрагональную фазу. Наиболее интересной особенностью этих материалов является гигантская (>5%) магнитоиндуцированная деформация. Она вызвана

трансформацией двойниковой структуры монокристалла образца сплава под действием внешнего магнитного поля [13-15].

Экспериментально установленные явления увеличения магнито-стрикции и смягчения упругого модуля сдвига в монокристалле сплава $NiMnGa$ в окрестности температуры мартенситного превращения наводят на мысль о сильном влиянии магнитоупругого взаимодействия на спектры коллективных колебаний в таких материалах. В работе [16] уже было рассчитано влияние такого взаимодействия на один из упругих модулей кубического ферромагнетика с эффектом памяти формы. Но экспериментальные данные [5, 7] показывают, что соответствующие теоретические расчеты являются крайне необходимыми и для других упругих модулей, поскольку они также испытывают заметные изменения при мартенситных фазовых переходах.

Полное описание коллективных магнитоупругих колебаний невозможно без учета их затухания. Теория описания диссипации упругих волн на сегодняшний день хорошо развита и основана на общих принципах, изложенных в работах Ландау [17]. В то же время модели, которые широко применялись для описания диссипации спиновых волн, не отвечали этим основным феноменологическим принципам. Слагаемое, отвечающее за релаксацию намагниченности в уравнении Ландау–Лифшица, было предложено Ландау исходя из общих физических представлений о диссипативных процессах [18]. Более позже Гильберт построил диссипативную функцию ферромагнетика, которая соответствует релаксации Ландау–Лифшица, и предложил запись релаксационного слагаемого через производную по времени от намагниченности [19].

Такие модели описания затухания колебаний намагниченности имеют очень существенные недостатки [20, 21]. Как в работе Ландау и Лифшица, так и в работе Гильберта использовалась модель ферромагнетика с постоянной по абсолютной величине намагниченностью. Иными словами, продольная восприимчивость ферромагнетика считалась равной нулю (не учитывалась). Несмотря на векторное уравнение движения, релаксационный член Ландау–Лифшица–Гильберта характеризуется одной релаксационной постоянной, что соответствует изотропной среде. Рассмотрение выражения для релаксационного слагаемого в моделях [18, 19] показывает, что в нем никак не учтена симметрия магнитного материала, что приводит ко многим физическим противоречиям. Также важно отметить, что релаксационное слагаемое в формуле Ландау–Лифшица или Гильберта обусловлено спин-спиновыми и спин-орбитальными взаимодействиями и, в свою очередь, не позволяет учитывать важные во многих случаях диссипативные процессы, обусловленные обменным взаимодействием в кристалле. Поэтому исследования также были посвящены построению модели описания диссипации связанных магнитоупругих волн.

1. МАГНИТОУПРУГИЕ ВОЛНЫ В ФЕРРОМАГНЕТИКЕ КУБИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ

1.1. Законы дисперсии связанных магнитоупругих волн в кубическом ферромагнетике

Рассмотрим ферромагнетик кубической симметрии во внешнем магнитном поле. Для описания взаимодействия спиновых и упругих волн плотность полной энергии кубического кристалла представим в виде:

$$F = F_m + F_e + F_{me}. \quad (1.1)$$

Выражение для плотности энергии строится из компонент намагниченности и тензора деформации так, чтобы энергия была инвариантом относительно преобразований симметрии кубического кристалла. Первое слагаемое в выражении (1) представляет собой магнитную часть плотности энергии, которая в случае кубической симметрии имеет вид [3]:

$$F_m = \frac{\alpha}{2} \frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial x_i} \frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial x_k} + K_1 \mu_x^2 \mu_y^2 + \mu_x^2 \mu_z^2 + \mu_y^2 \mu_z^2 + K_2 \mu_x^2 \mu_y^2 \mu_z^2 - \mathbf{M}\mathbf{H}, \quad (1.2)$$

где α – константа неоднородного обменного взаимодействия, K_1 , K_2 – константы магнитной анизотропии кубического ферромагнетика, \mathbf{M} и \mathbf{H} – векторы намагниченности и внешнего магнитного поля, $\boldsymbol{\mu} = \frac{\mathbf{M}}{M_0}$ – норми-

рованный вектор намагниченности (поскольку константы в выражении (1.2) имеют размерность энергии), M_0 – намагниченность насыщения. Энергией размагничивающих полей в (1.2) пренебрегаем, поскольку мы не рассматриваем конкретной формы ферромагнитного образца.

Плотность энергии упругих деформаций имеет вид [22, 23]:

$$F_e = \frac{3}{2} (C_{11} + 2C_{12}) u_1^2 + \frac{1}{6} C' (u_2^2 + u_3^2) + 2C_{44} (u_4^2 + u_5^2 + u_6^2). \quad (1.3)$$

Величины C_{11} , C_{12} , C_{44} и $C' = (C_{11} - C_{12})/2$ – упругие модули второго порядка для кристалла кубической симметрии [17]. Величины

$$u_1 = \frac{1}{3} E_{xx} + E_{yy} + E_{zz}, \quad u_2 = \sqrt{3} E_{xx} - E_{yy}, \quad u_3 = 2E_{zz} - E_{xx} - E_{yy},$$

$$u_4 = \frac{1}{2} E_{yz} + E_{zy}, \quad u_5 = \frac{1}{2} E_{xz} + E_{zx}, \quad u_6 = \frac{1}{2} E_{xy} + E_{yx}$$

представляют собой линейные комбинации компонент тензора деформаций, которые преоб-

разуются по одномерным (u_1), двумерным (u_2, u_3) и трехмерным (u_4, u_5, u_6) несводимым представлениям группы симметрий кристалла.

Третье слагаемое в (1.1) представляет плотность энергии взаимодействия магнитной и упругой подсистем [23]:

$$F_{me} = -\delta_0 u_1 (\mu_x^2 + \mu_y^2 + \mu_z^2) - \delta_1 \{ \sqrt{3} u_2 (\mu_x^2 - \mu_y^2) + u_3 (2\mu_z^2 - \mu_x^2 - \mu_y^2) \} - \delta_2 (u_4 \mu_x \mu_y + u_5 \mu_x \mu_z + u_6 \mu_x \mu_y), \quad (1.4)$$

где константы $\delta_0, \delta_1, \delta_2$ описывают магнитоупругое взаимодействие.

Из условия минимизации магнитной части энергии легко показать, что в кубическом ферромагнетике в отсутствие внешнего магнитного поля ($\vec{H} = 0$) существует три основных состояния для вектора намагниченности: вдоль оси четвертого порядка $\mathbf{M} \parallel \langle 001 \rangle$ – «фаза 1»; вдоль диагонали одной из граней куба $\mathbf{M} \parallel \langle 101 \rangle$ – «фаза 2»; вдоль пространственной диагонали куба $\mathbf{M} \parallel \langle 111 \rangle$ – «фаза 3» (все другие возможные направления магнитного момента являются эквивалентными одному из указанных). В реальных экспериментах [5-8] по исследованию упругих и магнитных свойств материалов направление внешнего магнитного поля совпадает с одним из данных направлений магнитного момента, а величина \mathbf{H} есть достаточно большой ($\sim 1000 \text{ Э}$), таким образом, можно считать, что равновесное значение \mathbf{M} будет направлено вдоль одного из указанных направлений.

Мы будем рассматривать малые адиабатические колебания плотности магнитного момента $\boldsymbol{\mu}$ ферромагнетика [3]. Согласно этому можно записать, что:

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\mu}_0 + \mathbf{m}(\mathbf{r}, t), \quad (1.5)$$

где $\mathbf{m}(\mathbf{r}, t)$ – малые отклонения от равновесного значения $\boldsymbol{\mu}_0$, а равновесное значение вектора намагниченности будет соответственно иметь компоненты: $\boldsymbol{\mu}_0 = (0, 0, 1)$ – «фаза 1»; $\boldsymbol{\mu}_0 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ – «фаза 2»;

$$\boldsymbol{\mu}_0 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) \text{ – «фаза 3»}.$$

Из условия $\partial F / \partial E_{ik} = 0$ можно получить равновесные значения E_{ik}^0 компонент тензора деформаций для основных состояний, приведем их ниже для каждого основного состояния кубического ферромагнетика. Таким образом, компоненты тензора деформаций также могут быть представлены в виде суммы однородной части и малых отклонений:

$$E_{ik} = E_{ik}^0 + \varepsilon_{ik}. \quad (1.6)$$

Неоднородная часть тензора упругих деформаций выражается через вектор смещений частиц \mathbf{U} по формуле [4]:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right). \quad (1.7)$$

Для того чтобы найти законы дисперсии связанных магнитоупругих волн, воспользуемся уравнениями динамики для вектора намагниченности \mathbf{m} (уравнение Ландау–Лифшица) и вектора смещений \mathbf{U} [3, 4]:

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = -\gamma \mathbf{m} \times \mathbf{H}_{eff}, \quad (1.8)$$

$$\rho \ddot{\mathbf{U}} = -\frac{\delta F}{\delta \mathbf{U}}, \quad (1.9)$$

где $\mathbf{H}_{eff} = -\frac{\delta F}{\delta \mathbf{m}}$ – эффективное магнитное поле, γ – гиромагнитное соотношение, ρ – плотность вещества кристалла.

Из уравнения (1.9) легко получить законы дисперсии для свободных звуковых волн, учитывая только упругую энергию [17]. Из них следует, что в кристалле кубической симметрии распространяются следующие упругие волны: продольные волны $s_{11}^2 = C_{11} / \rho$, $s_{12}^2 = (C_{11} + C_{12} + 2C_{44}) / 2\rho$, $s_{13}^2 = (C_{11} + 2C_{12} + 4C_{44}) / 3\rho$ – соответственно, первый, второй и третий продольный звук; поперечные волны $s_{21}^2 = C_{44} / \rho$, $s_{22}^2 = C' / \rho$, $s_{23}^2 = (C_{11} - C_{12} + C_{44}) / 3\rho$ – соответственно, первый, второй и третий поперечный звук [17]. В случае наличия магнитоупругого взаимодействия указанные упругие волны уже не могут рассматриваться отдельно, каждая из них, при определенных условиях, будет взаимодействовать с колебаниями магнитного момента кристалла.

Для проведения дальнейших расчетов разложим плотность полной энергии (1.1) по степеням малых отклонений m_i и ε_{ik} и, подставив ее в динамические уравнения (1.8) и (1.9), проведем их линеаризацию. Перейдем в этих уравнениях к компонентам Фурье по времени t и координатам \mathbf{r} для малых отклонений $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 \exp i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)$, $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 \exp i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)$, где ω – частота, а \mathbf{k} – волновой вектор коллективных волн. Тогда уравнения (1.8) и (1.9) приводят к системе из 6-ти уравнений для компонент векторов \mathbf{m}_0 и \mathbf{U}_0 .

Из условия равенства нулю определителя этой системы динамических уравнений легко получить законы дисперсии связанных магнитоупругих волн для основных состояний кубического ферромагнетика. При этом рассмотрим три направления волнового вектора коллективных ко-

лебаний, что позволяет описать все приведенные выше типы упругих волн, которые могут распространяться в ферромагнетике кубической симметрии. Отметим также, что при расчете законов дисперсии мы учитываем малость магнитоупругого взаимодействия ($\delta_i \ll 1$) и, соответственно, пренебрегаем слагаемыми со степенями δ_i выше второй.

Приведем полученные законы дисперсии для каждого основного состояния кубического ферромагнетика.

Фаза 1: $\mathbf{H} \parallel \mathbf{M} \parallel \langle 001 \rangle$

Равновесные значения компонент тензора деформаций в этом основном состоянии имеют вид:

$$E_{xx}^0 = E_{yy}^0 = \frac{\delta_0}{3(C_{11} + 2C_{12})} - \frac{2\delta_1}{C_{11} - C_{12}}, \quad E_{zz}^0 = \frac{\delta_0}{3(C_{11} + 2C_{12})} + \frac{4\delta_1}{C_{11} - C_{12}},$$

$$E_{xz}^0 = E_{zx}^0 = E_{yz}^0 = E_{zy}^0 = E_{xy}^0 = E_{yx}^0 = 0.$$

Система динамических уравнений имеет вид:

$$(\rho\omega^2 - C_{11}k_x^2 - C_{44}(k_y^2 + k_z^2))U_{0x} - (C_{12} + C_{44})k_xk_yU_{0y} - (C_{12} + C_{44})k_xk_zU_{0z} -$$

$$-i\frac{1}{2}\delta_2k_zm_{0x} - i\frac{2}{3}(\delta_0 - 6\delta_1)k_xm_{0z} = 0; \quad (1.10.1)$$

$$-(C_{12} + C_{44})k_xk_yU_{0x} + (\rho\omega^2 - C_{11}k_y^2 - C_{44}(k_x^2 + k_z^2))U_{0y} - (C_{12} + C_{44})k_yk_zU_{0z} -$$

$$-i\frac{1}{2}\delta_2k_zm_{0y} - i\frac{2}{3}(\delta_0 - 6\delta_1)k_ym_{0z} = 0; \quad (1.10.2)$$

$$-(C_{12} + C_{44})k_xk_zU_{0x} - (C_{12} + C_{44})k_yk_zU_{0y} + (\rho\omega^2 - C_{11}k_z^2 - C_{44}(k_x^2 + k_y^2))U_{0z} -$$

$$-i\frac{1}{2}\delta_2k_xm_{0x} - i\frac{1}{2}\delta_2k_y m_{0y} - i\frac{2}{3}(\delta_0 + 12\delta_1)k_zm_{0z} = 0; \quad (1.10.3)$$

$$i\frac{1}{2M_0}\gamma\delta_2k_zU_{0y} + i\frac{1}{2M_0}\gamma\delta_2k_yU_{0z} + i\omega m_{0x} - \gamma M_0\omega_{m1}m_{0y} = 0; \quad (1.10.4)$$

$$-i\frac{1}{2M_0}\gamma\delta_2k_zU_{0x} - i\frac{1}{2M_0}\gamma\delta_2k_xU_{0z} + \gamma M_0\omega_{m1}m_{0x} + i\omega m_{0y} = 0; \quad (1.10.5)$$

$$i\omega m_{0z} = 0. \quad (1.10.6)$$

В выражениях (1.10.4) и (1.10.5) введены следующие обозначения:

$$\omega_{m1} = \frac{\alpha k^2}{M_0^2} + \frac{H}{M_0} + \frac{2K_1}{M_0^2} + \frac{72\delta_1^2}{M_0^2(C_{11} - C_{12})}. \quad (1.11)$$

Фаза 2: $\mathbf{H} \parallel \mathbf{M} \parallel \langle 101 \rangle$

Равновесные значения компонент тензора деформаций в этом основном состоянии имеют вид:

$$E_{xx}^0 = E_{zz}^0 = \frac{\delta_0}{3(C_{11} + 2C_{12})} + \frac{\delta_1}{C_{11} - C_{12}}, \quad E_{yy}^0 = \frac{\delta_0}{3(C_{11} + 2C_{12})} - \frac{2\delta_1}{C_{11} - C_{12}},$$

$$E_{xz}^0 = E_{zx}^0 = \frac{\delta_2}{8C_{44}}, \quad E_{yz}^0 = E_{zy}^0 = E_{xy}^0 = E_{yx}^0 = 0.$$

Система динамических уравнений имеет вид:

$$(\rho\omega^2 - C_{11}k_x^2 - C_{44}(k_y^2 + k_z^2))U_{0x} - (C_{12} + C_{44})k_x k_y U_{0y} -$$

$$-(C_{12} + C_{44})k_x k_z U_{0z} - i\sqrt{2}\left(\left(\frac{1}{3}\delta_0 + 4\delta_1\right)k_x + \frac{1}{4}\delta_2 k_z\right)m_{0x} - \quad (1.12.1)$$

$$-i\frac{\sqrt{2}}{4}\delta_2 k_y m_{0y} - i\sqrt{2}\left(\left(\frac{1}{3}\delta_0 - 2\delta_1\right)k_x + \frac{1}{4}\delta_2 k_z\right)m_{0z} = 0;$$

$$-(C_{12} + C_{44})k_x k_y U_{0x} + (\rho\omega^2 - C_{11}k_y^2 - C_{44}(k_x^2 + k_z^2))U_{0y} -$$

$$-(C_{12} + C_{44})k_y k_z U_{0z} - i\frac{\sqrt{2}}{3}(\delta_0 - 6\delta_1)k_y m_{0x} - i\frac{\sqrt{2}}{4}\delta_2(k_x + k_z)m_{0y} - \quad (1.12.2)$$

$$-i\frac{\sqrt{2}}{3}(\delta_0 - 6\delta_1)k_y m_{0z} = 0;$$

$$-(C_{12} + C_{44})k_x k_z U_{0x} - (C_{12} + C_{44})k_y k_z U_{0y} + (\rho\omega^2 - C_{11}k_z^2 -$$

$$-C_{44}(k_x^2 + k_y^2))U_{0z} -$$

$$-i\sqrt{2}\left(\left(\frac{1}{3}\delta_0 - 2\delta_1\right)k_x + \frac{1}{4}\delta_2 k_z\right)m_{0x} - i\frac{\sqrt{2}}{4}\delta_2 k_y m_{0y} - \quad (1.12.3)$$

$$-i\sqrt{2}\left(\left(\frac{1}{3}\delta_0 + 4\delta_1\right)k_x + \frac{1}{4}\delta_2 k_z\right)m_{0z} = 0;$$

$$i\frac{1}{4M_0}\gamma\delta_2 k_y U_{0x} + i\frac{1}{4M_0}\gamma\delta_2(k_x + k_z)U_{0y} + i\frac{1}{4M_0}\gamma\delta_2 k_y U_{0z} +$$

$$+ i\omega m_{0x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\gamma M_0 \omega_{m2} m_{0y} = 0; \quad (1.12.4)$$

$$-i\frac{6}{M_0}\gamma\delta_1 k_x U_{0x} + i\frac{6}{M_0}\gamma\delta_1 k_z U_{0z} + \frac{\sqrt{2}}{2}\gamma M_0 \omega_{m3} m_{0x} +$$

$$+ i\omega m_{0y} - \frac{\sqrt{2}}{2}\gamma M_0 \omega_{m3} m_{0z} = 0; \quad (1.12.5)$$

$$\begin{aligned}
 & -i \frac{1}{4M_0} \gamma \delta_2 k_y U_{0x} - i \frac{1}{4M_0} \gamma \delta_2 (k_x + k_z) U_{0y} - i \frac{1}{4M_0} \gamma \delta_2 k_y U_{0z} + \\
 & + \frac{\sqrt{2}}{2} \gamma M_0 \omega_{m2} m_{0y} + i \omega m_{0z} = 0
 \end{aligned} \quad (1.12.6)$$

В выражениях (1.12.4) – (1.12.6) введенные обозначения:

$$\begin{aligned}
 \omega_{m2} &= \frac{\alpha k^2}{M_0^2} + \frac{H}{M_0} + \frac{K_1}{M_0^2} + \frac{K_2}{2M_0^2} + \frac{36\delta_1^2}{M_0^2(C_{11} - C_{12})} + \frac{\delta_2^2}{8M_0^2 C_{44}}, \\
 \omega_{m3} &= \frac{\alpha k^2}{M_0^2} + \frac{H}{M_0} - \frac{2K_1}{M_0^2} + \frac{\delta_2^2}{4M_0^2 C_{44}}.
 \end{aligned} \quad (1.13)$$

Фаза 3: $\mathbf{H} \parallel \mathbf{M} \parallel \langle 111 \rangle$

Равновесные значения компоненты тензора деформаций в этом основном состоянии имеют вид:

$$E_{xx}^0 = E_{yy}^0 = E_{zz}^0 = \frac{\delta_0}{3(C_{11} + 2C_{12})}, \quad E_{xz}^0 = E_{zx}^0 = E_{yz}^0 = E_{zy}^0 = E_{xy}^0 = E_{yx}^0 = \frac{\delta_2}{12C_{44}}.$$

Система динамических уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned}
 & (\rho\omega^2 - C_{11}k_x^2 - C_{44}(k_y^2 + k_z^2))U_{0x} - (C_{12} + C_{44})k_x k_y U_{0y} - \\
 & - (C_{12} + C_{44})k_x k_z U_{0z} - i \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\left(\frac{2}{3} \delta_0 + 8\delta_1 \right) k_x + \frac{1}{2} \delta_2 (k_y + k_z) \right) m_{0x} - \\
 & - i \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\left(\frac{2}{3} \delta_0 - 4\delta_1 \right) k_x + \frac{1}{2} \delta_2 k_y \right) m_{0y} - i \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\left(\frac{2}{3} \delta_0 - 4\delta_1 \right) k_x + \frac{1}{2} \delta_2 k_z \right) m_{0z} = 0;
 \end{aligned} \quad (1.14.1)$$

$$\begin{aligned}
 & - (C_{12} + C_{44})k_x k_y U_{0x} + (\rho\omega^2 - C_{11}k_y^2 - C_{44}(k_x^2 + k_z^2))U_{0y} - \\
 & - (C_{12} + C_{44})k_y k_z U_{0z} - i \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\left(\frac{2}{3} \delta_0 - 4\delta_1 \right) k_y + \frac{1}{2} \delta_2 k_x \right) m_{0x} - \\
 & - i \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\left(\frac{2}{3} \delta_0 + 8\delta_1 \right) k_y + \frac{1}{2} \delta_2 (k_x + k_z) \right) m_{0y} - \\
 & - i \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\left(\frac{2}{3} \delta_0 - 4\delta_1 \right) k_y + \frac{1}{2} \delta_2 k_z \right) m_{0z} = 0;
 \end{aligned} \quad (1.14.2)$$

$$\begin{aligned}
& -(C_{12} + C_{44})k_x k_z U_{0x} - (C_{12} + C_{44})k_y k_z U_{0y} + (\rho\omega^2 - C_{11}k_z^2 - \\
& - C_{44}(k_x^2 + k_y^2))U_{0z} - i\frac{\sqrt{3}}{3}((\frac{2}{3}\delta_0 - 4\delta_1)k_z + \frac{1}{2}\delta_2 k_x)m_{0x} - \\
& - i\frac{\sqrt{3}}{3}((\frac{2}{3}\delta_0 - 4\delta_1)k_z + \frac{1}{2}\delta_2 k_y)m_{0y} - i\frac{\sqrt{3}}{3}((\frac{2}{3}\delta_0 + 8\delta_1)k_z + \\
& + \frac{1}{2}\delta_2(k_x + k_y))m_{0z} = 0;
\end{aligned} \tag{1.14.3}$$

$$\begin{aligned}
& i\frac{1}{6M_0}\gamma\delta_2(k_y - k_z)U_{0x} + i\frac{1}{6M_0}\gamma(24\delta_1 k_y + \delta_2 k_x)U_{0y} - \\
& - i\frac{1}{6M_0}\gamma(24\delta_1 k_z + \delta_2 k_x)U_{0z} + i\omega m_{0x} - \frac{\sqrt{3}}{3}\gamma M_0 \omega_{m4} m_{0y} + \\
& + \frac{\sqrt{3}}{3}\gamma M_0 \omega_{m4} m_{0z} = 0;
\end{aligned} \tag{1.14.4}$$

$$\begin{aligned}
& -i\frac{1}{6M_0}\gamma(24\delta_1 k_x + \delta_2 k_y)U_{0x} - i\frac{1}{6M_0}\gamma\delta_2(k_x - k_z)U_{0y} + \\
& + i\frac{1}{6M_0}\gamma(24\delta_1 k_z + \delta_2 k_y)U_{0z} + \frac{\sqrt{3}}{3}\gamma M_0 \omega_{m4} m_{0x} + i\omega m_{0y} - \\
& - \frac{\sqrt{3}}{3}\gamma M_0 \omega_{m4} m_{0z} = 0;
\end{aligned} \tag{1.14.5}$$

$$\begin{aligned}
& i\frac{1}{6M_0}\gamma(24\delta_1 k_x + \delta_2 k_z)U_{0x} - i\frac{1}{6M_0}\gamma(24\delta_1 k_y + \delta_2 k_z)U_{0y} + \\
& + i\frac{1}{6M_0}\gamma\delta_2(k_x - k_y)U_{0z} - \frac{\sqrt{3}}{3}\gamma M_0 \omega_{m4} m_{0x} + \\
& + \frac{\sqrt{3}}{3}\gamma M_0 \omega_{m4} m_{0y} + i\omega m_{0z} = 0.
\end{aligned} \tag{1.14.6}$$

В выражениях (1.14.4)–(1.14.6) введенные обозначения:

$$\omega_{m4} = \frac{\alpha k^2}{M_0^2} + \frac{H}{M_0} - \frac{4K_1}{3M_0^2} - \frac{4K_2}{9M_0^2} + \frac{\delta_2^2}{4M_0^2 C_{44}}. \tag{1.15}$$

Из условия равенства нулю определителя системы динамических уравнений получим законы дисперсии связанных магнитоупругих волн для основных состояний кубического ферромагнетика. При этом рассмотрим три направления волнового вектора коллективных колебаний, что позволяет описать все приведенные выше типы упругих волн, которые могут распространяться в ферромагнетике кубической симметрии.

Фаза 1: $\mathbf{H} \parallel \mathbf{M} \parallel \langle 001 \rangle$

Случай: $\mathbf{k} \parallel \langle 100 \rangle$

$$(\omega^2 - s_{11}^2 k^2)(\omega^2 - s_{11}^2 k^2)[(\omega^2 - s_{11}^2 k^2)(\omega^2 - \gamma^2 M_0^2 \omega_{m1}^2) - \delta_2^2 \left\{ \frac{\omega_{m1} \gamma^2 k^2}{4\rho} \right\}] = 0. \quad (1.16)$$

Случай: $\mathbf{k} \parallel \langle 110 \rangle$

$$(\omega^2 - s_{12}^2 k^2)(\omega^2 - s_{12}^2 k^2)[(\omega^2 - s_{11}^2 k^2)(\omega^2 - \gamma^2 M_0^2 \omega_{m1}^2) - \delta_2^2 \left\{ \frac{\omega_{m1} \gamma^2 k^2}{4\rho} \right\}] = 0. \quad (1.17)$$

Случай: $\mathbf{k} \parallel \langle 111 \rangle$

$$\begin{aligned} & (\omega^2 - s_{13}^2 k^2)[(\omega^2 - s_{13}^2 k^2)(\omega^2 - s_{13}^2 k^2)(\omega^2 - \gamma^2 M_0^2 \omega_{m1}^2) - \\ & - \delta_2^2 \left\{ \frac{\omega_{m1} \gamma^2 k^2}{3\rho} (\omega^2 - (s_{13}^2 + 2s_{13}^2)k^2 / 3) \right\}] = 0 \end{aligned} \quad (1.18)$$

Фаза 2: $\mathbf{H} \parallel \mathbf{M} \parallel \langle 101 \rangle$

Случай: $\mathbf{k} \parallel \langle 100 \rangle$

$$\begin{aligned} & (\omega^2 - s_{11}^2 k^2)[(\omega^2 - s_{11}^2 k^2)(\omega^2 - s_{11}^2 k^2)(\omega^2 - \gamma^2 M_0^2 \omega_{m2} \omega_{m3}) - \\ & - \delta_1^2 \left\{ \frac{36\omega_{m2} \gamma^2 k^2}{\rho} (\omega^2 - s_{11}^2 k^2) \right\} - \delta_2^2 \left\{ \frac{\omega_{m3} \gamma^2 k^2}{8\rho} (\omega^2 - s_{11}^2 k^2) \right\}] = 0. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Случай: $\mathbf{k} \parallel \langle 110 \rangle$

$$\begin{aligned} & (\omega^2 - s_{11}^2 k^2)(\omega^2 - s_{12}^2 k^2)(\omega^2 - s_{12}^2 k^2)(\omega^2 - \gamma^2 M_0^2 \omega_{m2} \omega_{m3}) - \\ & - \delta_1^2 \left\{ \frac{18\omega_{m2} \gamma^2 k^2}{\rho} (\omega^2 - s_{11}^2 k^2) \left(\omega^2 - \frac{(s_{12}^2 + s_{12}^2)}{2} k^2 \right) \right\} - \\ & - \delta_2^2 \left\{ \frac{3\omega_{m3} \gamma^2 k^2}{16\rho} (\omega^2 - s_{12}^2 k^2) \left(\omega^2 - \frac{(s_{12}^2 + 2s_{11}^2)}{3} k^2 \right) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Случай: $\mathbf{k} \parallel \langle 111 \rangle$

$$\begin{aligned} & (\omega^2 - s_{13}^2 k^2)[(\omega^2 - s_{13}^2 k^2)(\omega^2 - s_{13}^2 k^2)(\omega^2 - \gamma^2 M_0^2 \omega_{m2} \omega_{m3}) - \\ & - \delta_1^2 \left\{ \frac{24\omega_{m2} \gamma^2 k^2}{\rho} (\omega^2 - s_{13}^2 k^2) \right\} - \delta_2^2 \left\{ \frac{\omega_{m3} \gamma^2 k^2}{4\rho} (\omega^2 - (s_{13}^2 + 8s_{13}^2)k^2 / 9) \right\}] = 0. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Фаза 3: $\mathbf{H} \parallel \mathbf{M} \parallel \langle 111 \rangle$ Случай: $\mathbf{k} \parallel \langle 100 \rangle$

$$\begin{aligned}
& (\omega^2 - s_1^2 k^2)[(\omega^2 - s_1^2 k^2)(\omega^2 - s_1^2 k^2)(\omega^2 - \gamma^2 M_0^2 \omega_{m4}^2) - \\
& - \delta_1^2 \left\{ \frac{32 \omega_{m4} \gamma^2 k^2}{\rho} (\omega^2 - s_1^2 k^2) \right\} - \delta_2^2 \left\{ \frac{\omega_{m4} \gamma^2 k^2}{9 \rho} (\omega^2 - s_1^2 k^2) \right\}] = 0.
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Случай: $\mathbf{k} \parallel \langle 110 \rangle$

$$\begin{aligned}
& (\omega^2 - s_1^2 k^2)(\omega^2 - s_2^2 k^2)(\omega^2 - s_2^2 k^2)(\omega^2 - \gamma^2 M_0^2 \omega_{m4}^2) - \\
& - \delta_1^2 \left\{ \frac{32 \omega_{m4} \gamma^2 k^2}{\rho} (\omega^2 - s_1^2 k^2) \left(\omega^2 - \frac{(3s_{12}^2 + s_{12}^2)}{4} k^2 \right) \right\} - \\
& - \delta_2^2 \left\{ \frac{\omega_{m4} \gamma^2 k^2}{12 \rho} (\omega^2 - s_2^2 k^2) \left(\omega^2 - \frac{(s_{12}^2 + 2s_{11}^2)}{3} k^2 \right) \right\} - \\
& - \delta_1 \delta_2 \left\{ \frac{4 \omega_{m4} \gamma^2 k^2}{3 \rho} (\omega^2 - s_1^2 k^2) (\omega^2 - s_2^2 k^2) \right\} = 0.
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Случай: $\mathbf{k} \parallel \langle 111 \rangle$

$$\begin{aligned}
& (\omega^2 - s_1^2 k^2)(\omega^2 - s_3^2 k^2)[(\omega^2 - s_3^2 k^2)(\omega^2 - \gamma^2 M_0^2 \omega_{m4}^2) - \\
& - \delta_1^2 \left\{ \frac{32 \omega_{m4} \gamma^2 k^2}{\rho} \right\} - \delta_2^2 \left\{ \frac{\omega_{m4} \gamma^2 k^2}{18 \rho} \right\} - \delta_1 \delta_2 \left\{ \frac{8 \omega_{m4} \gamma^2 k^2}{3 \rho} \right\}] = 0.
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Выражения (1.16)–(1.24) представляют собой законы дисперсии связанных магнитоупругих волн для ферромагнетика кубической симметрии в общем виде. По своей структуре эти дисперсионные уравнения имеют стандартный вид [3, 4], а при пренебрежении магнитоупругим взаимодействием ($\delta_i \rightarrow 0$) распадаются на классические законы дисперсии для спиновых волн [3] и упругих волн в кубических кристаллах [17].

Расчитанные законы дисперсии связанных магнитоупругих волн для ферромагнетика кубической симметрии (1.16)–(1.24) дают возможность оценить влияние магнитной подсистемы на упругие свойства кристалла, а именно на соответствующие упругие модули. Из полученных законов дисперсии легко видеть, что магнитоупругое взаимодействие с первым и третьим поперечным звуком имеет место для всех равновесных направлений магнитного момента в кубическом ферромагнетике, в отличие от других звуковых мод. Для большей наглядности представим таблицу, в которой отображено наличие магнитоупругого взаимодействия для каждой звуковой моды в зависимости от направления магнитного момента ферромагнетика. Важно заметить, что использование формы записи (1.4) магнитоупругой энергии дает возможность четко определить часть этой энергии (то есть константу δ_i), которая отвечает за взаимодействие с определенной звуковой модой (в отличие от класси-

ческой формы записи, которая использовалась, например, в [4]), это также удобно отобразить в приведенной ниже таблице 1.1. Таким образом, в случае наличия магнитоупругого взаимодействия для соответствующей звуковой моды, в таблице будем указывать магнитоупругую константу, которая характеризует это взаимодействие.

Анализ законов дисперсии (1.16)–(1.24) показывает, что в них никаким образом не входит константа δ_0 , а следовательно, не учитывается влияние равновесной части магнитоупругой энергии. Действительно при рассмотрении динамических явлений (магнитоупругий резонанс) влияние этого слагаемого не может быть учтено. Теоретическая модель учета влияния равновесной части магнитоупругой энергии представлена в работе [24].

Таблица 1.1

**Взаимодействие звуковых мод со спиновыми волнами
в ферромагнетике кубической симметрии**

Звуковая мода и направление волнового вектора	Фаза 1: $\mathbf{H} \parallel \mathbf{M} \parallel \langle 001 \rangle$	Фаза 2: $\mathbf{H} \parallel \mathbf{M} \parallel \langle 101 \rangle$	Фаза 3: $\mathbf{H} \parallel \mathbf{M} \parallel \langle 111 \rangle$
s_{11} $\mathbf{k} \parallel \langle 100 \rangle$	Не взаимодействует	δ_1	δ_1
s_{11} $\mathbf{k} \parallel \langle 100 \rangle$	δ_2	δ_2	δ_2
s_{11} $\mathbf{k} \parallel \langle 110 \rangle$	δ_2	δ_2	δ_2
s_{12} $\mathbf{k} \parallel \langle 110 \rangle$	Не взаимодействует	δ_1, δ_2	δ_1, δ_2
s_{12} $\mathbf{k} \parallel \langle 110 \rangle$	Не взаимодействует	δ_1	δ_1
s_{13} $\mathbf{k} \parallel \langle 111 \rangle$	δ_2	δ_2	Не взаимодействует
s_{13} $\mathbf{k} \parallel \langle 111 \rangle$	δ_2	δ_1, δ_2	δ_1, δ_2

Константа δ_1 характеризует влияние магнитной подсистемы на второй поперечный звук и, соответственно, на упругий модуль C' . Из полученных законов дисперсии легко видеть, что, как и было показано в работе [16], взаимодействие с этой звуковой модой не может быть описано в фазе 1. Константа δ_2 , в свою очередь, характеризует влияние магнитной подсистемы на первый поперечный звук и модуль C_{44} .

1.2. Взаимодействие первого поперечного звука со спиновыми волнами в сплавах с эффектом памяти формы

Как видно из табл. 1.1, описать первый поперечный звук возможно при двух направлениях волнового вектора упругих колебаний: вдоль оси четвертого порядка ($\mathbf{k} \parallel \langle 100 \rangle$) и вдоль диагонали грани куба ($\mathbf{k} \parallel \langle 110 \rangle$). Влияние магнитной подсистемы на первый поперечный звук и, соответственно, на упругий модуль C_{44} можно учесть, рассматривая магнитоупругий резонанс на частоте $\omega_{ph} = (C_{44} / \rho)^{1/2} k$. При этом рассчитанные выше законы дисперсии переходят в следующее дисперсионное уравнение, которое имеет общий вид для всех направлений магнитного момента ферромагнетика:

$$(\omega^2 - \omega_{ph}^2)(\omega^2 - \omega_{sw}^2) - \delta_2^2 \zeta = 0, \quad (1.25)$$

где ω_{sw} – частота несвязанных спиновых волн, ζ – коэффициент магнитоупругого взаимодействия. Значения этих величин зависят от направления магнитного момента ферромагнетика и направления волнового вектора коллективных волн и представлены в таблице 1.2.

Таблица 1.2

Коэффициент магнитоупругого взаимодействия с первым поперечным звуком для разных основных состояний кубического ферромагнетика

Направление волнового вектора	Фаза 1: $\mathbf{H} \parallel \mathbf{M} \parallel \langle 001 \rangle$ $\omega_{sw} = \gamma M_0 \omega_{m1}$	Фаза 2: $\mathbf{H} \parallel \mathbf{M} \parallel \langle 101 \rangle$ $\omega_{sw} = \gamma M_0 (\omega_{m2} \omega_{m3})^{1/2}$	Фаза 3: $\mathbf{H} \parallel \mathbf{M} \parallel \langle 111 \rangle$ $\omega_{sw} = \gamma M_0 \omega_{m4}$
$\mathbf{k} \parallel \langle 100 \rangle$	$\xi = \frac{\omega_{m1} \gamma^2 k^2}{4\rho}$	$\xi = \frac{\omega_{m3} \gamma^2 k^2}{8\rho}$	$\xi = \frac{\omega_{m4} \gamma^2 k^2}{9\rho}$
$\mathbf{k} \parallel \langle 110 \rangle$	$\xi = \frac{\omega_{m1} \gamma^2 k^2}{4\rho}$	$\xi = \frac{\omega_{m3} \gamma^2 k^2}{16\rho}$	$\xi = \frac{\omega_{m4} \gamma^2 k^2}{36\rho}$

Решение уравнения (1.25) имеет следующий вид:

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \omega_{ph}^2 + \omega_{sw}^2 \pm [4\zeta\delta_2^2 + (\omega_{ph}^2 - \omega_{sw}^2)^2]^{1/2}. \quad (1.26)$$

Этот закон дисперсии состоит из двух ветвей: квазимагнитной и квазифононной (см. рис. 1.1). Из решения (1.26) легко видеть, что при приближении системы к магнитоупругому резонансу $\omega_{sw} \rightarrow \omega_{ph}$ именно величины ζ и δ_2 определяют «расталкивание» квазимагнитной и квазифононной ветвей.

Для количественной оценки полученных результатов представим графически (рис. 1.1) полученный закон дисперсии (1.26) для ферромагнитного сплава *NiMnGa*, поскольку именно этот сплав является одним из наиболее интересных представителей материалов с эффектом памяти формы. В нем в окрестности комнатной температуры происходит мартенситный фазовый переход из кубической фазы в тетрагональную [25].

При расчетах для сплава *NiMnGa* выбраны известные экспериментальные значения констант анизотропии в кубической фазе (аустенит) [26]: $K_1 = 2,7 \times 10^4$ эрг/см³, $K_2 = -6,1 \times 10^4$ эрг/см³, что отвечает фазе 1, и значения намагниченности насыщения $M_0 = 600$ Гс и плотности $\rho \approx 8$ г/см³. Значение константы неоднородного обменного взаимодействия можно оценить исходя из выражения [3]: $\alpha \cong (k_B T_c A^2 M_0) / \mu_B$, где $T_c = 360$ К – температура Кюри [17], $A = 0,41 \times 10^{-8}$ см – расстояние между магнитными атомами [17], μ_B – магнетон Бора, k_B – константа Больцмана. Внешнее магнитное поле должно быть достаточным для того, чтобы выполнялись условия существования основных состояний: $\omega_{mi} \geq 0$ (где $i = 1, 2, 3, 4$), а также отвечать условиям экспериментальных исследований, которые обычно проводят на таких материалах, поэтому выбрано $H = 1000E$. Значения упругих модулей также взяты для случая аустенита $C_{44} = 40$ ГПа, $C' = 14$ ГПа [27]. Значение константы магнитоупругого взаимодействия δ_2 на сегодняшний день не оценивалось. Исходя из того, что она должна быть не меньше чем δ_1 ($\delta_1 \sim 10^7$ эрг/см³ [23]), для большей наглядности взято $\delta_2 \sim 10^9$ эрг/см³.

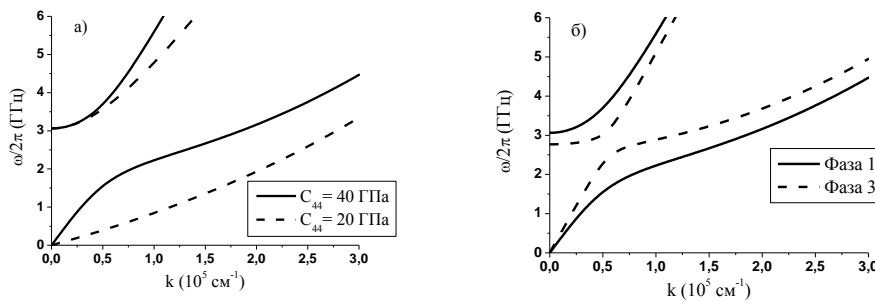


Рис. 1.1. Закон дисперсии магнитоупругих волн:

- а) – в основном состоянии $\mathbf{H} \parallel \mathbf{M} \parallel \langle 001 \rangle$ для двух значений модуля C_{44} ,
- б) в основных состояниях $\mathbf{H} \parallel \mathbf{M} \parallel \langle 001 \rangle$ и $\mathbf{H} \parallel \mathbf{M} \parallel \langle 111 \rangle$ для $C_{44} = 40$ ГПа

Коэффициент магнитоупругого взаимодействия спиновых волн и первого поперечного звука ζ зависит от направления магнитного мо-

мента ферромагнетика (см. табл. 1.2 и рис. 1.1 (б)). Наиболее сильно такое взаимодействие проявляется в основном состоянии $\mathbf{H} \parallel \mathbf{M} \parallel \langle 001 \rangle$. Также оказывается, что в основных состояниях $\mathbf{H} \parallel \mathbf{M} \parallel \langle 101 \rangle$ и $\mathbf{H} \parallel \mathbf{M} \parallel \langle 111 \rangle$ коэффициент магнитоупругого взаимодействия зависит и от направления волнового вектора коллективных колебаний (табл. 1.2).

Коллективные колебания спиновых волн и первого поперечного звука описываются дисперсионным уравнением (1.26), которое имеет одинаковый характер для каждого направления магнитного момента ферромагнетика. Из (1.26) следует, что при резком уменьшении упругого модуля C_{44} значительно возрастает магнитоупругое взаимодействие.

На рис. 1.1 (а) на примере сплава *NiMnGa* показано, что уменьшение упругого модуля C_{44} вдвое уже приводит к значительному «расталкиванию» квазимагнитной и квазифононной ветвей закона дисперсии. Такое поведение квазифононной моды становится причиной того, что при резонансных методах измерения могут быть получены еще более заниженные значения упругого модуля C_{44} .

1.3. Взаимодействие второго поперечного звука со спиновыми волнами в сплавах с эффектом памяти формы

Как отмечалось выше, характерным свойством ферромагнитных сплавов с эффектом памяти формы семьи *NiMnGa* есть мартенситное преобразование, которое сопровождается спонтанной деформацией кристаллической решетки и выраженным смягчением (уменьшением) упругого модуля сдвига C' [6, 7, 11, 12], именно поэтому звуковую моду, которая характеризуется этим упругим модулем $s_{r2}^2 = C' / \rho$, еще называют «мягкой» модой.

Волновой вектор упругих колебаний в случае распространения второго поперечного звука направлен вдоль диагонали грани куба ($\mathbf{k} \parallel \langle 110 \rangle$). Влияние магнитной подсистемы на второй поперечный звук и соответственно на упругий модуль C' можно описать рассматривая магнито-акустический резонанс на частоте $\omega_{ph} = (C' / \rho)^{1/2} k$. Тогда законы дисперсии (1.20) и (1.23) переходят в дисперсионное уравнение, которое имеет общий вид для двух направлений магнитного момента кристалла $\mathbf{M} \parallel \langle 101 \rangle$ и $\mathbf{M} \parallel \langle 111 \rangle$:

$$(\omega^2 - \omega_{ph}^2)(\omega^2 - \omega_{sw}^2) - \delta_1^2 \zeta = 0, \quad (1.27)$$

где ω_{sw} – частота несвязанных спиновых волн, ζ – коэффициент магнитоупругого взаимодействия. Значения этих величин зависят от направления магнитного момента ферромагнетика и представлены в таблице 1.3.

Таблица 1.3

**Коэффициент магнитоупругого взаимодействия
со вторым поперечным звуком для разных основных состояний
кубического ферромагнетика**

Направление волнового вектора	Фаза 2: $\mathbf{H} \parallel \mathbf{M} \parallel \langle 101 \rangle$ $\omega_{sw} = \gamma M_0 (\omega_{m2} \omega_{m3})^{1/2}$	Фаза 3: $\mathbf{H} \parallel \mathbf{M} \parallel \langle 111 \rangle$ $\omega_{sw} = \gamma M_0 \omega_{m4}$
$\mathbf{k} \parallel \langle 110 \rangle$	$\xi = \frac{9\omega_{m2}\gamma^2 k^2}{\rho}$	$\xi = \frac{24\omega_{m4}\gamma^2 k^2}{\rho}$

Решение уравнения (1.27) имеет вид, аналогичный выражению (1.26):

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \omega_{ph}^2 + \omega_{sw}^2 \pm [4\zeta\delta_1^2 + (\omega_{ph}^2 - \omega_{sw}^2)^2]^{1/2} . \quad (1.28)$$

Исходя из имеющихся экспериментальных данных для констант магнитной анизотропии сплава *NiMnGa*, которые указаны выше [26], в окрестности температуры мартенситного преобразования равновесное направление вектора намагниченности монокристалла совпадает с направлением [100]. Но в этом случае взаимодействие мягкой моды с магнитными колебаниями отсутствует (см. табл. 1.1). В обычных условиях эксперимента внешнее магнитное поле является довольно сильным, чтобы выстроить направление вектора намагниченности. Поэтому рассмотрим случай, когда магнитное поле параллельно кристаллографическому направлению [101]. Как показывает условие минимизации магнитной энергии (1.2), магнитное поле стабилизирует магнитный момент в направлении $\mathbf{M} \parallel [101]$, когда выполняется условие $H > H_1 \equiv 2K_1 / M_0$. Для упомянутых выше экспериментальных значений значение характеристического поля H_1 близко 90 Э.

Решение (1.28) описывает дисперсию квазизвуковых (ω_-) и квазиспиновых (ω_+) волн в кристалле. Квазизвуковая мода безщелевая, в то время как спектр квазиспиновой волны имеет щель $\omega_0 = \gamma(H - H_1)^{1/2}(H + H_2)^{1/2}$, где $H_2 \equiv (K_1 + K_2 / 2) / M_0 \approx 100$ Э, они изображены на рисунке 1.2. Из-за большого расхождения в значениях упругого модуля сдвига, который присущий для разных сплавов *NiMnGa* (значения $C'_{\min} \sim 1 \text{ ГПа} - 60 \text{ ГПа}$ были получены при температуре мартенситного преобразования для квазистехиометрических сплавов [6, 7, 11, 12]), на рисунке 1.2 (а) показаны спектры, вычисленные для трех

разных значений упругого модуля сдвига. Значение поля $H = 3300$ Э отвечает частоте $\omega_0 / 2\pi = 9.1$ ГГц.

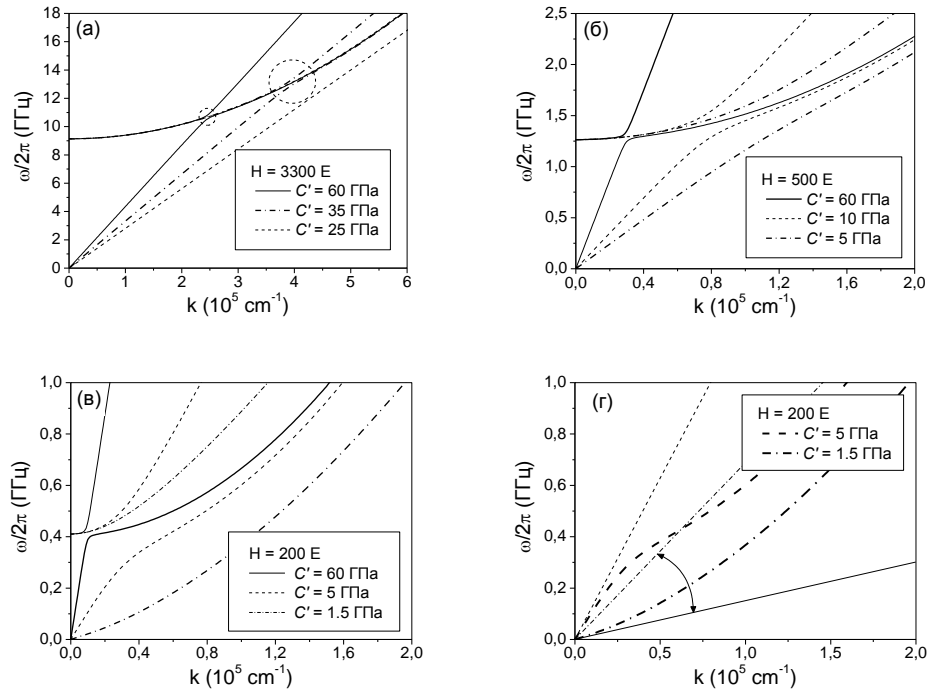


Рис. 1.2. Законы дисперсии связанных магнитоупругих волн: дисперсионные кривые, представленные на (а), (б), (в), вычислены для разных значений упругого модуля сдвига и внешнего магнитного поля ($H \parallel [101]$); дисперсионные кривые, которые представлены на (г), были рассчитаны для случаев, когда $H \parallel [001]$ (тонкие линии) и $H \parallel [101]$ (жирные линии). Наклон тонкой сплошной линии отвечает скорости звука, которая уменьшается за счет магнитоупругого взаимодействия

Рассмотрим случай сильного внешнего магнитного поля (рис. 1.2. (а)). Магнитоупругое взаимодействие в кристалле с модулем сдвига 60 ГПа в этом случае проявляет себя в узком интервале значений волнового вектора, который включает в себя резонансное значение $k_0 \approx 2.4 \times 10^5 \text{ см}^{-1}$. Далеко от резонансного значения магнитоупругое взаимодействие не меняет заметно дисперсионные кривые звуковых и спиновых волн. В кристалле с модулем сдвига 35 ГПа взаимодействие между звуковыми и спиновыми волнами приводит к сильному «расталкиванию» ветвей квазизвукового и квазиспинового спектра и, поэтому, проявляет себя в более широком диапазоне значений волновых векторов $\Delta k \sim 10^5 \text{ см}^{-1}$ («расталкивание» фор-

мально определяется как $\Delta\omega \stackrel{def}{=} \omega_+(k_0) - \omega_-(k_0)$, где k_0 удовлетворяет уравнению $\omega_{sw}(k) = \omega_{ph}(k)$. В диапазоне Δk наблюдается заметная нелинейность квазизвуковой ветви закона дисперсии. В кристалле с модулем сдвига 25 ГПа магнитоупругое взаимодействие не меняет заметно закон дисперсии коллективных колебаний, потому что квазизвуковая ветвь уходит далеко от квазиспиновой. Модуль сдвига семейства сплавов $NiMnGa$ уменьшается от значений в несколько десятков гигапаскалей до значения порядка одного гигапаскаля при приближении температуры сплава к температуре мартенситного преобразования. Таким образом, влияние магнитоупругого взаимодействия на волновые спектры наиболее ярко проявляется в определенном интервале температур выше температуры мартенситного преобразования. В этом интервале величина упругого модуля сдвига довольно близка к 35 ГПа .

Стандартные экспериментальные методы позволяют наблюдать магнитоупругие резонансные колебания для разных частотных диапазонов (то есть при разном внешнем магнитном поле). Снижение резонансной величины поля к значению $H = 500 \text{ E}$ приводит к смещению области резонанса Δk в направлении более низких значений волнового вектора (см. рис. 1.2 (б)). В этом случае большое «расталкивание» ветвей квазизвукового и квазиспинового спектра заметно даже для очень низких значений модуля сдвига ($C' = 5 \text{ ГПа}$).

Таким образом, нижняя часть температурного интервала существенного магнитоупругого взаимодействия колебаний может достигать температуры мартенситного преобразования.

Еще одно проявление магнитоупругого взаимодействия показано на рис. 1.2 (в), который иллюстрирует сильную нелинейность начального участка квазизвуковой дисперсионной кривой. Эта особенность хорошо заметна в случае кристаллов с $C' < 5 \text{ ГПа}$, если частотная щель ω_0 сравнима с величиной отталкивания $\Delta\omega$. Как уже было сказано выше, изменение закона дисперсии квазизвуковой моды было выявлено давно в непосредственной близости от спинпереориентационных фазовых переходов [28, 29]. Насколько нам известно, возможность наблюдения этого эффекта при приближении к мартенситным фазовым преобразованиям еще не обсуждалась.

Рисунок 1.2 (г) иллюстрирует отличие в законах дисперсии квазизвуковых волн, вызванное переориентацией внешнего магнитного поля, приложенного к монокристаллическому образцу сплава $NiMnGa$. Жирные линии представляют дисперсионные кривые, которые отвечают направлению поля $\mathbf{H} \parallel [101]$ (см. также рис. 1.2 (в)), в то время как тонкие линии отвечают случаю $\mathbf{H} \parallel [001]$. Как было показано выше, изменение направления вектора магнитного поля от $[101]$ к $[001]$ (или $[100]$) «выключает» влияние магнитоупругого взаимодействия на мягкий упругий модуль. Здесь тонкими пунктирными и штрих-пунктирными ли-

ниями показаны линейные дисперсионные законы, вычисленные для случаев, когда «свободные» звуковые волны распространяются в кристаллах с упругими модулями сдвига $C' = 5 \text{ ГПа}$ и $C' = 1,5 \text{ ГПа}$, соответственно. Последний случай наиболее интересный, потому что раскрывает возможность резкого изменения дисперсионной зависимости, вызванного переориентацией внешнего магнитного поля. Если поле направлено вдоль [001], закон дисперсии имеет вид $\omega_{ph} = (C'/\rho)^{1/2} k$. В случае, если поле параллельно [101], закон дисперсии квазизвуковой моды может быть представлен как $\tilde{\omega}_{ph} = c_1 k + c_2 k^2 + \dots$. Коэффициент c_1 — это тангенс угла наклона сплошной прямой линии, изображенной на рис. 1.2 (г). «Эффективный» модуль сдвига, который может быть определен из ультразвуковых или DMA (Dynamic Mechanical Analysis) экспериментов, выражается через этот коэффициент как $C^{eff} = \rho c_1^2$. Тщательное рассмотрение начального участка дисперсионной кривой показывает, что дисперсия квазизвуковой волны с длиной волны порядка 1 см практически линейная и характеризуется эффективным модулем $C^{eff} \approx 70 \text{ МПа}$. Очевидно, такое расчетное значение эффективного модуля слишком мало, чтобы быть вымеренным экспериментально, кроме того, в реальных условиях эксперимента нельзя полностью избежать смешивания разных типов волн. Однако полученные результаты расчетов могут объяснить аномально низкие экспериментальные значения упругих модулей, которые сообщались для сплавов *NiMnGa* [6, 7, 11].

Если вектор магнитного поля параллельный направлению [101], сильное влияние магнитоупругого взаимодействия на мягкую упругую моду можно наблюдать даже в магнитном поле $H = 500 \text{ Э}$. Чтобы проиллюстрировать это утверждение, рассмотрим интересный случай аномально мягкого модуля сдвига, который меняется от 5 ГПа к $0,5 \text{ ГПа}$ при приближении температуры к области мартенситного перехода.

В случае если значение модуля сдвига больше чем 4 ГПа , дисперсионные кривые свободных звуковых и спиновых волн пересекаются дважды (см. рис. 1.3 (а)). При этом расталкивание дисперсионных кривых квазизвуковых и квазиспиновых волн хорошо выражено в широком интервале волновых векторов $\Delta k \sim 3 \times 10^5 \text{ см}^{-1}$. Если модуль сдвига равен 4 ГПа , дисперсионные кривые свободных звуковых и спиновых волн касаются в одной точке и расталкивание дисперсионных кривых все еще имеет место (см. рис. 1.3 (б)). Уменьшение модуля сдвига до значения $1,5 \text{ ГПа}$ приводит к существенному сближению квазиспиновой и чисто спиновой дисперсионной кривой; закон дисперсии квазизвуковой волны приближается к линейному, но скорость квазизвуковой волны оказывается меньшей, чем скорость свободной звуковой волны (см. рис. 1.3 (в)). Упругий модуль сдвига пропорционален квадрату скорости звука, следовательно, даже небольшое снижение скорости звука отвечает значительному различию между реальным и эффективным модулем сдвига

$C^{eff} / C' \approx 0.75$. Кроме того, смягчение упругого модуля сдвига приводит к дальнейшему снижению скорости квазизвуковой волны (см. рис. 1.3. (г)) и восстановлению его нелинейности.

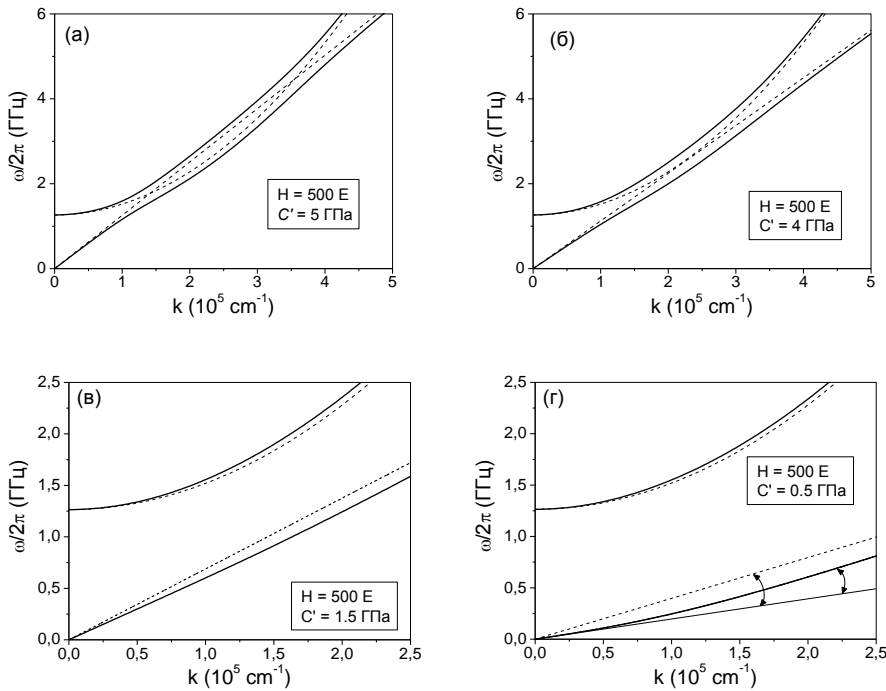


Рис. 1.3. Детальное сравнение дисперсионных кривых связанных магнитоупругих волн (сплошные линии) с кривыми, полученными для свободных спиновых и звуковых волн (штрихованные линии). Эти кривые отвечают направлениям магнитного поля $\mathbf{H} \parallel [101]$ и $\mathbf{H} \parallel [001]$, соответственно

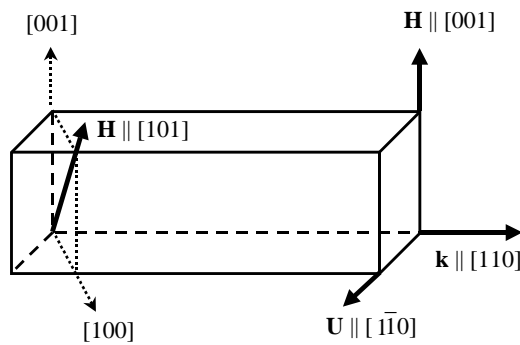


Рис. 1.4. Конфигурация образца в форме призмы, волнового вектора и вектора поляризации звуковой волны, которая подходит для экспериментального наблюдения эффектов магнитоупругого взаимодействия во внешних магнитных полях $\mathbf{H} \parallel [101]$ и $\mathbf{H} \parallel [001]$

Теоретический анализ спектров связанных волн в ферромагнитных сплавах с эффектом памяти формы раскрывает возможность аномально сильной связи спиновых волн с мягкой упругой модой при приближении к температуре мартенситного преобразования. Основным эффектом, полученным в результате этого анализа, является значительное снижение скорости второго поперечного звука s_{t2} и упругого модуля сдвига в монокристалле $NiMnGa$. Снижение можно наблюдать экспериментально, меняя направление внешнего магнитного поля от $[001]$ к $[101]$. Приемлемая для наблюдения этого эффекта ориентация монокристалла указана на рис. 1.4; направления волнового вектора, магнитного поля и вектора поляризации также показаны на рисунке для наглядности. Образец должен представлять собой сильно удлинённую призму с длинной стороной, направленной вдоль кристаллографического направления $[110]$.

Если магнитное поле направлено вдоль кристаллографического направления $[101]$, частота квазизвуковой волны определяется значением эффективного модуля C^{eff} и длиной образца. Значение эффективного модуля близко к значению упругого модуля сдвига, если последний порядка 5 ГПа (см. рис. 1.2 (г)), если модуль сдвига принимает значения близкие к $1,5 \text{ ГПа}$ или меньшие, то эффективный модуль может достигать значений в 100 МПа (см. рис. 1.2 (г), 1.3 (г)). Типичные длины образца при экспериментах порядка 1 см , следовательно, резонансная частота будет порядка 10^5 Гц , если $C^{eff} \approx C' = 5 \text{ ГПа}$ и близкая к 10^4 Гц при $C^{eff} \approx 100 \text{ МПа}$.

Следует отметить, что если магнитное поле приложено в направлении $[101]$ и величина резонансного поля меньше или равна 500 Э , фонон-магнонная связь проявляет себя в широком интервале волновых векторов. В этом случае магнитоупругое взаимодействие может заметно повлиять на термодинамические свойства ферромагнитных сплавов семейства $NiMnGa$.

2. МАГНИТОУПРУГИЕ ВОЛНЫ В ФЕРРОМАГНЕТИКЕ ОДНООСНОЙ СИММЕТРИИ

2.1. Магнитоупругая щель в одноосном ферромагнетике как проявление эффекта Хиггса

В различных разделах физики известны примеры систем, которые демонстрируют самопроизвольное нарушение симметрии. Это системы, энергия которых обладает некоторой симметрией, в то время как реальное физическое состояние системы, отвечающее частному решению в уравнении движения, этой симметрией не обладает. Такая ситуация имеет место, когда минимуму энергии системы соответствует ряд состояний с непрерыв-

ным параметром вырождения. Причиной нарушения симметрии может быть сколь угодно малое возмущение специального вида [30].

На сегодняшний день хорошо известно, что в магнитоупорядоченных материалах, в спектре спиновых волн возникает магнитоупругая щель, обусловленная взаимодействием спиновых и звуковых волн. В работе [9] было высказано соображение, что образование магнитоупругой щели связано с нарушением симметрии магнитного гамильтониана при введении магнитоупругого взаимодействия, однако конкретный расчет этого утверждения не был предоставлен. В свое время в квантовой теории поля такой эффект был обнаружен Хиггсом [30].

На примере одноосного ферромагнетика последовательно рассмотрим явление возникновения магнитоупругой щели в спектре спиновых волн, которое обусловлено нарушением спонтанной симметрии в спиновой системе.

Напомним в упрощенной модели, как возникает масса у бозонов Хиггса. Так, в книге [30] спонтанное нарушение симметрии системы достигается в результате перехода от потенциальной энергии вида $m^2\varphi^2/2$ к потенциальной энергии, которая имеет вид четной функции с двумя симметричными минимумами. Приведем здесь рассуждения для многокомпонентного поля, которое описывается полевой функцией $\boldsymbol{\varphi}$ ($\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$) и обладает следующим важным свойством: ее потенциальная энергия определяется четными степенями $\boldsymbol{\varphi}$. Эта система обладает непрерывной симметрией вращений, не изменяющей величины φ^2 .

Чтобы получить спонтанное нарушение симметрии, необходимо выбрать потенциальную энергию в виде

$$V(\boldsymbol{\varphi}) = -\frac{\mu^2}{2}(\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\varphi}) + \frac{h^2}{2}(\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\varphi})^2, \quad \boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\varphi} = \sum_a \varphi_a^2. \quad (2.1)$$

Минимум потенциальной энергии здесь отвечает соотношению:

$$\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\varphi} = \varphi_0^2 = \frac{\mu^2}{h^2}. \quad (2.2)$$

Это есть уравнение для n -переменных, не ограничивая общности, выберем решение этого уравнения в виде

$$\boldsymbol{\varphi}_0 = (\varphi_0, 0, \dots, 0), \quad \varphi_0 = \mu/h. \quad (2.3)$$

Теперь произведем сдвиг функции поля $\boldsymbol{\varphi}$ на постоянный вектор $\boldsymbol{\varphi}_0$, удовлетворяющий условию (2.3)

$$\boldsymbol{\varphi}(x) = \boldsymbol{\varphi}_0 + \mathbf{u}(x). \quad (2.4)$$

Тогда получим для потенциальной энергии выражение

$$V(\boldsymbol{\varphi}_0 + \mathbf{u}(x)) = V_0 + \mu^2 u_1^2 + \mu h u_1(\mathbf{u}\mathbf{u}) + \frac{h^2}{4}(\mathbf{u}\mathbf{u})^2. \quad (2.5)$$

В этом выражении квадратичный член присутствует только для компоненты u_1 . Таким образом, в результате нарушения симметрии, которое выражается сдвигом (2.4), сдвинутая компонента u_1 приобретает свободную массу $m_1 = \mu\sqrt{2}$, а остальные компоненты массы не имеют. Очевидно, что симметрия этого решения не относится к симметрии поворота в n -мерном пространстве полевой функции $\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$.

При квантовом рассмотрении смещение на постоянную величину нарушает соотношение коммутации для ферми-частиц и не нарушает для бозе-частиц. Другими словами, механизм возникновения массы при спонтанном нарушении симметрии относится только к бозонам. То обстоятельство, что из всех сортов бозе-частиц только одна приобретает массу, является эффектом Хиггса [30]. Безмассовые частицы называются частицами Голдстоуна.

Такая ситуация имеет место в магнетиках с одноосной симметрией, когда вырожденными являются основные состояния, для которых магнитный момент не направлен вдоль легкой оси [3, 32]. Учет магнитоупругого взаимодействия в одноосном ферромагнетике проводился достаточно давно и при различных условиях [3, 33], однако при этом рассматривалось основное состояние «легкая ось», которое не является вырожденным.

Рассмотрим, как влияет магнитоупругое взаимодействие на спектр спиновых волн в случае вырожденного состояния «легкая плоскость». Энергию одноосного ферромагнетика в отсутствие внешнего магнитного поля можно записать в следующем виде [3]:

$$F_m = \frac{\alpha}{2} \frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial x_i} \frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial x_k} - \frac{1}{2} K_1 \mu_z^2 - \frac{1}{4} K_2 \mu_z^4, \quad (2.6)$$

где α – постоянная неоднородного обменного взаимодействия, K_1 и K_2 – константы одноосной анизотропии, $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{M}/M_0$ – нормированный вектор намагниченности, M_0 – намагниченность насыщения. Здесь размерность энергии имеют константы.

Для того чтобы получить закон дисперсии спиновых волн ферромагнетика необходимо воспользоваться уравнением движения магнитного момента – уравнением Ландау–Лифшица [18]:

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = -\gamma \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{H}_{eff}, \quad (2.7)$$

где $\mathbf{H}_{eff} = -\delta F / \delta \mathbf{M}$ – эффективное магнитное поле, $\gamma = g |\mu_B| / \hbar \approx 2 |\mu_B| / \hbar$ – гиромагнитное отношение.

Используя стандартную методику [3, 32], из уравнения (2.7) можно получить частоты спиновых волн для основных состояний одноосного ферромагнетика. Нас интересует основное состояние «легкая плоскость», когда

намагниченность лежит в базисной плоскости (например, $\mathbf{M} \parallel \langle 100 \rangle$), а условие устойчивости для данного состояния имеет вид: $K_1 < 0$. Это состояние вырождено с непрерывным параметром вырождения, соответствующим повороту в базисной плоскости.

Закон дисперсии в этом случае будет иметь вид:

$$\varphi^2 = \gamma^2 M_0^2 \left(\frac{\alpha k^2}{M_0^2} - \frac{K_1}{M_0^2} \right) \frac{\alpha k^2}{M_0^2}, \quad (2.8)$$

где ω и k – соответственно, частота и волновой вектор спиновой волны.

Такая спиновая волна является голдстоуновским бозоном, поскольку энергия магнона обращается в ноль при $k = 0$. Очевидно, симметрия этого основного состояния для определенного значения намагниченности в базисной плоскости ниже симметрии исходного гамильтониана.

Вырождение снимается при учете внешнего магнитного поля в базисной плоскости (например, $\mathbf{H} \parallel \langle 100 \rangle$):

$$\omega^2 = \gamma^2 M_0^2 \left(\frac{\alpha k^2}{M_0^2} - \frac{K_1}{M_0^2} + \frac{H}{M_0} \right) \left(\frac{\alpha k^2}{M_0^2} + \frac{H}{M_0} \right). \quad (2.9)$$

Но магнитное поле нарушает симметрию гамильтониана, он перестает быть инвариантным относительно поворота вокруг оси симметрии (к энергии (2.6) необходимо добавить слагаемое $-H_x M_x$). Более интересным является рассмотрение случая, когда учитывается возмущение, не меняющее симметрии гамильтониана. Таким возмущением и является магнитоупругое взаимодействие в кристалле.

Для учета магнитоупругого взаимодействия полную энергию ферромагнетика необходимо записать в виде

$$F = F_m + F_e + F_{me}, \quad (2.10)$$

где первое слагаемое – магнитная энергия кристалла, определяется выражением (2.6), второе слагаемое – упругая энергия, которая имеет вид [17]:

$$F_e = \frac{1}{2} C_{11} (E_{xx} + E_{yy})^2 + \frac{1}{2} C_{33} E_{zz}^2 + C_{13} (E_{xx} + E_{yy}) E_{zz} + \quad (2.11)$$

$$+ 2C_{44} (E_{xz} + E_{yz})^2 + \frac{1}{2} C_{66} (E_{xx}^2 + E_{yy}^2 + 2E_{xy}^2),$$

где E_{ik} – компоненты тензора деформаций, C_{ik} – упругие модули второго порядка для одноосного кристалла. Третье слагаемое определяет взаимодействие между магнитной и упругой подсистемами [33, 34]:

$$\begin{aligned}
F_{me} = & \frac{1}{2} B_{11} (\mu_x^2 + \mu_y^2) (E_{xx} + E_{yy}) + \frac{1}{2} B_{13} \mu_z^2 (E_{xx} + E_{yy}) + \\
& + \frac{1}{2} B_{31} (\mu_x^2 + \mu_y^2) E_{zz} + \frac{1}{2} B_{33} \mu_z^2 E_{zz} + \frac{1}{2} B_{44} (\mu_x \mu_z E_{xz} + \mu_y \mu_z E_{yz}) + \\
& + \frac{1}{2} B_{66} (\mu_x^2 E_{xx} + \mu_y^2 E_{yy} + 2\mu_x \mu_y E_{xy}),
\end{aligned} \quad (2.12)$$

где B_{ik} – константы магнитоупругого взаимодействия в случае одноосной симметрии.

Подчеркнем, что полная энергия (2.10) в данном случае остается инвариантной относительно поворотов вокруг оси симметрии. При расчете спектров связанных колебаний необходимо воспользоваться уже двумя уравнениями движения: уравнением Ландау–Лифшица (2.7) и уравнением динамики для вектора смещений \mathbf{U} [3, 17]:

$$\rho \ddot{\mathbf{U}} = - \frac{\delta F}{\delta \mathbf{U}}, \quad (2.13)$$

где ρ – плотность. Фактически мы переходим от чисто спиновых и чисто упругих волн к связанным магнитоупругим колебаниям.

Рассмотрим вырожденное основное состояние «легкая плоскость» $\mathbf{M} \parallel \langle 100 \rangle$ и выясним, как же меняется частота спиновых волн при учете магнитоупругого взаимодействия. В данном основном состоянии имеются отличные от нуля равновесные значения компонент тензора деформаций, которые легко получить из условия $\partial F / \partial E_{ik} = 0$:

$$\begin{aligned}
E_{xx}^0 = & - \frac{B_{66}}{4C_{66}} - \frac{2B_{31}C_{13} - C_{33}(2B_{11} + B_{66})}{4(2C_{13}^2 - C_{33}(2C_{11} + C_{66}))}, \\
E_{yy}^0 = & \frac{B_{66}}{4C_{66}} - \frac{2B_{31}C_{13} - C_{33}(2B_{11} + B_{66})}{4(2C_{13}^2 - C_{33}(2C_{11} + C_{66}))}, \\
E_{zz}^0 = & \frac{B_{31}(2C_{11} + C_{66}) - C_{13}(2B_{11} + B_{66})}{2(2C_{13}^2 - C_{33}(2C_{11} + C_{66}))}.
\end{aligned} \quad (2.14)$$

Аналогично тому, как при нахождении спектра чисто спиновых волн (2.8), рассматриваются малые колебания магнитного момента $\boldsymbol{\mu}$:

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\mu}_0 + \mathbf{m}(\mathbf{r}, t), \quad (2.15)$$

где $\mathbf{m}(\mathbf{r}, t)$ – малые отклонения от равновесного значения $\boldsymbol{\mu}_0 = (0, 0, 1)$, компоненты тензора деформаций также могут быть записаны в виде суммы равновесных значений и малых отклонений от них:

$$E_{ik} = E_{ik}^0 + \varepsilon_{ik}, \quad (2.16)$$

здесь E_{ik}^0 определяются выражениями (2.14), а ε_{ik} – малые отклонения, которые могут быть выражены через вектор смещений \mathbf{U} по формуле [17]:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right). \quad (2.17)$$

Разложим плотность энергии одноосного ферромагнетика по степеням малых отклонений m_i и ε_{ik} , учитывая, что в данном основном состоянии компонента $m_x \approx -(m_y^2 + m_z^2)/2$ – второго порядка малости. Тогда, учитывая члены до второго порядка малости по малым отклонениям, получим:

$$F_{me2} = B_{66} e_{xy} m_y + \frac{1}{2} B_{44} e_{xz} m_z, \quad (2.18)$$

$$F_{m2} = \frac{B_{66}}{4C_{66}} m_y^2 - \frac{1}{2} (K_{me} + K_1) m_z^2, \quad (2.19)$$

где $K_{me} = (B_{11} - B_{13} + B_{66})E_{xx}^0 + (B_{11} - B_{13})E_{yy}^0 + (B_{31} - B_{33})E_{zz}^0$, здесь также мы отбрасываем равновесную энергию нулевого порядка малости, поскольку она не дает вклада в динамические уравнения. Выражение для упругой энергии (2.11) сохранит свой вид, произойдет лишь замена E_{ik} на ε_{ik} .

Из выражения (2.19) для разложения магнитной энергии видно, что должна возникнуть магнитоупругая щель, поскольку коэффициент при m_y отличен от нуля. Важно отметить, что эта щель возникает исключительно из-за магнитоупругого взаимодействия. Коэффициент при m_z показывает, что также происходит перенормировка константы анизотропии.

Подставляя разложение полной энергии в динамические уравнения (2.7) и (2.13) и переходя к компонентам Фурье по времени t и координатам \mathbf{r} для малых отклонений $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 \exp i(\mathbf{kr} - \omega t)$, $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 \exp i(\mathbf{kr} - \omega t)$, можно получить законы дисперсии связанных магнитоупругих колебаний [3, 32]. Однако нас в данном случае интересуют изменения, которые произойдут в спектре квазиспиновых волн.

Не останавливаясь на стандартных вычислениях, приведем результаты для частот квазиспиновых волн в данном основном состоянии, которые можно получить из закона дисперсии связанных магнитоупругих колебаний:

$$\omega^2 = \gamma^2 M_0^2 \left(\frac{\alpha k^2}{M_0^2} - \frac{K_1}{M_0^2} - \frac{K_{me}}{M_0^2} \right) \left(\frac{\alpha k^2}{M_0^2} + \frac{B_{66}^2}{2M_0^2 C_{66}} \right). \quad (2.20)$$

Из выражения (2.20) легко видеть, что при $k = 0$ частота спиновых волн отлична от нуля:

$$\omega^2 = \gamma^2 \left(-\frac{K_1}{M_0^2} - \frac{K_{me}}{M_0^2} \right) \frac{B_{66}^2}{2C_{66}}, \quad (2.21)$$

это и есть магнитоупругая щель, которая появляется в основном состоянии «легкая плоскость» одноосного ферромагнетика при учете магнитоупругого взаимодействия.

Из полученных результатов следует, что после учета магнитоупругого взаимодействия снимается вырождение в изначально вырожденном основном состоянии «легкая плоскость» одноосного ферромагнетика и исчезают безмассовые магноны (голдстоуновские бозоны). То есть магнитоупругое взаимодействие «превращает» Голдстоуновскую моду в бозон Хиггса. Также важно отметить, что появление магнитоупругой щели не зависит от направлений волнового вектора упругой волны.

Выражение (2.20) показывает, что магнитоупругое взаимодействие снимает вырождение основного состояния даже в случае изотропного магнетика ($K_1 = 0$), что находится в полном соответствии с общими принципами, изложенными в работе [9]. Таким образом, магнитоупругое взаимодействие приводит к основному состоянию, симметрия которого ниже симметрии гамильтониана.

2.2. С п е к т р ы с в я з а н н ы х м а г н и т о у п р у г и х в о л н в о д н о о с н о м ф е р р о м а г н е т и к е

Из условия минимизации магнитной части энергии (2.6) легко показать, что в одноосном ферромагнетике в отсутствие внешнего магнитного поля ($\mathbf{H} = 0$) существует три основных состояния для вектора намагниченности: вдоль легкой оси намагничивания $\mathbf{M} \parallel \langle 001 \rangle$ – фаза «легкая ось» (условие существования $K_1 + K_2 > 0$); в базисной плоскости (например $\mathbf{M} \parallel \langle 100 \rangle$) – фаза «легкая плоскость» (условие существования $K_1 < 0$); под некоторым углом θ к легкой оси намагничивания, который определяется выражением $\cos^2 \theta = -\frac{K_1}{K_2}$, – «угловая фаза» (условия существования $K_2 < 0$, $0 < K_1 < -K_2$) [32]. В реальных экспериментах по исследованию упругих и магнитных свойств внешнего магнитного поля \mathbf{H} , как правило, направляют вдоль направлений $\langle 001 \rangle$ и $\langle 100 \rangle$, следовательно, ниже будем рассматривать соответствующие основные состояния «легкая ось» и «легкая плоскость».

Для того, чтобы найти законы дисперсии связанных магнитоупругих волн, воспользуемся уравнениями динамики для вектора намагниченности \mathbf{m} (2.7) и вектора смещений частиц \mathbf{U} (2.13).

Для проведения дальнейших расчетов разложим плотность полной энергии (2.10) по степеням малых отклонений m_i и ε_{ik} , и, подставив их в динамические уравнения (2.7) и (2.13), проведем их линеаризацию. Перейдем в этих уравнениях к компонентам Фурье по времени t и координатам \mathbf{r} для малых отклонений $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 \exp i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)$, $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 \exp i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)$, где ω – частота, а \mathbf{k} – волновой вектор коллективных волн. Тогда уравнения (2.7) и (2.13) приводят к системе из 6-ти уравнений для компонент векторов \mathbf{m}_0 и \mathbf{U}_0 .

Приведем полученные системы уравнений для двух основных состояний одноосного ферромагнетика.

Фаза «легкая ось»: $\mathbf{H} \parallel \mathbf{M} \parallel \langle 001 \rangle$

Равновесные значения компонент тензора деформаций в этом основном состоянии имеют вид:

$$E_{xx}^0 = E_{yy}^0 = \frac{B_{13}C_{33} - B_{33}C_{13}}{2(2C_{13}^2 - C_{33}(2C_{11} + C_{66}))}, \quad E_{zz}^0 = \frac{-B_{13}C_{13} - B_{33}(2C_{11} + C_{66})}{2(2C_{13}^2 - C_{33}(2C_{11} + C_{66}))}. \quad (2.22)$$

Система динамических уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} &(\rho\omega^2 - (C_{11} + C_{66})k_x^2 - \frac{1}{2}C_{66}k_y^2 - C_{44}k_z^2)U_{0x} - ((C_{11} + \frac{1}{2}C_{66})k_xk_y + \\ &+ C_{44}k_z^2)U_{0y} - ((C_{13} + C_{44})k_xk_z + C_{44}k_yk_z)U_{0z} + \\ &+ i\frac{1}{4}B_{44}k_zm_{0x} + iB_{13}k_xm_{0z} = 0; \end{aligned} \quad (2.23.1)$$

$$\begin{aligned} &-((C_{11} + \frac{1}{2}C_{66})k_xk_y + C_{44}k_z^2)U_{0x} + (\rho\omega^2 - \frac{1}{2}C_{66}k_x^2 - (C_{11} + C_{66})k_y^2 - \\ &- C_{44}k_z^2)U_{0y} - ((C_{13} + C_{44})k_yk_z + C_{44}k_xk_z)U_{0z} + \end{aligned} \quad (2.23.2)$$

$$\begin{aligned} &+ i\frac{1}{4}B_{44}k_zm_{0y} + iB_{13}k_y m_{0z} = 0; \\ &-((C_{13} + C_{44})k_xk_z + C_{44}k_yk_z)U_{0x} - ((C_{13} + C_{44})k_yk_z + \\ &+ C_{44}k_xk_z)U_{0y} + (\rho\omega^2 - C_{44}(k_x + k_y)^2 - C_{33}k_z^2)U_{0z} + \end{aligned} \quad (2.23.3)$$

$$\begin{aligned} &+ i\frac{1}{4}B_{44}k_xm_{0x} + i\frac{1}{4}B_{44}k_y m_{0y} + iB_{33}k_y m_{0z} = 0; \\ &-i\frac{1}{4M_0}\gamma B_{44}k_xU_{0y} - i\frac{1}{4M_0}\gamma B_{44}k_yU_{0z} + i\omega m_{0x} - \gamma M_0\omega_{m\parallel}m_{0y} = 0; \end{aligned} \quad (2.23.4)$$

$$i \frac{1}{4M_0} \gamma B_{44} k_z U_{0x} + i \frac{1}{4M_0} \gamma B_{44} k_x U_{0z} + \gamma M_0 \omega_{m\parallel} m_{0x} + i \omega m_{0y} = 0; \quad (2.23.5)$$

$$i \omega m_{0z} = 0. \quad (2.23.6)$$

В выражениях (2.23.4) и (2.23.5) введены следующие обозначения:

$$\omega_{m\parallel} = \frac{\alpha k^2}{M_0^2} + \frac{H}{M_0} + \frac{K_{me}}{M_0^2} + \frac{K_1}{M_0^2} + \frac{K_2}{M_0^2}, \quad (2.24)$$

где $K_{me} = (B_{11} - B_{13} + B_{66})E_{xx}^0 + (B_{11} - B_{13})E_{yy}^0 + (B_{31} - B_{33})E_{zz}^0$.

Фаза «легкая плоскость»: $\mathbf{H} \parallel \mathbf{M} \parallel \langle 100 \rangle$

Равновесные значения компонент тензора деформаций в этом основном состоянии определяются выражениями (2.14).

Система динамических уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} & (\rho \omega^2 - (C_{11} + C_{66})k_x^2 - \frac{1}{2}C_{66}k_y^2 - C_{44}k_z^2)U_{0x} - ((C_{11} + \frac{1}{2}C_{66})k_x k_y + \\ & + C_{44}k_z^2)U_{0y} - ((C_{13} + C_{44})k_x k_z + C_{44}k_y k_z)U_{0z} + \\ & + i(B_{11} + B_{66})k_x m_{0x} + i \frac{1}{2}B_{66}k_y m_{0y} + i \frac{1}{4}B_{44}k_z m_{0z} = 0; \end{aligned} \quad (2.25.1)$$

$$\begin{aligned} & -((C_{11} + \frac{1}{2}C_{66})k_x k_y + C_{44}k_z^2)U_{0x} + (\rho \omega^2 - \frac{1}{2}C_{66}k_x^2 - (C_{11} + C_{66})k_y^2 - \\ & - C_{44}k_z^2)U_{0y} - ((C_{13} + C_{44})k_y k_z + C_{44}k_x k_z)U_{0z} + \\ & + iB_{11}k_y m_{0x} + i \frac{1}{2}B_{66}k_x m_{0y} = 0; \end{aligned} \quad (2.25.2)$$

$$\begin{aligned} & -((C_{13} + C_{44})k_x k_z + C_{44}k_y k_z)U_{0x} - ((C_{13} + C_{44})k_y k_z + C_{44}k_x k_z)U_{0y} + \\ & + (\rho \omega^2 - C_{44}(k_x + k_y)^2 - C_{33}k_z^2)U_{0z} + iB_{31}k_z m_{0x} + i \frac{1}{4}B_{44}k_x m_{0z} = 0; \end{aligned} \quad (2.25.3)$$

$$i \omega m_{0x} = 0; \quad (2.25.4)$$

$$-i \frac{1}{4M_0} \gamma B_{44} k_z U_{0x} - i \frac{1}{4M_0} \gamma B_{44} k_x U_{0z} + i \omega m_{0y} - \gamma M_0 \omega_{m\perp} m_{0z} = 0; \quad (2.25.5)$$

$$i \frac{1}{4M_0} \gamma B_{66} k_y U_{0x} + i \frac{1}{4M_0} \gamma B_{66} k_x U_{0y} + \gamma M_0 \omega_{m2\perp} m_{0y} + i \omega m_{0z} = 0. \quad (2.25.6)$$

В выражениях (2.25.5) и (2.25.6) введены следующие обозначения:

$$\omega_{m1\perp} = \frac{\alpha k^2}{M_0^2} + \frac{H}{M_0} - \frac{K_1}{M_0^2} - \frac{K_{me}}{M_0^2}, \quad \omega_{m2\perp} = \frac{\alpha k^2}{M_0^2} + \frac{H}{M_0} + \frac{B_{66}^2}{2M_0^2 C_{66}}. \quad (2.26)$$

Из условия равенства нулю определителя системы динамических уравнений получим законы дисперсии связанных магнитоупругих волн для основных состояний кубического ферромагнетика. При этом рассмотрим несколько направлений волнового вектора упругих волн, используемых при экспериментальных исследованиях звуковых волн в ферромагнетиках одноосной симметрии [31].

Фаза «легкая ось»: $\mathbf{H} \parallel \mathbf{M} \parallel \langle 001 \rangle$

Случай: $\mathbf{k} \parallel \langle 100 \rangle$ и $\mathbf{k} \parallel \langle 010 \rangle$

$$\left(\omega^2 - \frac{(C_{11} + C_{66})}{\rho} k^2 \right) \left(\omega^2 - \frac{C_{66}}{2\rho} k^2 \right) \left[\left(\omega^2 - \frac{C_{44}}{\rho} k^2 \right) \left(\omega^2 - \gamma^2 M_0^2 \omega_{m\parallel}^2 \right) - B_{44}^2 \left\{ \frac{\omega_{m\parallel} \gamma^2 k^2}{16\rho} \right\} \right] = 0. \quad (2.27)$$

Случай: $\mathbf{k} \parallel \langle 001 \rangle$

$$\left(\omega^2 - \frac{C_{33}}{\rho} k^2 \right) \left[\omega^2 \left(\omega^2 - \frac{2C_{44}}{\rho} k^2 \right) \left(\omega^2 - \gamma^2 M_0^2 \omega_{m\parallel}^2 \right) - B_{44}^2 \left\{ \frac{\omega_{m\parallel} \gamma^2 k^2}{8\rho} \left(\omega^2 - \frac{C_{44}}{\rho} k^2 \right) \right\} \right] = 0. \quad (2.28)$$

Случай: $\mathbf{k} \parallel \langle 110 \rangle$

$$\left(\omega^2 - \frac{(C_{11} + C_{66})}{\rho} k^2 \right) \left(\omega^2 - \frac{C_{66}}{2\rho} k^2 \right) \left[\left(\omega^2 - \frac{2C_{44}}{\rho} k^2 \right) \left(\omega^2 - \gamma^2 M_0^2 \omega_{m\parallel}^2 \right) - B_{44}^2 \left\{ \frac{\omega_{m\parallel} \gamma^2 k^2}{16\rho} \right\} \right] = 0. \quad (2.29)$$

Случай: $\mathbf{k} \parallel \langle 1\bar{1}0 \rangle$

$$\left(\omega^2 - \frac{(C_{11} + C_{66})}{\rho} k^2 \right) \left(\omega^2 - \frac{C_{66}}{2\rho} k^2 \right) \left[\omega^2 \left(\omega^2 - \gamma^2 M_0^2 \omega_{m\parallel}^2 \right) - B_{44}^2 \left\{ \frac{\omega_{m\parallel} \gamma^2 k^2}{16\rho} \right\} \right] = 0. \quad (2.30)$$

Фаза «легкая плоскость»: $\mathbf{H} \parallel \mathbf{M} \parallel \langle 100 \rangle$

Случай: $\mathbf{k} \parallel \langle 100 \rangle$ и $\mathbf{k} \parallel \langle 010 \rangle$

$$\left(\omega^2 - \frac{(C_{11} + C_{66})}{\rho} k^2 \right) \left(\omega^2 - \frac{C_{44}}{\rho} k^2 \right) \left[\left(\omega^2 - \frac{C_{66}}{2\rho} k^2 \right) \left(\omega^2 - \gamma^2 M_0^2 \omega_{m1\perp} \omega_{m2\perp} \right) - B_{66}^2 \left\{ \frac{\omega_{m1\perp} \gamma^2 k^2}{4\rho} \right\} \right] = 0. \quad (2.31)$$

Случай: $\mathbf{k} \parallel \langle 001 \rangle$

$$\left(\omega^2 - \frac{C_{33}}{\rho} k^2\right) \left[\omega^2 \left(\omega^2 - \frac{2C_{44}}{\rho} k^2\right) (\omega^2 - \gamma^2 M_0^2 \omega_{m1\perp} \omega_{m2\perp}) - B_{44}^2 \left\{ \frac{\omega_{m2\perp} \gamma^2 k^2}{16\rho} \left(\omega^2 - \frac{C_{44}}{\rho} k^2\right) \right\} \right] = 0. \quad (2.32)$$

Случай: $\mathbf{k} \parallel \langle 110 \rangle$

$$\left(\omega^2 - \frac{C_{66}}{2\rho} k^2\right) \left(\omega^2 - \frac{C_{44}}{\rho} k^2\right) \left[\left(\omega^2 - \frac{(C_{11} + C_{66})}{\rho} k^2\right) (\omega^2 - \gamma^2 M_0^2 \omega_{m1\perp} \omega_{m2\perp}) - B_{66}^2 \left\{ \frac{\omega_{m1\perp} \gamma^2 k^2}{4\rho} \right\} \right] = 0. \quad (2.33)$$

Случай: $\mathbf{k} \parallel \langle 1\bar{1}0 \rangle$

$$\omega^2 \left(\omega^2 - \frac{C_{66}}{2\rho} k^2\right) \left[\left(\omega^2 - \frac{(C_{11} + C_{66})}{\rho} k^2\right) (\omega^2 - \gamma^2 M_0^2 \omega_{m1\perp} \omega_{m2\perp}) - B_{66}^2 \left\{ \frac{\omega_{m1\perp} \gamma^2 k^2}{4\rho} \right\} \right] = 0. \quad (2.34)$$

Таким образом, выражения (2.27)–(2.34) представляют собой законы дисперсии связанных магнитоупругих волн для ферромагнетика одноосной симметрии в общем виде. По структуре эти дисперсионные уравнения имеют стандартный вид [3, 4], а при пренебрежении магнитоупругим взаимодействием ($B_{ik} \rightarrow 0$) распадаются на классические законы дисперсии для спиновых волн [3] и упругих волн в кубических кристаллах [17].

Таблица 2.1

**Взаимодействие звуковых мод со спиновыми волнами
в ферромагнетике одноосной симметрии [31]**

Звуковая мода и направление волнового вектора	Фаза «легкая ось»: $\mathbf{H} \parallel \mathbf{M} \parallel \langle 001 \rangle$	Фаза «легкая плоскость»: $\mathbf{H} \parallel \mathbf{M} \parallel \langle 100 \rangle$
s_1 $\mathbf{k} \parallel \langle 100 \rangle$ и $\mathbf{k} \parallel \langle 010 \rangle$	B_{44}	Не взаимодействует
s_2 $\mathbf{k} \parallel \langle 001 \rangle$	B_{44}	B_{44}
s_2 $\mathbf{k} \parallel \langle 110 \rangle$	B_{44}	Не взаимодействует
s_3 $\mathbf{k} \parallel \langle 100 \rangle$ и $\mathbf{k} \parallel \langle 010 \rangle$	Не взаимодействует	B_{66}
s_4 $\mathbf{k} \parallel \langle 110 \rangle$	Не взаимодействует	B_{66}
s_4 $\mathbf{k} \parallel \langle 1\bar{1}0 \rangle$	Не взаимодействует	B_{66}

Рассчитанные законы дисперсии связанных магнитоупругих волн для ферромагнетика одноосной симметрии (2.27)–(2.33) дают возможность оценить влияние магнитной подсистемы на упругие свойства кристалла, а именно на соответствующие упругие модули. Из законов дисперсии (2.27)–(2.34) следует, что в одноосном ферромагнетике со спиновыми волнами взаимодействуют следующие звуковые моды: $s_1^2 = C_{44} / \rho$, $s_2^2 = 2C_{44} / \rho$, $s_3^2 = C_{66} / 2\rho$, $s_4^2 = (C_{11} + C_{66}) / \rho$. Для большей наглядности представим таблицу, в которой отражено наличие магнитоупругого взаимодействия для каждой звуковой моды в зависимости от направления магнитного момента одноосного ферромагнетика [31].

Из таблицы 2.1 легко видеть, что звуковые моды s_3 и s_4 не взаимодействуют со спиновыми волнами в основном состоянии «легкая ось», а звуковая мода s_1 – в основном состоянии «легкая плоскость». Магнитоупругое взаимодействие между звуковыми и спиновыми волнами характеризуется исключительно константами B_{44} (звуковые моды s_1 и s_2) и B_{66} (звуковые моды s_3 и s_4), другие магнитоупругие константы отвечают только за формирование магнитоупругой щели в спектре связанных колебаний (см. выражения (2.24) и (2.26)) [31].

3. ЗАТУХАНИЕ МАГНИТОУПРУГИХ ВОЛН В ФЕРРОМАГНЕТИКАХ

Общее уравнение, описывающее как динамические, так и статические свойства магнитоупорядоченных сред, было впервые предложено в работе Ландау и Лифшица [18]. Этой публикации суждено было стать одной из самых популярных работ Ландау и Лифшица и не потерять своей актуальности до сих пор, а предложенное уравнение заслуженно получило в литературе имя «уравнение Ландау–Лифшица».

Фундаментальным результатом работы [18] является построение квазиравновесного термодинамического потенциала ферромагнетика при низких температурах. Это построение базируется на соображениях симметрии кристалла и разделении взаимодействий в ферромагнетиках на два класса – слабые релятивистские взаимодействия и сильное обменное взаимодействие. Не менее фундаментальным результатом является введение эффективного магнитного поля как вариационной производной от термодинамического потенциала ферромагнетика по намагниченности.

В последующие десятилетия теория магнетизма Ландау получила широкое развитие. Однако во многих случаях [35 - 37] для описания тех или иных явлений использование классических моделей, предложенных в работах Ландау и Лифшица, оказывалось недостаточным. Такие исследования показали необходимость дальнейшего совершенствования

теории Ландау, особенно в вопросе, связанном с диссипативными процессами в магнитоупорядоченных структурах.

Для построения диссипативной функции, описывающей затухание коллективных магнитоакустических волн, будем исходить из выражения для полной энергии ферромагнетика, что в данном случае должна состоять из магнитной, упругой и магнитоупругой частей:

$$F = F_m + F_e + F_{me}. \quad (3.1)$$

В случае одноосной симметрии магнитная часть энергии ферромагнетика будет иметь следующий вид:

$$F_m = \frac{\alpha}{2} \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \frac{\partial \mu}{\partial x_k} + \frac{\mu^2 - 1}{8\chi} - \frac{1}{2} K_1 \mu_z^2 - \frac{1}{4} K_2 \mu_z^4 - \mathbf{MH}. \quad (3.2)$$

Данное выражение отличается от энергии (2.6) наличием слагаемого, учитывающего однородное обменное взаимодействие, которое может вносить существенный вклад при рассмотрении диссипативных процессов обменного взаимодействия. Соответственно, для ферромагнетика кубической симметрии будет:

$$F_m = \frac{\alpha}{2} \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \frac{\partial \mu}{\partial x_k} + \frac{\mu^2 - 1}{8\chi} + K_1 (\mu_x^2 \mu_y^2 + \mu_x^2 \mu_z^2 + \mu_y^2 \mu_z^2) + K_2 \mu_x^2 \mu_y^2 \mu_z^2 - \mathbf{MH}. \quad (3.3)$$

Упругая энергия одноосного кристалла может быть записана в виде [17]:

$$F_e = \frac{1}{2} C_{11} (E_{xx} + E_{yy})^2 + \frac{1}{2} C_{33} E_{zz}^2 + C_{13} (E_{xx} + E_{yy}) E_{zz} + 2C_{44} (E_{xz} + E_{yz})^2 + \frac{1}{2} C_{66} (E_{xx}^2 + E_{yy}^2 + 2E_{xy}^2), \quad (3.4)$$

где E_{ik} – компоненты тензора деформаций, C_{ik} – упругие модули второго порядка для одноосного кристалла. В случае кубической симметрии упругая энергия:

$$F_e = \frac{1}{2} C_{11} (E_{xx}^2 + E_{yy}^2 + E_{zz}^2) + C_{12} (E_{xx} E_{yy} + E_{xx} E_{zz} + E_{yy} E_{zz}) + 2C_{44} (E_{xy}^2 + E_{xz}^2 + E_{yz}^2), \quad (3.5)$$

она также может быть записана в виде (1.3), как было предложено в работах [22, 23].

Последнее слагаемое в выражении (3.1) определяет взаимодействие между магнитной и упругой подсистемами, для одноосной симметрии оно будет иметь вид [33, 34]:

$$F_{me} = \frac{1}{2} B_{11} (\mu_x^2 + \mu_y^2) (E_{xx} + E_{yy}) + \frac{1}{2} B_{13} \mu_z^2 (E_{xx} + E_{yy}) + \frac{1}{2} B_{31} (\mu_x^2 + \mu_y^2) E_{zz} + \frac{1}{2} B_{33} \mu_z^2 E_{zz} + \frac{1}{2} B_{44} (\mu_x \mu_z E_{xz} + \mu_y \mu_z E_{yz}) + \frac{1}{2} B_{66} (\mu_x^2 E_{xx} + \mu_y^2 E_{yy} + 2\mu_x \mu_y E_{xy}), \quad (3.6)$$

где B_{ik} – константы магнитоупругого взаимодействия для случая одноосной симметрии. Для кубического кристалла магнитоупругую энергию можно записать в виде [4]:

$$F_{me} = B_1 (\mu_x^2 E_{xx} + \mu_y^2 E_{yy} + \mu_z^2 E_{zz}) + 2B_2 (\mu_x \mu_y E_{xy} + \mu_x \mu_z E_{xz} + \mu_y \mu_z E_{yz}) \quad (3.7)$$

или воспользоваться формой записи (1.4), которая оказывается более удобной в определенных случаях.

В работах [20, 21] была продемонстрирована методика получения диссипативной функции ферромагнетика, основанная на соображениях симметрии и законах сохранения для намагниченности. Следует заметить, что построение диссипативной функции ферромагнетика базируется на основных феноменологических принципах, которые были изложены в работах Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица. Согласно им, диссипативная функция строится по тем же правилам, что и квазиравновесный термодинамический потенциал, и должна включать слагаемые той же природы, что и полная энергия кристалла [17, 34]. Таким образом, вполне логично представить плотность диссипативной функции в виде суммы трех слагаемых, описывающих релаксационные процессы соответственно магнитной, упругой и магнитоупругой природы.

$$q = q_m + q_e + q_{me}. \quad (3.8)$$

Следуя работам [20, 21, 32], магнитную составляющую диссипативной функции можно представить в виде

$$q_m = \frac{1}{2} \lambda_{11}^r (H_x^{eff})^2 + (H_y^{eff})^2 + \frac{1}{2} \lambda^{ex} \left(\frac{\partial \mathbf{H}^{eff}}{\partial x_i} \right)^2 \quad (3.9)$$

для одноосного ферромагнетика, и

$$q_m = \frac{1}{2} \lambda_{11}^r (H_x^{eff})^2 + (H_y^{eff})^2 + (H_z^{eff})^2 + \frac{1}{2} \lambda^{ex} \left(\frac{\partial \mathbf{H}^{eff}}{\partial x_i} \right)^2 \quad (3.10)$$

для кубического кристалла.

Упругая часть диссипативной функции должна зависеть от производных тензора деформаций по времени и также должна быть квадратичной [17]. Так что наиболее общий вид такой функции будет:

$$q_e = \frac{1}{2} \lambda_{ij,sp}^e \frac{\partial E_{ij}}{\partial t} \frac{\partial E_{sp}}{\partial t}. \quad (3.11)$$

Тензор четвертого ранга $\lambda_{ij,sp}^e$ называется тензором вязкости, и его компоненты определяются симметрией кристалла, аналогично тензору упругости, который входит в упругую энергию [17]. Для ферромагнетика одноосной симметрии имеем:

$$q_e = \frac{1}{2} \lambda_{11}^e \left(\frac{\partial E_{xx}}{\partial t} + \frac{\partial E_{yy}}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \lambda_{33}^e \left(\frac{\partial E_{zz}}{\partial t} \right)^2 + \lambda_{13}^e \left(\frac{\partial E_{xx}}{\partial t} + \frac{\partial E_{yy}}{\partial t} \right) \frac{\partial E_{zz}}{\partial t} + \\ + 2 \lambda_{44}^e \left(\frac{\partial E_{xz}}{\partial t} + \frac{\partial E_{yz}}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \lambda_{66}^e \left[\left(\frac{\partial E_{xx}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial E_{yy}}{\partial t} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial E_{xy}}{\partial t} \right)^2 \right]. \quad (3.12)$$

Для ферромагнетика кубической симметрии, соответственно:

$$q_e = \frac{1}{2} \lambda_{11}^e \left[\left(\frac{\partial E_{xx}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial E_{yy}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial E_{zz}}{\partial t} \right)^2 \right] + \lambda_{12}^e \left(\frac{\partial E_{xx}}{\partial t} \frac{\partial E_{yy}}{\partial t} + \frac{\partial E_{xx}}{\partial t} \frac{\partial E_{zz}}{\partial t} + \frac{\partial E_{yy}}{\partial t} \frac{\partial E_{zz}}{\partial t} \right) + \\ + 2 \lambda_{44}^e \left[\left(\frac{\partial E_{xy}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial E_{yz}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial E_{zx}}{\partial t} \right)^2 \right]. \quad (3.13)$$

Магнитоупругую часть диссипативной функции будем строить по аналогии с соответствующей частью полной энергии ферромагнетика. Исходя из выражений (3.9), (3.10) и (3.11), она должна состоять из производных тензора деформаций по времени и компонент эффективного магнитного поля. Диссипативная функция, как известно, должна быть инвариантна относительно преобразований группы симметрии кристалла. Таким образом, магнитоупругую часть диссипативной функции необходимо строить из инвариантов произведений производных тензора деформаций по времени и градиентов эффективного магнитного поля в виде квадратичной формы:

$$q_{me} = \frac{1}{2} \lambda_{ij,sp}^{me} \frac{\partial E_{ij}}{\partial t} \left(\frac{\partial H_s^{eff}}{\partial x_p} + \frac{\partial H_p^{eff}}{\partial x_s} \right). \quad (3.14)$$

Для ферромагнетика одноосной симметрии она будет иметь вид:

$$q_{me} = \frac{1}{2} \lambda_{11}^{me} \left(\frac{\partial E_{xx}}{\partial t} + \frac{\partial E_{yy}}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial H_x^{eff}}{\partial x} + \frac{\partial H_y^{eff}}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \lambda_{13}^{me} \left(\frac{\partial E_{xx}}{\partial t} + \frac{\partial E_{yy}}{\partial t} \right) \frac{\partial H_z^{eff}}{\partial z} + \\ + \frac{1}{2} \lambda_{31}^{me} \frac{\partial E_{zz}}{\partial t} \left(\frac{\partial H_x^{eff}}{\partial x} + \frac{\partial H_y^{eff}}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \lambda_{33}^{me} \frac{\partial E_{zz}}{\partial t} \frac{\partial H_z^{eff}}{\partial z} + \\ + \frac{1}{2} \lambda_{44}^{me} \left(\frac{\partial E_{xz}}{\partial t} \frac{\partial H_x^{eff}}{\partial z} + \frac{\partial E_{zx}}{\partial t} \frac{\partial H_z^{eff}}{\partial x} + \frac{\partial E_{yz}}{\partial t} \frac{\partial H_y^{eff}}{\partial z} + \frac{\partial E_{zy}}{\partial t} \frac{\partial H_z^{eff}}{\partial y} \right) + \\ + \frac{1}{2} \lambda_{66}^{me} \left(\frac{\partial E_{xx}}{\partial t} \frac{\partial H_x^{eff}}{\partial x} + \frac{\partial E_{yy}}{\partial t} \frac{\partial H_y^{eff}}{\partial y} + \frac{\partial E_{xy}}{\partial t} \frac{\partial H_x^{eff}}{\partial y} + \frac{\partial E_{yx}}{\partial t} \frac{\partial H_y^{eff}}{\partial x} \right). \quad (3.15)$$

Соответственно для кубического кристалла:

$$q_{me} = \lambda_1^{me} \left(\frac{\partial E_{xx}}{\partial t} \frac{\partial H_x^{eff}}{\partial x} + \frac{\partial E_{yy}}{\partial t} \frac{\partial H_y^{eff}}{\partial y} + \frac{\partial E_{zz}}{\partial t} \frac{\partial H_z^{eff}}{\partial z} \right) +$$

$$+ 2\lambda_2^{me} \left(\frac{\partial E_{xy}}{\partial t} \frac{\partial H_x^{eff}}{\partial x} + \frac{\partial E_{yx}}{\partial t} \frac{\partial H_y^{eff}}{\partial x} + \frac{\partial E_{xz}}{\partial t} \frac{\partial H_x^{eff}}{\partial z} + \frac{\partial E_{zx}}{\partial t} \frac{\partial H_z^{eff}}{\partial z} + \frac{\partial E_{yz}}{\partial t} \frac{\partial H_y^{eff}}{\partial z} + \frac{\partial E_{zy}}{\partial t} \frac{\partial H_z^{eff}}{\partial x} \right)$$

(3.16)

Для расчета затухания связанных магнитоакустических волн необходимо использовать динамические уравнения (1.8) и (1.9) с учетом соответствующих релаксационных слагаемых:

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = -\gamma \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{H}_{eff} + \mathbf{R}_m, \quad (3.17)$$

$$\rho \ddot{\mathbf{U}} = -\frac{\delta F}{\delta \mathbf{U}} + \mathbf{R}_e, \quad (3.18)$$

где релаксационные слагаемые определяются выражениями [17, 20, 21]:

$$\mathbf{R}_m = \frac{\delta q}{\delta \mathbf{H}^{eff}}, \quad (3.19)$$

$$\mathbf{R}_e = \frac{\delta q}{\delta \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right)}. \quad (3.20)$$

Перейдем в уравнениях (3.17) и (3.18) к компонентам Фурье по времени t и координатам \mathbf{r} для малых отклонений $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 \exp i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)$, $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 \exp i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)$, где ω – частота, а \mathbf{k} – волновой вектор коллективных волн. Тогда они приводят к системе из 6-ти уравнений для компонент векторов \mathbf{m}_0 и \mathbf{U}_0 .

Из условия существования решения данной системы уравнений (определитель системы равен нулю) и можно получить закон дисперсии связанных магнитоакустических колебаний с учетом их затухания. Следует заметить, что при пренебрежении релаксационными процессами в магнетике полученные результаты должны совпадать с законами дисперсии (1.16)–(1.24) и (2.27)–(2.34) для кубического и одноосного ферромагнетика, если же пренебречь магнитоупругим взаимодействием, то в таком случае можно получить отдельно спектр спиновых волн и спектр акустических волн.

Публикация содержит результаты исследований, проведенных при поддержке проектов Национальной академии наук Украины №0117U000433 и Министерства образования и науки Украины №0117U004340.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kittel C. Interaction of spin waves and ultrasonic waves in ferromagnetic crystals // *Phys. Rev.* – 1958. – Vol. 110. – P. 836-841.
2. Ахиезер А. И., Барьяхтар В. Г., Пелетминский С. В. Связанные магнитоупругие волны в ферромагнетиках и ферроакустический резонанс // *ЖЭТФ.* – 1958. – Т. 35, №1. – С. 228-239.
3. Ахиезер А. И., Барьяхтар В. Г., Пелетминский С. В. Спиновые волны. – М.: Наука, 1967. – 368 с.
4. Baryakhtar V. G., Turov E. A. Magnetoelastic excitations // *Spin waves and Magnetic Excitations 2* / Ed. by A. S. Borovik-Romanov and S. K. Sinha. – Amsterdam: North Holland, – 1988. – P. 333-379.
5. Chernenko V. A., Kokorin V. V. Ni₂MnGa as a new ferromagnetic ordered shape memory alloy // *Proc. of the International Conference on Martensitic Transformations 1992.* – Monterey: Monterey Institute for Advanced Studies, 1993. – P. 1205-1210.
6. Chernenko V. A., Pons J., Seguí C., Cesari E. Premartensitic phenomena and other phase transformations in Ni–Mn–Ga alloys studied by dynamical mechanical analysis and electron diffraction // *Acta Materialia.* – 2002. – Vol. 50, – P. 53-60.
7. Dai L., Cullen J., Wuttig M. Intermartensitic transformation in a NiMnGa alloy // *J. Appl. Phys.* – 2004. – Vol. 95. – P. 6957-6959.
8. Heczko O., Seiner H., Sedláč P., Kopeček J., Landa M. Anomalous lattice softening of Ni₂MnGa austenite due to magnetoelastic coupling // *J. Appl. Phys.* – 2012. – Vol. 111. – P. 07A929-1-07A929-3.
9. Барьяхтар В. Г., Яблонский Д. А., О магнитоупругой щели в спектре спиновых волн // *ФММ.* – 1977. – Т. 43, №3. – С. 645-646.
10. Kokorin V. V., Wuttig M. Magnetostriction in ferromagnetic shape memory alloys // *J. Magn. Magn. Mater.* – 2001. – Vol. 234. – P. 25-30.
11. Worgull J., Petti E., Trivisonno J. Behavior of the elastic properties near an intermediate phase transition in Ni₂MnGa // *Phys. Rev. B.* – 1996. – Vol. 54. – P. 15695-15699.
12. Chernenko V. A., L'vov V. A. Thermodynamics of martensitic transformations affected by hydrostatic pressure // *Philos. Mag.* – 1996. – Vol. 73. – P. 999-1008.
13. O'Handley R. C., Allen S. M. // *Encyclopedia of Smart Materials* / Ed. by M. Schwartz. New York: Wiley, 2002. – P. 936-951.
14. Entel P., Buchelnikov V. D., Gruner M. E., Hucht A., Khovailo V. V., Nayak S. K., Zayak A. T. Shape memory alloys: A summary of recent achievements // *Mater. Sci. Forum.* – 2008. – Vol. 583, –P. 21-41.
15. Chernenko V.A., L'vov V.A. Magnetoelastic nature of ferromagnetic shape memory effect. // *Mater. Sci. Forum.* – 2008. – Vol. 583. – P. 1-20.
16. Bar'yakhtar V. G., Danilevich A. G., L'vov V. A., Magnetoelastic resonance in a crystal with lattice phase transition // *Ukr. J. Phys.* – 2011. – Vol. 56, № 10. – P. 1068-1071.
17. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. – М.: Наука, 1987. – 248 с.
18. Landau L. D. and Lifshits E. M. On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies // *Phys. Zs. Sowjet.* – 1935. – Vol. 8. – P. 153-161.
19. Gilbert T. L. New form of the relaxation term in the equation of motion for magnetization // *Phys. Rev.* – 1955. – Vol. 100. – P. 1243-1259.
20. Барьяхтар В. Г. Феноменологическое описание релаксационных процессов в магнетиках // *ЖЭТФ.* – 1984. – Т. 87, № 4. – С. 1501-1508.
21. Барьяхтар В. Г., Данилевич А. Г. Затухание спиновых волн при спин-ориентационных фазовых переходах // *ФНТ.* – 2006. – Т. 32, № 8/9. – С. 1010-1023; Диссипативная функция магнитных сред // *ФНТ* – 2010. – Т. 36, № 4. – С. 385-393.
22. Liakos J. K., Saunders G. A. Application of the Landau theory to elastic phase transitions // *Phil. Mag. A.* – 1982. – Vol. 46. – P. 217-242.
23. L'vov V. A., Gomonaj E. A., Chernenko V. A., A phenomenological model of ferromagnetic martensite // *J. Phys.: Condens. Matter.* – 1998. – Vol. 10. – P. 4587-4596.
24. Danilevich A. G., L'vov V. A. Strong influence of ferromagnetic ordering and internal pressure on the elastic modulus of shape memory alloy // *J. Magn. Magn. Mater.* – 2013. – Vol. 333. – P. 108-113.
25. Webster P. J., Ziebeck K. R. A., Town S. L., Peak M. S., Magnetic order and phase transformation in Ni₂MnGa // *Phylos. Mag. B.* – 1984. –Vol. 49. –P. 295-310.
26. Tickle R., James R. D. Magnetic and magnetomechanical properties of Ni₂MnGa // *J. Magn. Magn. Mater.* – 1999. – Vol. 195. – P. 627-638.

27. Dai L., Cui J., Wuttig M. Elasticity of austenitic and martensitic NiMnGa // Proc. of SPIE. – 2003. – Vol. 5053. – P. 595-602.
28. Baryakhtar V. G., Vitebsky I. M., Pashkevich Yu. G., Sobolev V. L., Tarasenko V. V. Striction effects and dynamics of the magnetic subsystem in spin-reorientation phase transitions. Symmetry aspects // Zh. Eksp. Teor. Fiz. – 1984. – Vol. 87, № 3. – P. 1028-1037.
29. Ozhogin V. I., Preobrazhenskii V. L. Nonlinear dynamics of coupled systems near magnetic phase transitions of the “order-order” type // J. Magn. Magn. Mater. – 1991. – Vol. 100. – P. 544-571.
30. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Квантовые поля. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
31. Danilevich A. G. Interaction of elastic and spin waves in a uniaxial ferromagnet // Ukr. J. Phys. – 2015. – Vol. 60, № 11. – P. 1126-1131.
32. Барьяхтар В. Г., Иванов Б. А., Криворучко В. М., Данилевич А. Г. Современные проблемы динамики намагниченности: от основ до сверхбыстрой релаксации. – Киев: ПФ «Химджест», 2013. – 384 с.
33. Барьяхтар В. Г., Локтев В. М., Рябченко С. М. Вращательная инвариантность и магнитоизгибные колебания ферромагнитных пластин (стержней) // ЖЭТФ – 1985. – Т.88, №5. – С. 1752-1756.
34. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред – М.: Наука, 1982. – 623 с.
35. Еременко В. В., Криворучко В. Н., Лавриненко Н. М., Яблонский Д. А. Возбуждение переменным электрическим полем обменных магнитных колебаний в CsMnF₃ // ФТТ – 1988. – Т.30, №12. – С. 3605-3610.
36. Baryakhtar V. G., Eremenko V. V., Zvyagin S. A., Pashkevich Yu. G., Pishko V. V., Sobolev V. L., Shakhov V. V. Line width of magnetic resonance exchange modes in a four-sublattice orthorhombic antiferromagnet. JETP // – 1991. – Vol. 73, № 6. – P. 1046-1055.
37. Pashkevich Yu. G., Blinkin V. A., Gnezdilov V. P., Tsapenko V. V., Eremenko V. V., Lemmens P., Fischer M., Grove M., Guntherodt G., Degiorgi L., Wachter P., Tranquada J. M., Buttrey D. J. Stripe Conductivity in La_{1.775}Sr_{0.225}NiO₄ // Phys. Rev. Lett. – 2000. – Vol. 84, № 17. – P. 3919-3922.

ПРОХОЖДЕНИЕ, ОТРАЖЕНИЕ
И ТРАНСФОРМАЦИЯ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН
В СЛОИСТЫХ СВЕРХПРОВОДНИКАХ

С. С. Апостолов, Э. А. Майзелс, Т. Н. Рохманова, В. А. Ямпольский
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61022, Украина
Институт радиофизики и электроники имени А. Я. Усикова,
ул. Ак. Проскуры, 12, Харьков, 61085, Украина
E-mail: stapos@ukr.net

Работа посвящена теоретическому исследованию прохождения и отражения терагерцевых электромагнитных волн при облучении образцов слоистых сверхпроводников. Поскольку слоистые сверхпроводники представляют собой сильноанизотропную нелинейную среду, в них может наблюдаться ряд новых линейных и нелинейных электромагнитных явлений. Во-первых, коэффициенты прохождения и отражения волн оказываются зависящими от их амплитуды и, при определенных условиях, демонстрируют гистерезисное поведение при изменении амплитуды. Во-вторых, волна может претерпевать нелинейную трансформацию поляризации, также зависящую от амплитуды волны, в геометрии, когда сверхпроводящие слои перпендикулярны границе образца. В-третьих, за счет нелинейности электромагнитная волна в образце может взаимодействовать с внешним постоянным магнитным полем, что дает возможность эффективно управлять прохождением, отражением и трансформацией волн, изменяя величину этого поля.

Первая часть работы посвящена изучению прохождения, отражения и трансформации поляризации нелинейных волн в образце слоистого сверхпроводника конечных размеров, помещенного в вакуумный прямоугольный волновод. Установлено, что зависимость коэффициента прохождения нелинейных

волн от амплитуды падающей волны имеет гистерезисный характер. Показано, что изменением амплитуды падающей волны можно варьировать коэффициент прохождения в широком диапазоне значений. Предложен оригинальный метод решения задач прохождения, отражения и трансформации нелинейных волн с произвольными поляризациями в слоистых сверхпроводниках. Этот метод основан на выявленном в работе своеобразном аналоге принципа суперпозиции для волн со взаимно ортогональными поляризациями, которые даже в нелинейном режиме практически не взаимодействуют.

Во второй части работы представлено теоретическое описание влияния постоянного внешнего магнитного поля на прохождение, отражение и трансформацию линейных волн. Найдены аналитические выражения для коэффициентов прохождения и отражения поперечно-магнитных (ТМ) волн, а также для коэффициентов трансформации поперечно-магнитных волн в поперечно-электрические (ТЕ) и наоборот. Получены условия практически полного подавления коэффициента отражения и показано, что в определенном частотном диапазоне можно добиться полной трансформации ТЕ-волны в ТМ-волну и наоборот настройкой величины магнитного поля и угла поворота плоскости падения. Таким образом, установлено, что внешнее магнитное поле является удобным и эффективным инструментом для управления прохождением, отражением и трансформацией поляризации волн.

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование слоистых сверхпроводников перспективно с точки зрения как фундаментальной, так и прикладной науки. Такие материалы представляют собой периодические структуры, в которых тонкие сверхпроводящие слои разделены более толстыми диэлектрическими слоями, электродинамически связанными между собой за счет внутреннего эффекта Джозефсона [1]. К таким структурам относятся, например, высокотемпературные сверхпроводники на основе меди или железа, $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$ или $\text{La}[\text{O}_{1-x}\text{F}_x]\text{FeAs}$. Интерес фундаментальной науки к слоистым сверхпроводникам связан с существованием в них особого типа твердотельной плазмы, так называемой джозефсоновской плазмы. Основной особенностью джозефсоновской плазмы является анизотропия ее токонесущей способности: токи вдоль слоев имеют ту же природу, что и в обычных сверхпроводниках, и могут быть описаны в терминах лондоновской модели, а токи поперек слоев имеют джозефсоновскую природу. Данная анизотропия способствует формированию в слоистых сверхпроводниках особого типа возбуждений – джозефсоновских плазменных волн (см., например, [2, 3]). Важной особенностью джозефсоновских плазменных волн является то, что они относятся к терагерцевому диапазону частот, перспективному с точки зрения различных приложений [4, 5]. Поэтому в течение последнего десятилетия прилагались значительные усилия для создания генераторов мощного когерентного терагерцевого излучения и других устройств, действующих на основе слоистых сверхпроводников (см., например, [6]).

Ранее многими исследовательскими группами рассматривались задачи о возбуждении и распространении джозефсоновских плазменных волн в слоистых сверхпроводниках. Было предсказано существование поверхностных джозефсоновских плазменных волн, изучен ряд линейных и нелинейных эффектов при их распространении. В частности, было показано, что в слоистых сверхпроводниках может наблюдаться отрицательный коэффициент преломления электромагнитных волн (см., например, [7-9]). Однако в большинстве предыдущих теоретических работ рассматривались бесконечные или полубесконечные образцы слоистых сверхпроводников. В то же время, реальные размеры образцов, которые используются в экспериментах со слоистыми сверхпроводниками, близки к длине волны терагерцевого излучения. Очевидно, что в таких условиях нужно учитывать конечность образцов. Таким образом, важным является теоретическое описание процессов отражения и прохождения линейных и нелинейных волн в конечных слоистых сверхпроводниках, анализ сопутствующих нелинейных эффектов, исследование трансформации поляризации падающей волны и установление возможности управления этими процессами с помощью внешнего постоянного магнитного поля. Именно этот круг новых важных научных задач, которые имеют фундаментальное и прикладное значение, и рассмотрен в данном обзоре.

Данный обзор основан на цикле статей [10-14]. Результаты исследований дополняют и расширяют существующие представления об электромагнитных процессах в слоистых сверхпроводниках. В частности, в обзоре установлено влияние конечности размеров образца слоистого сверхпроводника и наличия внешнего постоянного магнитного поля на процессы отражения и прохождения электромагнитных волн в слоистых сверхпроводниках. Полученные результаты могут быть использованы при разработке детекторов, источников и фильтров терагерцевого излучения. В свою очередь, терагерцевые технологии имеют множество потенциально важных практических применений в различных областях, в частности в системах безопасности, медицинской диагностике, контроле окружающей среды. Также в обзоре предложен оригинальный метод решения задач отражения, прохождения и трансформации нелинейных волн с произвольными поляризациями, который может быть использован в дальнейшем для описания электродинамических явлений в сильно анизотропных проводящих и сверхпроводящих структурах.

1.1. В ы с о к о т е м п е р а т у р н ы е с л о и с т ы е с в е р х п р о в о д н и к и

Начало развитию высокотемпературной сверхпроводимости положила работа Мюллера и Беднорца [15], в которой авторам удалось синтезировать так называемую металлоксидную керамику ($\text{Ba}_x\text{La}_{5-x}\text{Cu}_5\text{O}_{5(3-y)}$). При измерениях сопротивления это соединение проявляло признаки

сверхпроводимости при рекордно высокой по тем временам температуре в 30 К. Важнейшим в данном открытии было то, что сверхпроводимость была обнаружена не у традиционных интерметаллидов, органических или полимерных структур, а у оксидной керамики, обычно проявляющей диэлектрические или полупроводниковые свойства. Вскорости последовал ряд работ, демонстрирующих, что сверхпроводимость может наблюдаться в веществах при температуре выше температуры кипения жидкого азота (77 К). Например, в 1987 г. Ву с коллегами [16] синтезируют сверхпроводящую керамику из оксидов бария, иттрия и меди, $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$, и обнаруживают сверхпроводимость при 90 К. Данное открытие стимулировало поиски сверхпроводимости при еще большей температуре, однако критическую температуру T_c , полученную для YBCO , не удавалось превзойти, даже заменяя иттрий другим редкоземельным элементом. В январе 1988 г. Маеда с соавторами [17] синтезируют новый класс высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП) в системах Bi-Sr-Ca-Cu-O и показывают, что оксид $\text{BiSrCaCu}_2\text{O}_x$ имеет $T_c = 105$ К. Позже выяснилось, что ртуть-содержащие соединения имеют большую температуру перехода, если на одну элементарную ячейку приходится более одного слоя CuO_2 , в частности, в соединении $\text{HgBa}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{8+\delta}$ под действием внешнего давления можно достичь сверхпроводимости при температурах выше 150 К. Так, в работе [18] наблюдалась сверхпроводимость вплоть до 153 К при давлении 150 кбар.

В состав вышеупомянутых ВТСП входит оксид меди CuO_2 как необходимый элемент для возникновения сверхпроводимости. Однако помимо купратных сверхпроводников существует широкий класс сверхпроводящих структур, основанных на железе и элементах V группы (пниктиды) либо Se . Температура их сверхпроводящего перехода является наибольшей после купратных сверхпроводников. Впервые удалось синтезировать сверхпроводник на основе железа LaOFeP в 2006 г. с температурой перехода 4 К [19]. Значительное же внимание к ним возникло в 2008 г., когда было получено соединение $\text{La}[\text{O}_{1-x}\text{F}_x]\text{FeAs}$ ($x = 0,05 - 0,12$) с $T_c = 26$ К [20]. Многообещающими являются исследования тонких пленок FeSe , в которых уже удалось получить $T_c = 65$ К [21]. Несмотря на то, что температура перехода в сверхпроводящее состояние структур на основе железа все еще уступает купратным сверхпроводникам, их изучение вызывает большой интерес, так как может дать полезную информацию для теоретического объяснения высокотемпературной сверхпроводимости и указать технологам путь к повышению критической температуры.

Высокотемпературные сверхпроводники имеют слоистую структуру, включающую сверхпроводящие слои, например CuO_2 в купратных

ВТСП или FeAs в ВТСП на основе железа. Экспериментальные исследования Кляйнера и Мюллера [1, 22] по наблюдению микроволнового излучения показали, что кристаллы ВТСП можно рассматривать как периодические структуры, в которых тонкие сверхпроводящие слои чередуются с более толстыми диэлектрическими слоями и связаны друг с другом за счет внутреннего эффекта Джозефсона [23]. Помимо природных слоистых сверхпроводников, таких как $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$ или $\text{La}[\text{O}_{1-x}\text{F}_x]\text{FeAs}$, существуют слоистые сверхпроводниковые системы с джозефсоновскими контактами, полученные искусственно в лабораторных условиях, к примеру, $\text{Nb}/\text{AlO}_x/\text{Nb}$ [24] или $\text{Al}/\text{AlO}_x/\text{Al}$ [25].

Хотя последовательная микроскопическая теория ВТСП до сих пор не создана, с феноменологической точки зрения макроскопическое поведение ВТСП достаточно хорошо описывается теорией Гинзбурга–Ландау [26] для сверхпроводников II рода, обобщенной с учетом флуктуационных эффектов и необычной симметрии сверхпроводящей волновой функции (так называемое d -волновое спаривание). Однако в случае сильно анизотропных сверхпроводников, таких как $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$, когда длина когерентности в направлении поперек слоев оказывается соизмеримой или меньше расстояния между слоями, дискретность структуры становится существенной и необходимо использовать новую теорию, в которой слои связаны между собой джозефсоновским взаимодействием. Феноменологическая модель такой слоистой структуры была предложена Лоуренсом и Дониаком [27]. В отличие от модели Гинзбурга–Ландау, в которой сверхпроводник представлен как континуальное трехмерное твердое тело, в модели Лоуренса–Дониака сверхпроводник идеализирован в виде параллельных сверхпроводящих пластин, расположенных на одинаковом расстоянии. При температурах, когда все длины когерентности становятся гораздо больше, чем пространственный период структуры, модель Лоуренса–Дониака переходит в анизотропную модель Гинзбурга–Ландау [28]. Для описания электродинамики слоистых сверхпроводников можно воспользоваться связанными синусоидальными уравнениями Гордона [29–30].

1.2. Джозефсоновская плазма.

Джозефсоновские плазменные волны (ДПВ)

Научный интерес к слоистым сверхпроводникам связан с изучением специфического вида твердотельной плазмы, которая формируется в них, – так называемой джозефсоновской плазмы. Характерной особенностью джозефсоновской плазмы является сильная анизотропия её токонесущей способности, причем не только по абсолютной величине (токи в \mathbf{ab} плоскости в сотни раз превышают токи вдоль оси \mathbf{c}), но и по физической природе протекающих токов. А именно, плотность тока J_{ab} вдоль \mathbf{ab}

плоскости имеет ту же природу, что и токи в обычных сверхпроводниках, и она может быть описана в терминах лондоновской модели,

$$J_x = -\frac{c}{4\pi\lambda_{ab}^2} A_x, \quad J_y = -\frac{c}{4\pi\lambda_{ab}^2} A_y, \quad (1.1)$$

где λ_{ab} – лондоновская глубина проникновения магнитного поля (в условиях, когда поле проникает в направлении, перпендикулярном сверхпроводящим слоям), \vec{A} – векторный потенциал, c – скорость света. Здесь и дальше выберем систему координат таким образом, чтобы ось z совпадала с кристаллографической осью \mathbf{c} , а плоскость xy совпадала с \mathbf{ab} плоскостью. Плотность тока вдоль оси \mathbf{c} имеет другую природу, она является джозефсоновской:

$$J_z = J_c \sin \varphi, \quad (1.2)$$

где J_c – максимальная плотность джозефсоновского тока, φ – межслойная калибровочно инвариантная разность фаз параметра порядка.

Анизотропия джозефсоновской плазмы способствует распространению в ней электромагнитных колебаний – джозефсоновских плазменных волн (ДПВ). Теоретически существование ДПВ в слоистых сверхпроводниках было предсказано в работах [31, 32]. Такие возбуждения не имеют аналогов в массивных сверхпроводниках и являются характерной особенностью лишь слоистых сверхпроводящих систем. Как и в обычной плазме, в спектре джозефсоновских плазменных волн имеется щель: ДПВ распространяются с частотами ω выше некоторой критической, называемой джозефсоновской плазменной частотой ω_j . Частоты распространения

этих волн принадлежат терагерцевой области, которая охватывает интервал от 300 ГГц до 30 ТГц. В слоистом сверхпроводнике могут существовать как продольные, так и поперечные ДПВ [33], распространяющиеся поперек и вдоль слоев образца [2, 31, 32], соответственно. Природа этих мод и их законы дисперсии различны. Поперечная ДПВ обладает более сильной дисперсионной зависимостью. Такая мода возникает в результате взаимодействия джозефсоновского тока с электромагнитным полем внутри диэлектрических слоев. Существование же продольной ДПВ связано с нарушением электронейтральности в сверхпроводящих слоях. Действительно, в результате туннелирования электронных пар через диэлектрические промежутки на границах сверхпроводящих слоев возникают пространственные заряды и связанное с ними электрическое поле. При этом электрическое поле, возникающее в отдельном джозефсоновском переходе, оказывает влияние на соседние джозефсоновские контакты, т.е. возникает дополнительная связь между отдельными джозефсоновскими переходами – так называемая емкостная связь.

В работах [7, 34-37] было теоретически показано, что вдоль границы раздела слоистый сверхпроводник-вакуум, как и вдоль границы

обычной плазмы, могут распространяться поверхностные колебания – джозефсоновские поверхностные плазменные волны. Возбуждение этих волн может приводить к ряду резонансных эффектов [7, 38-40] типа известных вудовских аномалий в оптике. Однако, в отличие от обычной плазмы, поверхностные ДПВ могут распространяться с частотами не только ниже, но и выше плазменной частоты [7]. В отличие от обычной плазмы, джозефсоновская плазма может проявлять свойства, характерные для леворуких сред – на ее границе с вакуумом может наблюдаться отрицательный коэффициент преломления терагерцевых волн [7, 41]. В работе [42] было показано, что в слоистых сверхпроводниках со случайно флуктуирующей величиной максимального джозефсоновского тока могут наблюдаться явления типа андерсоновской локализации и формирования частотного окна прозрачности для терагерцевых волн.

1.3. Прикладной аспект исследований слоистых сверхпроводников

Частоты распространения ДПВ принадлежат терагерцевой области, что соответствует диапазону от 300 ГГц до 30 ТГц или длинам волн от одного миллиметра (край высокочастотной микроволновой области) до десяти микрометров (край дальней инфракрасной области), энергиям 1,25 – 125 мэВ или температурам 14 – 1400 К. Таким образом, терагерцевые волны покрывают температуру биологических процессов. Электромагнитные волны терагерцевого диапазона открывают большие перспективы в физике, астрономии, химии, биологии и медицине, включая неинвазивное зондирование, спектроскопию, томографию, мониторинг здоровья, контроль окружающей среды, а также могут использоваться в системах безопасности и коммуникациях с высокой пропускной способностью [4, 5]. При этом терагерцевые волны менее опасны, чем рентгеновское излучение, и, к примеру, при использовании в спектроскопии, терагерцевые устройства позволяют получать информацию, которую другие не могут. Однако развитие этих направлений все еще ограничено из-за недостатка компактных твердотельных источников мощного когерентного терагерцевого излучения.

За последнее время появилось значительное количество приборов, работающих в терагерцевом диапазоне [43]. Несмотря на это, по-прежнему существуют проблемы в их применении в электронике или из-за большого размера, или трудностей настройки [2]. Новые перспективы открылись после обнаружения внутреннего эффекта Джозефсона [22] в кристаллической структуре слоистых высокотемпературных сверхпроводников типа $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$, так как они содержат большое число идентичных контактов. Предполагается, что они позволят создать новые источники интенсивного когерентного терагерцевого излучения [44, 45], которые будут работать при частотах гораздо больших, чем полученные с помощью Nb-структур.

Недавно в работе [6] удалось получить излучение мощностью 610 мкВт при 0,51 ТГц.

Важно то, что терагерцевые волны нелинейно взаимодействуют с джозефсоновской средой слоистых сверхпроводниковых структур, которой в свою очередь можно манипулировать [46, 47]. Таким образом, преимущество слоистых сверхпроводников для создания устройств терагерцевого диапазона состоит в возможности хорошего управления и настройки.

Один из способов возбуждения ДПВ в слоистых сверхпроводниках связан с черенковским излучением, возникающим при движении джозефсоновских вихрей [48-50]. Однако многие попытки генерировать излучение терагерцевых ДПВ движущейся решеткой джозефсоновских вихрей оказались неудачными [51]. Более перспективный метод получения когерентного терагерцевого излучения предполагает синхронизацию джозефсоновских плазменных колебаний в слоистом сверхпроводнике полем электромагнитного излучения контактов в отсутствие приложенного внешнего магнитного поля. Именно эта идея была воплощена в работе [45] для получения когерентного терагерцевого излучения.

1.4. С в я з а н н ы е с и н у с о и д а л ь н ы е у р а в н е н и я Г о р д о н а

Впервые связанные синусоидальные уравнения Гордона для феноменологического описания слоистых сверхпроводников были получены Сакаи с соавторами [29]. Позже многие авторы повторили вывод этих уравнений, используя другие подходы (см., например, [30, 52, 53]). Рассмотрим бесконечный слоистый сверхпроводник с толщинами диэлектрических и сверхпроводящих слоев d и s , соответственно (см. рис. 1.1).

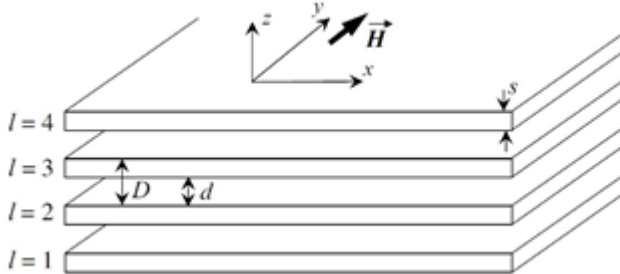


Рис. 1. 1. Схематическое изображение слоистого сверхпроводника

Предполагаем, что электрическое поле лежит в плоскости xz , а магнитное поле направлено вдоль оси y :

$$\vec{E} = \{E_x, 0, E_z\}, \quad \vec{H} = \{0, H, 0\}. \quad (1.3)$$

Следуя работе [53], будем считать, что сверхпроводящие слои настолько тонкие ($s = d$), что изменением фазы и электрического поля в направлении оси z внутри них можно пренебречь. Тогда полную плотность тока, текущего между $(l+1)$ -м и l -м слоями образца, можно записать в виде суммы плотности джозефсоновского тока куперовских пар и плотности тока квазичастиц, вызванного полем $E_z^{l+1,l}$:

$$J^{l+1,l} = J_c \sin(\varphi^{l+1,l}) + \sigma_c E_z^{l+1,l}. \quad (1.4)$$

Здесь $\varphi^{l+1,l}$ – калибровочно-инвариантная разность фаз параметра порядка между $(l+1)$ -м и l -м сверхпроводящими слоями,

$$\varphi^{l+1,l} = \chi_{(l+1)} - \chi_l - \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_l^{l+1} A_z^{l+1,l} dz, \quad (1.5)$$

σ_c – диссипативная проводимость квазичастиц в направлении поперек слоев, χ_l – фаза параметра порядка в l -м слое, $\Phi_0 = \pi\hbar/e$ – квант магнитного потока, e – элементарный заряд, $A_z^{l+1,l}$ – нормальная компонента векторного потенциала между $l+1$ -м и l -м слоями. Считаем толщины сверхпроводящих слоев s много меньше диэлектрических слоев d и модули параметра порядка одинаковыми для разных сверхпроводящих слоев.

Используя квантово-механические соотношения в лондоновском пределе, можно записать выражение для плотности тока J_{xl} , текущего в l -м сверхпроводящем слое. Оно включает в себя плотность сверхтока и плотность тока квазичастиц, возникающего в результате действия электрического поля в направлении оси x , а током смещения можно пренебречь:

$$J_{xl} = \frac{c\Phi_0}{8\pi^2\lambda^2} \left(\frac{\partial\chi_l}{\partial x} - \frac{2\pi}{\Phi_0} A_{xl} \right) + \sigma_{ab} E_{xl}. \quad (1.6)$$

Здесь λ – лондоновская глубина проникновения в массивный сверхпроводник, σ_{ab} – проводимость квазичастиц в сверхпроводящем слое.

Тогда, используя уравнения Максвелла:

$$-\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{4\pi}{c} J_x, \quad \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{4\pi}{c} J_z + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (1.7)$$

и стандартные соотношения:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla A_0; \quad \vec{H} = \text{rot} \vec{A}, \quad (1.8)$$

можно прийти к связанному синусоидальному уравнению Гордона для калибровочно-инвариантной разности фаз $\varphi^{l+1,l}$:

$$\left(1 - \frac{\lambda_{ab}^2}{D^2} \partial_l^2\right) \left(\frac{\partial^2 \varphi^{l+1,l}}{\partial t^2} + \omega_r \frac{\partial \varphi^{l+1,l}}{\partial t} + \omega_J^2 \sin(\varphi^{l+1,l})\right) - \frac{c^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \varphi^{l+1,l}}{\partial x^2} = 0, \quad (1.9)$$

где дискретный оператор второй производной ∂_l^2 определяется как $\partial_l^2 f_l = f_{l+1} + f_{l-1} - 2f_l$, джозефсоновская плазменная частота:

$$\omega_J = \sqrt{\frac{8\pi e D J_c}{\hbar \varepsilon}}, \quad (1.10)$$

$\omega_r = 4\pi\sigma_c / \varepsilon$ – частота релаксации, пропорциональная проводимости квазичастиц вдоль кристаллографической оси \mathbf{c} . Как показано в работе [54], проводимость квазичастиц вдоль слоев σ_{ab} , которая входит в уравнение (1.6), должна быть учтена, если частота достаточно далека от джозефсоновской плазменной частоты ω_J . Для частот, близких к ω_J , слагаемое с σ_{ab} может быть опущено в уравнении (1.9), если выполняется условие:

$$\left|1 - \frac{\omega^2}{\omega_J^2} \frac{\sigma_{ab}}{\sigma_c} \frac{\varepsilon \omega_J^2 \lambda_{ab}^2}{c^2}\right| = 1. \quad (1.11)$$

Затухание ДПВ определяется частотой релаксации ω_r , или проводимостью σ_c квазичастиц в направлении оси z . При низких температурах значение σ_c в слоистых ВТСП мало, поэтому во многих задачах затуханием ДПВ можно пренебречь [54].

Так, пренебрегая частотой релаксации в (1.9), а также считая пространственный масштаб изменения полей вдоль оси z больше толщин s и d сверхпроводящих и диэлектрических слоев, можно перейти к континуальному пределу, в котором синусоидальные уравнения Гордона приводятся к следующему дифференциальному уравнению в частных производных:

$$\left(1 - \lambda_{ab}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \left[\frac{1}{\omega_J^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \sin \varphi\right] - \lambda_c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0. \quad (1.12)$$

Также отметим, что в приведенных уравнениях мы пренебрегли эффектом нарушения электронейтральности слоев, который приводит к возникновению емкостной связи электромагнитных полей между соседними слоями. Этот эффект может играть важную роль в формировании дисперсионных свойств ДПВ [52, 55, 56] и транспортных свойств сверхпроводника [57] при частотах близких к ω_J . В частности, благодаря

этому эффекту, возникает новая ветвь в спектре объемных ДПВ, а именно продольные ДПВ, о которых упоминалось выше. Однако емкостной связью можно пренебречь во многих случаях, когда мал параметр емкостной связи α . Согласно теоретическим оценкам Хелма и Булаевского [55], величина $\alpha: 0,05-0,1$ для кристаллов Bi-2212 или Tl-2212. Также экспериментальные исследования [22, 58] показали, что эта величина оказывает незначительное влияние на распределение калибровочно-инвариантной разности фаз и электромагнитного поля в слоистом сверхпроводнике. Поэтому в последующих разделах мы не будем принимать во внимание эффект нарушения электронейтральности.

1.5. Закон дисперсии линейных ДПВ

В линейном режиме, когда $\sin(\varphi^{l+1,l})$ можно заменить на $\varphi^{l+1,l}$, уравнения (1.9) допускают волновые решения вида:

$$\varphi^{l+1,l} \propto \exp[i(qx - \omega t + k_z(q, \omega)lD)]. \quad (1.13)$$

Подставляя (1.13) в уравнение (1.9), получаем закон дисперсии для линейных ДПВ в предположении электронейтральности слоев (см., например, [2]):

$$\sin^2\left(\frac{k_z D}{2}\right) = \frac{D^2}{4\lambda_{ab}^2} \left[\frac{c^2 q_p^2}{\varepsilon(\omega^2 - \omega_J^2)} - 1 \right], \quad (1.14)$$

где $q_p^2 = q_x^2 + q_y^2$ – квадрат параллельной слоям компоненты волнового вектора. Уравнение (1.14) показывает, что ДПВ могут распространяться в слоистом сверхпроводнике только с частотами выше джозефсоновской плазменной частоты, $\omega > \omega_J$, то есть падающая на образец электромагнитная волна с частотой ниже ω_J будет полностью отражаться от поверхности материала.

В работе [55] было получено дисперсионное уравнение для линейных ДПВ с учетом емкостной связи:

$$\frac{\omega^2(q_p, k_z)}{\omega_J^2} = 1 + \frac{\lambda_c^2 q_p^2}{1 + (4\lambda_{ab}^2 / D^2) \sin^2(k_z D / 2)} + 4\alpha \sin^2(k_z D / 2), \quad \alpha = \frac{\varepsilon R_D^2}{sD} = 1. \quad (1.15)$$

В соответствии с этим уравнением емкостная связь может оказаться существенной лишь для продольных волн (с $q_p = 0$) при частотах очень близких к ω_J . В отсутствие емкостной связи уравнения (1.14) и (1.15) совпадают.

1.6. Нелинейность джозефсоновских плазменных волн

Известно, что нелинейность может приводить к ряду нетривиальных оптических явлений, таких как самоиндуцированная прозрачность, самофокусировка света, которые представляют интерес как для фундаментальной, так и для прикладной науки (см., например, [59]). В отличие от оптики, уравнения электродинамики слоистых сверхпроводников нелинейны из-за нелинейной связи $J \propto \sin \varphi$ джозефсоновского тока J , текущего поперек слоев, с межслойной калибровочно-инвариантной разностью фаз параметра порядка φ , которая определяет электромагнитное поле в системе. В сильно нелинейном режиме, когда $\varphi \approx \pi$, синусоидальное уравнение Гордона имеет солитонное и бризерное решения [60]. Однако даже в случае малых амплитуд, когда $|\varphi| \approx 1$ и $\sin \varphi$ можно расписать как $\varphi - \varphi^3/6$, в слоистых сверхпроводниках могут проявляться сильно нелинейные эффекты. Как показано в работах [9, 10], при частотах ω близких к джозефсоновской плазменной ω_J можно пренебречь генерацией более высоких гармоник. Тогда нелинейный член $\omega_J^2 \varphi^3$ в уравнении (1.12) (с учетом $\sin \varphi \approx \varphi - \varphi^3/6$) может иметь тот же порядок малости, что и сумма линейных членов

$$\left| \frac{\partial \varphi^2}{\partial t^2} + \omega_J^2 \varphi \right| \approx |\omega_J^2 - \omega^2| \cdot |\varphi| \sim \omega_J^2 \varphi^3. \quad (1.16)$$

Линейные слагаемые могут практически компенсировать друг друга, и тогда малый нелинейный член φ^3 может играть ключевую роль в задаче. Таким образом, даже слабая нелинейность может существенно повлиять на распространение ДПВ, если частота волны близка к джозефсоновской плазменной частоте.

Важно отметить, что нелинейные волны могут распространяться с частотами ниже джозефсоновской плазменной частоты ω_J , т.е. в запрещенной области спектра. Можно сказать, что нелинейность способствует эффективному уменьшению ω_J . Действительно, выражение в квадратных скобках в уравнении (1.12) может быть представлено в форме $[(\omega_J^{\text{eff}})^{-2} \partial^2 \varphi / \partial t^2 + \varphi]$, где

$$\omega_J^{\text{eff}} \approx \omega_J \left(1 - \frac{\varphi^2}{12} \right). \quad (1.17)$$

Так, при достаточно больших φ частота падающей волны может оказаться больше эффективной джозефсоновской плазменной частоты

ω_j^{eff} , и тогда нелинейная ДПВ может распространяться в слоистом сверхпроводнике.

В работе [2] записан закон дисперсии для нелинейных ДПВ:

$$q = \sqrt{\frac{A_1^2}{8} - 1 + \frac{\omega^2}{\omega_j^2}}, \quad (1.18)$$

где q – волновой вектор первой гармоники, A_1 – амплитуда первой гармоники. Видим, что такие волны могут распространяться с частотами ниже джозефсоновской плазменной, если амплитуда A_1 превышает критическую A_c :

$$A_c = \sqrt{8 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_j^2} \right)}. \quad (1.19)$$

Из закона дисперсии (1.18) следует, что в той точке пространства, где амплитуда нелинейной волны A_1 достигает критического значения A_c , продольный волновой вектор вместе с групповой скоростью волны, $v_g = \partial\omega / \partial q \propto \sqrt{A_1 - A_c}$, обращаются в нуль, т.е. наблюдается явление остановки света [8].

Нелинейность уравнений электродинамики слоистых сверхпроводников приводит еще к ряду необычных нелинейных эффектов, связанных с распространением ДПВ: самофокусировке терагерцевых импульсов [8, 9], возбуждению нелинейных волноводных мод [61], самоиндуцированной прозрачности образцов слоистых сверхпроводников [62]. Предсказанное в работе [62] существенное увеличение прозрачности слоистых сверхпроводников с ростом амплитуды волны было недавно обнаружено экспериментально в работе [63].

1.7. Обыкновенные и необыкновенные ДПВ

Как показано в работе [64], в условиях электронейтральности, когда компонента A_z векторного потенциала связана с фазой φ соотношением

$$A_z = -\frac{\Phi_0}{2\pi d} \varphi, \quad (1.20)$$

уравнение (1.12) может быть переписано в форме волнового уравнения для векторного потенциала \vec{A} , более привычного для макроскопической электродинамики:

$$\text{grad div} \vec{A} - \Delta \vec{A} = -\frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c} \vec{J}. \quad (1.21)$$

При этом векторный потенциал связан с электрическим \vec{E} и магнитным \vec{H} полями стандартными выражениями

$$\vec{H} = \text{rot}\vec{A}, \quad \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (1.22)$$

скалярный потенциал предполагается равным нулю, а плотность тока связана с A_x и A_y соотношениями (1.1).

По аналогии с тем, как выделяют волны поперечно-электрической (ТЕ), $\vec{E} \perp \vec{n}$, и поперечно-магнитной (ТМ), $\vec{H} \perp \vec{n}$, поляризации, связывая их с нормалью к поверхности образца \vec{n} , в слоистых сверхпроводниках, как в структурах с одноосной анизотропией, поляризации волн связывают с кристаллографической осью \mathbf{c} (вдоль которой направлен джозефсоновский ток). Таким образом, в слоистых сверхпроводниках ДПВ можно представить в виде суммы так называемых обыкновенной (в которой $\vec{E} \perp \mathbf{c}$) и необыкновенной (в которой $\vec{H} \perp \mathbf{c}$) волн.

Как можно заметить из уравнений (1.20)–(1.22), моды, распространяющиеся в слоистом сверхпроводнике, нелинейны только в тех случаях, когда $A_z \neq 0$, а следовательно и $E_z \neq 0$. В выбранной нами системе координат волны обыкновенной поляризации имеют $E_z = 0$, а волны необыкновенной поляризации перпендикулярны обыкновенным, у них $H_z = 0$. С этим связано удобство выбора таких поляризаций: волны обыкновенной поляризации всегда линейны, в то время как волны необыкновенной поляризации могут быть нелинейными.

В работе [64] рассмотрены теоретически линейные и нелинейные ДПВ волны в ограниченных слоистых сверхпроводниках и получены спектры как обыкновенных, так и необыкновенных собственных мод в случае их распространения вдоль кристаллографической оси \mathbf{c} или вдоль плоскости \mathbf{ab} . В частности, получено дисперсионное соотношение для обыкновенных мод:

$$\omega^2 = \omega_J^2 (q^2 \lambda_c^2 + \gamma^2), \quad (1.23)$$

где $q^2 = q_x^2 + q_y^2 + q_z^2$, $\gamma = \lambda_c / \lambda_{ab}$ – параметр анизотропии. Из этого соотношения видим, что распространяющиеся в сверхпроводнике обыкновенные моды с вещественными q должны иметь частоты ω в $\gamma \gg 1$ раз большие, чем джозефсоновская частота ω_J . Однако на таких частотах происходит разрушение куперовских пар. Это означает, что по крайней мере одна из компонент волнового вектора обыкновенных мод должна быть мнимой, то есть амплитуда обыкновенных волн должна затухать по крайней мере в одном из направлений. Только в этом случае частота обыкновенной моды может принадлежать терагерцевому диапазону.

Как было указано выше, необыкновенные моды, в отличие от обыкновенных, являются нелинейными. В работе [64] был получен закон дисперсии таких мод:

$$\omega^2 = \omega_J^2 \left(1 + \frac{q_{\perp}^2 \lambda_c^2}{q_z^2 \lambda_{ab}^2 + 1} \right) - \beta \omega_J^2 \frac{a_1^2}{A_0^2}, \quad (1.24)$$

где

$$A_0^2 = \frac{c}{\pi J_c \lambda_c^2} \left(\frac{\Phi_0}{\pi d} \right)^3. \quad (1.25)$$

Слагаемое $\beta \omega_J^2 a_1^2 / A_0^2$ обусловлено нелинейностью, коэффициент $\beta = 9/4$ для мод с $q_z \neq 0$ и $\beta = 3$ для моды с $q_z = 0$, $q_{\perp}^2 = q_x^2 + q_y^2$.

Из уравнения (1.24) видно, что необыкновенная волна может распространяться при частотах в интервале

$$\omega_J \sqrt{1 - \beta a_1^2 / A_0^2} < \omega < \omega_J \sqrt{\lambda_c^2 q_{\perp}^2 + 1 - \beta a_1^2 / A_0^2}. \quad (1.26)$$

Для необыкновенных мод можно выделить две частотные области. В одной из них, а именно в интервале (1.26), все компоненты волнового вектора вещественны, что соответствует бегущей волне. При других частотах волна затухает в одном из направлений. Нелинейность эффективно уменьшает и нижнюю, и верхнюю границы интервала (1.26), тем самым понижая диапазон частот, при которых могут существовать бегущие необыкновенные волны.

2. НЕЛИНЕЙНЫЕ ДПВ В СЛОИСТЫХ СВЕРХПРОВОДНИКАХ, ПОМЕЩЕННЫХ В ВОЛНОВОД

Данный раздел, основанный на работе [11], посвящен изучению отражения и прохождения *нелинейных* волн терагерцевого диапазона сквозь слоистые сверхпроводники *конечных* размеров, помещенные в вакуумный прямоугольный волновод. Мы рассматриваем конфигурацию, когда сверхпроводящие слои параллельны оси волновода. В разделе будет описано поведение нелинейных волн только для тех случаев, когда не происходит трансформации их поляризации. Трансформация поляризации нелинейных волн будет рассмотрена ниже в разделе 3.

Обсуждается случай слабой нелинейности, когда плотность джоузефсоновского тока $J_c \sin \varphi$ можно представить в виде $J_c \sin \varphi \approx J_c (\varphi - \varphi^3 / 6)$. Даже в этом случае линейные слагаемые в уравнении (1.12) могут практически компенсировать друг друга, и тогда, несмотря

на слабость нелинейности, в распространении волны могут проявляться сильные нелинейные эффекты (см. подраздел 1.6).

Мы изучаем вакуумный волновод с поперечными размерами L_1 и L_2 , в котором находится образец слоистого сверхпроводника толщины D . Напомним, что мы считаем число слоев достаточно большим, чтобы можно было перейти к непрерывному пределу и не учитывать пространственное распределение электромагнитного поля в каждом слое. Как и в предыдущих разделах, координатная система выбрана таким образом, чтобы кристаллографическая плоскость **ab** слоистого сверхпроводника совпадала с плоскостью xu , а кристаллографическая ось **c** была направлена вдоль оси z .

Пусть электромагнитная волна частоты ω распространяется вдоль сверхпроводящих слоев образца в волноводе, то есть ось x теперь параллельна оси волновода (см. рис. 2.1). Мы рассматриваем нелинейные волны с поляризацией

$$\vec{E} = \{0, 0, E_z\}, \quad \vec{H} = \{H_x, H_y, 0\}, \quad (2.1)$$

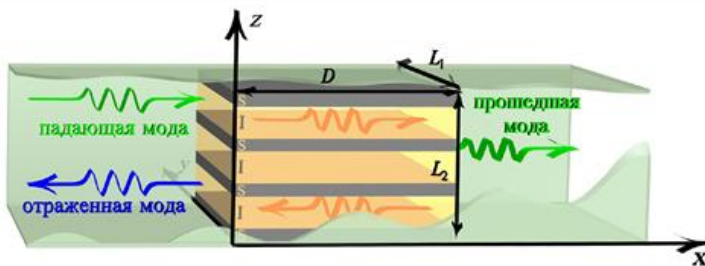


Рис. 2.1. Геометрия задачи, в которой волны распространяются вдоль сверхпроводящих слоев. Обозначения: S и I – сверхпроводящие и диэлектрические слои, соответственно, D – толщина образца, L_1 и L_2 – поперечные размеры волновода

в которой магнитное поле параллельно поверхности образца, а электрическое поле перпендикулярно сверхпроводящим слоям. В этом случае не происходит трансформации поляризации в прошедшей и отраженной волнах. В образце при этом возбуждается только необыкновенная волна.

2.1. Коэффициент прохождения нелинейной волны

Запишем поля в вакуумных областях (см. рис. 2.1). В первой вакуумной области ($x < 0$) поле представлено падающей и отраженной волнами с амплитудами H_i и H_r , соответственно. Используя граничные условия (равенство нулю компонент электрического поля на границах волновода)

и уравнения Максвелла, получаем следующие выражения для ненулевых тангенциальных компонент поля в первой вакуумной области:

$$\begin{aligned} E_z^{v1} &= -[H_i \cos(k_x x - \omega t) - H_r \cos(k_x x + \omega t + \alpha)] \sin(k_y y), \\ H_x^{v1} &= -\frac{k_y}{k} [H_i \sin(k_x x - \omega t) + H_r \sin(k_x x + \omega t + \alpha)] \cos(k_y y), \\ H_y^{v1} &= \frac{k_x}{k} [H_i \cos(k_x x - \omega t) + H_r \cos(k_x x + \omega t + \alpha)] \sin(k_y y). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Во второй вакуумной области ($x > D$) есть только прошедшая волна с амплитудой H_t . Компоненты поля в этой области можно представить в виде:

$$\begin{aligned} E_z^{v2} &= -H_t \cos[k_x(x - D) - \omega t + \beta] \sin(k_y y), \\ H_x^{v2} &= -\frac{k_y}{k} H_t \sin[k_x(x - D) - \omega t + \beta] \cos(k_y y), \\ H_y^{v2} &= \frac{k_x}{k} H_t \cos[k_x(x - D) - \omega t + \beta] \sin(k_y y), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$k_x = (k^2 - k_y^2)^{1/2}, \quad k_y = \frac{n_1 \pi}{L_1}, \quad (2.4)$$

$k = \omega/c$, n_1 – неотрицательное целое число, которое определяет распространяющиеся моды в волноводе, α и β – сдвиги фаз в отраженной и прошедшей модах, соответственно. Отметим, что мы рассматриваем волноводные моды с нулевым k_z .

Электромагнитное поле внутри слоистого сверхпроводника определяется распределением калибровочно-инвариантной разности фаз $\varphi(x, y, t)$ параметра порядка между соседними слоями (см., например, работу [2]). Соотношения между компонентами поля и разностью фаз $\varphi(x, y, t)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\lambda_{ab}^2}{c} \frac{\partial^2 H_y}{\partial t \partial z}, \quad E_y = \frac{\lambda_{ab}^2}{c} \frac{\partial^2 H_x}{\partial t \partial z}, \quad E_z = H_0 \frac{1}{\omega_j \sqrt{\varepsilon}} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= \frac{H_0}{\lambda_c} \left[\sin \varphi + \frac{1}{\omega_j^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right], \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $H_0 = \Phi_0 / 2\pi d \lambda_c$, $\Phi_0 = \pi \hbar c / e$ – квант магнитного потока, λ_{ab} и $\lambda_c = c / \omega_j \varepsilon^{1/2}$ – лондоновские глубины проникновения поперек и вдоль слоев, соответственно. Разность фаз φ определяется связанными синусоидальными уравнениями Гордона, описанными в разделе 1.4, и для рассматриваемой поляризации (2.1) записывается в виде:

$$\left(\frac{1}{\omega_j^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + k_y^2 \lambda_c^2 \varphi + \sin \varphi \right) - \lambda_c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0. \quad (2.6)$$

Из уравнения (2.6) следует, что линейные ДПВ могут распространяться в волноводе, если их частота превышает частоту отсечки ω_{cut} ,

$$\omega_{\text{cut}} = \omega_j (1 + k_y^2 \lambda_c^2)^{1/2}. \quad (2.7)$$

Мы рассматриваем случай слабой нелинейности, когда $\sin \varphi \approx \varphi - \varphi^3/6$ и частота ω близка к ω_j , и ищем решение уравнения (2.6) в форме волны с амплитудой a и фазой η , зависящими от x :

$$\varphi(x, y, t) = a(x) \mu \tilde{\kappa} \sin[\eta(x) - \omega t] \sin(k_y y), \quad (2.8)$$

где

$$\mu = \frac{8}{3} \sqrt{2}, \quad \tilde{\kappa} = |\Omega^2 - \Omega_{\text{cut}}^2|^{1/2}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_j}, \quad \Omega_{\text{cut}} = \frac{\omega_{\text{cut}}}{\omega_j}. \quad (2.9)$$

Вводя безразмерную координату x и нормированную толщину образца,

$$\xi = \frac{x}{\lambda_c} \tilde{\kappa}, \quad \tilde{\delta} = \frac{D}{\lambda_c} \tilde{\kappa} \quad (2.10)$$

и подставляя разность фаз из уравнения (2.8) в уравнение (2.6), получаем два дифференциальных уравнения для функций $\eta(\xi)$ и $a(\xi)$:

$$\eta'(\xi) = \frac{L}{a^2(\xi)}, \quad (2.11 \text{ а})$$

$$a''(\xi) = -\sigma a(\xi) - a^3(\xi) + \frac{L^2}{a^3(\xi)}, \quad (2.11 \text{ б})$$

где $\sigma = \text{sign}(\Omega - \Omega_{\text{cut}})$, L – константа интегрирования, штрих обозначает производную по ξ .

Используя уравнения (2.8) и (2.5), запишем ненулевые тангенциальные компоненты поля в образце:

$$\begin{aligned} E_z &= -H_0 \lambda_c \mu \tilde{\kappa} k a(\xi) \cos[\eta(\xi) - \omega t] \sin(k_y y), \\ H_y &= H_0 \mu \tilde{\kappa}^2 \left\{ a(\xi) \sin[\eta(\xi) - \omega t] \right\}'_{\xi} \sin(k_y y). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Связывая тангенциальные компоненты поля в вакууме (2.2), (2.3) и сверхпроводнике (2.12) на двух границах (при $x=0$ и $x=D$), приходим к следующей системе уравнений для амплитуд и фаз волн:

$$\begin{aligned}
h_i - h_r \cos \alpha &= a(0) \cos \eta(0), \\
h_r \sin \alpha &= a(0) \sin \eta(0), \\
h_i + h_r \cos \alpha &= \tilde{\Gamma} [a'(0) \sin \eta(0) + a(0) \eta'(0) \cos \eta(0)], \\
h_r \sin \alpha &= \tilde{\Gamma} [a'(0) \cos \eta(0) - a(0) \eta'(0) \sin \eta(0)], \\
h_i \cos \beta &= a(\tilde{\delta}) \cos \eta(\tilde{\delta}), \\
h_i \sin \beta &= a(\tilde{\delta}) \sin \eta(\tilde{\delta}), \\
h_r \cos \beta &= \tilde{\Gamma} [a'(\tilde{\delta}) \sin \eta(\tilde{\delta}) + a(\tilde{\delta}) \eta'(\tilde{\delta}) \cos \eta(\tilde{\delta})], \\
h_r \sin \beta &= -\tilde{\Gamma} [a'(\tilde{\delta}) \cos \eta(\tilde{\delta}) - a(\tilde{\delta}) \eta'(\tilde{\delta}) \sin \eta(\tilde{\delta})],
\end{aligned} \tag{2.13}$$

где $\tilde{\Gamma} = \tilde{\kappa} / (k_x \lambda_c)$, а амплитуды нормированы следующим образом,

$$h_n = \frac{H_n}{H_0 k \lambda_c \mu \tilde{\kappa}}, \quad n = i, r, t. \tag{2.14}$$

Система (2.13) приводит к уравнениям для амплитуд $a(0)$, $a(\tilde{\delta})$ и производных $a'(0)$, $a'(\tilde{\delta})$, а также к уравнению для амплитуды h_i прошедшей волны:

$$\left[\tilde{\Gamma} a'(0) \right]^2 + \left[\frac{\tilde{\Gamma} L}{a(0)} + a(0) \right]^2 = 4h_i^2, \tag{2.15 а}$$

$$a^2(\tilde{\delta}) = \tilde{\Gamma} L, \tag{2.15 б}$$

$$a'(\tilde{\delta}) = 0, \tag{2.15 в}$$

$$h_r^2 = a^2(\tilde{\delta}). \tag{2.15 г}$$

Уравнения (2.15) совместно с уравнениями (2.11) определяют константу интегрирования L для каждой амплитуды падающей волны h_i . В соответствии с уравнением (2.15 б) константа L непосредственно определяет коэффициент прохождения T :

$$T = \frac{h^2(\tilde{\delta})}{h_i^2} = \frac{\tilde{\Gamma}}{h_i^2} L. \tag{2.16}$$

В следующих подразделах мы анализируем зависимость коэффициента прохождения T от амплитуды падающей волны h_i в случаях отрицательной и положительной отстройки ($\Omega - \Omega_{\text{cut}}$) (для отрицательных и положительных σ). Как будет показано, зависимость $T(h_i)$ многозначна, что связано с нелинейностью уравнений (2.11).

2.2. Отрицательные отстройки частоты

Начнем рассмотрение со случая отрицательных отстроек ($\sigma = -1$), когда

$$\Omega < \Omega_{\text{cut}}. \quad (2.17)$$

Как было отмечено ранее, линейные волны вдоль слоев не могут распространяться при таких условиях, и для них коэффициент прохождения экспоненциально мал. Однако из-за эффективного уменьшения частоты отсечки нелинейные волны могут распространяться.

Используя уравнения (2.11) и условия (2.15), мы находим константу интегрирования L и коэффициент прохождения T , определенный выражением (2.16). На рисунке 2.2 представлена зависимость $T(h_i)$.

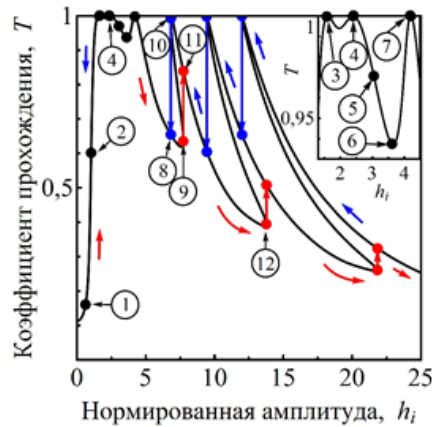


Рис. 2.2. Зависимость коэффициента прохождения T от нормированной амплитуды падающей волны h_i для отрицательной отстройки, $\Omega - \Omega_{\text{cut}} < 0$.

Движение вдоль нижних красных (верхних синих) стрелок демонстрирует изменение коэффициента прохождения при увеличении (уменьшении) амплитуды h_i . Числа около точек на кривой $T(h_i)$ соответствуют числам на фазовых траекториях $a'(a)$, представленных на рис. 2.3. Вставка показывает увеличенную область около первых трех максимумов зависимости $T(h_i)$.

Значения параметров: $\tilde{\kappa} = 0,1$, $\delta = 1,5$ ($D = 15\lambda_c$), $\lambda_c = 4 \cdot 10^{-3}$ см, $\lambda_{ab} = 2000 \text{ \AA}$, $\omega_j / 2\pi = 0,3$ ТГц, $n_1 = 1$ и $L_1 = 0,1$ см

В последующем анализе мы также рассмотрим фазовые траектории $a'(a)$. Проинтегрировав уравнение (2.11 б) и используя (2.11 а), (2.15 б), приходим к уравнению для фазовых траекторий $a'(a)$:

$$a'^2(a) = \sigma[a^2(\delta) - a^2] + \frac{1}{2}[a^4(\delta) - a^4] + \frac{a^4(\delta)}{\tilde{\Gamma}^2}[a^{-2}(\delta) - a^{-2}] \quad (2.18)$$

Фазовые траектории $a'(a)$ продемонстрированы на нижних панелях рисунка 2.3. Движение вдоль пространственной координаты ξ (пропорциональной x , как определено в уравнении (2.10)) от нуля до δ указано стрелками. Верхние панели рисунка 2.3 представляют 3D кривые для зависимостей a и a' от координаты ξ . Каждая траектория соответствует определенному значению падающей амплитуды h_i . В соответствии с уравнениями (2.15 б) и (2.16) значение $a(\delta)$ определяет коэффициент прохождения образца.

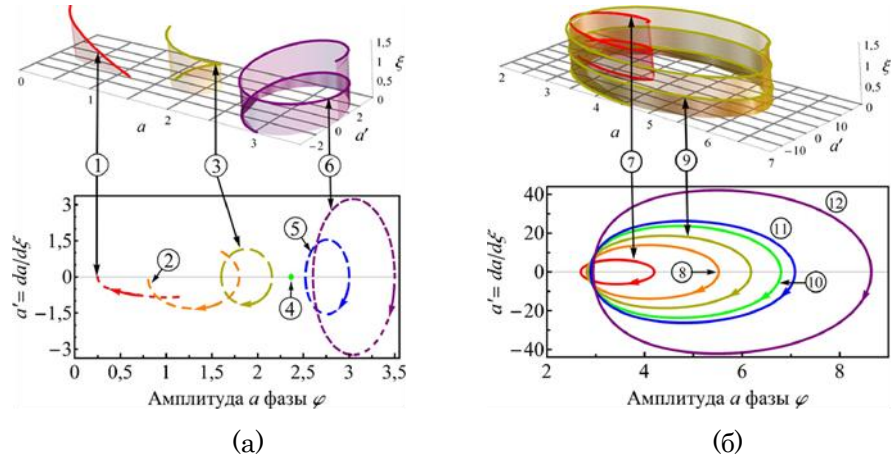


Рис. 2.3. Фазовые траектории $a'(a)$ для отрицательных отстроек, $\Omega - \Omega_{\text{cut}} < 0$. Траектории панелей (а) и (б) соответствуют точкам от 1 до 6 и от 7 до 12 на графике $T(h_i)$, показанном на рис. 2.2. Верхняя панель демонстрирует 3D зависимости a и a' от пространственной координаты ξ вдоль образца (для точек 1, 3, 6, 7 и 9 на рис. 2.2). Значения параметров такие же, как на рис. 2.1

Рассмотрим зависимость коэффициента прохождения T от амплитуды падающей волны h_i , представленную на рис. 2.2. При увеличении амплитуды h_i коэффициент прохождения растет, следуя красным нижним стрелкам и проходя точки 1 и 2 на графике $T(h_i)$. При таких амплитудах фазовые траектории $a'(a)$ являются незамкнутыми кривыми (см. кривые 1 и 2 на рис. 2.3). В точке 3 (при $h_i \approx 1,7$) коэффициент прохождения достигает максимального значения $T = 1$ и фазовая траектория превращается в замкнутую петлю (кривая 3 на рис. 2.3). Затем, с увеличением h_i , коэффициент прохождения осциллирует, достигая максимального значения $T = 1$ в точках 4 и 7 на рис. 2.2. Интересной особенностью задачи является то, что существует особое значение $h_i \approx 2,4$, где фазовые траектории $a'(a)$ сжимаются в точку (см. точку 4 на рис. 2.3). При таком значении h_i ам-

плитуда a электромагнитной волны, заданная уравнениями (2.12), постоянна внутри образца, фаза η изменяется линейно при изменении ξ , как это происходит для линейных волн, и образец оказывается полностью прозрачным (см. точку 4 на рис. 2.3). Дальнейшее плавное изменение коэффициента прохождения при увеличении h_i прерывается в точке 9 (при $h_i \approx 7,7$) на рис. 2.2, и происходит скачок на верхнюю ветвь зависимости $T(h_i)$ (в точку 11). При дальнейшем увеличении амплитуды падающей волны возникают новые аналогичные скачки (см., например, точку 12).

Теперь рассмотрим зависимость $T(h_i)$ при уменьшении амплитуды падающей волны h_i , следуя верхним синим стрелкам на рис. 2.2. При уменьшении h_i коэффициент прохождения растет до тех пор, пока образец не станет полностью прозрачным. В этой точке плавная зависимость $T(h_i)$ прерывается и дальнейшее движение возможно только после скачка на нижнюю ветвь. Как видно из рис. 2.2, уменьшение амплитуды h_i приводит к подобному поведению $T(h_i)$ (плавный рост до единицы с последующим скачком на нижележащую ветвь) вплоть до тех пор, пока не будет достигнута точка 10 ($h_i \approx 6,8$), где происходит последний скачок (в точку 8). Дальнейшее уменьшение амплитуды не вызывает скачков.

На рис. 2.4 проиллюстрировано пространственное распределение амплитуды электрического поля внутри волновода для трех значений амплитуды h_i падающей волны. Панель рис. 2.4 (1) соответствует точке 10 на рис. 2.2.

Образец в этих условиях практически полностью прозрачен, отраженная волна имеет очень малую амплитуду, и поэтому в первой вакуумной области (при $x < 0$) наблюдается весьма размытая интерференционная картина. Панели рис. 2.4 (2) и (3) соответствуют точкам 11 и 12 на рис. 2.2. Они демонстрируют более выраженную интерференционную картину в области при $x < 0$. Отметим, что распределение поля вдоль оси y соответствует значению $n_1 = 1$.

2.3. Положительные отстройки частоты

Теперь перейдем к случаю положительных отстроек ($\sigma = +1$), когда

$$\Omega > \Omega_{\text{cut}}. \quad (2.19)$$

В этом случае даже линейные волны могут распространяться вдоль сверхпроводящих слоев. Поэтому коэффициент прохождения в линейном режиме не мал. Он изменяется в широком диапазоне, от нуля до единицы, в зависимости от соотношения между толщиной образца и длиной волны.

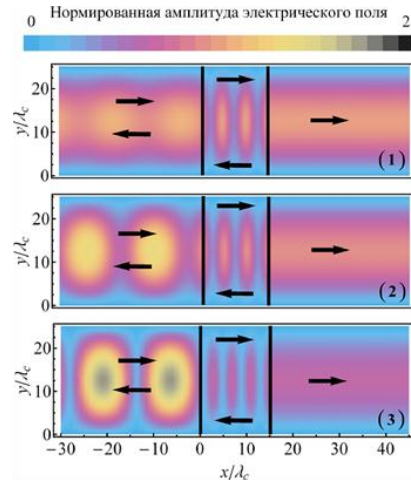


Рис. 2.4. Пространственное распределение амплитуды электрического поля (нормированной на амплитуду падающей волны H_i) внутри волновода. Панели (1), (2) и (3) соответствуют точкам 10, 11 и 12 на рис. 2.2, соответственно. Цвет определяет величину амплитуды. Вертикальные прямые линии показывают границы образца. Значения параметров те же, что и на рис. 2.2

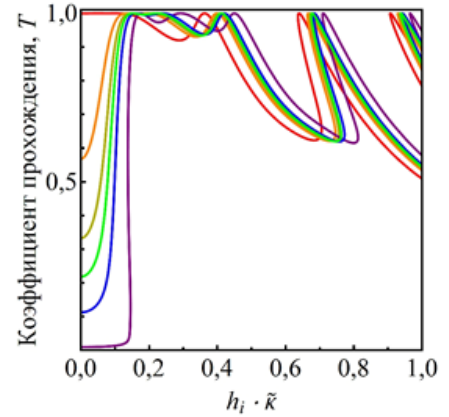


Рис. 2.5. Зависимость коэффициента прохождения T от величины $h_i \cdot \tilde{k}$ для разных отстроек частоты. Положительным отстройкам частоты, $\Omega - \Omega_{\text{cut}} > 0$, соответствуют три верхние (при $h_i = 0$) кривые с $\tilde{k} = 0,2, 0,1$ и $0,05$ (сверху вниз). Отрицательным отстройкам частоты, $\Omega - \Omega_{\text{cut}} < 0$, соответствуют три нижние (при $h_i = 0$) кривые с $\tilde{k} = 0,2, 0,1$ и $0,05$ (снизу вверх). Остальные параметры те же, как и на рис. 2.2

Рисунок 2.5 демонстрирует зависимости коэффициента прохождения от амплитуды падающей волны для разных отстроек частоты. Для правильного сопоставления кривых мы используем здесь нормировку амплитуды падающей волны, независящую от \tilde{k} и поэтому отличную от уравнения (2.2). А именно, мы строим кривые в функции параметра $h_i \cdot \tilde{k} = H_i / (H_0 k \lambda_c \mu)$. Как видно из графика, коэффициент прохождения T существенно зависит от отстройки частоты (от \tilde{k} и σ) при малых значениях $h_i \cdot \tilde{k}$. Однако при больших $h_i \cdot \tilde{k}$ все зависимости T от амплитуды падающей волны демонстрируют похожее поведение. Это значит, что для достаточно больших значений амплитуды H_i нелинейность влияет сильнее на коэффициент прохождения, чем отстройка частоты.

Таким образом, гистерезисное поведение $T(h_i)$ со скачками должно наблюдаться как для положительных, так и для отрицательных отстроек частоты.

3. ТРАНСФОРМАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН

В данном разделе изучена *трансформация* поляризации *нелинейных* волн при их отражении и прохождении сквозь образец слоистого сверхпроводника *конечной* толщины, помещенный в вакуумный прямоугольный волновод. Считаем, что волны распространяются вдоль слоев, то есть ось волновода параллельна сверхпроводящим слоям (см. рис. 3.1). Трансформация поляризации отраженных и прошедших волн обусловлена сильной анизотропией границы раздела сверхпроводник-вакуум (плоскость yz). Как и в предыдущих разделах, координатная система выбрана таким образом, что кристаллографическая плоскость ab слоистого сверхпроводника совпадает с плоскостью xz , а ось c направлена вдоль оси z . Рассматриваем случай слабой нелинейности (см. подраздел 1.6). Обсуждение основано на материалах работ [13] и [15]. В них была рассчитана зависимость коэффициентов трансформации от амплитуды падающей волны в случае падения поперечной магнитной (TM) моды или поперечной электрической (TE) моды.

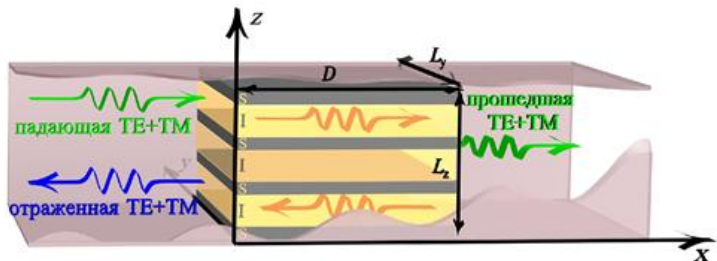


Рис. 3.1. Геометрия задачи о трансформации поляризации нелинейных волн. Обозначения: S и I – сверхпроводящие и диэлектрические слои, соответственно, D – толщина образца, L_y и L_z – поперечные размеры волновода

Основной результат работы заключается в выявлении специфического *аналога принципа суперпозиции*, который справедлив даже в нелинейном случае. Мы обсуждаем две взаимно ортогональные поляризации волн, связанные с осью y , которая перпендикулярна как оси волновода (оси x), так и кристаллографической оси c слоистого сверхпроводника (ось z). Магнитное поле волны первой поляризации (мы будем ее называть H_{\perp} поляризация) и электрическое поле волны второй поляризации (будем называть ее E_{\perp} поляризация) перпендикулярны оси y . Мы показываем, что, несмотря на нелинейность, волны поляризаций H_{\perp} и E_{\perp} практически не взаимодействуют друг с другом и для них справедлив

своеобразный аналог принципа суперпозиции. Поэтому для изучения отражения, прохождения и взаимной трансформации нелинейных ТЕ и ТМ волн (или волн любых других поляризаций) можно предпринять следующие шаги:

1. Представить падающую волну в виде *суперпозиции* мод H_{\perp} и E_{\perp} поляризаций;
2. Изучить отражение и прохождения этих мод *раздельно*;
3. Представить отраженные и прошедшие поля H_{\perp} и E_{\perp} мод в виде *суперпозиции* ТЕ и ТМ мод.

Мы рассматриваем волновод с поперечными размерами L_y и L_z , внутри которого находится образец слоистого сверхпроводника толщины D (см. рис. 3.1). Электромагнитная мода частоты ω распространяется в волноводе вдоль оси x , которая параллельна сверхпроводящим слоям. Падающая волна частично отражается и частично проходит сквозь образец, как схематично показано на рис. 3.1. Электрические $\vec{E}(\vec{r}, t)$ и магнитные $\vec{H}(\vec{r}, t)$ поля в волноводе связаны с векторным потенциалом $\vec{A}(\vec{r}, t)$ стандартными выражениями (1.22). Используя граничные условия (равенство нулю тангенциальных компонент электрического поля на стенках волновода), запишем компоненты векторного потенциала в следующей форме:

$$\begin{aligned} A_x(\vec{r}, t) &= A_x(x, t) \sin(k_y y) \sin(k_z z), \\ A_y(\vec{r}, t) &= A_y(x, t) \cos(k_y y) \sin(k_z z), \\ A_z(\vec{r}, t) &= A_z(x, t) \sin(k_y y) \cos(k_z z), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $k_y = \pi n_y / L_y$, $k_z = \pi n_z / L_z$; n_y и n_z — положительные целые числа, определяющие распространяющиеся моды в волноводе. Выражения для $A_x(x, t)$, $A_y(x, t)$ и $A_z(x, t)$ в различных областях волновода будут представлены ниже.

3.1. Электромагнитные поля в вакууме и в образце слоистого сверхпроводника

Электромагнитное поле в вакууме может быть представлено в виде суперпозиции волн H_{\perp} и E_{\perp} поляризаций. В волне H_{\perp} поляризации магнитное поле перпендикулярно оси y ,

$$\vec{E}^{(1)} = \{E_x^{(1)}, E_y^{(1)}, E_z^{(1)}\}, \quad \vec{H}^{(1)} = \{H_x^{(1)}, 0, H_z^{(1)}\}, \quad (3.2)$$

в то время как в волне E_{\perp} поляризации электрическое поле перпендикулярно оси y ,

$$\vec{E}^{(2)} = \{E_x^{(2)}, 0, E_z^{(2)}\}, \quad \vec{H}^{(2)} = \{H_x^{(2)}, H_y^{(2)}, H_z^{(2)}\}. \quad (3.3)$$

Здесь и дальше верхние индексы (1) и (2) обозначают волны \mathbf{H}_\perp и \mathbf{E}_\perp поляризацій, соответственно.

В первой вакуумной области (при $x < 0$) существуют падающие и отраженные волны. Векторный потенциал $\vec{\mathbf{A}}_{\text{inc}}(x, t)$ падающей волны может быть представлен как суперпозиция волн \mathbf{H}_\perp и \mathbf{E}_\perp поляризацій. С помощью уравнений Максвелла получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} A_{x \text{ inc}}(x, t) &= -H_{\text{inc}}^{(1)} \frac{k_x k_y}{k^3} \sin(k_x x - \omega t + \varphi_{\text{inc}}^{(1)}) - H_{\text{inc}}^{(2)} \frac{k_z}{k^2} \sin(k_x x - \omega t + \varphi_{\text{inc}}^{(2)}), \\ A_{y \text{ inc}}(x, t) &= -H_{\text{inc}}^{(1)} \frac{k^2 - k_y^2}{k^3} \cos(k_x x - \omega t + \varphi_{\text{inc}}^{(1)}), \\ A_{z \text{ inc}}(x, t) &= H_{\text{inc}}^{(1)} \frac{k_y k_z}{k^3} \cos(k_x x - \omega t + \varphi_{\text{inc}}^{(1)}) - H_{\text{inc}}^{(2)} \frac{k_x}{k^2} \cos(k_x x - \omega t + \varphi_{\text{inc}}^{(2)}), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $H_{\text{inc}}^{(1)}$ и $\varphi_{\text{inc}}^{(1)}$, $H_{\text{inc}}^{(2)}$ и $\varphi_{\text{inc}}^{(2)}$ – амплитуды и фазы магнитного поля падающих волн \mathbf{H}_\perp и \mathbf{E}_\perp поляризацій.

Подобные выражения могут быть записаны для векторного потенциала отраженных волн,

$$\begin{aligned} A_{x \text{ ref}}(x, t) &= -H_{\text{ref}}^{(1)} \frac{k_x k_y}{k^3} \sin(k_x x + \omega t - \varphi_{\text{ref}}^{(1)}) + H_{\text{ref}}^{(2)} \frac{k_z}{k^2} \sin(k_x x + \omega t - \varphi_{\text{ref}}^{(2)}), \\ A_{y \text{ ref}}(x, t) &= -H_{\text{ref}}^{(1)} \frac{k^2 - k_y^2}{k^3} \cos(k_x x + \omega t - \varphi_{\text{ref}}^{(1)}), \\ A_{z \text{ ref}}(x, t) &= H_{\text{ref}}^{(1)} \frac{k_y k_z}{k^3} \cos(k_x x + \omega t - \varphi_{\text{ref}}^{(1)}) + H_{\text{ref}}^{(2)} \frac{k_x}{k^2} \cos(k_x x + \omega t - \varphi_{\text{ref}}^{(2)}), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $H_{\text{ref}}^{(1)}$ и $\varphi_{\text{ref}}^{(1)}$, $H_{\text{ref}}^{(2)}$ и $\varphi_{\text{ref}}^{(2)}$ – амплитуды и фазы магнитного поля отраженных волн \mathbf{H}_\perp и \mathbf{E}_\perp поляризацій.

Во второй вакуумной области (при $x > D$) распространяются прошедшие волны, векторный потенциал которых может быть записан в форме:

$$\begin{aligned} A_{x \text{ tr}}(x, t) &= -H_{\text{tr}}^{(1)} \frac{k_x k_y}{k^3} \sin[k_x(x - D) - \omega t + \varphi_{\text{tr}}^{(1)}] - H_{\text{tr}}^{(2)} \frac{k_z}{k^2} \sin[k_x(x - D) - \omega t + \varphi_{\text{tr}}^{(2)}], \\ A_{y \text{ tr}}(x, t) &= -H_{\text{tr}}^{(1)} \frac{k^2 - k_y^2}{k^3} \cos[k_x(x - D) - \omega t + \varphi_{\text{tr}}^{(1)}], \\ A_{z \text{ tr}}(x, t) &= H_{\text{tr}}^{(1)} \frac{k_y k_z}{k^3} \cos[k_x(x - D) - \omega t + \varphi_{\text{tr}}^{(1)}] - H_{\text{tr}}^{(2)} \frac{k_x}{k^2} \cos[k_x(x - D) - \omega t + \varphi_{\text{tr}}^{(2)}] \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $H_{\text{tr}}^{(1)}$ и $\varphi_{\text{tr}}^{(1)}$, $H_{\text{tr}}^{(2)}$ и $\varphi_{\text{tr}}^{(2)}$ – амплитуды и фазы магнитного поля прошедших волн \mathbf{H}_\perp и \mathbf{E}_\perp поляризацій.

Для нахождения электромагнитного поля в образце слоистого сверхпроводника мы используем уравнения для векторного потенциала (1.20), (1.21) и плотностей токов (1.1), (1.2). Эти выражения образуют

полный набор уравнений для нахождения поля в континуальном пределе. Мы изучаем случай слабой нелинейности $|\varphi| \ll 1$, когда $\sin \varphi$ можно представить в виде $\varphi - \varphi^3/6$. Даже слабая нелинейность может приводить к сильно нелинейным эффектам, если частота волны близка к частоте отсечки ω_{cut} . Здесь ω_{cut} – это минимальная частота, с которой линейные волны могут распространяться в образце слоистого сверхпроводника (см. ниже формулу (3.10)).

В рассматриваемом здесь общем случае, когда падающая на образец волна содержит обе моды – волны с \mathbf{H}_\perp и \mathbf{E}_\perp поляризациями, в сверхпроводнике возбуждаются как необыкновенная, так и обыкновенная волны (см. подробней подраздел 1.7). Электрическое поле обыкновенной волны перпендикулярно оси z . Поэтому компонента A_z векторного потенциала и разность фаз φ (см. (1.20)) равны нулю для таких волн. Следовательно, обыкновенная волна не создает тока вдоль оси z , эта мода всегда линейна. Учитывая равенство $A_z = 0$, можно решить уравнение (1.21) и получить выражения для компонент векторного потенциала обыкновенной моды,

$$\begin{aligned} A_x^{\text{ord}} &= \frac{k_y}{k^2} [e^{-p_x x} H_-^{\text{ord}} \sin(\omega t - \varphi_-^{\text{ord}}) + e^{p_x(x-D)} H_+^{\text{ord}} \sin(\omega t - \varphi_+^{\text{ord}})], \\ A_y^{\text{ord}} &= \frac{p_x}{k^2} [e^{-p_x x} H_-^{\text{ord}} \sin(\omega t - \varphi_-^{\text{ord}}) - e^{p_x(x-D)} H_+^{\text{ord}} \sin(\omega t - \varphi_+^{\text{ord}})], \\ A_z^{\text{ord}} &= 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где

$$p_x = \sqrt{\frac{1}{\lambda_c^2} \left(\gamma^2 - \frac{\omega^2}{\omega_J^2} \right) + k_z^2 + k_y^2} \approx \lambda_{ab}^{-1},$$

H_-^{ord} и φ_-^{ord} , H_+^{ord} и φ_+^{ord} – амплитуды и фазы убывающих и нарастающих с увеличением x обыкновенных волн внутри образца.

Поляризация необыкновенной волны перпендикулярна обыкновенной, и ее магнитное поле перпендикулярно оси z . Именно у этой моды проявляются нелинейные свойства джозефсоновской плазмы. Мы ищем решение для A_z в форме волны с зависящими от x амплитудами $a(x)$ и фазами $\eta(x)$,

$$A_z^{\text{ext}} = H_0 \tilde{\Omega} \lambda_c a(x) \sin[\omega t - \eta(x)], \quad (3.8)$$

где

$$H_0 = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} \frac{\Phi_0}{d\lambda_c}, \quad \tilde{\Omega} = |\Omega^2 - \Omega_{\text{cut}}^2|^{1/2}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_J}. \quad (3.9)$$

Частота отсечки Ω_{cut} – это минимальная частота, с которой линейные необыкновенные ДПВ могут распространяться в слоистом сверхпроводнике,

$$\Omega_{\text{cut}} = \left(1 + \frac{k_y^2 \lambda_c^2}{1 + \lambda_{ab} k_z^2} \right)^{1/2}. \quad (3.10)$$

Вводя безразмерные координаты и нормированную толщину образца,

$$\xi = \frac{x}{\lambda_c} \tilde{\Omega}, \quad \delta = \frac{D}{\lambda_c} \tilde{\Omega}, \quad (3.11)$$

и подставляя уравнение (3.8) в уравнение (1.21), можно найти другие компоненты векторного потенциала необыкновенных мод,

$$\begin{aligned} A_x^{\text{ext}} &= H_0 \tilde{\Omega}^2 \lambda_{ab}^2 k_z [a \sin(\omega t - \eta)]', \\ A_y^{\text{ext}} &= H_0 \tilde{\Omega} \lambda_{ab}^2 \lambda_c k_y k_z a \sin(\omega t - \eta), \end{aligned} \quad (3.12)$$

и два дифференциальных уравнения для функций $\eta(\xi)$ и $a(\xi)$,

$$(a^2 \eta')' = 0, \quad (3.13 \text{ а})$$

$$a'' = -\sigma a - a^3 + a \eta'^2. \quad (3.13 \text{ б})$$

Здесь $\sigma = \text{sign}(\Omega - \Omega_{\text{cut}})$, а штрих обозначает производную по ξ . Мы будем использовать эти уравнения для численного анализа электромагнитного поля внутри образца слоистого сверхпроводника.

3.2. Аналог принципа суперпозиции

Используя уравнения для векторных потенциалов в вакууме (3.4)–(3.6) и сверхпроводнике (3.7), (3.8), (3.12), а также выражения (3.1), (1.22), можно связать тангенциальные компоненты электрических и магнитных полей на двух границах образца (при $x=0$ и $x=D$) и получить два набора уравнений. Граничные условия на первой границе ($x=0$) приводят к уравнениям:

$$\mu[\tilde{h}_{\text{inc}}^{(1)} + \tilde{h}_{\text{ref}}^{(1)}] = i(k_x \lambda_c)^{-1} \alpha \tilde{\gamma} \tilde{h}_{\text{ord}} - i \tilde{\gamma}^2 a(0) e^{i\eta(0)}, \quad (3.14 \text{ а})$$

$$\tilde{h}_{\text{inc}}^{(1)} + \tilde{h}_{\text{ref}}^{(1)} - \alpha[\tilde{h}_{\text{inc}}^{(2)} - \tilde{h}_{\text{ref}}^{(2)}] = ia(0) e^{i\eta(0)}, \quad (3.14 \text{ б})$$

$$\mu[\tilde{h}_{\text{inc}}^{(2)} + \tilde{h}_{\text{ref}}^{(2)}] = \tilde{\gamma}^2 \tilde{h}_{\text{ord}} - \beta[a(\xi) e^{i\eta(\xi)}]_{\xi=0}', \quad (3.14 \text{ в})$$

$$\alpha[\tilde{h}_{\text{inc}}^{(1)} - \tilde{h}_{\text{ref}}^{(1)}] + \tilde{h}_{\text{inc}}^{(2)} + \tilde{h}_{\text{ref}}^{(2)} = -\tilde{h}_{\text{ord}}, \quad (3.14 \text{ г})$$

где введены нормированные амплитуды волн H_{\perp} и E_{\perp} поляризаций в вакууме и обыкновенных мод в образце:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{\text{inc,ref,tr}}^{(1),(2)} &= h_{\text{inc,ref,tr}}^{(1),(2)} \exp[i\varphi_{\text{inc,ref,tr}}^{(1),(2)}], \quad h_{\text{inc,ref,tr}}^{(1),(2)} = \frac{k_y k_z}{H_0 k^3 \tilde{\Omega} \lambda_c} H_{\text{inc,ref,tr}}^{(1),(2)}, \\ \tilde{h}_{\pm}^{\text{ord}} &= h_{\pm}^{\text{ord}} \exp(i\varphi_{\pm}^{\text{ord}}), \quad h_{\pm}^{\text{ord}} = \frac{H_{\pm}^{\text{ord}}}{H_0 k^3 \tilde{\Omega} \lambda_c \lambda_{ab}^2} \end{aligned} \quad (3.15)$$

и параметры

$$\alpha = \frac{kk_x}{k_y k_z}, \quad \beta = \frac{\tilde{\Omega}}{kk_y k_z \lambda_c^3}, \quad \mu = \frac{k^2 - k_y^2}{k_y^2 k_z^2 \lambda_c^2}, \quad \tilde{\gamma} = \frac{\lambda_{ab}}{\lambda_c} = \gamma^{-1}. \quad (3.16)$$

Граничные условия на второй границе ($x = D$) приводят к уравнениям:

$$\mu \tilde{h}_{\text{tr}}^{(1)} = -i(k_x \lambda_c)^{-1} \alpha \tilde{\gamma} \tilde{h}_{+}^{\text{ord}} - i\tilde{\gamma}^2 a(\delta) e^{i\eta(\delta)}, \quad (3.17 \text{ а})$$

$$\tilde{h}_{\text{tr}}^{(1)} - \alpha \tilde{h}_{\text{tr}}^{(2)} = ia(\delta) e^{i\eta(\delta)}, \quad (3.17 \text{ б})$$

$$\mu \tilde{h}_{\text{tr}}^{(2)} = \tilde{\gamma}^2 \tilde{h}_{+}^{\text{ord}} - \beta [a(\xi) e^{i\eta(\xi)}]_{\xi=\delta}, \quad (3.17 \text{ в})$$

$$\alpha \tilde{h}_{\text{tr}}^{(1)} + \tilde{h}_{\text{tr}}^{(2)} = -\tilde{h}_{+}^{\text{ord}}. \quad (3.17 \text{ г})$$

Здесь мы пренебрегаем слагаемыми с $\exp(-p_x D)$, так как считаем, что толщина образца D много больше лондоновской глубины проникновения λ_{ab} .

Поскольку $\tilde{\gamma} = \lambda_{ab} / \lambda_c = 1$, правая часть уравнения (3.14 а) относительно мала. Таким образом, в главном приближении по параметру $\tilde{\gamma}$ мы получаем

$$\tilde{h}_{\text{ref}}^{(1)} \approx -\tilde{h}_{\text{inc}}^{(1)}. \quad (3.18)$$

Это означает, что падающая волна H_{\perp} поляризации *практически полностью отражается* от слоистого сверхпроводника, а амплитуда $\tilde{h}_{\text{tr}}^{(1)}$ прошедшей волны H_{\perp} поляризации гораздо меньше амплитуды $\tilde{h}_{\text{inc}}^{(1)}$ падающей волны, $|\tilde{h}_{\text{tr}}^{(1)} / \tilde{h}_{\text{inc}}^{(1)}| : \tilde{\gamma} = 1$. Более того, поведение H_{\perp} поляризованных волн *не зависит от наличия ортогональной моды с E_{\perp} поляризацией*.

В главном приближении по $\tilde{\gamma}$ выражения (3.14 б), (3.14 в) и (3.17 б), (3.17 в) дают следующие уравнения для описания отражения и прохождения волн E_{\perp} поляризации:

$$\begin{aligned}
-\alpha(\tilde{h}_{\text{inc}}^{(2)} - \tilde{h}_{\text{ref}}^{(2)}) &= i a(0) e^{i\eta(0)}, \\
\mu(\tilde{h}_{\text{inc}}^{(2)} + \tilde{h}_{\text{ref}}^{(2)}) &= -\beta e^{i\eta(0)} [a'(0) + ia(0)\eta'(0)], \\
-\alpha \tilde{h}_{\text{tr}}^{(2)} &= ia(\delta) e^{i\eta(\delta)}, \\
\mu \tilde{h}_{\text{tr}}^{(2)} &= -\beta e^{i\eta(\delta)} [a'(\delta) + ia(\delta)\eta'(\delta)].
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Данный набор уравнений так же, как и уравнения (3.13), не содержат параметров H_{\perp} поляризованной волны. Это означает, что отражение и прохождение волн с E_{\perp} поляризацией *не зависит от присутствия моды H_{\perp} поляризации*. Таким образом, мы видим, что в главном приближении по параметру анизотропии γ моды H_{\perp} и E_{\perp} поляризаций отражаются и проходят сквозь образец слоистого сверхпроводника независимо друг от друга. То есть для волн H_{\perp} и E_{\perp} поляризаций даже в сильно нелинейном режиме оказывается справедливым своеобразный аналог принципа суперпозиции. После нахождения амплитуд отраженных и прошедших волн H_{\perp} и E_{\perp} поляризаций мы можем использовать уравнения (3.14 г) и (3.17 г) для определения амплитуд $\tilde{h}_{-}^{\text{ord}}$ и $\tilde{h}_{+}^{\text{ord}}$ обыкновенных мод в слоистом сверхпроводнике.

С физической точки зрения независимость отражения и прохождения волн H_{\perp} и E_{\perp} поляризаций связана со следующими обстоятельствами. У падающей волны H_{\perp} поляризации присутствует y -компонента электрического поля, параллельная как границе раздела вакуум-сверхпроводник, так и кристаллографической плоскости \mathbf{ab} (см. уравнение (3.2)). Эта волна вызывает сильные токи экранирования вдоль слоев. Поэтому она проникает в слоистый сверхпроводник только на короткие расстояния в форме сильно затухающей волны и практически полностью отражается от образца, не оказывая влияния на распространение волны E_{\perp} поляризации. В то же время, у волны E_{\perp} поляризации нет y -компоненты электрического поля (см. уравнение (3.3)). Токи экранирования этой волны протекают только вдоль кристаллографической оси \mathbf{c} , они относительно малы в этом случае. Таким образом, волна E_{\perp} поляризации может распространяться в образце слоистого сверхпроводника и проникать на большие расстояния. Эта волна частично отражается и частично проходит сквозь образец, что и следует из системы уравнений (3.19).

Чтобы продемонстрировать представленный аналог принципа суперпозиции, мы рассмотрим три задачи отражения и прохождения, в которых падающая волна представляет собой: только моду H_{\perp} поляризации с $h_{\text{inc}}^{(1)} = 2$; только моду E_{\perp} поляризации с $h_{\text{inc}}^{(2)} = 2$; суперпозицию волн H_{\perp} и E_{\perp} поляризаций с $h_{\text{inc}}^{(1)} = h_{\text{inc}}^{(2)} = 2$. Рисунок 3.2 изображает про-

пространственное распределение нормированной характерной амплитуды \bar{W} электромагнитного поля внутри волновода для этих трех случаев,

$$\bar{W} = \frac{k_y k_z}{H_0 k^3 \tilde{\Omega} \lambda_c} \sqrt{\langle |\vec{E}(\vec{r}, t)|^2 + |\vec{H}(\vec{r}, t)|^2 \rangle_t}, \quad (3.20)$$

где $\langle \dots \rangle_t$ обозначает усреднение по времени t .

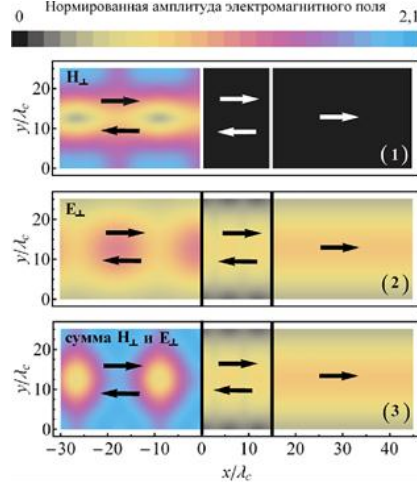


Рис. 3.2. Пространственное распределение (по координатам x и y при $z = L_z / 3$) нормированной амплитуды \bar{W} электромагнитного поля внутри волновода. На панели (1): $h_{\text{inc}}^{(1)} = 2$, $h_{\text{inc}}^{(2)} = 0$; на панели (2): $h_{\text{inc}}^{(1)} = 0$, $h_{\text{inc}}^{(2)} = 2$; на панели (3): $h_{\text{inc}}^{(1)} = h_{\text{inc}}^{(2)} = 2$. Цвет определяет значение амплитуды.

Прямые вертикальные линии показывают границы образца. Значения параметров: $\tilde{\Omega} = 0,1$, $\sigma = -1$, $D = 15\lambda_c$, $L_y = L_z = 0,1$ см, $n_y = n_z = 1$, $\varphi_{\text{inc}}^{(1)} = \varphi_{\text{inc}}^{(2)} = 0$, $\lambda_c = 4 \cdot 10^{-3}$ см, $\lambda_{ab} = 2000$ Å, $\omega_j / 2\pi = 0,3$ ТГц

Как видно из панели (1) рис. 3.2, волна H_{\perp} поляризации полностью отражается от образца слоистого сверхпроводника и не возбуждает распространяющейся моды внутри него. Существует только затухающая мода, которая убывает в области, близкой к поверхности образца. Поэтому в данном случае отсутствует прошедшая волна. Волна E_{\perp} поляризации, рис. 3.2 панель (2), частично отражается и частично проходит сквозь слоистый сверхпроводник. Когда же падающая волна представлена суммой волн H_{\perp} и E_{\perp} поляризаций с такими же амплитудами, рис. 3.2 панель (3), распределение поля в сверхпроводнике и во второй вакуумной области ($x > D$) остается таким же, как на рис. 3.2 (2). Это наглядно демонстрирует, что моды H_{\perp} и E_{\perp} поляризаций не взаимодействуют друг с другом и могут быть рассмотрены независимо.

3.3. Прохождение и отражение волн с E_{\perp} поляризацией

В этом подразделе мы обсудим нелинейное отражение и прохождение волн с E_{\perp} поляризацией. Уравнения (3.19) можно переписать в форме:

$$[2h_{\text{inc}}^{(2)}]^2 = \left[\frac{\beta}{\mu} a'(0) \right]^2 + a^2(0) \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{\beta}{\mu} \eta'(0) \right]^2, \quad (3.21 \text{ а})$$

$$\eta'(\delta) = \frac{\mu}{\alpha\beta}, \quad (3.21 \text{ б})$$

$$a'(\delta) = 0, \quad (3.21 \text{ в})$$

$$|h_v^{(2)}| = \frac{|a'(\delta)|}{\alpha}. \quad (3.21 \text{ г})$$

Как и для волн с $k_z = 0$, поведение волн E_{\perp} поляризации внутри образца в главном приближении по параметру анизотропии γ определяется только необыкновенными волнами. Используя уравнения (3.13) и (3.21), рассчитаем амплитуды отраженных и прошедших волн. В последующем анализе мы будем также рассматривать фазовые траектории $a'(a)$, которые соответствуют определенным решениям этих уравнений. Интегрируя уравнение (3.13 б) с учетом (3.13 а) и (3.21 б), получим явное уравнение для фазовых траекторий,

$$a^2(a) = \sigma[a^2(\delta) - a^2] + \frac{1}{2}[a^4(\delta) - a^4] + \frac{a^4(\delta)}{(\alpha\beta/\mu)^2}[a^{-2}(\delta) - a^{-2}]. \quad (3.22)$$

На рис. 3.3 изображены фазовые траектории, соответствующие уравнению (3.22) для разных значений константы интегрирования $a(\delta)$. Панель (1) представляет незамкнутые фазовые траектории при $a(\delta) = 0,2$ (красная кривая 1) и $a(\delta) = 0,7$ (оранжевая кривая 2), практически замкнутую петлю при $a(\delta) = 1,39$ (коричневая кривая 3), траекторию с частичным ее наложением на замкнутую петлю при $a(\delta) = 1,8$ (зеленая кривая 4). На панели (2) представлены фазовые траектории при $a(\delta) = 2,4$ (фиолетовая кривая 5), $a(\delta) = 2,7$ (зеленая кривая 6), $a(\delta) = 3$ (синяя кривая 8) и $a(\delta) = 3,2$ (темно-голубая кривая 9). Черные штриховые кривые – огибающие фазовых траекторий.

Точка 7 представляет сжатую фазовую траекторию при $a(\delta) = a_c \approx 2,84$. Стрелки указывают направление движения при увеличении координаты ξ . На рисунке 3.3 продемонстрировано изменение фазовых траекторий $a'(a)$ при увеличении $a(\delta)$. При $a(\delta) < a_1$ (кривые 1 и 2 на рис. 3.3) фазовые траектории представляют собой незамкнутые петли. Для параметров, рассмотренных на рис. 3.3, $a_1 \approx 1,39$. При $a(\delta) = a_1$

фазовая траектория формирует замкнутую петлю (кривая 3 на рис. 3.3). Если $a(\delta) > a_1$, фазовая траектория начинает повторное движение вдоль замкнутой петли, то есть витки фазовой траектории начинают накладываться друг на друга (кривые 4-9 на рис. 3.3).

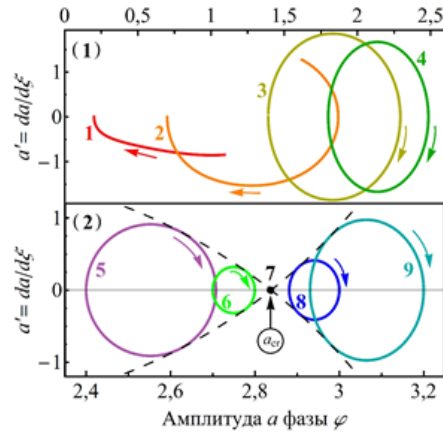


Рис. 3.3. Фазовые траектории $a'(a)$ при $\delta = 3$ ($D = 30\lambda_c$), которые соответствуют сплошной толстой синей кривой на рис. 3.4. Остальные параметры такие же, как и на рис. 3.2

Как отмечалось в разделе 2, у фазовых траекторий существует интересная особенность – существование особого значения $a(\delta) = a_{cr} \approx 2,84$, при котором фазовая траектория $a'(a)$ сжимается в точку (см. точку 7 на рис. 3.3). Сверхпроводящий образец полностью прозрачен в этом случае. Используя то, что a'' равно нулю в этой точке, из уравнения (3.13 б) получим выражение для a_{cr} :

$$a_{cr} = \left[\left(\frac{\mu}{\alpha\beta} \right)^2 - \sigma \right]^{1/2}. \quad (3.23)$$

Подставив в уравнение (3.21а) значение $a(0) = a_{cr}$ и $\eta'(0) = \mu/(\alpha\beta)$, можно получить критическое значение амплитуды $h_{inc}^{(2)} = h_{cr}$, при котором возникает однородное пространственное распределение амплитуды $a(\xi)$ (то есть $a(\xi) = a_{cr}$ для всех ξ). Значение магнитного поля H_{cr} (с учетом нормировки (3.15)) определяется выражением:

$$H_{cr} = H_0 \frac{k^2 \lambda_c}{k_x} \sqrt{\left[\frac{(k^2 - k_y^2) \lambda_c}{k_x} \right]^2 + \frac{\omega_{cut}^2 - \omega^2}{\omega_J^2}}. \quad (3.24)$$

В этом случае, в соответствии с уравнением (3.13), фаза η меняется с ростом ξ по линейному закону. Это означает, что электромагнитное поле внутри образца меняется так же, как в линейной волне, распространяющейся вдоль оси x , причем амплитуда отраженной волны от границы $x = D$ равна при этом нулю. Заметим, что траектории при $a < a_{cr}$ и $a > a_{cr}$ соответствуют амплитудам $H_{inc}^{(2)} < H_{cr}$ и $H_{inc}^{(2)} > H_{cr}$, соответственно.

Рисунок 3.4 представляет зависимость коэффициента прохождения T от амплитуды $H_{inc}^{(2)}$ (нормированной на H_{cr}) падающей волны E_{\perp} поляризации для различных размеров D , L_x и L_y сверхпроводящего образца.

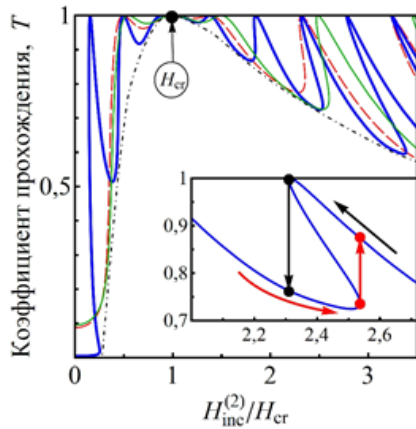


Рис. 3.4. Зависимость коэффициента прохождения T от нормированной амплитуды $H_{inc}^{(2)} / H_{cr}$ падающей волны E_{\perp} поляризации. Основная панель: кривые $T(H_{inc}^{(2)} / H_{cr})$, построенные для разных размеров образца. Сплошная толстая кривая соответствует $L_y = L_z = 0,1$ см, $D = 30\lambda_c$; сплошная тонкая кривая – $L_y = L_z = 0,3$ см, $D = 15\lambda_c$; штриховая кривая – $L_y = L_z = 0,1$ см, $D = 15\lambda_c$. Остальные параметры такие же, как и на рис. 3.2. Штрих-пунктирная кривая представляет огибающую для всех кривых $T(H_{inc}^{(2)} / H_{cr})$. Вставка: гистерезисная зависимость $T(H_{inc}^{(2)} / H_{cr})$ для сплошной толстой кривой на основной панели

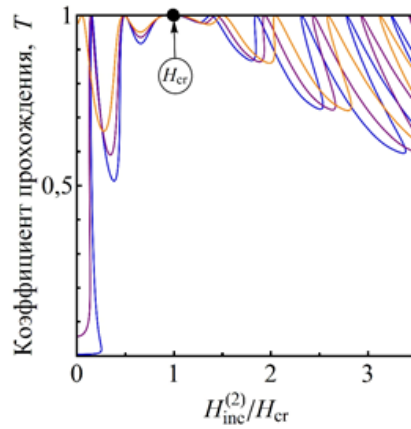


Рис. 3.5. Зависимость коэффициентов прохождения T от нормированной амплитуды $H_{inc}^{(2)} / H_{cr}$ падающей волны E_{\perp} поляризации для разных отстроек частоты. Нижняя (при $H_{inc}^{(2)} = 0$) кривая идентична сплошной толстой кривой на рис. 3.4. Верхняя (при $H_{inc}^{(2)} = 0$) кривая построена для положительной отстройки $\sigma = 1$ с $\tilde{\Omega} = 0,1$. Средняя (при $H_{inc}^{(2)} = 0$) кривая построена для отрицательной отстройки $\sigma = -1$ с $\tilde{\Omega} = 0,01$. Остальные параметры такие же, как и на рис. 3.2

Все кривые на основной панели рис. 3.4 имеют осциллирующую структуру, и коэффициент прохождения T достигает максимального значения $T=1$ при некоторых амплитудах падающей волны. Помимо случая $H_{\text{inc}}^{(2)} = H_{\text{cr}}$, полная прозрачность образца ($T=1$) наблюдается в случаях, когда фазовые траектории $a'(a)$ на рис. 3.3 представляют собой замкнутые петли с целым числом полных оборотов, то есть когда $a(0) = a(\delta)$. С физической точки зрения такие условия соответствуют случаю, когда толщина образца D равна целому числу длин волн нелинейной моды. Все кривые $T(H_{\text{inc}}^{(2)}/H_{\text{cr}})$ на рис. 3.4, построенные для образцов с разными размерами L_x , L_y и D , имеют общую огибающую кривую (штрих-пунктирная кривая).

Критическая амплитуда $H_{\text{inc}}^{(2)} = H_{\text{cr}}$ является единственной точкой, где все кривые, включая огибающую, касаются друг друга. Стоит отметить, что зависимость $T(H_{\text{inc}}^{(2)}/H_{\text{cr}})$, изображенная для другой отстройки частоты ($\omega - \omega_{\text{cut}}$), ведет себя подобно кривым, показанным на основной панели рис. 3.4, однако с другой огибающей. Кривые $T(H_{\text{inc}}^{(2)}/H_{\text{cr}})$ для различных отстроек представлены на рис. 3.5.

У зависимости $T(H_{\text{inc}}^{(2)}/H_{\text{cr}})$ есть интересные гистерезисные особенности. Вставка на рис. 3.4 представляет фрагмент такой зависимости. Подробно гистерезисное поведение зависимости коэффициента прохождения от амплитуды падающей волны обсуждалось в разделе 2. При увеличении амплитуды $H_{\text{inc}}^{(2)}$ происходит движение вдоль красных нижних стрелок (рис. 3.4). Когда достигается конечная точка этой ветви, дальнейшее движение по ней невозможно и увеличение амплитуды падающей волны приводит к скачку на более высокую ветвь, вдоль красной стрелки на рис. 3.4. Подобные скачки происходят при уменьшении амплитуды $H_{\text{inc}}^{(2)}$, следуя черным верхним стрелкам. Сначала коэффициент прохождения растет, но когда достигнута точка окончания ветви, происходит скачок на более низкую ветвь.

3.4 Трансформация ТЕ и ТМ мод

В этом подразделе рассмотрено нелинейное прохождение, отражение и взаимная трансформация поперечно-электрических (ТЕ) и поперечно-магнитных (ТМ) мод в вакуумном прямоугольном волноводе с образцом слоистого сверхпроводника. Для рассматриваемой геометрии, представленной на рисунке 3.1, волны ТЕ (ТМ) поляризации определены как моды, у которых электрическое (магнитное) поле перпендикулярно оси x . Векторный потенциал в первой вакуумной области (при $x < 0$) представлен падающими и отраженными волнами. Векторный потенциал $\vec{A}_{\text{inc}}^{(\text{TE})}$ падающей ТЕ поляризованной волны имеет компоненты,

$$\begin{aligned}
A_{x \text{ inc}}^{(\text{TE})} &= 0, \\
A_{y \text{ inc}}^{(\text{TE})} &= -H_{\text{inc}}^{(\text{TE})} \frac{kk_z}{k^3} \cos [k_x x - \omega t + \varphi_{\text{inc}}^{(\text{TE})}], \\
A_{z \text{ inc}}^{(\text{TE})} &= H_{\text{inc}}^{(\text{TE})} \frac{kk_y}{k^3} \cos [k_x x - \omega t + \varphi_{\text{inc}}^{(\text{TE})}],
\end{aligned} \tag{3.25}$$

где $H_{\text{inc}}^{(\text{TE})}$ и $\varphi_{\text{inc}}^{(\text{TE})}$ – амплитуды и фазы магнитного поля в этой волне.

Для падающей ТМ поляризованной волны с амплитудой $H_{\text{inc}}^{(\text{TM})}$ и фазой $\varphi_{\text{inc}}^{(\text{TM})}$ магнитного поля получим:

$$\begin{aligned}
A_{x \text{ inc}}^{(\text{TM})} &= H_{\text{inc}}^{(\text{TM})} \frac{k^2 - k_x^2}{k^3} \sin [k_x x - \omega t + \varphi_{\text{inc}}^{(\text{TM})}], \\
A_{y \text{ inc}}^{(\text{TM})} &= H_{\text{inc}}^{(\text{TM})} \frac{k_x k_y}{k^3} \cos [k_x x - \omega t + \varphi_{\text{inc}}^{(\text{TM})}], \\
A_{z \text{ inc}}^{(\text{TM})} &= H_{\text{inc}}^{(\text{TM})} \frac{k_x k_z}{k^3} \cos [k_x x - \omega t + \varphi_{\text{inc}}^{(\text{TM})}].
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Компоненты векторного потенциала отраженных ТЕ и ТМ мод могут быть записаны подобным образом, а именно:

$$\begin{aligned}
A_{x \text{ ref}}^{(\text{TE})} &= 0, \\
A_{y \text{ ref}}^{(\text{TE})} &= -H_{\text{ref}}^{(\text{TE})} \frac{kk_z}{k^3} \cos [k_x x + \omega t - \varphi_{\text{ref}}^{(\text{TE})}], \\
A_{z \text{ ref}}^{(\text{TE})} &= H_{\text{ref}}^{(\text{TE})} \frac{kk_y}{k^3} \cos [k_x x + \omega t - \varphi_{\text{ref}}^{(\text{TE})}],
\end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}
A_{x \text{ ref}}^{(\text{TM})} &= -H_{\text{ref}}^{(\text{TM})} \frac{k^2 - k_x^2}{k^3} \sin [k_x x + \omega t - \varphi_{\text{ref}}^{(\text{TM})}], \\
A_{y \text{ ref}}^{(\text{TM})} &= -H_{\text{ref}}^{(\text{TM})} \frac{k_x k_y}{k^3} \cos [k_x x + \omega t - \varphi_{\text{ref}}^{(\text{TM})}], \\
A_{z \text{ ref}}^{(\text{TM})} &= -H_{\text{ref}}^{(\text{TM})} \frac{k_x k_z}{k^3} \cos [k_x x + \omega t - \varphi_{\text{ref}}^{(\text{TM})}].
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Наконец, во второй вакуумной области (при $x > D$) существует только прошедшая волна. В этой области компоненты векторного потенциала могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned}
A_{x\text{ tr}}^{(\text{TE})} &= 0, \\
A_{y\text{ tr}}^{(\text{TE})} &= -H_{\text{tr}}^{(\text{TE})} \frac{kk_z}{k^3} \cos [k_x(x-D) - \omega t + \varphi_{\text{tr}}^{(\text{TE})}], \\
A_{z\text{ tr}}^{(\text{TE})} &= H_{\text{tr}}^{(\text{TE})} \frac{kk_y}{k^3} \cos [k_x(x-D) - \omega t + \varphi_{\text{tr}}^{(\text{TE})}],
\end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}
A_{x\text{ tr}}^{(\text{TM})} &= H_{\text{tr}}^{(\text{TM})} \frac{k^2 - k_x^2}{k^3} \sin [k_x(x-D) - \omega t + \varphi_{\text{tr}}^{(\text{TM})}], \\
A_{y\text{ tr}}^{(\text{TM})} &= H_{\text{tr}}^{(\text{TM})} \frac{k_x k_y}{k^3} \cos [k_x(x-D) - \omega t + \varphi_{\text{tr}}^{(\text{TM})}], \\
A_{z\text{ tr}}^{(\text{TM})} &= H_{\text{tr}}^{(\text{TM})} \frac{k_x k_z}{k^3} \cos [k_x(x-D) - \omega t + \varphi_{\text{tr}}^{(\text{TM})}].
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Очевидно, что электромагнитное поле ТЕ и ТМ мод может быть представлено в виде суперпозиции волн \mathbf{H}_\perp и \mathbf{E}_\perp поляризации. Анализ уравнений (3.4)–(3.6) и (3.25)–(3.30) приводит к следующим выражениям для комплексных безразмерных амплитуд $\tilde{h}_{\text{inc,ref,tr}}^{(\text{TE}),(\text{TM})}$ падающих, прошедших и отраженных ТЕ и ТМ волн через амплитуды $\tilde{h}_{\text{inc,ref,tr}}^{(1),(2)}$ волн \mathbf{H}_\perp и \mathbf{E}_\perp поляризаций:

$$\tilde{h}_{\text{inc,tr}}^{(\text{TE})} = \frac{kk_z \tilde{h}_{\text{inc,tr}}^{(1)} - k_x k_y \tilde{h}_{\text{inc,tr}}^{(2)}}{k_y^2 + k_z^2}, \quad \tilde{h}_{\text{inc,tr}}^{(\text{TM})} = -\frac{k_x k_y \tilde{h}_{\text{inc,tr}}^{(1)} + kk_z \tilde{h}_{\text{inc,tr}}^{(2)}}{k_y^2 + k_z^2}, \tag{3.31}$$

$$\tilde{h}_{\text{ref}}^{(\text{TE})} = \frac{kk_z \tilde{h}_{\text{ref}}^{(1)} + k_x k_y \tilde{h}_{\text{ref}}^{(2)}}{k_y^2 + k_z^2}, \quad \tilde{h}_{\text{ref}}^{(\text{TM})} = \frac{k_x k_y \tilde{h}_{\text{ref}}^{(1)} - kk_z \tilde{h}_{\text{ref}}^{(2)}}{k_y^2 + k_z^2}. \tag{3.32}$$

Здесь амплитуды $\tilde{h}_{\text{inc,tr,ref}}^{(\text{TE}),(\text{TM})}$ определены выражениями

$$\begin{aligned}
\tilde{h}_{\text{inc,tr,ref}}^{(\text{TE}),(\text{TM})} &= h_{\text{inc,tr,ref}}^{(\text{TE}),(\text{TM})} \exp[i\varphi_{\text{inc,tr,ref}}^{(\text{TE}),(\text{TM})}], \\
h_{\text{inc,tr,ref}}^{(\text{TE}),(\text{TM})} &= \frac{k_y k_z}{H_0 k^3 \tilde{\Omega} \lambda_c} H_{\text{inc,tr,ref}}^{(\text{TE}),(\text{TM})}.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Так как ТЕ и ТМ моды представляют собой комбинации мод \mathbf{H}_\perp и \mathbf{E}_\perp поляризации, они обе частично отражаются, частично проходят сквозь образец и могут трансформироваться одна в другую.

Начнем рассмотрение со случая падения ТЕ поляризованной волны. Используя уравнения (3.31) и (3.32), аналог принципа суперпозиции для волн \mathbf{H}_\perp и \mathbf{E}_\perp поляризаций, а также результаты предыдущих раз-

делов по отражению и прохождению волн \mathbf{H}_\perp и \mathbf{E}_\perp поляризаций, мы можем найти коэффициенты отражения $R_{\text{TE} \rightarrow \text{TE}}$ и прохождения $T_{\text{TE} \rightarrow \text{TE}}$ для ТЕ волн,

$$R_{\text{TE} \rightarrow \text{TE}} = \left| \frac{h_{\text{ref}}^{(\text{TE})}}{h_{\text{inc}}^{(\text{TE})}} \right|^2, \quad T_{\text{TE} \rightarrow \text{TE}} = \left| \frac{h_{\text{tr}}^{(\text{TE})}}{h_{\text{inc}}^{(\text{TE})}} \right|^2, \quad (3.34)$$

и коэффициенты трансформации $R_{\text{TE} \rightarrow \text{TM}}$ и $T_{\text{TE} \rightarrow \text{TM}}$ в ТМ волну, которая возникает в вакуумных областях $x < 0$ и $x > D$, соответственно,

$$R_{\text{TE} \rightarrow \text{TM}} = \left| \frac{h_{\text{ref}}^{(\text{TM})}}{h_{\text{inc}}^{(\text{TE})}} \right|^2, \quad T_{\text{TE} \rightarrow \text{TM}} = \left| \frac{h_{\text{tr}}^{(\text{TM})}}{h_{\text{inc}}^{(\text{TE})}} \right|^2. \quad (3.35)$$

Рисунок 3.6 представляет результаты численного анализа зависимостей коэффициентов $R_{\text{TE} \rightarrow \text{TE}}$, $T_{\text{TE} \rightarrow \text{TE}}$, $R_{\text{TE} \rightarrow \text{TM}}$ и $T_{\text{TE} \rightarrow \text{TM}}$ от безразмерной амплитуды $h_{\text{inc}}^{(\text{TE})}$ падающей ТЕ волны. Сплошные кривые соответствуют отраженной и прошедшей волне той же, ТЕ поляризации, что и падающая волна. Штриховые кривые соответствуют отраженным и прошедшим волнам другой, ТМ поляризации, что демонстрирует эффект трансформации. Отметим, что все эти зависимости проявляют гистерезисное поведение при изменении амплитуды падающей волны, которое обсуждалось выше.

Как можно увидеть из рис. 3.6, при определенных значениях амплитуды падающей волны амплитуды трансформированных волн превосходят амплитуды нетрансформированных волн. Отношение коэффициента трансформации $R_{\text{TE} \rightarrow \text{TM}}$ к коэффициенту отражения $R_{\text{TE} \rightarrow \text{TE}}$ представлено на вставке рис. 3.7. График $R_{\text{TE} \rightarrow \text{TM}} / R_{\text{TE} \rightarrow \text{TE}}(h_{\text{inc}}^{(\text{TE})})$ показывает, при каких амплитудах может происходить эффективная трансформация поляризации в отраженной волне. В прошедших модах в случае падения волны ТЕ поляризации волна трансформированной поляризации преобладает. Из-за того, что во второй вакуумной области ($x > D$) волны \mathbf{H}_\perp поляризации отсутствуют, коэффициенты прохождения волн ТЕ и ТМ поляризаций пропорциональны друг другу, в соответствии с уравнением (3.31), в котором $\tilde{h}_{\text{tr}}^{(1)}$ положено равным нулю.

Теперь рассмотрим случай падения волны ТМ поляризации и численно рассчитаем коэффициенты отражения $R_{\text{TM} \rightarrow \text{TM}}$ и прохождения $T_{\text{TM} \rightarrow \text{TM}}$ ТМ волн,

$$R_{\text{TM} \rightarrow \text{TM}} = \left| \frac{h_{\text{ref}}^{(\text{TM})}}{h_{\text{inc}}^{(\text{TM})}} \right|^2, \quad T_{\text{TM} \rightarrow \text{TM}} = \left| \frac{h_{\text{tr}}^{(\text{TM})}}{h_{\text{inc}}^{(\text{TM})}} \right|^2, \quad (3.36)$$

а также коэффициенты трансформации $R_{\text{TM} \rightarrow \text{TE}}$ и $T_{\text{TM} \rightarrow \text{TE}}$ в ТЕ волну, которая возникает в вакуумных областях $x < 0$ и $x > D$, соответственно,

$$R_{\text{TM} \rightarrow \text{TE}} = \left| \frac{h_{\text{ref}}^{(\text{TE})}}{h_{\text{inc}}^{(\text{TM})}} \right|^2, \quad T_{\text{TM} \rightarrow \text{TE}} = \left| \frac{h_{\text{tr}}^{(\text{TE})}}{h_{\text{inc}}^{(\text{TM})}} \right|^2. \quad (3.37)$$

Рисунок 3.8 представляет зависимости этих коэффициентов от безразмерной амплитуды $h_{\text{inc}}^{(\text{TM})}$ падающей ТМ волны. Как видно из рисунка 3.8, может наблюдаться трансформация поляризации в отраженной волне. Отношение коэффициента трансформации $R_{\text{TM} \rightarrow \text{TE}}$ к коэффициенту отражения $R_{\text{TM} \rightarrow \text{TM}}$ представлено на основной панели рис. 3.7.

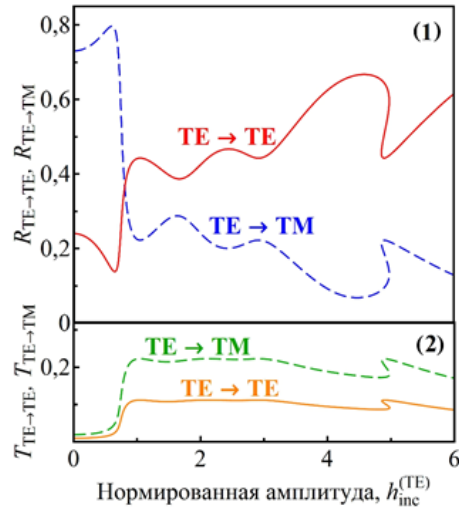


Рис. 3.6. Панель (1): Зависимость коэффициентов отражения $R_{\text{TE} \rightarrow \text{TE}}$ (красная сплошная кривая) и трансформации $R_{\text{TE} \rightarrow \text{TM}}$ (синяя штриховая кривая) от безразмерной амплитуды $h_{\text{inc}}^{(\text{TE})}$ падающей ТЕ волны. Панель (2): Зависимость коэффициентов прохождения $T_{\text{TE} \rightarrow \text{TE}}$ (оранжевая сплошная кривая) и трансформации $T_{\text{TE} \rightarrow \text{TM}}$ (зеленая штриховая кривая) от безразмерной амплитуды $h_{\text{inc}}^{(\text{TE})}$ падающей ТЕ волны. Параметры те же, что и на рис. 3.2

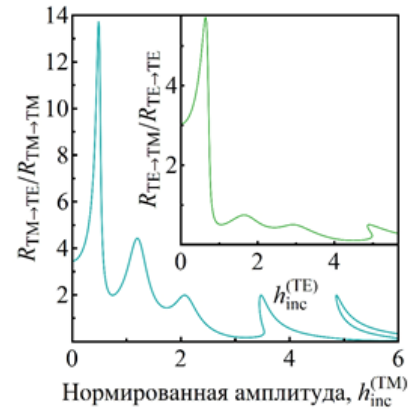


Рис. 3.7. Зависимость отношения $R_{\text{TM} \rightarrow \text{TE}} / R_{\text{TM} \rightarrow \text{TM}}$ от безразмерной амплитуды $h_{\text{inc}}^{(\text{TM})}$ падающей волны ТМ поляризации (основная панель) и отношения $R_{\text{TE} \rightarrow \text{TM}} / R_{\text{TE} \rightarrow \text{TE}}$ от безразмерной амплитуды $h_{\text{inc}}^{(\text{TE})}$ падающей волны ТЕ поляризации (вставка). Параметры те же, что и на рис. 3.2

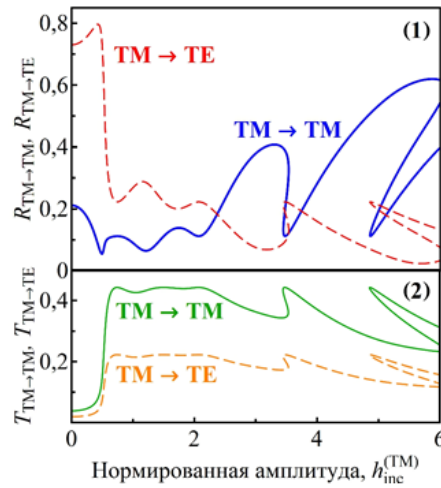


Рис. 3.8. Панель (1): Зависимость коэффициентов отражения $R_{\text{TM} \rightarrow \text{TM}}$ (синяя сплошная кривая) и трансформации $R_{\text{TM} \rightarrow \text{TE}}$ (красная штриховая кривая) от безразмерной амплитуды $h_{\text{inc}}^{(\text{TM})}$ падающей TM волны. Панель (2): Зависимость коэффициентов прохождения $T_{\text{TM} \rightarrow \text{TM}}$ (зеленая сплошная кривая) и трансформации $T_{\text{TM} \rightarrow \text{TE}}$ (оранжевая штриховая кривая) от безразмерной амплитуды $h_{\text{inc}}^{(\text{TM})}$ падающей TM волны. Параметры такие же, как и на рис. 3.2

4. ПРОХОЖДЕНИЕ И ОТРАЖЕНИЕ TM ВОЛН В ПРИСУТСТВИИ ПОСТОЯННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В настоящем разделе на основе работ [12] и [14] обсуждается возможность управления прозрачностью пластины слоистого сверхпроводника с помощью внешнего постоянного магнитного поля. Рассматриваем случай относительно слабых магнитных полей, когда джозефсоновские вихри еще не проникают в образец. В разделе показано, что благодаря нелинейной связи электромагнитного поля с током в слоистом сверхпроводнике коэффициент отражения электромагнитной волны может меняться в широком интервале значений, практически от нуля до единицы.

Задача рассмотрена в двух приближениях: предполагается, что длина затухания волны либо меньше, либо больше размеров образца. В первом случае образец условно можно считать полубесконечным, а во втором – нужно учитывать конечность толщины образца. Однако в обоих случаях считаем толщину образца больше глубины проникновения магнитного поля λ_c . Как и в предыдущих разделах, система координат выбрана так, что ось z параллельна кристаллографической оси \mathbf{c} , а оси

x и y параллельны кристаллографической плоскости \mathbf{ab} . Мы рассматриваем геометрию, в которой ось \mathbf{c} параллельна облучаемой поверхности образца. Именно в этом случае магнитное поле может оказывать существенное влияние на распространение ДПВ.

4.1. Отражение ТМ волн от полубесконечного образца

Рассмотрим отражение плоской электромагнитной волны ТМ поляризации от образца слоистого сверхпроводника в случае, когда длина затухания волны много меньше размеров образца. Тогда граница образца, противоположная облучаемой поверхности, не оказывает влияния на коэффициент отражения, и поэтому мы можем считать толщину образца бесконечной (см. рис. 4.1). Внешнее постоянное магнитное поле \vec{H}_0 направлено вдоль оси y и параллельно границе сверхпроводник-вакуум. Волна падает под углом θ к поверхности образца так, что плоскость падения перпендикулярна оси y . Падающая волна ТМ поляризации имеет следующие компоненты поля:

$$\vec{E} = \{E_x, 0, E_z\}, \quad \vec{H} = \{0, H_y, 0\}. \quad (4.1)$$

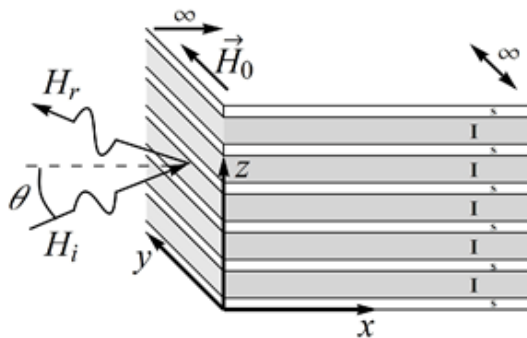


Рис. 4.1. Геометрия задачи. Обозначения: s и I – сверхпроводящие и диэлектрические слои, H_i и H_r – амплитуды падающей и отраженной волн, соответственно, \vec{H}_0 – внешнее постоянное магнитное поле, θ – угол падения

Далее мы получим аналитические выражения для коэффициента отражения и проанализируем его поведение при изменении частоты волны, угла падения и величины статического магнитного поля. Особое внимание уделим условиям, при которых амплитуда отраженной волны оказывается минимальной или даже равной нулю.

В вакуумной области поле представлено падающей и отраженной от образца слоистого сверхпроводника волнами. Используя уравнения Максвелла, можно записать ненулевые тангенциальные компоненты поля волны в вакууме в следующей форме:

$$\begin{aligned} H_y &= H_i \exp[i(k_x x + k_z z - \omega t)] + H_r \exp[i(-k_x x + k_z z - \omega t)], \\ E_z &= -\frac{k_x}{k} H_i \exp[i(k_x x + k_z z - \omega t)] - H_r \exp[i(-k_x x + k_z z - \omega t)], \end{aligned} \quad (4.2)$$

где H_i и H_r – амплитуды магнитного поля падающей и отраженной волн, соответственно; $k_x = k \cos \theta$, $k_z = k \sin \theta$ – компоненты волнового вектора; $k = \omega/c$ – модуль волнового вектора; θ – угол падения волны.

Распределение поля внутри образца слоистого сверхпроводника будем описывать, используя формулы (1.1), (1.2), (1.20)–(1.22), из которых можно получить синусоидальное уравнение Гордона для разности фаз φ :

$$\sin \varphi + \frac{1}{\omega_J^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \lambda_c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0. \quad (4.3)$$

Здесь и дальше мы проводим вычисления в первом приближении по малому параметру λ_{ab}/λ_c , равному по порядку величины $1/200$ для $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$ ($\lambda_{ab} = 2000 \text{ \AA}$, $\lambda_c = 4 \cdot 10^{-3} \text{ см}$).

С помощью уравнений (1.1), (1.2), (1.20)–(1.22) можно также получить выражение, связывающее магнитное поле H_y внутри сверхпроводника с разностью фаз φ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{2\pi d}{\Phi_0} H_y. \quad (4.4)$$

Калибровочно-инвариантная разность фаз $\varphi(\vec{r}, t)$ связана с тангенциальными компонентами поля в сверхпроводнике следующим образом (см., например, [2]):

$$E_z^s = H_0 \frac{1}{\omega_J \sqrt{\varepsilon}} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_y^s}{\partial x} = \frac{H_0}{\lambda_c} \left[\sin \varphi + \frac{1}{\omega_J^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right]. \quad (4.5)$$

Рассмотрим распределение постоянного магнитного поля в случае, когда присутствует только внешнее статическое магнитное поле и нет падающей волны. Из уравнения (4.3) находим:

$$\varphi_0(\xi) = -4 \operatorname{arctg} e^{-\xi/\xi_0}, \quad (4.6)$$

где введена безразмерная координата $\xi = x/\lambda_c$. Константа ξ_0 определяется из граничного условия при $x = 0$ с учетом (4.4):

$$\xi_0 = \text{Arch} \left(\frac{1}{h_0} \right), \quad h_0 = \frac{H_0}{\Phi_0} \pi d \lambda_c. \quad (4.7)$$

Здесь введено нормированное значение h_0 для внешнего статического магнитного поля H_0 . Из уравнений (4.4) и (4.6) можно получить выражение для распределения постоянного поля внутри образца:

$$h_s(\xi) = \frac{1}{\text{ch}(\xi + \xi_0)}. \quad (4.8)$$

Таким образом, внешнее магнитное поле проникает внутрь образца слоистого сверхпроводника в форме солитонного решения синусоидального уравнения Гордона. Распределение нормированного постоянного магнитного поля представлено на рис. 4.2. В вакууме поле однородно, но в образец оно проникает в форме «хвоста» солитона, который описывается уравнением (4.8). С увеличением поля солитон как бы проникает глубже в образец, но его центр остается вне образца. Мы изучаем случай относительно слабых магнитных полей, когда нормированное значение $h_0 < 1$. Это соответствует условиям, когда джозефсоновские вихри не проникают в сверхпроводник.

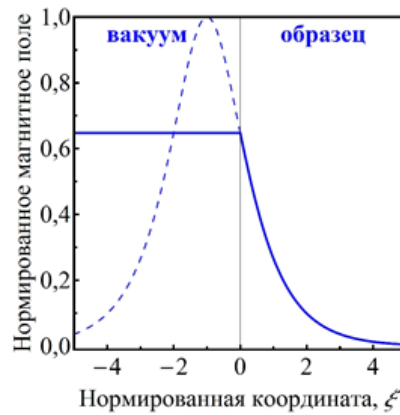


Рис. 4.2. Распределение нормированного постоянного магнитного поля в вакууме и в образце слоистого сверхпроводника (сплошная линия) в соответствии с уравнением (5.8) вблизи границы вакуум-образец. Штриховая линия обозначает распределение магнитного поля солитона, хвост которого проникает внутрь образца

Теперь вычислим распределение электромагнитного поля в случае, когда на фоне присутствующего в образце постоянного магнитного

поля (4.8) в образец проникает ТМ волна. Считаем, что амплитуда падающей волны намного меньше амплитуды внешнего постоянного магнитного поля. Тогда разность фаз параметра порядка представляется в виде суммы двух слагаемых

$$\varphi(\zeta, z, t) = \varphi_0(\zeta) + \varphi_v(\zeta, z, t), \quad (4.9)$$

первое из которых описывается уравнением (4.6), а второе представляет собой малую добавку, осциллирующую с частотой падающей волны. Решение уравнения (4.9) для φ_v ищем в виде:

$$\varphi_v = a(\zeta) \exp[i(k_z z - \omega t)]. \quad (4.10)$$

Используя малость параметра φ_v , получаем из (4.3) дифференциальное уравнение на амплитуду $a(\zeta)$:

$$\varphi_v = a(\zeta) \exp[i(k_z z - \omega t)]. \quad (4.10)$$

Используя малость параметра φ_v , получаем из (4.3) дифференциальное уравнение на амплитуду $a(\zeta)$:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial \zeta^2} + \left[\tilde{\Omega}^2 + \frac{2}{ch^2(\zeta_0 + \zeta)} \right] a(\zeta) = 0, \quad (4.11)$$

где $\tilde{\Omega} = (\Omega^2 - 1)^{1/2}$, $\Omega = \omega / \omega_j$ – нормированная частота. Решение уравнения (4.11) имеет вид:

$$a(\zeta) = C e^{i\tilde{\Omega}\zeta} [i\tilde{\Omega} - \text{th}(\zeta + \zeta_0)]. \quad (4.12)$$

С помощью уравнений (4.4) и (4.9) можно определить поля в сверхпроводнике. Тангенциальные переменные компоненты поля, нормированные на характерное поле $\Phi_0 / \pi d \lambda_c$ (так же, как и внешнее постоянное магнитное поле h_0), имеют вид:

$$\begin{aligned} h_y &= \frac{1}{2} a'(\zeta) \exp[i(k_z z - \omega t)], \\ e_z &= -\frac{i\Omega}{2\sqrt{\varepsilon}} a(\zeta) \exp[i(k_z z - \omega t)]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Сшивая тангенциальные компоненты полей в образце слоистого сверхпроводника (4.13) и в вакууме (4.2) с учетом (4.12), можно получить выражение для энергетического коэффициента отражения:

$$R \equiv \frac{|h_r|^2}{|h_i|^2} = 1 - \frac{2}{1 + mn + 1/(4n)}, \quad (4.14)$$

где введены параметры

$$n = \frac{\tilde{\Omega}\Omega}{2} \frac{\sqrt{\varepsilon} \cos \theta}{\Omega^2 - h_0^2}, \quad m = 1 + \frac{h_0^4}{\tilde{\Omega}^2 \Omega^4} (1 - h_0^2). \quad (4.15)$$

Легко видеть, что величина $mn + 1/(4n)$ заведомо больше 1.

Как отмечалось выше, мы рассматриваем изменения нормированного внешнего магнитного поля h_0 в пределах от 0 до 1. В случаях $h_0 = 0$ и $h_0 = 1$ выражение (4.14) можно записать в виде:

$$R_{0,1} = \left(1 - \frac{2}{1 + (\Omega/\tilde{\Omega})^j \sqrt{\varepsilon} \cos \theta} \right)^2, \quad (4.16)$$

где $j = -1$ для $h_0 = 0$ и $j = 1$ для $h_0 = 1$.

Проанализируем, к каким качественным изменениям коэффициента отражения приводит наличие внешнего постоянного магнитного поля. Сравним частотную и угловую зависимости коэффициента отражения при $h_0 = 0$ и $h_0 = 1$. На рис. 4.3 представлены зависимости коэффициента отражения (4.16) от нормированной частоты $\Omega = \omega/\omega_j$ для малого угла падения $\theta = 0,13\pi$ и угла $\theta = 0,46\pi$ в случае отсутствия магнитного поля ($h_0 = 0$), а также при $h_0 = 1$. Стрелками показан эффект включения поля (от $h_0 = 0$ до $h_0 = 1$). Видно, что для малых углов в отсутствие магнитного поля зависимость $R(\Omega)$ имеет минимум, равный нулю, а включение магнитного поля $h_0 = 1$ делает эту зависимость монотонной. В то же время, для углов близких к $\pi/2$ включение магнитного поля приводит к противоположному результату: без магнитного поля кривая $R(\Omega)$ монотонна, а включение поля $h_0 = 1$ приводит к появлению минимума коэффициента отражения. Более того, минимальное значение R оказывается равным 0, т.е. образец становится идеально поглощающим (последнее замечание относится к бездиссипативному случаю, когда мы пренебрегаем проводимостью квазичастиц).

С помощью уравнения (4.16) можно найти критический угол падения, при котором происходит переход от одной из описанных выше ситуаций к другой. При $h_0 = 0$ и $h_0 = 1$ равный нулю минимум коэффициента отражения может наблюдаться при частотах

$$\Omega_{\min 0,1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon \cos^2 \theta^j}}, \quad (4.17)$$

где $j = -1$ для $h_0 = 0$ и $j = 1$ для $h_0 = 1$. Чтобы минимумы существовали, подкоренные выражения должны быть положительными, т.е. в отсутствие магнитного поля минимум у зависимости коэффициента отраже-

ния от частоты может наблюдаться при углах $0 < \theta < \arccos(\varepsilon^{-1/2})$. В случае $h_0 = 1$ картина в точности противоположна: минимум коэффициента отражения может наблюдаться для углов падения в интервале $\arccos(\varepsilon^{-1/2}) < \theta < \pi/2$. Таким образом, внешним постоянным магнитным полем можно увеличивать или уменьшать диапазон изменения коэффициента отражения в функции частоты облучения.

Рассмотрим теперь *зависимость коэффициента отражения от угла падения*, представленную на рис. 4.4. Видим, что для частот, близких к джозефсоновской плазменной частоте (при $\Omega = \omega/\omega_j = 1,01$), включение магнитного поля приводит к возникновению минимума на угловой зависимости коэффициента отражения. Для больших отстроек от джозефсоновской плазменной частоты (при $\Omega = \omega/\omega_j = 1,25$) минимум коэффициента отражения наблюдается и в отсутствие внешнего поля. Включение магнитного поля не влияет значительно на зависимость $R(\theta)$, а приводит только к увеличению угла падения, при котором этот минимум достигается.

С помощью выражения (4.16) можно убедиться, что значение угла θ , при котором наблюдается минимум $R = 0$ в случаях $h_0 = 0$ и $h_0 = 1$, определяется выражением

$$\theta_{\min 0,1} = \arccos \left[\frac{\tilde{\Omega}}{\Omega} \sqrt{\varepsilon} \right], \quad (4.18)$$

где $j = -1$ для $h_0 = 0$ и $j = 1$ для $h_0 = 1$, $\tilde{\Omega} = (\Omega^2 - 1)^{1/2}$. Чтобы минимум существовал, аргумент арккосинуса должен быть меньше единицы, поэтому в отсутствие магнитного поля минимум $R(\theta)$ может наблюдаться при частотах $\Omega > (1 - \varepsilon^{-1})^{-1/2}$. В случае $h_0 = 1$ при любой частоте, меняя угол падения, можно добиться полного подавления коэффициента отражения. Таким образом, при частотах, близких к джозефсоновской частоте ω_j , минимум на угловой зависимости коэффициента отражения может наблюдаться только при наличии постоянного магнитного поля.

Теперь проанализируем, как изменяется *коэффициент отражения при плавном увеличении магнитного поля* h_0 от 0 до 1. На рис. 4.5 показаны эти зависимости для трех значений угла падения. Видно, что включение внешнего магнитного поля может приводить как к уменьшению, так и к увеличению отражательной способности образца. При углах падения, близких к нулю (кривая 1), коэффициент отражения монотонно растет с ростом магнитного поля. При увеличении угла кривая перестает быть монотонной (кривая 2) и появляется минимум R при значении поля,

$$h_{0\min} = \sqrt{\frac{\Omega^2}{2\varepsilon \cos^2 \theta} - \frac{\Omega^2 - 1}{2}}. \quad (4.19)$$

Для углов больших $\arccos(\varepsilon^{-1/2})$ с ростом магнитного поля коэффициент отражения уменьшается (кривая 3).

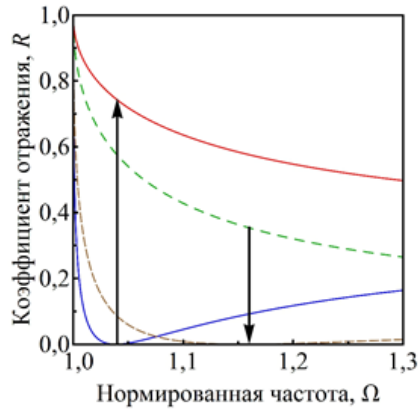


Рис. 4.3. Зависимости коэффициента отражения R от нормированной частоты Ω при $\theta=0,13\pi$ (сплошные кривые) и $\theta=0,46\pi$ (штриховые кривые) при $h_0=0$ (начала стрелок) и $h_0=1$ (окончания стрелок)

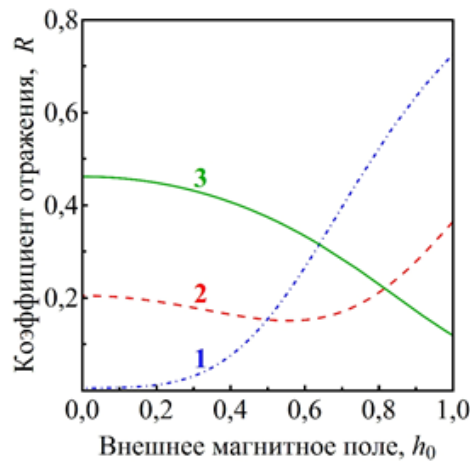


Рис. 4.5. Зависимости коэффициента отражения от величины внешнего постоянного магнитного поля при частоте $\Omega=1,05$ и углах падения $\theta=0,1\pi$ (кривая 1), $\theta=0,4\pi$ (кривая 2), $\theta=0,45\pi$ (кривая 3)

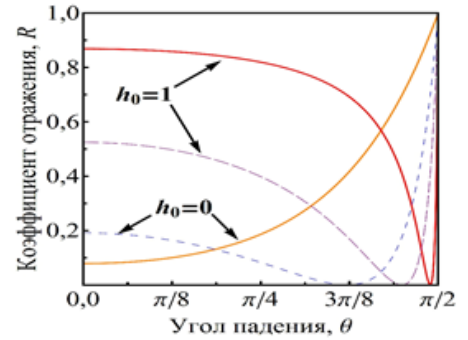


Рис. 4.4. Зависимости коэффициента отражения R от угла падения θ при значениях нормированной частоты $\Omega=1,01$ (сплошные кривые) и $\Omega=1,25$ (штриховые кривые) при $h_0=0$ и $h_0=1$

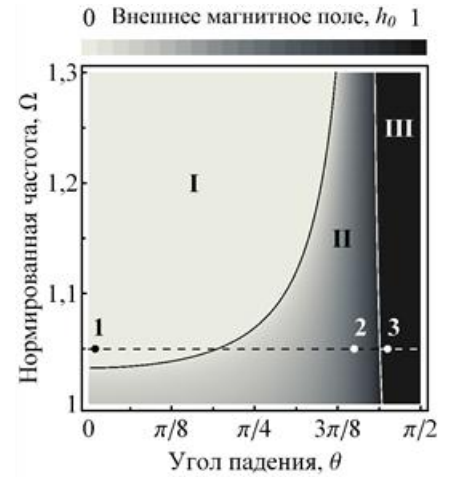


Рис. 4.6. Диаграмма значений внешнего магнитного поля, необходимых для минимизации коэффициента отражения при различных частотах Ω и углах падения θ . Точки 1, 2, 3 соответствуют кривым на рис. 4.5

Магнитное поле может как уменьшать, так и увеличивать коэффициент отражения в зависимости от параметров задачи. Определим, какую величину магнитного поля нужно приложить при данной частоте Ω и угле падения θ , чтобы получить минимально возможный коэффициент отражения. На рис. 4.6 цветом показана величина внешнего магнитного поля, при которой образец обладает наименьшим коэффициентом отражения при различных нормированных частотах Ω и углах падения θ . Точки 1, 2 и 3 соответствуют кривым на рис. 4.5. При значениях частоты и угла в области I коэффициент отражения минимален в отсутствие магнитного поля. Для значений Ω и θ , относящихся к области III, минимум коэффициента отражения наблюдается при магнитном поле $h_0 = 1$, поскольку зависимость от поля монотонно убывающая. Для значений Ω и θ из области II минимум достигается при определенном промежуточном значении поля. Как показывает анализ уравнения (4.14), коэффициент отражения в минимуме обращается в 0 только на границах областей I, II и III, когда $h_0 = 0$ или $h_0 = 1$ и углы падения определяются соотношениями (4.18). Из диаграммы также видно, как меняется характер зависимости коэффициента отражения от поля при разных частотах.

Как было продемонстрировано на рис. 4.3 и 4.4, для частот, близких к джозефсоновской (т.е. при $\Omega < (1 - \varepsilon^{-1})^{-1/2}$), только включением магнитного поля можно добиться полного подавления коэффициента отражения, а при больших частотах минимальный коэффициент отражения равен 0 как в присутствии, так и в отсутствие магнитного поля.

4.2. Прохождение ТМ волны через слоистый сверхпроводник конечной толщины

Рассмотрим теперь падение волны ТМ поляризации (см. уравнение (4.1)) под углом θ в плоскости xz на образец слоистого сверхпроводника толщины D в условиях, когда размер образца меньше длины затухания волны, но больше глубины проникновения постоянного магнитного поля λ_c (см. рис. 4.7). Падающая волна частично отражается и частично проходит сквозь образец, как показано на рис. 4.7. Внешнее постоянное магнитное поле \vec{H}_0 направлено вдоль оси y .

Рассчитаем коэффициент прохождения и проанализируем его зависимость от параметров задачи. Посмотрим, к каким качественным изменениям приводит конечность образца.

Электромагнитное поле в вакуумных областях справа и слева от образца (см. рис. 4.7) представляет собой суперпозицию постоянного магнитного поля и поля падающей, отраженной и прошедшей волн.

Используя уравнения Максвелла, можно получить следующие выражения для тангенциальных компонент магнитного и электрического полей падающей и отраженной волн в вакуумной области слева от образца:

$$\begin{aligned} H_y^{left} &= H_i \exp[i(k_x x + k_z z - \omega t)] + H_r \exp[i(-k_x x + k_z z - \omega t)], \\ E_z^{left} &= -\frac{k_x}{k} H_i \exp[i(k_x x + k_z z - \omega t)] - H_r \exp[i(-k_x x + k_z z - \omega t)], \end{aligned} \quad (4.20)$$

где H_i и H_r – амплитуды падающей и отраженной волн, соответственно, $k_x = k \cos \theta$, $k_z = k \sin \theta$ – компоненты волнового вектора, $k = \omega/c$ – его модуль, θ – угол падения.

Аналогично, тангенциальные компоненты полей прошедшей волны в вакуумной области справа от образца:

$$\begin{aligned} H_y^{right} &= H_t \exp[i(k_x(x-D) + k_z z - \omega t)], \\ E_z^{right} &= -\frac{k_x}{k} H_t \exp[i(k_x(x-D) + k_z z - \omega t)], \end{aligned} \quad (4.21)$$

где D – толщина образца, H_t – амплитуда прошедшей волны.

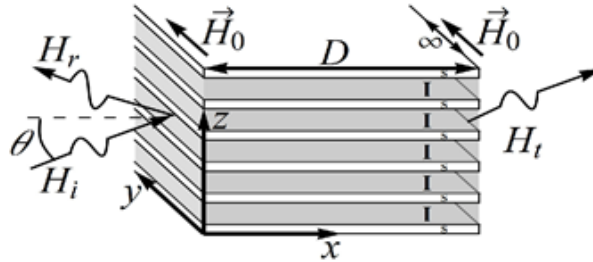


Рис. 4.7. Геометрия задачи. Обозначения: s и I – сверхпроводящие и диэлектрические слои, H_i , H_r и H_t – амплитуды падающей, отраженной и прошедшей волн, соответственно, \vec{H}_0 – внешнее постоянное магнитное поле, θ – угол падения, D – толщина образца

Для описания полей в сверхпроводнике будем пользоваться синусоидальным уравнением Гордона для калибровочно-инвариантной разности фаз в форме (4.3), а также ее связью (4.5) с полями.

Рассмотрим распределение поля в образце, когда присутствует только внешнее постоянное магнитное поле и нет падающей волны. Внешнее магнитное поле экспоненциально затухает внутри образца подобно распределению, представленному на рис. 4.2, но с обеих его границ. Считаем образец достаточно большим, $D \gg \lambda_c$, чтобы можно было пренебречь взаимодействием между «хвостами» поля, проникающего с правой и левой границ. Используя уравнение (4.3), можно получить

справедливые с экспоненциальной точностью выражения для статической разности фаз в окрестности левой и правой границ:

$$\begin{aligned} \varphi_0^{\text{left}}(\xi) &= -4 \operatorname{arctg}(e^{-\xi-\xi_0}), \\ \varphi_0^{\text{right}}(\xi) &= 4 \operatorname{arctg}(e^{\xi-(\delta-\xi_0)}), \end{aligned} \quad (4.22)$$

где введена безразмерная координата $\xi = x/\lambda_c$ и нормированная толщина образца $\delta = D/\lambda_c$. Константа ξ_0 определена величиной внешнего поля H_0 :

$$\xi_0 = \operatorname{Arch} \frac{1}{h_0}, \quad h_0 = H_0 \frac{\pi d \lambda_c}{\Phi_0}. \quad (4.23)$$

Поле h_0 нормировано таким образом, что джозефсоновские вихри начинают проникать в образец при $h_0 > 1$. В данной работе мы изучаем относительно слабые поля, когда $0 < h_0 < 1$, и внешнее постоянное магнитное поле экспоненциально затухает внутрь образца на расстоянии много меньшем толщины образца D . Как было сказано ранее, проникающие поля с левой и правой границ, описываемые уравнениями (4.22), не взаимодействуют. Таким образом, разность фаз $\varphi_0(\xi)$, связанная с внешним постоянным полем, представляет собой сумму $\varphi_0^{\text{left}}(\xi)$ и $\varphi_0^{\text{right}}(\xi)$ из уравнений (4.22).

Теперь рассмотрим распределение поля в условиях, когда помимо внешнего постоянного магнитного поля присутствует проникающая в образец электромагнитная волна ТМ поляризации. Считаем амплитуду падающей волны много меньше величины постоянного магнитного поля. В этом случае калибровочно-инвариантную разность фаз можно представить в виде суммы трех компонент:

$$\varphi(\xi, z, t) = \varphi_0^{\text{left}}(\xi) + \varphi_0^{\text{right}}(\xi) + \varphi_v(\xi, z, t), \quad (4.24)$$

где первые два слагаемых определены уравнениями (4.22), а последнее слагаемое представляет собой малую добавку, осциллирующую с частотой падающей волны.

Мы используем относительную малость величины φ_v и ищем решение уравнения (4.3) в виде:

$$\varphi_v(\xi, z, t) = a(\xi) \exp[i(k_z z - \omega t)]. \quad (4.25)$$

Тогда уравнение (4.3) сводится к

$$\frac{\partial^2 a(\xi)}{\partial \xi^2} + \left[\frac{2}{\operatorname{ch}^2(\xi + \xi_0)} + \frac{2}{\operatorname{ch}^2(\delta + \xi_0 - \xi)} + \tilde{\Omega}^2 \right] a(\xi) = 0, \quad (4.26)$$

где $\Omega = \omega/\omega_J$ – нормированная частота, $\tilde{\Omega} = (\Omega^2 - 1)^{1/2}$

Стоит подчеркнуть, что первое и второе слагаемые в квадратных скобках в уравнении (4.26) независимы друг от друга и существенны только в окрестности левой и правой границ, соответственно. Тогда решение уравнения (4.26) можно найти аналитически:

$$\begin{aligned} a(\xi) = & C_1 \exp(i\tilde{\Omega}\xi)[p^2 a_1(\xi) + a_2(\xi) - p\Omega] + \\ & C_2 \exp(-i\tilde{\Omega}\xi)[a_1(\xi) + p^2 a_2(\xi) + p\Omega], \end{aligned} \quad (4.27)$$

где

$$\begin{aligned} a_1(\xi) = \operatorname{th}(\xi_0 + \xi) - 1, \quad a_2(\xi) = \operatorname{th}(\xi_0 + \delta - \xi) - 1, \\ p = \frac{1 + i\tilde{\Omega}}{\Omega}. \end{aligned}$$

Теперь, используя уравнения (4.5) и (4.24), мы можем определить поле в слоистом сверхпроводнике. Тангенциальные переменные компоненты поля (связанные с падающей волной), нормированные на характерное поле $\Phi_0 / \pi d \lambda_c$, то есть таким же образом, что и в уравнении (4.23), равны:

$$\begin{aligned} H_y \frac{\pi d \lambda_c}{\Phi_0} = h_y = \frac{1}{2} a'(\xi) \exp[i(k_z z - \omega t)], \\ E_z \frac{\pi d \lambda_c}{\Phi_0} = e_z = -\frac{i\Omega}{2\sqrt{\varepsilon}} a(\xi) \exp[i(k_z z - \omega t)]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

На рис. 4.8 показано распределение переменной составляющей магнитного поля в вакууме и в образце слоистого сверхпроводника в отсутствие внешнего постоянного магнитного поля и при поле, равном $h_0 = 1$. Рисунок показывает, как постоянное магнитное поле благодаря нелинейности влияет на прохождение волны через образец.

Сшивая тангенциальные компоненты полей в вакуумных областях (4.20) и (4.21) с полем внутри образца (4.28), мы можем найти неизвестные константы C_1 и C_2 в уравнении (4.27) и затем получить коэффициент прохождения:

$$T = \frac{|h_t|^2}{|h_i|^2} = \left(1 + \sin^2(\tilde{\Omega}\delta - \varphi) \left\{ \left[\frac{1}{4\Theta} + \left(\frac{h_0^4 \tilde{h}_0^2}{\Omega^4 \tilde{\Omega}^2} + 1 \right) \Theta \right]^2 - 1 \right\} \right)^{-1}, \quad (4.29)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{h}_0 = \sqrt{1 - h_0^2}, \quad \Theta = \frac{\Omega \tilde{\Omega} \sqrt{\varepsilon}}{2(\tilde{h}_0^2 + \tilde{\Omega}^2)} \cos \theta, \\ \varphi = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{1 - \tilde{\Omega}^2}{2\tilde{\Omega}} + \frac{\Omega^4 \tilde{h}_0}{2\tilde{\Omega} h_0^2} P \right), \\ P = \left[\frac{\Omega^2 \varepsilon \cos^2 \theta}{\Omega^2 + (\tilde{h}_0^2 - \Omega^2) \varepsilon \cos^2 \theta} - \frac{\tilde{h}_0 + \tilde{\Omega}^2}{\tilde{h}_0 + 1} \right]^{-1}. \end{aligned}$$

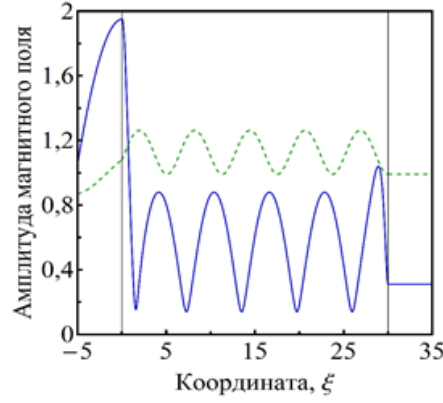


Рис. 4.8. Пространственное распределение амплитуды переменной составляющей магнитного поля (в соответствии с уравнениями (4.20), (4.21), (4.28), нормированными согласно (4.23)) снаружи и внутри образца в отсутствие постоянного поля (при $h_0 = 0$, штриховая кривая) и при наличии постоянного поля (при $h_0 = 1$, сплошная кривая). Вертикальные линии представляют границы образца. Параметры: $\Omega = 1,12$, $\theta = \pi/4$, $\delta = 30$, $\lambda_c = 4 \cdot 10^{-3}$ см,

$$\lambda_{ab} = 2000 \text{ \AA}, \omega_j / 2\pi = 0,3 \text{ ТГц}, \varepsilon = 16$$

Уравнение (4.29) можно упростить в случаях $h_0 = 0$ и $h_0 = 1$. Если нет внешнего магнитного поля, $h_0 = 0$, уравнение (4.29) приводится к виду:

$$T(h_0 = 0) = \left[1 + \sin^2(\tilde{\Omega}\delta) \left(\frac{1}{4\Theta_0} - \Theta_0 \right)^2 \right]^{-1}, \quad (4.30)$$

$$\Theta_0 = \frac{\tilde{\Omega} \sqrt{\varepsilon}}{\Omega} \cos \theta.$$

Если частота волны удовлетворяет неравенству $\Omega > (1 - \varepsilon^{-1})^{-1/2}$, то множитель при синусе в (4.30) обращается в нуль при $\cos \theta = \Omega / (\tilde{\Omega} \sqrt{\varepsilon})$. При таком угле падения должно наблюдаться полное прохождение ТМ волны через образец. Обратим внимание на то, что это происходит независимо от толщины образца.

Когда значение постоянного магнитного поля равно критическому ($h_0 = 1$), коэффициент прохождения приобретает следующую форму:

$$T(h_0 = 1) = \left[1 + \sin^2(\tilde{\Omega}\delta - \varphi_1) \left(\frac{1}{4\Theta_1} - \Theta_1 \right)^2 \right]^{-1}, \quad (4.31)$$

$$\varphi_1 = 2 \arctg \tilde{\Omega}, \quad \Theta_1 = \frac{\tilde{\Omega} \sqrt{\varepsilon}}{\Omega} \cos \theta.$$

При углах падения, удовлетворяющих равенству $\cos \theta = \tilde{\Omega} / (\Omega \sqrt{\varepsilon})$, коэффициент прохождения равен 1 независимо от частоты (но при $\Omega > 1$) и толщины образца.

В следующем подразделе мы приводим результаты анализа зависимостей коэффициента прохождения от толщины образца, угла падения и частоты падающей волны для общего случая, когда внешнее постоянное магнитное поле меняется от нуля до единицы.

4.3. Анализ зависимостей коэффициента прохождения от параметров волны

Зависимость коэффициента прохождения от толщины образца δ в уравнении (4.29) содержится только в аргументе синуса $\sin(\tilde{\Omega}\delta - \varphi)$. Видно, что образец становится полностью прозрачным в условиях, когда синус равен нулю. Согласно уравнению (4.30), в отсутствие внешнего магнитного поля это происходит, когда толщина образца равна целому числу полуволен,

$$\delta = \pi k / \tilde{\Omega}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.32)$$

При включении внешнего магнитного поля (см. уравнение (4.29) или (4.31)) аргумент синуса приобретает новое слагаемое φ , которое зависит от величины h_0 . Наличие внешнего магнитного поля приводит только к сдвигу максимумов функции $T(\delta)$ и увеличению амплитуды изменения $T(\delta)$, но ее период по δ остается таким же. Этот сдвиг показан стрелкой на рис. 4.9. Таким образом внешнее постоянное магнитное поле меняет эффективную толщину образца: подстраивая магнитное поле, можно добиться условия полного прохождения волны через образец.

На рис. 4.10 цветом показана величина коэффициента прохождения T в зависимости от угла падения и внешнего постоянного магнитного поля. Как можно заметить из рис. 4.10, изменяя внешнее магнитное поле, можно варьировать прозрачность образца в широком диапазоне значений. Однако эффект от изменения магнитного поля зависит от выбора угла падения и частоты. Например, для параметров, соответствующих основной панели на рис. 4.10, при острых углах падения (вплоть до $3\pi/8$) коэффициент прохождения убывает с ростом постоянного магнитного поля.

При менее острых углах падения изменение внешнего поля не приводит к значительному изменению коэффициента прохождения. Наконец, при углах падения, близких к $\pi/2$, коэффициент прохождения растет с увеличением магнитного поля. С ростом частоты наблюдается количественное изменение (см. вставки для разных статот на

рис. 4.10), однако можно обнаружить некое качественное повторение. Изменяя внешнее магнитное поле, можно достичь полного прохождения практически для любого угла падения и частоты падающей волны. Чтобы это продемонстрировать, мы находим из уравнения (4.29) оптимальный угол падения, при котором коэффициент прохождения имеет максимально возможное значение T_{\max} при заданных величинах внешнего магнитного поля и частоты падающей волны. Рисунок 4.11 представляет зависимость значения T_{\max} от внешнего магнитного поля и частоты падающей волны.

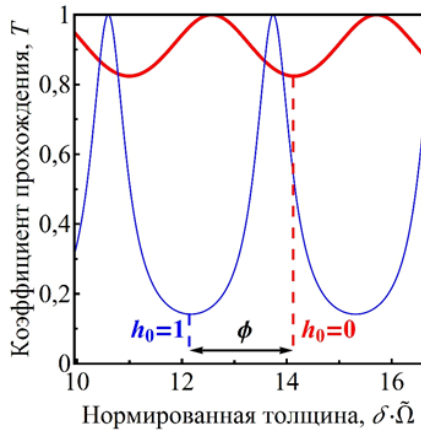


Рис. 4.9. Зависимость коэффициента прохождения T от нормированной толщины образца δ при $h_0=0$ (толстая кривая) и при $h_0=1$ (тонкая кривая).

Параметры: $\Omega = 1,2$, $\theta = \pi / 4$,
 $\lambda_c = 4 \cdot 10^{-3}$ см, $\lambda_{ab} = 2000$ Å,
 $\omega_j / 2\pi = 0,3$ ТГц, $\varepsilon = 16$

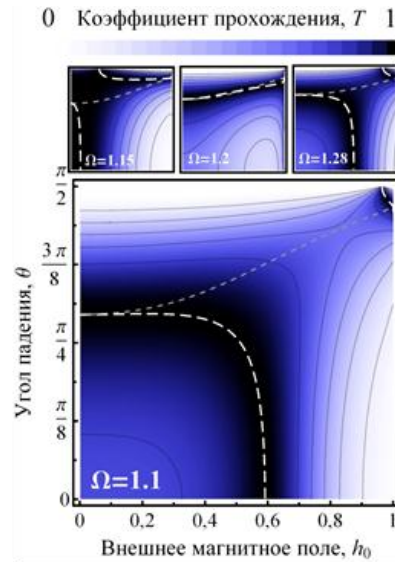


Рис. 4.10. Зависимость коэффициента прохождения T от угла падения θ и внешнего постоянного магнитного поля h_0 . Штриховая линия соответствует $\sin(\tilde{\Omega}\delta - \varphi) = 0$, а пунктирная линия соответствует точкам, в которых множитель в круглых скобках уравнения (4.29) достигает минимума как функция угла θ . Параметры: $\Omega = 1,12$, $\delta = 11$,
 $\lambda_c = 4 \cdot 10^{-3}$ см, $\lambda_{ab} = 2000$ Å,
 $\omega_j / 2\pi = 0,3$ ТГц, $\varepsilon = 16$

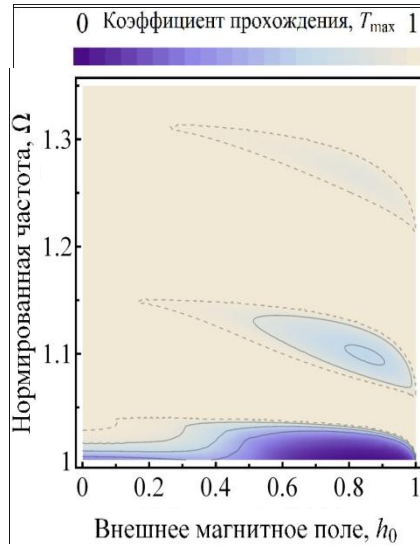


Рис. 4.11. Зависимость коэффициента прохождения T_{\max} , максимизированного по углу падения θ , от нормированной частоты Ω и внешнего магнитного постоянного поля h_0 . Параметры: $\delta = 11$,

$$\lambda_c = 4 \cdot 10^{-3} \text{ см}, \lambda_{ab} = 2000 \text{ \AA},$$

$$\omega_j / 2\pi = 0,3 \text{ ТГц}, \varepsilon = 16$$

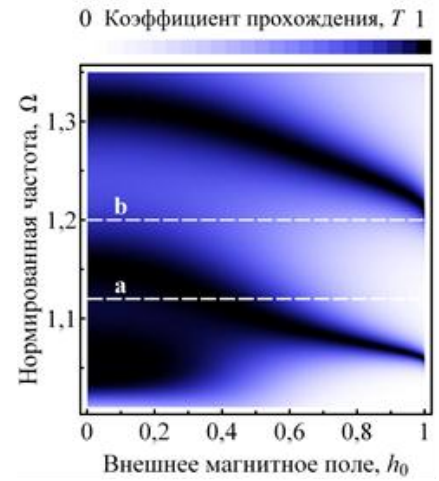


Рис. 4.12. Зависимость коэффициента прохождения T от нормированной частоты Ω и внешнего постоянного магнитного поля h_0 . Штриховые горизонтальные линии I и II соответствуют линиям I и II на рис. 4.13.

Параметры: $\theta = \pi / 4$, $\delta = 11$,

$$\lambda_c = 4 \cdot 10^{-3} \text{ см}, \lambda_{ab} = 2000 \text{ \AA},$$

$$\omega_j / 2\pi = 0,3 \text{ ТГц}, \varepsilon = 16$$

Как видно из рисунка, имеется широкий диапазон изменения параметров h_0 и Ω (см. светлые области на рис. 4.11), при котором подбором оптимального угла падения θ можно добиться полного прохождения. Кроме того, рис. 4.11 демонстрирует, что существуют области, где невозможно добиться полного прохождения (темно-синие области). А именно, при частотах, близких к джозефсоновской плазменной частоте ($\Omega = 1$), образец практически всегда отражает большую часть энергии падающей волны. С ростом частоты размеры темных областей, в которых коэффициент прохождения меньше единицы, становятся меньше. Величина коэффициента прохождения при изменении частоты падающей волны и величины внешнего постоянного магнитного поля, но при фиксированном угле падения $\theta = \pi / 4$, показана цветом на рис. 4.12.

При малых значениях внешнего магнитного поля имеются широкие по частоте области полного прохождения, представленные черным цветом. Наблюдаемые осцилляции $T(\Omega)$ связаны с зависимостью аргумента синуса в уравнении (4.29) от частоты. Как можно увидеть из рис. 4.12, увеличение магнитного поля приводит к сужению черных полос и их сдвигу в сторону низких частот. Таким образом, если мы зафиксируем частоту падающей волны и будем менять внешнее магнитное поле, мы можем варьировать коэффициент прохождения в довольно широком диапазоне. Однако диапазон этого изменения зависит от выбора частоты. Например, при фиксированной частоте, представленной штриховой линией I на рис. 4.12, диапазон изменения коэффициента прохождения оказывается значительней, чем при частоте, представленной линией II. Удостоверимся в этом, изучив диапазон изменения коэффициента прохождения при изменении внешнего постоянного магнитного поля для разных частот, приведенного на рис. 4.13.

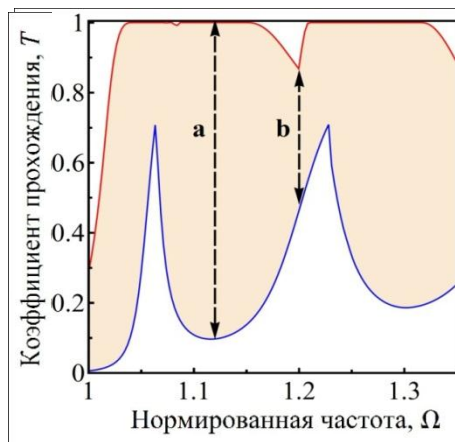


Рис. 4.13. Зависимость коэффициента прохождения T от нормированной частоты Ω . Серая область представляет пределы изменения T при изменении h_0 , верхняя и нижняя кривые соответствуют максимально и минимально возможным значениям коэффициента прохождения, соответственно. Штриховые линии I и II соответствуют линиям I и II на рис. 4.12. Параметры те же, что и на рис. 4.12

Верхние красные и нижние синие кривые на рис. 4.13 представляют, соответственно, максимально и минимально возможные значения коэффициента прохождения при изменении внешнего постоянного магнитного поля при данной частоте Ω . Серая промежуточная область между красной и синей кривой — диапазон изменения коэффициента прохождения. Сравним диапазоны, отмеченные штриховыми линиями I и II (см. рис. 4.12 и 4.13). При частоте, соответствующей линии I, можно варьировать коэффициент прохождения практически от нуля до едини-

цы, в то время как для линии II диапазон изменения T гораздо меньше, и при этом нельзя достичь полного прохождения.

Также отметим, что диапазон изменения коэффициента прохождения немного уменьшается с ростом частоты, а также мал для частот, близких к джозефсоновской плазменной частоте ω_j ($\Omega=1$). У красной и синей кривых существуют чередующиеся минимумы и максимумы. При этом участки роста на красной кривой практически вертикальны, и полное прохождение наблюдается для широкой области частот. Таким образом, выбор частоты падающей волны определяет диапазон, в котором с помощью магнитного поля можно варьировать коэффициент прохождения. Чтобы получить широкий диапазон изменения, нужно использовать относительно малые частоты, но не слишком близкие к джозефсоновской плазменной частоте ω_j (см. рис. 4.13).

5. ТРАНСФОРМАЦИЯ ПОЛЯРИЗАЦИИ ВОЛН ПРИ ОТРАЖЕНИИ ОТ СЛОИСТЫХ СВЕРХПРОВОДНИКОВ ВО ВНЕШНЕМ ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В предыдущем разделе было рассмотрено влияние внешнего постоянного магнитного поля на отражение и прохождение волн сквозь слоистые сверхпроводники. В данном разделе, основываясь на работе [15], описана возможность управления трансформацией поляризации поперечно-электрических (transverse-electric, TE) и поперечно-магнитных (transverse-magnetic, TM) волн, используя внешнее магнитное поле.

Мы рассматриваем косое падение плоских электромагнитных волн поперечно-магнитной (TM),

$$\vec{H}^{tm} = \{0, H_y^{tm}, H_z^{tm}\}, \quad \vec{E}^{tm} = \{E_x^{tm}, E_y^{tm}, E_z^{tm}\}, \quad (5.1)$$

и поперечно-электрической (TE),

$$\vec{H}^{te} = \{H_x^{te}, H_y^{te}, H_z^{te}\}, \quad \vec{E}^{te} = \{0, E_y^{te}, E_z^{te}\}, \quad (5.2)$$

поляризации из вакуума на полубесконечный образец слоистого сверхпроводника.

Система координат выбрана таким образом, что оси x и y параллельны кристаллографической \mathbf{ab} -плоскости, а ось z сонаправлена с кристаллографической осью \mathbf{c} . Сверхпроводящие слои образца ориентированы перпендикулярно границе раздела образец-вакуум, что соответствует плоскости $x=0$. В отличие от случая, когда слои параллельны границе раздела, в такой геометрии из-за анизотропии облучаемой поверхности поляри-

зация отраженной волны может быть отлична от падающей, то есть может возникать эффект трансформации поляризации. Направление падения волны определяется углом падения θ_1 относительно нормали к границе раздела и углом поворота θ_2 плоскости падения относительно оси z (см. рис. 5.1). Образец находится во внешнем постоянном магнитном поле \vec{H}_0 , направленном вдоль оси y . Мы рассматриваем относительно слабые магнитные поля, когда джозефсоновские вихри еще не проникают полностью в образец. Вдоль осей y и z образец бесконечный, поэтому мы можем представить поля в следующем виде:

$$\begin{aligned}\vec{H}(x, y, z, t) &= \vec{H}(x) \exp[i(k_y y + k_z z - \omega t)], \\ \vec{E}(x, y, z, t) &= \vec{E}(x) \exp[i(k_y y + k_z z - \omega t)],\end{aligned}\quad (5.3)$$

где ω – частота, а k_y и k_z – компоненты волнового вектора $\vec{k}_i = \{k_x, k_y, k_z\}$ падающей плоской волны,

$$k_x = k \cos \theta_1, k_y = k \sin \theta_1 \sin \theta_2, k_z = k \sin \theta_1 \cos \theta_2,$$

а функции $\vec{H}(x)$ и $\vec{E}(x)$ будут определены далее.

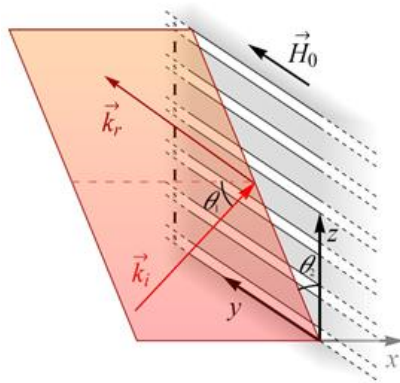


Рис. 5.1. Схематическое изображение геометрии задачи.
Красным цветом показана плоскость падения электромагнитной волны

5.1. Поля в вакууме. Аналог принципа суперпозиции

Используя уравнения Максвелла, компоненты электрического и магнитного полей падающей волны ТМ и/или ТЕ поляризации в вакууме можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned}
\vec{H}_i^{tm}(x) &= \left\{ 0, -1, \frac{k_y}{k_z} \right\} H_i^{tm} e^{ik_x x}, \\
\vec{E}_i^{tm}(x) &= \left\{ \frac{(k_x^2 - k^2)}{kk_z}, \frac{k_x k_y}{kk_z}, \frac{k_x}{k} \right\} H_i^{tm} e^{ik_x x}, \\
\vec{H}_i^{te}(x) &= \left\{ -\frac{(k_x^2 - k^2)}{kk_z}, -\frac{k_x k_y}{kk_z}, -\frac{k_x}{k} \right\} E_i^{te} e^{ik_x x}, \\
\vec{E}_i^{te}(x) &= \left\{ 0, -1, \frac{k_y}{k_z} \right\} E_i^{te} e^{ik_x x}.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Здесь $k = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2}$ – модуль волнового вектора \vec{k}_i падающей волны. Выражения для отраженных компонент поля с волновым вектором $\vec{k}_r = \{-k_x, k_y, k_z\}$ можно получить, заменив k_x на $-k_x$ в уравнениях (5.4).

Для решения задачи мы используем аналог принципа суперпозиции волн двух специфических поляризааций в слоистых сверхпроводниках, подробно описанный в разделе 3 данного обзора. Представим падающую электромагнитную волну заданной поляризаации в виде суперпозиции волн двух взаимноортогональных поляризааций, H_{\perp} и E_{\perp} . Магнитное поле в H_{\perp} -поляризованной волне перпендикулярно оси y ,

$$\vec{H}^{(1)} = \{H_x^{(1)}, 0, H_z^{(1)}\}, \quad \vec{E}^{(1)} = \{E_x^{(1)}, E_y^{(1)}, E_z^{(1)}\}, \tag{5.5}$$

в то время как в E_{\perp} -поляризованной волне электрическое поле ортогонально оси y ,

$$\vec{H}^{(2)} = \{H_x^{(2)}, H_y^{(2)}, H_z^{(2)}\}, \quad \vec{E}^{(2)} = \{E_x^{(2)}, 0, E_z^{(2)}\}. \tag{5.6}$$

Тут и далее индексы (1) и (2) обозначают волны H_{\perp} и E_{\perp} поляризааций, соответственно. Как мы увидим далее, такое представление удобно, поскольку волны этих двух поляризааций не взаимодействуют и не трансформируются одна в другую при отражении от образца слоистого сверхпроводника даже в условиях сильной нелинейности.

Поле падающей волны ТМ и/или ТЕ поляризаации можно представить в виде суммы:

$$\vec{H}^{tm} + \vec{H}^{te} = \vec{H}^{(1)} + \vec{H}^{(2)}, \quad \vec{E}^{tm} + \vec{E}^{te} = \vec{E}^{(1)} + \vec{E}^{(2)}, \tag{5.7}$$

где $\vec{H}^{(1)}$, $\vec{H}^{(2)}$, $\vec{E}^{(1)}$ и $\vec{E}^{(2)}$ имеют следующие компоненты:

$$\begin{aligned}
\vec{H}_i^{(1)}(x) &= \left\{ 1, 0, -\frac{k_x}{k_z} \right\} H_i^{(1)} e^{ik_x x}, \\
\vec{E}_i^{(1)}(x) &= \left\{ \frac{k_x k_y}{kk_z}, \frac{k_y^2 - k^2}{kk_z}, \frac{k_y}{k} \right\} H_i^{(1)} e^{ik_x x}, \\
\vec{H}_i^{(2)}(x) &= \left\{ -\frac{k_x k_y}{kk_z}, -\frac{k_y^2 - k^2}{kk_z}, -\frac{k_y}{k} \right\} E_i^{(2)} e^{ik_x x}, \\
\vec{E}_i^{(2)}(x) &= \left\{ 1, 0, -\frac{k_x}{k_z} \right\} E_i^{(2)} e^{ik_x x},
\end{aligned} \tag{5.8}$$

а связь между амплитудами имеет вид:

$$\begin{aligned}
H_i^{(1)} &= \frac{E_i^{te} k k_z - H_i^{tm} k_x k_y}{k_x^2 + k_z^2}, \\
E_i^{(2)} &= -\frac{E_i^{te} k_x k_y + H_i^{tm} k k_z}{k_x^2 + k_z^2}.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Аналогичное соотношение имеет место и для амплитуд отраженных волн:

$$\begin{aligned}
H_r^{(1)} &= \frac{E_r^{te} k k_z + H_r^{tm} k_x k_y}{k_x^2 + k_z^2}, \\
E_r^{(2)} &= \frac{E_r^{te} k_x k_y - H_r^{tm} k k_z}{k_x^2 + k_z^2}.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Чтобы представить падающую ТМ волну в виде суммы волн H_{\perp} и E_{\perp} поляризаций, нужно воспользоваться уравнениями (5.7–5.9), предварительно занулив амплитуду H_i^{te} в уравнениях (5.9) и опустив вектора \vec{H}^{te} и \vec{E}^{te} в уравнениях (5.7). Разложение ТЕ волны проводится аналогично.

Далее мы рассматриваем электромагнитные волны в вакууме как сумму волн H_{\perp} и E_{\perp} поляризаций.

5.2. Поля в образце слоистого сверхпроводника

По аналогии с тем, как выделяют волны ТЕ ($\vec{E} \perp \vec{n}$) и ТМ ($\vec{H} \perp \vec{n}$) поляризаций, связывая их с нормалью к поверхности образца \vec{n} , в слоистых сверхпроводниках, как в структурах с одноосной анизотропией, поляриза-

ции волн удобно связывать с кристаллографической осью c (вдоль которой направлен джозефсоновский ток). Таким образом, в слоистых сверхпроводниках ДПВ представляют как сумму так называемых обыкновенной (в которой $\vec{E} \perp c$) и необыкновенной (в которой $\vec{H} \perp c$) волн.

У обыкновенных волн в слоистом сверхпроводнике компонента E_z равна нулю. Исходя из уравнений (1.20) и (1.21), можно увидеть, что разность фаз φ для таких волн тоже равна нулю. То есть обыкновенные волны всегда линейны и не испытывают влияния внешнего постоянного магнитного поля.

Компоненты поля обыкновенной волны можно найти из уравнения (1.21), приравняв A_z и J_z нулю:

$$\begin{aligned} \vec{E}^{ord} &= \left\{ \frac{k_y}{k_x^{ord}}, 1, 0 \right\} a^{ord} e^{ixk_x^{ord}}, \\ \vec{H}^{ord} &= \left\{ -\frac{k_z}{k}, \frac{k_y k_z}{kk_x^{ord}}, \frac{k_x^{ord}}{k} - \frac{k_y^2}{kk_x^{ord}} \right\} a^{ord} e^{ixk_x^{ord}}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

где k_x^{ord} – x -проекция волнового вектора обыкновенной волны,

$$k_x^{ord} = \left[\frac{1}{\lambda_c^2} \left(\frac{\omega^2}{\omega_J^2} - \frac{\lambda_{ab}^2}{\lambda_c^2} \right) - k_x^2 - k_y^2 \right]^{1/2}. \quad (5.12)$$

В уравнениях (5.11) учтено, что волна распространяется вглубь сверхпроводника, $k_x^{ord} > 0$.

Внешнее постоянное магнитное поле проникает в образец и создает в нем определенное распределение калибровочно-инвариантной разности фаз. Представим разность фаз φ в виде суммы статического решения φ_0 , вызванного только внешним постоянным магнитным полем, и малой добавки φ_w , вызванной ДПВ, распространяющейся в образце:

$$\varphi(x, y, z, t) = \varphi_0(x) + \varphi_w(x, y, z, t). \quad (5.13)$$

Начнем рассмотрение со статического случая, когда отсутствует ДПВ, $\varphi_w = 0$. Будем искать решение уравнения (1.21) в виде:

$$A_x = A_y = 0, \quad A_z(x) = -\frac{\Phi_0}{2\pi d} \varphi_0(x). \quad (5.14)$$

В этом случае $\varphi_0(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi_0'(\xi) = \sin \varphi_0(\xi), \quad (5.15)$$

где введена безразмерная координата $\xi = x / \lambda_c$, а штрих обозначает производную по этой координате. Хорошо известным решением этого уравнения является функция

$$\varphi_0(\xi) = -4[\exp(-\xi - \xi_0)]. \quad (5.16)$$

Здесь константа ξ_0 определяется величиной внешнего постоянного магнитного поля:

$$\xi_0 = \operatorname{arch} \frac{1}{h_0}, \quad h_0 = \frac{H_0}{H_0}. \quad (5.17)$$

Параметр h_0 представляет собой напряженность внешнего статического магнитного поля H_0 , нормированную на критическое поле $H_0 = \Phi_0 / \pi d \lambda_c$. Мы изучаем случай относительно слабых магнитных полей, когда $H_0 < H_0$. В такой ситуации джозефсоновские вихри не проникают полностью в образец, т.е. решение (5.16) описывает проникший в образец «хвост» джозефсоновского вихря.

Чтобы найти компоненты поля необыкновенной волны, которая распространяется на фоне проникшего в образец статического магнитного поля, мы представим решение уравнения (1.21) в виде:

$$\begin{aligned} A_x(x, y, z, t) &= a_x(\xi) \exp[i(k_y y + k_z z - \omega t)], \\ A_y(x, y, z, t) &= a_y(\xi) \exp[i(k_y y + k_z z - \omega t)], \\ A_z(x, y, z, t) &= -\frac{\Phi_0}{2\pi d} \varphi_0(x) + \\ &+ a_z(\xi) \exp[i(k_y y + k_z z - \omega t)]. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Подставляя компоненты векторного потенциала (5.18) в (1.21), получим выражения для $a_x(\xi)$, $a_y(\xi)$,

$$a_x(\xi) = -\frac{2i\lambda_{ab}^2 k_z}{\lambda_c} a_z'(\xi), \quad a_y(\xi) = 2\lambda_{ab}^2 k_y k_z a_z(\xi), \quad (5.19)$$

и дифференциальное уравнение для $a_z(x)$,

$$\frac{1 - \gamma^2 \Omega^2}{1 + \gamma^2 (\kappa_z^2 - \Omega^2)} a_z''(\xi) - \left[\frac{\kappa_y^2 (1 - \gamma^2 \Omega^2)}{1 + \gamma^2 (\kappa_z^2 - \Omega^2)} + \cos \varphi_0(\xi) - \Omega^2 \right] a_z(\xi) = 0, \quad (5.20)$$

где

$$\gamma = \frac{\lambda_{ab}}{\lambda_c}, \quad \kappa_{y,z} = k_{y,z} \lambda_c, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_J}. \quad (5.21)$$

Следует обратить внимание на то, что в описанных условиях слоистый сверхпроводник можно рассматривать как анизотропную среду с эффективным пространственно зависящим диагональным тензором диэлектрической проницаемости, $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{ab}$ и $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_c$, где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ab}(\Omega) &= \varepsilon \left(1 - \frac{1}{\gamma^2 \Omega^2}\right), \\ \varepsilon_c(\xi, \Omega) &= \varepsilon \left\{1 - \frac{1}{\Omega^2} \left[1 - \frac{2}{\text{ch}^2(\xi + \xi_0)}\right]\right\}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Действительно, в этих терминах уравнение (5.20) переписывается в хорошо известной форме для поля E_z необыкновенной волны:

$$\frac{d^2 E_z}{dx^2} + (k^2 \varepsilon_c - k_z^2 \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{ab}} - k_y^2) E_z = 0. \quad (5.23)$$

Таким образом, включение постоянного магнитного поля приводит к возникновению пространственной неоднородности тензора диэлектрической проницаемости сверхпроводника.

В условиях сильной анизотропии $\lambda_c \ll \lambda_{ab}$ (например, для $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$ параметр $\gamma \approx 1/200$) и при частотах ω порядка ω_J величину $\gamma \Omega$ можно считать малой. Более того, в рассматриваемой задаче величина $\gamma \kappa_z$ также пренебрежимо мала по сравнению с единицей,

$$\gamma \kappa_z = \frac{\gamma \Omega}{\sqrt{\varepsilon}} \sin \theta_1 \cos \theta_2 = 1. \quad (5.24)$$

В этом случае уравнение (5.20) имеет асимптотически точное решение,

$$a_z(\xi) = a^{\text{ext}} \exp(i\kappa_{\text{ext}} \xi) [i\kappa_{\text{ext}} - \text{th}(\xi_0 + \xi)], \quad (5.25)$$

где κ_{ext} - безразмерная x -проекция волнового вектора необыкновенной волны,

$$\kappa_{\text{ext}} = (\Omega^2 - 1 - \kappa_y^2)^{1/2}. \quad (5.26)$$

В условиях, когда κ_{ext} становится мнимым, линейные волны не могут распространяться в образце.

Окончательно, для компонент электромагнитного поля необыкновенной волны имеем:

$$\vec{E}^{\text{ext}}(\xi) = \frac{\Omega}{i\lambda_c \sqrt{\varepsilon}} \{0, 0, a_z(\xi)\}, \quad (5.27)$$

$$\vec{H}^{\text{ext}}(\xi) = \lambda_c^{-1} \{-i\kappa_y a_z(\xi), a'_z(\xi), 0\}.$$

5.3. Коэффициенты отражения и трансформации

Приравнивая тангенциальные компоненты электрического и магнитного полей в вакууме (сумму волн H_{\perp} и E_{\perp} поляризаций (5.8)) и сверхпроводнике (сумму обыкновенной (5.11) и необыкновенной (5.27) волн) на границе $x=0$, получаем систему уравнений для амплитуд волн H_{\perp} , E_{\perp} обыкновенной и необыкновенной поляризаций. В условиях сильной анизотропии, $\gamma=1$, систему можно привести к виду:

$$H_i^{(1)} + H_r^{(1)} = 0, \quad (5.28a)$$

$$E_i^{(2)} - E_r^{(2)} = -\frac{k_z}{k_x} \frac{a^{\text{ext}} \Omega (\kappa_{\text{ext}} + i\sqrt{1-h_0^2})}{\lambda_c \sqrt{\varepsilon}}, \quad (5.28b)$$

$$E_i^{(2)} + E_r^{(2)} = \frac{kk_z}{k_y^2 - k^2} \frac{a^{\text{ext}}}{\lambda_c} [h_0^2 + \kappa_{\text{ext}} (\kappa_{\text{ext}} + i\sqrt{1-h_0^2})], \quad (5.28c)$$

$$-\frac{kk_x}{k_x^{\text{ord}} k_z} [H_i^{(1)} - H_r^{(1)}] - \frac{k_y}{k_x^{\text{ord}}} [E_i^{(2)} + E_r^{(2)}] = a^{\text{ord}}. \quad (5.28d)$$

Видно, что волна H_{\perp} поляризации полностью отражается от образца,

$$H_i^{(1)} = -H_r^{(1)}, \quad (5.29)$$

при этом волну E_{\perp} поляризации можно описать независимо от первой. Соотношение между амплитудами падающей и отраженной волн E_{\perp} поляризации можно представить в следующем виде:

$$E_r^{(2)} = E_i^{(2)} \frac{\chi - \chi_0}{\chi + \chi_0}, \quad (5.30)$$

где

$$\chi = \kappa_{\text{ext}} + \frac{h_0^2}{\kappa_{\text{ext}} + i\sqrt{1-h_0^2}}, \quad \chi_0 = \frac{\Omega(k^2 - k_y^2)}{\sqrt{\varepsilon} k k_x}. \quad (5.31)$$

Теперь мы можем выразить амплитуды отраженных волн ТЕ и ТМ поляризации через амплитуды падающих волн ТЕ и ТМ поляризации. С помощью формул (5.9), (5.10), (5.29) и (5.30) получаем

$$H_r^m = H_i^m \frac{\chi + \chi_1}{\chi + \chi_0} - E_i^{te} \frac{\chi_2}{\chi + \chi_0} \quad (5.32)$$

для ТМ поляризации и

$$E_r^{te} = H_i^m \frac{\chi_2}{\chi + \chi_0} - E_i^{te} \frac{\chi - \chi_1}{\chi + \chi_0} \quad (5.33)$$

для ТЕ поляризации, где

$$\chi_1 = \frac{\Omega(k_x^2 k_y^2 - k^2 k_z^2)}{\sqrt{\varepsilon} k k_x (k_y^2 + k_z^2)}, \quad \chi_2 = \frac{2\Omega k_y k_z}{\sqrt{\varepsilon} (k_y^2 + k_z^2)}, \quad (5.34)$$

а χ и χ_0 определяются уравнениями (5.31). Отметим, что χ является комплексной величиной, в то время как χ_0 , χ_1 и χ_2 – вещественные числа.

В тех случаях, когда на образец падает волна строго одной поляризации, или ТМ, или ТЕ, удобно ввести в рассмотрение коэффициенты отражения волн соответствующих поляризаций,

$$R^m = \left| \frac{H_r^m}{H_i^m} \right|^2, \quad R^{te} = \left| \frac{E_r^{te}}{E_i^{te}} \right|^2, \quad (5.35)$$

и коэффициенты трансформации,

$$R^{m \rightarrow te} = \left| \frac{E_r^{te}}{H_i^m} \right|^2, \quad R^{te \rightarrow m} = \left| \frac{H_r^m}{E_i^{te}} \right|^2. \quad (5.36)$$

Обратим внимание на то, что из уравнений (5.32) и (5.33) следует равенство коэффициентов трансформации: $R^{m \rightarrow te} = R^{te \rightarrow m}$.

В случае, когда частота волны превышает частоту отсечки,

$$\Omega > \Omega_{\text{cut}} = \left(1 - \frac{\sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2}{\varepsilon} \right)^{-1/2}, \quad (5.37)$$

величина κ_{ext} вещественна, что соответствует распространению необыкновенных ДПВ. В таких условиях сумма коэффициентов отражения и трансформации строго меньше единицы,

$$R^{tm} + R^{tm \rightarrow te} < 1, \quad R^{te} + R^{te \rightarrow tm} < 1, \quad (5.38)$$

поскольку часть энергии падающей волны уносится вглубь сверхпроводника. В случае же отрицательной отстройки частоты,

$$\Omega < \Omega_{\text{cut}} = \left(1 - \frac{\sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2}{\varepsilon} \right)^{-1/2}, \quad (5.39)$$

величина κ_{ext} становится чисто мнимой. Тогда линейные ДПВ не могут распространяться в образце, и сумма коэффициентов отражения и трансформации равна единице. Далее мы проанализируем случаи положительных и отрицательных отстроек частоты отдельно.

В случае положительной отстройки частоты параметр $\chi = \chi' + i\chi''$ содержит как вещественную, так и мнимую часть,

$$\chi' = \frac{(\kappa_{\text{ext}}^2 + 1)\kappa_{\text{ext}}}{\kappa_{\text{ext}}^2 + 1 - h_0^2}, \quad \chi'' = -\frac{h_0^2 \sqrt{1 - h_0^2}}{\kappa_{\text{ext}}^2 + 1 - h_0^2}, \quad (5.40)$$

и коэффициенты отражения могут быть записаны в виде:

$$R_{\pm}^{tm/te} = \frac{(\chi' \pm \chi_1)^2 + (\chi'')^2}{(\chi' + \chi_0)^2 + (\chi'')^2}, \quad (5.41)$$

где ТМ поляризации соответствует знак «+» в первых скобках в числителе, а ТЕ поляризации – знак «-», а вещественные величины χ_0 , χ_1 и χ_2 заданы уравнениями (5.31) и (5.34). Нижний индекс «+» обозначает случай положительной отстройки частоты, то есть $\Omega > \Omega_{\text{cut}}$.

Для коэффициентов трансформации получаем следующее выражение:

$$R_{\pm}^{tm \rightarrow te} = R_{\pm}^{te \rightarrow tm} = \frac{\chi_2^2}{(\chi' + \chi_0)^2 + (\chi'')^2}. \quad (5.42)$$

Для случая отрицательной отстройки частоты удобно ввести вещественный параметр $\tilde{\kappa}_{\text{ext}}$,

$$\tilde{\kappa}_{\text{ext}} = -i\kappa_{\text{ext}} = \sqrt{1 - \Omega^2 + \kappa_y^2}. \quad (5.43)$$

Тогда параметр $\chi = \chi' + i\chi''$ становится чисто мнимым,

$$\chi' = 0, \quad \chi'' = \tilde{\kappa}_{\text{ext}} - \frac{h_0^2}{\tilde{\kappa}_{\text{ext}} + \sqrt{1 - h_0^2}}, \quad (5.44)$$

и коэффициенты отражения и трансформации принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} R_-^{im} &= R_-^{ie} = \frac{\chi_1^2 + (\chi'')^2}{\chi_0^2 + (\chi'')^2}, \\ R_-^{im \rightarrow ie} &= R_-^{ie \rightarrow im} = \frac{\chi_2^2}{\chi_0^2 + (\chi'')^2}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

5.4. Анализ результатов

Проведенный нами анализ показал, что при положительной отстройке частоты, $\delta\Omega = \Omega - \Omega_{\text{cut}} > 0$, коэффициент трансформации $R_+^{im \rightarrow ie} = R_+^{ie \rightarrow im}$ всегда убывает с ростом величины постоянного магнитного поля. При этом коэффициенты отражения R_+^{im} и R_+^{ie} могут как убывать, так и возрастать с ростом магнитного поля в зависимости от параметров задачи.

На рис. 5.2 представлена зависимость отношения $R_+^{im \rightarrow ie} / R_+^{im}$ коэффициента трансформации к коэффициенту отражения от величины постоянного магнитного поля h_0 при различных отстройках частоты от Ω_{cut} . Видно, что при уменьшении отстройки величина трансформации растет. Значения коэффициентов отражения R_+^{im} и трансформации $R_+^{im \rightarrow ie}$ в функции h_0 при $\delta\Omega = 0,001$ приведены на вставке к рис. 5.2.

Используя уравнения (5.41) и (5.42), можно получить аналитическое выражение для отношения $R_+^{im \rightarrow ie} / R_+^{im}$ при $h_0 = 0$, разных частотах Ω и углах θ_1 и θ_2 :

$$\left. \frac{R_+^{im \rightarrow ie}}{R_+^{im}} \right|_{h_0=0} = \left(\frac{\sin 2\theta_2}{\kappa_{\text{ext}} \sqrt{\varepsilon} / \Omega + \cos \theta_1 \sin^2 \theta_2 - \cos^2 \theta_2 / \cos \theta_1} \right)^2. \quad (5.46)$$

Результат для отношения $R_+^{ie \rightarrow im} / R_+^{ie}$ оказывается таким же, как в уравнении (5.46), но с заменой знака перед κ_{ext} с плюса на минус.

Напомним, что κ_{ext} является функцией частоты Ω и углов θ_1 и θ_2 ,

$$\kappa_{\text{ext}} = [\Omega^2 - 1 - \Omega^2 \varepsilon^{-1} \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2]^{1/2}. \quad (5.47)$$

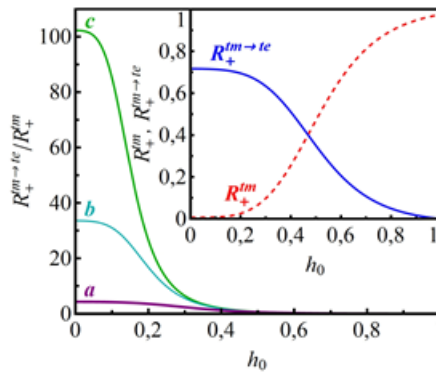


Рис. 5.2. Зависимость отношения коэффициента трансформации к коэффициенту отражения $R_+^{tm \rightarrow te} / R_+^{tm}$ от величины внешнего постоянного магнитного поля h_0 при $\delta \Omega = 0,001$ (кривая c), $\delta \Omega = 0,002$ (кривая b) и $\delta \Omega = 0,01$ (кривая a).

Вставка: Зависимости коэффициентов отражения R_+^{tm} (штриховая кривая) и трансформации $R_+^{tm \rightarrow te}$ (сплошная кривая) от величины постоянного магнитного поля h_0 при $\delta \Omega = 0,001$. Остальные параметры: $\theta_1 = \pi / 8$, $\theta_2 = \pi / 4$, $\lambda_c = 4 \times 10^{-3}$ см, $\lambda_{ab} = 2 \times 10^{-5}$ см, $\omega_j / 2\pi = 0,3$ ТГц, $\varepsilon = 16$

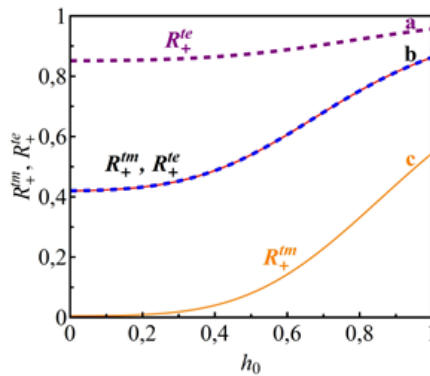


Рис. 5.3. Зависимости коэффициентов отражения R_+^{tm} (сплошные) и R_+^{te} (штриховые линии) от постоянного магнитного поля h_0 при $\Omega = 1,1$, $\theta_1 = \pi / 3$, $\theta_2 = \pi / 6$ (кривая a и кривая c) и, в соответствии с уравнением (5.49),

$$\theta_2 = \cos(\pi / 3) \text{ (совпадающие кривые b)}.$$

Остальные параметры такие же, как и на рис. 5.2

Наибольшее значение отношения (5.46) достигается, когда отстройка частоты мала, $\delta \Omega = \Omega - \Omega_{\text{cut}} = 1$, угол падения θ_1 близок

к нулю, а угол θ_2 близок к $\pi/4$. Коэффициент трансформации $R_+^{tm \rightarrow te}$ в этом случае близок 1. В указанном предельном случае при $h_0 = 1$ он асимптотически равен

$$R_+^{tm \rightarrow te} \approx 1 - \sqrt{8\varepsilon \delta\Omega} - \frac{1}{4}(\theta_1^2 - 4\theta_2 + \pi)^2 - \varepsilon h_0^4. \quad (5.48)$$

Несмотря на то, что в общем случае коэффициенты отражения ТМ и ТЕ волн различны, при $\theta_2 = \pi/4$ всегда можно найти такое θ_1 , при котором кривые зависимостей коэффициентов отражения R_+^{tm} и R_+^{te} совпадают независимо от частоты падающей волны и магнитного поля (см. рис. 5.3).

Данный эффект возникает, когда выполняется соотношение

$$\theta_2 = \cos \theta_1. \quad (5.49)$$

В частности, если $\theta_1 = 0$, кривые совпадут при $\theta_2 = \pi/4$.

Случай отрицательной отстройки частоты, $\delta\Omega = \Omega - \Omega_{cut} < 0$, интересен тем, что в таких условиях коэффициент трансформации $R_-^{tm \rightarrow te} = R_-^{te \rightarrow tm}$ может иметь максимум при значении h_0 , отличном от нуля и единицы. Значение магнитного поля, при котором наблюдается максимум коэффициента трансформации, можно получить аналитически:

$$h_0^{max} = \tilde{\kappa}_{ext} \sqrt{\sqrt{(\tilde{\kappa}_{ext})^{-2} - 3/4} + 1/2}, \quad (5.50)$$

где $\tilde{\kappa}_{ext}$ определяется выражением (5.43),

$$\tilde{\kappa}_{ext} = [1 - \Omega^2 + \Omega^2 \varepsilon^{-1} \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2]^{1/2}. \quad (5.51)$$

Рисунок 5.4 представляет цветом значение коэффициента трансформации $R_-^{tm \rightarrow te}$ при определенной частоте $\Omega = 0,9$ и при оптимальном значении магнитного поля (5.50) как функцию углов θ_1 и θ_2 . Середина черной области на диаграмме представляет линию максимальных значений коэффициента трансформации $R_-^{tm \rightarrow te}$, равных единице, что соответствует следующему соотношению между углами θ_1 и θ_2 :

$$\cos \theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2 + \operatorname{tg}^2 \theta_1}}. \quad (5.52)$$

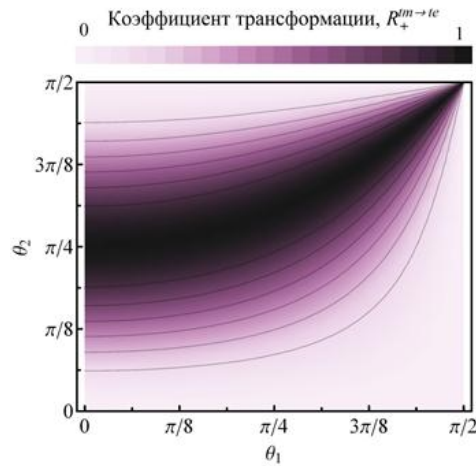


Рис. 5.4. Коэффициент трансформации $R_+^{m \rightarrow ie}$ (показанный градиентом цвета) при оптимальном значении (5.50) внешнего магнитного поля и при различных углах θ_1 и θ_2 . Частота волны $\Omega = 0,9$.
Остальные параметры такие же, как и на рис 5.2

Из уравнения (5.52), как и из рис. 5.4, видно, что полной трансформации поляризации можно достичь при углах θ_2 , превышающих $\pi/4$. Подставляя (5.52) в неравенство (5.39), получаем условие для частоты волны, при выполнении которого возможна полная трансформация поляризации:

$$\Omega < \left[1 - \frac{\sin^2 \theta_1}{\varepsilon(1 + \cos^2 \theta_1)} \right]^{-1/2}. \tag{5.53}$$

Таким образом, можно утверждать, что для заданных частоты Ω и угла падения θ_1 , удовлетворяющих соотношению (5.53), можно найти угол θ_2 (из уравнения (5.52)) и магнитное поле h_0 (из уравнения (5.50)), при которых коэффициент трансформации равен единице, то есть наблюдается полная трансформация поляризации отраженной волны.

На рис. 5.5 приведены зависимости коэффициентов отражения и трансформации от постоянного магнитного поля. Видно, что при определенном значении магнитного поля h_0 коэффициент отражения ТМ волны R_-^{im} обращается в нуль, а коэффициент трансформации $R_-^{m \rightarrow ie}$, соответственно, в единицу, то есть происходит полная трансформация поляризации.

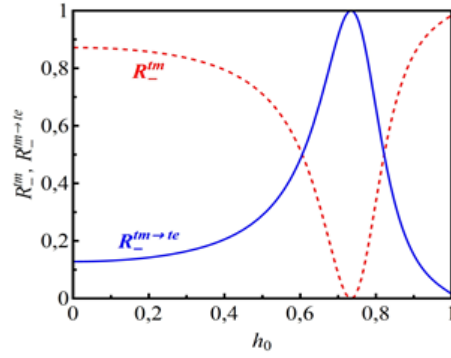


Рис. 5.5. Зависимость коэффициентов отражения R_-^m и трансформации $R_-^{m \rightarrow te}$ от постоянного магнитного поля h_0 при $\Omega = 0,9$, $\theta_1 = \pi / 3$ и $\theta_2 = \arccos(5^{-1/2})$ в соответствии с уравнением (5.52). Остальные параметры такие же, как и на рис 5.2

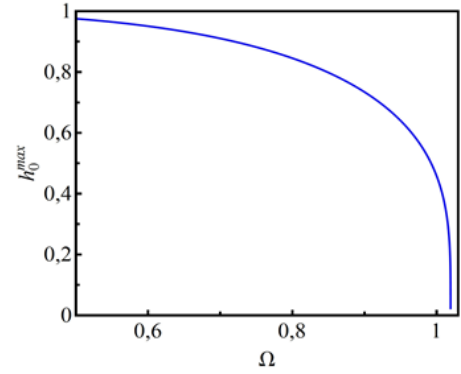


Рис. 5.6. Значение постоянного магнитного поля h_0^{\max} , при котором наблюдается полная трансформация, в зависимости от частоты Ω . Значения параметров те же, что и на рис. 5.2

При малых отстройках частоты от Ω_{cut} максимум коэффициента трансформации наблюдается при малых магнитных полях. С ростом отстройки, значение h_0^{\max} смещается в область полей, близких к единице. Данную тенденцию можно увидеть из рис. 5.6. То есть чем больше отстройка частоты от Ω_{cut} , тем правее смещается максимум кривой $R_-^{m \rightarrow te}$ (минимум кривой R_-^m) на рис. 5.5.

6. ВЫВОДЫ

В данном обзоре представлено теоретическое описание прохождения, отражения и трансформации поляризаций линейных и нелинейных электромагнитных волн при облучении образцов слоистых сверхпроводников, слои которых перпендикулярны их поверхностям, и установлено влияние внешнего постоянного магнитного поля на эти процессы.

Во-первых, изучено отражение и прохождение нелинейных волн сквозь слоистые сверхпроводники конечных размеров, помещенные в вакуумный прямоугольный волновод. Установлено, что зависимость коэффициента прохождения нелинейных волн от амплитуды падающей волны имеет гистерезисный характер. Показано, что изменением амплитуды падающей волны можно варьировать коэффициент прохождения в широком диапазоне значений.

Во-вторых, предложен оригинальный метод решения задач отражения, прохождения и трансформации нелинейных волн с произвольными поляризациями в слоистых сверхпроводниках. Этот метод основан на использовании представления поля произвольной волны в виде суммы двух волн со взаимно ортогональными поляризациями, которые даже в нелинейном режиме практически не взаимодействуют друг с другом. На основе этого метода дано теоретическое описание взаимной трансформации поляризации нелинейных поперечно-электрических и поперечно-магнитных волн при их отражении и прохождении сквозь образец слоистого сверхпроводника конечной толщины, помещенный в вакуумный прямоугольный волновод.

В-третьих, найдены аналитические выражения для коэффициентов отражения и прохождения поперечно-магнитных волн сквозь слоистые сверхпроводники в присутствии внешнего постоянного магнитного поля. Получены условия практически полного подавления коэффициента отражения. Установлено, что внешним магнитным полем можно эффективно управлять коэффициентом отражения и прохождения волн в широком диапазоне значений.

Наконец, изучена взаимная трансформация волн поперечно-электрической и поперечно-магнитной поляризации при их отражении от полубесконечного образца слоистого сверхпроводника в присутствии внешнего постоянного магнитного поля. Рассмотрены случаи положительной отстройки частоты от джозефсоновской плазменной, когда волны могут распространяться в слоистом сверхпроводнике, и отрицательной отстройки, когда падающая волна полностью отражается. Показано, что при положительных отстройках можно наблюдать частичную трансформацию поляризации в отсутствие магнитного поля и при достаточно малых отстройках частоты. При отрицательных отстройках частоты можно добиться полной трансформации ТЕ-волны в ТМ-волну и наоборот при определенных значениях магнитного поля и угла поворота плоскости падения относительно кристаллографической оси образца для заданной частоты и угла падения волны. Таким образом, установлено, что внешнее магнитное поле является удобным инструментом для управления трансформацией поляризации волн.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kleiner R. Intrinsic Josephson effects in high- T_c superconductors / R. Kleiner, P. Müller // *Physical Review B*. – 1994. – V. 49, № 2. – P. 1327 – 1341.
2. Terahertz Josephson plasma waves in layered superconductors: spectrum generation nonlinear and quantum phenomena / S. Savel'ev, V.A. Yampol'skii, A.L. Rakhmanov [et al.] // *Reports on Progress in Physics*. – 2010. – V. 73, № 2. – P. 026501-1 – 026501-49.
3. Tachiki M. Josephson plasma in the mixed state of High- T_c superconductors / M. Tachiki, T. Koyama, S. Takahashi // *Chinese Journal of Physics*. – 1996. – V. 34. – P. 340 – 346.
4. Tonouchi M. Cutting-edge terahertz technology / M. Tonouchi // *Nature Photonics*. – 2007. – V. 1, № 2. – P. 97 – 105.
5. Lee M. Searching for a Solid-State THz-Technology / M. Lee, M.C. Wanke // *Science*. – 2007. – V. 316, № 5821. – P. 64 – 65.

6. Powerful terahertz emission from mesa arrays / T.M. Benseman, K.E. Gray, A.E. Koshelev [et al.] // *Applied Physics Letters*. – 2013. – V. 103, № 2. – P. 022602-1 – 022602-4.
7. Surface Josephson Plasma Waves in Layered Superconductors above the Plasma Frequency: Evidence for a Negative Index of Refraction / V.A. Golick, D.V. Kadygrob, V.A. Yampol'skii [et al.] // *Physical Review Letters*. – 2010. – V. 104, № 18. – P. 187003-1 – 187003-4.
8. Analogues of nonlinear optics using terahertz Josephson plasma waves in layered superconductors / S. Savel'ev, A.L. Rakhmanov, V.A. Yampol'skii [et al.] // *Nature Physics*. – 2006. – V. 2, № 8. – P. 521 – 525.
9. Nonlinear electrodynamics in layered superconductors / V.A. Yampol'skii, S. Savel'ev, A.L. Rakhmanov [et al.] // *Physical Review B*. – 2008. – V. 78, № 2. – P. 024511-1 – 024511-9.
10. Self-induced THz-waves transmissivity of waveguides with finite-length layered superconductors / T.N. Rokhmanova, S.S. Apostolov, Z.A. Maizelis, V.A. Yampol'skii, Franco Nori // *Physical Review B*. – 2013. – V. 88, № 1. – P. 014506-1 – 014506-10.
11. Управление отражательной способностью слоистого сверхпроводника с помощью статического магнитного поля / Т.Н. Рохманова, З.А. Майзелис, С.С. Апостолов, В.А. Ямпольский // *Радиофизика и электроника*. – 2014. – Т. 19, № 3. – С. 49 – 54.
12. Superposition principle for nonlinear Josephson plasma waves in layered superconductors / T.N. Rokhmanova, S.S. Apostolov, Z.A. Maizelis, V.A. Yampol'skii, Franco Nori // *Physical Review B*. – 2014. – V. 90, № 18. – P. 184503-1 – 184503-9.
13. Transmission of terahertz waves through layered superconductors controlled by a dc magnetic field / S.S. Apostolov, Z.A. Maizelis, N.M. Makarov, F. Pérez-Rodríguez, T.N. Rokhmanova, V.A. Yampol'skii // *Physical Review B*. – 2016. – V. 94, № 2. – P. 024513-1 – 024513-8.
14. Трансформация поляризации электромагнитных волн при отражении от слоистых сверхпроводников во внешнем постоянном магнитном поле / Т.Н. Рохманова, С.С. Апостолов, З.А. Майзелис, В.А. Ямпольский // *Физика низких температур*. – 2016. – Т. 42, № 10. – С. 1167–1176.
15. Bednorz J.G. Possible high-Tc superconductivity in the system / J.G. Bednorz, K.A. Müller // *Z. Physik*. – 1986. – V. 64, № 2. – P. 189 – 193.
16. Superconductivity at 93 K in a new mixed-phase compound system at ambient pressure / M.K. Wu, J.R. Ashburn, C.J. Torng [et al.] // *Physical Review Letters*. – 1987. – V. 58, № 9. – P. 908 – 910.
17. A New High-Tc Oxide Superconductor without a Rare Earth Element / H. Maeda, Y. Tanaka, M. Fukutomi [et al.] // *Japanese Journal of Applied Physics*. – 1988. – V. 27, № 2. – P. L209 – L210.
18. Superconductivity above 150 K in at high pressures / C.W. Chu, L. Gao, F. Chen [et al.] // *Nature*. – 1993. – V. 365, № 6444. – P. 323 – 325.
19. Iron-Based Layered Superconductor: LaOFeP / Yoichi Kamihara, Hidenori Hiramatsu, Masahiro Hirano [et al.] // *Journal of the American Chemical Society*. – 2006. – V. 128, № 31. – P. 10012 – 10013.
20. Iron-Based Layered Superconductor with K / Yoichi Kamihara, Takumi Watanabe, Masahiro Hirano [et al.] // *Journal of the American Chemical Society*. – 2008. – V. 130, № 11. – P. 3296 – 3297.
21. Phase diagram and electronic indication of high-temperature superconductivity at 65 K in single-layer films / Shaolong He, Junfeng He, Wenhao Zhang [et al.] // *Nature Materials*. – 2013. – V. 12, № 7. – P. 605 – 610.
22. Intrinsic Josephson effects in single crystals / R. Kleiner, F. Steinmeyer, G. Kunkel [et al.] // *Physical Review Letters*. – 1992. – V. 68, № 15. – P. 2394 – 2397.
23. Josephson B.D. Possible new effects in superconductive tunnelling / B.D. Josephson // *Physics Letters*. – 1962. – V. 1, № 7. – P. 251 – 253.
24. Gurvitch M. High quality refractory Josephson tunnel junctions utilizing thin aluminum layers / M. Gurvitch, W.A. Washington and H.A. Huggins // *Applied Physics Letters*. – 1983. – V. 42, № 5. – P. 472 – 474.
25. Fabrication of Al/AlOx/Al Josephson junctions and superconducting quantum circuits by shadow evaporation and a dynamic oxidation process / Wu Yu-Lin, Deng Hui, Yu Hai-Feng [et al.] // *Chinese Physics B*. – 2013. – V. 22, № 6. – P. 060309-1 – 060309-5.
26. Гинзбург В.Л. К теории сверхпроводимости / В.Л. Гинзбург, Л.Д. Ландау // *Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики*. – 1950. – Т. 20. – С. 1064 – 1081.
27. Lawrence W.E. Theory of layer structure superconductors / W.E. Lawrence and S. Doniach // *Proceedings of the Twelfth International Conference on Low Temperature Physics*, September 4-10, 1970. – Kyoto, Japan, 1971. – P. 361.
28. Chapman S. Jonathan On the Lawrence-Doniach and Anisotropic Ginzburg-Landau Models for Layered Superconductors / S. Jonathan Chapman, Qiang Du, Max D. Gunzburger // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. – 1995. – V. 55, № 1. – P. 156 – 174.

29. Sakai S. Fluxons in thin-film superconductor-insulator superlattices / S. Sakai, P. Bodin, N.F. Pedersen // *Journal of Applied Physics*. – 1993. – V. 73, № 5. – P. 2411 – 2314.
30. Time-dependent equations for phase differences and a collective mode in Josephson-coupled layered superconductors / L.N. Bulaevskii, M. Zamora, D. Baeriswyl [et al.] // *Physical Review B*. – 1994. – V. 50, № 17. – P. 12831 – 12834.
31. Tachiki M. Electromagnetic phenomena related to a low-frequency plasma in cuprate superconductors / M. Tachiki, T. Koyama, S. Takahashi // *Physical Review B*. – 1994. – V. 50, № 10. – P. 7065 – 7084.
32. Bulaevskii L.N. Low Frequency Magneto-optical Properties of Josephson-Coupled Superconductors / L.N. Bulaevskii, M.P. Maley, M. Tachiki // *Physical Review Letters*. – 1995. – V. 74, № 5. – P. 801 – 804.
33. Longitudinal Josephson-plasma excitation in Bi_2Te_3 : Direct observation of the Nambu-Goldstone mode in a superconductor / K. Kadowaki, I. Kakea, M.B. Gaifullin [et al.] // *Physical Review B*. – 1997. – V. 56, № 10. – P. 5617 – 5621.
34. Savel'ev S. Surface Josephson Plasma Waves in Layered Superconductors / S. Savel'ev, V. Yampol'skii, F. Nori // *Physical Review Letters*. – 2005. – V. 95, № 18. – P. 187002-1 – 187002-4.
35. THz detectors using surface Josephson plasma waves in layered superconductors / S. Savel'ev, V. Yampol'skii, A.L. Rakhmanov [et al.] // *Physica C*. – 2006. – V. 445-448. – P. 183 – 185.
36. Using Josephson vortex lattices to generate, detect and control THz radiation / S. Savel'ev, V. Yampol'skii, A. Rakhmanov [et al.] // *Physica C*. – 2006. – V. 437-438. – P. 281 – 284.
37. Surface plasma waves across the layers of intrinsic Josephson junctions / V.A. Yampol'skii, D.R. Gulevich, S. Savel'ev [et al.] // *Physical Review B*. – 2008. – V. 78, № 5. – P. 054502-1 – 054502-4.
38. Excitation of surface Josephson plasma waves in layered superconductors / V.A. Yampol'skii, A.V. Kats, M.L. Nesterov [et al.] // *Physical Review B*. – 2007. – V. 76, № 22. – P. 224504-1 – 224504-7.
39. Resonance effects due to the excitation of surface Josephson plasma waves in layered superconductors / V.A. Yampol'skii, A.V. Kats, M.L. Nesterov [et al.] // *Physical Review B*. – 2009. – V. 79, № 21. – P. 214501-1 – 214501-8.
40. Excitation of surface plasma waves across the layers of intrinsic Josephson junctions / D.V. Kadygrob, V.A. Golick, V.A. Yampol'skii [et al.] // *Physical Review B*. – 2009. – V. 80, № 21. – P. 184512-1 – 184512-10.
41. Layered superconductors as negative-refractive-index metamaterials / A.L. Rakhmanov, V.A. Yampol'skii, J.A. Fan [et al.] // *Physical Review B*. – 2010. – V. 81, № 7. – P. 075101-1 – 075101-6.
42. Controlled terahertz frequency response and transparency of Josephson chains and superconducting multilayers / V.A. Yampol'skii, S. Savel'ev, O.V. Usatenko [et al.] // *Physical Review B*. – 2007. – V. 75, № 1. – P. 014527-1 – 014527-7.
43. Active terahertz metamaterial devices / H.-T. Chen, W.J. Padilla, J.M.O. Zide [et al.] // *Nature*. – 2006. – V. 444, № 7119. – P. 597 – 600.
44. Booi P.A.A. High power generation with distributed Josephson-junction arrays / P.A.A. Booi, S.P. Benz // *Applied Physics Letters*. – 1996. – V. 68, № 26. – P. 3799-3801.
45. Emission of Coherent THz Radiation from Superconductors. / L. Ozyuzer, A.E. Koshelev, C. Kurter [et al.] // *Science*. – 2007. – V. 318, № 5854. – P. 1291 – 1293.
46. Savel'ev S. Using Josephson Vortex Lattices to Control Terahertz Radiation: Tunable Transparency and Terahertz Photonic Crystals / S. Savel'ev, A. Rakhmanov, F. Nori // *Physical Review Letters*. – 2005. – V. 94, № 15. – P. 157004-1 – 157004-4.
47. Kleiner R. Filling the Terahertz Gap / R. Kleiner // *Science*. – 2007. – V. 318, № 5854. – P. 1254 – 1255.
48. Generation of tunable terahertz out-of-plane radiation using Josephson vortices in modulated layered superconductors / S. Savel'ev, V. Yampol'skii, A. Rakhmanov [et al.] // *Physical Review B*. – 2005. – V. 72, № 14. – P. 144515-1 – 144515-7.
49. Using Josephson vortex lattices to generate, detect and control THz radiation / S. Savel'ev, V. Yampol'skii, A. Rakhmanov [et al.] // *Physica C*. – 2006. – V. 437-438. – P. 281 – 284.
50. Generation of tunable terahertz radiation using Josephson vortices: Transition and Cherenkov radiation / S. Savel'ev, V. Yampol'skii, A. Rakhmanov [et al.] // *Physica C*. – 2006. – V. 445-448. – P. 175 – 179.
51. Shapiro Step Response in the Coherent Josephson Flux Flow State of Bi_2Te_3 / Yu.I. Latyshev, M.B. Gaifullin, T. Yamashita [et al.] // *Physical Review Letters*. – 2001. – V. 87, № 24. – P. 247007-1 – 247007-4.
52. Koyama T. I-V characteristics of Josephson-coupled layered superconductors with longitudinal plasma excitations / T. Koyama, M. Tachiki // *Physical Review B*. – 1996. – V. 54, № 22. – P. 16183 – 16191.

53. Artemenko S.N. Stability, collective modes and radiation from sliding Josephson vortex lattice in layered superconductors / S.N. Artemenko, S.V. Remizov // *Physica C*. – 2001. – V. 362, № 1-4. – P. 200 – 204.
54. Koshelev A.E. Role of in-plane dissipation in dynamics of a Josephson vortex lattice in high-temperature superconductors / A.E. Koshelev // *Physical Review B*. – 2000. – V. 62, № 6. – P. R3616 – R3619.
55. Helm Ch. Optical properties of layered superconductors near the Josephson plasma resonance / Ch. Helm, L.N. Bulaevskii // *Physical Review B*. – 2002. – V. 66, № 9. – P. 094514-1 – 094514-23.
56. Static charge coupling of intrinsic Josephson junctions / Ch. Helm, J. Keller, Ch. Peris [et al.] // *Physica C*. – 2001. – V. 362, № 1-4. – P. 43 – 50.
57. Shukrinov Y.M. Current-voltage characteristics of intrinsic Josephson junctions with charge-imbalance effect / Y.M. Shukrinov, F. Mahfouzi // *Physica C*. – 2007. – V. 460-462, Part 2. – P. 1303 – 1304.
58. Charge-imbalance effects in intrinsic Josephson systems / S. Rother, Y. Koval, P. Müller [et al.] // *Physical Review B*. – 2003. – V. 67, № 2. – P. 024510-1 – 024510-8.
59. Mills D.L. *Nonlinear optics: basic concepts* / D.L. Mills. – Berlin: Springer, 1998. – 263 p.
60. Rajaraman R. *Solitons and Instantons, An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory* / R. Rajaraman. – Amsterdam: North-Holland, 1987. – 418 p.
61. Layered superconductors as nonlinear waveguides for terahertz waves / S. Savel'ev, V.A. Yampol'skii, A.L. Rakhmanov [et al.] // *Physical Review B*. – 2007. – V. 75, № 18. – P. 184503-1 – 184503-8.
62. Self-induced tunable transparency in layered superconductors / S.S. Apostolov, Z.A. Maizelis, M.A. Sorokina [et al.] // *Physical Review B*. – 2010. – V. 82, № 14. – P. 144521-1 – 144521-8.
63. Optical excitation of Josephson plasma solitons in a cuprate superconductor / A. Dienst, E. Casandruc, D. Fausti [et al.] // *Nature Materials*. – 2013. – V. 12, № 6. – P. 535 – 541.
64. Khankina S.I. Josephson plasma oscillations in confined layered superconductors / S.I. Khankina, V.M. Yakovenko, V.A. Yampol'skii // *Low Temperature Physics*. – 2012. – V. 38, № 3. – P. 193 – 198.

ЧАСТЬ VI

РЕГУЛЯРНАЯ И ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

В. А. Буц

*Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»
НАН Украины, ул. Академическая 1, г. Харьков, 61108, Украина;
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, пл. Свободы, 4,
г. Харьков, 61022, Украина
Радиоастрономический институт Национальной академии наук Украины
г. Харьков, 61002, Украина*

В обзоре описаны некоторые важные стороны регулярной и хаотической динамики волновых процессов. Наиболее важным для протекания волновых процессов является результат, который заключается в существовании новых условий эффективного взаимодействия волн (новых условий синхронизма) в распределенных системах. Показано, что в распределенных системах расстройка вдоль одного пространственно-временного направления может быть скомпенсирована расстройкой вдоль другого направления. В результате волны могут эффективно взаимодействовать в распределенных системах даже в отсутствии известных условий синхронизма. Показано, что такое новое эффективное взаимодействие волн происходит вдоль некоторых пространственно-временных направлений (субхарактеристические направления). Далее в рамках приближения геометрической оптики показано, что существует новый тип фокусировки волн в неоднородных средах. Этот тип - фокусировки во многом аналогичен эффекту автофазировки частиц Векслера - Макмиллана в теории ускорителей. В рамках регулярной динамики сформулированы аналитические критерии перехода регулярной динамики взаимодействия волн в хаотический режим. Эти критерии сформулированы как для лучей, так и для волн. Для волн полу-ченные критерии справедливы для наиболее известных и часто используемых линейных и нелинейных процессов трехволнового взаимодействия. Описана динамика каскада распадающихся волн. Этот каскад представляет собой последовательность трехволновых распадов. Причем каждый трехволновой этап

оказывается регулярным. Волны, возникающие как результат первого этапа распада, создают следующий трехволновой этап каскада и так далее. Известно, что такой бесконечный каскад также, как и отдельные этапы, регулярен. Показано, что реальный каскад, состоящий из ограниченного числа (даже большого числа) этапов распада, всегда хаотичен. Интересно, что время регулярной динамики каждого такого каскада определяется временем достижения процесса каскада его последнего звена (этапа). В обзоре показано, что наличие случайных неоднородностей среды, в которой распространяются волны (лучи), приводит к развитию флуктуационной неустойчивости. Результатом этой флуктуационной неустойчивости является экспоненциальное разбегание лучей. Причем вторые моменты растут экспоненциально. Высшие моменты растут тем быстрее, чем больше номер момента. Это так называемый перемежаемый случайный процесс, при котором возникают редкие, но очень сильные флуктуационные всплески. По известной в теории случайных процессов классификации такой процесс относится к супердиффузии и может быть описан либо в рамках теории дробных производных (интегро-дифференциальных уравнений), либо методом моментов. Отмечено, что обнаруженный механизм фокусировки лучей в неоднородных средах может подавить такую неустойчивость, и сделать процесс взаимодействия волн более регулярным.

ВВЕДЕНИЕ

Взаимодействия типа волна-частица и взаимодействие типа волна-волна лежат в основе физики плазмы и плазменной электроники. Материалы, в которых содержатся некоторые важные особенности взаимодействий типа волна-частица, опубликованы в предыдущем выпуске научных трудов Харьковского государственного университета. Некоторые важные особенности взаимодействий типа волна-волна содержатся в этом обзоре.

Известно, что динамика волн в неоднородных средах в приближении геометрической оптики во многом похожа на динамику заряженных частиц во внешних электромагнитных полях. Известно также, что в теории ускорителей заряженных частиц очень важную роль играет эффект автофазировки Векслера - Макмиллана. Достаточно упомянуть, что Векслер вместе с Макмилланом дважды выдвигался на Нобелевскую премию. Нобелевский комитет, в частности, назвал их работу сенсационным успехом в решении проблемы ускорения заряженных частиц большой энергии. Однако в связи с не научными, а политическими проблемами, Нобелевскую премию эти авторы не получили.

Учитывая аналогию в динамике частиц и в динамике волн в приближении геометрической оптики, можно было ожидать, что динамика лучей может обладать близкими важными свойствами. Был проведен анализ, и проведено сравнение этих динамик. Результаты этого анализа содержатся в первом разделе настоящего обзора. Показано, что в волноведущих средах с растущим по величине коэффициентом преломления лучи фокусируются вокруг оси распространения. Главная осо-

бенность такой фокусировки заключается в том, что лучи по достижении максимальной поперечной фокусировки не разбегаются, а остаются все сфокусированными в окрестности оси распространения. Причем если на входе в волноведущую среду фазовый объем лучей стремится к нулю (тангенс угла наклона лучей к оси, например, стремится к нулю), то поперечный размер сфокусированного потока лучей будет также стремиться к нулю. Лучи не разбегаются, несмотря на тот факт, что при такой фокусировке тангенс угла наклона стремится к бесконечности. Это связано с релятивизмом динамики лучей, а также с тем, что каноническими переменными для лучей являются поперечный размер и обобщенный импульс, который содержит тангенс угла наклона и в числителе, и в знаменателе.

Реальные среды, в которых распространяются волны, имеют неоднородности. Чаще всего это случайные неоднородности. Эти неоднородности необходимо учитывать. Во втором разделе обзора приведены результаты анализа влияния случайных неоднородностей на динамику лучей. Оказалось, что эти случайные неоднородности в уравнениях, которые описывают динамику лучей, играют роль мультипликативных флуктуаций. Эта особенность приводит к тому, что в динамике лучей развивается флуктуационная неустойчивость. Лучи экспоненциально разбегаются. Вторые моменты (дисперсия) экспоненциально растут, а высшие моменты растут с большим инкрементом, чем более низкие моменты. Отметим, что такие процессы не могут быть описаны привычными кинетическими уравнениями типа ЭФПК (Эйнштейна – Фоккера – Планка Колмогорова), так как последние учитывают только первые и вторые моменты. Описание таких процессов взаимодействия может быть реализовано или только с помощью интегро-дифференциальных уравнений (уравнениями с дробными производными), или методом моментов. В данных исследованиях использовался метод моментов.

Для использования статистических методов при описании процессов взаимодействий типа волна-частица и взаимодействий типа волна-волна часто используются качественные феноменологические соображения (аргументы). В тех случаях, когда в динамике частиц или волн существенную роль играют случайные силы, то такой подход в большинстве случаев достаточно оправдан. Однако если сложная хаотическая динамика возникает в результате развития динамического хаоса, то переход к методам статистической физики не всегда очевиден. Необходим строгий критерий возможности такого перехода. В разделах 1 и 3 данного обзора приведен вывод аналитических критериев возникновения режимов с динамическим хаосом. В разделе 1 для динамики лучей, в разделе 3 для линейного и нелинейного трехволнового взаимодействия волн.

В четвертом разделе рассмотрена динамика более реальных схем нелинейного взаимодействия волн. В этом разделе рассмотрено две модели взаимодействия большого количества волн. В первой модели предполагается существование широкого (по частотам) пакета высокочастотных волн. В свою очередь, пакет состоит из более узких парциаль-

ных пакетов. Расстояние по частотам между парциальными пакетами равно низкочастотному колебанию, которое может существовать или возбуждаться в рассматриваемой системе. Все низкочастотные волны имеют одинаковую частоту, но разные волновые вектора. В качестве примера можно представить, что имеется каскад взаимодействий между двумя поперечными волнами и ленгмюровскими колебаниями плазмы, т.е. имеется каскад преобразований. Получена система уравнений, которая описывает этот каскад. Описаны некоторые характерные сценарии преобразования энергии в такой модели. Найдены режимы с регулярной динамикой и с хаотической динамикой.

Вторая модель значительно более простая. Однако она позволяет увидеть большее количество характерных особенностей динамики процесса распада и слияния волн. Эта модель была впервые изучена в работах [30, 31]. Однако в этих работах рассматривался бесконечный каскад, и динамика была регулярной. Бесконечный каскад - это, безусловно, идеализация. В реальных условиях количество участвующих во взаимодействии волн всегда ограничено. В четвертом разделе описаны результаты анализа динамики конечного числа взаимодействующих волн. Динамика таких конечных каскадов значительно более богатая. В ней могут быть реализованы как регулярная, так и хаотическая динамика. В этом же разделе описана динамика распада электромагнитных волн в нелинейной среде (в плазме), при которой степень когерентности распадающейся волны может быть существенно увеличена. Показано, что существуют режимы, когда энтропия распадающейся волны практически полностью переходит в энтропию низкочастотной волны.

Хорошо известно, что эффективное взаимодействие между волнами происходит при выполнении следующих условий синхронизма: $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$, $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3$. Здесь ω_i - частоты взаимодействующих волн; \mathbf{k}_i - волновые векторы этих волн.

Если хотя бы одно из этих соотношений не выполняется, то эффективность взаимодействия волн быстро падает. Видно, что эти условия (4 условия) представляют собой условия выполнения синхронизма вдоль каждой из осей четырехмерного пространства. Часто эти условия называют условиями сохранения импульса и энергии, соответственно. Действительно, если домножить эти соотношения на постоянную Планка, то они действительно выглядят, как законы сохранения энергии и импульса при элементарных актах взаимодействия квантовых частиц. Эти условия можно также назвать локальными условиями синхронизма, подчеркивая тот факт, что в этих условиях отсутствуют размеры области взаимодействия волн. Если речь идет об одномерных процессах, например, процессах, протекающих только во времени, то эти условия, безусловно, должны выполняться. Однако реальное взаимодействие волн в подавляющем большинстве случаев - это распределенный процесс, т.е. он протекает в некоторой пространственной области и в течение некоторого определенного интервала времени. Поэтому можно предположить, что наличие расстройки вдоль одного из направлений четырехмерного пространства может быть скомпенсировано расстройкой вдоль другого

направления. В этом случае наличие расстройек не приведет к уменьшению эффективности взаимодействия волн. Эти соображения были изучены. В пятом разделе данного обзора изложены результаты рассмотрения этого вопроса. Оказалось, что действительно такой процесс компенсации расстройки вдоль одной оси может быть скомпенсирован расстройкой вдоль другой оси. Найдены условия эффективного взаимодействия волн при наличии расстройек. Эти условия, как частный случай, содержат известные условия взаимодействия, которые приведены выше. Показано, что в этом случае (при наличии расстройек) эффективное взаимодействие волн происходит вдоль некоторых линий в четырехмерном пространстве. Эти линии совпадают с субхарактеристиками уравнений в частных производных, которые описывают динамику взаимодействия волн. Рассмотрены как линейные процессы взаимодействия, так и нелинейные (трехволновые взаимодействия волн). Полученные результаты существенно расширяют область параметров, при которых волны могут эффективно взаимодействовать. В частности, показано, что при нелинейном взаимодействии волн может существенно расширяться область параметров с хаотической динамикой взаимодействия. Показано также, что сформулированные новые условия эффективного взаимодействия волн могут быть реализованы не только в классической электродинамике, но и в квантовой электродинамике.

Следует заметить, что автор обзора постарался так организовать разделы, что они являются практически независимыми. Их можно рассматривать независимо друг от друга.

1.1. Фокусировка и динамический хаос лучей в неоднородных волноведущих средах (Волновые процессы в приближении геометрической оптики)

Как известно, геометрическая оптика аналогична классической механике материальных частиц. Соотношение между лучевой оптикой и волновой оптикой такое же, как между классической механикой и волновой механикой. При этом динамика материальных точек, в особенности динамика заряженных частиц во внешних электромагнитных полях, в настоящее время изучена в большей степени, чем динамика лучей в неоднородных средах. При изучении динамики частиц и динамики лучей основной интерес представляет выяснение условий, когда эта динамика является устойчивой и регулярной и когда она становится локально неустойчивой, хаотической. Условия возникновения динамического хаоса движения частиц во внешних электромагнитных полях для всех известных условий резонансного взаимодействия заряженных частиц с электромагнитными полями в настоящее время изучены [1-4]. Кроме динамического

хаоса представляет интерес нахождение условий, при которых динамика частиц оказывается наиболее устойчивой. В теории ускорителей таким условиям соответствуют условия, возникающие при автофазировке Векслера - Макмиллана. Эта автофазировка является одним из наиболее фундаментальных физических процессов, на которых базируется теория линейных и циклических ускорителей. Можно ожидать, что, меняя величину показателя преломления среды, в которой распространяются лучи, удастся создать условия, аналогичные условиям автофазировки Векслера - Макмиллана, или создать условия для локальной неустойчивости лучей. В первом случае при автофазировке можно ожидать, что лучи будут фокусироваться в окрестности избранного «синхронного» луча. Во втором случае при развитии динамического хаоса динамика лучей станет неуправляемой, хаотической. Ниже мы покажем, что действительно изменением показателя преломления можно эффективно управлять динамикой лучей. При этом наибольший интерес представляет управление лучами в средах, представляющих собой волноводы, т.е. в волноведущих средах. В таких средах локализация излучения обеспечивается поперечной неоднородностью среды. Мы покажем, что в таких, волноведущих средах, изменение продольной неоднородности позволяет создать условия как для фокусировки лучей, так и условия для возникновения их хаотической динамики.

1.1. Общие уравнения, описывающие динамику лучей в неоднородных средах

Рассмотрим вначале простейший случай, когда коэффициент преломления среды, в которой распространяется излучение, зависит только от поперечной координаты (x) и от продольной (z).

Гамильтониан, описывающий динамику лучей в такой среде, имеет вид:

$$H = -\sqrt{n^2 - p^2}, \quad (1.1)$$

где $p = \frac{n \cdot \dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}$ – обобщенный импульс, $n = n(x, z)$ – коэффициент преломления,

$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dz}$ – тангенс угла наклона луча к оси z .

Уравнения, описывающие эволюцию лучей вдоль оси z , имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{n}{H} \frac{\partial n}{\partial x}, \\ \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p} = -\frac{p}{H}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Несмотря на внешнюю простоту системы уравнений (1.2), в общем случае его решение в аналитическом виде получить не удастся. Поэтому ниже мы воспользуемся возможными в нашей физической задаче упрощениями. В частности, будем считать, что коэффициент преломления может быть представлен в виде двух слагаемых. Первое из них представляет собой не меняющуюся величину (невозмущенную часть коэффициента преломления n_0), второе функцию двух переменных, малую по сравнению с первым слагаемым ($n_1(x, z) \ll n_0$): $n = n_0 + n_1(x, z)$. Кроме того, будем считать, что функция $n_1(x, z)$ такова, что переменные x и z разделены, т.е. функцию $n_1(x, z)$ можно представить в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной: $n_1 = N(z) \cdot F(x)$. Тогда первое уравнение системы (1.2), описывающее изменение импульса, примет вид:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{H_0} \cdot \frac{\partial n_1}{\partial x} = \frac{N}{H_0} \cdot \frac{\partial F}{\partial x},$$

при этом систему уравнений (1.2) удобно переписать в виде одного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\ddot{x} = \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{N}{H_0} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{1}{H_0} \left(1 - \frac{n_1 n_0}{H_0} \right) + \frac{p}{H_0^3} \left(1 - \frac{3n_1 n_0}{H_0^2} \right) \frac{\partial N}{\partial z} F. \quad (1.3)$$

В общем случае уравнение (1.3), кроме зависимой переменной x , содержит еще и зависимую переменную p , что делает это уравнение малоэффективным для анализа. Однако если мы будем рассматривать распространение лучей в наиболее интересном для приложения случае, когда они распространяются в волноводе, то характерное изменение коэффициента преломления в поперечном направлении (вдоль оси x) будет значительно более существенным, чем изменение этого коэффициента вдоль оси z . Эта особенность изменения неоднородности выражается в следующем неравенстве: $N \frac{\partial F}{\partial x} \gg F \frac{\partial N}{\partial z}$. При этом можно пренебречь вторым слагаемым, которое мало по сравнению с первым.

Окончательно получим:

$$\ddot{x} = \frac{N}{H_0^2} \frac{\partial F}{\partial x}. \quad (1.4)$$

Отметим, что при получении уравнения (1.4) мы оставили только члены, пропорциональные первой степени малого параметра $n_1(x, z)$. Уравнение (1.4) представляет собой уравнение нелинейного маятника,

линейная частота которого является функцией продольной координаты z . Для аналитического исследования уравнения (1.4), его удобно, в свою очередь, представить в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varphi, \\ \dot{\varphi} &= \frac{N}{H_0^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Система уравнений (1.5) позволяет найти положение стационарных точек на фазовой плоскости (φ, x) . Эти условия имеют вид: $\varphi = 0$, $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$.

Для определения характера этих стационарных точек получим уравнение, описывающее динамику малых отклонений от них. Для этого введем величину отклонения ξ : $x = x_n + \xi$. Подставляя это выражение в систему (1.5), получим

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \varphi, \\ \dot{\varphi} &= \frac{N}{H_0^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) \cdot \xi. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Система (1.6) эквивалентна уравнению линейного маятника с меняющейся частотой

$$\ddot{\xi} + \Omega^2(z) \cdot \xi = 0, \quad (1.7)$$

где $\Omega^2(z) = -\frac{N(z)}{H_0^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_{x_n}$ – квадрат частоты

1.2. Динамика лучей в волноведущей среде с нарастающим вдоль оси z коэффициентом преломления

В этом разделе мы покажем, что наличие растущего с координатой z коэффициента преломления приводит к фокусировке излучения. Механизм этой фокусировки подобен автофазировке частиц Векслера - Макмиллана в теории ускорителей. Для доказательства возможности такой фокусировки мы воспользуемся полученными выше уравнениями.

Для нахождения координат стационарных точек и их характера нам необходимо конкретизировать вид функции $n_1(x, z)$. Для упрощения дальнейшего анализа и без потери физической общности эту функцию $n_1(x, z)$ можно выбрать в виде

$$n_1(x, z) = F(x)N(z), \quad F(x) = \cos(kx), \quad N(z) = \alpha \cdot \exp(\chi z), \quad (1.8)$$

при таком выборе функции $n_1(x, z)$ положение стационарных точек будет определяться:

$$x = x_n = \pi m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots \quad \varphi = 0.$$

Квадрат частоты при этом будет иметь вид:

$$\Omega^2(z) = \frac{N(z)}{n_0^2} (-1)^m.$$

Из этого выражения видно, что стационарные точки, расположенные при нечетных m , будут неустойчивые. Характер точек при четных m требует дополнительного анализа. Для этого анализа уравнение (1.7) удобно переписать в безразмерном виде:

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + \exp(\beta \tau) \cdot \xi = 0, \quad (1.9)$$

$$\text{где } \tau \equiv \frac{z \cdot k \cdot \sqrt{\alpha}}{n_0}, \quad \beta \equiv \frac{\chi \cdot n_0}{k \cdot \sqrt{\alpha}}.$$

В общем случае, при произвольных величинах β , уравнение (1.9) может быть исследовано только численно. Однако, если параметр $\beta = 2$, то уравнение (1.9) представляет собой уравнение Бесселя. Для доказательства этого утверждения введем новую независимую переменную $y = \exp(\tau)$. Уравнение (1.9) при этом приобретет вид:

$$\frac{d^2 \xi}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{d\xi}{dy} + \xi = 0. \quad (1.10)$$

Общее решение его может быть записано в виде суперпозиции цилиндрических функций первого и второго рода:

$$\xi = A \cdot J_0(e^\tau) + B \cdot N_0(e^\tau). \quad (1.11)$$

Функция Неймана N_0 и функция Бесселя J_0 убывают с ростом аргумента по закону $1/\sqrt{e^\tau}$. Поэтому стационарные точки при четных m будут устойчивы. Это означает, что лучи, находящиеся вблизи этих стационарных точек будут к ним притягиваться. Более того, т.к. у нас имеется только два типа стационарных точек, одни из которых устойчивы, другие неустойчивы, то можно утверждать, что все множество лучей

будет разбегаться от неустойчивых точек и будет собираться к устойчивым. Возникает фокусировка лучей.

Если коэффициент усиления волны будет таким, что параметр β не будет равен 2, то уравнение (1.9) уже не представляет собой уравнение Бесселя и не имеет, в общем случае, аналитического решения. Однако характер стационарных точек при этом не меняется.

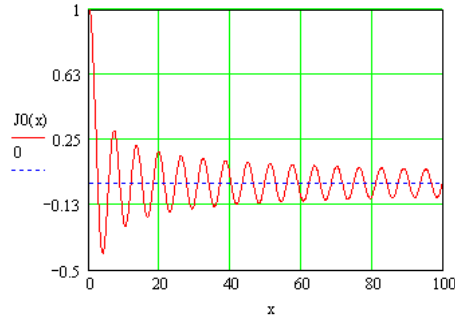


Рис. 1.1. Зависимость отклонения луча от продольной координаты в окрестности устойчивой стационарной точки ($\beta = 2$)

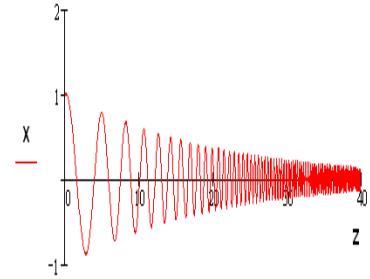


Рис. 1.2. Зависимость отклонения луча от продольной координаты в окрестности устойчивой стационарной точки при $\beta = 0, 2$

Они остаются экспоненциально устойчивыми. На рисунках 1.1-1.3 показаны примеры стягивания лучей к стационарным точкам. На рисунке 1.1 показана зависимость функции Бесселя от продольной координаты. На рисунке 1.2 представлена зависимость смещения от координаты при $\beta = 0, 2$, а на рис. 1.3 при $\beta = 3$.

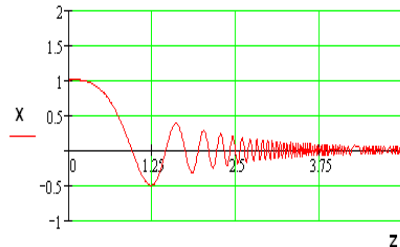


Рис. 1.3. Зависимость отклонения луча от продольной координаты в окрестности устойчивой стационарной точки при $\beta = 3$

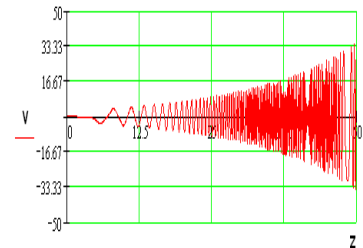


Рис. 1.4. Зависимость тангенса угла наклона от продольной координаты в окрестности устойчивой стационарной точки (иллюстрация теоремы Лиувилля)

Как видно из этих рисунков, во всех случаях, амплитуда отклонения от стационарных точек уменьшается. Чем больше величина пара-

метра β , тем быстрее отклонение стремится к нулю. Отметим, что экспоненциальное уменьшение отклонения сопровождается увеличением частоты осцилляций отклонений от своих стационарных значений. Это, в свою очередь, приводит к тому, что величина производной отклонения будет экспоненциально нарастать с координатой z . Такая особенность динамики самого отклонения и её производной является результатом справедливости в данном случае теоремы Лиувилля о сохранении фазового объема. В качестве примера на рис. 1.4 представлена зависимость производной отклонения ($v = \xi'$) от координаты z при $\beta = 0,2$.

Таким образом, аналитические и численные исследования уравнения (1.9) показывают, что все лучи будут убегать из окрестностей неустойчивых стационарных точек и собираться в окрестности устойчивых стационарных точек (m – четное). Эта качественная картина фокусировки лучей подтверждается и численным анализом нелинейного уравнения (1.4) или системы уравнений (1.5). На рис. 1.5 представлена динамика семи лучей, первоначально находящихся в различных фазах неоднородности. Верхняя кривая на этом рисунке принадлежит лучу, который был первоначально расположен при значении фазы, слегка большей неустойчивого положения ($\psi > \pi$). Областью притяжения для этого луча является устойчивая фаза $\psi = 2\pi$.

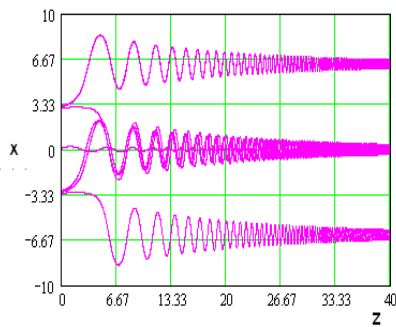


Рис. 1.5. Иллюстрация фокусировки лучей в окрестности устойчивых фаз

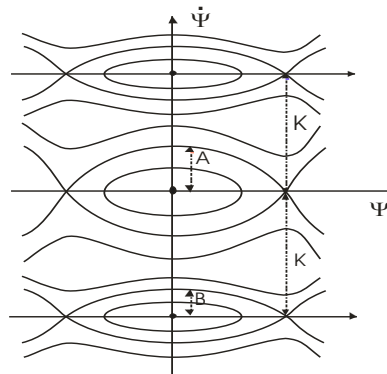


Рис. 1.6. Фазовый портрет системы (17) ($A = 1, B = \sqrt{\eta/2}$)

Нижняя кривая на этом рисунке соответствует траектории луча, который первоначально располагался в фазе, несколько меньшей $-\pi$ ($\psi < -\pi$). Видно, что этот луч притягивается к устойчивой стационарной точке $\psi_2 = 2\pi$. Остальные лучи первоначально были расположены в фазах, которые были несколько меньшими π и большими $-\pi$. Для всех этих лучей устойчивой фазой является фаза $\psi_0 = 0$. Из рисунка видно, что все они действительно стремятся к этой фазе. Таким образом,

все лучи, которые распространяются в среде, поперечная неоднородность которой задана функцией $F(x) = \cos(kx)$, а величина коэффициент преломления экспоненциально нарастает $N(z) = \alpha \cdot \exp(\chi z)$, разбиваются на отдельные сфокусированные пучки, которые располагаются вблизи устойчивых стационарных точек.

Этот процесс фокусировки лучей похож на процесс группировки частиц при автофазировке Векслера - Макмиллана. Отличие заключается в том, что при автофазировке в линейных ускорителях меняющимся параметром является фазовая скорость ускоряющей волны, а в нашем случае меняется величина коэффициента преломления.

1.3. Фокусировка лучей в средах с пространственной неоднородностью

Выше мы видели, что в средах, коэффициент преломления которых экспоненциально растет, происходит фокусировка лучей. При этом, чем выше степень роста неоднородности, тем эффективнее фокусировка. Аналогичный процесс фокусировки будет происходить и в средах с двумерной поперечной неоднородностью. Ниже мы увидим, что действительно качественный характер фокусировки в средах с двумерной поперечной неоднородностью такой же, как и в одномерном случае. Однако в двумерном случае появляется возможность существенного увеличения эффективной величины параметра β . Такая особенность позволяет даже при незначительном увеличении коэффициента преломления осуществить эффективную фокусировку лучей. Система уравнений, которая описывает динамику лучей в средах с пространственной неоднородностью, имеет вид:

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x}; \quad \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y}, \quad (1.12)$$

где $H = -\sqrt{n^2(x, y, z) - p^2}$, $p^2 = p_x^2 + p_y^2$.

Неоднородную, малую часть коэффициента преломления среды (n_1) выберем в виде произведения трех функций, каждая из которых зависит только от одной переменной: $n_1 = N(z) \cdot F(x) \cdot M(y)$. Это выражение для n_1 отличается от рассмотренного выше только наличием множителя $M(y)$, который описывает закон изменения коэффициента преломления от второй поперечной координаты y . При таком выборе зависимости коэффициента преломления от пространственных координат система уравнений (1.12) может быть переписана в следующем виде:

$$\dot{x} = \varphi, \quad \dot{\varphi} = \frac{N \cdot M}{H_0^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}; \quad \dot{y} = \psi, \quad \dot{\psi} = \frac{F \cdot N}{H_0^2} \cdot \frac{\partial M}{\partial y}. \quad (1.13)$$

Рассмотрим стационарные точки (x_n, y_n) , которые определяются равенствами:

$$\varphi = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0; \quad \psi = 0 \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 0.$$

Для определения характера этих точек из системы (1.13) найдем уравнение для малых отклонений от стационарных точек: $\xi = x - x_n$,

$$\mu = y - y_n$$

$$\dot{\xi} = \varphi, \quad \dot{\varphi} = A^2(z, x_n, y_n) \cdot \xi; \quad \dot{\mu} = \psi, \quad \dot{\psi} = B^2(z, x_n, y_n) \cdot \mu, \quad (1.14)$$

где $A^2 = \frac{N \cdot M(y_n)}{H_0^2} \cdot \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_{x_n}$, $B^2 = \frac{N \cdot F(x_n)}{H_0^2} \cdot \left(\frac{\partial^2 M}{\partial y^2} \right)_{y_n}$.

Уравнения (1.14) эквивалентны системе двух линейных маятников:

$$\ddot{\xi} - A^2 \cdot \xi = 0, \quad \ddot{\mu} - B^2 \cdot \mu = 0. \quad (1.15)$$

Важно, что в то время как нелинейные осцилляторы были связаны, линейные осцилляторы (1.15) уже независимы. Причем динамика каждого из них качественно такая же, как и динамика лучей в средах с двумерной неоднородностью. Поэтому все особенности динамики лучей, которые были описаны выше в подразделе 1.2, будут справедливы и в этом случае. Однако имеются и важные отличия. Эти отличия определяются тем, что квадрат частоты осциллятора, который описывает, например, динамику лучей вдоль оси x , содержит дополнительный множитель $M(y_m)$. Меняя величину этого множителя, можно эффективно управлять динамикой лучей. Аналогично квадрат частоты осциллятора, описывающего динамику вдоль оси y , содержит множитель $F(x_m)$. Для иллюстрации появляющихся при этом возможностей конкретизируем вид функций $N(z)$, $F(x)$, $M(y)$. Пусть, как и в предыдущем случае, $F(x) = \cos(kx)$, $N(z) = \alpha \cdot \exp(\chi z)$. Функцию M выберем в виде $M(y) = [\rho \cdot \cos(y) - 1]$, $\rho > 1$. Стационарные точки располагаются при $y_m = \pi m$. Из такого выбора функции $M(y)$ видно, что если $(\rho - 1) \ll 1$, то множитель $M(y_m)$, входящий в частоту первого осциллятора в (1.15), будет мал. В этом случае безразмерный параметр β в уравнении (1.9),

к которому можно свести первое уравнение системы (1.15), будет большим. Выше мы видели, что чем больше этот параметр, тем эффективнее осуществляется фокусировка лучей. Аналогичная возможность имеется и для управления процессом фокусировки вдоль оси y .

1.4. Возникновение хаотической динамики

Выше мы показали, что в средах с экспоненциально растущим коэффициентом преломления происходит фокусировка лучей в плотные пучки. Причем причиной фокусировки является именно характер изменения коэффициента преломления. Во многих случаях продольная неоднородность коэффициента преломления может быть представлена периодической функцией. Такая неоднородность может существенно изменить динамику лучей. Впервые возникновение динамического хаоса при распространении лучей в средах, имеющих периодическую неоднородность, было обнаружено в работах Г. М. Заславского (см., например, [5-7]). Ниже рассмотрен механизм возникновения динамического хаоса в динамике лучей в более простой модели, и обращаем внимание, что наличие растущего коэффициента преломления может стабилизировать локальную неустойчивость. Для нахождения условий развития динамического хаоса конкретизируем вид зависимости коэффициента преломления от координат. Пусть эта зависимость имеет следующий вид:

$$F(x) = \cos(kx), \quad N(z) = \alpha [1 + \eta \cos \kappa z]. \quad (1.16)$$

Учитывая эту зависимость, уравнение (1.4) можно представить в виде:

$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2} = -\sin\psi - \frac{\eta}{2} [\sin(\psi + K\tau) + \sin(\psi - K\tau)], \quad (1.17)$$

где $\psi = kx$, $\tau = zk\sqrt{\alpha}/n_0$, $K \equiv (\kappa/k)(n_0/\sqrt{\alpha})$.

Это уравнение представляет собой уравнение, описывающее динамику системы при наличии трех нелинейных резонансов. Фазовый портрет изучаемой системы представлен на рисунке 1.6 ($A = 1$, $B = \sqrt{\eta/2}$).

Ширина первого нелинейного резонанса равна $2A$, ширины второго и третьего совпадают и равны $2B$. Расстояние между нелинейными резонансами равно K . Если нелинейные резонансы разнесены достаточно далеко друг от друга, так что выполняется неравенство $K \gg (A + B)$, то динамика изучаемой системы будет определяться динамикой одного изолированного нелинейного резонанса. Она будет регулярной. Если же выполня-

ется обратное неравенство, т.е. $K < (A + B)$, то нелинейные резонансы перекрываются, и динамика становится хаотической. Легко видеть, что во всех случаях, когда величина α не слишком мала, динамика лучей всегда хаотична. Это приводит, в частности, к тому, что захваченные поперечной неоднородностью лучи хаотически перемешиваются. Кроме того, их поперечный импульс в результате хаотической динамики растет, и, как результат, лучи начинают покидать волноведущую область.

Многие результаты, изложенные в разделе, опубликованы в работах [8-16].

1.5. Произвольные по амплитуде возмущения

Выше аналитически и численно была исследована динамика лучей в предположении слабой неоднородности. Кроме того, был использован экспоненциальный рост степени неоднородностей. Такие ограничения и такой выбор роста неоднородностей был вызван удобством и возможностью аналитического исследования. Естественно, возникает вопрос: Насколько полученные выше результаты остаются справедливыми, если неоднородность становится немалой, а закон роста этой неоднородности будет отличаться от экспоненциального? Для ответа на этот вопрос были проведены численные исследования исходной системы уравнений (1.2) численными методами. Были рассмотрены разнообразные законы роста неоднородностей. Были исследованы также пространственные области, в которых величина неоднородности могла превосходить исходные значения величины невозмущенной диэлектрической проницаемости. Во всех случаях основные характеристики динамики фокусировки лучей были такими же, как описано выше. В качестве примера на рисунках 1.7-1.9 представлены результаты численного анализа фокусировки лучей для случая, когда закон роста неоднородностей является квадратичным ($N(z) = \alpha \cdot (\beta z)^2$). При этом исследовалась система уравнений (1.2) при следующих значениях параметров: $n = n_0 + n_1(x, z)$, $n_1(x, z) = F(x)N(z)$, $F(x) = \cos(kx)$
 $N(z) = \alpha \cdot (\beta z)^2$; $\beta = 0,1$, $\alpha = 1$, $k = 1$, $n_0 = 10$. Размеры области фокусировки лучей при этом уже были таковы, когда величина неоднородностей диэлектрической проницаемости была большей, чем невозмущенная диэлектрическая проницаемость.

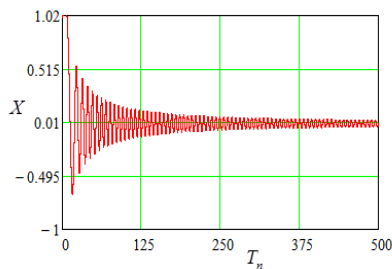


Рис. 1.7. Фокусировка лучей при наличии квадратичной неоднородности

$$N(z) = \alpha \cdot (\beta z)^2$$

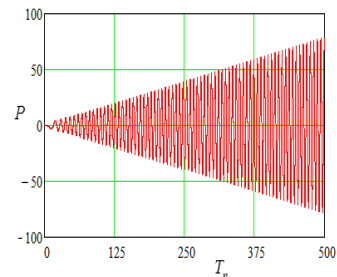


Рис. 1.8. Рост обобщенного импульса при фокусировке. Демонстрация выполнения теоремы Лиувилля

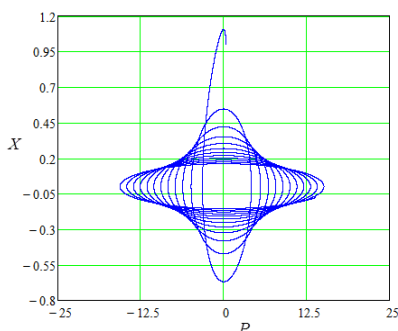


Рис. 1.9. Фазовый портрет процесса фокусировки

2. СИНГУЛЯРНАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ. ВЛИЯНИЕ ШУМА НА ДИНАМИКУ ЛУЧЕЙ

В общей теории динамических систем разработан достаточно мощный аппарат сингулярных возмущений. Этот аппарат с успехом применяется в теории движения заряженных частиц. Полученные выше результаты также могут быть изложены в рамках этой теории. Более того, эта теория удобна для анализа особенностей динамики при наличии внешних флуктуаций. Ниже в этом разделе кратко изложены основные, необходимые нам, элементы этой теории, адаптированные к геометрической оптике.

2.1. Уравнения для траекторий лучей.

Резонансы

Рассмотрим случай, когда имеются как периодические, так и плавные неоднородности. Пусть в волноведущей среде траектория луча

лежит вдоль оси z . Будем считать, что невозмущенный коэффициент преломления зависит только от координаты x ($n_0 = n_0(x)$). Зависимостью от координаты y будем пренебрегать. Траектория луча описывается системой уравнений (1.2). Функция Гамильтона $H = H_0(x, p)$ не зависит явно от z , и обычным образом можно ввести канонические переменные — действие I и угол Θ :

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_C p dx, \quad \Theta = \frac{\partial}{\partial I} \int_0^x p(I, x) dx. \quad (2.1)$$

Предположим, что возмущенный гамильтониан представлен в виде

$$H = H_0(I) + \varepsilon V(I, \Theta, z), \quad (2.2)$$

где H_0 — невозмущенный гамильтониан, зависящий только от переменной действия I , $\varepsilon \ll 1$ безразмерный параметр возмущения, V — возмущение, учитывающее влияние неоднородности.

Возмущение может быть задано в виде ряда:

$$V = \frac{1}{2} \left[\sum_{m,s} V_{m,s}(I) \exp(i\Phi) + \sum_{m,s} V_{m,s}^*(I) \exp(-i\Phi) \right],$$

где $\Phi = m\Theta + s \int_0^z \Omega(z) dz$, $V_{m,s}$ — амплитуда возмущения, $V_{m,s}^*$ — комплексно-сопряженная амплитуда возмущения, Ω — «частота» возмущения, m, s — целые числа.

Таким образом, задача о траектории луча в неоднородном случае сводится к эквивалентной задаче о действии нестационарного возмущения на частицу, совершающую финитное движение, описываемое гамильтонианом H_0 . Роль времени при этом играет переменная z , неоднородность вдоль которой и создает возмущение.

Если Ω не зависит от z (т.е. возмущение не меняет своего пространственного периода вдоль оси распространения), то возможны резонансы, определяемые условием

$$\dot{\Phi} = m\omega(I) + s\Omega = 0. \quad (2.3)$$

В этом случае влияние возмущения наиболее сильно. Когда резонансы разнесены достаточно далеко, динамика лучей определяется одним изолированным резонансом. Соответствующие уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \Theta}, \\ \dot{\Theta} = \frac{\partial H}{\partial I}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Используя представление гамильтониана в виде невозмущенной и возмущенной составляющих (2.2), получим:

$$\dot{I} = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial \Theta}, \quad (2.5)$$

$$\dot{\Theta} = \frac{\partial H_0}{\partial I} + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial I}, \quad (2.6)$$

Учитывая (2.3) и (2.4) и оставляя резонансные члены, получим

$$\begin{cases} \dot{I} = \varepsilon m V_{m,s} \sin \Phi, \\ \dot{\Theta} = \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial V_{m,s}}{\partial I} \cos \Phi, \\ \dot{\Phi} = m\omega(I) + s\Omega. \end{cases} \quad (2.7)$$

Величина $\omega(I) = \frac{dH_0(I)}{dI}$ – нелинейная частота колебаний луча вдоль x . Уравнения (2.7) справедливы как для постоянной величины Ω , так и для случая ее медленного изменения вдоль оси z .

Для постоянной Ω уравнения (2.7) эквивалентны уравнению математического маятника и хорошо изучены [17]. При этом лучи, захваченные в изолированный резонанс (2.3), будут оставаться в ограниченной области фазового пространства, размер которой определяется размером нелинейного резонанса [17,18]. Таких областей (резонансов) может быть много, и при достаточно большой амплитуде возмущения они могут перекрываться. В результате регулярные вариации траекторий лучей сменяются хаотическими.

Изучен также двумерный аналог этой задачи [5-7, 19, 20]. Там же определена ширина нелинейных резонансов и найдены условия возникновения динамического хаоса.

Проанализируем зависимость $\Omega(z)$. Пусть эта зависимость имеет вид

$$\Omega(z) = \frac{2\pi}{\Lambda(z)}, \quad (2.8)$$

т. е. имеются периодическая и плавная неоднородности. Теперь

$$\dot{\Omega} = -\frac{1}{2\pi} \Omega^2 \frac{d\Lambda}{dz}. \quad (2.9)$$

С другой стороны из последнего уравнения системы (2.7) имеем

$$\Omega = \frac{1}{s} (\dot{\Phi} - m\omega). \quad (2.10)$$

Подставив это выражение в предыдущую формулу, получим

$$\dot{\Omega} = -\frac{1}{2\pi s^2} (\dot{\Phi} - m\omega)^2 \frac{d\Lambda}{dz}. \quad (2.11)$$

Последнее уравнение системы (2.7) можно переписать в виде:

$$\ddot{\Phi} = m\dot{\omega} + s\dot{\Omega}. \quad (2.12)$$

Подставим сюда выражение для $\dot{\Omega}$:

$$\ddot{\Phi} = m\dot{\omega} - \frac{1}{2\pi s} (\dot{\Phi} - m\omega)^2 \frac{d\Lambda}{dz}. \quad (2.13)$$

Производная по z от нелинейной частоты колебаний луча вдоль оси x может быть представлена в виде:

$$\dot{\omega} = \frac{\partial \omega}{\partial I} \dot{I}, \quad (2.14)$$

или, с учетом первого уравнения системы (2.7),

$$\dot{\omega} = \frac{\partial \omega}{\partial I} \varepsilon m V_{m,s} \sin \Phi. \quad (2.15)$$

Уравнение (2.13) приобретет вид

$$\ddot{\Phi} - \varepsilon m^2 \frac{\partial \omega}{\partial I} V_{m,s} \sin \Phi + \frac{1}{2\pi s} (\dot{\Phi} - m\omega)^2 \frac{d\Lambda}{dz} = 0. \quad (2.16)$$

В этом случае уравнение для определения фазы Φ имеет вид:

$$\ddot{\Phi} - \beta \sin \Phi + \frac{1}{2\pi s} (\dot{\Phi} - m\omega)^2 \frac{d\Lambda}{dz} = 0, \quad (2.17)$$

где $\beta = \varepsilon m^2 \frac{\partial \omega}{\partial I} V_{m,s}$.

Если длина волны возмущения Λ не зависит от z , уравнение (2.17) переходит в уравнение математического маятника.

2.2. Стационарные точки и их характер (устойчивость)

При медленной зависимости Λ от z эту функцию можно аппроксимировать линейной функцией:

$$\Lambda = \Lambda_0 + \alpha z. \quad (2.18)$$

Тогда уравнение (2.17) можно записать в виде системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\Phi} = x, \\ \dot{x} = \beta \sin \Phi - \frac{1}{2\pi s} (x - m\omega)^2 \frac{d\Lambda}{dz}, \end{cases} \quad (2.19)$$

или, с учетом (2.18)

$$\begin{cases} \dot{\Phi} = x, \\ \dot{x} = \beta \sin \Phi - \frac{\alpha}{2\pi s} (x - m\omega)^2. \end{cases} \quad (2.20)$$

Эта система имеет следующие стационарные точки:

$$\dot{\Phi}_n = 0,$$

$$\Phi_n = \text{Arc sin} \left(\frac{\alpha m^2 \omega^2}{2\pi s \beta} \right) + 2\pi n, \quad (2.21)$$

или

$$\dot{\Phi}_n = 0, \quad \Phi_n = \text{Arc sin} \left(\frac{\alpha \omega^2}{2\pi s \varepsilon V_{m,s} \frac{\partial \omega}{\partial I}} \right) + 2\pi n. \quad (2.22)$$

Для выяснения характера стационарных точек запишем уравнения для малых отклонений от стационарных точек φ и ξ ($\Phi = \Phi_n + \varphi$, $x = 0 + \xi$):

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \xi, \\ \dot{\xi} = \beta \sin(\Phi_n + \varphi) - \frac{\alpha}{2\pi s} ((0 + \xi) - m\omega)^2, \end{cases} \quad (2.23)$$

или, поскольку $\sin(\Phi_n + \varphi)$ можно разложить в ряд Тейлора по малому параметру φ и ограничиться производной первого порядка,

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \xi, \\ \dot{\xi} = \beta \sin \Phi_n + \beta \varphi \cos \Phi_n - \frac{\alpha}{2\pi s} (\xi^2 - 2\xi m\omega + (m\omega)^2). \end{cases} \quad (2.24)$$

Из (2.20) следует, что $\beta \sin \Phi_n = \frac{\alpha}{2\pi s} (m\omega)^2$.

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \xi, \\ \dot{\xi} = \beta \varphi \cos \Phi_n + \frac{\alpha m\omega}{\pi s} \xi - \frac{\alpha}{2\pi s} \xi^2. \end{cases} \quad (2.25)$$

Слагаемым второго порядка малости можно пренебречь. Теперь

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \xi, \\ \dot{\xi} = \beta \varphi \cos \Phi_n + \frac{\alpha m\omega}{\pi s} \xi. \end{cases} \quad (2.26)$$

Эта система уравнений эквивалентна уравнению линейного маятника с затуханием. Малые отклонения фазы удовлетворяют уравнению

$$\ddot{\phi} - \frac{\alpha m\omega}{\pi s} \dot{\phi} - \beta \cos(\Phi_n) \varphi = 0, \quad (2.27)$$

или

$$\ddot{\phi} + \frac{\alpha}{\Lambda_0} \dot{\phi} - \beta \cos(\Phi_n) \varphi = 0, \quad (2.28)$$

где $\Lambda_0 = -\frac{\pi s}{m\omega}$.

Из третьего уравнения системы (2.7) в окрестности стационарной точки следует что $m\omega = -s\Omega$. Отсюда находим

$$\Lambda_0 = \frac{\pi}{\Omega}, \quad \Lambda = \frac{\pi}{\Omega} + \alpha z. \quad (2.29)$$

Из (2.28) следует, что при выполнении неравенства

$$\beta \cos(\Phi_n) < 0 \quad (2.30)$$

частота маятника действительна и около стационарной (равновесной) фазы совершаются регулярные колебания. Если $\frac{\alpha}{\Lambda_0} > 0$, то амплитуда

этих колебаний экспоненциально затухает с ростом z . При $\frac{\alpha}{\Lambda_0} < 0$ амплитуда колебаний экспоненциально нарастает с ростом z .

Для луча, фаза которого совпадает со стационарной, величина действия, как следует из первого уравнения системы (2.7), линейно меняется с изменением координаты z :

$$\dot{I}_s = \varepsilon m V_{m,s} \sin \Phi_s, \quad (2.31)$$

$$I_s = I_{0s} + (\varepsilon m V_{m,s} \sin \Phi_s) z. \quad (2.32)$$

Пусть зависимость нелинейной частоты от действия описывается формулой

$$\omega(I_s) = \frac{C}{I_s}, \quad (2.33)$$

где C – константа.

Тогда из условия $\dot{\Phi}_s = 0$ с учетом (2.33) и того, что $\beta = \varepsilon m^2 \frac{\partial \omega}{\partial I} V_{m,s}$, находим, что величина α , определяющая степень изменения длины волны возмущения, должна выбираться равной

$$\alpha = -\frac{2\pi s \varepsilon}{C} V_{m,s} \sin \Phi_s. \quad (2.34)$$

Из этого выражения и из условия затухания колебаний около стационарной точки ($\alpha > 0$) следует, что устойчивые стационарные точки лежат в области $\pi < \Phi_s < \frac{3\pi}{2}$. В этих точках $\sin \Phi_s < 0$ и значение действия увеличивается с координатой z .

Таким образом, для реализации фокусировки лучей необходимо создавать условия, когда длина волны периодического возмущения растет с координатой z ($\Lambda = \Lambda_0 + \alpha z$), а величина α определяется формулой (2.46).

2.3. Влияние флуктуаций на динамику лучей

Динамическая фокусировка (дефокусировка) лучей имеет место и при медленном изменении других параметров волноведущей среды. Дадим оценку влиянию флуктуаций на невозмущенное движение лучей в волноведущей среде. В реальных волноводах коэффициент преломления кроме регулярной составляющей n_0^2 , зависящей от поперечных координат

нат, имеет малую флуктуационную добавку q , зависящую от z и приводящую к рассеянию лучей:

$$n^2(x, y, z) = n_0^2(x, y) + q(z). \quad (2.35)$$

Пусть

$$\xi = \frac{dq}{dz}. \quad (2.36)$$

представляет собой дельта-коррелированный белый шум

$$\langle \xi(z) \xi(z') \rangle = 2D \delta(z - z'), \quad (2.37)$$

где D – коэффициент диффузии.

В случае отсутствия флуктуационной добавки к коэффициенту преломления гамильтониан имеет вид

$$H_0 = -\sqrt{n_0^2 - p_{x_0}^2 - p_{z_0}^2}. \quad (2.38)$$

Найдем гамильтониан H для случая наличия у коэффициента преломления флуктуационной добавки. Учтем, что у компоненты импульса вдоль оси z также появится флуктуационная добавка:

$$p_z = p_{z_0} + \tilde{p}_z.$$

$$H = H_0 + H_1, \quad H_1 = \frac{(q(z) - 2p_{z_0}\tilde{p}_z - \tilde{p}_z^2)}{2H_0}.$$

Из уравнения Гамильтона $\frac{dp}{dz} = -\frac{\partial H}{\partial x}$ определим флуктуационную добавку \tilde{p}_z к продольному импульсу p_{z_0} :

$$\frac{d\tilde{p}_z}{dz} = -\frac{1}{2H_0} \xi.$$

Отсюда находим выражение для вариационной производной

$$\frac{\delta \dot{\tilde{p}}_z}{\delta \xi} = -\frac{1}{2H_0}. \quad (2.39)$$

Используя формулу Фуруцу - Новикова [21] находим

$$\langle \tilde{p}_z \rangle = const, \quad \langle \tilde{p}_z^2 \rangle = \frac{D}{2H_0^2} z, \quad (2.40)$$

т.е. особенно сильная диффузия лучей наблюдается в области малых H_0 .

Рассмотрим влияние флуктуаций на вариации траекторий лучей в нелинейном резонансе, в области стационарной фазы. Наличие флуктуаций коэффициента преломления приводит к тому, что параметр β (уравнение (2.17) и др.) можно представить в виде суммы регулярного (β_0) и флуктуационного ($\tilde{\beta}$) слагаемых:

$$\beta = \beta_0 + \tilde{\beta}, \quad (2.41)$$

$$\langle \tilde{\beta}(z) \tilde{\beta}(z') \rangle = 2D\delta(z - z').$$

Производя в (2.28) замену φ на $\Psi = \delta \exp\left(\frac{\alpha}{4\pi} \frac{z}{\Lambda}\right)$ и учитывая, что при $\Lambda = \Lambda_0 + \alpha z$ первая производная от этой функции по z имеет вид $\dot{\Psi} = \frac{\alpha}{4\pi} \left(\frac{\Lambda_0}{\Lambda^2}\right) \Psi$, для функции Ψ в области стационарной фазы получим следующее уравнение:

$$\ddot{\Psi} - \beta \cos(\Phi_s) \Psi + \frac{\alpha^2}{4\pi\Lambda^2} \Psi = 0. \quad (2.42)$$

В этом уравнении можно пренебречь членом $\frac{\alpha^2}{\Lambda^2}$, который значительно меньше величины β_0 и не вносит качественно новых результатов.

Уравнению (2.42) эквивалентна система уравнений

$$\begin{cases} \dot{\Psi} = \varphi, \\ \dot{\varphi} = (\beta_0 \cos(\Phi_s) + \tilde{\beta} \cos(\Phi_s)) \Psi. \end{cases} \quad (2.43)$$

Система уравнений для первых моментов совпадает с невозмущенной системой (2.43):

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} \langle \Psi \rangle = \langle \varphi \rangle, \\ \frac{d}{dz} \langle \varphi \rangle = \beta_0 \cos(\Phi_s) \langle \Psi \rangle. \end{cases} \quad (2.44)$$

Пусть величины, входящие в последнюю систему, зависят от z как $e^{\lambda z}$. Для определения величины λ получим систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda \langle \Psi \rangle - \langle \varphi \rangle = 0, \\ -\beta_0 \cos(\Phi_s) \langle \Psi \rangle + \lambda \langle \varphi \rangle = 0. \end{cases} \quad (2.45)$$

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\beta_0 \cos(\Phi_s)}.$$

Поэтому средние величины в устойчивой стационарной фазе испытывают затухающие колебания около точки стационарной фазы.

Вторые моменты могут оказаться неустойчивыми.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \langle \Psi^2 \rangle &= 2 \langle \Psi \varphi \rangle, \\ \frac{d}{dz} \langle \Psi \varphi \rangle &= \langle \varphi^2 \rangle + \beta_0 \cos(\Phi_s) \langle \Psi^2 \rangle + \cos(\Phi_s) \langle \tilde{\beta} \Psi^2 \rangle, \\ \frac{d}{dz} \langle \varphi^2 \rangle &= 2 \cos(\Phi_s) \beta_0 \langle \varphi \Psi \rangle + 2 \cos(\Phi_s) \langle \tilde{\beta} \varphi \Psi \rangle. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Учитывая выражения для вариационных производных:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\beta} \Psi^2 \rangle &= D \frac{\delta(\Psi^2)}{\delta \tilde{\beta}} = 0, \\ \langle \tilde{\beta} \varphi \Psi \rangle &= D \frac{\delta(\varphi \Psi)}{\delta \tilde{\beta}} = D \cos(\Phi_s) \Psi^2, \end{aligned} \quad (2.47)$$

находим систему уравнений для вторых моментов

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \langle \Psi^2 \rangle &= 2 \langle \Psi \varphi \rangle, \\ \frac{d}{dz} \langle \Psi \varphi \rangle &= \langle \varphi^2 \rangle + \beta_0 \cos(\Phi_s) \langle \Psi^2 \rangle, \\ \frac{d}{dz} \langle \varphi^2 \rangle &= 2 \cos(\Phi_s) \beta_0 \langle \varphi \Psi \rangle + 2D \cos^2(\Phi_s) \Psi^2. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Пусть все величины, входящие в последнюю систему, зависят от z как $e^{\lambda z}$.

В этом случае для определения величины λ получим систему уравнений

$$\lambda^3 - 4\lambda\beta_0 \cos(\Phi_s) - 4D \cos^2(\Phi_s) = 0. \quad (2.49)$$

Из (2.49) видно, что вторые моменты могут экспоненциально нарастать с расстоянием. Для величины дисперсии получим выражение

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 \exp \left[\left(4D \cos^2 (\Phi_s) \right)^{\frac{1}{3}} z \right]. \quad (2.50)$$

Из уравнения (2.49) следует, что если для величины коэффициента диффузии выполнено неравенство

$$D > \beta_0 \sqrt{\frac{4\beta_0}{|\cos \Phi_s|}}, \quad (2.51)$$

то вторые моменты неустойчивы с инкрементом

$$\Gamma = \left(4D \cos^2 \Phi_s \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (2.52)$$

Необходимо отметить, что реально неравенства (2.51) недостаточно, чтобы произошло экспоненциальное расхождение лучей. Такая экспоненциальная диффузия будет наблюдаться только в том случае, когда инкремент (2.52) превысит декремент $\frac{\alpha}{\Lambda}$, обусловленный плавным изменением длины волны периодического возмущения, т.е. когда будет выполнено неравенство

$$\left(4D \cos^2 \Phi_s \right)^{\frac{1}{3}} > \frac{\alpha}{\Lambda}, \quad 4D \cos^2 \Phi_s > \left(\frac{\alpha}{\Lambda} \right)^3. \quad (2.53)$$

Флуктуации не будут влиять на траектории лучей, при выполнении условия

$$\alpha > 2\Lambda_0 \left(4D \cos^2 (\Phi_s) \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (2.54)$$

Таким образом, процесс фокусировки лучей отодвигает порог флуктуационной неустойчивости и может предотвратить диффузию лучей в волноводах. Фокусировка отодвигает также порог развития динамического хаоса.

2.4. Обсуждение и выводы к разделам 1 и 2

1. Выше отмечалось, что динамика лучей при фокусировке похожа на динамику заряженных частиц при автофазировке Векслера - Макмиллана. Однако физическое содержание этих процессов существенно различается. Действительно, в рассмотренном выше случае лучи при фазировке фокусируются вокруг оси z . В тоже время в силу теоремы Лиувилля фазовый объем сохраняется. Это означает, что пространствен-

ная фокусировка лучей означает рост тангенса угла наклона этих лучей. Соответственно с этим частота поперечных осцилляций лучей вместе с фокусировкой растет. Эта особенность динамики лучей хорошо видна на рисунках 2.3-2.5. В частности, на рис. 2.4 видно, что тангенс угла быстро растет. При этом картину фокусировки лучей можно представить себе в таком виде. Лучи фокусируются вокруг оси z , поперечная частота их колебаний возрастает, тангенс угла оси z растет. Можно было ожидать, что когда этот угол достигнет величины $\pi/2$, то движение лучей вдоль оси z прекратится, и вся энергия сфокусированного излучения будет сосредоточена в небольшой пространственной области. Такая динамика справедлива только в нерелятивистском пределе, когда тангенс угла (скорость) не слишком велик. При больших значениях \dot{x} канонической переменной становится не тангенс угла (\dot{x}), а обобщенный импульс ($p = (n \cdot \dot{x}) / \sqrt{1 + \dot{x}^2}$). Эта величина при больших тангенсах угла не меняется при $\dot{x} \gg 1$). В соответствии с теоремой Лиувилля не будет меняться и величина x (поперечная координата). Видно, что такой механизм фокусировки излучения отличается от привычных механизмов фокусировки излучения.

2. Может показаться, что рост коэффициента преломления сам по себе (без учета динамики лучей) приводит к уменьшению поперечной области захвата лучей. Такое уменьшение поперечного размера волноведущей области действительно приводило бы к фокусировке лучей. Однако легко показать, что в рассмотренной выше модели рост коэффициента преломления приводит, наоборот к увеличению поперечного размера волноведущей области. Проще всего доказать это утверждение можно, если перейти от геометрической оптики к волновой, и проанализировать положение точек поворота. При этом локальное соотношение между компонентами волнового вектора имеет вид $n^2 k^2 = k_z^2 + k_x^2$. Выше рассмотрена малая и медленно меняющаяся неоднородность. Выражение для квадрата поперечного волнового числа можно при этом представить в виде $k_x^2 = (k^2 n_0^2 - k_z^2) + 2k^2 n_0 n_1(x, z)$. Из этого соотношения видно, что в рассмотренной модели неоднородности увеличение коэффициента преломления с координатой z приводит к увеличению положения точек поворота на оси x , т.е. к расширению поперечного размера волноведущей области. Таким образом, фокусировка лучей в рассмотренной модели может объясниться только динамикой лучей.

3. Введение периодической неоднородности, как было показано, практически всегда приводит к развитию локальной неустойчивости. Особенно это относится к случаю введения длинноволновых периодических возмущений коэффициента преломления. Для таких возмущений динамический хаос возникает при значительно меньших амплитудах возмущения. Следует, однако, иметь в виду, что при этом проявления динамического хаоса будут наступать значительно позже (коэффициент диффузии будет

пропорционален амплитуде возмущения). Наконец, следует отметить, что при наличии периодических возмущений и даже при наличии случайных неоднородностей введение плавной растущей неоднородности может подавить разбегание лучей, которое возникает в результате наличия случайных неоднородностей.

4. Следует сделать еще следующее замечание. Выше мы ограничились анализом вторых моментов при наличии случайных неоднородностей. Можно показать, что более высокие моменты также экспоненциально растут, причем инкременты этого роста растут с ростом номера момента. Такая динамика известна как перемежаемость. Ясно, что эта динамика соответствует классификации супердиффузия. Кроме того, ясно, что такие процессы не могут быть исследованы кинетическими уравнениями типа Фоккера Планка-Колмогорова. Действительно, все такие уравнения ограничены учетом только первого и второго моментов. Роль более высоких моментов считается незначительной.

3. АНАЛИТИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ ВОЗНИКНОВЕНИЯ РЕЖИМОВ С ДИНАМИЧЕСКИМ ХАОСОМ

Выше (в предыдущих разделах) было видно, что динамика полей в приближении геометрической оптики описывается динамикой лучей в неоднородных средах. Эта динамика в формальном отношении очень похожа на динамику заряженных частиц во внешних электромагнитных полях. Поэтому полученные выше результаты во многом были ожидаемы. В частности, очень похожим и ожидаемым был критерий возникновения режимов с динамическим хаосом в динамике лучей. Если условия геометрической оптики не выполняются или динамика взаимодействия волн такова, что необходимо использовать для описания полей волновые уравнения, то физические процессы взаимодействия волн могут существенно отличаться от описанных выше процессов. В частности, существенно меняются и условия возникновения динамического хаоса. Впервые эти условия были сформулированы в работах [22-24]. Ниже кратко описан вывод получения этих условий. Будем рассматривать процесс нелинейного взаимодействия нескольких волн в нелинейной среде (в плазме). Будем опираться на известные результаты трехволнового взаимодействия волн.

Пусть волна с амплитудой a_1 с волновым вектором k_1 и частотой ω_1 распадается на две волны (a_2, k_2, ω_2) и (a_3, k_3, ω_3) . Будем также предполагать, что существует еще одна волна с параметрами (a_4, k_4, ω_4) , $k_4 = k_3$, $\omega_3 - \omega_4 \ll \omega_1$. Вначале предположим, что четвертой волны не существует. В этом случае имеет место хорошо известный трехволновой процесс взаимо-

действия волн. Его динамика описана во многих статьях и монографиях (см., например, [25, 26]). Укороченные уравнения, которые описывают динамику комплексных амплитуд взаимодействующих волн, можно представить в виде:

$$\begin{aligned}\dot{a}_1 &= iV_1^* a_2 a_3, \\ \dot{a}_2 &= iV_1 a_1 a_3^*,\end{aligned}\tag{3.1}$$

$$\dot{a}_3 = iV_1 a_1 a_2^*,\tag{3.2}$$

где $V_1 = |V_1| \exp(i\Phi_0)$ матричный элемент взаимодействия волн.

Для дальнейшего удобно комплексные амплитуды представить в виде $a_j = |a_j| \exp(i\Phi_j)$. Известно, что на линейной стадии процесса распада амплитуду распадающейся волны можно считать известной ($|a_1| = \text{const}$, $\Phi_1 = \text{const}$). Тогда процесс распада можно рассматривать как параметрический процесс с инкрементом $G = |a_1| |V_1|$. При этом фаза $\Phi = 2(\Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 + \Phi_0)$ будет подчиняться уравнению математического маятника:

$$\ddot{\Phi} + (2|a_1| |V_1|)^2 \sin \Phi = 0.\tag{3.3}$$

Из уравнения (3.3) видно, что ширина нелинейного резонанса равна $4G$.

Предположим теперь, что третьей волны нет, однако есть четвертая волна, которая также может эффективно взаимодействовать с первыми двумя волнами. Система уравнений, которая описывает динамику комплексных амплитуд этих волн, имеет вид, аналогичный системе уравнений (3.3):

$$\begin{aligned}\dot{a}_1 &= iV_2^* a_2 a_4 \exp(-i\delta\tau), \\ \dot{a}_2 &= iV_2 a_1 a_4^* \exp(i\delta\tau),\end{aligned}\tag{3.4}$$

$$\dot{a}_4 = iV_2 a_1 a_2^* \exp(i\delta\tau).$$

Линейную стадию взаимодействия этих волн можно рассматривать так же, как было сделано при анализе системы уравнений (3.3). А именно: для определения фазы $\Psi = 2(\Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_4 + \Phi_0 + \delta\tau)$ ($\delta = \omega_1 - \omega_2 - \omega_4$) можно получить уравнение, которое совпадает с уравнением (3.3), в котором функция G заменяется функцией $G_2 = |a_1| |V_2|$. Легко видеть, что расстояние между двумя математическими маятниками равняется 2δ . Этих фактов достаточно для того, чтобы сформулировать условия возникновения

режима с динамическим хаосом. Эти условия должны отображать тот факт, что сепаратрисы двух математических маятников пересекаются:

$$Ch \equiv (G + G_2) / \delta > 1. \quad (3.5)$$

В качестве примера, важного примера, рассмотрим распад поперечной высокочастотной электромагнитной волны с частотой ω_i , волновым вектором \vec{k}_i и амплитудой \vec{E}_i на поперечную электромагнитную волну $(\omega_s, \vec{k}_s, \vec{E}_s)$ и на низкочастотную волну (например, ленгмюровскую) $\omega_p, \vec{k}_p, \varphi$ (см., например, [23, 24]):

$$\begin{aligned} i \cdot \frac{d\varepsilon_i}{d\tau} &= \varepsilon_s \rho \exp(i\Delta\tau), \\ i \cdot \frac{d\varepsilon_s}{d\tau} &= \varepsilon_i \rho^* \exp(-i\Delta\tau), \\ \frac{d^2\rho}{d\tau^2} + \Omega^2 \rho &= -\varepsilon_i \varepsilon_s^* \exp(-i\Delta\tau), \end{aligned} \quad (3.6)$$

где ε_i - безразмерная амплитуда распадающейся волны (волна накачки); ε_s - амплитуда высокочастотной волны, которая появилась в результате распада; ρ - амплитуда низкочастотной волны; Δ - нормализованная расстройка частот падающей и рассеянной волны ($\Delta = \omega_i - \omega_s$); Ω - безразмерная частота низкочастотной волны.

При получении системы (3.6) было использовано условие пространственного синхронизма волн $\vec{k}_i - \vec{k}_s = \vec{k}_p$. На линейной стадии распада $|\varepsilon_i| = \text{const}$ из системы уравнений (3.6) получим следующее дисперсионное уравнение:

$$(\omega^2 - \Omega^2)(\omega + \Delta) = 1, \quad (3.7)$$

Уравнение (3.7) позволяет получить выражение для максимальных значений инкремента неустойчивости:

$$\begin{aligned} G = \text{Im } \omega &= 1 / \sqrt{2\Omega}, \quad \Omega^2 \gg 1; \\ G = \text{Im } \omega &= \sqrt{3}/2, \quad \Omega^2 \ll 1. \end{aligned} \quad (3.8)$$

В первом случае, когда амплитуда волны накачки мала, параметр, определяющий режим динамического хаоса, мал, $Ch \ll 1$, ($\Delta \propto \Omega$) и динамика взаимодействия волн будет регулярной. Если же амплитуда волны накачки достаточно велика $Ch \gg 1$, то сепаратрисы математических маятников перекрываются, и процесс распада становится хаотическим. Следует заметить, что в формуле все частоты нормированы на модуль амплитуды распадающейся волны (на $|\epsilon_i|$).

Динамика процесса распада, которая описывается системой уравнений (3.6), была проанализирована численными методами. На рисунке 3.1 показана зависимость параметра Ch , как функцию параметров Ω и Δ . На рисунках 3.2 и 3.3 представлена зависимость показателя Ляпунова S от параметров Ω и Δ и от времени.

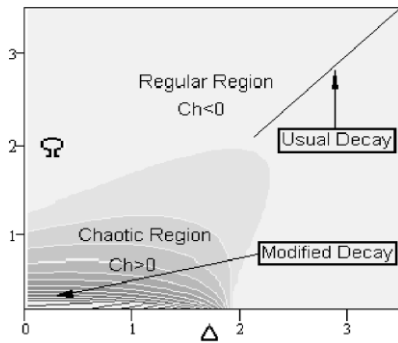


Рис. 3.1. Область параметров Ω и Δ с регулярной и хаотической динамикой

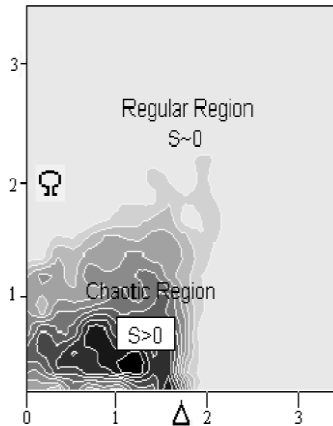


Рис. 3.2. Область параметров Ω и Δ с характерными показателями Ляпунова S

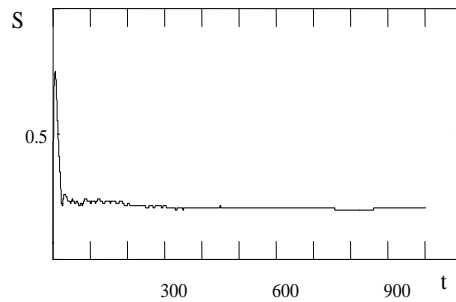


Рис. 3.3. Зависимость максимального показателя Ляпунова S от времени при $\Delta = 0.1, \Omega = 0.3$

Сравнивая рисунки 3.1 и 3.2, видно, что во всех случаях, когда выполняются условия $Ch > 0$, $S > 0$, динамика распада является хаотической. Отметим, что эти условия определяют широкий класс процессов распада. Этот класс называется процессом модифицированного распада, т.е. когда инкремент линейной неустойчивости процесса распада оказывается большим, чем расстояние между какими-то двумя волнами, которые могут принимать участие в процессе распада. В данном случае амплитуда распадающейся волны оказывается достаточно большой – таковой, что параметр тоже велик и инкремент распадной неустойчивости больше частоты ленгмюровской волны.

4. КАСКАД ТРЕХВОЛНОВЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

В этом разделе будет рассмотрено три модели процессов распада. В первых двух учитывается большое количество элементарных процессов трехволнового взаимодействия. В третьей модели рассмотрена возможность увеличения степени когерентности волны, которая распадается при распространении в нелинейных средах (в плазме).

4.1. Динамика распада широкого (по частоте) волнового пакета

Выше были рассмотрены особенности динамики отдельных триплетов волн. В общем случае во взаимодействии может принимать участие большое количество триплетов. Триплеты могут взаимодействовать. Это, например, может означать, что появившаяся в результате трехволнового взаимодействия новая волна сама, в свою очередь, может распадаться по той же схеме распадного процесса. В качестве примера на рисунке 4.1 представлена простейшая дисперсионная диаграмма таких взаимодействующих волн. Можно сказать, что на нем представлена схема взаимодействия поперечных электромагнитных волн с ленгмюровскими волнами плазмы. Из этой диаграммы следует, что возможен каскад распадающихся волн. Действительно, если первоначально возбуждена высокочастотная поперечная волна, она может взаимодействовать с обратной ей поперечной высокочастотной электромагнитной волной и с плазменной. Возбужденная при таком процессе высокочастотная волна, в свою очередь, может распадаться на такую же высокочастотную и на ленгмюровскую. Процесс этот может содержать значительное количество этапов (см. рис. 4.2). Чтобы его описать, рассмотрим задачу о распространении волнового пакета в нелинейной среде. При этом будем предполагать, что волновой пакет состоит из суммы некоторого количества парциальных пакетов, не перекрывающихся друг с другом (рис. 4.2). Расстояние между центральными частотами этих парциальных пакетов значительно меньше центральной частоты этих пакетов. Будем для простоты считать, что разность этих частот одинакова и равна

$\omega_n - \omega_{n-1} = \Delta\omega = \Omega$. В этом случае напряженность поля такого пакета можно представить в виде:

$$E = \sum_n A_n \exp[i(\omega_0 + n \cdot \Omega) \cdot t]. \quad (4.1)$$

Пусть кроме волнового пакета в рассматриваемой нелинейной среде существуют низкочастотные колебания. Частота этих низкочастотных колебаний в точности равна разности частот между парциальными частотами пакета ($\omega_L \equiv \Omega$). Пусть, кроме того, дисперсия среды такова, что могут выполняться следующие соотношения между волновыми векторами центральных компонент парциальных волн и низкочастотными волнами: $\vec{k}_n - \vec{k}_{n-1} = \vec{k}_{n-1}$. Поле для низкочастотных волн можно представить в виде:

$$E_L = \sum_n B_n \exp[i \cdot \Omega \cdot t]. \quad (4.2)$$

Учет нелинейности среды приводит к взаимодействию парциальных волновых компонент с низкочастотными волнами, а также с соседними парциальными компонентами. Причем будем считать (для простоты), что дисперсия среды такова, что «синий» парциальный пакет распадается на ближайший парциальный высокочастотный и на соответствующую низкочастотную волну. В свою очередь, ближний сосед распадается на своего ближайшего по частоте парциального соседа и на соответствующую низкочастотную волну и т.д. Крайний левый парциальный компонент (красный спутник) является уже нераспадным. В него может перекачаться только энергия более «синих» компонент. Возможная схема взаимодействия волн представлена на рис. 4.3. Таким образом, мы имеем каскад трехволновых распадов. Можно считать, что мы имеем каскад распадов поперечных волн на поперечные и на ленгмюровские (распады типа $t \rightarrow t + l$). Распады, представленные на рисунках 4.2, 4.3, могут происходить, например, в резонаторе больших геометрических размеров ($L \gg \lambda$), который заполнен редкой плазмой ($\Omega \sim \omega_p \ll \omega$). Уравнения, которые описывают динамику комплексных амплитуд взаимодействующих волн, можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial t} &= V_{10} A_1 B_0^*; \quad \frac{\partial A_1}{\partial t} = V_{00} A_0 B_0 + V_{21} A_2 \cdot B_1^*; \\ \frac{\partial A_2}{\partial t} &= V_{11} A_1 B_1 + V_{32} A_3 \cdot B_2^*; \dots; \quad \frac{\partial A_n}{\partial t} = V_{n-1, n-1} A_{n-1} B_{n-1}; \quad \frac{\partial B_0}{\partial t} = W_1 A_1 A_0^*; \\ \frac{\partial B_1}{\partial t} &= W_2 A_2 A_1^*; \dots; \quad \frac{\partial B_{n-1}}{\partial t} = W_n A_n A_{n-1}^*. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь A_k амплитуды высокочастотных компонент пакета; B_k комплексные амплитуды низкочастотных волн; $V_{i,k}, W_k$ матричные элементы нелинейного взаимодействия волн.

Первое уравнение в этой системе описывает эволюцию красной парциальной компоненты высокочастотного пакета. Правая часть этого уравнения содержит только одно слагаемое, которое описывает приход энергии в эту компоненту от соседней высокочастотной компоненты. Сама эта компонента не распадается. Первые слагаемые в остальных уравнениях для высокочастотных волн также описывают приход энергии в эти компоненты со стороны более «синих» компонент. Вторые слагаемые в этих уравнениях описывают процесс распада соответствующей компоненты на ближайший красный высокочастотный сателлит и на соответствующую низкочастотную волну. Последнее уравнение для высокочастотной компоненты, для наиболее высокочастотной компоненты, содержит только один член, который описывает распад этой компоненты. Правые части уравнений для низкочастотных волн содержат только одно слагаемое, описывающее приход энергии в эти компоненты. Схема этого взаимодействия волн представлена на рисунках 4.2 и 4.3.

В общем случае анализ системы уравнений труден даже при использовании численных методов. Поэтому сделаем несколько упрощающих предположений. Прежде всего будем считать, что ширина спектра участвующих во взаимодействии волн не слишком велика. Кроме того, как видно из рисунка 4.2, тип высокочастотных волн можно считать одним и тем же (например, поперечные электромагнитные волны). Одним и тем же остается и тип низкочастотных волн (например, плазменные ленгмюровские колебания). В этих ограничениях можно считать, что матричные коэффициенты, ответственные за распад высокочастотных волн ($V_{i,i}$), будут одинаковыми ($V_{i,i} = V_-$). Кроме того, матричные элементы, ответственные за приток энергии в высокочастотную компоненту ($V_{i,k}, i \neq k$), также можно считать равными ($V_{i,k} = V_+$). Равными в этом случае будут также матричные элементы, ответственные за связь высокочастотных и низкочастотных волн ($W_k = V_-$). Для дальнейшего удобно перейти от комплексных амплитуд к действительным амплитудам и фазам с помощью следующей замены:

$$A_k = a_k \cdot \exp(i\varphi_k), B_k = b_k \cdot \exp(i\psi_k). \quad (4.4)$$

Выберем такую нормировку для амплитуд полей, что модуль квадрата каждого из них соответствует числу квантов в этой компоненте: $N_k = a_k^2$. В рассматриваемых процессах должны выполняться законы сохранения энергии и законы сохранения импульса:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=0}^n \omega_i \cdot a_i^2 + \sum_{i=0}^{n-1} \Omega \cdot b_i^2 \right] &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=0}^n \vec{k}_i \cdot a_i^2 + \sum_{i=0}^{n-1} \vec{k}_i \cdot b_i^2 \right] &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Используя эти законы, а также тот факт, что в каждом акте трехволнового взаимодействия выполняются условия синхронизма ($\omega_n = \omega_{n-1} + \Omega$, $\vec{k}_n = \vec{k}_{n-1} + \vec{k}_{n-1}$), легко показать, что между матричными коэффициентами имеется следующая связь: $V_- = -2V_+$.

Система уравнений (4.3) для действительных амплитуд и фаз при этом приобретает вид:

$$\begin{aligned} \dot{a}_n &= -2\delta_1 \cdot a_{n-1} b_{n-1} \cdot \cos(\varphi_{n-1} - \varphi_n + \psi_{n-1}) + \\ &+ \delta_2 \cdot a_{n+1} b_n \cdot \cos(\varphi_{n+1} - \varphi_n - \psi_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \\ \dot{b}_{n-1} &= a_n a_{m-1} \cos(\varphi_m - \varphi_{m-1} - \psi_{m-1}), \quad m = 1, 2, 3, \dots, N \\ \dot{\varphi}_n &= -2\delta_1 \cdot \left(\frac{a_{n-1} b_{n-1}}{a_n} \right) \cdot \sin(\varphi_{n-1} - \varphi_n + \psi_{n-1}) + \delta_2 \cdot \left(\frac{a_{n+1} b_n}{a_n} \right) \cdot \sin(\varphi_{n+1} - \varphi_n - \psi_n) \\ \dot{\psi}_{m-1} &= \left(\frac{a_{m-1} a_m}{b_{m-1}} \right) \cdot \sin(\varphi_m - \varphi_{m-1} - \psi_{m-1}), \end{aligned} \quad (4.6)$$

где введены следующие обозначения: $\delta_1 = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 1, & n \neq 0 \end{cases}$, $\delta_2 = \begin{cases} 0, & n = N \\ 1, & n \neq N \end{cases}$.

Кроме того, изменен масштаб времени: $\tau = V_+ \cdot t$, $\dot{a}_k = da_k / d\tau$.

Динамика такого каскада, при наличии небольшого затухания низкочастотных волн, может быть такой, что практически все пакеты потеряют свою энергию, а амплитуда последнего пакета увеличится. Затухание «высокочастотных» парциальных пакетов (кроме последнего) обусловлено процессом распада. Амплитуда самого низкочастотного парциального пакета растет за счет процессов распада. Если наблюдать за этим процессом со стороны, не вникая в детали процесса взаимодействия волн, то может показаться, что результирующий пакет сужается, степень его когерентности растет, энтропия падает. В действительности, можно показать, аналогично тому, как это было сделано в работах [27-29], что энтропия и в этом случае растет. Численный анализ для такого сценария распада представлен на рисунках 4.4 и 4.5. На рисунке 4.5 представлен характерный рост амплитуды парциального пакета, ко-

торый является последним в каскаде и который принимает энергию от распадающихся и затухающих пакетов. На рисунке 4.4 представлено характерное затухание распадающихся парциальных пакетов.

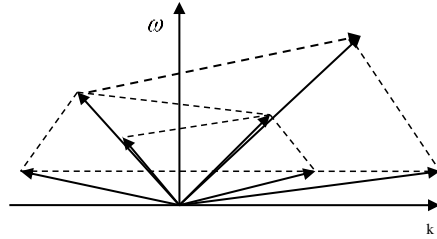


Рис. 4.1 Дисперсионная диаграмма взаимодействующих волн

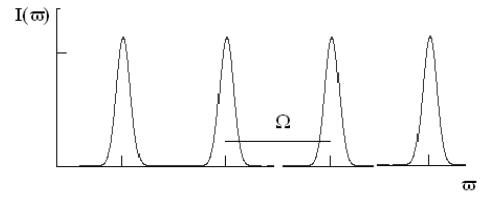


Рис. 4.2. Спектр волнового пакета

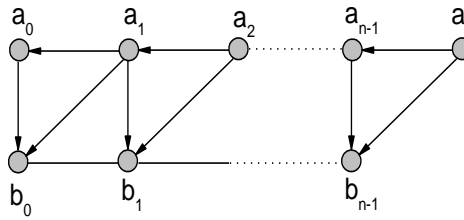


Рис. 4.3. Схема распада

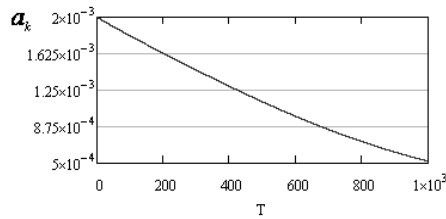


Рис. 4.4. Реализация распада парциального пакета

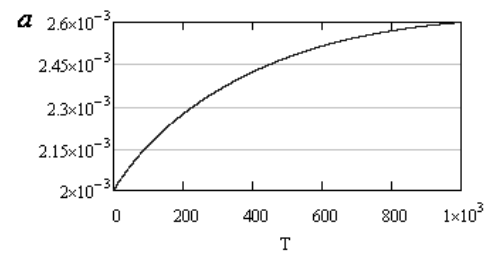


Рис. 4.5. Реализация распада последнего парциального пакета

Начальные значения амплитуд взаимодействующих пакетов были одинаковыми. Численно решалась система (4.6) с добавлением затухания. Величина затухания была равной $\nu = 0.008$ и учитывалась только для низкочастотных компонент.

Динамика распадающегося каскада может быть совершенно другой в отсутствии затухания ($\nu = 0$). В отсутствии затухания за достаточно большое время взаимодействия фазы волн меняются, и взаимодействующие парциальные пакеты начинают не только распадаться, но и активно обмениваться энергией между собой. Важно, что это взаимодействие может быть как регулярным, так и хаотическим. Приведем пример хаотической динамики. Для этого амплитуды взаимодействующих волн должны быть

достаточно большими. Так, для случая, когда амплитуды высокочастотных волн были равны 0.02, а амплитуды низкочастотных были значительно меньшими 0.001, реализовался режим с динамическим хаосом. Для иллюстрации этого режима на рисунке 4.6 представлена характерная зависимость амплитуд взаимодействующих волн (на рисунке 4.6 для третьей волны) от времени, а на рис. 4.7 и 4.8 корреляционная функция и спектр. Из временной зависимости, вида спектра и поведения корреляционной функции следует, что во всех рассмотренных случаях динамика взаимодействующих волн оказывается хаотической.

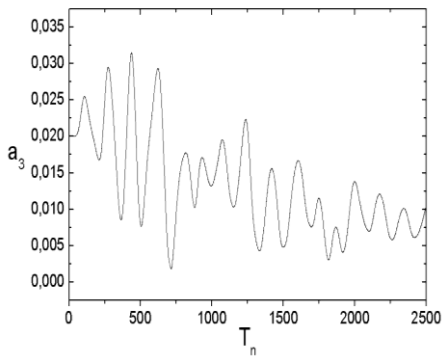


Рис. 4.6. Временная эволюция амплитуды третьей волны

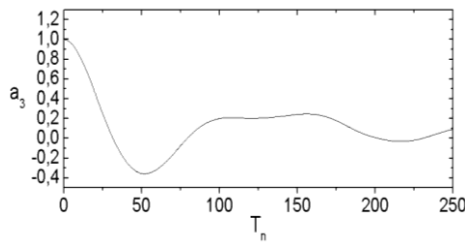


Рис. 4.7. Корреляционная функция амплитуды третьей волны a_3

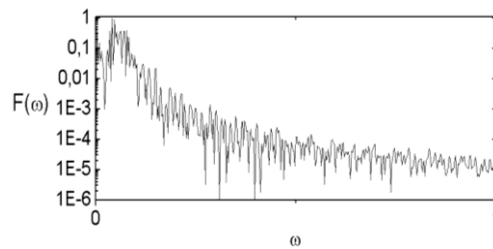


Рис. 4.8. Спектр амплитуды третьей волны

4.2 Динамика каскадов с учетом процессов слипания

Рассмотренная выше модель нелинейного взаимодействия волн не имеет строгого аналитического решения. В этой модели трудно оценить влияние числа взаимодействующих волн на динамику взаимодействия. В теории слабонелинейного взаимодействия волн известна другая модель, которая широко используется при анализе процессов, которые возникают при воздействии мощного лазерного излучения на плазму. В этой модели может быть учтено неограниченное число взаимодейству-

ющих волн. Мы будем, как и выше, считать, что высокочастотных волн может быть неограниченно много, а взаимодействие между ними осуществляется через одну низкочастотную волну. Затуханием будем пренебрегать. Отличие этой модели от предыдущей заключается в том, что в ней будут учтены не только процессы рождения красных сателлитов (распады), но и процессы, приводящие к рождению синих сателлитов (слияние волн). Математическая модель таких процессов, по-видимому, впервые была получена в работах [30, 31] (см. также [26]) и анализировалась многими авторами:

$$i \frac{da_n}{dt} = b a_{n-1} e^{i\delta t} + b^* a_{n+1} e^{-i\delta t}. \quad (4.7a)$$

$$i \frac{db}{dt} = \sum_{n=-N_1}^{N_2} a_{n-1}^* a_n e^{-i\delta t}. \quad (4.7b)$$

Здесь $\delta = \omega_n - \omega_{n-1} - \Omega$ - расстройка, ω_n частота ВЧ-волны, Ω частота НЧ-волны.

Однако авторы работ [30] и [31] ограничивали свой анализ неограниченным числом взаимодействующих волн. При этом динамика взаимодействия волн была регулярной. В реальных системах число высокочастотных взаимодействующих волн хотя и большое, но конечное. Ниже будет учтено это реальное ограничение. Будем полагать, что амплитуды волн $a_n = 0$, если n находится вне диапазона значений $-N_1 \leq n \leq N_2$ (N_1 - число "красных" сателлитов, N_2 - число синих сателлитов). Ниже будет видно, что динамика такой реальной модели значительно более разнообразна. Система уравнений (4.7) с точностью до членов порядка $(\Omega/\omega_0, \kappa/k)$ имеет интегралы движения:

$$\sum_{n=-N_1}^{N_2} \omega_n |a_n|^2 + \Omega |b|^2 = \varepsilon, \quad (4.8)$$

$$\sum |a_n|^2 = I. \quad (4.9)$$

Соотношение (4.8) представляет полную энергию взаимодействующих волн, а соотношение (4.9) можно интерпретировать как число квантов взаимодействующих ВЧ-волн. Кроме того, можно показать, что

$$\frac{d}{dt} \sum_{n=-N_1}^{N_2} a_{n-1}^* a_n = (|a_{-N_1}|^2 - |a_{N_2}|^2). \quad (4.10)$$

И в случае, когда число «красных» и «синих» сателлитов равно ($N_1 = N_2$), имеет место еще один интеграл движения

$$\sum_{n=-N_1}^{N_2} a_{n-1}^* a_n = const. \tag{4.11}$$

Действительно, если в начальный момент времени задана ВЧ-волна ($a_0^0 = a_0(t=0)$) и амплитуда НЧ-волны мала, а число возбужденных ВЧ-волн велико ($n \rightarrow \infty$), решение уравнения (4.7а) можно представить в виде [26, 30, 31]:

$$a_n(t) = a_0^0 t^n e^{in\beta} J_n(|B|),$$

$$B(t) = \int_0^t b(t') \exp(-i\delta t') dt'; \beta = \arg B \tag{4.12}$$

Справедливость такого решения легко проверяется прямой подстановкой (4.12) в (4.7а) и использованием рекурсивного отношения $2J'_n = J_{n-1} - J_{n+1}$. Из (4.12) следует, что процесс возбуждения спутников симметричен относительно замены $n \rightarrow -n$. Поэтому $|a_n| = |a_{-n}|$, если начальные условия также симметричны, что также подтверждает существование интеграла движения (4.11). Как видно из (4.12), из-за взаимодействия с НЧ-волной с течением времени происходит возбуждение все более высоких номеров гармоник a_n .

В рассматриваемых условиях изучаемая система имеет аналитическое решение. Динамика всех взаимодействующих волн при этом регулярна. Таким образом, мы имеем достаточно уникальный случай полностью интегрируемой системы, имеющей бесконечное число степеней свободы. Из уравнений (4.7) можно получить следующее уравнение для амплитуды низкочастотной волны:

$$\ddot{b} + i\delta \dot{b} + \omega_{N_L}^2 b = 0, \tag{4.13}$$

где $\omega_{N_L}^2 = |a_{N_1}|^2 - |a_{N_2}|^2$.

Проанализируем решения этого уравнения в наиболее простом случае. Если число красных спутников равно числу синих спутников ($N_1 = N_2$), то $\omega_{N_L}^2 = 0$. Решение уравнения (4.13) при этом имеет вид:

$$b(t) = b_0 - \frac{1}{i\delta} \dot{b}(0)(e^{-i\delta t} - 1). \tag{4.14}$$

Из (4.14) следует, что значение амплитуды НЧ-волны остается постоянным, если при $t = 0$ заданы ВЧ- и НЧ-волны ($b(0) = b_0, a_0^0 = a_0(0)$) и $\dot{b}(0) = 0$). Если в начальный момент времени заданы две ВЧ-волны (случай beat-wave), то амплитуда волны НЧ колеблется с частотой δ .

Когда $\delta \rightarrow 0$, имеет место линейный рост $b(t)$ со временем. Динамика процесса взаимодействия волн в этом случае должна быть наиболее простой, однако аналитического решения она не имеет.

4.3. Численный анализ

Полученные выше аналитические результаты применимы в случае $n \rightarrow \infty$ и не дают возможность исследовать динамику конечного числа взаимодействующих волн. Для конечного числа n система уравнений (4.7) была решена численно при различных начальных условиях для полей и различных параметров расстройки δ . Были изучены: временная динамика взаимодействия волн, спектры мощности (S_{\square}) реализаций и их автокорреляционные функции (C_{\square}), при этом в начальный момент времени выбирались действительные значения полей: $\text{Re}a_0(t=0)=a_0^0$; $\text{Re}a_{-1}(t=0)=a_{-1}^0$; $b(t=0)=b_0$. Мнимые части полей и амплитуды других волн при $t=0$ выбирались равными нулю.

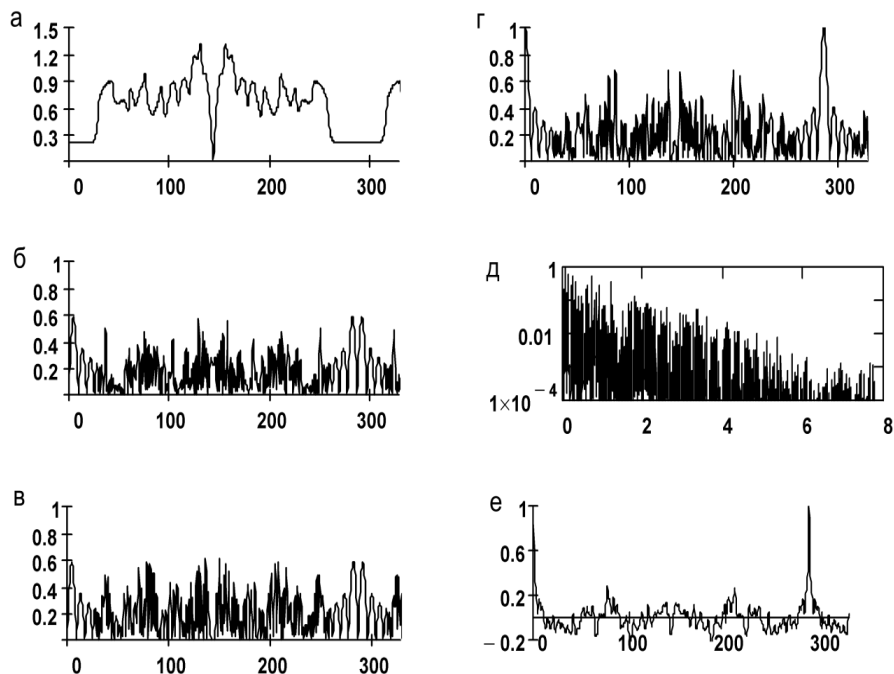


Рис. 4.9. Зависимость амплитуд НЧ-волны и ВЧ-гармоник от времени, спектр и корреляционная функция при $a_0^0=1$, $b_0=0.2$, $\delta=0$. Несимметричный случай $N_1 \neq N_2$. а – НЧ-волна, б – ВЧ волна с $n=1$, в – ВЧ-волна с $n=-1$, г – ВЧ-волна с $n=0$, д, е – спектр и корреляционная функция ВЧ-волны с $n=0$

Для случая равного числа красных и синих спутников $N_1 = N_2 = 11$ при выполнении условия синхронизма ($\delta = 0$) и в случае отличных от нуля начальных амплитуд нулевой высокочастотной и низкочастотной волн ($a_0^0 = a_0(t=0)$ и $b_0 = b(t=0)$), численный анализ показывает, что амплитуда НЧ-волны не меняется. Она остается постоянной. Динамика ВЧ-полей остается достаточно регулярной.

Наличие асимметрии в числе возбуждаемых ВЧ-волн (например, $N_1 = N_2 - 1$) существенно изменяет динамику амплитуд как ВЧ-, так и НЧ-волн (см. рис. 4.9).

На рис. 4.9 показаны результаты численного расчета динамики амплитуд полей для несимметричного случая. Интеграл (4.11) строго выполняется, если число взаимодействующих волн неограниченно большое. При ограниченном количестве волн он сохраняется на интервалах времени, необходимых для того, чтобы возмущение достигло последних участвующих во взаимодействии волн. Интересно отметить, динамика волн регулярно повторяется, в том числе имеет место периодическое восстановление интеграла (4.11), сопровождаемое постоянством амплитуды НЧ-волны. Эта особенность отображает содержание теоремы Пуанкаре о возвратах и аналогична возвратам, наблюдаемым в проблеме Ферми - Паста - Улама.

Спектр ВЧ мощности носит линейчатый характер с медленным убыванием в области высоких частот. Корреляционная функция быстро убывает до нуля и испытывает колебания вблизи нулевого значения, и полностью возвращается к единичному значению в моменты времени, соответствующие восстановлению интеграла (4.11).

При задании в начальный момент времени двух высокочастотных волн (a_0^0 и a_1^0), для реализации взаимодействия типа beat-wave при $\delta = 0$, динамика полей качественно подобна динамике полей, рассмотренных выше, когда в начальный момент времени отлична от нуля амплитуда одной высокочастотной волны и амплитуда низкочастотной волны (для случая начальных условий a_0^0 и b_0).

Еще одним параметром, который существенно влияет на процесс взаимодействия волн, является наличие расстройки $\delta \neq 0$. Как следует из приведенного выше аналитического анализа, при малых значениях расстройки ($\delta \ll 1$) динамика НЧ-волны незначительно отличается от случая с $\delta = 0$ за времена $\sim t < 1/\delta$. При больших временах динамика нерезонансного взаимодействия ($\delta \neq 0$) была исследована численно. При этом наличие даже малой расстройки ($\delta \ll 1$) приводит к нерегулярной динамике взаимодействия волн и возникновению динамического хаоса как в симметричном случае ($N_1 = N_2$), так и в случае с нарушенной симметрией ($N_1 \neq N_2$).

На рис. 4.10 показаны результаты численных расчетов для асимметричного случая ($N_1 \neq N_2$) с начальными условиями типа beat-wave $a_0^0=1$ и $a_1^0=0.04$, при параметрах расстройки $\delta = 0.05$. Из этих графиков видно, что амплитуды высокочастотных колебаний имеют форму, подобную нерегулярным колебаниям с различной интенсивностью, частоты которых также изменяются нерегулярно. Спектры этих волн приобретают форму типа стол, корреляционная функция быстро убывает с течением времени до нулевого значения и испытывает нерегулярные колебания вблизи этого значения. Поэтому можно говорить о случайной амплитудной и частотной модуляции ВЧ- и НЧ-полей. Следовательно, можно утверждать, что при таких параметрах взаимодействие волн носит нерегулярный характер и динамика волн является хаотической.

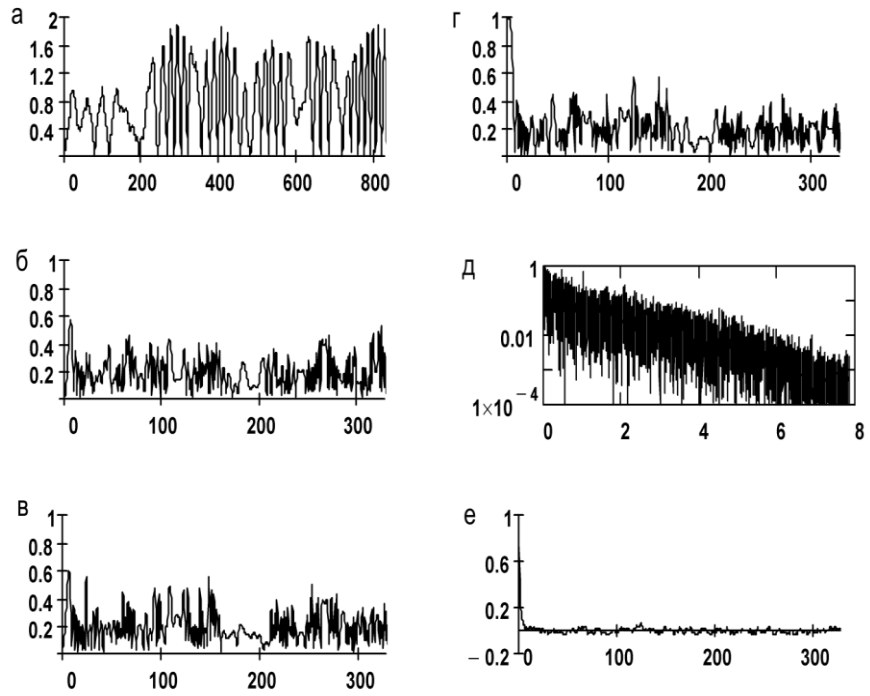


Рис. 4.10. Зависимость амплитуд НЧ-волны и ВЧ-гармоник с $n = 0, \pm 1$ от времени, спектр ВЧ-волны $n = 0$, $a_0^0=1$, $a_1^0=0.04$, $\delta = 0.05$.

Несимметричный случай $N_1 \neq N_2$. а – НЧ-волна, б – ВЧ-волна с $n=1$, в – ВЧ-волна с $n=-1$, г – ВЧ-волна с $n=0$, д, г – спектр и корреляционная функция ВЧ-волны с $n=0$

4.4. Повышение степени когерентности при трехволновом взаимодействии

Выше мы говорили, что процессы слабонелинейного взаимодействия волн могут быть как регулярными, так и хаотическими. Возникновение хаотической динамики процессов трехволнового взаимодействия было обнаружено и изучено в работах [22-24]. В настоящем разделе покажем, что при трехволновом взаимодействии могут протекать и процессы упорядочения динамики высокочастотных волн. Для доказательства такой возможности будем рассматривать процесс распада высокочастотной волны на высокочастотную и низкочастотную. Регулярный процесс такого распада достаточно хорошо изучен [25, 26]. Мы будем считать, что в начальный момент времени в нелинейной среде распространяется немонахроматическая высокочастотная волна. Ширина спектра этой волны равна $\Delta\omega$. Кроме того, для простоты дальнейшего анализа будем считать, что источником нерегулярности этой волны является случайная диффузия фазы. В такой модели важным является тот факт, что уравнение для случайной фазы может быть записано в виде:

$$\dot{\phi} = \xi(t), \quad (4.15)$$

где $\xi(t)$ дельта-коррелированная функция с нулевым средним:

$$\langle \xi \rangle = 0, \quad \langle \xi(t) \cdot \xi(t') \rangle = \delta\omega \cdot \delta(t - t'). \quad (4.16)$$

Функция $\xi(t)$ имеет смысл мгновенной частоты сигнала. Коэффициент диффузии $\delta\omega$ имеет смысл ширины спектра сигнала. Кроме высокочастотной волны в нелинейной среде существуют малые когерентные высокочастотные возмущения, а также малые низкочастотные возмущения. Кроме того, будем считать, что амплитуда основного сигнала достаточно велика, так что инкремент распадной неустойчивости больше ширины спектра этого сигнала ($\Gamma > \delta\omega$). В этом случае уравнения, описывающие динамику комплексных амплитуд взаимодействующих волн, могут быть представлены в виде:

$$\dot{A}_1 = -A_2 \cdot A_3, \quad \dot{A}_2 = A_1 \cdot A_3^*, \quad \dot{A}_3 = A_1 \cdot A_2^*. \quad (4.17)$$

При получении этих уравнений были учтены законы сохранения энергии и импульса:

$$\sum_{i=1}^3 \omega_i N_i = const \quad \sum_{i=1}^3 \vec{k}_i N_i = const. \quad (4.18)$$

Кроме того, была использована нормировка: $|A_k|^2 = N_k$ число квантов в k -волне; $\dot{A} = dA/d\tau$, $\tau = V \cdot t$, V матричный элемент взаимодействия волн. Уравнения (4.17) имеют следующие интегралы:

$$\begin{aligned} |A_1|^2 + |A_2|^2 &= const, & |A_1|^2 + |A_3|^2 &= const, \\ |A_2|^2 - |A_3|^2 &= const. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Возможная дисперсионная диаграмма взаимодействующих волн представлена на рисунке 4.11. На начальном этапе процесса распада можно считать, что амплитуда распадающейся волны не меняется. В этом случае следует анализировать последние два уравнения системы (4.17). При этом удобно ввести новую функцию $B = A_1 \cdot A_3^*$. Тогда последние два уравнения системы (4.17) можно переписать в виде:

$$\dot{A}_2 = B, \quad \dot{B} = \xi \cdot B + |A_1|^2 \cdot A_2. \quad (4.20)$$

Используя формулу Фуруцу - Новикова [21], а также то, что $\delta B(\xi) / \delta \xi(t) = \delta \omega \cdot B(t)$ (здесь $\delta B(\xi) / \delta \xi(t)$, - вариационная производная), то из системы (4.20) можно получить следующие уравнения для первых моментов (средних величин):

$$\langle \dot{A}_2 \rangle = \langle B \rangle, \quad \langle \dot{B} \rangle = |A_1|^2 \cdot \langle A_2 \rangle + \delta \omega / 2 \cdot \langle B \rangle. \quad (4.21)$$

Из (4.21) видно, что процесс распада для средних величин идет так же (практически с тем же инкрементом $\Gamma = \sqrt{|A_1|^2 + (\delta \omega)^2 / 16} + \delta \omega / 16 \approx |A_1|$), как и при распаде регулярной волны ($|A_1|^2 \gg \delta \omega$). При этом из вида функции $B(\tau)$ можно сделать заключение, что флуктуации фазы распадающейся волны компенсируются флуктуациями фазы низкочастотной волны. В результате флуктуации комплексной амплитуды A_2 и функции $B(\tau)$ малы. Для дальнейшего анализа необходимо рассмотреть нелинейную динамику. Для этого систему уравнений (4.17) удобно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d(|A_1|^2)}{d\tau} &= -[A_2 B^* + A_2^* B], \quad \dot{A}_2 = B, \\ \dot{B} &= A_2 [2|A_1|^2 - |A_1(0)|^2]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Учитывая полученный выше результат, что флуктуации амплитуды A_2 и функции $B(\tau)$ малы, легко провести усреднение системы уравнений (4.22). Видно, что в этом случае эти усредненные уравнения будут совпадать с уравнениями (4.22). В свою очередь, уравнения (4.22) не отличаются от уравнений, которые описывают регулярную динамику процесса распада. При этом, как известно, за время порядка обратного инкремента ($T \sim \Gamma^{-1}$) практически вся энергия распадающейся волны переходит в энергию высокочастотной когерентной компоненты. Незначительная часть энергии, в соответствии с соотношением Менли-Роу, переходит к низкочастотной волне ($\delta E \sim (\Omega/\omega_1)E \ll E$). Отметим, что в соответствии с интегралами (4.19) число квантов низкочастотной волны равно числу квантов высокочастотных волн.

Таким образом, мы показали, что, несмотря на тот факт, что фаза распадающейся волны претерпевает случайные флуктуации, эта волна может практически всю свою энергию передать монохроматической когерентной высокочастотной волне, и часть энергии перейдет к низкочастотной волне. Теперь, если мы прервем нелинейное взаимодействие волн после полной перекачки энергии от исходной волны в новую высокочастотную и в поле низкочастотной волны, то процесс будет выглядеть как преобразование энергии некогерентной волны в энергию когерентной волны. Может показаться, что такой процесс протекает с нарушением второго закона термодинамики. Однако, как показано в работе [27], такие процессы протекают с ростом энтропии в полном соответствии со вторым законом термодинамики. Дело в том, что вся энтропия от высокочастотной волны переходит в энтропию низкочастотной волны.

4.5. Краткое заключение

Полученные выше результаты показывают большую значимость области исследований переходов режимов регулярной динамики слабо-нелинейного взаимодействия волн к хаотической динамике, а также показывают, что процессы взаимодействия волн обладают целым рядом важных особенностей. Из этих особенностей, прежде всего, следует отметить возможность значительного повышения степени когерентности распадающихся волн. Этот результат может иметь практическое значение. Действительно, можно представить себе следующий эксперимент. На вход нелинейной среды (например, кристалла или плазмы) подается некогерентное излучение. Проходя через кристалл или плазму, такое

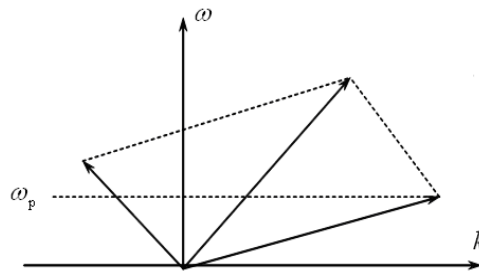


Рис. 4.11. Дисперсионная диаграмма взаимодействующих волн

излучение будет взаимодействовать с собственными волнами этих сред. В результате на выходе из нелинейной среды может быть получено излучение с большим уровнем когерентности. Большое практическое значение может иметь и доказательство того факта, что многие электродинамические структуры, в состав которых входит нелинейный элемент, могут иметь собственные волны, частоты и волновые вектора которых очень близки друг к другу. В таких средах процессы распада могут приводить к хаотизации излучения, к формированию широких спектральных характеристик. Нужно сказать, что при формировании как когерентного излучения, так и излучения с широким спектром часть энергии будет уходить в низкочастотные компоненты. Поэтому желательно, чтобы в эти каналы уходило как можно меньше энергии. В частности, именно по этой причине в работе [32] была рассмотрена задача о собственных волнах волновода с редкой плазмой. Было показано, что такая электродинамическая структура имеет большое число близко расположенных собственных волн с близкими частотами. Практически такая система имеет плотный спектр. Благодаря такой особенности спектра собственных волн в такой системе могут легко реализоваться режимы с динамическим хаосом даже при незначительных напряженностях взаимодействующих волн. Можно представить себе следующее практическое использование такой системы. На вход такого волновода подается узкая спектральная линия, например, от магнетрона, а на выходе спектр излучения будет значительно более широким шумовым. Отметим, что вместо волновода, по-видимому, с успехом может быть использован отрезок такого волновода, т.е. резонатор с редкой плазмой.

5. О НОВЫХ УСЛОВИЯХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН

Выше были рассмотрены волновые процессы в условиях выполнения геометрической оптики и процессы взаимодействия волн, когда выполняются известные, хорошо изученные условия трехволнового взаимодействия волн. В этом разделе описаны новые условия взаимодействия волн. Эти условия являются более общими, чем известные условия. Они, как частный случай, содержат известные условия. Рассмотрены примеры взаимодействия волн, характеристики которых удовлетворяют новым условиям. Эти примеры позволяют обнаружить новые условия в эксперименте.

5.1. Известные условия взаимодействия волн

Известно, что эффективное (резонансное) взаимодействие волн происходит при выполнении условий:

$$\Delta \vec{k} = \sum_i \vec{k}_i = 0; \Delta \omega = \sum_i \alpha_i \omega_i = 0; \alpha_i = \pm 1. \quad (5.1)$$

Эти условия аналогичны условиям резонансного взаимодействия в динамике частиц. Они означают, что должны выполняться условия синхронизма между взаимодействующими волнами вдоль каждой из четырех осей четырехмерного пространства.

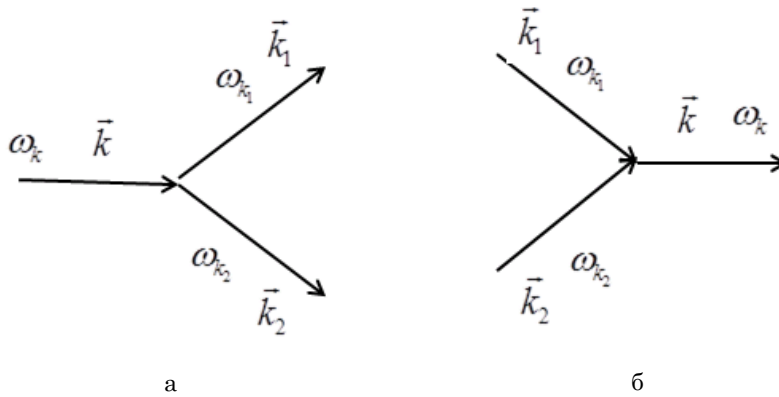


Рис. 5.1. Процессы распада $\Delta\omega = \omega_k - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} = 0$; $\Delta\vec{k} = \vec{k} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2 = 0$ (а)

и слияния $\Delta\omega = \omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_k = 0$; $\Delta\vec{k} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k} = 0$ (б)

при трехволновом взаимодействии

Эти условия можно назвать идеальными условиями взаимодействия волн. Если появляется хотя бы одна отличная от нуля расстройка, то эффективность взаимодействия волн уменьшается. Это известные факты (см., например, [17, 25, 26]). Однако взаимодействие волн происходит не локально. Этот процесс распределен в некоторой пространственно-временной области. Поэтому можно ожидать, что имеются некоторые направления в этом пространстве (характеристические, субхарактеристические), в которых расстройка вдоль, например, временной оси ($\Delta\omega \neq 0$) может быть скомпенсирована расстройкой вдоль одной из пространственных осей. В настоящей работе показано, что действительно такие направления существуют. Получены условия для эффективного взаимодействия волн при наличии расстроек. В работе будут рассмотрены только трехволновые взаимодействия. Для них известные условия взаимодействия представлены на рисунке 5.1 [17].

Ниже, в пункте 5.2, сформулирована задача, а в пункте 5.3 рассмотрена наиболее простая задача о взаимодействии волн в среде с пространственно-временной периодической неоднородностью. Причем пространственная неоднородность является одномерной. В пункте 5.4 эта задача обобщена на случай трехмерной пространственной неоднородности. В пятом пункте (5.5) рассмотрена нелинейная динамика трехволнового взаимодействия. Анализ простых условий наблюдения новых условий взаимодействия содержится в шестом пункте. В седьмом пункте рассмотрена возможность использования новых условий в задачах квантовой механики. В заключении формулируются и обсуждаются основные результаты.

5.2. Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим наиболее простую модель взаимодействия волн, в которой могут реализоваться новые условия взаимодействия волн. Эта модель трехволнового взаимодействия, в которой одна из взаимодействующих волн является фиксированной волной. Характеристики этой волны не меняются. В качестве такой волны можно рассматривать диэлектрическую проницаемость среды. Например, рассмотрим среду, диэлектрическую проницаемость которой можно представить в виде:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \tilde{\varepsilon}, \quad \tilde{\varepsilon} = q \cos(\vec{k}\vec{r} - \Omega t), \quad q \ll 1. \quad (5.2)$$

Пусть в такой среде распространяется две электромагнитные волны, частоты которых различны. Будем интересоваться условиями эффективного взаимодействия этих волн в такой среде. Уравнения для каждой из этих волн – это уравнение Максвелла. Из уравнений Максвелла легко найти уравнение для векторов электрического поля волн в такой среде:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (\varepsilon \vec{E})}{\partial t^2} = -\vec{\nabla} \left(\frac{1}{\varepsilon} \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \varepsilon \right). \quad (5.3)$$

По предположению имеется две волны, поэтому решение уравнения (5.3) будем искать в виде суммы двух слагаемых:

$$\vec{E} = \vec{A}_0(\vec{r}, t) \exp(-i\omega_0 t + i\vec{k}_0 \vec{r}) + \vec{A}_1(\vec{r}, t) \exp(-i\omega_1 t + i\vec{k}_1 \vec{r}). \quad (5.4)$$

$$\text{Здесь } k_0^2 = \omega_0^2 \varepsilon_0 / c^2, \quad k_1^2 = \omega_1^2 \varepsilon_0 / c^2.$$

Каждое из слагаемых в (5.4) описывает плоскую электромагнитную волну, амплитуды которых являются функциями времени и координат. Так как пространственно-временная неоднородность среды предполагается малой, то эти амплитуды будем предполагать медленноменяющимися функциями пространства и времени.

5.3. Среда с одномерной неоднородностью

Рассмотрим наиболее простой случай, который проявляет наиболее важные характеристики новых условий взаимодействия и который, по видимому, наиболее легко реализовать в эксперименте. Будем считать, что взаимодействие происходит между поперечными волнами, что среда периодически-неоднородна только в одном направлении (в направлении z). В этом случае временная расстройка может быть скомпенсирована только расстройкой вдоль оси z . Более того, будем предполагать, что волны расположены на одной дисперсионной линейной ветке. В этом случае фазовые

скорости волны и их групповые скорости совпадают. Как будет видно ниже, все эти ограничения являются непринципиальными (они наложены только для упрощения формул) и при необходимости могут быть убраны. Будем также считать, что волны распространяются только в одном направлении – в направлении оси z . В этом случае, подставляя (5.4) в (5.3), можно получить следующие уравнения для нахождения амплитуд \vec{A}_i :

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial^2 \vec{A}_0}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon_0}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}_0}{\partial t^2} \right] + 2i \left[k_0 \frac{\partial \vec{A}_0}{\partial z} + \frac{\varepsilon_0 \cdot \omega_0}{c^2} \frac{\partial \vec{A}_0}{\partial t} \right] = \\ & = -\frac{q}{2} \frac{(\omega_1 \pm \Omega)^2}{c^2} \vec{A}_1 \cdot \exp[-i \cdot \delta(z, t)] \\ & \left[\frac{\partial^2 \vec{A}_1}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon_0}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}_1}{\partial t^2} \right] + 2i \left[k_1 \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial z} + \frac{\varepsilon_0 \cdot \omega_1}{c^2} \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial t} \right] = \\ & = -\frac{q}{2} \frac{(\omega_0 \pm \Omega)^2}{c^2} \vec{A}_0 \cdot \exp[i \cdot \delta(z, t)] \end{aligned} \quad (5.5)$$

где $\delta(\vec{r}, t) \equiv \Delta \vec{k} \cdot \vec{r} - \Delta \omega \cdot t$, $\Delta \vec{k} \equiv (\vec{k}_1 - \vec{k}_0 \pm \vec{k})$, $\Delta \omega \equiv \omega_1 - \omega_0 \pm \Omega$.

Удобно ввести следующие новые независимые переменные: $\xi = z - \tau$ и $\eta = z + \tau$, где $\tau = t \cdot c / \sqrt{\varepsilon_0}$. Система (5.5) при этом переписывается в таком виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 A_0}{\partial \xi \cdot \partial \eta} + 2ik_0 \frac{\partial A_0}{\partial \eta} = -\frac{q}{2} \frac{\omega_1^2}{c^2} A_1 \cdot \exp(i \cdot \delta), \\ & \frac{\partial^2 A_1}{\partial \xi \cdot \partial \eta} + 2ik_1 \frac{\partial A_1}{\partial \eta} = -\frac{q}{2} \frac{\omega_0^2}{c^2} A_0 \cdot \exp(-i \cdot \delta). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Эта система строгая. Пусть расстройки частот и волновых векторов таковы, что характеристики уравнений (5.5) без вторых производных (т.е. субхарактеристики) параллельны прямым: $\delta(\vec{r}, t) \equiv \Delta k \cdot z - \Delta \omega \cdot t = \text{const}(\eta)$. Это означает, что производные вдоль этих субхарактеристик равны нулю: $\partial \delta / \partial \eta = 0$.

Взаимодействие волн обусловлено малой неоднородностью ($q \ll 1$) диэлектрической проницаемости. Естественно ожидать, что амплитуды волн будут меняться медленно. Поэтому в системе уравнений (5.6) можно опустить вторые производные. Следует заметить, что это предположение всегда требует дополнительного анализа. В частности, как мини-

мум, полученные решения следует проверять на удовлетворение этому предположению (см. также раздел обсуждение).

Отбросим вторые производные в левой части системы (5.6). Тогда левая часть этих уравнений может рассматриваться как производная вдоль характеристических прямых: $\eta = z + \tau = C = const$. Причем эти направления для взаимодействующих волн совпадают. Кроме того, выполняются такие соотношения:

$$\frac{\partial \delta}{\partial \eta} = 0 \quad \text{или} \quad \Delta \omega = \Delta k \cdot c / \sqrt{\varepsilon_0}. \quad (5.7)$$

Обратим также внимание на то, что правые части системы уравнений (5.6) содержат комплексно-сопряженные множители $\exp[i \cdot \delta(z, t)]$. Учитывая этот факт и соотношение (5.7) из системы уравнений (5.6), получим следующие уравнения для определения амплитуд A_0 и A_1 :

$$\frac{\partial^2 A_i}{\partial \eta^2} + K^2 \cdot A_i = 0 \quad i = \{0, 1\}, \quad (5.8)$$

где $K^2 = q^2 (k_0 \cdot k_1) / 64$.

Решениями уравнений (5.8) могут быть, например, функции:

$$A_0 = a \cos(K\eta), \quad A_1 = b \sin(K\eta).$$

Такой выбор решений, в частности, может означать, что происходит периодическая перекачка энергии из одной волны во вторую волну в процессе их взаимодействия вдоль направления $\eta = z + \tau$.

Рассмотренное выше взаимодействие волн происходит в том случае, когда они распространяются в одном и том же направлении, в направлении положительной оси z ($k_0 > 0, k_1 > 0$). Легко показать, что если они будут распространяться в противоположном направлении ($k_0 < 0, k_1 < 0$), то взаимодействие будет происходить по тем же законам взаимодействия. Однако это взаимодействие будет происходить вдоль другой субхарактеристики. А именно вдоль $\xi = z - \tau$. В этом случае уравнение (5.8) будет преобразовано к уравнению:

$$\frac{\partial^2 A_i}{\partial \xi^2} + K^2 \cdot A_i = 0 \quad i = \{0, 1\}. \quad (5.9)$$

Решениями этих уравнений могут быть функции $A_0 = a \cos(K\xi)$ и $A_1 = b \sin(K\xi)$.

5.4. Среда с трехмерной неоднородностью

Полученные выше результаты обобщаются на случай, когда среда имеет трехмерную неоднородность. При этом, подставляя поля (5.4) в уравнение (5.3) после громоздких, но простых вычислений, можно получить следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка для определения динамики во времени и пространстве амплитуд \vec{A}_0 и \vec{A}_1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{A}_0}{\partial l_0} &= \frac{q \cdot i}{4N_0} \left\{ \frac{(\omega_1^2 + \Omega^2)}{c^2} \cdot \vec{A}_1 \pm \frac{1}{\varepsilon_0} (\vec{k}_1 \pm \vec{k}) (\vec{k} \vec{A}_1) \right\} \exp(i\delta), \\ \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial l_1} &= \frac{q \cdot i}{4N_1} \left\{ \frac{(\omega_0^2 + \Omega^2)}{c^2} \cdot \vec{A}_0 \mp \frac{1}{\varepsilon_0} (\vec{k}_0 \mp \vec{k}) (\vec{k} \vec{A}_0) \right\} \cdot \exp(-i\delta). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Здесь $\delta(\vec{r}, t) \equiv \Delta \vec{k} \cdot \vec{r} - \Delta \omega \cdot t$; $\Delta \vec{k} \equiv (\vec{k}_1 - \vec{k}_0 \pm \vec{k})$; $\Delta \omega \equiv \omega_1 - \omega_0 \pm \Omega$;

$N_i = \sqrt{k_{ix}^2 + k_{iy}^2 + k_{iz}^2 + \varepsilon \cdot \omega_i^2 / c^2}$ – норма для каждой из волн. Производные в системе (5.10) взяты вдоль характеристических направлений: $\vec{l}_{0,1} = \{k_{0,1,x}; k_{0,1,y}; k_{0,1,z}; \omega_0 \cdot \sqrt{\varepsilon_0} / c\} / N_{0,1}$. \vec{l}_0 и \vec{l}_1 – единичные вектора вдоль соответствующих характеристических направлений. Уравнение $\delta(\vec{r}, t) = C = \text{const}(l_0, l_1)$ представляет собой уравнение гиперплоскости в четырехмерном пространстве (\vec{r}, t) . Чтобы эта расстройка не менялась в процессе обмена энергией между волнами, необходимо, чтобы характеристические прямые

$$x = \alpha k_{0x} + x_0; \quad y = \alpha k_{0y} + y_0; \quad z = \alpha k_{0z} + z_0; \quad t = \alpha \cdot (\omega_0 \cdot \varepsilon_0 / c^2) + t_0;$$

$$x = \alpha_1 k_{1x} + x_1; \quad y = \alpha_1 k_{1y} + y_1; \quad z = \alpha_1 k_{1z} + z_1;$$

$$t = \alpha_1 \cdot (\omega_1 \cdot \varepsilon_0 / c^2) + t_1. \quad (5.11)$$

были параллельны гиперплоскости $\delta(\vec{r}, t) = C = \text{const}$. Этими условиями будут соотношения:

$$(\Delta \vec{k} \cdot \vec{k}_0) c^2 - \Delta \omega \cdot \omega_0 \cdot \varepsilon_0 = 0, \quad (\Delta \vec{k} \cdot \vec{k}_1) c^2 - \Delta \omega \cdot \omega_1 \cdot \varepsilon_0 = 0. \quad (5.12)$$

Взаимное расположение векторов $\vec{\Delta k}$, \vec{k}_0 и \vec{k}_1 , которые удовлетворяют этим условиям, представлено на рисунке 5.3. Легко проверить, что при выполнении условий (5.12) производные вдоль характеристических направлений \vec{l}_0 и \vec{l}_1 от расстройки будут равны нулю: $\partial\delta(\vec{r},t)/\partial l_0 = \partial\delta(\vec{r},t)/\partial l_1 = 0$.

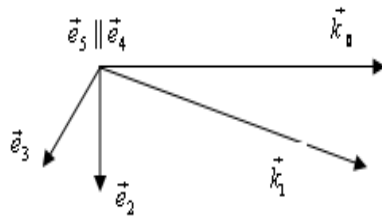


Рис. 5.2. Взаимное расположение векторов \vec{k}_0 и \vec{k}_1 , а также единичных векторов поляризации \vec{e}_i

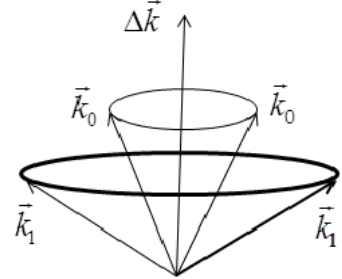


Рис. 5.3. Схема взаимного расположения векторов $\vec{\Delta k}$, \vec{k}_0 и \vec{k}_1 , необходимое для эффективного взаимодействия волн

Связь амплитуд \vec{A}_0 и \vec{A}_1 в системе уравнений (5.10) более сложная, чем в системе (5.5). В средах с такими характеристиками различные поляризации оказываются, в общем случае, связанными. Поэтому амплитуды волн представим в виде суммы σ и π поляризации:

$$\vec{A}_0 = \vec{e}_4 \cdot A_{01} + \vec{e}_2 \cdot A_{02}; \quad \vec{A}_1 = \vec{e}_5 \cdot A_1 + \vec{e}_3 \cdot A_2. \quad (5.13)$$

Здесь \vec{e}_i – единичные вектора, определяющие направления поляризации электрических векторов. Направления этих векторов относительно волнового вектора \vec{k}_0 и волнового вектора \vec{k}_1 представлены на рисунке 5.2. Вектора \vec{e}_5 и \vec{e}_4 параллельны и направлены перпендикулярно плоскости рисунка. Из этого рисунка, в частности, видно, что рассматривается взаимодействие (через неоднородную среду) двух поперечных электромагнитных волн ($\vec{e}_2 \perp \vec{k}_0$, $\vec{e}_4 \perp \vec{k}_0$; $\vec{e}_3 \perp \vec{k}_1$, $\vec{e}_5 \perp \vec{k}_1$).

Если выполняются обычные условия синхронизма $\vec{\Delta k} = 0$, $\Delta\omega = 0$, то вектор \vec{k} лежит в одной плоскости с волновыми векторами \vec{k}_0 и \vec{k}_1 . В этом случае, домножив первое уравнение системы (5.10) на \vec{e}_4 , а второе уравнение системы (5.10) на \vec{e}_5 ($\vec{e}_4 \parallel \vec{e}_5 \perp \vec{k}_i$), полу-

чим следующую систему замкнутых уравнений первого порядка для определения амплитуд волн A_{01} и A_1 :

$$\frac{\partial A_{01}}{\partial l_0} = \frac{q}{4 \cdot i \cdot N_0} \left\{ -\frac{\omega_0^2}{c^2} \cdot A_1 \right\}; \quad \frac{\partial A_1}{\partial l_1} = \frac{q}{4 \cdot i \cdot N_1} \left\{ -\frac{\omega_1^2}{c^2} \cdot A_{01} \right\}. \quad (5.14)$$

Система уравнений (5.14) описывает динамику σ - поляризации. Аналогично, домножив первое уравнение системы (5.10) на \vec{e}_2 , а второе уравнение этой системы на \vec{e}_3 , получим систему уравнений, описывающую динамику амплитуд A_{02} и A_2 (π - поляризация). Динамика взаимодействия волн в этом случае достаточно хорошо изучена.

В общем случае, когда $\Delta \vec{k} \neq 0$ получить замкнутую систему, описывающую динамику отдельно волн с σ - поляризацией и волн с π - поляризацией, не удастся. Однако для ответа на интересующий вопрос об эффективном взаимодействии волн достаточно рассмотреть динамику не каждой компоненты электрического поля взаимодействующих волн, а достаточно рассмотреть динамику функций $(\vec{k} \cdot \vec{A}_0)$ и $(\vec{k} \cdot \vec{A}_1)$. Для таких функций из системы (5.10) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\vec{k} \cdot \vec{A}_0)}{\partial l_0} &= \frac{q}{4 \cdot i \cdot N_0} \left\{ -\frac{(\omega_1 \pm \Omega)^2}{c^2} \pm \frac{\vec{k}}{\varepsilon_0} (\vec{k}_1 \pm \vec{k}) \right\} (\vec{k} \cdot \vec{A}_1) \cdot \exp(i\delta) \\ \frac{\partial (\vec{k} \cdot \vec{A}_1)}{\partial l_1} &= \frac{q}{4 \cdot i \cdot N_1} \left\{ -\frac{(\omega_0 \mp \Omega)^2}{c^2} \mp \frac{\vec{k}}{\varepsilon_0} (\vec{k}_0 \pm \vec{k}) \right\} (\vec{k} \cdot \vec{A}_0) \cdot \exp(-i\delta). \end{aligned} \quad (5.15)$$

В этом случае динамику функций $(\vec{k} \cdot \vec{A}_0)$ и $(\vec{k} \cdot \vec{A}_1)$ можно изучать независимо:

$$\frac{\partial^2 (\vec{k} \cdot \vec{A}_0)}{\partial l_0 \partial l_1} = -\frac{q^2}{16 \cdot N_0 \cdot N_1} \left\{ -\frac{(\omega_1 \pm \Omega)^2}{c^2} \pm \frac{\vec{k}}{\varepsilon_0} (\vec{k}_1 \pm \vec{k}) \right\} \left\{ -\frac{(\omega_0 \mp \Omega)^2}{c^2} \mp \frac{\vec{k}}{\varepsilon_0} (\vec{k}_0 \pm \vec{k}) \right\} (\vec{k} \cdot \vec{A}_0). \quad (5.16)$$

Аналогичное уравнение получается и для $(\vec{k} \cdot \vec{A}_1)$. Уравнения для функций $(\vec{k} \cdot \vec{A}_0)$ и $(\vec{k} \cdot \vec{A}_1)$ представляют собой линейные уравнения с частными производными второго порядка с постоянными коэффициентами.

Возникает вопрос: могут ли дать условия (5.12) что-либо новое по сравнению с известными условиями? Ниже будет показано, что действи-

тельно они дают новые возможности для взаимодействия волн. Если среда стационарна, то $\Omega = \Delta\omega = 0$. Соответственно, процесс распространения волн в такой среде не будет зависеть от времени. При этом должно выполняться одно из привычных условий синхронизма $\Delta\omega = 0$ (закон сохранения энергии). В этом случае из (5.12) следует, что кроме привычных условий синхронизма $\Delta\vec{k} = 0$ имеются дополнительные возможности для эффективного взаимодействия волн. Они заключаются в том, что волновой вектор \vec{k}_0 и волновой вектор \vec{k}_1 должны быть перпендикулярны вектору $\Delta\vec{k}$ (см. рис. 5.4). Анализ этих условий показывает, что возможны, например, следующие условия для эффективного взаимодействия волн. Первое заключается в том, что $\vec{k}_0 = \vec{k}_1$ и, по-видимому, является не очень интересным. Второе требует, чтобы:

$$\vec{k}_0 = -\vec{k}_1 \quad \text{и} \quad |\vec{k}| = \frac{2|\vec{k}_0|}{|\cos(\varphi)|}. \quad (5.17)$$

Здесь φ - угол между векторами \vec{k}_0 и \vec{k} . Отметим, что условия Брэгга в этих условиях требуют $|\vec{k}| = 2|\vec{k}_0|$.

5.5. Взаимодействие волн в нелинейных средах

Уравнения, которые описывают взаимодействие трех волн $(\omega_0, \omega_1, \omega_2; \vec{k}_0, \vec{k}_1, \vec{k}_2)$ в нелинейной среде, можно представить в виде (см., например, [25, 26]):

$$\begin{aligned} \partial a_0 / \partial l_0 &\equiv \dot{a}_0 + (\vec{V}_0 \vec{\nabla}) a_0 = -\sigma_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \exp(-i \cdot \delta); \\ \partial a_1 / \partial l_1 &\equiv \dot{a}_1 + (\vec{V}_1 \vec{\nabla}) a_1 = \sigma_1 \cdot a_0 \cdot a_2^* \cdot \exp(i \cdot \delta); \\ \partial a_2 / \partial l_2 &\equiv \dot{a}_2 + (\vec{V}_2 \vec{\nabla}) a_2 = \sigma_2 \cdot a_0 \cdot a_1^* \cdot \exp(i \cdot \delta). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Здесь \vec{V}_i групповые скорости волн; σ_i матричные элементы нелинейного взаимодействия.

Левая часть каждого из уравнений системы (5.18) представлена в виде производных вдоль характеристических направлений. Для определенности будем рассматривать взаимодействие волн с положительной энергией ($\sigma_i > 0$), а также будем ориентироваться на процессы распада. Условием

синхронизма взаимодействующих волн будет условие параллельности характеристических прямых гиперплоскости $\delta(\vec{r}, t) = const$, т.е. условия:

$$\Delta\omega - \Delta\vec{k} \cdot \vec{V}_i = 0. \quad (5.19)$$

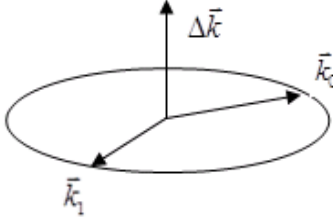


Рис. 5.4. Схема взаимного расположения векторов $\Delta\vec{k}$, \vec{k}_0 и \vec{k}_1 в стационарной среде при $\Omega = \Delta\omega = 0$

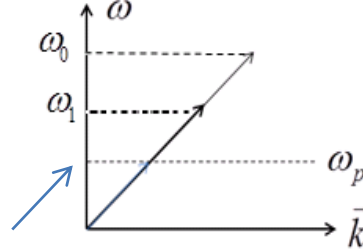


Рис. 5.5. Дисперсия эффективно взаимодействующих волн при $\Delta k = \Delta\omega \neq 0$. Распад поперечной волны на поперечную волну и на плазменную волну

Линейная стадия процесса распада протекает как неустойчивость. На этой стадии амплитуду волны с максимальной частотой можно считать фиксированной ($a_0 = const$). В этом случае систему (5.18) удобно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \partial a_1 / \partial l_1 &= \sigma_1 \cdot a_0 \cdot a_2^* \cdot \exp(i \cdot \delta); \\ \partial a_2^* / \partial l_2 &= \sigma_2 \cdot a_0^* \cdot a_1 \cdot \exp(-i \cdot \delta). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Подставляя в (5.20) решение в виде $\sim \exp(i\Omega t - i\vec{k}\vec{r})$, получим следующее дисперсионное уравнение, определяющее связь частоты Ω с вектором \vec{k} :

$$\Omega^2 - \Omega \cdot \vec{k} \cdot (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) + \left[\kappa^2 \cdot \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 + \sigma_1 \sigma_2 |a_0|^2 \right] = 0. \quad (5.21)$$

При решении (5.21) необходимо из всего множества возможных решений принимать во внимание только те, для которых частота Ω и вектор \vec{k} будут малыми величинами ($\Omega \sim \kappa \sim |a_0|$). Решая уравнение (5.21) относительно Ω , в этом случае будет получено:

$$\Omega = \vec{k}\vec{V} \pm i \cdot |a_0| \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}. \quad (5.22)$$

Мнимая часть частоты ($\text{Im} \Omega = |a_0| \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}$) определяет инкремент распадной неустойчивости.

Представляет интерес найти те новые возможности для распадов, которые не укладываются в известные условия распадов. Рассмотрим простейшие. Пусть происходит распад поперечной волны на поперечную волну и на плазменную волну ($t_0 \rightarrow t_1 + l$). Будем считать, что все три волны укладываются на линейный участок дисперсии (см. рис. 5.5). В этом случае групповые скорости всех трех волн совпадают ($\vec{V}_0 = \vec{V}_1 = \vec{V}_2 \equiv \vec{V}$). Более того, групповые скорости в этом случае совпадают с фазовыми скоростями. Условия синхронизма (5.19) в этом случае будут выполняться для любой тройки волн. Действительно, условия (5.19) приобретают в этом случае вид тождества:

$$\omega_0 - \omega_1 - \omega_2 = \left(\frac{\omega_0}{V} - \frac{\omega_1}{V} - \frac{\omega_2}{V} \right) V. \quad (5.23)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае в процессе распада может принимать большое количество троек волн. Причем эти волны по своим характеристикам могут мало отличаться друг от друга. В этом случае процесс распада становится хаотическим. Покажем это. Система уравнений (5.20) имеет следующий интеграл:

$$\sigma_2 |a_1|^2 - \sigma_1 |a_2|^2 = C = const. \quad (5.24)$$

Удобно сделать следующую замену зависимых комплексных переменных: $a_j = |a_j| \exp(i\Phi_j)$. Далее учтем, что на начальном этапе процесса распада амплитуды $|a_1|$ и $|a_2|$ малы ($C \rightarrow 0$), а также, что $l_0 = l_1 = l_2 \equiv l$ и $(\partial\delta/\partial l) = 0$. В этом случае легко увидеть, что динамика фазы $\Phi = 2(\Phi_0 - \Phi_1 - \Phi_2 + \delta)$ подчиняется уравнению математического маятника:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial l^2} + (2|a_0| \sqrt{\sigma_1 \sigma_2})^2 \sin \Phi = 0. \quad (5.25)$$

Одновременно с распадом поперечной волны на плазменную волну и на поперечную волну происходит распад этой поперечной волны на плазменную волну и на другую поперечную волну (назовем ее третьей волной), которая лежит на дисперсионной линии (рис. 5.5) и может находиться произвольно близко ко второй поперечной волне. Очевидным является то, что процесс взаимодействия этой новой тройки волн будет описываться системой уравнений, аналогичной системе (5.18). Величина фазы $\Psi = 2(\Phi_0 - \Phi_3 - \Phi_2 + \delta_1)$ при этом будет подчиняться уравнению математического маятника, аналогичному (5.25). Расстояние между нелинейными резонансами при этом может быть произвольно малым. Нелинейные резонансы перекрываются. Режим распада становится хаотическим.

Заметим, что рассматриваемый случай совпадения всех скоростей взаимодействующих волн может быть решен аналитически не только на линейной стадии, но и на нелинейной. Для этого достаточно воспользоваться методом эффективного потенциала (см., например, [3]). Однако в связи с тем, что процесс распада носит хаотический характер, это решение теряет смысл.

5.6. Возможность наблюдения.

Взаимодействие в слое

Представляет интерес рассмотреть какой-то простой случай, в котором содержались бы основные элементы рассматриваемых новых условий взаимодействия и которые были бы, по возможности, простыми, чтобы можно было их реализовать в эксперименте. В этом разделе будет рассмотрен такой случай. Он представляет собой слой толщины L неоднородной среды. Границы слоя идеально отражающие. Внутри слоя перпендикулярно его границам распространяются две волны. Каждая из этих волн представляет собой сумму двух волн, одна из которых распространяется вдоль оси z , а вторая – в противоположном направлении (отраженная от границы волна). Динамика взаимодействия каждой из этих волн была описана выше. Выражение для компонент полей в такой системе можно представить в таком виде:

$$\begin{aligned} E_x &= [A \cdot \exp(ik_0 z) + B \cdot \exp(-ik_0 z)] \cdot \exp(-i\omega_0 t) + \\ &+ [C \cdot \exp(ik_1 z) + D \cdot \exp(-ik_1 z)] \cdot \exp(-i\omega_1 t); \\ H_y &= [A \cdot \exp(ik_0 z) - B \cdot \exp(-ik_0 z)] \cdot \sqrt{\varepsilon_0} \cdot \exp(-i\omega_0 t) + \\ &+ [C \cdot \exp(ik_1 z) - D \cdot \exp(-ik_1 z)] \cdot \sqrt{\varepsilon_0} \cdot \exp(-i\omega_1 t). \end{aligned} \quad (5.26)$$

В формуле (5.26) $0 < z < L$, $\varepsilon_0 \neq 1$, а A, B, C, D являются медленными функциями времени и координаты.

Аналитический вид этих функций определяется решениями уравнений (5.8) и (5.9). Запишем эти решения в следующем виде:

$$\begin{aligned} A &= a \cdot \cos(K\eta); \quad B = b \cdot \cos(K\xi); \\ C &= c \cdot \sin(K\eta); \quad D = d \cdot \sin(K\xi). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Здесь можно положить $a = -b$, $a = c = d$. Тогда выражение для электрической компоненты полного поля в слое (5.26) можно представить в таком виде:

$$E_x = a [\cos(K\eta) \exp(ik_0 z) - \cos(K\xi) \exp(-ik_0 z)] \cdot \exp(-i\omega_0 t) + \\ + a [\sin(K\eta) \exp(ik_1 z) + \sin(K\xi) \exp(-ik_1 z)] \cdot \exp(-i\omega_1 t) \quad (5.28)$$

Это поле должно обращаться в ноль на поверхности $z = 0$ и на поверхности $z = L$. Легко найти, что для удовлетворения этому условию волновые вектора k_0, k_1 и K должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$k_0 = \frac{\pi(n+m)}{2L}, \quad k_1 = \frac{\pi(l+p)}{2L}, \quad K = \frac{\pi(n-m)}{2L}. \quad (5.29)$$

Здесь n, m, l, p – целые числа. Причем выполняются условия $(n-m) = (l-p)$, но $(n+m) \neq (l+p)$.

Учитывая, что волновой вектор K пропорционален малому параметру $q \ll 1$, выражения (5.29) можно упростить. Кроме того, используя выражение для K (5.8), можно выписать простые выражения для основных параметров рассматриваемой системы:

$$\lambda_0 \approx \frac{2L}{n}, \quad n \gg 1, \quad \lambda_1 \approx \frac{2L}{l}, \quad l \gg 1, \quad q \approx \frac{4}{\sqrt{nl}}. \quad (5.30)$$

5.7. Взаимодействие волн в квантовых системах

Взаимодействия в квантовых системах носят волновой характер. Поэтому естественно ожидать, что при взаимодействиях в таких системах также будут проявляться кроме известных условий синхронизма ($\Delta\omega = 0$ и $\Delta\vec{k} = 0$) и обобщенные, аналогичные условиям (5.12). Покажем, что такие процессы действительно реализуются в квантовых системах. Для этого рассмотрим динамику квантовой системы, которая движется в периодическом во времени и в пространстве потенциале: $U = U_0 + q \cdot \cos(\Omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r})$. Периодическое возмущение будем считать малым ($q \ll 1$). Волновая функция, описывающая квантовую систему, удовлетворяет уравнению Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + e \cdot U \cdot \psi = 0. \quad (5.31)$$

Решение уравнения (5.31) будем искать в виде суммы двух функций: $\psi(\vec{r}, t) = \psi_0(\vec{r}, t) + \psi_1(\vec{r}, t)$. Каждое из этих слагаемых представляет собой решение невозмущенного уравнения Шредингера. В дальнейшем,

для определенности, будем рассматривать движение частиц. Тогда каждое слагаемое представляет собой волну. В отсутствие возмущения эти волны независимы. При наличии периодического возмущения потенциала эти волны начинают взаимодействовать. При этом комплексные амплитуды этих волн будут меняться в пространстве и во времени. Отыскание условий эффективного взаимодействия этих волн и будет нашей задачей. Таким образом, будем искать решение в виде:

$$\psi(\vec{r}, t) = \sum_{i=0}^1 A_i(\vec{r}, t) \cdot \exp(i \cdot \omega_i t - i \cdot \vec{k} \cdot \vec{r}). \quad (5.32)$$

В дальнейшем, говоря о квантовой системе, будем говорить о динамике заряженной частицы. Тогда энергия частицы в каждом из рассматриваемых состояний равна $E_i = \hbar \omega_i = k_i^2 \cdot \hbar^2 / 2m$, а ее импульс $\vec{p}_i = \hbar \vec{k}_i$. Волновые вектора и частоты в (5.32) связаны соотношением: $\omega_i = \hbar |\vec{k}_i| / 2m$. Волновой вектор равен $\vec{k}_i = m \vec{V}_i / \hbar$. Подставляя (5.32) в уравнение Шредингера, можно получить следующую систему дифференциальных уравнений для определения медленноменяющихся амплитуд A_i :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_0}{\partial t} &\equiv \frac{\partial A_0}{\partial t} - \frac{\hbar}{m} (\vec{k}_0 \vec{\nabla}) A_0 = -\frac{e \cdot q}{i \cdot \hbar} A_1 \cdot \exp(i\delta); \\ \frac{\partial A_1}{\partial t} &\equiv \frac{\partial A_1}{\partial t} - \frac{\hbar}{m} (\vec{k}_1 \vec{\nabla}) A_1 = -\frac{e \cdot q}{i \cdot \hbar} A_0 \cdot \exp(-i\delta). \end{aligned} \quad (5.33)$$

Здесь, как и при рассеянии электромагнитных волн, $\delta = \Delta \omega t - \Delta \vec{k} \cdot \vec{r}$; $\Delta \omega = \omega_1 - \omega_0 \pm \Omega$; $\Delta \vec{k} = \vec{k}_1 - \vec{k}_0 \pm \vec{k}$.

Уравнение для характеристических прямых имеет вид:

$$\frac{dt}{1} = -\frac{dx \cdot m}{k_{ix} \hbar} = -\frac{dy \cdot m}{k_{iy} \hbar} = -\frac{dz \cdot m}{k_{iz} \hbar}. \quad (5.34)$$

Условием синхронизма будет условие того, что эти характеристические прямые будут параллельны гиперплоскости $\delta(\vec{r}, t) = const$:

$$\Delta \omega - \frac{\hbar}{m} (\vec{k}_0 \Delta \vec{k}) = 0; \quad \Delta \omega - \frac{\hbar}{m} (\vec{k}_1 \Delta \vec{k}) = 0. \quad (5.35)$$

Из (5.35), кроме известных условий синхронизма $\Delta \omega = 0$ и $\Delta \vec{k} = 0$, следуют новые условия: $(\vec{k}_0 \cdot \Delta \vec{k}) = (\vec{k}_1 \cdot \Delta \vec{k})$; $\Delta \vec{k} \neq 0$. Из этого условия, в частности, следует, что при движении частиц с энергией $\hbar \omega_0$ и импульсом

$\hbar\vec{k}_0$ в потенциале, периодически меняющемся в пространстве и во времени, они могут преобразоваться в частицы с энергиями:

$$\hbar\omega_1 = \hbar\omega_0 \mp \hbar\Omega + \hbar^2 (\vec{k} \cdot \Delta\vec{k}) / m. \quad (5.36)$$

Если выполняются обычные условия синхронизма ($\Delta\vec{k} = 0$), то третье слагаемое в правой части (5.36) пропадает. В этом случае получаем известный результат о появлении частиц с квазиэнергиями. Именно третье слагаемое отличает полученный результат от известного результата. Возникает вопрос об интервале времени (или о расстоянии), в течение которого такая трансформация произойдет. Для этого удобно от системы уравнений (5.35) перейти к одному уравнению второго порядка:

$$\frac{\partial^2 A_0}{\partial l_0 \partial l_1} = -\frac{e^2 q^2}{\hbar^2} A_0. \quad (5.37)$$

При получении (5.37) учтено, как и в предыдущих разделах, тот факт, что производные вдоль характеристик от функции $\delta(\vec{r}, t)$ равны нулю. Уравнение (5.37) является уравнением с постоянными коэффициентами. Подставляя в него решение $A_0 \sim \exp\left[i(\omega_h t - \vec{k}_h \vec{r})\right]$, получим дисперсионное уравнение, которое связывает ω_h и \vec{k}_h :

$$\omega_h^2 + \omega_h \cdot \left[(\vec{k}_0 \vec{k}_h) + (\vec{k}_1 \vec{k}_h) \right] \frac{\hbar}{m} + \left[(\vec{k}_0 \vec{k}_h) (\vec{k}_1 \vec{k}_h) \left(\frac{\hbar}{m} \right)^2 - \left(\frac{e \cdot q}{\hbar} \right)^2 \right] = 0. \quad (5.38)$$

При $\vec{k}_h \rightarrow 0$ из (5.38), в частности, следует, что $\omega_h = e \cdot q / \hbar$, т.е. за времена порядка \hbar / eq частицы с энергиями $\hbar\omega_0$ преобразуются в частицы с энергиями, определяемыми формулой (5.36). Следует отметить, что при более длительном взаимодействии процесс обмена изменит знак, и «новые» частицы будут преобразовываться в исходные.

5.8. Краткое обсуждение результатов

Таким образом, полученные выше результаты показывают, что действительно кроме известных условий взаимодействия волн ($\Delta\vec{k} = \Delta\omega = 0$) существуют более общие условия обмена энергией между волнами. В рас-

смотренном нами выше случае эти условия имеют простой вид

$$\Delta k = \frac{\Delta \omega \sqrt{\varepsilon}}{c} \text{ (пространственно-одномерный случай).}$$

В этих условиях расстройки Δk и $\Delta \omega$ практически произвольные величины. Как видно, эти новые условия содержат как частный случай известные условия синхронизма $\Delta k = \Delta \omega = 0 \pm$. Чтобы наглядно увидеть разницу в старых и новых условиях, на рисунке 5.5 представлен пример волн, которые все могут эффективно взаимодействовать друг с другом. Если использовать известные условия взаимодействия, то большинство этих троек волн эффективно взаимодействовать не могут (известные условия синхронизма не выполняются). Используем новые условия синхронизма. Легко увидеть, что любые тройки волн, которые представлены на рисунке, удовлетворяют новым условиям синхронизма $\Delta k = \Delta \omega \sqrt{\varepsilon} / c$. Они могут эффективно обмениваться энергией. Таких троек неограниченно много. Поэтому реальная динамика такого взаимодействия будет хаотичной.

Важным примером рассматриваемых условий является пример взаимодействия волн в плоском слое, который был рассмотрен выше. Действительно, как видно из формулы (5.28), выражение для действительной компоненты электрического поля может быть измерено в реальных экспериментах. Видно, что может наблюдаться появление волн с новыми частотами (ω_1), если в начальный момент времени в слое существовала только одна волна с частотой (ω_0). Появление волн с такими частотами (ω_1) не описывается известными условиями синхронизма.

Следует несколько слов сказать о получении укороченных уравнений типа (5.8) и (5.10). Аргументами их получения могут быть несколько фактов. Прежде всего, это физические соображения. Действительно, возмущения предполагались малыми. В этом случае можно ожидать медленных изменений, которые связаны с этим возмущением. В физической литературе это достаточно распространенный прием (выбрасывание высших производных в укороченных уравнениях). При этом в укороченных уравнениях не должны появиться быстроменяющиеся слагаемые. Если посмотреть на укороченные уравнения типа (5.10) и (5.15), то в правых частях этих уравнений стоят выражения, которые содержат быстроосциллирующие экспоненты. Однако, как легко видеть, во вторых уравнениях этих систем эти экспоненты комплексно сопряжены относительно первого уравнения. Поэтому, если производные вдоль субхарактеристик от показателей этих экспонент обращаются в ноль (см. уравнение (5.7)), то в результирующих уравнениях типа (5.8) эти быстро осциллирующие выражения исчезают. Это физические аргументы. Можно показать более строго, что учет вторых производных не может существенно изменить полученные результаты. Конечно, учет вторых производных в системах уравнений открывает возможность появления новых решений, которые могут быть по-своему интересны. Однако возникает

вопрос: Может ли наличие вторых производных изменить решения, которые получены без учета этих производных. Будут ли полученные решения (в рамках учета только первых производных) устойчивы в отношении учета вторых производных? Этот вопрос может быть изучен. Действительно, следуя [33], рассмотрим одно уравнение из системы (5.5), в котором забудем о правой части:

$$\left[\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} \right] - \alpha \frac{\partial A}{\partial z} - \beta \frac{\partial A}{\partial \tau} = 0. \quad (5.39)$$

В уравнении (5.39) α и β произвольные константы. Введем следующие переменные: $\xi = \tau - z$, $\eta = \tau + z$. Уравнение (5.39) в новых переменных примет вид:

$$-4 \frac{\partial^2 A}{\partial \xi \partial \eta} = (\beta - \alpha) \frac{\partial A}{\partial \xi} + (\beta + \alpha) \frac{\partial A}{\partial \eta}. \quad (5.40)$$

Будем рассматривать динамику скачков вдоль субхарактеристик: $\xi = \tau - z = \xi_0 = const$ и $\eta = \tau + z = \eta_0 = const$. Например, скачок амплитуды при распространении вдоль субхарактеристики $\xi = \xi_0 = const$ имеет вид:

$$s = \frac{\partial A}{\partial \xi}(\xi_0^+, \eta) + \frac{\partial A}{\partial \eta}(\xi_0^-, \eta). \quad (5.41)$$

Подставляя в уравнение (5.40) поочередно $\xi = \xi_0^+$ и $\xi = \xi_0^-$, а также комбинируя полученные уравнения, находим следующее уравнение, которое описывает динамику скачка:

$$4 \frac{\partial s}{\partial \eta} = (\alpha - \beta) s. \quad (5.42)$$

Из этого уравнения следует, что динамика будет устойчивой, если будут выполнены условия: $\text{Re}(\beta - \alpha) \geq 0$. Аналогично можно найти условие устойчивости решения при распространении скачка вдоль второй субхарактеристики. Окончательно условия устойчивости решений, которые получены при отбрасывании вторых производных, будут выглядеть:

$$\text{Re}(\beta + \alpha) \geq 0; \text{Re}(\beta - \alpha) \geq 0. \quad (5.43)$$

Эти условия достаточно общие. Они годятся для анализа устойчивости во многих прикладных задачах. Например, при распространении волновых пучков в неоднородных, нестационарных и нелинейных средах. В нашем случае легко видеть, что коэффициенты α и β чисто

мнимые. Это означает, что в рассматриваемом нами случае вторые производные не могут радикально изменить динамику решений, которые получены с учетом только первых производных.

6.3 А К Л Ю Ч Е Н И Е

В заключении кратко формулируем наиболее важные результаты, изложенные в этом обзоре.

1. В разделах 1 и 2 в приближении геометрической оптики была описана динамика лучей в неоднородных средах. Было показано, что в таких средах возможна специфическая фокусировка лучей вокруг оси распространения этих лучей. Эта фокусировка во многом аналогична автофазировке заряженных частиц Векслера - Макмиллана в теории ускорителей. Особенности этой фокусировки могут быть привлекательны для приложений.

Описан вывод простых аналитических критериев возникновения режимов с динамическим хаосом при распространении лучей в неоднородных средах. Описано влияние случайных неоднородностей на динамику лучей. Показано, что такие случайные неоднородности могут приводить к флуктуационной неустойчивости. Характерной особенностью этой неустойчивости является тот факт, что моменты, начиная со второго, экспоненциально растут, причем высшие моменты растут быстрее низших моментов. При развитии этой неустойчивости происходит anomalously быстрое разбегание лучей. Такое разбегание можно назвать супердиффузией в том смысле, что процесс разбегания лучей характеризуется экспоненциальным законом, который значительно более сильный, чем степенной. Отметим, что для описания таких процессов известные кинетические уравнения непригодны. По-видимому, их можно описать интегро-дифференциальными уравнениями или, как в этом обзоре, с помощью метода моментов через вариационные производные. Следует заметить, что развитие процесса автофокусировки может отодвинуть порог развития флуктуационной неустойчивости или даже сорвать развитие этой неустойчивости.

2. В разделе 3 описан вывод простого аналитического выражения для критерия (условий возникновения) динамического хаоса при трехволновом взаимодействии. Описан переход от регулярной динамики к хаотической динамике в этих процессах. Указаны области параметров, при которых реализуются регулярные процессы взаимодействия, и области параметров, в которых реализуются хаотические режимы такого взаимодействия.

3. В разделе 4 описана динамика распада широкого волнового пакета в нелинейных средах. Описан каскад, состоящий из большого числа этапов трехволновых распадов. Эти этапы следуют друг за другом. Интересным является тот факт, что если таких этапов бесконечно много, то динамика такого распада оказывается регулярной. Если же количество

трехволновых этапов ограничено, то возможны как регулярные режимы, так и хаотические режимы. Регулярные режимы возникают только в тех случаях, когда количество красных и синих сателлитов одинаковое. Важным также является результат, который описан в этом разделе и который заключается в том, что имеется возможность в процессах распада увеличить степень когерентности распадающейся волны.

4. Наиболее интересным результатом, который описан в обзоре, является, по-видимому, результат, описанный в пятом разделе. В нем показано, что существуют условия эффективного взаимодействия волн, которые существенно отличаются от известных условий взаимодействия. Такие условия возникают в распределенных системах. Показано, что в таких системах расстройка вдоль одной пространственно-временной оси может быть скомпенсирована расстройкой вдоль другой оси. Например, частотная расстройка $\Delta\omega$ взаимодействующих волн может быть скомпенсирована расстройкой волновых чисел Δk ($\Delta\omega = \Delta k \cdot c / \sqrt{\epsilon_0}$, см. (5.7)). Получены выражения для этих новых условий эффективного взаимодействия волн. Отметим, что эти новые условия в качестве частного случая содержат известные условия взаимодействия волн. Следует также отметить, что такое новое эффективное взаимодействие волн происходит вдоль определенных пространственно-временных линий. Эти линии совпадают с субхарактеристическими линиями дифференциальных уравнений в частных производных, которыми описывается динамика взаимодействия волн.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балакирев В. А., Буц В. А., Толстолужский А. П., Туркин Ю. А. Хаотизация движения пучка сфазированных осцилляторов // ЖЭТФ. 1983. Т. 84, № 4. – С. 1279–1289.
2. Лебедев А. Н., Шальнов А. В. Основы физики и техники ускорителей. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 528 с.
3. Балакирев В. А., Буц В. А., Толстолужский А. П., Туркин Ю. А. Динамика движения заряженных частиц в поле двух электромагнитных волн // ЖЭТФ. 1989. Т. 95, № 4. С. 1231–1245.
4. Буц В. А., Мануйленко О. В., Степанов К. Н., Толстолужский А. П. Хаотическая динамика заряженных частиц при взаимодействии типа волна-частица и хаотическая динамика волн при слаболинейном взаимодействии типа волна-волна // Физика плазмы. 1994. Т. 20, № 9. С. 794–801.
5. Абдуллаев С. С., Заславский Г. М. Нелинейная динамика лучей в неоднородных средах // ЖЭТФ. 1981. Т. 80, № 2. С. 524–536.
6. Абдуллаев С. С., Заславский Г. М. Нелинейная и стохастическая динамика лучей в регулярных поперечно-неоднородных средах. – Красноярск. ИФСО АН СССР, 1983. – Препринт № 239 Ф. – 42 с.
7. Заславский Г. М. Стохастичность динамических систем. – М.: Наука, 1984. – 271 с.
8. Буц А. В., Чурюмов Г. И. Основные особенности регулярной и хаотической динамики осциллятора Дюффинга // Всеукраинский межведомственный научно-технический сборник «Радиотехника» 2002. № 130. С. 54–59.
9. Буц А. В., Чурюмов Г. И. Регулярная и хаотическая динамика осциллятора Дюффинга // Электромагнитные волны и электронные системы. 2003. Т. 9, № 7. С. 54–64.
10. Буц В. А., Буц А. В., Сериков С. А. Неустойчивости индуцированные шумом // Успехи современной радиоэлектроники. 2003. № 11. С. 64–68.
11. Буц В. А., Буц А. В., Кузьмин В. В. Acceleration of charged particles by elliptic polarized waves of large amplitude // Вопросы атомной науки и техники. 2004. V. 2. С. 144–146.

12. Буц В. А., Буц А. В., Сериков С. А. Features of dynamics of the instabilities at presence multiplicative fluctuation // Вопросы атомной науки и техники. 2003. Т. 4. С. 100-103.
13. Buts A. V., Churyumov G. I. An instability dynamics of a beam of finite density oscillators under conditions of isolated cyclotron resonance // Applied Radio Electronics. 2005. № 1. P. 85-91.
14. Buts A. V., Buts V. A., Churyumov G. I. Self-focusing of radiation in non-uniform mediums // Problems of Atomic Science and Technology Series Plasma Physics. 2005. V. 2. P. 146-148.
15. Буц А. В., Чурюмов Г. И. Особенности динамики заряженных частиц в пучковых усилителях и генераторах // Электромагнитные волны и электронные системы. 2005. Т. 10, № 9. С. 55-60.
16. Буц А. В., Чурюмов Г. И. Особенности динамики заряженных частиц в пучковых усилителях и генераторах // Электромагнитные волны и электронные системы. 2005. 10, № 9 С. 55-60.
17. Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса. – М.: Наука. 1988. – 368 с.
18. Хопф Э. Статистика геодезических линий на многообразиях отрицательной кривизны // УМН. 1949. Т. 4, № 2. С. 129–170.
19. Заславский Г. М., Захаров М. Ю., Сагдеев Р. З. и др. Стохастическая паутина и диффузия частиц в магнитном поле // ЖЭТФ. 1986. Т. 91, № 9. С. 500–516.
20. Заславский Г. М., Чириков Б. В. Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний // УФН. 1971. Т. 105, № 1. С. 3–40
21. Кляцкин В. И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. – М.: Наука, 1975. – 239 с.
22. Буц В. А., Куприянов А. Н., Мануйленко О. В., Толстолужский А. П. Неустойчивость и динамический хаос при слаболинейном взаимодействии волн // Известия ВУЗов. «ПНД». 1993. Т.1, № 1, № 2. С. 57-62.
23. Buts V. A., Manuilenko O. V., Stepanov K. N., Tolstoluzhskii A. P. Хаотическая динамика заряженных частиц при взаимодействии типа волна-частица и хаотическая динамика волн при слаболинейном взаимодействии типа волна-волна. //Физика плазмы Т.20, № 9, 1994, 794-801; Plasma Physics Report. 1994 V.20. P.714.
24. Buts V. A., Manuilenko O. V., Tolstoluzhskii A. P., Turkin Yu. A. International Congress on Plasma Physics combined with the 25 – th EPS conference on Controlled Fusion and Plasma Physics. Prague, Czech Rep., June 29 – July 3, 1998. Conf. proc. P. 252 – 255. (ECA V. 22C (1998). 252 – 255).
25. Weiland J. and Wilhelmsson H. Coherent non-linear interaction of waves in plasmas. Pergamon Press 1977. P. 224.
26. Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме М: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит. 1988.
27. Буц В. А. Некоторые особенности второго начала термодинамики // Успехи современной радиоэлектроники. 2008, N 7 С. 42-53.
28. Buts V. A., Kovalchuk I. K., Tarasov D. V., Tolstoluzhsky A. P. The regular and chaotic dynamics at weak-nonlinear interaction of waves // Problems of atomic science and technology. 2010. N 6. Series: Plasma Physics (16). P. 132-134.
29. Буц В. А., Ковальчук И. К., Тарасов Д. В., Толстолужский А. П. Регулярная и хаотическая динамика слабонелинейного взаимодействия волн // Электромагнитные волны и электронные системы. 2011, Т. 16, №1. С. 51-62.
30. Vakaj A. S. Interaction of high frequency and low frequency waves in a plasma // Nuclear Fusion. 1970. V. 10. P. 53-67.
31. Водяницкий А. А., Репалов Н. С. Нелинейные взаимодействия продольных волн в неизотермической плазме // ЖТФ. 1970. Т.40, № 1. С. 32.
32. Buts V. A., Kovalchuk I. K., Kornilov E. A., Tarasov D. V. Stabilization beam instability as a result of development of local instability at interaction of type a wave-wave // Physics of plasma. 2006. V. 32, № 6. P. 1–10.
33. Julian D. Cole. Perturbation Methods In Applied Mathematics. - London: Blaisdell Publishing Company, Toronto, 1968.

УДК 533.951.7: 533.951.8:
PACS numbers: 52.35.Ra; 52.35.Sb; 52.65.Kj

Ч А С Т Ь VII

К В А З И Д В У М Е Р Н Ы Е К Р У П Н О М А С Ш Т А Б Н Ы Е В И Х Р Е В Ы Е И М А Г Н И Т Н Ы Е С Т Р У К Т У Р Ы В М А Г Н И Т Н О Й Г И Д Р О Д И Н А М И К Е

В. В. Яновский,

*Институт монокристаллов, Национальная Академия Наук Украины,
пр. Ленина 60, 61001, г. Харьков, Украина
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, пл. Свободы, 4, 61022,
г. Харьков, Украина*

А. В. Тур,

*Institut de Recherche en Astrophysique et Planetologie C.N.R.S.-U.P.S., 9, avenue Colonel-
Roche 31028 Toulouse Cedex 4, France.*

М. И. Кош,

*Институт монокристаллов, Национальная Академия Наук Украины, пр. Ленина, 60,
61001, г. Харьков, Украина*

Представлен краткий обзор теоретических исследований по генерации крупномасштабных когерентных структур (КС) в плазме. В нем обсуждаются проблемы генерации крупномасштабного зонального течения, динамики двумерных вихревых структур, дипольной и монополярной структуры в гидродинамических моделях плазмы. Особое внимание уделено механизмам генерации КС в двумерных турбулентных плазменных средах. В таких средах благодаря эффекту «отрицательной вязкости» возможна генерация крупномасштабных вихревых и магнитных полей.

Используя асимптотический метод многих масштабов, найдена крупномасштабная неустойчивость, возникающая в стратифицированной проводящей среде (модель магнитной гидродинамики плазмы) при наличии мел-

комасштабной спиральности поля скорости и магнитных полей. Такая спиральность поддерживается малыми внешними источниками при малых числах Рейнольдса. Получены замкнутые уравнения, описывающие эволюцию крупномасштабных вихревых и магнитных возмущений малой амплитуды. Обнаружены два режима неустойчивости с нулевыми частотами и частотами колебаний, отличными от нуля. Установлены критерии возникновения крупномасштабной неустойчивости в такой среде.

Построена нелинейная теория возникновения крупномасштабных структур в стратифицированной проводящей среде при наличии мелкомасштабных осцилляции поля скорости и магнитных полей. На основе асимптотического метода многих масштабов для нелинейной теории получена самосогласованная система уравнений, описывающая эволюцию крупномасштабных структур поля скорости и магнитных полей. В стационарном режиме эти уравнения представляют собой гамильтонову динамическую систему в четырехмерном фазовом пространстве. Численным методом доказана возможность существования стационарных крупномасштабных хаотических полей. В частном случае, когда генерация вихревых возмущений протекает медленнее, чем магнитных возмущений, были найдены стационарные крупномасштабные магнитные структуры в виде нелинейной волны, кинка и солитона.

Исследована новая крупномасштабная неустойчивость, которая возникает во вращающейся электропроводящей жидкости с мелкомасштабной спиральной турбулентностью. Турбулентность генерируется мелкомасштабной внешней силой с малым числом Рейнольдса. Нелинейные уравнения для вихревых и магнитных возмущений получены в третьем порядке по малому числу Рейнольдса. Показано, что в результате совместного действия силы Кориолиса и мелкомасштабной внешней силы во вращающейся электропроводящей жидкости возможна крупномасштабная неустойчивость. Получены инкременты крупномасштабной неустойчивости, соответствующие генерации как вихревых, так и магнитных возмущений. Такой тип неустойчивости классифицируется как гидродинамический и магнитогидродинамический альфа-эффект. Изучены стационарные режимы нелинейных уравнений магнито-вихревого динамо. В пределе слабопроводящей жидкости найдены стационарные решения в виде спиральных кинков. В пределе высокой проводимости жидкости получены стационарные решения в виде нелинейных периодических волн и кинков.

Рассмотрена новая крупномасштабная неустойчивость, которая возникает в наклонно вращающейся электропроводящей жидкости с мелкомасштабной внешней силой, имеющей нулевую спиральность. С помощью метода многомасштабных асимптотических разложений получены нелинейные уравнения для вихревых и магнитных возмущений в третьем порядке по числу Рейнольдса. Исследована линейная стадия магнито-вихревого динамо, возникающего в результате неустойчивостей типа гидродинамического и магнитогидродинамического α -эффектов. Численными методами найдены стационарные решения уравнений нелинейного магнито-вихревого динамо в виде локализованных хаотических структур.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время общепризнана важность процессов генерации крупномасштабных когерентных структур (КС) в плазме. Под крупномасштабными понимаются структуры, которые возникают либо под воздействием силы с намного меньшим масштабом, либо в турбулентности с характерным масштабом, много меньшим, чем масштаб структур. Если такие когерентные структуры возникают в мелкомасштабной турбулентности, то они играют ключевую роль в процессах переноса. При этом фундаментальную роль в процессах регулирования мелкомасштабной турбулентности и аномального переноса плазмы в токамаках играют зональные течения и геодезические акустические моды. Их спонтанное возникновение наблюдается экспериментально во множестве современных токамаков и стеллараторов в омических и L-режимах и сопровождается уменьшением интенсивности мелкомасштабной турбулентности плазмы [1] - [5] (см. рис. 1.1).

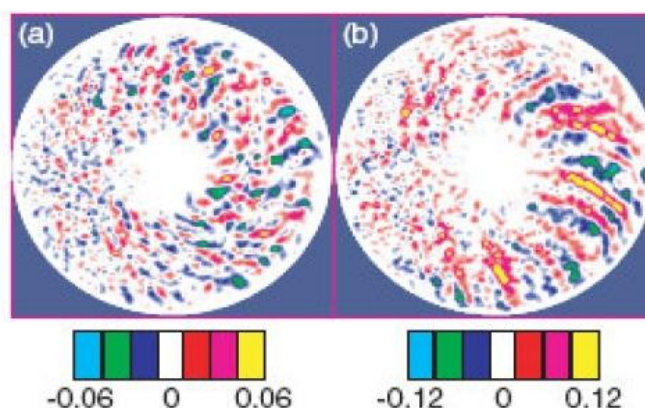


Рис. 1.1. Радиальный размер турбулентных вихрей, показанный в цветном контуре флуктуаций плотности, уменьшается из-за случайного сдвига в скрещенных полях $\vec{E} \times \vec{B}$ саморегулируемыми зональными потоками. (а) — Результат giroкинетического моделирования с зональным потоком, (б) — с подавлением зонального потока

Было замечено, что зональный поток имеет шировые свойства, вследствие которых происходит эффект уменьшения радиального транспорта за счет подавления турбулентности, тем самым улучшая удержание тепла в плазме, необходимого для достижения условий термоядерного синтеза.

К спонтанной генерации зональных течений в токамаках может приводить модуляционная неустойчивость волн, которая раскачивается в результате первичной неустойчивости плазмы, обусловленной неоднородностями плотности, температуры или другими факторами [6] – [18]. Теория

генерации зональных течений модуляционной неустойчивостью дрейфовых волн была развита в работах [6, 12]. В них изучалось взаимодействие коротковолновых дрейфовых волн с длинноволновыми конвективными ячейками.

В работах [6-18] рассматривались процессы взаимодействия конечного числа волн — волны накачки, зонального течения, одного или двух сателлитов волны накачки, а также второй гармоники зонального течения. В качестве волны накачки рассматривались дрейфовые волны [11, 21] на основе хорошо известной модели Хасегавы – Мима [22]:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta\psi - a^2\psi) + \beta \frac{\partial\psi}{\partial x} + J(\psi, \Delta\psi) = 0,$$

здесь ψ — функция тока, $J(\psi, \Delta\psi)$ - якобиан, а параметры a , β зависят от наблюдаемой системы. В отсутствие диссипации 2D-модель (1.1) представляет собой уравнение Чарни для нелинейных волн Россби в физике атмосферы [23] с функцией тока ψ и уравнение Хасегавы – Мима для дрейфовой волновой турбулентности в физике плазмы [22] с электростатическим потенциалом ϕ . Параметр a для атмосферы представляет собой обратный радиус Россби, а для замагниченной плазмы эта длина является ионным ларморовским радиусом.

Теория, связанная с вихрями в плазме, существенно продвинулась после работ, опубликованных Хасегавой и соавторами [24, 25] и Петвиашвили [26]. Уравнение Хасегавы – Мима, описывающее нелинейные возмущения в неоднородной замагниченной плазме, эквивалентно уравнению Чарни. Эта аналогия обусловлена сходством между силой Кориолиса во вращающейся жидкости и силой Лоренца в плазме. Кроме того эта аналогия полезна для обнаружения дрейфово-электростатических вихрей типа Ларичева-Резника в плазме [27, 28] или дипольной вихревой структуры: циклон-антициклон. Обобщенные уравнения Чарни и Хасегавы – Мима предполагают появление одиночной монополярной вихревой структуры (см. рис. 1.2).

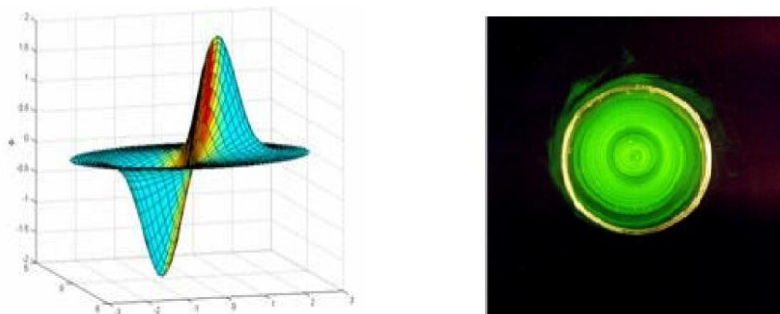


Рис. 1.2. Дипольная и монополярная вихревая структура

Монопольный вихрь экспоненциально локализован и обладает круговой симметрией. Вихрь имеет пространственную структуру с завихренным движением только одной ориентации и характеризуется одним набором замкнутых концентрических линий тока. В отличие от дипольного вихря монопольный вихрь обладает только угловым моментом.

На основе анализа колмогоровских спектров слабой дрейфовой турбулентности в рамках модели Хасегавы–Мима, В. Е. Захаровым с соавторами [29] было показано, что доминирующим является взаимодействие дрейфовых колебаний с крупномасштабным зональным течением, а не с дрейфовыми колебаниями близких масштабов. Разница пространственных масштабов турбулентности (мелкие масштабы) и зонального течения (крупный масштаб) позволяет использовать при исследовании их взаимодействия метод многомасштабных разложений. Ещё в работе А. А. Веденова и Л. И. Рудакова [30] мелкомасштабная турбулентность описывается волновым кинетическим уравнением, в котором учитывается влияние зонального течения, и одновременно в гидродинамических уравнениях, описывающих зональное течение, учитываются усредненные по мелким масштабам нелинейные эффекты, обусловленные турбулентностью. Такой подход применялся в работах [31–33], где исследовались неустойчивости, приводящие к генерации зональных течений дрейфовой турбулентностью. Теория генерации крупномасштабных зональных возмущений дрейфово-альфвеновской турбулентностью была развита в работах [34, 35]. В работах [36, 37] была представлена аналитическая теория генерации зональных течений дрейфовыми волнами, обусловленной эффектом отрицательной турбулентной вязкости. Энергия мелкомасштабных движений предполагалась постоянной (например, за счет генерации мелкомасштабных движений внешним источником) и при вычислении влияния мелкомасштабной турбулентности на зональные течения использовался подход, аналогичный приближению турбулентного кинематического динамо [38, 39], т.е. в рамках квазилинейного приближения. Теория генерации крупномасштабных вихревых структур в режиме сильной дрейфовой турбулентности была развита в работе [40]. Вопрос об устойчивости дрейфовой волны в плазме, где существенна ионная вязкость, рассматривался в работе [41]. Там же было показано, что если амплитуда волны превышает некоторое пороговое значение, то в плазме нарастают крупномасштабные возмущения поля. Этот эффект аналогичен эффекту отрицательной вязкости в гидродинамике [42]. На нелинейной стадии неустойчивости в [41] были найдены новые типы солитоноподобных крупномасштабных структур электрического поля и завихренности – диссипативные солитоны. Концепция отрицательной магнитной вязкости для проводящей жидкости была введена по аналогии с отрицательной кинематической вязкостью. В работах [43, 44] было показано, что в плазме токамаков, благодаря эффекту отрицательной магнитной вязкости, мелкомасштабная турбулентность может вызывать усиление крупномасштабных возмущений магнитного поля. Этот механизм использовался для объяснения взрывных магнитных явлений, таких как срывы («disruptions») в токамаках и солнечные вспышки.

В двумерной магнитогидродинамике возникают эффекты отрицательной кинематической вязкости и отрицательной магнитной вязкости, приводящие к генерации крупномасштабных движений жидкости и крупномасштабного магнитного поля. Анизотропные мелкомасштабные поля, которые являются МГД аналогами колмогоровского течения в обычной жидкости, приводят к генерации крупномасштабных полей, если амплитуды мелкомасштабных полей превышают критические значения, определяемые кинематической и магнитной вязкостью проводящей жидкости [45].

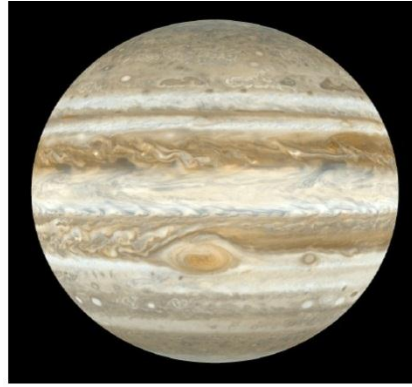


Рис. 1.3. Крупномасштабные зональные течения на Юпитере

В астрофизических условиях крупномасштабные зональные потоки хорошо видны на плазменном гиганте нашей солнечной системы – Юпитере (см. рис. 1.3).

Крупномасштабные зональные потоки и магнитные поля также наблюдаются в астрофизических симуляциях турбулентности аккреционного диска, обусловленных магнитовращательной неустойчивостью [46, 47]. Однако в настоящее время ещё нет возможности наблюдать зональную структуру аккреционных дисков, но их динамика может зависеть от поведения зональных полей.

Анализ экспериментальных данных и теоретических гипотез [48, 49] указывает, что турбулентные движения в межзвёздной плазме демонстрируют механизм обратной связи между мелкомасштабной турбулентностью и образованием крупномасштабных упорядоченных когерентных структур. Естественным объяснением такого спонтанного формирования крупномасштабных КС является проявление крупномасштабной неустойчивости в полностью развитой мелкомасштабной турбулентности. Генерационные свойства мелкомасштабной турбулентности изначально были установлены для турбулентности с ненулевой средней спиральностью $\overline{\mathbf{v} \text{rot} \mathbf{v}} \neq 0$. Именно в спиральной турбулентности был открыт α -эффект в электропроводящей жидкости или магнитной гидродинамике (МГД) [50]. Там же было дано строгое физическое и математическое обоснование связи перекрёстной магнитной спиральности $\vec{\mathbf{E}} = \overline{\mathbf{v} \times \vec{\mathbf{H}}}$ или турбулентной э.д.с. с топологическим инвариантом $J_s = \overline{\mathbf{v} \text{rot} \mathbf{v}}$, где было показано, что генерация среднего (крупномасштабного) поля происходит под действием турбулентной э.д.с., пропорциональной среднему магнитному полю $\vec{\mathbf{E}} = \alpha \vec{\mathbf{H}}$. Коэффициент α пропор-

ционален средней спиральности поля скорости $\alpha \sim \overline{\vec{v} \text{rot} \vec{v}}$ и получил в литературе название α -эффекта. На основе этого эффекта были построены различные теории, объясняющие происхождение магнитных полей у различных астрофизических объектов: планет и Солнца [38], [39], [51]-[54], галактик [55] и т.п. В недавнем обзоре [56] подробно обсуждаются вопросы по лабораторному моделированию α -эффекта.

Следует отметить, что генерационные свойства спиральной турбулентности были открыты не только в магнитной гидродинамике или электропроводящих средах, но и в обычной гидродинамике. Впервые гипотеза о том, что спиральная турбулентность способна генерировать крупные вихри, была высказана в работе [57]. Гипотеза основывалась на формальном сходстве уравнений индукции магнитного поля $\dot{\vec{H}}$ и уравнения для завихренности $\dot{\vec{\omega}} = \text{rot} \vec{v}$. Однако в работе [58] приводилось доказательство, что в несжимаемой турбулентной жидкости α -эффект не возможен в силу определённой симметрии тензора напряжений Рейнольдса в осреднённом уравнении Навье–Стокса. Таким образом, для появления гидродинамического (ГД) α -эффекта одной спиральности турбулентности не достаточно, нужны другие факторы нарушения симметрии турбулентного течения. Как показано в работе [59], таким фактором является сжимаемость среды, а в работе [60] – градиент температуры в поле тяжести. Эффект генерации крупномасштабных вихревых структур (КВС) спиральной турбулентностью получил название вихревого динамо. Механизмы вихревого динамо разрабатывались применительно к турбулентной атмосфере и океану. Большое развитие получила теория конвективного вихревого динамо [60]-[64], где спиральная турбулентность приводила к крупномасштабной неустойчивости, вследствие которой образуется одна конвективная ячейка, интерпретируемая как огромный вихрь типа тропического циклона. Известно также большое количество работ по генерации КВС с учетом эффектов вращения [65]-[69]. Генерация КВС и крупномасштабных магнитных полей в сжимаемой МГД мелкомасштабной спиральной турбулентностью рассматривалась в работе [70]. Сжимаемость среды и спиральная турбулентность обеспечивают эффективное действие механизма положительной обратной связи между мелкомасштабной фоновой турбулентностью и крупномасштабными упорядоченными структурами. Такая неустойчивость связана с энергией, которая выведена из энергонесущих масштабов мелкомасштабной турбулентности в крупномасштабные когерентные структуры. В перечисленных выше работах, как правило, турбулентность считалась спиральной и методом функционального усреднения (или среднего поля) получались уравнения для крупномасштабных возмущений. Метод функционального усреднения имеет определённые недостатки. Так, в явном виде не ясно, в каких порядках теории возмущений по малому числу Рейнольдса находятся уравнения для возмущений и крупномасштабных движений. Метод многомасштабного разложения свободен от этих недостатков. На основе этого метода в работе [71] был обна-

ружен принципиально новый α -эффект, где турбулентное движение жидкости моделируется внешней мелкомасштабной силой \vec{F}_0 . Модель внешней мелкомасштабной силы была выбрана с нарушением четности (при нулевой спиральности $\vec{F}_0 \text{rot} \vec{F}_0 = 0$). Эффект генерации крупномасштабных возмущений такой силой получил название анизотропного кинетического альфа-эффекта, или АКА-эффекта [71].

Далее мы используем этот метод для получения уравнений для крупномасштабных возмущений в линейной и нелинейной теории в стратифицированных, во вращающихся электропроводящих средах.

1. ГЕНЕРАЦИЯ ВИХРЕВЫХ И МАГНИТНЫХ СТРУКТУР В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ МЕЛКОМАСШТАБНОЙ СПИРАЛЬНОСТЬЮ

Способность мелкомасштабной спиральной турбулентности генерировать крупномасштабные магнитные поля известна достаточно давно (см., например, [50]). Это явление называют α -эффектом. С его помощью объясняется возникновение крупномасштабных магнитных полей ряда космических объектов (см. [51], [53]). Генерация крупномасштабных полей, вызванная конвекцией в электропроводящей среде, рассматривалась и для описания недр планет в работах [72]-[75]. Вопросы конвективной неустойчивости жидкости с температурной стратификацией детально изложены, например, в книгах [76]-[78] и работах [79], [80]. В них основное внимание уделено устойчивости движения жидкости под воздействием внешних факторов: вращательного движения, внешнего однородного магнитного поля и т.п. В результате развития неустойчивости в жидкости образуются когерентные структуры - конвективные ячейки, на нелинейной стадии возникают отбор формы ячеек и даже хаотичность ячеек.

Используя метод многих масштабов, в этом разделе мы рассмотрим генерацию крупномасштабной конвективной неустойчивости, вызванной внешней мелкомасштабной спиральной силой в электропроводящей несжимаемой среде. Генерация таких структур в электропроводящей среде представляет большой интерес для многих астрофизических и лабораторных исследований. В качестве примера можно упомянуть о появлении гранул на поверхности Солнца и геомагнитное динамо. Получены условия, при которых возникает крупномасштабная неустойчивость и найдены инкременты неустойчивости. Доказано существование двух типов неустойчивых мод с частотой, равной нулю, и с отличной от нуля частотой колебаний.

1.1. Основные уравнения и формулировка проблемы

Рассмотрим проводящую среду в постоянном гравитационном поле при постоянном градиенте температур вдоль направления оси z . Для уравнений движения несжимаемой электропроводящей среды в постоянном градиенте температуры будем использовать приближение Буссинеска

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P + \nu \Delta \vec{v} + \frac{1}{4\pi\rho_0} [\text{rot} \vec{B}, \vec{B}] + g\beta T \vec{e} + \vec{F}_0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) T = \chi \Delta T - v_z A, \quad (1.2)$$

где \vec{e} – единичный вектор в направлении оси z , β – коэффициент теплового расширения и $A = \frac{dT}{dz} > 0$ – постоянный градиент температуры.

Плотность среды $\rho_0 = \text{const}$, χ – коэффициент теплопроводности среды. Уравнения (1.1), (1.2) дополним уравнением индукции магнитного поля \vec{B} и условиями соленоидальности полей \vec{v} и \vec{B}

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot}[\vec{v}, \vec{B}] + \nu_m \Delta \vec{B}, \quad (1.3)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0, \quad \text{div} \vec{v} = 0. \quad (1.4)$$

Здесь $\nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$ – коэффициент магнитной вязкости, σ – коэффициент электропроводности среды, c – скорость света. В уравнение (1.1), для моделирования мелкомасштабной спиральности, включена внешняя сила, обладающая спиральными свойствами

$$\text{div} \vec{F}_0 = 0, \quad \vec{F}_0 \cdot \text{rot} \vec{F}_0 \neq 0, \quad \vec{F}_0 = f_0 \vec{F}_0 \left(\frac{x}{\lambda_0}, \frac{t}{t_0} \right)$$

где λ_0 – характерный масштаб, t_0 – характерное время, f_0 – амплитуда силы. Предположим, что такая сила создает в среде мелкомасштабные спиральные флуктуации поля скорости $\vec{v}_0 \cdot \text{rot} \vec{v}_0 \neq 0$ с малым числом

Рейнольдса $R = \frac{v_0 t_0}{\lambda_0} \ll 1$. Среду, для простоты, будем предполагать без-

граничной. Кроме этого пренебрежем влиянием внешнего магнитного

поля и вращения. В такой постановке проблема представляет интерес для динамо теории [51]-[55]. Следует отметить, что мелкомасштабное магнитное поле \vec{B}_0 в линейном приближении не может возбуждаться внешней спиральной мелкомасштабной силой \vec{F}_0 , как следует из уравнения (1.3). Поэтому далее рассмотрим два возможных сценария развития крупномасштабной неустойчивости. Первый, когда мелкомасштабное магнитное поле \vec{B}_0 существует изначально, и второй, когда мелкомасштабное магнитное поле \vec{B}_0 создается внешним источником \vec{F}_B , обладающим спиральными свойствами:

$$\vec{F}_B \cdot \text{rot} \vec{F}_B \neq 0.$$

Необходимость такого источника связана с наличием обычно в реальных системах некоторого стационарного уровня мелкомасштабных осцилляций магнитного поля. Для его поддержания на стационарном уровне в диссипативном уравнении (1.3) и нужен такой источник. В реальных системах уровень этих осцилляций магнитного поля поддерживается внешней накачкой или некоторой неустойчивостью. Примером внешней накачки может служить накачка циркулярно-поляризованной электромагнитной волной. Такая возможность широко обсуждалась в связи с проблемой «токового удержания» и состоит в генерации тока при инжекции спиральности циркулярно-поляризованной электромагнитной волной [81]. Как показано в [82], спиральность мелкомасштабного магнитного поля может вызвать генерацию магнитного поля. Аналогично, такая инжекция спиральности магнитного поля может возникать и в космических условиях, например под влиянием мощного излучения пульсаров. В качестве астрофизического примера источника спиральности, вызванного неустойчивостью, можно привести гидродинамическую неустойчивость во вращающейся среде. Хорошим примером может служить магнитовращательная неустойчивость [83], которая вызвана дифференциальным вращением среды космического объекта. Важно отметить, что в разных физических ситуациях могут существовать различные неуниверсальные механизмы, поддерживающие некоторый уровень мелкомасштабных спиральных осцилляций. Универсальную теорию можно построить, абстрагируясь от механизма их возникновения и постулируя наличие такого мелкомасштабного спирального магнитного поля. Для его поддержания и вводится источник \vec{F}_B . Естественно, что возбуждаемое таким источником магнитное поле также обладает спиральностью

$$\vec{B}_0 \cdot \text{rot} \vec{B}_0 \neq 0.$$

Удобно выбрать характерный масштаб источника λ_0^B и характерное время t_0^B совпадающими с характерными масштабами λ_0 и t_0 соответственно. Другими словами, мелкомасштабная турбулентность и мелкомасштабные магнитные поля имеют близкие характерные масштабы. Однако характерные амплитуды этих источников будем предполагать разными :

$$\vec{F}_B = b_0 \vec{F}_B \left(\frac{x}{\lambda_0}, \frac{t}{t_0} \right), \quad b_0 \neq f_0.$$

Теперь перейдем в уравнениях (1.1)-(1.4) к безразмерным переменным, для удобства обозначения для которых пусть наследуют обозначения размерных переменных :

$$\begin{aligned} \vec{x} &\rightarrow \frac{\vec{x}}{\lambda_0}, \quad t \rightarrow \frac{t}{t_0}, \quad \vec{v} \rightarrow \frac{\vec{v}}{v_0}, \quad \vec{F}_0 \rightarrow \frac{\vec{F}_0}{f_0}, \quad P \rightarrow \frac{P}{\rho_0 P_0}, \quad \vec{B} \rightarrow \frac{\vec{B}}{B_0}, \\ t_0 &= \frac{\lambda_0^2}{\nu}, \quad P_0 = \frac{\nu_0 \nu}{\lambda_0}, \quad f_0 = \frac{\nu_0 \nu}{\lambda_0^2}, \quad T \rightarrow \frac{T}{A \lambda_0}. \end{aligned}$$

В этих переменных уравнения (1.1)-(1.4) принимают вид

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + R(\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\nabla P + \Delta \vec{v} + \tilde{Q} R[\text{rot} \vec{B}, \vec{B}] + \tilde{R} a T \vec{e} + \vec{F}_0, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - Pr^{-1} \Delta T = -R(\vec{v} \nabla) T - v_z, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - P_m^{-1} \Delta \vec{B} = R \text{rot}[\vec{v}, \vec{B}] + \vec{F}_B, \quad (1.7)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0, \quad \text{div} \vec{v} = 0. \quad (1.8)$$

Также в уравнение (1.7) был введен источник мелкомасштабных магнитных полей. В систему уравнений входят пять безразмерных параметров, значения которых и определяют характер эволюции, входящих в нее полей. Здесь введены обозначения $\tilde{R} a = \frac{R a}{Pr}$; $R a = \frac{g \beta \lambda_0^4 A}{\nu \chi}$ -

число Рэлея, $Pr = \frac{\nu}{\chi}$ - число Прандтля; $\tilde{Q} = \frac{Q}{Pm}$, $Q = \frac{\sigma B_0^2 \lambda_0^2}{c^2 \rho_0 \nu}$ - число

Чандрасекара, $Pm = \frac{\nu}{\nu_m} = \frac{4\pi\sigma}{c^2} \nu$ - магнитное число Прандтля. По по-

становке задачи система уравнений (1.5)-(1.8) содержит в качестве малого параметра число Рейнольдса $R = \frac{v_0 t_0}{\lambda_0} \ll 1$ мелкомасштабных осцил-

ляций. Малость остальных параметров не предполагается. Мелкомасштабная сила и внешний источник вызывают мелкомасштабные и высокочастотные флуктуации полей на фоне равновесного состояния. Средние значения таких флуктуаций нулевые. Однако малое нелинейное взаимодействие в некоторых порядках теории возмущения порождает вклады, не обращающиеся в нуль при усреднении. Появление таких секулярных вкладов является препятствием для продолжения асимптотического разложения. Поэтому зануление этих секулярных вкладов приводит к условиям применимости асимптотического метода. В методе многомасштабных разложений эти условия совпадают с уравнениями эволюции крупномасштабных возмущений. Собственно, изучение возникновения, нарастания крупномасштабных структур на фоне мелкомасштабных флуктуаций и является основной целью теории.

1.2. Многомасштабное асимптотическое разложение

Как отмечалось выше, многомасштабный метод разложения позволяет получать уравнения для крупномасштабных возмущений, исключая секулярные вклады в асимптотических уравнениях. Типичной чертой этого метода является необходимость разложения иногда до очень высокого порядка малости для извлечения крупномасштабных уравнений даже в главном порядке. Это придает определенную громоздкость этому методу. Поэтому по возможности мы попытаемся избегать детальных выводов некоторых уравнений, пропуская громоздкие технические преобразования уравнений.

Следуя работе [84], построим многомасштабное асимптотическое разложение. Для этого введем мелкомасштабные $x_0 = (\vec{x}_0, t_0)$ и крупномасштабные переменные $X = (\vec{X}, T)$ и заменим пространственные и временные производным в уравнениях (1.5)-(1.8) в соответствии с наличием мелкомасштабных и крупномасштабных переменных

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \rightarrow \partial_i + R^2 \nabla_i, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \partial_t + R^4 \partial_T.$$

Здесь ∂_i и ∂_t обозначают производные по «быстрым» переменным $x_0 = (\vec{x}_0, t_0)$, а ∇_i и ∂_T – производные по «медленным» переменным

$X = (\vec{X}, T)$. Далее, разлагая поля \vec{v} , T и \vec{B} в ряд по малому параметру R , получим

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{v}_0(x_0) + R(\vec{W}(X) + \vec{v}_1) + R^2\vec{v}_2 + R^3\vec{v}_3 + R^4\vec{v}_4 + R^5\vec{v}_5 + \dots$$

$$T(\vec{x}, t) = T_0(x_0) + R(\Theta_1(X) + T_1) + R^2T_2 + R^3T_3 + R^4T_4 + R^5T_5 + \dots$$

$$\vec{B}_0(\vec{x}, t) = \vec{B}_0(x_0) + R(\vec{H}_1(X) + \vec{B}_1) + R^2\vec{B}_2 + R^3\vec{B}_3 + R^4\vec{B}_4 + R^5\vec{B}_5 + \dots,$$

где $\vec{W}(X)$, $\Theta_1(X)$, $\vec{H}_1(X)$ - скорость, температура и вектор магнитной индукции зависят только от крупномасштабных переменных. Давление $P(\vec{x}, t)$ представим в виде следующего разложения:

$$P(\vec{x}, t) = \frac{1}{R}P_{-1}(X) + P_0(x_0) + RP_1 + R^2P_2 + R^3(\bar{P}_3(X) + P_3) + R^4P_4 + R^5P_5 + \dots$$

Подставим эти разложения в систему уравнений (1.5)-(1.8). Собирая вклады при одинаковых степенях малого параметра и требуя их равенства нулю, получим исходную асимптотическую систему уравнений. Приведем алгебраическую структуру полученных уравнений в различных порядках по степеням R . В порядке R^{-1} получим только одно уравнение

$$\partial_i P_{-1} = 0.$$

Это уравнение выполняется автоматически из-за зависимости $P_{-1} = P_{-1}(X)$ только от медленных переменных. В нулевом порядке по R система уравнений имеет вид

$$\partial_i v_0^i - \partial_k^2 v_0^i = -\partial_i P_0 + e_i \tilde{R} a T_0 + F_0^i, \quad (1.9)$$

$$\partial_i B_0^i - P m^{-1} \partial_k^2 B_0^i = F_B^i, \quad (1.10)$$

$$\partial_i T_0 - P r^{-1} \partial_k^2 T_0 = -v_0^z, \quad (1.11)$$

$$\partial_i v_0^i = \partial_i B_0^i = 0. \quad (1.12)$$

Из этой системы уравнений следует, что величины v_0 , T_0 , P_0 , B_0 зависят только от быстрых переменных x_0 в результате действия внешней спиральной силы и источника \vec{F}_B . В первом порядке R получим следующую систему уравнений:

$$\partial_t v_1^i - \partial_k^2 v_1^i + v_0^k \partial_k v_0^i = -\partial_i P_1 - \nabla_i P_{-1} + e_i \tilde{R}a(\Theta_1 + T_1) + \tilde{Q} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} \partial_m B_0^l B_0^k, \quad (1.13)$$

$$\partial_i B_1^i - Pm^{-1} \partial_k^2 B_1^i = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{knp} \partial_j v_0^n B_0^p \quad (1.14)$$

$$\partial_t T_1 - Pr^{-1} \partial_k^2 T_1 = -v_0^k \partial_k T_0 - e_k (W_1^k + v_1^k), \quad (1.15)$$

$$\partial_i v_1^i = 0, \quad \partial_i B_1^i = 0. \quad (1.16)$$

Усредним уравнения (1.13)-(1.16) по быстрым переменным и получим секулярные уравнения вида:

$$\nabla_i P_{-1} = e_i \tilde{R}a \Theta_i \quad (1.17)$$

$$W_1^z = 0 \quad (1.18)$$

Осциллирующая часть в приближении R^1 имеет вид

$$\partial_t v_1^i - \partial_k^2 v_1^i + v_0^k \partial_k v_0^i = -\partial_i P_1 + e_i \tilde{R}a T_1 + \tilde{Q} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} \partial_m B_0^l B_0^k,$$

$$\partial_i B_1^i - Pm^{-1} \partial_k^2 B_1^i = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{knp} \partial_j v_0^n B_0^p,$$

$$\partial_t T_1 - Pr^{-1} \partial_k^2 T_1 = -v_0^k \partial_k T_0 - e_k v_1^k,$$

$$\partial_i v_1^i = 0, \quad \partial_i B_1^i = 0.$$

Следовательно, поля v_1 , T_1 , P_1 , B_1 зависят только от быстрых переменных x_0 . Следующая система уравнений появляется в порядке R^2 :

$$\partial_t v_2^i + \partial_k (v_0^k (W_1^i + v_1^i) + (W_1^k + v_1^k) v_0^i) - \partial_k^2 v_2^i = -\partial_i P_2 +$$

$$+ e_i \tilde{R}a T_2 + \tilde{Q} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jml} (\partial_m B_0^l (H_1^k + B_1^k) + \partial_m (H_1^l + B_1^l) B_0^k),$$

$$\partial_t B_2^i - Pm^{-1} \partial_k^2 B_2^i = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{knp} (\partial_j v_0^n (H_1^p + B_1^p) + \partial_j (W_1^n + v_1^n) B_0^p),$$

$$\partial_t T_2 - Pr^{-1} \partial_k^2 T_2 = -\partial_k ((W_1^k + v_1^k) T_0 + v_0^k (\Theta_1 + T_1)) - v_2^z,$$

$$\partial_i v_2^i = \partial_i B_2^i = 0.$$

Легко увидеть, что все члены в этих уравнениях после усреднения по быстрым переменным обращаются в ноль. Секулярные члены во втором порядке по R отсутствуют, но величины $v_2 = v_2(x_0, X)$, $T_2 = T_2(x_0, X)$, $P_2 = P_2(x_0, X)$, $B_2 = B_2(x_0, X)$ зависят как от быстрых x_0 ,

так и медленных переменных X . Перейдем теперь к уравнениям в третьем порядке по R :

$$\begin{aligned}
& \partial_i v_3^i + v_0^k \partial_k v_2^i + v_0^k \nabla_k v_0^i + (W_1^k + v_1^k) \partial_k (W_1^i + v_1^i) + v_2^k \partial_k v_0^i - \\
& - \partial_k^2 v_3^i - 2 \partial_k \nabla_k (W_1^i + v_1^i) = -\partial_i P_3 - \nabla_i (\bar{P} + P_1) + e_i \tilde{R} a T_3 + \\
& + \tilde{Q} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jml} \left((\partial_m B_0^2) B_2^k + (\partial_m (H_1^l + B_1^l)) (H_1^k + B_1^k) + (\partial_m B_2^l) B_0^k + (\nabla_m B_0^l) B_0^k \right), \\
& \partial_i B_3^i - P m^{-1} \partial_k^2 B_3^i - P m^{-1} 2 \partial_k \nabla_k (H_1 + B_1) = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{knp} \left(\partial_j v_0^n B_2^p + \right. \\
& \left. + \partial_j (W_1^n + v_1^n) (H_1^p + B_1^p) + \partial_j v_2^n B_0^p + \nabla_j v_0^n B_0^p \right), \\
& \partial_i T_3 - P r^{-1} \partial_k^2 T_3 - P r^{-1} 2 \partial_k \nabla_k (\Theta_1 + T_1) = v_0^k \partial_k T_2 - \\
& - (W_1^k + v_1^k) \partial_k (\Theta_1 + T_1) - v_0^k \nabla_k T_0 - v_2^k \partial_k T_0 - v_3^z, \\
& \partial_i v_3^i + \nabla_i W_1^i = 0, \quad \partial_i v_3^i + \nabla_i H_1^i = 0.
\end{aligned}$$

Усреднение этих уравнений по быстрым переменным приводит к секулярным уравнениям:

$$\nabla_i W_1^i = 0, \quad \nabla_i H_1^i = 0. \quad (1.19)$$

Величины v_3 , B_3 , T_3 , P_3 остаются быстро осциллирующими, но зависят и от медленных переменных X . Перейдем теперь к четвертому порядку по малому параметру R . Уравнения в этом порядке имеют вид

$$\begin{aligned}
& \partial_i v_4^i + v_0^k \partial_k v_3^i + v_0^k \nabla_k (W_1^i + v_1^i) + (W_1^k + v_1^k) \partial_k v_2^i + \\
& + (W_1^k + v_1^k) \nabla_k v_0^i + v_2^k \partial_k (W_1^i + v_1^i) + v_3^k \partial_k v_0^i - 2 \partial_k \nabla_k v_2^i - \\
& - \partial_k^2 v_4^i = -\partial_i P_4 - \nabla_i P_2 + e_i \tilde{R} a T_4 + \tilde{Q} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} \left((\partial_m B_0^l) B_3^k + \right. \\
& \left. + (\partial_m (H_1^l + B_1^l)) B_2^k + (\partial_m B_2^l) (H_1^k + B_1^k) + (\partial_m B_3^l) B_0^k + \right. \\
& \left. + (\nabla_m B_0^l) (H_1^k + B_1^k) + (\nabla_m (H_1^l + B_1^l)) B_0^k \right), \\
& \partial_i B_4^i - P m^{-1} \partial_k^2 B_4^i - P m^{-1} 2 \partial_k \nabla_k B_2^i = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{knp} \left(\partial_j v_0^n B_3^p + \right. \\
& \left. + \partial_j (W_1^n + v_1^n) B_2^p + \partial_j v_2^n (H_1^p + B_1^p) + \partial_j v_3^n B_0^p + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\nabla v_0^n (H_1^p + B_1^p) + \nabla_j (W_1^n + v_1^n) B_0^p, \\
 \partial_i T_4 - Pr^{-1} \partial_k^2 T_4 - Pr^{-1} 2\partial_i \nabla_k T_2 & = v_0^k \partial_k T_3 - (W_1^k + v_1^k) \partial_k T_2 - \\
 -v_0^k \nabla_k (\Theta_1 + T_1) - (W_1^k + v_1^k) \nabla_k T_0 & - v_2^k \partial_k (\Theta_1 + T_1) - v_3^k \partial_k T_0 - v_4^z,
 \end{aligned}$$

$$\partial_i v_4^i + \nabla_i v_2^i = 0; \quad \partial_i B_4^i + \nabla_i B_2^i = 0.$$

Легко увидеть, что эти уравнения не содержат секулярных членов. Поэтому перейдем к уравнениям в пятом приближении по R :

$$\begin{aligned}
 & \partial_i v_5^i + \partial_T W_1^i + v_0^k \partial_k v_4^i + v_0^k \nabla_k v_2^i + (W_1^k + v_1^k) \partial_k v_3^i + \\
 & + (W_1^k + v_1^k) \nabla_k (W_1^i + v_1^i) + v_2^k \partial_k v_2^i + v_2^k \nabla_k v_0^i + v_3^k \partial_k (W_1^i + v_1^i) + \\
 & + v_4^k \partial_k v_0^i - \partial_k^2 v_5^i - 2\partial_k \nabla_k v_3^i - \Delta W_1^i = -\partial_i P_5 - \nabla_i P_3 + \\
 & + e_i \tilde{R} a T_5 + \tilde{Q} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jml} \left((\partial_m B_0^l) B_4^k + (\partial_m (H_1^l + B_1^l)) B_3^k + \right. \\
 & + (\partial_m B_2^l) B_2^k + (\partial_m B_3^l) (H_1^k + B_1^k) + (\partial_m B_4^l) B_0^k + \\
 & \left. + (\nabla_m (H_1^l + B_1^l)) (H_1^k + B_1^k) + (\nabla_m B_2^l) B_0^k + (\nabla_m B_0^l) B_2^k \right), \quad (1.20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \partial_i B_5^i + \partial_T H_1^i - Pm^{-1} \partial_k^2 B_5^i - Pm^{-1} 2\partial_k \nabla_k B_3^i - Pm^{-1} \Delta H_1^i = \\
 & = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{knp} \left(\partial_j (v_0^n B_4^p) + \partial_j ((W_1^n + v_1^n) B_3^p) + \partial_j (v_2^n B_2^p) + \right. \quad (1.21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \partial_j (v_3^n (H_1^p + B_1^p)) + \partial_j (v_0^n B_2^p) \\
 & + \nabla_j ((W_1^n + v_1^n) (H_1^p + B_1^p)) + \nabla_j (v_2^n B_0^p) \\
 \partial_i T_5 + \partial_T \Theta_1 - Pr^{-1} \partial_k^2 T_5 - Pr^{-1} 2\partial_k \nabla_k T_3 - Pr^{-1} \Delta \Theta_1 & = \\
 = -v_0^k \partial_k T_4 - (W_1^k + v_1^k) \partial_k T_3 - v_0^k \nabla_k T_2 - (W_1^k + v_1^k) \nabla_k (\Theta_1 + T_1) - \\
 -v_2^k \partial_k T_2 - v_2^k \nabla_k T_0 - v_3^k \partial_k (\Theta_1 + T_1) - v_4^k \partial_k T_0 - v_5^z, \quad (1.22)
 \end{aligned}$$

$$\partial_i v_5^i + \nabla_i v_3^i; \quad \partial_i B_5^i + \nabla_i B_3^i = 0. \quad (1.23)$$

После усреднения системы уравнений (1.20)-(1.23) по быстрым переменным, получим основную систему секулярных уравнений, для описания эволюции крупномасштабных возмущений:

$$\begin{aligned} \partial_T W_1^i + W_1^k \nabla_k W_1^i - \Delta W_1^i = -\nabla_i \bar{P}_3 - \nabla_k (\overline{v_0^k v_2^i} + \overline{v_0^i v_2^k}) + \\ + \tilde{Q} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jml} \left((\nabla_m H_1^l) H_1^k + \overline{(\nabla_m B_0^l) B_2^k} + \overline{(\nabla_m B_2^l) B_0^k} \right), \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\partial_T H_1^i - Pm^{-1} \Delta H_1^i = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{knp} \left(\nabla_j \overline{(v_0^n B_2^p)} + \nabla_j \overline{(v_2^n B_0^p)} + \nabla_j (W_1^n H_1^p) \right), \quad (1.25)$$

$$\partial_T \Theta_1 - Pr^{-1} \Delta \Theta_1 = -\nabla_k (W_1^k \Theta_1) - \nabla_k (\overline{v_0^k T_2} + \overline{v_2^k T_0}). \quad (1.26)$$

Используя известные тензорные тождества $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jml} = \delta_{km} \delta_{il} - \delta_{im} \delta_{kl}$, $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{knp} = \delta_{in} \delta_{jp} - \delta_{ip} \delta_{jn}$, преобразуем уравнения (1.16)-(1.18) к более удобному виду

$$\begin{aligned} \partial_T W_1^i + \nabla_k (W_1^k W_1^i - \tilde{Q} H_1^i H_1^k) - \Delta W_1^i + \nabla_k \left(\overline{v_0^i v_2^k} + \overline{v_0^k v_2^i} - \right. \\ \left. - \tilde{Q} (\overline{B_0^i B_2^k} + \overline{B_2^i B_0^k}) \right) = -\nabla_i \bar{P}, \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned} \partial_T H_1^i + (W_1^k \nabla_k) H_1^i - (H_1^k \nabla_k) W_1^i - Pm^{-1} \Delta H_1^i = \nabla_p \left(\overline{v_0^i B_2^p} + \overline{v_2^i B_0^p} \right) - \\ - \nabla_n \left(\overline{v_0^n B_2^i} + \overline{v_2^n B_0^i} \right), \end{aligned} \quad (1.28)$$

Здесь $\bar{P} = \bar{P}_3 + \tilde{Q} \frac{(H_1^k)^2}{2} + \tilde{Q} \overline{(B_0^k B_2^k)}$. Эти уравнения нужно дополнить секулярными уравнениями, полученными ранее :

$$W_1^z = 0; \quad \nabla_i W_1^i = 0; \quad \nabla_i H_1^i = 0.$$

Таким образом, для получения замкнутой системы уравнений, описывающей эволюцию крупномасштабных полей \vec{W}_1 и \vec{H}_1 , потребовалось дойти до пятого порядка теории возмущения. Окончательное замыкание достигается после вычисления корреляционных функций: $\overline{v_0^i v_2^k} + \overline{v_2^i v_0^k}$, $\overline{B_0^i B_2^k} + \overline{B_2^i B_0^k}$, $\overline{v_0^i B_2^k} + \overline{v_2^i B_0^k}$. Их вычисление легко осуществить используя решения полученных уравнений для мелкомасштабных полей в нулевом и втором порядке по R .

1.3. Мелкомасштабные поля

Для вычисления соответствующих корреляционных функций и достижения замыкания уравнений крупномасштабных полей обсудим более детально мелкомасштабные поля. В этом разделе найдем мелкомасштабные поля в нулевом и втором порядке теории возмущения. Рассмотрим вначале уравнения (1.9)-(1.12), полученные в нулевом порядке по R . Введем более компактные обозначения для операторов

$$\hat{D}_0 = \partial_t - \partial_k^2, \quad \hat{D}_\Theta = \partial_t - Pr^{-1}\partial_k^2, \quad \hat{D}_H = \partial_t - Pm^{-1}\partial_k^2.$$

После этого система уравнений (2.9)-(2.12) принимает

$$\hat{D}_0 v_0^i = \partial_i P_0 + e_i \tilde{R} a T_0 + F_i, \quad (1.29)$$

$$\hat{D}_H B_0^i = F_B^i, \quad (1.30)$$

$$\hat{D}_\Theta T_0 = e_k v_0^k, \quad (1.31)$$

$$\partial_i v_0^i = \partial_i B_0^i = 0, \quad \partial_i F_0^i = 0, \quad (1.32)$$

Подставляя значение T_0 , найденное из уравнения (1.31), в уравнение (1.29) и используя условие соленоидальности (1.32), получим давление P_0

$$P_0 = -\frac{\tilde{R}a}{\partial^2 \hat{D}_\Theta} e_p e_k \partial_p v_0^k.$$

Исключая P_0 из уравнения (1.29) преобразуем его к виду

$$\left(\hat{D}_0 \delta_{ik} + \frac{\tilde{R}a}{\hat{D}_\Theta} e_p e_k \hat{P}_{ip} \right) v_0^k = F_0^i.$$

Здесь $\hat{P}_{ip} = \delta_{ip} - \frac{\partial_i \partial_p}{\partial^2}$ – проекционный оператор. Запишем это уравнение в более компактном виде:

$$\hat{L}_{ik} v_0^k = \frac{F_0^i}{\hat{D}_0}, \quad (1.33)$$

где для \hat{L}_{ik} введено обозначение [85]:

$$\hat{L}_{ik} = \delta_{ik} + \frac{\tilde{R}a}{\hat{D}_0 \hat{D}_\Theta} e_p e_k \hat{P}_{ip}.$$

Из уравнения (1.33) находим поле скорости v_0^k , используя обратный оператор \hat{L}_{kj}^{-1} :

$$v_0^k = \hat{L}_{kj}^{-1} \frac{F_0^j}{\hat{D}_0},$$

где

$$\hat{L}_{kj}^{-1} = \delta_{kj} - \frac{\tilde{R}a \hat{P}_{kp} e_p e_j}{\hat{D}_0 \hat{D}_\Theta + \tilde{R}a \hat{P}_{qs} e_q e_s}.$$

Тогда легко получить мелкомасштабные пульсации скорости v_0^k в виде

$$v_0^k = \left[\delta_{kj} - \frac{\tilde{R}a \hat{P}_{kp} e_p e_j}{\hat{D}_0 \hat{D}_\Theta + \tilde{R}a \hat{P}_{qs} e_q e_s} \right] \frac{F_0^j}{\hat{D}_0}. \quad (1.34)$$

Теперь, используя уравнение (1.31), находим мелкомасштабные пульсации температуры T_0

$$T_0 = - \left[1 - \frac{\tilde{R}a \hat{P}_{kp} e_k e_p}{\hat{D}_0 \hat{D}_\Theta + \tilde{R}a \hat{P}_{qs} e_q e_s} \right] \frac{(\vec{e} \vec{F}_0)}{\hat{D}_0 \hat{D}_\Theta}. \quad (1.35)$$

Аналогично из уравнения (2.30) находим мелкомасштабные пульсации магнитной индукции:

$$B_0^i = \frac{F_B^i}{\hat{D}_H}. \quad (1.36)$$

После вычисления мелкомасштабных полей для вычисления их корреляторов следует в явном виде задать спиральную внешнюю силу F_0^j и внешний источник F_B^i , обладающие спиральностью: $\vec{F}_0 \text{rot} \vec{F}_0 \neq 0$ и $\vec{F}_B \text{rot} \vec{F}_B \neq 0$. Для упрощения вычислений зададим внешнюю силу и источник следующим образом:

$$\vec{F}_0 = f_0 (\vec{i} \cos(\varphi_2) + \vec{j} \sin(\varphi_2) + \vec{k} (\cos(\varphi_1) + \sin(\varphi_2))), \quad (1.37)$$

$$\vec{F}_B = b_0 (\vec{i} \cos(\varphi_2) + \vec{j} \sin(\varphi_2) + \vec{k} (\cos(\varphi_1) + \sin(\varphi_2))), \quad (1.38)$$

где $\varphi_1 = \vec{k}_1 \vec{x} - \omega_0 t$, $\varphi_2 = \vec{k}_2 \vec{x} - \omega_0 t$, а $\vec{k}_1 = k_0(1, 0, 0)$, $\vec{k}_2 = k_0(0, 1, 0)$. Легко проверить, что спиральность приведенной спиральной силы и источника равны

$$\vec{F}_0 \text{rot} \vec{F}_0 = k_0 \vec{F}_0^2, \quad \vec{F}_B \text{rot} \vec{F}_B = k_0 \vec{F}_B^2.$$

Эта сила соответствует Бельтрами моде с периодичностью по горизонтальным координатам. Выбор Бельтрами моды вызван простой причиной. Естественно предположить, что моды магнитного поля стремятся к состоянию с минимальной энергией. Как известно, такие состояния являются бессиловыми. В бессиловых конфигурациях возникает корреляция между током и магнитным полем, т.е. ненулевая спиральность магнитного поля. Соотношения (1.37), (1.38) удобно записать в комплексной форме

$$\begin{aligned} \vec{F}_0 &= \vec{A} e^{i\varphi_1} + \vec{A}^* e^{-i\varphi_1} + \vec{B} e^{i\varphi_2} + \vec{B}^* e^{-i\varphi_2}, \\ \vec{F}_B &= \vec{A}_H e^{i\varphi_1} + \vec{A}_H^* e^{-i\varphi_1} + \vec{B}_H e^{i\varphi_2} + \vec{B}_H^* e^{-i\varphi_2}, \end{aligned}$$

где комплексные вектора имеют вид

$$\vec{A} = \frac{f_0}{2} (\vec{k} - i\vec{j}); \vec{A}_H = \frac{b_0}{2} (\vec{k} - i\vec{j}); \vec{B} = \frac{f_0}{2} (i\vec{i} - i\vec{k}); \vec{B}_H = \frac{b_0}{2} (i\vec{i} - i\vec{k}).$$

Здесь $i^2 = -1$, а φ_1 и φ_2 определяются прежними соотношениями. Действие введенных выше операторов на собственные функции $\exp(i\omega t + i\vec{k}\vec{x})$ имеют очевидный вид

$$\begin{aligned} \hat{D}_0 e^{i\omega t + i\vec{k}\vec{x}} &= D_0(\omega, \vec{k}) e^{i\omega t + i\vec{k}\vec{x}}, \\ \hat{D}_\ominus e^{i\omega t + i\vec{k}\vec{x}} &= D_\ominus(\omega, \vec{k}) e^{i\omega t + i\vec{k}\vec{x}}, \\ \hat{D}_H e^{i\omega t + i\vec{k}\vec{x}} &= D_H(\omega, \vec{k}) e^{i\omega t + i\vec{k}\vec{x}}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} D_0(\omega, \vec{k}) &= i\omega + \vec{k}^2, \\ D_\ominus(\omega, \vec{k}) &= i\omega + Pr^{-1} \vec{k}^2, \\ D_H(\omega, \vec{k}) &= i\omega + Pm^{-1} \vec{k}^2. \end{aligned} \tag{1.39}$$

Из соотношений (1.34)-(1.36) следует, что мелкомасштабные поля $\vec{v}_0, \vec{B}_0, T_0$ состоят из четырех слагаемых, которые будем обозначать следующим образом:

$$\begin{aligned} v_0^k &= {}_1v_0^k + {}_2v_0^k + {}_3v_0^k + {}_4v_0^k, & B_0^k &= {}_1B_0^k + {}_2B_0^k + {}_3B_0^k + {}_4B_0^k, \\ T_0 &= {}_1T_0 + {}_2T_0 + {}_3T_0 + {}_4T_0. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Эти слагаемые обладают рядом специальных свойств, которые используются далее. В частности, легко проверить, что

$${}_2v_0^k = ({}_1v_0^k)^*, \quad {}_4v_0^k = ({}_3v_0^k)^*, \quad {}_2B_0^i = ({}_1B_0^i)^*, \quad {}_4B_0^i = ({}_3B_0^i)^*, \quad T_0 = ({}_1T_0)^*, \quad {}_4T_0 = ({}_3T_0)^*.$$

С учетом этих свойств достаточно привести два слагаемых мелкомасштабной скорости, остальные легко получить комплексным сопряжением

$${}_1v_0^k = e^{i\phi_1} \left[\delta_{kj} - \frac{\tilde{R}a \hat{P}_{kp} e_p e_j}{\hat{D}_0 \hat{D}_\Theta^* + \tilde{R}a} \right] \frac{A_j}{\hat{D}_0^*}, \quad (1.41)$$

$${}_3v_0^k = e^{i\phi_2} \left[\delta_{kj} - \frac{\tilde{R}a \hat{P}_{kp} e_p e_j}{\hat{D}_0 \hat{D}_\Theta^* + \tilde{R}a} \right] \frac{B_j}{\hat{D}_0^*}. \quad (1.42)$$

Учитывая, что внешняя сила и источник зависят от безразмерных пространственно-временных аргументов, для упрощения вычислений можно положить $\omega_0 = 1$, $\vec{k}_1 = k_0(1, 0, 0)$, $\vec{k}_2 = k_0(0, 1, 0)$, $k_0 = 1$. Тогда скалярные операторы $\hat{D}_0, \hat{D}_\Theta, \hat{D}_H$ принимают простой вид

$$\hat{D}_0 = 1 + i, \quad \hat{D}_\Theta = Pr^{-1} + i, \quad \hat{D}_H = Pm^{-1} + i, \quad (1.43)$$

а их произведения, которые входят в мелкомасштабные поля, также упрощаются:

$$\begin{aligned} \hat{D}_0^* \hat{D}_\Theta^* &= Pr^{-1} - 1 - i(1 + Pr^{-1}) = p^*, \\ (\hat{D}_0^*)^2 &= (1 - i)^2, \quad (\hat{D}_0^* \hat{D}_\Theta^*)^2 = (p^*)^2, \end{aligned}$$

$$\hat{D}_0^* \hat{D}_\Theta^* + \tilde{R}a = (i(1 + Pr^{-1}) + Pr^{-1} - 1 + \tilde{R}a)^* = r^* = p^* + \tilde{R}a.$$

После использования этих соотношений и простых преобразований соотношения для v_0^k приводятся к виду

$${}_1v_0^k = e^{i\varphi_1} \left[\delta_{kj} - \frac{\tilde{R}a e_k e_j}{r^*} \right] \frac{A_j}{1-i}, \quad (1.44)$$

$${}_3v_0^k = e^{i\varphi_2} \left[\delta_{kj} - \frac{\tilde{R}a e_k e_j}{r^*} \right] \frac{B_j}{1-i}. \quad (1.45)$$

Эти соотношения позволяют получить v_0^k с учетом соотношений (1.40), приведенных выше. Аналогично получаем соотношения, определяющие мелкомасштабные пульсации температуры T_0 и поля \vec{B}_0 :

$${}_1T_0 = -e^{i\varphi_1} \left[1 - \frac{\tilde{R}a}{r^*} \right] \frac{\vec{\partial} \vec{A}}{p^*}, \quad (1.46)$$

$${}_3T_0 = -e^{i\varphi_2} \left[1 - \frac{\tilde{R}a}{r^*} \right] \frac{\vec{\partial} \vec{B}}{p^*}, \quad (1.47)$$

$${}_1B_0^i = \frac{A_H^i}{Pm^{-1} - i} e^{i\varphi_1} = \tilde{A}_i e^{i\varphi_1}, \quad (1.48)$$

$${}_3B_0^i = \frac{B_H^i}{Pm^{-1} - i} e^{i\varphi_2} = \tilde{B}_i e^{i\varphi_2}. \quad (1.49)$$

Из структуры корреляторов, входящих в уравнения (1.27)-(1.28), видно, что для их вычисления необходимы вклады и полей \vec{v}_2 , \vec{B}_2 , T_2 во втором порядке по R . Приведем уравнения для этих вкладов, используя введенные выше обозначения:

$$\begin{aligned} \hat{D}_0 v_2^i + \partial_k (v_0^k (W_1^i + v_1^i) + (W_1^k + v_1^k) v_0^i) = -\partial_i P_2 + e_i \tilde{R} a T_2 + \\ + \tilde{Q} [(\partial_k B_0^i - \partial_i B_0^k)(H_1^k + B_1^k) + (\partial_k (H_1^i + B_1^i) - \partial_i (H_1^k + B_1^k)) B_0^k], \end{aligned} \quad (1.50)$$

$$\hat{D}_H B_2^i = \partial_p (v_0^i (H_1^p + B_1^p) + (W_1^i + v_1^i) B_0^p) - \partial_p (v_0^n (H_1^i + B_1^i) + (W_1^n + v_1^n) B_0^i), \quad (1.51)$$

$$\hat{D}_\Theta T_2 = -\partial_k ((W_1^k + v_1^k) T_0 + v_0^k (\Theta_1 + T_1)) - v_2^z, \quad (1.52)$$

Подействуем оператором \hat{D}_Θ на уравнение (1.50) и используя уравнение (1.52). После этого исключим из полученного уравнения давление P_2 , используя бездивергентность поля скорости \vec{v}_2 и соотношение

$$P_2 = -\frac{e\tilde{R}a}{\hat{D}_\Theta\hat{D}_0^2}(\partial_k((W_1^k + v_1^k)T_0 + v_0^k(\Theta_1 + T_1)) + e_k v_2^k) + \frac{\partial_i F_i^*}{\partial^2}, \quad (1.53)$$

где
$$F_i^* = -\partial_k(v_0^k(W_1^i + v_1^i) + (W_1^k + v_1^k)v_0^i) + \tilde{Q}[(\partial_k B_0^i - \partial_i B_0^k)(H_1^k + B_1^k) + (\partial_k(H_1^i + B_1^i) - \partial_i(H_1^k + B_1^k))B_0^k].$$

Подставляя значение P_2 в уравнение (1.50), после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} \hat{L}_{il}v_2^l = & -\frac{\hat{P}_{ip}}{\hat{D}_\Theta\hat{D}_0}\left\{\tilde{R}ae_p\partial_k((W_1^k + v_1^k)T_0 + v_0^k(\Theta_1 + T_1)) + \right. \\ & \left. + \hat{D}_\Theta\partial_k(v_0^k(W_1^p + v_1^p) + (W_1^k + v_1^k)v_0^p)\right\} + \\ & + \frac{\hat{P}_{ip}\tilde{Q}}{\hat{D}_0}\left\{(\partial_k B_0^p - \partial_p B_0^k)(H_1^k + B_1^k) + (\partial_k(H_1^p + B_1^p) - \partial_p(H_1^k + B_1^k))B_0^k\right\} \end{aligned} \quad (1.54)$$

Свойство операторов $\hat{L}_{il}\hat{L}_{lj} = \delta_{ij}$ позволяет найти мелкомасштабные пульсации скорости v_2^l :

$$\begin{aligned} v_2^l = & \hat{L}_{ij}^{-1}\frac{\hat{P}_{jp}}{\hat{D}_0}\tilde{Q}\left\{(\partial_k B_0^p - \partial_p B_0^k)(H_1^k + B_1^k) + (\partial_k(H_1^p + B_1^p) - \partial_p(H_1^k + B_1^k))B_0^k\right\} - \\ & - \hat{L}_{ij}\frac{\hat{P}_{jp}}{\hat{D}_\Theta\hat{D}_0}\left\{\tilde{R}ae_p\partial_k((W_1^k + v_1^k)T_0 + v_0^k(\Theta_1 + T_1)) + \right. \\ & \left. + \hat{D}_\Theta\partial_k(v_0^k(W_1^p + v_1^p) + (W_1^k + v_1^k)v_0^p)\right\}, \end{aligned} \quad (1.55)$$

где \hat{L}_{ij}^{-1} , обратный к \hat{L}_{ji} , имеет вид

$$\hat{L}_{ij}^{-1} = \delta_{ij} - \frac{\tilde{R}a\hat{P}_{ls}e_s e_j}{\hat{D}_\Theta\hat{D}_0 + \tilde{R}a\hat{P}_{mn}e_m e_n}. \quad (1.56)$$

Учитывая несжимаемость среды и зависимость крупномасштабных полей только от медленных переменных, соотношение (1.55) запишем следующим образом:

$$v_2^l = - \left[\delta_{lj} - \frac{\tilde{R}a \hat{P}_{ls} e_s e_j}{\hat{D}_\ominus \hat{D}_0 + \tilde{R}a \hat{P}_{mn} e_m e_n} \right] \frac{\hat{P}_{jp}}{\hat{D}_\ominus \hat{D}_0} \left\{ \tilde{R}a e_p W_1^k \partial_k T_0 + \hat{D}_\ominus W_1^k \partial_k v_0^p + N_p^{(1)} \right\} + \left[\delta_{lj} - \frac{\tilde{R}a \hat{P}_{ls} e_s e_j}{\hat{D}_\ominus \hat{D}_0 + \tilde{R}a \hat{P}_{mn} e_m e_n} \right] \frac{\hat{P}_{jp}}{\hat{D}_0} \tilde{Q} \left\{ H_1^k (\partial_k B_0^p - \partial_p B_0^k) + N_p^{(2)} \right\}, \quad (1.57)$$

где введены обозначения

$$N_p^{(1)} = \tilde{R}a e_p (v_1^k \partial_k T_0 + v_0^k \partial_k T_1) + \hat{D}_\ominus (v_0^k \partial_k v_1^p + v_1^k \partial_k v_0^p) \\ N_p^{(2)} = B_1^k (\partial_k B_0^p - \partial_p B_0^k) + (\partial_k B_1^p - \partial_p B_1^k) B_0^k. \quad (1.58)$$

Отметим, что в пределе бесконечно малой электропроводности среды $\sigma \rightarrow 0$ соотношение (1.57) совпадает с соответствующим уравнением работы [85]. Теперь перейдем к решению уравнения (1.52), которое имеет вид

$$B_2^i = \hat{D}_H^{-1} (H_1^p \partial_p v_0^i - W_1^n \partial_n B_0^i + N_i^{(3)}). \quad (1.59)$$

Здесь

$$N_i^{(3)} = B_1^p \partial_p v_0^i + B_0^p \partial_p v_1^i - v_1^n \partial_n B_0^i. \quad (1.60)$$

Аналогично находим решение уравнения (2.52)

$$T_2 = -\hat{D}_\ominus^{-1} (W_1^k \partial_k T_0 + e_k v_2^k + N^{(4)}), \quad (1.61)$$

где

$$N^{(4)} = v_0^k \partial_k T_1 + v_1^k \partial_k T_0. \quad (1.62)$$

Следует заметить, что при вычислении напряжений Рейнольдса $\nabla v_0 v_2$, $\nabla B_0 B_2$, $\nabla v_0 B_2$ вклады $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$, $N^{(4)}$ выпадают из-за зависимости v_1 , T_1 , v_0 , T_0 , B_1 , только от быстрых переменных. Поэтому для вычисления корреляторов можно использовать упрощенную форму записи решений:

$$v_2^l = -W_1^k T_{(1)}^{kl} - W_1 T_{(2)}^{kl} + H_1^k S^{kl}, \quad (1.63)$$

$$T_{(1)}^{kl} = \left[\delta_{lj} - \frac{\tilde{R}a \hat{P}_{ls} e_s e_j}{\hat{D}_\ominus \hat{D}_0 + \tilde{R}a \hat{P}_{mn} e_m e_n} \right] \frac{\hat{P}_{jp} e_p}{\hat{D}_\ominus \hat{D}_0} \tilde{R}a \partial_k T_0, \quad (1.64)$$

$$T_{(2)}^{kl} = \left[\delta_{ij} - \frac{\tilde{R}a\hat{P}_{ls}e_s e_j}{\hat{D}_\Theta \hat{D}_0 + \tilde{R}a\hat{P}_{mn}e_m e_n} \right] \frac{\hat{P}_{jp}}{\hat{D}_\Theta \hat{D}_0} \hat{D}_\Theta \partial_k v_0^p, \quad (1.65)$$

$$S^{kl} = \left[\delta_{ij} - \frac{\tilde{R}a\hat{P}_{ls}e_s e_j}{\hat{D}_\Theta \hat{D}_0 + \tilde{R}a\hat{P}_{mn}e_m e_n} \right] \frac{\hat{P}_{jp}\tilde{Q}}{\hat{D}_0} (\partial_k B_0^p - \partial_p B_0^k), \quad (1.66)$$

$$B_2^i = \varepsilon_{(1)}^{ni} H_1^n + \varepsilon_{(2)}^{ni} W_1^n, \quad (1.67)$$

$$\varepsilon_{(1)}^{ni} = \hat{D}_H^{-1} \partial_n v_0^i, \quad \varepsilon_{(2)}^{ni} = -\hat{D}_H^{-1} \partial_n B_0^i, \quad (1.68)$$

$$T_2 = -W_1^k C_{(1)}^k - H_1^k C_{(2)}^k, \quad (1.69)$$

$$C_{(1)}^k = \hat{D}_\Theta^{-1} \partial_k T_0 - \hat{D}_\Theta^{-1} (e_l T_{(1)}^{kl}) - \hat{D}_\Theta^{-1} (e_l T_{(2)}^{kl}), \quad (1.70)$$

$$C_{(2)}^k = \hat{D}_\Theta^{-1} (e_l S^{kl}). \quad (1.71)$$

Так как величины v_2 , T_2 , B_2 связаны с полями нулевого порядка v_0 , T_0 , B_0 , то и структура полей v_2 , T_2 , B_2 имеет подобный вид:

$$v_2^l = {}_1 v_2^l + {}_2 v_2^l + {}_3 v_2^l + {}_4 v_2^l; \quad B_2^l = {}_1 B_2^l + {}_2 B_2^l + {}_3 B_2^l + {}_4 B_2^l, \\ T_2 = {}_1 T + {}_2 T_2 + {}_3 T_2 + {}_4 T_2, \quad (1.72)$$

слагаемые, входящие в эти соотношения, также обладают полезными для дальнейших вычислений симметриями

$$({}_1 v_2^l)^* = {}_2 v_2^l, ({}_3 v_2^l)^* = {}_4 v_2^l, ({}_1 B_2^l)^* = {}_2 B_2^l, ({}_3 B_2^l)^* = {}_4 B_2^l, T_2 = ({}_1 T_2)^* = {}_4 T_2 = ({}_3 T_2)^*,$$

использование этих свойств делает менее громоздким вычисление напряжений Рейнольдса.

1.4. Замкнутые уравнения для крупномасштабных полей

Теперь перейдем к вычислению корреляционных функций и определению напряжений Рейнольдса, необходимых для замыкания крупномасштабных уравнений. Для вычисления напряжений Рейнольдса необходимо вычислить следующие средние:

$$\overline{v_0^k v_2^l} = 2Re(\overline{{}_1 v_{02}^k v_2^l} + \overline{{}_3 v_{04}^k v_2^l}),$$

$$\overline{B_0^i B_2^k} = 2Re(\overline{{}_1 B_{02}^i B_2^k} + \overline{{}_3 B_{04}^i B_2^k}),$$

$$\begin{aligned} \overline{v_0^i B_2^p} &= 2Re(\overline{{}_1v_{02}^i B_2^p} + \overline{{}_3v_{04}^i B_2^p}), \\ \overline{v_2^i B_0^p} &= 2Re(\overline{{}_1v_{22}^i B_0^p} + \overline{{}_3v_{24}^i B_0^p}). \end{aligned} \quad (1.73)$$

Здесь черта сверху обозначает усреднение по мелкомасштабным переменным. Используя полученные ранее точные решения для мелкомасштабных полей, после громоздких преобразований получим корреляционную функцию

$$\begin{aligned} \overline{v_0^p v_2^l} &= 2Re(\overline{{}_1v_{02}^p v_2^l} + \overline{{}_3v_{04}^p v_2^l}) = 2Re \left\{ -\frac{iW_x e_l \tilde{R}a}{(1-i)p^2} \left(A_p - \frac{e_p \tilde{R}a A_3}{r^*} \right) \left(1 - \frac{\tilde{R}a}{r} \right)^2 A_3^* + \right. \\ &+ \frac{iW_x}{2(1+i)} \left(A_p - \frac{e_p \tilde{R}a A_3}{r^*} \right) \left(A_l^* - \frac{k_1^l}{k_1} A_1^* - \frac{2\tilde{R}a e_p A_3^*}{r} + \frac{\tilde{R}a^2 e_p A_3^*}{r^2} \right) - \\ &- \frac{iH_x}{2} \tilde{Q} \left(A_p - \frac{\tilde{R}a e_p}{r^*} A_3 \right) \left(\tilde{A}_l^* - \frac{k_1^l}{k_1} \tilde{A}_1^* - \frac{e_l \tilde{A}_3^* \tilde{R}a}{r} \right) \left. \right\} + \\ &2Re \left\{ -\frac{iW_y e_l \tilde{R}a}{(1-i)p^2} \left(B_p - \frac{e_p \tilde{R}a B_3}{r^*} \right) \left(1 - \frac{\tilde{R}a}{r} \right)^2 B_3^* + \right. \\ &+ \frac{iW_y}{2(1+i)} \left(B_p - \frac{e_p \tilde{R}a B_3}{r^*} \right) \left(B_l^* - \frac{k_2^l}{k_2} B_2^* - \frac{2\tilde{R}a e_l B_3^*}{r} + \frac{\tilde{R}a^2 e_l B_3^*}{r^2} \right) - \\ &- \frac{iH_y}{2} \tilde{Q} \left(B_p - \frac{e_p \tilde{R}a B_3}{r^*} \right) \left(\tilde{B}_l^* - \frac{k_2^l}{k_2} \tilde{B}_2^* - \frac{\tilde{R}a e_l \tilde{B}_3^*}{r} \right). \end{aligned} \quad (1.74)$$

Аналогично вычисляется коррелятор магнитной индукции

$$\begin{aligned} \overline{B_0^i B_2^k} &= 2Re \left\{ -\frac{iH_x \tilde{A}_i}{(1+i)(Pm^{-1}+i)} \left(A_k^* - \frac{e_k \tilde{R}a A_3^*}{r} \right) + \frac{iW_x \tilde{A}_i \tilde{A}_k^*}{Pm^{-1}+i} \right\} + \\ &+ 2Re \left\{ -\frac{iH_y \tilde{B}_i}{(1+i)(Pm^{-1}+i)} \left(B_k^* - \frac{e_k \tilde{R}a B_3^*}{r} \right) + \frac{iW_y \tilde{B}_i \tilde{B}_k^*}{(Pm^{-1}+i)} \right\}, \end{aligned}$$

и наконец находим смешанные корреляторы

$$\overline{v_0^i B_2^p} = 2Re \left\{ -\frac{iH_x}{2(Pm^{-1}+i)} \left(A_i - \frac{e_i \tilde{R}a A_3}{r^*} \right) \left(A_p^* - \frac{e_p \tilde{R}a A_3^*}{r} \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{iW_x A_p^*}{(1-i)(Pm^{-1}+i)} \left(A_i - \frac{e_i \tilde{R}a A_3}{r^*} \right) - \frac{iH_y}{2(Pm^{-1}+i)} \left(B_i - \frac{e_i \tilde{R}a B_3}{r^*} \right) \left(B_p^* - \frac{e_p \tilde{R}a B_3^*}{r} \right) + \\
& \quad + \frac{iW_y B_p^*}{(1-i)(Pm^{-1}+i)} \left(B_i - \frac{e_i \tilde{R}a B_3}{r^*} \right) \Bigg\}, \\
\overline{v_2^i B_0^p} = & 2Re \left\{ \frac{iW_x e_i \tilde{R}a}{(p^*)^2} \left(1 - \frac{\tilde{R}a}{r^*} \right)^2 A_3 \tilde{A}_p^* - \frac{iW_x}{(1-i)^2} \left(A_i - \frac{k_1^i}{k_1} A_1 - \frac{2\tilde{R}a e_i A_3}{r^*} + \frac{\tilde{R}a^2 e_i A_2}{(r^*)^2} \right) \tilde{A}_p^* + \right. \\
& \quad \left. + \frac{iH_x \tilde{Q}}{(1-i)} \left(\tilde{A}_i \tilde{A}_p^* - \frac{k_1^i}{k_1} \tilde{A}_1 \tilde{A}_p^* - \frac{e_i \tilde{A}_3 \tilde{A}_p^* \tilde{R}a}{r^*} \right) \right\} + \\
& + 2Re \left\{ \frac{iW_y e_i \tilde{R}a}{(p^*)^2} \left(1 - \frac{\tilde{R}a}{r^*} \right)^2 B_3 \tilde{B}_p^* - \frac{iW_y}{(1-i)^2} \left(B_i - \frac{k_2^i}{k_2} B_2 - \frac{2\tilde{R}a e_i B_3}{r^*} + \frac{\tilde{R}a^2 e_i B_3}{(r^*)^2} \right) \tilde{B}_p^* + \right. \\
& \quad \left. + \frac{iH_y \tilde{Q}}{(1-i)} \left(\tilde{B}_i - \frac{k_2^i}{k_2} \tilde{B}_2 - \frac{e_i \tilde{R}a B_3}{r^*} \right) \tilde{B}_p^* \right\}.
\end{aligned}$$

Таким образом установлена зависимость корреляторов (1.73) от крупномасштабного поля скорости \vec{W}_1 и магнитного поля \vec{H}_1 , что необходимо для замыкания уравнений (1.27)-(1.28). Структура внешней спиральной силы \vec{F}_0 и источника \vec{F}_B выбраны так, что корреляторы выражаются через x , y компоненты крупномасштабных полей (W_x, W_y) и (H_x, H_y) . Поэтому естественно рассмотреть уравнения (1.27)-(1.28) в рамках квазидвумерной задачи, когда

$$\frac{\partial}{\partial Z} \gg \frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y},$$

а крупномасштабные возмущения (W_x, W_y) , (H_x, H_y) зависят только от крупномасштабной координаты Z

$$W_x = W_x(Z), \quad W_y = W_y(Z), \quad H_x = H_x(Z), \quad H_y = H_y(Z).$$

На начальном этапе эволюцию крупномасштабных возмущений можно представить в виде плоской волны с волновым вектором $\vec{K} \parallel OZ$. Тогда из условия соленоидальности крупномасштабного маг-

нитного поля (1.19) ($\vec{K} \cdot \vec{H}_1 = 0$) ясно, что поле \vec{H}_1 имеет только компоненты (H_x, H_y) . Для исследования устойчивости малых крупномасштабных возмущений в уравнениях (1.27)-(1.28) можно пренебречь нелинейными членами. Тогда упрощенная система уравнений (1.27)-(1.28) в координатном представлении принимает вид

$$\begin{aligned} \partial_T W_x - \Delta W_x + \nabla_Z (\overline{v_0^z v_2^x} + \overline{v_0^x v_2^z} - \tilde{Q}(\overline{B_0^x B_2^z} + \overline{B_0^z B_2^x})) &= 0, \\ \partial_T W_y - \Delta W_y + \nabla_Z (\overline{v_0^z v_2^y} + \overline{v_0^y v_2^z} - \tilde{Q}(\overline{B_0^y B_2^z} + \overline{B_0^z B_2^y})) &= 0, \\ \partial_T H_x - Pm^{-1} \Delta H_x &= \nabla_Z (\overline{v_0^x B_2^z} + \overline{B_0^z v_2^x}) - \nabla_Z (\overline{v_0^z B_2^x} + \overline{B_0^x v_2^z}), \\ \partial_T H_y - Pm^{-1} \Delta H_y &= \nabla_Z (\overline{v_0^y B_2^z} + \overline{B_0^z v_2^y}) - \nabla_Z (\overline{v_0^z B_2^y} + \overline{B_0^y v_2^z}). \end{aligned} \quad (1.75)$$

Используя общий вид коррелятора скорости (1.74), легко найти коррелятор $\overline{v_0^z v_2^x}$ в виде

$$\overline{v_0^z v_2^x} = W_y \operatorname{Re} \left\{ \frac{f_0^2}{4(1+i)} \left(1 - \frac{\tilde{R}a}{r^*} \right) \right\} - H_y \operatorname{Re} \left\{ \frac{f_0 b_0}{4} \frac{\tilde{Q}}{(Pm^{-1} + i)} \left(1 - \frac{\tilde{R}a}{r^*} \right) \right\},$$

аналогично

$$\begin{aligned} \overline{v_0^x v_2^z} &= W_y \operatorname{Re} \left\{ \frac{\tilde{R}a f_0^2}{2(1-i)p^2} \left(1 - \frac{\tilde{R}a}{r} \right)^2 - \frac{f_0^2}{4(1+i)} \left(1 - \frac{2\tilde{R}a}{r} + \frac{\tilde{R}a^2}{r^2} \right) \right\} + \\ &+ H_y \operatorname{Re} \left\{ \frac{f_0 b_0}{4} \frac{\tilde{Q}}{(Pm^{-1} + i)} \left(1 - \frac{\tilde{R}a}{r} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Запись этих корреляторов можно упростить, учитывая

$$1 - \frac{\tilde{R}a}{r^*} = \frac{p^*}{r^*}, \quad 1 - \frac{\tilde{R}a}{r} = \frac{p}{r}, \quad 1 - \frac{2\tilde{R}a}{r} + \frac{\tilde{R}a^2}{r^2} = \frac{p^2}{r^2},$$

где $p = (Pm^{-1} - 1 + i)(Pm^{-1} + 1)$ и $r = p + \tilde{R}a$.

Напряжение Рейнольдса $\nabla_Z (\overline{v_0^z v_2^x} + \overline{v_0^x v_2^z})$ с учетом этих соотношений приводится к виду

$$\nabla_Z (\overline{v_0^z v_2^x} + \overline{v_0^x v_2^z}) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{f_0^2}{4(1+i)} \frac{p^*}{r^*} + \frac{f_0^2}{2} \frac{\tilde{R}a}{r^2(1-i)} - \frac{f_0^2}{4(1+i)} \frac{p^2}{r^2} \right\} \nabla_Z W_y +$$

$$+Re \left\{ \frac{f_0 b_0}{4} \frac{\tilde{Q}}{(Pm^{-1}) + i} \left(\frac{p}{r} - \frac{p^*}{r^*} \right) \right\} \nabla_z H_y = \alpha \nabla_z W_y + \beta \nabla_z H_y. \quad (1.76)$$

Отметим, что в (1.76) коэффициент α указывает на наличие α -эффекта в электропроводящей среде, вызванного внешней спиральной силой с амплитудой f_0 . Величина коэффициента α в (1.76) для случая чисел Прандтля $Pr \approx 1$ совпадает с результатами работы [85]:

$$\alpha = -Ra \frac{(4 - 2Ra)}{(Ra^2 + 4)^2} f_0^2, \quad (1.77)$$

коэффициент β приводит к новому эффекту, связанному с совместным действием спиральной силы и источника МГД турбулентности с амплитудами f_0 и b_0 соответственно:

$$\beta = \frac{Ra \tilde{Q}}{(Ra^2 + 4)(Pm^{-2} + 1)} f_0 b_0, \quad \text{для чисел } Pr \approx 1. \quad (1.78)$$

Ниже обсудим роль β -эффекта на генерацию крупномасштабных полей \vec{W}_1 и \vec{H}_1 . Пока обратим внимание, что оба эффекта существуют в средах с температурной стратификацией.

Аналогичные вычисления позволяют найти напряжения Рейнольдса, нужные для замыкания второго уравнения системы уравнений (1.75):

$$\begin{aligned} \nabla_z (\overline{v_0^z v_2^y} + \overline{v_0^y v_2^z}) = -Re \left\{ \frac{f_0^2}{4(1+i)} \frac{p^*}{r^*} + \frac{f_0^2}{2} \frac{\tilde{Ra}}{r^2(1-i)} - \frac{f_0^2}{4(1+i)} \frac{p^2}{r^2} \right\} \nabla_z W_x - \\ - Re \left\{ \frac{f_0 b_0}{4} \frac{\tilde{Q}}{(Pm^{-1}) + i} \left(\frac{p}{r} - \frac{p^*}{r^*} \right) \right\} \nabla_z H_x = -\alpha \nabla_z W_x - \beta \nabla_z H_x. \quad (1.79) \end{aligned}$$

Легко заметить, что соотношения (1.76) и (1.79) отличаются только знаками. В общем случае для чисел Прандтля $Pr \neq 1$ значения коэффициентов α и β имеют вид

$$\alpha = \frac{f_0^2}{4} (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3), \quad (1.80)$$

$$\text{где } \xi_1 = \frac{1 + Pr^2 - RaPr}{(1 + Ra - Pr)^2 + (1 + Pr)},$$

$$\begin{aligned}\xi_2 &= \frac{(Pr(Ra+2) + Pr^2 - 1)(Ra^2 + 2Ra(1-Pr) - 4Pr)}{((1+Ra-Pr)^2 + (1+Pr)^2)^2}, \\ \xi_3 &= \frac{2(Pr(Ra-2) + Pr^2 - 1)(Ra(Pr+1) + 1 - Pr^2)}{((1+Ra-Pr)^2 + (1+Pr)^2)^2}, \\ \beta &= \frac{f_0 b_0}{2} \frac{QPmRa(1+Pr)}{(1+Pm^2)((1+Ra-Pr)^2 + (1+Pr)^2)}.\end{aligned}\quad (1.81)$$

Аналогично вычисляются напряжения Рейнольдса для флуктуаций магнитного поля

$$\tilde{Q}(\overline{B_0^x B_2^z} + \overline{B_0^z B_2^x}) = \beta_b \nabla_z H_y, \quad (1.82)$$

$$\tilde{Q}(\overline{B_0^y B_2^z} + \overline{B_0^z B_2^y}) = -\beta_b \nabla_z H_x. \quad (1.83)$$

Здесь

$$\beta_b = \frac{f_0 b_0}{4} \frac{QPmRa(2Pr - Ra)}{(1+Pm^2)((1+Ra-Pr)^2 + (1+Pr)^2)},$$

коэффициент β_b представляет дополнительную поправку к β -эффекту, вызванную влиянием мелкомасштабных спиральных полей \vec{B}_0 при наличии стратификации среды по температуре. Сравнивая соотношения (1.76), (1.79) и (1.82), (1.83), получим

$$\begin{aligned}\nabla_z (\overline{v_0^z v_2^x} + \overline{v_0^x v_2^z} - \tilde{Q}(\overline{B_0^x B_2^z} + \overline{B_0^z B_2^x})) &= \alpha \nabla_z W_y + \\ (\beta - \beta_b) \nabla_z H_y &= \alpha \nabla_z W_y + \beta_q \nabla_z H_y,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla_z (\overline{v_0^z v_2^y} + \overline{v_0^y v_2^z} - \tilde{Q}(\overline{B_0^y B_2^z} + \overline{B_0^z B_2^y})) &= -\alpha \nabla_z W_x - \\ (\beta - \beta_b) \nabla_z H_x &= -\alpha \nabla_z W_x - \beta_q \nabla_z H_x.\end{aligned}$$

Здесь введено обозначение

$$\beta_q = \frac{f_0 b_0}{4} \frac{QPmRa(2+Ra)}{(1+Pm^2)((1+Ra-Pr)^2 + (1+Pr)^2)} = \beta - \beta_b,$$

вычисление смешанных корреляторов приводит к соотношениям

$$\nabla_z (\overline{v_0^x B_2^z} + \overline{v_2^x B_0^z}) - \nabla_z (\overline{v_0^z B_2^x} + \overline{B_0^x v_2^z}) = \alpha_w \nabla_z W_y + \alpha_H \nabla_z H_y,$$

коэффициенты α_W и α_H определяются выражениями

$$\alpha_W = -\frac{f_0 b_0}{4} \operatorname{Re} \left\{ \frac{(1+i)(Pm^{-1}-i)^2}{(Pm^{-2}+1)^2} + \frac{(1+i)(Pm^{-1}-i)^2}{(Pm^{-2}+1)^2} \frac{p^*}{r^*} + \frac{2\tilde{R}a(Pm^{-1}-i)}{(Pm^{-2}+1)(r^*)^2} - \frac{i(Pm^{-1}-i)(p^*)^2}{(Pm^{-2}+1)(r^*)^2} - \frac{i(Pm^{-1}-i)}{(Pm^{-2}+1)} \right\},$$

$$\alpha_H = \frac{f_0^2}{4} \operatorname{Re} \left\{ \frac{(Pm^{-1}-i)}{(Pm^{-2}+1)} \left(\frac{p}{r} + \frac{p^*}{r^*} \right) \right\} - \frac{b_0^2}{4} \tilde{Q} \operatorname{Re} \left\{ \frac{(1+i)}{(Pm^{-2}+1)} \left(1 + \frac{p^*}{r^*} \right) \right\} \quad (1.84)$$

$$\nabla_Z (\overline{v_0^y B_2^z} + \overline{v_2^y B_0^z}) - \nabla_Z (\overline{v_0^z B_2^y} + \overline{B_0^y v_2^z}) = -\alpha_W \nabla_Z W_x - \alpha_H \nabla_Z H_x. \quad (1.85)$$

После вычисления реальной части в соотношениях (1.84) и (1.85) получим

$$\alpha_W = -\frac{f_0 b_0}{4} (v_1 + v_2 + v_3 + v_4), \quad (1.86)$$

$$\text{где } v_1 = \frac{2Pm^3(1-Pm)}{(1+Pm^2)^2},$$

$$v_2 = \frac{(1+2Pm-Pm^2)(2(1+Pr^2)+(1-Pr)Ra) + Ra(1+Pr)(1-2Pm-Pm^2)}{Pm^2((1-Pr+Ra)^2+(1+Pr)^2)},$$

$$v_3 = \frac{2RaPr[(1-Pr+Ra)^2-(1+Pr)^2+2Pm(1+Pr)(1-Pr+Ra)]}{Pm((1+Ra-Pr)^2+(1+Pr)^2)},$$

$$v_4 = -\frac{(2(1-Pr^2)-4PmPr)((1+Ra-Pr)^2-(1+Pr)^2)}{Pm((1+Ra-Pr)^2+(1+Pr)^2)} +$$

$$+\frac{2(1+Pr)(1-Pr+Ra)(2Pm(1-Pr^2)+4Pr)}{Pm((1+Ra-Pr)^2+(1+Pr)^2)},$$

$$\alpha_H = \frac{f_0^2}{2} \mu_1 - \frac{b_0^2}{4} \mu_2, \quad (1.87)$$

где
$$\mu_1 = \frac{Pm(2(1+Pr^2) + Ra(1-Pr))}{(1+Pm^2)((1-Pr+Ra)^2 + (1+Pr)^2)},$$

$$\mu_2 = \frac{QPm((1-Pr+Ra)^2 + (1+Pr)^2 + 2(1+Pr^2) + 2Ra)}{(1+Pm^2)((1-Pr+Ra)^2 + (1+Pr)^2)}.$$

Таким образом, после подстановки приведенных выше соотношений в систему уравнений (1.75) получим замкнутую систему уравнений, которая описывает эволюцию крупномасштабных полей скорости \vec{W}_1 и магнитной индукции \vec{H}_1 :

$$\begin{aligned} \partial_T W_x - \Delta W_x + \alpha \nabla_Z W_y + \beta_q \nabla_Z H_y &= 0, \\ \partial_T W_y - \Delta W_y - \alpha \nabla_Z W_x - \beta_q \nabla_Z H_x &= 0, \\ \partial_T H_x - Pm^{-1} \Delta H_x &= \alpha_H \nabla_Z H_y + \alpha_w \nabla_Z W_y, \\ \partial_T H_y - Pm^{-1} \Delta H_y &= -\alpha_H \nabla_Z H_x - \alpha_w \nabla_Z W_x. \end{aligned} \tag{1.88}$$

Легко заметить, что коэффициенты α_w и β_q определяют положительную обратную связь в самосогласованной динамике полей \vec{W}_1 и \vec{H}_1 . Если предположить отсутствие источника мелкомасштабных магнитных полей ($b_0 = 0$), то система уравнений (1.88) расщепляется на две пары не связанных уравнений для крупномасштабной скорости \vec{W}_1

$$\begin{aligned} \partial_T W_x - \Delta W_x + \alpha \nabla_Z W_y &= 0, \\ \partial_T W_y - \Delta W_y - \alpha \nabla_Z W_x &= 0, \end{aligned} \tag{1.89}$$

и крупномасштабных магнитных полей \vec{H}_1

$$\begin{aligned} \partial_T H_x - Pm^{-1} \Delta H_x &= \alpha_H \nabla_Z H_y, \\ \partial_T H_y - Pm^{-1} \Delta H_y &= -\alpha_H \nabla_Z H_x. \end{aligned} \tag{1.90}$$

Первая система уравнений совпадает с уравнениями гидродинамического α -эффекта (см., например, [86]), который приводит к генерации крупномасштабных вихревых структур с нетривиальной топологией $\vec{W} \text{rot} \vec{W} \neq 0$. Вторая система уравнений (1.90) описывает хорошо известный в динамо теории [51]-[54] магнито-гидродинамический α -эффект. Он описывает генерацию крупномасштабного магнитного поля спираль-

ной турбулентностью. Ниже обсудим, как происходит генерация крупномасштабных возмущений в более общем случае, который соответствует системе уравнений (1.88).

1.5. Крупномасштабная неустойчивость

Начнем с анализа возможности появления крупномасштабной неустойчивости в системе уравнений (1.88). Для этого выберем крупномасштабные возмущения скорости W_x , W_y и магнитной индукции H_x , H_y в виде

$$\begin{aligned} W_x &= A_W \exp(iKZ - i\omega T), & W_y &= B_W \exp(iKZ - i\omega T), \\ H_x &= A_H \exp(iKZ - i\omega T), & H_y &= B_H \exp(iKZ - i\omega T). \end{aligned} \quad (1.91)$$

Подставляя их в систему уравнений (1.88), после обычных вычислений получим дисперсионное уравнение вида

$$\begin{aligned} &[(K^2 - i\omega)^2 - \alpha^2 K^2] \cdot [(Pm^{-1} K^2 - i\omega)^2 - \alpha_H^2 K^2] + \\ &+ 2\alpha_W \beta_q K^2 (K^2 - i\omega)(Pm^{-1} K^2 - i\omega) - 2\alpha \alpha_H \alpha_W \beta_q K^4 + \alpha_W^2 \beta_q^2 K^4 = 0. \end{aligned} \quad (1.92)$$

Это дисперсионное уравнение существенно упрощается в случае отсутствия источника мелкомасштабных магнитных полей ($b_0 = 0$ и следовательно $\beta_q = 0$). В таком физическом случае дисперсионное уравнение распадается на два независимых уравнения

$$(K^2 - i\omega)^2 - \alpha^2 K^2 = 0,$$

$$(Pm^{-1} K^2 - i\omega)^2 - \alpha_H^2 K^2 = 0. \quad (1.93)$$

Из этих уравнений следует отсутствие реальной части частоты и наличие чисто мнимой. Следовательно, инкремент неустойчивости равен

$$\gamma_1 = \pm \alpha K - K^2, \quad (1.94)$$

$$\gamma_2 = \pm \alpha_H K - Pm^{-1} K^2. \quad (1.95)$$

Решение, растущее с первым инкрементом, описывает генерацию крупномасштабных вихревых структур. Максимальный инкремент

$\Gamma_{max} = \frac{\alpha^2}{4}$ достигается на волновых числах $K = K_{max} = \frac{\alpha}{2}$ (см. рис. 1.1).

Нарастающие возмущения подобны течению Бельтрами, для которых

нелинейное слагаемое $\vec{W} \cdot \nabla \vec{W} = 0$ в уравнениях движения обращается в ноль. Явный вид коэффициента α определяется соотношением (1.80), а частный случай для чисел Прандтля $Pr \approx 1$ – соотношением (1.77). Из этих соотношений следует, что если внешняя спиральная сила отсутствует $f_0 = 0$, то α -эффект исчезает. Кроме этого, гидродинамический α -эффект (как и в неэлектропроводящей среде [85]) существует только при наличии температурной стратификации независимо от значений числа Прандтля Pr . Интересно отметить, что при $Ra = 2$ линейная неустойчивость существует при числах Прандтля $Pr \neq 1$. Коэффициент α в этом случае равен

$$\alpha = \frac{f_0^2 (Pr - 1)(1 - 2Pr - 3Pr^2)}{4 (5 - 2Pr + Pr^2)^2}. \tag{1.96}$$

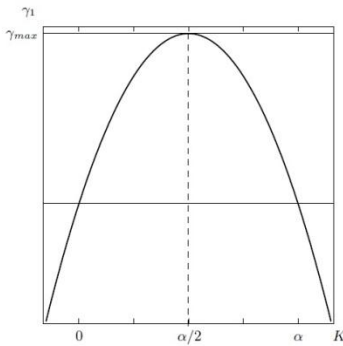


Рис. 1.1. Типичный вид инкремента $\gamma_1 = \alpha K - K^2$

от волнового числа K .

Нарастание в области $0 < K < \alpha$.

Для моды $\gamma_1 = -\alpha K - K^2$ область неустойчивости $-\alpha < K < 0$ и вид инкремента совпадает с отраженным графиком относительно вертикальной оси

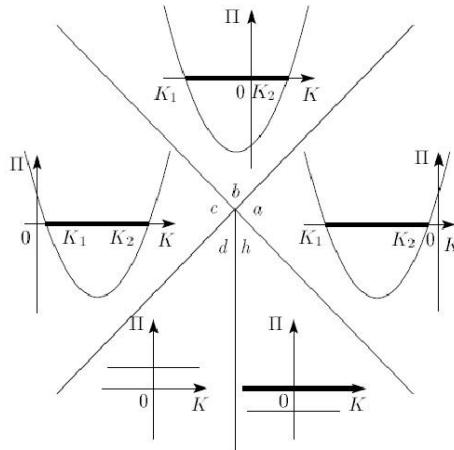


Рис. 1.2. Показаны характерные зависимости полинома Π от K в различных областях параметров. Серым цветом выделен интервал волновых чисел K , где присутствует частота $\omega = Im\sqrt{P_{(1)}^4}$

Область положительных значений второго инкремента $\gamma_2 > 0$ отвечает росту крупномасштабного магнитного поля. Максимальный инкремент $\gamma_{2max} = \frac{\alpha_H^2}{4} Pr$ достигается при $K = K_{max} = \frac{\alpha_H}{2} Pr$. Эффект генерации крупномасштабных магнитных полей мелкомасштабной спи-

ральной турбулентностью в электропроводящих средах хорошо известен и носит название магнитогидродинамического α -эффекта, или α_H -эффекта. Значение коэффициента α_H определяется соотношением

$$\alpha_H = \frac{f_0^2}{2} \frac{Pm(2(1+Pr^2) + Ra(1-Pr))}{(1+Pm^2)((1-Pr+Ra)^2 + (1+Pr)^2)}. \quad (1.97)$$

Из этого соотношения следует, что в однородной по температуре ($T_0 = const$, $Ra = 0$) электропроводящей среде генерация магнитного поля происходит лишь за счет внешней спиральной силы \vec{F}_0 , в то время как генерация вихревых возмущений не возникает. Таким образом, развитие конвективной крупномасштабной неустойчивости в электропроводящей среде на линейной стадии приводит одновременно к усилению крупномасштабных вихревых движений среды и магнитного поля. Рост амплитуды крупномасштабных возмущений оказывает влияние на динамику мелкомасштабного поля скорости \vec{v}_0 и магнитного поля \vec{B}_0 .

Учет этих эффектов будет рассмотрен в рамках нелинейной теории, аналогично развитой для крупномасштабной конвективной неустойчивости в непроводящих средах [85]-[87]. Для ряда астрофизических и геофизических проблем представляет интерес влияние мелкомасштабного магнитного поля на динамику крупномасштабных возмущений еще на линейной стадии развития. Выше было показано, что генерация крупномасштабных магнитных полей на линейной стадии развития неустойчивости возможна при наличии мелкомасштабного магнитного поля \vec{B}_0 , или известного в литературе [38] как «затравочного» магнитного поля. К настоящему времени в динамо теории выяснено множество механизмов генерации «затравочных» магнитных полей, например, при термоэффекте [88], при развитии плазменных неустойчивостей [38] и другие. Абстрагируясь от физической природы механизма возбуждения «затравочных» магнитных полей, будем моделировать их действие в виде внешнего источника \vec{F}_B , возбуждающего мелкомасштабные спиральные поля $\vec{B}_0 \text{rot} \vec{B}_0 \neq 0$. Динамика крупномасштабных полей в этих условиях описывается самосогласованной системой уравнений (1.88), в которой видно взаимное влияние крупномасштабного магнитного поля на вихревые движения среды и наоборот.

Перейдем теперь к общему случаю, при наличии мелкомасштабных стационарных флуктуаций и магнитных полей, уровень которых поддерживается источником мелкомасштабной МГД-турбулентности. Дисперсионное уравнение (1.92) можно записать в другом более удобном виде:

$$\begin{aligned} & [(K^2 - i\omega)(Pm^{-1}K^2 - i\omega) - \alpha\alpha_H K^2 + \alpha_w\beta_q K^2]^2 \\ & = [\alpha_H K(K^2 - i\omega) - \alpha K(Pm^{-1}K^2 - i\omega)]^2. \end{aligned} \quad (1.98)$$

Легко заметить, что это дисперсионное уравнение распадается на два квадратных уравнения

$$\begin{aligned} \omega^2 + i\omega((\alpha_H - \alpha)K + K^2(1 + Pm^{-1})) + [(Pm^{-1}K^2 + \alpha_H K)(\alpha K - K^2) - \alpha_w\beta_q K^2] &= 0, \\ \omega^2 + i\omega((\alpha - \alpha_H)K + K^2(1 + Pm^{-1})) - [(Pm^{-1}K^2 - \alpha_H K)(\alpha K + K^2) + \alpha_w\beta_q K^2] &= 0. \end{aligned} \quad (1.99)$$

Решения этих уравнений, несмотря на громоздкость, можно получить явно:

$$\omega_{1,2} = \frac{i}{2} [(\alpha - \alpha_H)K - (1 + Pm^{-1})K^2] \pm i\sqrt{P_{(1)}^4}, \quad (1.100)$$

где

$$P_{(1)}^4 = \frac{((\alpha - \alpha_H)K - (1 + Pm^{-1})K^2)^2}{4} + (\alpha_H K + K^2 Pm^{-1})(\alpha K - K^2) - \alpha_w\beta_q K^2, \quad (1.101)$$

$$\omega_{3,4} = \frac{i}{2} [(\alpha_H - \alpha)K - (1 + Pm^{-1})K^2] \pm i\sqrt{P_{(2)}^4}.$$

Здесь

$$P_{(2)}^4 = \frac{((\alpha_H - \alpha)K - (1 + Pm^{-1})K^2)^2}{4} + (\alpha K + K^2)(\alpha_H K - Pm^{-1}K^2) - \alpha_w\beta_q K^2. \quad (1.102)$$

Перейдем к анализу полученных дисперсионных соотношений. Начнем с обсуждения поведения величины $P_{(1)}^4$. Этот полином после громоздких вычислений преобразуется к виду

$$P_{(1)}^4 = K^2 \left\{ \frac{(1 - Pm^{-1})^2}{4} K^2 - \frac{(\alpha + \alpha_H)(1 - Pm^{-1})}{2} K + \frac{(\alpha + \alpha_H)^2}{4} - \alpha_w\beta_q \right\} \equiv K^2 \Pi.$$

Знак этого выражения определяет наличие колебательной моды с частотой, равной мнимой части этого корня $\omega = Im\sqrt{P_{(1)}^4}$. В области положительности $P_{(1)}^4 > 0$ корень из него определяет добавку к инкременту $\Delta\gamma = Re\sqrt{P_{(1)}^4}$. Из вида полинома $P_{(1)}^4$ следует, что его знак определяется знаком полинома второго порядка Π . Все возможные варианты поведения Π как функции K в различных областях параметров по-

казаны на рис. 1.2. Значения волновых чисел K_1 и K_2 определяются из уравнения $\Pi = 0$ и равны

$$K_1 = \min \left(-\frac{\alpha + \alpha_H + 2\sqrt{\alpha_W \beta_q}}{Pm^{-1} - 1}, \frac{-\alpha - \alpha_H + 2\sqrt{\alpha_W \beta_q}}{Pm^{-1} - 1} \right),$$

$$K_2 = \max \left(-\frac{\alpha + \alpha_H + 2\sqrt{\alpha_W \beta_q}}{Pm^{-1} - 1}, \frac{-\alpha - \alpha_H + 2\sqrt{\alpha_W \beta_q}}{Pm^{-1} - 1} \right).$$

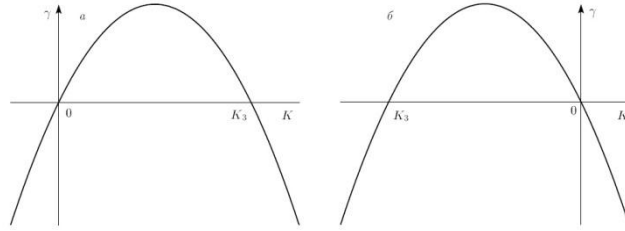


Рис. 1.3. Показаны *а)* нарастающие моды с инкрементом

$$\gamma = \frac{1}{2}[(\alpha - \alpha_H)K - (1 + Pm^{-1})K^2] \text{ в области волновых векторов}$$

$$0 < K < K_3, \text{ а в случае } б) \text{ – в области } K_3 < K < 0$$

Обсудим теперь область реализуемости случаев приведенных на рис. 1.2. Так, используя теорему Виета, легко доказать, что расположение *б)*, соответствует корням уравнения $\Pi = 0$ противоположных знаков и реализуется при условии

$$б) \quad \frac{(\alpha + \alpha_H)^2}{4} < \alpha_W \beta_q,$$

Случай, когда оба корня отрицательны, при условиях

$$а) \quad \frac{(\alpha + \alpha_H)^2}{4} > \alpha_W \beta_q \quad \text{и} \quad (\alpha + \alpha_H)(Pm^{-1} - 1) > 0,$$

когда оба положительны при

$$с) \quad \frac{(\alpha + \alpha_H)^2}{4} > \alpha_W \beta_q \quad \text{и} \quad (\alpha + \alpha_H)(Pm^{-1} - 1) < 0.$$

Графики *д)* и *г)* соответствуют вырожденному случаю $Pm^{-1} = 1$. Случай *д)* – отсутствие частоты $\omega = 0$. Выполняется при

$$\frac{(\alpha + \alpha_H)^2}{4} > \alpha_w \beta_q \quad \text{и} \quad Pt = 1$$

а *h)* с $\omega \neq 0$ – при всех волновых числах, если

$$\frac{(\alpha + \alpha_H)^2}{4} < \alpha_w \beta_q \quad \text{и} \quad Pt = 1$$

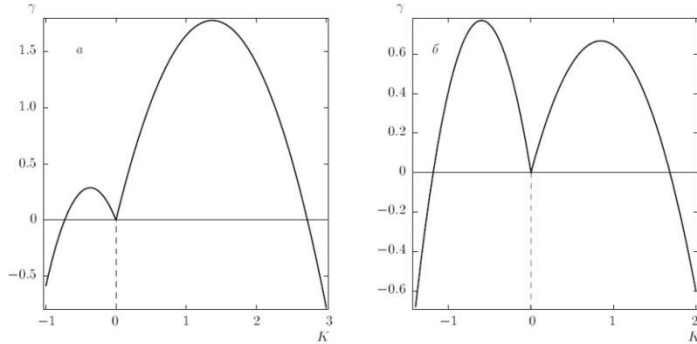


Рис. 1.4. Слева инкремент неустойчивости в зависимости от волнового числа K в области параметров *a)* и *т)*. Зависимость построена для $\alpha = 3$, $\alpha_H = 2$, $Pt^{-1} = 2$ и $\alpha_w \beta_q = 2$. Справа инкремент в области *a)* и *п)* при значениях параметров $\alpha = 2$, $\alpha_H = 3$, $Pt^{-1} = 2$ и $\alpha_w \beta_q = 2$

Перейдем теперь к анализу первого вклада в частоту (1.100). Это слагаемое чисто мнимое и поэтому дает вклад только в инкремент, при этом возможно только два расположения области неустойчивости, как показано на рис. 1.3. Граничное значение волнового вектора K_3 легко получить:

$$K_3 = \frac{\alpha - \alpha_H}{1 + Pt^{-1}},$$

условие реализации *т)* сводится к

$$т) \quad \alpha > \alpha_H,$$

а случая *п)* – к

$$п) \quad \alpha < \alpha_H.$$

Теперь для окончательного выяснения неустойчивых режимов следует совместить все приведенные условия. Так, при выполнении условий *a)* и *т)* инкремент нарастающей моды с нулевой частотой равен

$$\gamma = \frac{1}{2} [(\alpha - \alpha_H)K - (1 + Pm^{-1})K^2] + |K| \sqrt{\Pi} \quad (1.103)$$

и положителен при K , принадлежащем конечному интервалу волновых чисел. Пример инкремента в этой области параметров приведен на рис. 1.4. Аналогично выглядит инкремент в области параметров a) и n) с частотой $\omega = 0$ (см. Рис. 1.4).

Перейдем теперь в область b), m). Априори при этих условиях могут реализоваться как $K_2 > K_3$, так и $K_3 > K_2$. При этом характер неустойчивой моды качественно отличается. Условие $K_2 > K_3$ соответствует условию

$$\sqrt{\alpha_w \beta_q} (1 + Pm^{-1}) > \alpha_H + \alpha Pm^{-1}.$$

Тогда инкремент неустойчивости равен

$$\gamma = \frac{1}{2} [(\alpha - \alpha_H)K - (1 + Pm^{-1})K^2], \quad (1.104)$$

а частота неустойчивой моды определяется как

$$\omega = \pm Im |K| \sqrt{\Pi}. \quad (1.105)$$

Области, где $K_3 > K_2$, соответствуют условию

$$\sqrt{\alpha_w \beta_q} (1 + Pm^{-1}) < \alpha_H + \alpha Pm^{-1},$$

которое не совместно с условиями b), m). Поэтому этот случай не реализуется. При выполнении условий b), m) аналогично инкремент определяется соотношением (1.104) с положительным значением в области отрицательных волновых чисел $K_3 < K < 0$ и частотой $\omega = \pm Im |K| \sqrt{\Pi}$. Перейдем теперь к области параметров c) и m). В этой области параметров $K_2 > K_3$. Поэтому инкремент в этой области совпадает с инкрементом (1.103), а частота $\omega = 0$. Совершенно аналогично осуществляет анализ мод (1.102). Вид полинома $P_{(2)}^4$ отличается от полинома $P_{(1)}^4$ только знаком при кубическом члене

$$P_{(2)}^4 = K^2 \left\{ \frac{(1 - Pm^{-1})^2}{4} K^2 + \frac{(\alpha + \alpha_H)(1 - Pm^{-1})}{2} K + \frac{(\alpha + \alpha_H)^2}{4} - \alpha_w \beta_q \right\}.$$

Легко заметить, что при замене знака $(1 - Pm^{-1}) \rightarrow -(1 - Pm^{-1})$ этот полином переходит в полином, проанализированный выше. Поэтому анализ инкремента и условий его реализуемости сводится к использованию этого свойства. Соответственно мы упускаем очевидное, но громоздкое описание этого случая. Анализ вырожденных случаев $Pm = 1$ тривиален и сводится к обращению полинома Π в постоянную

$$\Pi = \frac{(\alpha + \alpha_H)^2}{4} - \alpha_w \beta_q,$$

знак которой и определяет, будет ли эта добавка к частоте или инкременту.

Таким образом, в общем случае можно наблюдать только два режима. Один соответствует волновой моде с частотой (1.105) и инкрементом (1.104), второй неустойчивости с инкрементом (1.103) и частотой $\omega = 0$. Области параметров – в которых они реализуются, описаны выше. Эти условия сформулированы в терминах параметров α , α_H , α_w, β_q , которые зависят от безразмерных чисел Ra , Pr , Pm , Q . Поэтому важно проверить

наличие областей реализации неустойчивых мод в терминах исходных безразмерных чисел. Связи параметров с безразмерными числами приведены в разделе 1.4. Используя их, построим области параметров в которых реализуются два режима описанных выше. На рис. 1.5 области показаны на плоскости (Pr, Ra) при фиксированных значениях $Pm = 2$ и $Q = 2$. Кроме этого амплитуды f_0 и b_0 выбраны единичными. Разумеется, при изменении Pm и Q соответствующие области меняют свою форму, но сами области присутствуют и при других значениях Pm и Q .

В заключение этого раздела приведем количественные оценки характерных масштабов и времен крупномасштабной неустойчивости для солнечной плазмы. Для этого нужно оценить коэффициенты усиления α и α_H . Полученные ранее соотношения (1.94), (1.95), (1.104) определяют максимальное значение инкремента $\gamma_{max} \approx \alpha^2$. Соответственно,

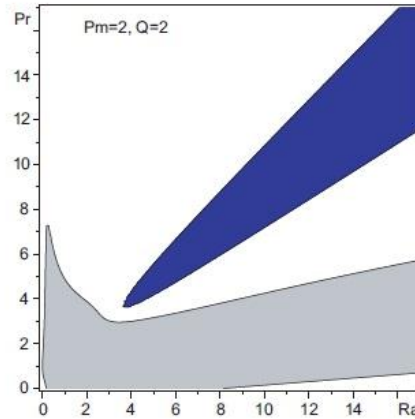


Рис. 1.5. Синим показана область, соответствующая условиям a) и n), при которых $\omega = 0$, а инкремент равен (1.103). Серым – область b) и m), в этих условиях инкремент определяется соотношением (1.104), а частота – соотношением (1.105)

характерный масштаб неустойчивой моды $L_{max} \simeq \frac{1}{\alpha}$ и характерный временной масштаб ее нарастания $T \simeq 1/\gamma_{max}$. Приведенные соотношения записаны в безразмерных переменных. Для их оценки прежде всего оценим величину источника, поддерживающего стационарный уровень мелкомасштабной скорости. Предполагая в стационаре баланс между источником и диссипацией, из уравнения (1.1) получим

$$F_0 \simeq \frac{\nu v_0}{l^2}.$$

Учитывая, что источник должен обладать спиральностью, оценим его амплитуду через гидродинамическую спиральность $\alpha_v = \tau \langle v_0 \text{rot} v_0 \rangle / 3$. Выражая скорость через амплитуду источника

$$\alpha_v \simeq \frac{\tau v_0^2}{3l} \simeq \frac{\tau}{3l} \left(\frac{F_0 l^2}{\nu v_0} \right)^2 v_0^2 \simeq \frac{\tau v_0^2}{3l} f_0^2,$$

здесь f_0 – безразмерная сила, входящая в коэффициент усиления α . Таким образом, амплитуду силы можно оценить как

$$f_0^2 \simeq \frac{3\alpha_v \nu}{l v_0^2},$$

напомним, что l – это пространственный масштаб мелкомасштабных движений. Этот масштаб удобно оценить через число Рейнольдса мелкомасштабных пульсаций. Тогда $l \simeq R\nu / v_0$, и окончательно получим

$$f_0^2 \simeq \frac{3\alpha_v}{R\nu}.$$

Возвращаясь к соотношению (1.80) при малых числах Прандтля, легко получить коэффициент α в виде

$$\alpha \simeq \frac{f_0^2}{Ra^2} \simeq \frac{3\alpha_v}{RRa^2 \nu}.$$

Тогда характерный масштаб крупномасштабной неустойчивости определяется как

$$L \simeq l \frac{\nu_0 R Ra^2}{3\alpha_v}, \quad (1.106)$$

если выразить масштаб мелкомасштабных движений l через число Рейнольдса, то оценка принимает вид

$$L \approx \frac{\nu(RRa)^2}{3\alpha_\nu}.$$

Аналогично получим оценку для характерных времен в виде

$$T \approx \frac{1}{\nu} \left(\frac{R^2 Ra^2}{3\alpha_\nu} \right)^2.$$

Из соотношения (1.106) легко заметить, что насколько крупный масштаб превосходит масштаб мелкомасштабных движений определяется произведением RRa^2 . Для оценок часто используют $\alpha_\nu \approx \nu_0$ (см., например, [89]).

Теперь в качестве примера рассмотрим конвективную зону Солнца. Как известно, она состоит из конвективных ячеек с вертикальным размером порядка 100 км и горизонтальным размером порядка 500 км (см., например, [90]). Кроме того, имеется супергрануляция с горизонтальным масштабом порядка 20 тысяч километров. Сами конвективные ячейки являются квазистационарными с характерным временем жизни порядка 10 минут. Будем рассматривать движение газа внутри конвективной ячейки как мелкомасштабное, вплоть до 1/3 высоты ячейки, другими словами, вплоть до масштабов порядка $l_0 \approx 30$ км. Масштабы, превышающие эти, будем рассматривать как крупномасштабные. Турбулентная вязкость и турбулентная теплопроводность практически одинаковы и равны примерно $10^{11} \div 10^{12}$ см²/сек. Поэтому число Прандтля порядка единицы. Сами конвективные ячейки можно считать примерно находящимися на границе устойчивости, поэтому их число Рэлея можно оценить из решения задачи о конвекции со свободными границами, что, как известно, даёт $Ra \approx \left(\frac{27}{4}\right)\pi^4$. Поскольку градиент температуры внутри ячейки считается примерно постоянным, то легко оценить число Рэлея Ra_0 на масштабе $l_0 \approx 30$ км:

$$Ra_0 \approx Ra \frac{1}{(3.3)^4} = 5.5.$$

Скорость движения газа в ячейке примерно $\nu_0 \approx 1$ км/сек. (см. [90]).

Отсюда можно оценить турбулентное число Рейнольдса $R = \frac{l_0 \nu_0}{\nu_T}$ на масштабе $l_0 \approx 30$ км. Учитывая значение турбулентной вязкости ν_T , получим:

$R = \frac{l_0 v_0}{v_T} \approx 0.3 \div 3 \sim 1$. Тот факт, что турбулентное число Рейнольдса порядка единицы, ясен уже из квазистационарного характера конвекции. Используя для α формулу (1.77) с числом Релея Ra_0 , при $f_0^2 \sim 3/R$ и формулу: $L = l_0 2\pi / \alpha$ для характерного масштаба неустойчивости, можем оценить численное значение величины $L \approx 61 \cdot l_0 = 1830$ км. Учитывая характерный размер ячеек, видно, что неустойчивость закручивает примерно три, четыре ячейки. Аналогично можно оценить характерное время развития неустойчивости T по формуле:

$$T = t_0 \frac{4}{\alpha^2}, \quad t_0 = \frac{l_0^2}{v}.$$

Подставляя численные значения параметров, получаем:

$$T \approx 37.2 \text{ часа.}$$

В результате развития неустойчивости в конвективной зоне Солнца генерируется вихревая структура типа циклона, который захватывает несколько конвективных ячеек. При $R \sim 1$ его горизонтальные и вертикальные масштабы примерно одинаковы.

2.2. НЕЛИНЕЙНОЕ МАГНИТО-ВИХРЕВОЕ ДИНАМО В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ МЕЛКОМАСШТАБНОЙ СПИРАЛЬНОСТЬЮ

В этом разделе исследуется нелинейная стадия крупномасштабной неустойчивости в стратифицированной электропроводящей среде с мелкомасштабной спиральной силой. Развитая в предыдущем разделе линейная теория [84] справедлива лишь на начальном этапе развития крупномасштабной неустойчивости, когда величины крупномасштабных полей (магнитных и вихревых) еще малы. Поэтому здесь мы уделим внимание нелинейной стадии развития крупномасштабной конвективной неустойчивости в стратифицированной электропроводящей среде [91], [92]. В качестве математического формализма используем асимптотический метод многомасштабных разложений, который позволяет получить замкнутые нелинейные уравнения для крупномасштабных магнитных и гидродинамических полей. Будет показано, что для малых возмущений нелинейные уравнения преобразуются к уже известным уравнениям, описывающим гидродинами-

ческий и магнитный α -эффекты. Проведенный в данном разделе аналитический и численный анализ нелинейных уравнений для стационарного магнитного поля показал существование локализованных магнитных структур. Полученные в работе результаты могут найти применение как для астрофизических задач, так и для лабораторных исследований в установках по удержанию плазмы типа ТОКАМАК.

2.1. Уравнения нелинейного динамо в «квазидвумерной» модели

Рассмотрим более детально применение метода многомасштабных асимптотических разложений к проблеме нелинейной эволюции крупномасштабных вихревых и магнитных возмущений в конвективной электропроводящей среде. Для построения многомасштабных асимптотических разложений будем следовать работам [91], [92]. Обозначим мелкомасштабные переменные $x_0 = (\vec{x}_0, t_0)$, а крупномасштабные — $X = (\vec{X}, T)$. Производную $\frac{\partial}{\partial x_0^i}$ обозначим ∂_i , а производную $\frac{\partial}{\partial t_0}$ — через ∂_t . Далее крупномасштабные пространственные и временные производные будем обозначать: $\frac{\partial}{\partial X_i} \equiv \nabla_i$, $\frac{\partial}{\partial T} \equiv \partial_T$. В соответствии с методом многих масштабов представим пространственные и временные производные в уравнениях (1.5)-(1.8) в виде производных по мелкомасштабным и крупномасштабным переменным:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \rightarrow \partial_i + R^2 \nabla_i, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \partial_t + R^4 \partial_T. \quad (2.1)$$

Возмущенные поля \vec{v} , T , \vec{B} и P разложим в ряды по малому параметру R :

$$\begin{aligned} \vec{V}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{R} W_{-1}(X) + \vec{v}_0(x_0) + R \vec{v}_1 + R^2 \vec{v}_2 + R^3 \vec{v}_3 + \dots \\ T(\vec{x}, t) &= \frac{1}{R} T_{-1}(X) + T_0(x_0) + R T_1 + R^2 T_2 + R^3 T_3 + \dots \\ \vec{B}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{R} \vec{B}_{-1}(X) + \vec{B}_0(x_0) + R \vec{B}_1 + R^2 \vec{B}_2 + R^3 \vec{B}_3 + \dots \\ P(\vec{x}, t) &= \frac{1}{R^3} P_{-3} + \frac{1}{R^2} P_{-2} + \frac{1}{R} P_{-1} + P_0 + R(P_1 + \bar{P}_1(X)) + R^2 P_2 + R^3 P_3 + \dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь вклад P_1 зависит от мелкомасштабных переменных, а $\bar{P}_1(X)$ – только от крупномасштабных. Подставляя разложения (2.1)-(2.2) в систему уравнений (1.5)-(1.8) и собирая члены одинакового порядка по R до степени R^3 включительно, получаем систему уравнений многомасштабного асимптотического разложения. Основная проблема состоит в выделении из этих уравнений секулярных условий, которые и определяют динамику возмущений на крупных масштабах. Алгебраическая структура асимптотического разложения уравнений (1.5)-(1.8) в различных порядках по R приведена в работе [92]. Там же показано, что именно в порядке R^3 получаются основные секулярные уравнения, т.е. уравнения для крупномасштабных полей:

$$\partial_T W_i - \Delta W_i + \nabla_k \overline{(v_0^k v_0^i)} = -\nabla_i \bar{P} + \tilde{Q} \left(\nabla_k \overline{(B_0^i B_0^k)} - \frac{\nabla_i}{2} \overline{(B_0^k)^2} \right), \quad (2.3)$$

$$\partial_T H_i - P m^{-1} \Delta H_i = \nabla_j \overline{(v_0^i B_0^j)} - \nabla_j \overline{(v_0^j B_0^i)}, \quad (2.4)$$

$$\partial_T \Theta - P r^{-1} \Delta \Theta + \nabla_k \overline{(v_0^k T_0)} = 0. \quad (2.5)$$

Уравнения (2.3)-(2.5) дополняются секулярными уравнениями:

$$\nabla_k (W_k W_i) = -\nabla_i \bar{P} + \tilde{Q} (\nabla_k H_i - \nabla_i H_k) H_k,$$

$$\nabla_k (W_k \Theta) = 0,$$

$$W_j \nabla_j H_i = H_j \nabla_j W_i,$$

$$\nabla_i W_i = 0, \quad \nabla_i H_i = 0, \quad W_z = 0.$$

Таким образом, для получения системы уравнений (2.3)-(2.5), описывающей эволюцию крупномасштабных полей \vec{W} и \vec{H} , потребовалось дойти до третьего порядка теории возмущения. Это довольно характерное явление при применении метода многомасштабных разложений. Уравнения (2.3)-(2.5) приобретают замкнутый вид после вычисления корреляционных функций – напряжений Рейнольдса:

$$\overline{v_0^k v_0^i} = \overline{v_{01}^k (v_{01}^i)^*} + \overline{(v_{01}^k)^* v_{01}^i} + \overline{v_{03}^k (v_{03}^i)^*} + \overline{(v_{03}^k)^* v_{03}^i} = T_{(1)}^{ki} + T_{(2)}^{ki},$$

напряжений Максвелла:

$$\overline{B_0^i B_0^k} = \overline{B_{01}^i (B_{01}^k)^*} + \overline{(B_{01}^i)^* B_{01}^k} + \overline{B_{03}^i (B_{03}^k)^*} + \overline{(B_{03}^i)^* B_{03}^k} = S_{(1)}^{ik} + S_{(2)}^{ik}$$

и корреляторов, входящих в определение турбулентной э.д.с.

$$\mathcal{E}_n = \varepsilon_{nij} \overline{v_0^i B_0^j} :$$

$$\overline{v_0^i B_0^j} = \overline{v_{01}^i (B_{01}^j)^*} + \overline{(v_{01}^i)^* B_{01}^j} + \overline{v_{03}^i (B_{03}^j)^*} + \overline{(v_{03}^i)^* B_{03}^j} = G_{(1)}^{ij} + G_{(2)}^{ij}.$$

Комплексно-сопряженные величины здесь и далее будем обозначать звездочкой. Во многих астрофизических и геофизических задачах часто применяется «квазидвумерное» приближение для описания динамики крупномасштабных вихревых и магнитных полей [26], [38], [85]-[87]. В рамках этого приближения для нашей задачи будем считать, что крупномасштабная производная по Z более предпочтительная, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial Z}, \frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y},$$

а геометрия крупномасштабных полей имеет следующий вид:

$$\vec{W} = (W_1(Z), W_2(Z), 0), \vec{H} = (H_1(Z), H_2(Z), 0). \quad (2.6)$$

Окончательно с учетом геометрии задачи (2.6), уравнения для крупномасштабных возмущений примут вид:

$$\partial_T W_1 - \nabla_Z^2 W_1 + \nabla_Z (\overline{v_0^z v_0^x}) = \tilde{Q} \nabla_Z (\overline{B_0^z B_0^x}), \quad (2.7)$$

$$\partial_T W_2 - \nabla_Z^2 W_2 + \nabla_Z (\overline{v_0^z v_0^y}) = \tilde{Q} \nabla_Z (\overline{B_0^z B_0^y}), \quad (2.8)$$

$$\partial_T H_1 - Pm^{-1} \nabla_Z^2 H_1 = \nabla_Z (\overline{v_0^x B_0^z}) - \nabla_Z (\overline{v_0^z B_0^x}), \quad (2.9)$$

$$\partial_T H_2 - Pm^{-1} \Delta H_2 = \nabla_Z (\overline{v_0^y B_0^z}) - \nabla_Z (\overline{v_0^z B_0^y}), \quad (2.10)$$

$$\partial_T \Theta - Pr^{-1} \nabla_Z^2 \Theta + \nabla_Z (\overline{v_0^z T_0}) = 0, \quad (2.11)$$

$$\tilde{Ra} \Theta e_z = \tilde{\nabla}_Z P_{-3}, \quad \nabla_Z \equiv \frac{\partial}{\partial Z}. \quad (2.12)$$

Для получения уравнений (2.8)-(2.10) в замкнутом виде мы используем решения уравнений для мелкомасштабных полей в нулевом порядке по R , полученные в [91]-[92]:

$$v_0^k = v_{01}^k + v_{02}^k + v_{03}^k + v_{04}^k,$$

$$B_0^i = B_{01}^i + B_{02}^i + B_{03}^i + B_{04}^i, \quad T_0 = T_{01} + T_{02} + T_{03} + T_{04},$$

где $v_{02}^k = (v_{01}^k)^*$, $v_{04}^k = (v_{03}^k)^*$, $B_{02}^k = (B_{01}^k)^*$, $B_{04}^k = (B_{03}^k)^*$, $T_{02} = (T_{01})^*$, $T_{04} = (T_{03})^*$.

$$v_{01}^k = e^{i\phi_1} \left[\delta_{kj} - \frac{\tilde{R}a \hat{P}_{kn} e_n e_j}{\hat{q}_1^* \hat{D}_{W_1}^* \hat{D}_{\theta_1}^* + \tilde{R}a} \right] \frac{A_j}{\hat{q}_1^* \hat{D}_{W_1}^*},$$

$$v_{03}^k = e^{i\phi_2} \left[\delta_{kj} - \frac{\tilde{R}a \hat{P}_{kn} e_n e_j}{\hat{q}_2^* \hat{D}_{W_2}^* \hat{D}_{\theta_2}^* + \tilde{R}a} \right] \frac{B_j}{\hat{q}_2^* \hat{D}_{W_2}^*},$$

$$T_{01} = -e^{i\phi_1} \left[1 - \frac{\tilde{R}a \hat{P}_{kn} e_n e_k}{\hat{q}_1^* \hat{D}_{W_1}^* \hat{D}_{\theta_1}^* + \tilde{R}a} \right] \frac{(\vec{e}\vec{A})}{\hat{q}_1^* \hat{D}_{W_1}^* \hat{D}_{\theta_1}^*},$$

$$T_{03} = -e^{i\phi_2} \left[1 - \frac{\tilde{R}a \hat{P}_{kn} e_n e_k}{\hat{q}_2^* \hat{D}_{W_2}^* \hat{D}_{\theta_2}^* + \tilde{R}a} \right] \frac{(\vec{e}\vec{B})}{\hat{q}_2^* \hat{D}_{W_2}^* \hat{D}_{\theta_2}^*},$$

$$B_{01}^k = e^{i\phi_1} \left[\delta_{kj} - \frac{\tilde{R}a \hat{P}_{kn} e_n e_j}{\hat{q}_1^* \hat{D}_{W_1}^* \hat{D}_{\theta_1}^* + \tilde{R}a} \right] \frac{iH_1 A_j}{\hat{q}_1^* \hat{D}_{W_1}^* \hat{D}_{H_1}^*},$$

$$B_{03}^k = e^{i\phi_2} \left[\delta_{kj} - \frac{\tilde{R}a \hat{P}_{kn} e_n e_j}{\hat{q}_2^* \hat{D}_{W_2}^* \hat{D}_{\theta_2}^* + \tilde{R}a} \right] \frac{iH_2 B_j}{\hat{q}_2^* \hat{D}_{W_2}^* \hat{D}_{H_2}^*},$$

где

$$\hat{D}_W(\omega_0, -\vec{\kappa}_1) = i(1 - W_1) + 1 = \hat{D}_{W_1},$$

$$\hat{D}_W(\omega_0, -\vec{\kappa}_1) = \hat{D}_{W_1}^*, \quad \hat{D}_H(\omega_0, -\vec{\kappa}_1) = i(1 - W_1) + Pm^{-1} = \hat{D}_{H_1},$$

$$\hat{D}_H(\omega_0, -\vec{\kappa}_1) = \hat{D}_{H_1}^*, \quad \hat{D}_\theta(\omega_0, -\vec{\kappa}_1) = i(1 - W_1) + Pr^{-1} = \hat{D}_{\theta_1}, \quad \hat{D}_\theta(\omega_0, -\vec{\kappa}_1) = \hat{D}_{\theta_1}^*,$$

$$\hat{q}(\omega_0, -\vec{\kappa}_1) = 1 + \frac{\tilde{Q}H_1^2}{(i(1 - W_1) + 1)(i(1 - W_1) + Pm^{-1})} = \hat{q}_1,$$

$$\hat{q}(-\omega_0, \vec{\kappa}_1) = \hat{q}_1^*, \quad H_1 = H_x, \quad W_1 = W_x,$$

аналогично для вектора \vec{K}_2 имеем:

$$\begin{aligned} \hat{D}_W(\omega_0, -\vec{k}_2) &= i(1-W_2) + 1 = \hat{D}_{W_2}, \quad \hat{D}_W(\omega_0, -\vec{k}_2) = \hat{D}_{W_2}^*, \\ \hat{D}_H(\omega_0, -\vec{k}_2) &= i(1-W_2) + Pm^{-1} = \hat{D}_{H_2}, \quad \hat{D}_H(\omega_0, -\vec{k}_2) = \hat{D}_{H_2}^*, \\ \hat{D}_\theta(\omega_0, -\vec{k}_2) &= i(1-W_2) + Pr^{-1} = \hat{D}_{\theta_2}, \quad \hat{D}_\theta(\omega_0, -\vec{k}_2) = \hat{D}_{\theta_2}^*, \\ \hat{q}(\omega_0, -\vec{k}_2) &= 1 + \frac{\tilde{Q}H_2^2}{(i(1-W_2)+1)(i(1-W_2)+Pm^{-1})} = \hat{q}_2, \\ \hat{q}(-\omega_0, \vec{k}_2) &= \hat{q}_2^*, \quad H_2 = H_y, W_2 = W_y. \end{aligned}$$

Далее необходимо вычислить корреляторы, входящие в систему уравнений (2.8)-(2.10). В результате вычислений компонент $T_{(2)}^{31}, T_{(1)}^{32}, S_{(2)}^{31}, S_{(1)}^{32}, \delta G_{(2)} = G_{(2)}^{13} - G_{(2)}^{31}, \delta G_{(1)} = G_{(1)}^{23} - G_{(1)}^{32}$ мы получили замкнутые уравнения для крупномасштабных полей скорости (W_1, W_2) и магнитного поля (H_1, H_2) следующего вида:

$$\partial_T W_1 - \nabla_Z^2 W_1 - \nabla_Z \left[\alpha^{(2)} \cdot (1-W_2) \left(1 - \frac{H_2^2 Pm Q}{(1+Pm^2(1-W_2)^2)} \right) \right] = 0, \quad (2.13)$$

$$\partial_T W_2 - \nabla_Z^2 W_2 + \nabla_Z \left[\alpha^{(1)} \cdot (1-W_1) \left(1 - \frac{H_1^2 Pm Q}{(1+Pm^2(1-W_1)^2)} \right) \right] = 0, \quad (2.14)$$

$$\partial_T H_1 - Pm^{-1} \nabla_Z^2 H_1 - \nabla_Z (\alpha_H^{(2)} \cdot H_2) = 0, \quad (2.15)$$

$$\partial_T H_2 - Pm^{-1} \nabla_Z^2 H_2 + \nabla_Z (\alpha_H^{(1)} \cdot H_1) = 0. \quad (2.16)$$

Уравнения (2.13)-(2.16) описывают нелинейную динамику крупномасштабных полей в электропроводящей среде с неоднородностью по температуре. Связь между компонентами крупномасштабного вихревого и магнитного поля осуществляется при помощи коэффициентов нелинейного гидродинамического (ГД) $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}$ и магнитогидродинамического (МГД) $\alpha_H^{(1)}, \alpha_H^{(2)}$ α -эффекта. Причем коэффициенты нелинейного

ГД и МГД α -эффекта являются функциями крупномасштабных полей скорости \vec{W} и магнитного поля \vec{H} :

$$\begin{aligned} \alpha^{(1)} = & \frac{\tilde{R}a(1 + Pm^2\tilde{W}_1^2) \left[(1 + Pr)(1 + Pm^2\tilde{W}_1^2) + QH_1^2(Pr - Pm) \right]}{2 \left[(1 - Pm\tilde{W}_1^2 + QH_1^2)^2 + \tilde{W}_1^2(1 + Pm)^2 \right]} \times \\ & \times \left[\left((1 - Pm\tilde{W}_1^2 + QH_1^2)^2 + \tilde{W}_1^2(1 + Pm)^2 \right) (1 + Pr^2\tilde{W}_1^2) + \right. \\ & \left. + 2Ra \left((1 - Pr\tilde{W}_1^2) (1 + Pm^2\tilde{W}_1^2) + QH_1^2(1 + Pm\tilde{W}_1^2) \right) + Ra^2(1 + Pm^2\tilde{W}_1^2) \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \alpha^{(2)} = & \frac{\tilde{R}a(1 + Pm^2\tilde{W}_2^2) \left[(1 + Pr)(1 + Pm^2\tilde{W}_2^2) + QH_2^2(Pr - Pm) \right]}{2 \left[(1 - Pm\tilde{W}_2^2 + QH_2^2)^2 + \tilde{W}_2^2(1 + Pm)^2 \right]} \times \\ & \times \left[\left((1 - Pm\tilde{W}_2^2 + QH_2^2)^2 + \tilde{W}_2^2(1 + Pm)^2 \right) (1 + Pr^2\tilde{W}_2^2) + \right. \\ & \left. + 2Ra \left((1 - Pr\tilde{W}_2^2) (1 + Pm^2\tilde{W}_2^2) + QH_2^2(1 + Pm\tilde{W}_2^2) \right) + Ra^2(1 + Pm^2\tilde{W}_2^2) \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \alpha_H^{(1)} = & \frac{Pm}{\left((1 - Pm\tilde{W}_1^2 + QH_1^2)^2 + \tilde{W}_1^2(1 + Pm)^2 \right)} \left\{ 1 - \right. \\ & - Ra \left[(1 - Pr\tilde{W}_1^2) + \frac{QH_1^2(1 + Pr Pm\tilde{W}_1^2)}{(1 + Pm^2\tilde{W}_1^2)} + Ra \right] \times \\ & \times \left[\left((1 - Pm\tilde{W}_1^2 + QH_1^2)^2 + \tilde{W}_1^2(1 + Pm)^2 \right) \frac{(1 + Pr^2\tilde{W}_1^2)}{(1 + Pm^2\tilde{W}_1^2)} + \right. \\ & \left. \left. + 2Ra \left[(1 - Pr\tilde{W}_1^2) + \frac{QH_1^2(1 + Pr Pm\tilde{W}_1^2)}{(1 + Pm^2\tilde{W}_1^2)} \right] + Ra^2 \right]^{-1} \right\}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_H^{(2)} &= \frac{Pm}{\left((1 - Pm\tilde{W}_2^2 + QH_2^2)^2 + \tilde{W}_2^2(1 + Pm)^2 \right)} \times \\
 &\times \left\{ 1 - Ra \left[\left(1 - Pr\tilde{W}_2^2 \right) + \frac{QH_2^2(1 + PrPm\tilde{W}_2^2)}{(1 + Pm^2\tilde{W}_2^2)} + Ra \right] \times \right. \\
 &\times \left[\left((1 - Pm\tilde{W}_2^2 + QH_2^2)^2 + \tilde{W}_2^2(1 + Pm)^2 \right) \frac{(1 + Pr^2\tilde{W}_2^2)}{(1 + Pm^2\tilde{W}_2^2)} + \right. \\
 &\left. \left. + 2Ra \left[\left(1 - Pr\tilde{W}_2^2 \right) + \frac{QH_2^2(1 + PrPm\tilde{W}_2^2)}{(1 + Pm^2\tilde{W}_2^2)} + Ra^2 \right]^{-1} \right] \right\}. \quad (2.20)
 \end{aligned}$$

Здесь приняты обозначения $\tilde{W}_1 = 1 - W_1$, $\tilde{W}_2 = 1 - W_2$ для сокращения записи формул (2.17)-(2.20). Отметим, что нелинейный ГД α -эффект, описываемый системой уравнений (2.13)-(2.14), возможен при наличии стратификации по температуре, т.е. числа Рэлея $Ra \neq 0$ и внешней спиральной силы $\vec{f}_0 \neq 0$. Напротив, нелинейный МГД α -эффект возникает и при условии, когда нет подогрева $Ra = 0$. В пределе не электропроводной среды $\sigma = 0$, уравнения (2.13)-(2.14) полностью совпадают с результатами работы [87].

2.2. Стационарные крупномасштабные хаотические структуры

Учитывая зависимость правых частей системы нелинейных уравнений от \vec{W} , \vec{H} , естественно ожидать, что с ростом возмущений нелинейные коэффициенты $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $\alpha_H^{(1)}$, $\alpha_H^{(2)}$ уменьшаются и неустойчивость стабилизируется. В результате образуются нелинейные стационарные структуры. Для описания таких структур рассмотрим нелинейную систему уравнений (2.13)-(2.16) в стационарном случае, полагая $\partial_T W_1 = \partial_T W_2 = \partial_T H_1 = \partial_T H_2 = 0$ и интегрируя эти уравнения по Z , получим:

$$\frac{d\tilde{W}_1}{dZ} = \alpha^{(2)}\tilde{W}_2 \left(1 - \frac{QH_2^2 Pm}{1 + Pm^2\tilde{W}_2^2} \right) + C_1, \quad (2.21)$$

$$\frac{d\tilde{W}_2}{dZ} = -\alpha^{(1)}\tilde{W}_1 \left(1 - \frac{QH_1^2 Pm}{1 + Pm^2 \tilde{W}_1^2} \right) + C_2, \quad (2.22)$$

$$\frac{1}{Pm} \frac{dH_1}{dZ} = -\alpha_H^{(2)} H_2 + C_3, \quad (2.23)$$

$$\frac{1}{Pm} \frac{dH_2}{dZ} = \alpha_H^{(1)} H_1 + C_4. \quad (2.24)$$

Здесь C_1 , C_2 , C_3 и C_4 – произвольные постоянные интегрирования. Уравнения (2.21)-(2.24) представляют собой нелинейную динамическую систему в четырехмерном фазовом пространстве. Можно доказать, что система уравнений (2.21)-(2.24) консервативна. Однако поиск гамильтониана этой нелинейной системы технически громоздкая задача. Даже если он существует, то его можно получить только в квадратурах и выполнение интегрирования выводит его за класс элементарных функций. В случае общего положения у такой консервативной нелинейной системы, четырех связанных уравнений, в фазовом пространстве отсутствуют аттракторы. Полный качественный анализ этой системы исключительно сложен как из-за высокой размерности фазового пространства, так и большого числа параметров, входящих в систему. Одно из общих свойств, которые просто заметить – это инвариантность системы уравнений относительно преобразования $(\tilde{W}_1, \tilde{W}_2, H_1, H_2) \rightarrow (-\tilde{W}_1, -\tilde{W}_2, -H_1, -H_2)$ и при нулевых постоянных $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$ в фазовом пространстве присутствует неподвижная точка в начале координат фазового пространства.

Кроме этого следует ожидать в такой системе консервативных уравнений наличия структуры резонансных и нерезонансных торов в фазовом пространстве. Это означает существование хаотических стационарных структур гидродинамических и магнитных полей. Для доказательства наличия таких стационарных траекторий рассмотрим сечения Пуанкаре траекторий в фазовом пространстве. На рис. 2.1 показаны примеры таких сечений, полученные численно для безразмерных параметров $Q = Pm = Pr = 1$, $Ra = 2$ и постоянных $C_1 = C_2 = 0.01$, $C_3 = C_4 = 0.001$. Верхняя часть рис. 2.1 демонстрирует сечение Пуанкаре регулярной траектории, как поля скорости, так и магнитного поля. На нижнем сечении хорошо заметна структура хаотического слоя, которому и принадлежит выбранная траектория. Наличие таких хаотических траекторий означает существование стационарных хаотических структур как поля скорости, так и магнитного поля. Для них характерно хаотическое изменение направлений скорости и магнитных полей с высотой Z . Таким образом, у этой системы уравнений существуют стационарные хаотические решения. На рис. 2.2 представлена зависимость

стационарных крупномасштабных полей от высоты Z , которая была получена численно для начальных условий, которые соответствуют сечениям Пуанкаре на рис. 2.1. Из этих рисунков также видно появление стационарных хаотических решений для магнитного и вихревого поля.

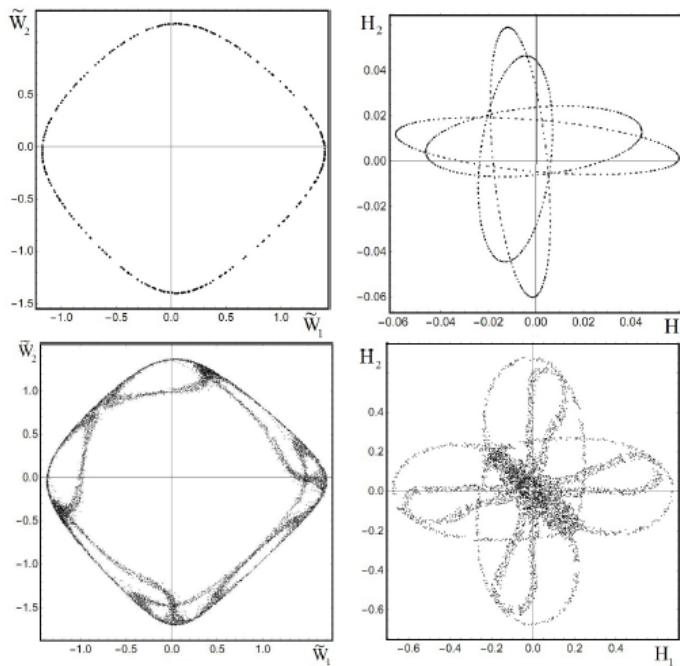


Рис. 2.1. Показаны сечения Пуанкаре для двух траекторий.

Сверху для траектории с начальными условиями $\tilde{W}_1(0) = 0.8, \tilde{W}_2(0) = 0.8,$

$H_1(0) = 0.01, H_2(0) = 0.01$, а снизу с начальными условиями $\tilde{W}_1(0) = 0.9,$

$\tilde{W}_2(0) = 0.9, H_1(0) = 0.01, H_2(0) = 0.01$. Для левых рисунков секущая плоскость

натянута на единичные координатные вектора скорости, а для правых – на координатные вектора магнитного поля. Легко заметить, что траектория, соответствующая верхним рисункам, навивается на торы. Это регулярный тип траекторий. Нижние рисунки демонстрируют стохастические слои, которым и принадлежит соответствующая хаотическая траектория

Следует заметить, что структура магнитного поля на нижней части рис. 2.2 с увеличением высоты демонстрирует перемежаемую структуру, состоящую из повторов участка, показанного на рисунке с различными расстояниями между такими всплесками. При численном решении системы уравнений (2.21)-(2.24) возникновение хаотических структур наблюдалось с увеличением амплитуд начальных скоростей. При малых начальных скоростях и магнитных полях типичными являются регулярные траектории. С ростом амплитуды скорости при превышении некоторого критического значения появляются хаотические траектории

и при увеличении начальной скорости доля пространства занятых точками хаотической траектории на сечениях Пуанкаре возрастает. В этих условиях типичными становятся хаотические решения.

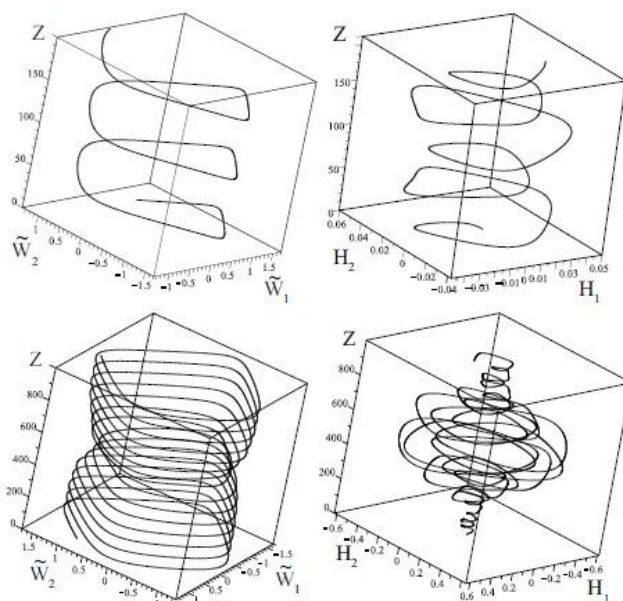


Рис. 2.2. Сверху показана зависимость скорости и магнитного поля с высотой для численного решения системы уравнений (2.21)-(2.24) с начальными условиями: $\tilde{W}_1(0) = 0.8$, $\tilde{W}_2(0) = 0.8$, $H_1(0) = 0.01$, $H_2(0) = 0.01$.

Зависимость соответствует регулярным движениям сечения Пуанкаре, которые показаны на рис. 2.1 сверху. Снизу аналогичная зависимость для численного решения системы уравнений (2.21)-(2.24) с начальными условиями: $\tilde{W}_1(0) = 0.9$,

$\tilde{W}_2(0) = 0.9$, $H_1(0) = 0.01$, $H_2(0) = 0.01$. Эта хаотическая зависимость соответствует сечениям Пуанкаре на рис. 2.1, показанным внизу

2.3. Стационарные нелинейные магнитные структуры

Рассмотрим теперь более подробно, какие нелинейные структуры могут возникать в конвективной электропроводящей турбулентной среде в некоторых предельных случаях. Пусть генерация крупномасштабных вихревых возмущений в конвективной среде еще не вышла на стационарный режим, а возмущения крупномасштабного магнитного поля уже достигли своего насыщения на стационарном уровне. Тогда влиянием малых амплитуд крупномасштабных вихревых возмущений $W_{1,2} \ll 1$ на

эволюцию крупномасштабного магнитного поля мы можем пренебречь. В результате из уравнений нелинейного динамо (2.13)-(2.16) получаем уравнения для эволюции стационарного крупномасштабного магнитного поля:

$$\frac{dH_1}{dZ} = -\frac{H_2(Q^2 H_2^4 + RaQH_2^2 + 4)}{(Q^2 H_2^4 + 4)(Q^2 H_2^4 + 2RaQH_2^2 + Ra^2 + 4)} + C_3, \quad (2.25)$$

$$\frac{dH_2}{dZ} = \frac{H_1(Q^2 H_1^4 + RaQH_1^2 + 4)}{(Q^2 H_1^4 + 4)(Q^2 H_1^4 + 2RaQH_1^2 + Ra^2 + 4)} + C_4. \quad (2.26)$$

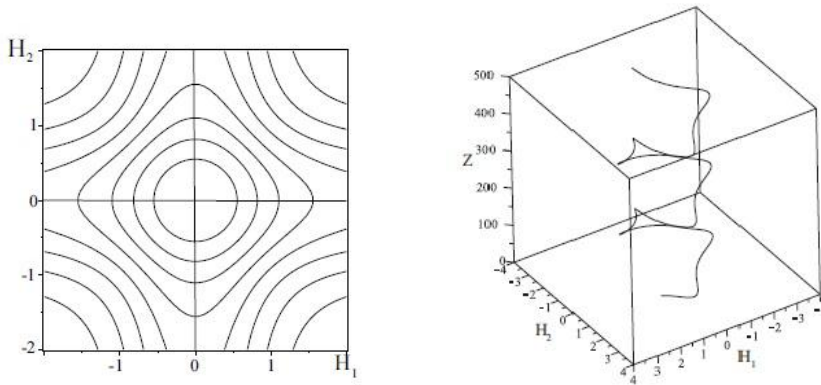


Рис. 2.3. Слева показан фазовый портрет гамильтониана (2.28) при $C_3 = C_4 = 0$; справа – решение, соответствующее нелинейной волне

Здесь для простоты вычислений принято равенство чисел Прандтля единице: $Pr = Pm = 1$. Уравнения (2.25)-(2.26) также удобно записать в гамильтоновой форме:

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = -\frac{dH}{d\tilde{P}}, \quad \frac{d\tilde{P}}{dt} = \frac{dH}{d\tilde{X}}, \quad (2.27)$$

где введены новые переменные $\tilde{X} = \sqrt{Q}H_1, \tilde{P} = \sqrt{Q}H_2, t = Z$. Гамильтониан магнитного поля H имеет вид:

$$H = U(\tilde{P}) + U(\tilde{X}) - \tilde{C}_3 P + \tilde{C}_4 X + C_5, \quad (2.28)$$

где входящая в гамильтониан функция $U(y)$ равна:

$$U(y) = \frac{Ra}{4(Ra^2 + 16)} \ln \left(\frac{y^4 + 4}{y^4 + 4 + 2Ray^2 + Ra^2} \right) +$$

$$+ \frac{2}{Ra^2 + 16} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{y^2}{2} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{y^2 + Ra}{2} \right) \right), \quad (2.29)$$

константы \tilde{C}_3 и \tilde{C}_4 соответственно равны: $\tilde{C}_3 = \sqrt{Q}C_3$, $\tilde{C}_4 = \sqrt{Q}C_4$.

Приступим к исследованию вопроса о видах стационарных магнитных структур, описываемых уравнениями (2.27). Сначала подробно рассмотрим предельный случай $Ra \rightarrow 0$. Тогда гамильтониан (2.28) принимает следующий вид:

$$H \rightarrow H' = \frac{1}{4Q} \operatorname{arctg} \left(\frac{QH_1^2}{2} \right) + \frac{1}{4Q} \operatorname{arctg} \left(\frac{QH_2^2}{2} \right) + C_4 H_1 - C_3 H_2 + \tilde{C}_5, \quad (2.30)$$

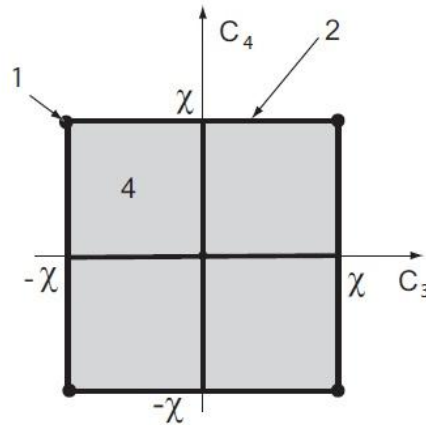


Рис. 2.4. На плоскости параметров (C_3, C_4) серым цветом показана область

присутствия четырех неподвижных точек. Для констант $(C_3 = 0, C_4 = 0)$ существует только одна неподвижная точка. Жирными линиями отмечены значения констант, которым на фазовом портрете соответствуют 2 неподвижные точки. Вершинам квадратной области соответствуют значения, при которых реализуется 1 неподвижная точка. Для значений вне указанной области неподвижные точки отсутствуют

Гамильтоновость уравнений (2.27) означает, что в фазовом пространстве могут наблюдаться неподвижные точки только двух типов: эллиптические и гиперболические неподвижные точки. При нулевых значениях постоянных $C_3 = C_4 = 0$ можно построить фазовый портрет гамильтониана (2.30), из которого видно, что присутствует только одна эллиптическая точка (см. рис. 2.3). Вокруг точек эллиптического типа наблюдаются только нелинейные волны. Численное стационарное решение системы уравнений (2.25)-(2.26) в пределе $Ra \rightarrow 0$ соответствует нелинейной волне конечной амплитуды и приведено также на рис. 2.3. Вычисляя максимум и минимум

функции $\left(\frac{H_{1,2}}{Q^2 H_{1,2}^4 + 4} \right)$, установим область изменения параметров (C_3, C_4) , которая определяется неравенствами:

$$-\chi < C_3 < \chi,$$

$$-\chi < C_4 < \chi,$$

где $\chi = \frac{3^{3/4}}{16} \sqrt{\frac{2}{Q}}$ зависит от выбора параметра Q .

На рис. 2.4 приведена соответствующая область с указанием числа неподвижных точек. В вершинах квадратной области параметров (C_3, C_4) расположена одна неподвижная точка эллиптического типа. Тип неподвижной точки определяется из самого вида фазового портрета гамильтониана (2.30) для констант $C_3 = \pm\chi$ и $C_4 = \pm\chi$ (см. рис. 2.4). На границе области (C_3, C_4) расположены две неподвижные точки: эллиптического и гиперболического типа.

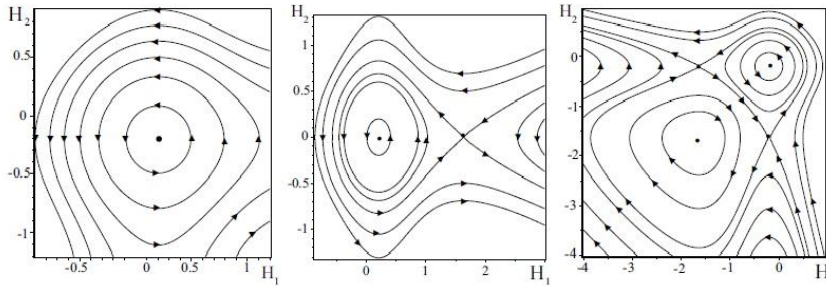


Рис. 2.5. Слева изображен фазовый портрет для неподвижных точек, расположенных в вершине квадратной области параметров (C_3, C_4) ; по центру – фазовый портрет для неподвижных точек на границе области параметров (C_3, C_4) и для неподвижных точек при $(C_3 = 0, C_4 = \pm\chi)$; $(C_3 = \pm\chi, C_4 = 0)$; справа – фазовый портрет для неподвижных точек, находящихся внутри квадратной области параметров (C_3, C_4)

Фазовый портрет для этих точек приведен на рис. 2.5. Для констант $(C_3 = 0, C_4 = ([-\chi, 0[,]0, -\chi]))$, $(C_3 = ([-\chi, 0[,]0, -\chi]), C_4 = 0)$ также имеем две неподвижные точки: эллиптического и гиперболического типа. Фазовый портрет для этой точки изображен на рис. 2.5. Наконец внутри

каждого сектора области (C_3, C_4) находим четыре неподвижные точки: две эллиптического и две гиперболического типов. Фазовые портреты для этих точек соответственно изображены на рис. 2.5. На рис. 2.6 показано трёхмерное изображение ограниченных стационарных структур соответствующих фазовым портретам представленных на рис. 2.5. В левой части рис. 2.6 показано численное решение, соответствующее нелинейной волне, которая возникает в окрестности эллиптической точки в фазовом пространстве. В центральной части рис. 2.6 показано решение для солитона, который соответствует участку сепаратрисы выходящей и входящей в гиперболическую точку. Наконец в правой части рис. 2.6 мы получили решение для кинка, которое соответствует участку сепаратрисы, соединяющей две гиперболические точки. Перейдем теперь к исследованию вопроса об эволюции стационарного крупномасштабного магнитного поля для случая, когда число Рэлея $Ra \rightarrow 2$. В этом пределе гамильтониан (2.28) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} H \rightarrow H' = & \frac{1}{40Q} \ln \left(\frac{Q^2 H_1^4 + 4}{Q^2 H_1^4 + 4QH_1^2 + 8} \right) + \frac{1}{40Q} \ln \left(\frac{Q^2 H_2^4 + 4}{Q^2 H_2^4 + 4QH_2^2 + 8} \right) + \\ & + \frac{1}{10Q} \operatorname{arctg} \left(\frac{4(QH_1^2 + 1)}{4 - Q^2 H_1^4 - 2QH_1^2} \right) + \frac{1}{10Q} \operatorname{arctg} \left(\frac{4(QH_2^2 + 1)}{4 - Q^2 H_2^4 - 2QH_2^2} \right) + \\ & + C_4 H_1 - C_3 H_2 + \tilde{C}_5. \end{aligned} \quad (2.31)$$

При нулевых значениях констант $C_3 = C_4 = 0$ фазовый портрет гамильтониана (2.31) имеет вид, аналогичный рис. 2.3, из которого следует появление только одной эллиптической точки в фазовом пространстве. В этом случае все возникающие стационарные решения совпадают с нелинейными волнами. Стационарное решение, соответствующее нелинейной волне конечной амплитуды, имеет вид, также аналогичный на рис. 2.3. Как и в предыдущем случае, легко установить область параметров C_3, C_4 с разным числом неподвижных точек. Легко заметить, что область существования неподвижных точек на плоскости параметров (C_3, C_4) определяется неравенствами:

$$\begin{aligned} -\tilde{\chi} < C_3 < \tilde{\chi}, \\ -\tilde{\chi} < C_4 < \tilde{\chi}, \end{aligned}$$

где $\tilde{\chi} = \max \left(\frac{H_1(Q^2 H_1^4 + RaQH_1^2 + 4)}{(Q^2 H_1^4 + 4)(Q^2 H_1^4 + 2RaQH_1^2 + Ra^2 + 4)} \right)$ при изменении

H_1 . При фиксированных значениях параметров Ra, Q этот максимум

легко вычисляется. Из результатов этих вычислений, мы получили аналогичные фазовые портреты гамильтониана (2.31) и численные решения системы уравнений (2.25)-(2.26) при $Ra \rightarrow 2$, как в предыдущем случае.

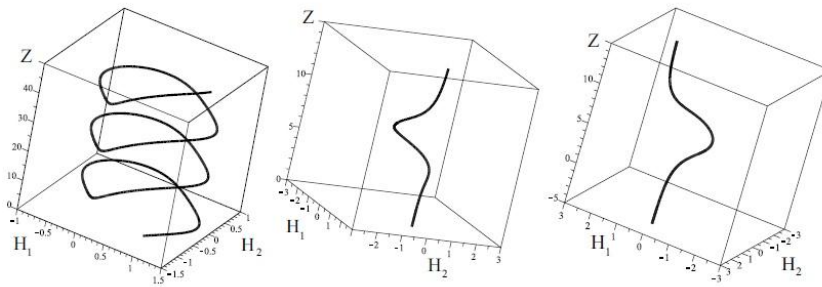


Рис. 2.6. Изображены численные стационарные решения уравнений (2.25)-(2.26) при $Ra \rightarrow 0$ в виде нелинейной волны, солитона и кинка. Они соответствуют фазовым портретам, показанным на рисунке рис. 2.5

Таким образом, сравнивая скорости роста вихревых и магнитных возмущений на начальной стадии развития крупномасштабной неустойчивости, нами был рассмотрен случай, при котором возможно возникновение крупномасштабных стационарных магнитных структур. Эти структуры классифицировались как стационарные решения трёх типов: нелинейные волны, солитоны и кинки.

3. НЕЛИНЕЙНОЕ ДИНАМО ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

Благодаря вращательному движению плазмы могут возбуждаться различные волновые и вихревые движения, волны Россби, внутренние волны, локализованные вихри и когерентные структуры [93]-[98]. Эффект вращения также оказывает существенное влияние на турбулентное движение жидкости (см., например, [99]). Природа такого влияния связана с действием силы Кориолиса, которая нарушает зеркальную симметрию турбулентного движения жидкости. На основе этого эффекта в работе [100] был найден новый пример генерации КВС во вращающейся несжимаемой жидкости. Там же было показано, что в результате развития крупномасштабной неустойчивости во вращающейся жидкости возникают нелинейные крупномасштабные спиральные вихревые структуры типа вихрей Бельтрами или локализованные кинки с внутренней спиральной структурой. Обобщение этого ГД α -эффекта на случай электропроводящей жидкости рассматривается в данном разделе [101]. Применяя метод многомас-

штабных асимптотических разложений, мы получили осредненные уравнения МГД во вращающейся жидкости для крупномасштабных полей. Эти уравнения представляют собой самосогласованную систему нелинейных уравнений для крупномасштабных магнитных и гидродинамических полей. В отличие от кинематического динамо, вихревые и магнитные поля оказывают взаимное влияние друг на друга. Система уравнений, описывающая взаимное влияние полей, названа уравнениями нелинейного магнито-вихревого динамо. Проведенный численный анализ нелинейных уравнений в стационарном режиме показал существование локализованных вихревых и магнитных структур.

3.1. Основные уравнения и постановка задачи

Исходными уравнениями для описания динамики вращающейся электропроводящей несжимаемой жидкости являются хорошо известные уравнения одножидкостной магнитной гидродинамики:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{V} = -\frac{\nabla P}{\rho_{00}} + 2[\vec{V} \times \vec{\Omega}] + \frac{1}{4\pi\rho_{00}}[\text{rot}\vec{B} \times \vec{B}] + \nu\Delta\vec{V} + \vec{F}_0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot}[\vec{V} \times \vec{B}] + \nu_m\Delta\vec{B}, \quad (3.2)$$

$$\text{div}\vec{V} = 0 \quad \text{div}\vec{B} = 0. \quad (3.3)$$

Здесь \vec{V} , P , \vec{B} – возмущения скорости, давления и индукции магнитного поля относительно равновесного состояния:

$$\nabla P_{00} = -\rho_{00}\nabla\Phi_{00} - \rho_{00}[\vec{\Omega} \times [\vec{\Omega} \times \vec{r}]], \quad (3.4)$$

где \vec{r} – радиус-вектор элемента среды, Φ_{00} – равновесный потенциал, описывающий внешнюю силу тяжести, ν – коэффициент кинематической вязкости жидкости, $\nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma_c}$ – коэффициент магнитной вязкости,

σ_c – коэффициент электропроводности среды. Вектор угловой скорости вращения $\vec{\Omega}$ для простоты считаем постоянным (твердотельное вращение) и в декартовой системе координат: $\vec{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$. Кроме того, среду будем считать безграничной и влиянием внешнего магнитного поля пренебрежем. В уравнение (3.1) включена внешняя сила \vec{F}_0 , моделирующая источник возбуждения в среде мелкомасштабных и высокока-

стотных флуктуаций поля скорости \vec{v}_0 с малым числом Рейнольдса

$$R = \frac{v_0 t_0}{\lambda_0} \ll 1:$$

$$\operatorname{div} \vec{F}_0 = 0, \quad \vec{F}_0 = f_0 \vec{F}_0 \left(\frac{x}{\lambda_0}; \frac{t}{t_0} \right), \quad (3.5)$$

где λ_0 – характерный масштаб, t_0 – характерное время, f_0 – характерная амплитуда. Перейдем в уравнениях (3.1)-(3.3) к безразмерным переменным. Чтобы не загромождать обозначения, сохраним за безразмерными переменными обозначения прежних размерных переменных. Это не вызывает в дальнейшем никаких затруднений.

$$\begin{aligned} \vec{x} &\rightarrow \frac{\vec{x}}{\lambda_0}, \quad t \rightarrow \frac{t}{t_0}, \quad \vec{V} \rightarrow \frac{\vec{V}}{v_0}, \quad \vec{F}_0 \rightarrow \frac{\vec{F}_0}{f_0}, \quad \vec{B} \rightarrow \frac{\vec{B}}{B_0}, \quad t_0 = \frac{\lambda_0^2}{\nu}, \\ f_0 &= \frac{v_0 \nu}{\lambda_0^2}, \quad P \rightarrow \frac{P}{P_0 \rho_{00}}, \quad P_0 = \frac{\nu v_0}{\lambda_0}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

В безразмерных переменных уравнения (3.1)-(3.3) примут вид:

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + R V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho_{00}} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \varepsilon_{ijk} V_j D_k + \tilde{Q} R \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jml} \frac{\partial B_l}{\partial x_m} B_k + \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_k^2} + F_0^i, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial t} - P m^{-1} \frac{\partial^2 B_i}{\partial x_k^2} = R \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{knp} V_n B_p, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial V_k}{\partial x_k} = \frac{\partial B_k}{\partial x_k} = 0. \quad (3.9)$$

Характер эволюции полей, описываемых системой уравнений (3.7)-(3.9), в значительной степени будет определяться следующими безраз-

мерными параметрами: $D_i = \frac{2\Omega_i \lambda_0^2}{\nu}$ – безразмерный параметр враще-

ния ($i = 1, 2, 3$) на масштабе λ_0 , связанный с числом Тейлора $Ta_i = D_i^2$.

Этот безразмерный параметр характеризует степень превалирования

сил Кориолиса над вязкими силами. $\tilde{Q} = \frac{Q}{Pm}$, $Q = \frac{\sigma_c B_0^2 \lambda_0^2}{c^2 \rho_{00} \nu}$ – число

Чандрасекара, $Pm = \frac{\nu}{\nu_m}$ – магнитное число Прандтля. Малым парамет-

ром асимптотического разложения считаем число Рейнольдса $R = \frac{v_0 t_0}{\lambda_0} \ll 1$ мелкомасштабных движений, а параметры D и \tilde{Q} произ-

вольными, не влияющими на схему разложения. Рассмотрим следующую постановку задачи. Пусть внешняя сила на фоне равновесного состояния вызывает мелкомасштабные и высокочастотные осцилляции скорости. Средние значения таких осцилляций нулевые, но из-за нелинейного взаимодействия в некоторых порядках теории возмущения возникают члены, которые при усреднении не обращаются в нуль. Такие члены называются секулярными и являются условиями разрешимости многомасштабного асимптотического разложения. Нахождение уравнений разрешимости, которые и определяют эволюцию крупномасштабных возмущений, является основной задачей.

3.2. Уравнения нелинейного магнитовихревого динамо в «квазидвумерной» модели

Рассмотрим более детально применение метода многомасштабных асимптотических разложений к проблеме нелинейной эволюции крупномасштабных вихревых и магнитных возмущений во вращающейся электропроводящей среде. Метод построения асимптотических уравнений, согласно работе [101], состоит в следующем. Представим пространственные и временные производные в уравнениях (3.7)-(3.9) в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \partial_t + R^4 \partial_T, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \rightarrow \partial_i + R^2 \nabla_i, \quad (3.10)$$

где ∂_i и ∂_t — обозначают производные по быстрым переменным $x_0 = (\vec{x}_0, t_0)$, а ∇_i и ∂_T — производные по медленным переменным $X = (\vec{X}, T)$. Переменные x_0 и X соответственно можно назвать мелкомасштабные и крупномасштабные переменные. При построении нелинейной теории переменные \vec{V} , \vec{B} , P представим в виде асимптотического ряда:

$$\begin{aligned} \vec{V}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{R} \vec{W}_{-1}(X) + \vec{v}_0(x_0) + R\vec{v}_1 + R^2\vec{v}_2 + R^3\vec{v}_3 + \dots \\ \vec{B}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{R} \vec{B}_{-1}(X) + \vec{B}_0(x_0) + R\vec{B}_1 + R^2\vec{B}_2 + R^3\vec{B}_3 + \dots \\ P(x) &= \frac{1}{R^3} P_{-3} + \frac{1}{R^2} P_{-2} + \frac{1}{R} P_{-1} + P_0 + R(P_1 + \bar{P}_1(X)) + R^2 P_2 + R^3 P_3 + \dots \end{aligned} \quad (3.11)$$

Подставим разложения (3.10)-(3.11) в систему уравнений (3.7)-(3.9) и, зануляя вклады в каждом порядке по R до степени R^3 включительно, получим уравнения многомасштабного асимптотического разложения. Алгебраическая структура асимптотического разложения уравнений (3.7)-(3.9) в различных порядках по R приведена в [101]. Там же показано, что именно в порядке R^3 получаются основные секулярные уравнения, т.е. уравнения для крупномасштабных полей:

$$\partial_t W_{-1}^i - \Delta W_{-1}^i + \nabla_k \overline{(v_0^k v_0^i)} = -\nabla_i \bar{P}_1 + \tilde{Q} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jml} \left(\nabla_m \overline{(B_0^l B_0^k)} \right), \quad (3.12)$$

$$\partial_t B_{-1}^i - Pm^{-1} \Delta B_{-1}^i = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{knp} \nabla_j \overline{(v_0^n B_0^p)}. \quad (3.13)$$

Используя свертку тензоров $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jml} = \delta_{km} \delta_{il} - \delta_{im} \delta_{kl}$, $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{knp} = \delta_{in} \delta_{jp} - \delta_{ip} \delta_{jn}$ и вводя обозначения $\vec{W} = \vec{W}_{-1}$, $\vec{H} = \vec{B}_{-1}$, система уравнений (3.12)-(3.13) примет следующий вид:

$$\partial_T W_i - \Delta W_i + \nabla_k \overline{(v_0^k v_0^i)} = -\nabla_i \bar{P}_1 + \tilde{Q} \left(\nabla_k \overline{(B_0^i B_0^k)} - \frac{\nabla_i}{2} \overline{(B_0^k)^2} \right), \quad (3.14)$$

$$\partial_T H_i - Pm^{-1} \Delta H_i = \nabla_j \overline{(v_0^i B_0^j)} - \nabla_j \overline{(v_0^j B_0^i)}. \quad (3.15)$$

Уравнения (3.14)-(3.15) дополняются секулярными уравнениями, которые также были получены в [101]:

$$\nabla_k (W_k W_i) = -\nabla_i P_{-1} + \tilde{Q} (\nabla_k H_i - \nabla_i H_k) H_k,$$

$$W_j \nabla_j H_i = H_j \nabla_j W_i,$$

$$W_j \nabla_j H_i = H_j \nabla_j W_i,$$

$$\nabla_i W_i = 0, \nabla_i H_i = 0, \nabla_i P_{-3} = \varepsilon_{ijk} W_j D_k.$$

Уравнения (3.14)-(3.15) приобретают замкнутый вид после вычисления корреляционных функций – напряжений Рейнольдса $\nabla_k \overline{(v_0^k v_0^i)}$, напряжений Максвелла $\nabla_k \overline{(B_0^i B_0^k)}$ и турбулентной э.д.с. $\mathcal{E}_n = \varepsilon_{nij} \overline{v_0^i B_0^j}$. Вычисление этих корреляционных функций значительно упрощается, если воспользоваться «квазидвумерным» приближением, которое часто применяется для описания крупномасштабных вихревых и магнитных полей во многих астрофизических и геофизических задачах. В рамках

этого приближения для нашей задачи будем считать, что крупномасштабная производная по Z более предпочтительная, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial Z} \gg \frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y},$$

а геометрия крупномасштабных полей имеет следующий вид:

$$\vec{W} = (W_1(Z), W_2(Z), 0), \vec{H} = (H_1(Z), H_2(Z), 0). \quad (3.16)$$

В рамках «квазидвумерной» задачи система уравнений (3.14)-(3.15) упрощается:

$$\partial_T W_1 - \Delta W_1 + \nabla_Z \overline{(v_0^z v_0^x)} = \tilde{Q} \nabla_Z \overline{(B_0^z B_0^x)}, \quad (3.17)$$

$$\partial_T W_2 - \Delta W_2 + \nabla_Z \overline{(v_0^z v_0^y)} = \tilde{Q} \nabla_Z \overline{(B_0^z B_0^y)}, \quad (3.18)$$

$$\partial_T H_1 - Pm^{-1} \Delta H_1 = \nabla_Z \overline{(v_0^x B_0^z)} - \nabla_Z \overline{(v_0^z B_0^x)}, \quad (3.19)$$

$$\partial_T H_2 - Pm^{-1} \Delta H_2 = \nabla_Z \overline{(v_0^y B_0^z)} - \nabla_Z \overline{(v_0^z B_0^y)}. \quad (3.20)$$

Для получения уравнений (3.17)-(3.20) в замкнутом виде мы используем решения уравнений для мелкомасштабных полей в нулевом порядке по R [101]:

$$u_0 = C_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2} + c.c. = u_{01} + u_{02} + u_{03} + u_{04},$$

$$v_0 = A_1 e^{i\varphi_1} - C_2 e^{i\varphi_2} + c.c. = v_{01} + v_{02} + v_{03} + v_{04},$$

$$w_0 = -C_1 e^{i\varphi_1} + C_2 e^{i\varphi_2} + c.c. = w_{01} + w_{02} + w_{03} + w_{04},$$

где $w_{02} = (w_{01})^*$, $w_{04} = (w_{03})^*$, $v_{02} = (v_{01})^*$, $v_{04} = (v_{03})^*$, $u_{02} = (u_{01})^*$, $u_{04} = (u_{03})^*$ и введены новые обозначения:

$$A_{1,2} = \frac{f_0}{2} \frac{a_{1,2}}{a_{1,2}^2 + \frac{D^2}{2}}, \quad C_{1,2} = \frac{f_0}{4} \frac{D}{a_{1,2}^2 + \frac{D^2}{2}}, \quad a_{1,2} = \hat{D}_{w_{1,2}}^* + \tilde{Q} \frac{H_{1,2}^2}{\hat{D}_{H_{1,2}}^*},$$

$$B_0^x = u_0 = C_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2} + c.c. = u_{01} + u_{02} + u_{03} + u_{04},$$

$$B_0^y = \tilde{v}_0 = A_1 e^{i\varphi_1} - C_2 e^{i\varphi_2} + c.c. = \tilde{v}_{01} + \tilde{v}_{02} + \tilde{v}_{03} + \tilde{v}_{04},$$

$$B_0^z = w_0 = -C_1 e^{i\varphi_1} + C_2 e^{i\varphi_2} + c.c. = w_{01} + w_{02} + w_{03} + w_{04}.$$

Между коэффициентами $\tilde{A}_{1,2}$, $\tilde{C}_{1,2}$ и $A_{1,2}$, $C_{1,2}$ имеется следующая связь:

$$\tilde{A}_{1,2} = A_{1,2} \frac{iH_{1,2}}{\hat{D}_{H_{1,2}}^*}, \quad \tilde{C}_{1,2} = C_{1,2} \frac{iH_{1,2}}{\hat{D}_{H_{1,2}}^*},$$

$$\hat{D}_w(\vec{\kappa}_1, -\omega_0) = \hat{D}_{w_1}^* = 2 - i(1 - W_1), \quad \hat{D}_w(\vec{\kappa}_2, -\omega_0) = \hat{D}_{w_2}^* = 2 - i(1 - W_2),$$

$$W_{-1}^x = W_1, \quad W_{-1}^y = W_2,$$

$$\hat{D}_H(\vec{\kappa}_1, -\omega_0) = \hat{D}_{H_1}^* = 2Pm^{-1} - i(1 - W_1), \quad \hat{D}_H(\vec{\kappa}_2, -\omega_0) = \hat{D}_{H_2}^* = 2Pm^{-1} - i(1 - W_2).$$

Далее необходимо вычислить корреляторы, входящие в систему уравнений (3.17)-(3.20):

$$T^{31} = \overline{w_0 u_0} = \overline{w_{01} (u_{01})^*} + \overline{(w_{01})^* u_{01}} + \overline{w_{03} (u_{03})^*} + \overline{(w_{03})^* u_{03}},$$

$$T^{32} = \overline{w_0 v_0} = \overline{w_{01} (v_{01})^*} + \overline{(w_{01})^* v_{01}} + \overline{w_{03} (v_{03})^*} + \overline{(w_{03})^* v_{03}},$$

$$S^{31} = \overline{w_0 u_0} = \overline{w_{01} (u_{01})^*} + \overline{(w_{01})^* u_{01}} + \overline{w_{03} (u_{03})^*} + \overline{(w_{03})^* u_{03}},$$

$$S^{32} = \overline{w_0 \tilde{v}_0} = \overline{w_{01} (\tilde{v}_{01})^*} + \overline{(w_{01})^* \tilde{v}_{01}} + \overline{w_{03} (\tilde{v}_{03})^*} + \overline{(w_{03})^* \tilde{v}_{03}},$$

$$G^{13} = \overline{u_0 w_0} = \overline{u_{01} (w_{01})^*} + \overline{(u_{01})^* w_{01}} + \overline{u_{03} (w_{03})^*} + \overline{(u_{03})^* w_{03}},$$

$$G^{31} = \overline{w_0 u_0} = \overline{w_{01} (u_{01})^*} + \overline{(w_{01})^* u_{01}} + \overline{w_{03} (u_{03})^*} + \overline{(w_{03})^* u_{03}},$$

$$G^{23} = \overline{v_0 w_0} = \overline{v_{01} (w_{01})^*} + \overline{(v_{01})^* w_{01}} + \overline{v_{03} (w_{03})^*} + \overline{(v_{03})^* w_{03}},$$

$$G^{32} = \overline{w_0 \tilde{v}_0} = \overline{w_{01} (\tilde{v}_{01})^*} + \overline{(w_{01})^* \tilde{v}_{01}} + \overline{w_{03} (\tilde{v}_{03})^*} + \overline{(w_{03})^* \tilde{v}_{03}}.$$

Здесь для удобства приняты новые обозначения мелкомасштабных полей: $v_0^x = u_0$, $v_0^y = v_0$, $v_0^z = w_0$, $B_0^x = \tilde{u}_0$, $B_0^y = \tilde{v}_0$, $B_0^z = \tilde{w}_0$. В результате проведенных громоздких вычислений, мы получили замкнутые уравнения для крупномасштабных полей скорости (W_1, W_2) и магнитного поля (H_1, H_2) следующего вида:

$$\partial_T W_1 - \Delta W_1 + \nabla_Z (\alpha_{(1)} \cdot (1 - W_2)) = 0, \quad (3.21)$$

$$\partial_T W_2 - \Delta W_2 - \nabla_Z (\alpha_{(2)} \cdot (1 - W_1)) = 0, \quad (3.22)$$

$$\partial_T H_1 - Pm^{-1} \Delta H_1 + \nabla_Z (\alpha_H^{(2)} H_2) = 0, \quad (3.23)$$

$$\partial_T H_2 - Pm^{-1} \Delta H_2 - \nabla_Z (\alpha_H^{(1)} H_1) = 0. \quad (3.24)$$

Уравнения (3.21)-(3.24) описывают нелинейную динамику крупномасштабных полей во вращающейся электропроводящей среде. Связь между компонентами крупномасштабного вихревого и магнитного поля осуществляется при помощи коэффициентов нелинейного гидродинамического (ГД) $\alpha_{(1)}$, $\alpha_{(2)}$ и магнитогидродинамического (МГД) $\alpha_H^{(1)}$, $\alpha_H^{(2)}$ α -эффекта. Причем коэффициенты нелинейного ГД и МГД α -эффекта являются функциями крупномасштабных полей скорости \vec{W} и магнитного поля \vec{H} :

$$\begin{aligned} \alpha_{(1)} &= \frac{f_0^2}{2} \frac{Dq_2(1+Pm(1-q_2))(1-W_2)^{-1}}{\left[16(1-W_2)^2 + \left[\frac{D^2}{2} + 4 - (1-W_2)^2\right]^2 + h_2\right]} - \\ &\quad - \frac{f_0^2}{8} \frac{D^2(1+Pm(1-q_1))(1-W_2)^{-1}}{\left[16(1-W_1)^2 + \left[\frac{D^2}{2} + 4 - (1-W_1)^2\right]^2 + h_1\right]}, \\ \alpha_{(2)} &= \frac{f_0^2}{2} \frac{Dq_1(1+Pm(1-q_1))(1-W_1)^{-1}}{\left[16(1-W_1)^2 + \left[\frac{D^2}{2} + 4 - (1-W_1)^2\right]^2 + h_1\right]} + \\ &\quad + \frac{f_0^2}{8} \frac{D^2(1+Pm(1-q_2))(1-W_1)^{-1}}{\left[16(1-W_2)^2 + \left[\frac{D^2}{2} + 4 - (1-W_2)^2\right]^2 + h_2\right]}, \\ \alpha_H^{(1)} &= f_0^2 \frac{D(1-W_1)Pm(1+Pm(1-q_1))H_1}{(4+Pm^2(1-W_1)^2) \left[16(1-W_1)^2 + \left[\frac{D^2}{2} + 4 - (1-W_1)^2\right]^2 + h_1\right]}, \end{aligned}$$

$$\alpha_H^{(2)} = f_0^2 \frac{D(1-W_2)Pm(1+Pm(1-q_2))H_2}{(4+Pm^2(1-W_2)^2) \left[16(1-W_2)^2 + \left[\frac{D^2}{2} + 4 - (1-W_2)^2 \right]^2 + h_2 \right]}.$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$q_{1,2} = 1 + \frac{QH_{1,2}^2}{4 + Pm^2(1-W_{1,2})^2},$$

$$h_{1,2} = 2f_{1,2}(4+(1-W_{1,2})^2)^2 + f_{1,2}^2(4+(1-W_{1,2})^2)^2 + D^2 g_{1,2},$$

$$g_{1,2} = \frac{QH_{1,2}^2}{(4 + Pm^2(1-W_{1,2})^2)} \left[2(4 + Pm(1-W_{1,2})^2) + \frac{QH_{1,2}^2(4 - Pm^2(1-W_{1,2})^2)}{4 + Pm^2(1-W_{1,2})^2} \right],$$

$$f_{1,2} = \frac{QH_{1,2}^2}{(4+(1-W_{1,2})^2)(4+Pm^2(1-W_{1,2})^2)} \left[2(4+Pm(1-W_{1,2})^2) + QH_{1,2}^2 \right].$$

Таким образом, в данном разделе мы получили замкнутые уравнения (3.29)-(3.32) нелинейного магнито-вихревого динамо во вращающейся электропроводящей жидкости с внешней мелкомасштабной силой \vec{F}_0 . Если эффект вращения исчезнет ($\Omega = 0$), то произойдет обычное диффузионное расплывание крупномасштабных полей. В пределе неэлектропроводящей жидкости $\sigma = 0$ уравнения (3.29)-(3.30) полностью совпадают с результатами работы [100]. Далее рассмотрим устойчивость малых возмущений полей (линейная теория), а затем рассмотрим условия существования стационарных нелинейных структур.

3.3. Крупномасштабная неустойчивость

Рассмотрим начальную стадию развития возмущений (W_1, W_2) и (H_1, H_2) . Тогда при малых значениях величин (W_1, W_2) и (H_1, H_2) уравнения (3.29)-(3.32) линеаризуются и сводятся к следующей системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} \partial_T W_1 - \nabla_Z^2 W_1 - \alpha_1 \nabla_Z W_1 + \alpha_2 \nabla_Z W_2 = 0 \\ \partial_T W_2 - \nabla_Z^2 W_2 - \alpha_1 \nabla_Z W_2 - \alpha_2 \nabla_Z W_1 = 0 \end{cases}, \quad (3.25)$$

$$\begin{cases} \partial_T H_1 - Pm^{-1} \nabla_Z^2 H_1 + \alpha_H \nabla_Z H_2 = 0 \\ \partial_T H_2 - Pm^{-1} \nabla_Z^2 H_2 - \alpha_H \nabla_Z H_1 = 0 \end{cases}, \quad (3.26)$$

где введены следующие обозначения для коэффициентов:

$$\alpha_1 = \frac{f_0^2}{8} \frac{32D^2(10-D^2)}{\left((D^2+6)^2+64\right)^2}, \quad (3.27)$$

$$\alpha_2 = \frac{f_0^2}{2} \frac{32D(10-D^2)}{\left((D^2+6)^2+64\right)^2}, \quad (3.28)$$

$$\alpha_H = f_0^2 \frac{4PmD}{(4+Pm^2)\left((D^2+6)^2+64\right)}. \quad (3.29)$$

Как видно из системы уравнений (3.25)-(3.26), при малых возмущениях полей происходит расщепление самосогласованной системы уравнений (3.21)-(3.24) на две пары уравнений для крупномасштабного поля скорости \vec{W} и магнитного поля \vec{H} соответственно. Первая пара уравнений (3.25) подобна уравнениям для вихревого динамо [59], [60], отличие от которых состоит в появлении дополнительного конвективного члена с α_1 . Посредством коэффициента α_2 устанавливается положительная обратная связь, с помощью которой возможна генерация крупномасштабных вихревых структур. Вторая пара уравнений (4.26) описывает хорошо известный α -эффект в теории динамо [50]-[56] или усиление крупномасштабного магнитного поля мелкомасштабной спиральной турбулентностью. Для исследования крупномасштабной неустойчивости, описываемой системой уравнений (3.25)-(3.26), выберем возмущения в виде плоских волн с волновым вектором $\vec{K} \parallel OZ$, т.е.

$$\begin{pmatrix} W_{1,2} \\ H_{1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{W,1,2} \\ A_{H,1,2} \end{pmatrix} \exp(-i\omega T + iKZ). \quad (3.30)$$

Подставим (30) в систему уравнений (3.25), (3.26), получим дисперсионные уравнения:

$$\left(-i\omega + K^2 - i\alpha_1 K\right)^2 - \alpha_2^2 K^2 = 0, \quad \left(-i\omega + Pm^{-1} K^2\right)^2 - \alpha_H^2 K^2 = 0. \quad (3.31)$$

Представив $\omega = \omega_0 + i\Gamma$, из уравнений (3.31) находим:

$$\omega_{01} = Re\omega_1 = -\alpha_1 K, \quad \Gamma_1 = Im\omega_1 = \pm\alpha_2 K - K^2, \quad (3.32)$$

$$\omega_{02} = Re\omega_2 = 0, \quad \Gamma_2 = Im\omega_2 = \pm\alpha_H K - Pm^{-1} K^2. \quad (3.33)$$

Решения (3.32) указывают на существование неустойчивых колебательных решений для крупномасштабных вихревых возмущений. Максимальный инкремент неустойчивости $\Gamma_{1max} = \frac{\alpha_2^2}{4}$ достигается на волновых числах $K_{max} = \frac{\alpha_2}{2}$. Колебательная мода для магнитных возмущений $\omega_{02} = 0$, а максимальный инкремент неустойчивости $\Gamma_{2max} = \frac{\alpha_H^2}{4} Pt$ достигает своего значения при волновых числах $K_{max} = \frac{\alpha_H}{2} Pt$. Отметим, что в линейной теории коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_H$ не зависят от амплитуд полей, а зависят только от параметра вращения D , магнитного числа Прандтля Pt и амплитуды внешней силы f_0 . Поскольку коэффициенты α_2, α_H ответственны за генерацию вихревых и магнитных полей, то проанализируем зависимость этих коэффициентов от безразмерных параметров, полагая для простоты безразмерную амплитуду внешней силы f_0 равной $f_0 = 10$. Фиксирование уровня безразмерной силы означает выбор определенного уровня стационарного фона мелкомасштабных и быстрых осцилляций. Зависимость коэффициентов α_2, α_H от вращения жидкости (параметра D) изображена на рис. 3.1.

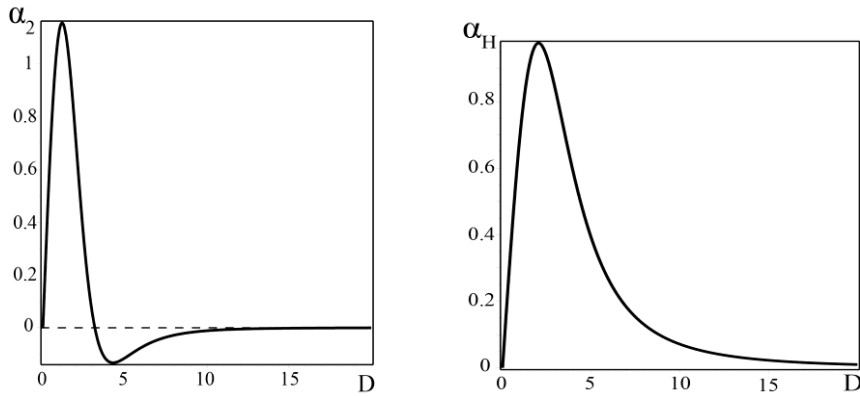


Рис. 3.1. Справа график зависимости ГД α -эффекта от параметра вращения жидкости D ; слева – график зависимости МГД α -эффекта от параметра вращения жидкости D для магнитных чисел Прандтля $Pt = 1$

Как видно из рис. 3.1, «медленное» вращение жидкости приводит к увеличению α_2 (гидродинамический α -эффект) до максимального значения α_{2max} , после которого при дальнейшем увеличении параметра

D («быстрое» вращение) наблюдается спад значений α_2 . Аналогичный эффект был впервые описан в работе [99]. Кроме того, при «быстром» вращении жидкости становятся существенными члены порядка D^2 , которые приводят к перемене знака в ГД α -эффекте: $\alpha_2 \rightarrow -\alpha_2$ (рис. 3.1). В этом случае затухающая мода ГД α -эффекта становится нарастающей. В левой части рис. 3.3 показана зависимость скорости эволюции крупномасштабных вихревых возмущений Γ_1 относительно волновых чисел K для параметра вращения $D = 2$. Магнитогидродинамический α -эффект (или α_H -эффект) также увеличивается при «медленном» вращении до максимального значения α_{Hmax} , после которого при увеличении параметра D наблюдается спад α_H , но знак коэффициента α_H не изменяется. Это явление отчетливо прослеживается в правой части рис. 3.1 для магнитных чисел Прандтля $Pm = 1$. В случае произвольных значений Pm при «быстром» вращении жидкости мы наблюдаем подавление α_H -эффекта (см. рис. 3.2). График скорости эволюции крупномасштабного магнитного поля Γ_2 относительно волновых чисел K для параметра $D = 2$ и $Pm = 1$ показан в правой части рис. 3.3. В результате развития неустойчивостей во вращающейся электропроводящей жидкости генерируются крупномасштабные спиральные циркулярно-поляризованные вихри и магнитные поля Бельтрамиевского типа.

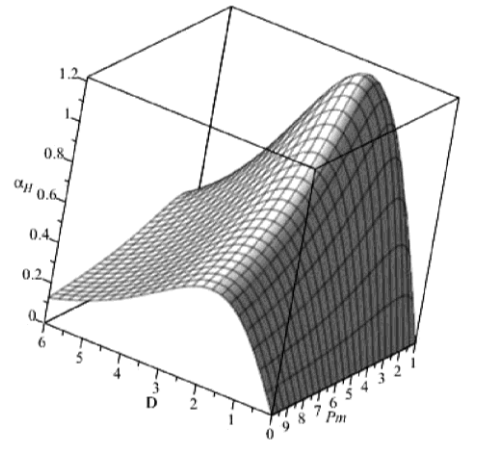


Рис. 3.2. Трехмерное изображение зависимости коэффициента α_H от параметра вращения D и числа Прандтля Pm

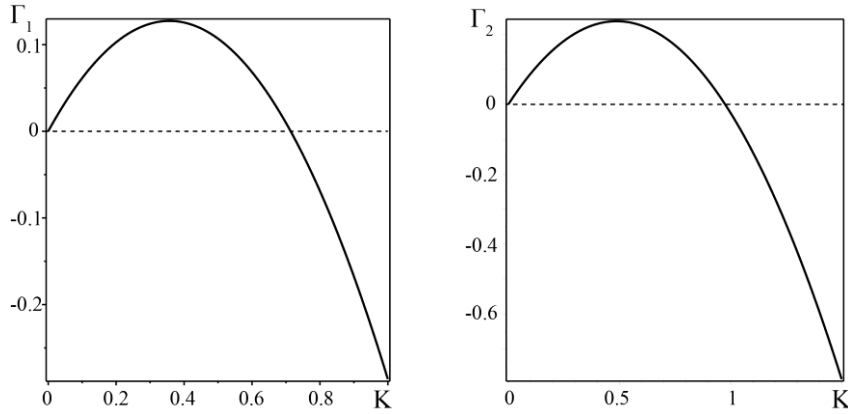


Рис. 3.3. Слева – график зависимости инкремента неустойчивости для ГД α -эффекта от волновых чисел K при параметре вращения $D = 2$, справа – график зависимости инкремента неустойчивости для МГД α -эффекта от волновых чисел K при параметре вращения $D = 2$

3.4. Нелинейные стационарные структуры

Естественно, что с ростом амплитуды возмущений $W_{1,2}$ и $H_{1,2}$ нелинейные коэффициенты $\alpha_{(1)}$, $\alpha_{(2)}$, $\alpha_H^{(1)}$, $\alpha_H^{(2)}$ уменьшаются и неустойчивость насыщается, переходя к стационарному режиму. В результате образуются нелинейные стационарные структуры. Для описания таких структур рассмотрим нелинейную систему уравнений (3.21)-(3.24) в стационарном случае, полагая $\partial_T W_1 = \partial_T W_2 = \partial_T H_1 = \partial_T H_2 = 0$ и интегрируя эти уравнения по Z :

$$\frac{d\tilde{W}_1}{dZ} = -\alpha_{(1)}\tilde{W}_2 + C_1, \tag{3.34}$$

$$\frac{d\tilde{W}_2}{dZ} = \alpha_{(2)}\tilde{W}_1 + C_2, \tag{3.35}$$

$$\frac{1}{Pm} \frac{dH_1}{dZ} = \alpha_H^{(2)}H_2 + C_3, \tag{3.36}$$

$$\frac{1}{Pm} \frac{dH_2}{dZ} = -\alpha_H^{(1)}H_1 + C_4. \tag{3.37}$$

Здесь приняты обозначения $\tilde{W}_1 = 1 - W_1$, $\tilde{W}_2 = 1 - W_2$; C_1 , C_2 , C_3 и C_4 — произвольные постоянные интегрирования. Общий анализ нелинейной стационарной системы уравнений (3.34)-(3.37) представляет собой довольно сложную задачу, выходящую за рамки настоящей работы. Поэтому рассмотрим, какие нелинейные структуры могут возникать во вращающейся электропроводящей турбулентной среде в разных физических условиях.

Рассмотрим случай слабой электропроводности среды, когда магнитное число Прандтля и число Chandrasekara малы: $Pm \rightarrow 0$, $Q \rightarrow 0$. Малость магнитных чисел Прандтля Pm может быть обусловлена как слабой электропроводностью ($\sigma \rightarrow 0$) среды, так и очень малой кинематической вязкостью ($\nu \rightarrow 0$) среды. При этих условиях генерация крупномасштабного магнитного поля не эффективна $H_{1,2} \ll 1$. В такой среде под воздействием внешней мелкомасштабной силы и силы Кориолиса возможна генерация крупномасштабных вихревых структур бельтрамиевского типа [100]. Стационарные нелинейные вихревые структуры такого типа описываются следующей системой уравнений:

$$\frac{dW_1}{dZ} = -\frac{f_0^2}{8} \frac{D^2}{16(1-W_1)^2 + \left[\frac{D^2}{2} + 4 - (1-W_1)^2\right]^2} + \frac{f_0^2}{2} \frac{D}{16(1-W_2)^2 + \left[\frac{D^2}{2} + 4 - (1-W_2)^2\right]^2} + C_1, \quad (3.38)$$

$$\frac{dW_2}{dZ} = -\frac{f_0^2}{8} \frac{D^2}{16(1-W_2)^2 + \left[\frac{D^2}{2} + 4 - (1-W_2)^2\right]^2} - \frac{f_0^2}{2} \frac{D}{16(1-W_1)^2 + \left[\frac{D^2}{2} + 4 - (1-W_1)^2\right]^2} + C_2. \quad (3.39)$$

Система уравнений (3.38)-(3.39) полностью совпадает с аналогичными уравнениями, полученными в обычной гидродинамике [100]. При фиксированных значениях параметров f_0 и D фазовый портрет динамической системы (3.38)-(3.39) определяется значениями постоянных C_1 и C_2 . Стандартными методами можно доказать, что система уравнений (3.38)-(3.39) имеет четыре неподвижные точки в области, показанной на

рис. 3.4. Область построена численно при $f_0 = D = 1$. Вне этой области неподвижные точки отсутствуют. На границе реализуются вырожденные случаи – двух неподвижных точек. При небольшом изменении значений параметра, например D , область существования четырех неподвижных точек незначительно деформируется и меняет свои размеры и форму.

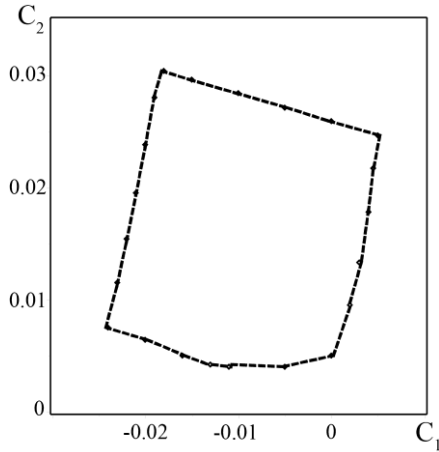


Рис. 3.4. Граница области параметров на плоскости (C_1, C_2) показана штрихованной линией. При значениях параметров, принадлежащих штриховой линии, на фазовом портрете присутствуют две неподвижные точки. Если параметры лежат внутри этой области, появляются четыре неподвижные точки, если вне – неподвижные точки отсутствуют

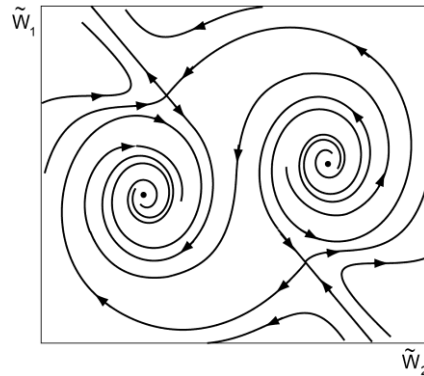


Рис. 3.5. Фазовый портрет динамической системы (3.38)-(3.39) при $f_0 = D = 1$, $C_1 = -0,01$ и $C_2 = 0,01$. Видно присутствие двух гиперболических особых точек и устойчивого и неустойчивого фокусов

При значениях постоянных C_1 и C_2 (рис. 3.4), когда присутствуют четыре неподвижные точки, линеаризуя векторное поле (3.38)-(3.39) в окрестности неподвижных точек, установим тип неподвижных точек. Положение и тип неподвижных точек позволяет построить фазовый портрет динамической системы (3.38)-(3.39). Знание фазового портрета позволяет качественно описать все возможные стационарные вихревые решения. Типичный фазовый портрет системы уравнений (3.38)-(3.39) показан на рис. 3.5. Наиболее интересные локализованные решения соответствуют траекториям фазового портрета, соединяющим неподвижные (особые) точки на фазовой плоскости. В частности, сепаратриса, соединяющая гиперболическую особую точку с устойчивым фокусом, соответствует решению для локализованной вихревой структуры типа кинка с вращением. Это решение, приведенное на рис. 3.6, получено численным интегрированием. Другой вид спирального кинка соответствует

решению, для которого на фазовой плоскости сепаратриса связывает неустойчивый и устойчивый фокус (рис. 3.6). Перейдем теперь к случаю, когда магнитное число Прандтля отлично от нуля и равно, например, единице: $Pm = 1$.

В этом случае во вращающейся электропроводящей жидкости под действием внешней мелкомасштабной силы \vec{F}_0 возникает генерация крупномасштабного магнитного поля, причем максимальная скорость роста магнитных возмущений Γ_{2max} превышает максимальную скорость роста крупномасштабных вихревых возмущений Γ_{1max} :

$$\gamma^{-1} = \frac{\Gamma_{2max}}{\Gamma_{1max}} = \left(\frac{\alpha_H}{\alpha_2} \right)^2 Pm \approx 2,09 \cdot 10^2 \quad (3.40)$$

для чисел $Pm = 1$, $D = 3$.

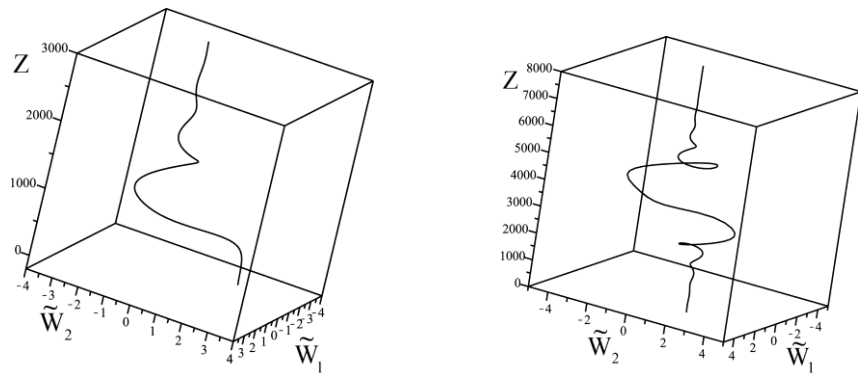


Рис. 3.6. Численное решение уравнений (3.38)-(3.39) для стационарных полей $W_{1,2}$. Слева показан кинк, связывающий гиперболическую точку с устойчивым фокусом; справа – кинк, связывающий неустойчивый и устойчивый фокус

Исходя из этого обстоятельства, можно представить следующую картину протекающих физических процессов: генерируемое крупномасштабное вихревое возмущение во вращающейся среде еще не вышло на стационарный режим, а возмущения крупномасштабного магнитного поля уже достигли своего насыщения на стационарном уровне. Очевидно, что влиянием малых амплитуд крупномасштабных вихревых возмущений $W_{1,2} \ll 1$ на эволюцию крупномасштабного магнитного поля мы можем пренебречь. В результате стационарное крупномасштабное магнитное поле будет описываться следующей системой уравнений:

$$\frac{d\tilde{H}_1}{dZ} = f_0^2 \frac{D(5 - \tilde{H}_2^2)\tilde{H}_2}{\tilde{H}_2^8 + 20\tilde{H}_2^6 + a\tilde{H}_2^4 + b\tilde{H}_2^2 + c} + C'_3, \quad (3.41)$$

$$\frac{d\tilde{H}_2}{dZ} = -f_0^2 \frac{D(5 - \tilde{H}_1^2)\tilde{H}_1}{\tilde{H}_1^8 + 20\tilde{H}_1^6 + a\tilde{H}_1^4 + b\tilde{H}_1^2 + c} + C'_4, \quad (3.42)$$

где введены обозначения: $\tilde{H}_{1,2} = H_{1,2}\sqrt{Q}$, $C'_{3,4} = C_{3,4}\sqrt{Q}$, $a = 3D^2 + 150$, $b = 50(D^2 + 10)$, $c = 25\left(\left(\frac{D^2}{2} + 3\right)^2 + 16\right)$.

Приступим к исследованию вопроса о видах стационарных магнитных структур, описываемых системой уравнений (3.41)-(3.42). Как и в предыдущем случае, установим область изменения постоянных (C_3, C_4), которая определяется путем вычисления максимума и минимума функции

$$\Phi_{1,2} = f_0^2 \frac{D(5 - \tilde{H}_{1,2}^2)\tilde{H}_{1,2}}{\tilde{H}_{1,2}^8 + 20\tilde{H}_{1,2}^6 + a\tilde{H}_{1,2}^4 + b\tilde{H}_{1,2}^2 + c}.$$

Обозначая через $\chi = \max\left(f_0^2 \frac{D(5 - \tilde{H}_2^2)\tilde{H}_2}{\tilde{H}_2^8 + 20\tilde{H}_2^6 + a\tilde{H}_2^4 + b\tilde{H}_2^2 + c}\right)$ при

изменении \tilde{H}_2 , область изменения постоянных (C_3, C_4) определяется следующими неравенствами:

$$-\chi < C_3 < \chi,$$

$$-\chi < C_4 < \chi.$$

Для фиксированных значений f_0, D, Q этот максимум легко вычисляется. Далее при выполнении всех численных расчетов примем $f_0 = 1, D = 3, Q = 1$. Линеаризуя правые части системы уравнений (3.41)-(3.42) в окрестности неподвижных точек, мы можем установить их тип и построить соответствующий фазовый портрет. Так, при выборе постоянных $C_3 \neq 0$ ($C_3 = -0,001$) и $C_4 \neq 0$ ($C_4 = -0,001$) мы получаем четыре неподвижные точки: две эллиптического и две гиперболического типов. Фазовый портрет для этого случая ($C_3 \neq 0$ и $C_4 \neq 0$) представлен на рис. 3.7. Из него видно существование двух типов ограниченных стационарных решений, это нелинейные волны и кинки. Нелинейным волнам соответствуют замкнутые траектории фазового портрета, а кинкам сепаратрисы, соединяющие гиперболические точки (рис. 3.8). В принципе нелинейные волны можно разделить на два типа, в зависи-

мости от неподвижной эллиптической точки, которую они окружают. Аналогично в этом случае можно различать и два типа кинков по сегментам сепаратрис, соединяющих две гиперболические точки.

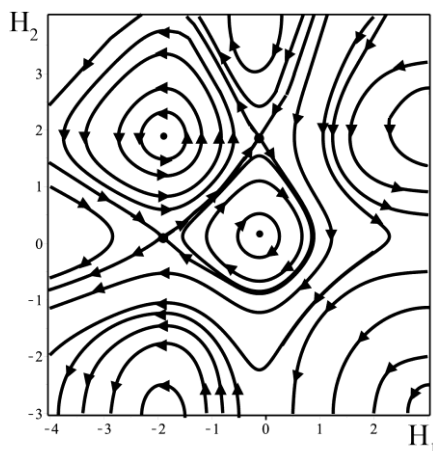


Рис. 3.7. Фазовый портрет динамической системы уравнений (3.41)-(3.42) при $f_0 = Q = 1, D = 3, C_1 = -0,001$ и $C_2 = -0,001$. Видно присутствие двух эллиптических и двух гиперболических особых точек

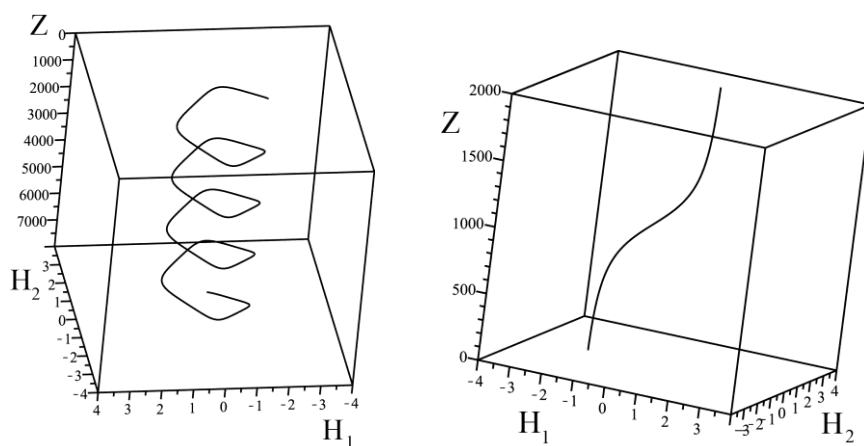


Рис. 3.8. Численное решение уравнений (3.41)-(3.42) для стационарных магнитных полей $H_{1,2}$. Слева изображено стационарное решение в окрестности эллиптической точки, соответствующее нелинейной волне; справа – стационарное решение, соответствующее кинку

4. НЕЛИНЕЙНОЕ ДИНАМО В НАКЛОННО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

До сих пор мы рассматривали ситуацию, когда спиральная турбулентность считалась заданной либо вопрос о ее происхождении (генерации) рассматривался отдельно. Естественно возникает вопрос о возможности генерации крупномасштабных полей (вихревых и магнитных) во вращающихся средах под действием мелкомасштабной силы с нулевой спиральностью $\vec{F}_0 \text{rot} \vec{F}_0 = 0$. Такой пример генерации КВС во вращающейся несжимаемой жидкости был найден в работе [102]. Там же было показано, что в результате развития крупномасштабной неустойчивости в наклонно вращающейся жидкости возникают нелинейные крупномасштабные спиральные вихревые структуры типа вихрей Бельтрами или локализованные кинки с внутренней спиральной структурой. Здесь мы проведём обобщение нового ГД α -эффекта, найденного в [102], на случай электропроводящей жидкости. В результате такого обобщения нами была получена крупномасштабная неустойчивость, приводящая к генерации КВС и магнитных полей [103]. На нелинейной стадии получена самосогласованная система нелинейных уравнений для крупномасштабных магнитных и гидродинамических полей. Численный анализ этих нелинейных уравнений в стационарном режиме показал существование хаотических локализованных вихревых и магнитных структур.

4.1. Постановка задачи и замкнутые уравнения для крупномасштабных полей

Рассмотрим динамику вращающейся электропроводящей несжимаемой жидкости, которая определяется хорошо известными уравнениями магнитной гидродинамики (3.1)-(3.3). В отличие от предыдущего раздела, здесь мы считаем вектор угловой скорости вращения $\vec{\Omega}$ постоянным (твердотельное вращение) и наклонённым по отношению к плоскости (X, Y) , как показано на рис. 4.1, т.е. для декартовой геометрии задачи: $\vec{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$. Источником возбуждения в среде мелкомасштабных и высокочастотных флуктуаций поля скорости \vec{v}_0 с малым числом Рейнольдса $R = \frac{v_0 t_0}{\lambda_0} \ll 1$ является внешняя неспиральная сила

\vec{F}_0 со следующими свойствами:

$$\operatorname{div} \vec{F}_0 = 0, \vec{F}_0 \operatorname{rot} \vec{F}_0 = 0, \operatorname{rot} \vec{F}_0 \neq 0, \vec{F}_0 = f_0 \vec{F}_0 \left(\frac{x}{\lambda_0}; \frac{t}{t_0} \right). \quad (4.1)$$

Внешняя сила задаётся в плоскости (X, Y) , в которой расположена перпендикулярная проекция угловой скорости $\vec{\Omega}$. Выберем внешнюю силу во вращающейся системе координат в следующей форме:

$$\begin{aligned} F_0^z = 0, \vec{F}_{0\perp} = f_0 (\vec{i} \cos \varphi_2 + \vec{j} \cos \varphi_1), \varphi_1 = \vec{k}_1 \vec{x} - \omega_0 t, \varphi_2 = \vec{k}_2 \vec{x} - \omega_0 t, \\ \vec{k}_1 = k_0 (1, 0, 0), \vec{k}_2 = k_0 (0, 1, 0). \end{aligned} \quad (4.2)$$

В безразмерных переменных уравнения (3.1)-(3.3) с учётом поставленной задачи примут вид:

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + R V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} = - \frac{1}{\rho_{00}} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \varepsilon_{ijk} V_j D_k + \tilde{Q} R \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jml} \frac{\partial B_l}{\partial x_m} B_k + \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_k^2} + F_0^i, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial t} - P m^{-1} \frac{\partial^2 B_i}{\partial x_k^2} = R \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{knp} V_n B_p, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial V_k}{\partial x_k} = \frac{\partial B_k}{\partial x_k} = 0. \quad (4.5)$$

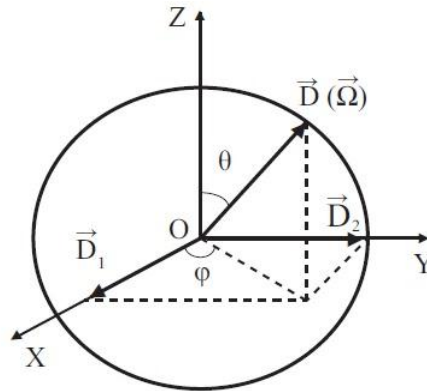


Рис. 4.1. В общем случае угловая скорость $\vec{\Omega}$ наклонена по отношению к плоскости (X, Y) , в которой расположена внешняя сила $\vec{F}_{0\perp}$.

Показана связь декартовых проекций параметра вращения \vec{D} (или вектора угловой скорости вращения $\vec{\Omega}$) с их проекциями в сферической системе координат

Здесь $D_i = \frac{2\Omega_i \lambda_0^2}{\nu}$ – безразмерный параметр вращения на масштабе

λ_0 ($i = 1, 2, 3$), связанный с числом Тейлора $Ta_i = D_i^2$ и являющийся характеристикой степени влияния сил Кориолиса над вязкими силами. Как и ранее, малым параметром асимптотического разложения считаем число Рейнольдса $R = \frac{\nu_0 t_0}{\lambda_0} \ll 1$, а параметры D и \tilde{Q} произвольными, не влия-

ющими на схему разложения. Внешняя сила на фоне равновесного состояния и вызывает мелкомасштабные и высокочастотные осцилляции скорости. Средние значения таких осцилляций нулевые, но из-за нелинейного взаимодействия в некоторых порядках теории возмущения возникают члены, которые при усреднении не обращаются в нуль. Нахождение уравнений разрешимости, которые и определяют эволюцию крупномасштабных возмущений, является основной нашей задачей.

Применяя метод многомасштабных асимптотических разложений, в рамках квазидвумерной задачи, мы получили нелинейные уравнения эволюции крупномасштабных полей (3.17)-(3.20). Для получения этих уравнений в замкнутом виде необходимо найти мелкомасштабные поля в нулевом порядке по R . Для случая наклонного вращения и выбора неспиральной силы \vec{F}_0 (4.2) они имеют следующий вид:

$$u_0 = \frac{f_0}{2} \frac{A_2}{A_2^2 + D_2^2} e^{i\varphi_2} + c.c. = u_{03} + u_{04},$$

$$v_0 = \frac{f_0}{2} \frac{A_1}{A_1^2 + D_1^2} e^{i\varphi_1} + c.c. = v_{01} + v_{02},$$

$$w_0 = -\frac{f_0}{2} \frac{D_1}{A_1^2 + D_1^2} e^{i\varphi_1} + \frac{f_0}{2} \frac{D_2}{A_2^2 + D_2^2} e^{i\varphi_2} + c.c. = w_{01} + w_{02} + w_{03} + w_{04},$$

$$B_0^x = \tilde{u}_0 = \frac{f_0}{2} \left(\frac{A_2}{A_2^2 + D_2^2} \right) \frac{iH_2}{\widehat{D}_{H_2}^*} e^{i\varphi_2} + c.c. = \tilde{u}_{03} + \tilde{u}_{04},$$

$$B_0^y = \tilde{v}_0 = \frac{f_0}{2} \left(\frac{A_1}{A_1^2 + D_1^2} \right) \frac{iH_1}{\widehat{D}_{H_1}^*} e^{i\varphi_1} + c.c. = \tilde{v}_{01} + \tilde{v}_{02},$$

$$B_0^z = \tilde{w}_0 = -\frac{f_0}{2} \left(\frac{D_1}{A_1^2 + D_1^2} \right) \frac{iH_1}{\widehat{D}_{H_1}^*} e^{i\phi_1} + \frac{f_0}{2} \left(\frac{D_2}{A_2^2 + D_2^2} \right) \frac{iH_2}{\widehat{D}_{H_2}^*} e^{i\phi_2} + c.c. =$$

$$= \tilde{w}_{01} + \tilde{w}_{02} + \tilde{w}_{03} + \tilde{w}_{04},$$

где $A_{1,2} = \widehat{D}_{W_{1,2}}^* + \widehat{Q} \frac{H_{1,2}^2}{\widehat{D}_{H_{1,2}}^*}$.

После вычисления корреляционных функций – напряжений Рейнольдса $\nabla_k \overline{(v_0^k v_0^i)}$, напряжений Максвелла $\nabla_k \overline{(B_0^i B_0^k)}$ и турбулентной э.д.с. $\mathcal{E}_n = \varepsilon_{nij} \overline{v_0^i B_0^j}$, мы получили замкнутые уравнения для крупномасштабных полей скорости (W_1, W_2) и магнитного поля (H_1, H_2) следующего вида:

$$\partial_T W_1 - \Delta W_1 + \nabla_z \left(\alpha_{(2)} \cdot (1 - W_2) \right) = 0, \quad (4.6)$$

$$\partial_T W_2 - \Delta W_2 - \nabla_z \left(\alpha_{(1)} \cdot (1 - W_1) \right) = 0, \quad (4.7)$$

$$\partial_T H_1 - Pm^{-1} \Delta H_1 + \nabla_z \left(\alpha_H^{(2)} \cdot H_2 \right) = 0, \quad (4.8)$$

$$\partial_T H_2 - Pm^{-1} \Delta H_2 - \nabla_z \left(\alpha_H^{(1)} \cdot H_1 \right) = 0, \quad (4.9)$$

где нелинейные коэффициенты $\alpha_{(1)}$, $\alpha_{(2)}$, $\alpha_H^{(1)}$, $\alpha_H^{(2)}$ имеют следующий вид:

$$\alpha_{(1)} = \frac{f_0^2}{2} \frac{D_1 q_1 Q_1 (1 - W_1)^{-1}}{\left[4(1 - W_1)^2 q_1^2 Q_1^2 + [D_1^2 + W_1(2 - W_1) + \mu_1]^2 \right]},$$

$$\alpha_{(2)} = \frac{f_0^2}{2} \frac{D_2 q_2 Q_2 (1 - W_2)^{-1}}{\left[4(1 - W_2)^2 q_2^2 Q_2^2 + [D_2^2 + W_2(2 - W_2) + \mu_2]^2 \right]},$$

$$\alpha_H^{(1)} = f_0^2 \frac{D_1 (1 - W_1) Pm Q_1}{\left(1 + Pm^2 (1 - W_1)^2 \right) \left[4(1 - W_1)^2 q_1^2 Q_1^2 + [D_1^2 + W_1(2 - W_1) + \mu_1]^2 \right]},$$

$$\alpha_H^{(2)} = f_0^2 \frac{D_2 (1 - W_2) Pm Q_2}{\left(1 + Pm^2 (1 - W_2)^2 \right) \left[4(1 - W_2)^2 q_2^2 Q_2^2 + [D_2^2 + W_2(2 - W_2) + \mu_2]^2 \right]}.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$q_{1,2} = 1 + \frac{QH_{1,2}^2}{1 + Pm^2(1 - W_{1,2})^2}, \quad Q_{1,2} = 1 - \frac{QPmH_{1,2}^2}{1 + Pm^2(1 - W_{1,2})^2},$$

$$\mu_{1,2} = (q_{1,2} - 1)[2(1 + Pm(1 - W_{1,2})^2) + (q_{1,2} - 1)(1 - Pm^2(1 - W_{1,2})^2)].$$

Коэффициенты $\alpha_{(1)}$, $\alpha_{(2)}$ соответствуют нелинейному ГД α -эффекту, а $\alpha_N^{(1)}$, $\alpha_N^{(2)}$ - нелинейному МГД α -эффекту.

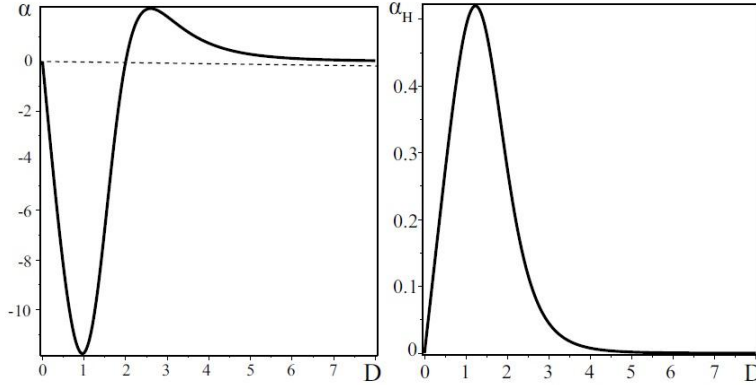


Рис. 4.2. Слева график зависимости ГД α -эффекта от параметра D вращения жидкости; справа график зависимости МГД α -эффекта от параметра D вращения жидкости. Графики построены для $\theta = \pi / 2$ и $f_0 = 10$

Таким образом, мы получили самосогласованную систему нелинейных уравнений эволюции для крупномасштабных возмущений скорости и магнитного поля, которую в дальнейшем будем называть уравнениями нелинейного магнито-вихревого динамо в наклонно вращающейся электропроводящей жидкости с мелкомасштабной неспиральной силой. Если эффект вращения исчезнет ($\Omega = 0$), то произойдет обычное диффузионное расплывание крупномасштабных полей. В пределе неэлектропроводящей жидкости $\sigma = 0$ уравнения (4.6)-(4.7) полностью совпадают с результатами работы [102].

4.2. Крупномасштабная неустойчивость

Рассмотрим начальную стадию развития возмущений (W_1, W_2) и (H_1, H_2) . Тогда при малых значениях величин (W_1, W_2) и (H_1, H_2)

уравнения (4.6)-(4.9) линеаризуются и сводятся к следующей системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} \partial_T W_1 - \nabla_Z^2 W_1 - \alpha_2 \nabla_Z W_2 = 0 \\ \partial_T W_2 - \nabla_Z^2 W_2 + \alpha_1 \nabla_Z W_1 = 0 \end{cases}, \quad (4.10)$$

$$\begin{cases} \partial_T H_1 - Pm^{-1} \nabla_Z^2 H_1 + \alpha_H^{(2)} \nabla_Z H_2 = 0 \\ \partial_T H_2 - Pm^{-1} \nabla_Z^2 H_2 - \alpha_H^{(1)} \nabla_Z H_1 = 0 \end{cases}, \quad (4.11)$$

где введены следующие обозначения для коэффициентов:

$$\alpha_1 = f_0^2 \frac{2D_1(D_1^2 - 2)}{(D_1^4 + 4)^2}, \quad \alpha_2 = f_0^2 \frac{2D_2(D_2^2 - 2)}{(D_2^4 + 4)^2}, \quad (4.12)$$

$$\alpha_H^{(1)} = f_0^2 \frac{PmD_1}{(1 + Pm^2)(D_1^4 + 4)}, \quad \alpha_H^{(2)} = f_0^2 \frac{PmD_2}{(1 + Pm^2)(D_2^4 + 4)}. \quad (4.13)$$

Как видно из системы уравнений (4.10) и (4.11), при малых возмущениях полей происходит расщепление самосогласованной системы уравнений (4.6)-(4.9) на две пары уравнений для крупномасштабного поля скорости \vec{W} и магнитного поля \vec{H} соответственно. Первая пара уравнений (4.10) подобна уравнениям для вихревого динамо [59], [60].

Посредством коэффициентов α_1 , α_2 устанавливается положительная обратная связь между компонентами скорости, которая осуществляется проекциями силы Кориолиса. Вторая пара уравнений (4.11) подобна хорошо известным из теории динамо [50]-[56] уравнениям для α -эффекта, описывающего усиление крупномасштабного магнитного поля мелкомасштабной спиральной турбулентностью. В системе (4.11) посредством коэффициентов $\alpha_H^{(1)}$, $\alpha_H^{(2)}$ также устанавливается положительная обратная связь для компонент магнитного поля благодаря проекциям силы Кориолиса. Для исследования крупномасштабной неустойчивости, описываемой системой уравнений (4.10)-(4.11), выберем возмущения в виде плоских волн с волновым вектором $\vec{K} \parallel OZ$, т.е.

$$\begin{pmatrix} W_{1,2} \\ H_{1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{W,1,2} \\ A_{H,1,2} \end{pmatrix} \exp(-i\omega T + iKZ). \quad (4.14)$$

Подставляя (4.14) в систему уравнений (4.10), (4.11), получим дисперсионные уравнения:

$$\left(-i\omega + K^2\right)^2 - \alpha_1 \alpha_2 K^2 = 0, \quad \left(-i\omega + Pm^{-1} K^2\right)^2 - \alpha_H^{(1)} \alpha_H^{(2)} K^2 = 0. \quad (4.15)$$

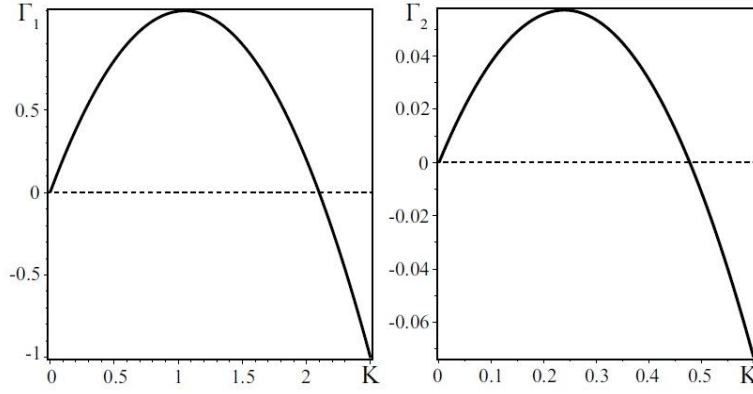


Рис. 4.3. Слева—график зависимости инкремента неустойчивости для ГД α -эффекта от волновых чисел K при параметре вращения $D = 2.5$, справа—график зависимости инкремента неустойчивости для МГД α -эффекта от волновых чисел K при параметре вращения $D = 1.5$ и магнитном числе Прандтля $Pm = 1$

Представив $\omega = \omega_0 + i\Gamma$, из уравнений (4.15) находим:

$$\Gamma_1 = Im\omega_1 = \pm\sqrt{\alpha_1\alpha_2}K - K^2, \tag{4.16}$$

$$\Gamma_2 = Im\omega_2 = \pm\sqrt{\alpha_H^{(1)}\alpha_H^{(2)}}K - Pm^{-1}K^2. \tag{4.17}$$

Решения (4.16) показывают на существование неустойчивости при $\alpha_1\alpha_2 > 0$ для крупномасштабных вихревых возмущений с максимальным инкрементом неустойчивости $\Gamma_{1max} = \frac{\alpha_1\alpha_2}{4}$ на волновых числах

$K_{1max} = \frac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{2}$. Аналогично для магнитных возмущений максимальный инкремент неустойчивости $\Gamma_{2max} = \frac{\alpha_H^{(1)}\alpha_H^{(2)}}{4}Pm$ достигает своего значения

при волновых числах $K_{2max} = \frac{\sqrt{\alpha_H^{(1)}\alpha_H^{(2)}}}{2}Pm$. Если $\alpha_1\alpha_2 < 0$ и $\alpha_H^{(1)}\alpha_H^{(2)} < 0$,

то вместо неустойчивостей возникают затухающие колебания соответственно с частотами: $\omega_{01} = \sqrt{\alpha_1\alpha_2}K$ и $\omega_{02} = \sqrt{\alpha_H^{(1)}\alpha_H^{(2)}}K$. Отметим, что в рассматриваемой здесь линейной теории коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_H^{(1)}, \alpha_H^{(2)}$ не

зависят от амплитуд полей, а зависят только от параметров вращения $D_{1,2}$, магнитного числа Прандтля Pm и амплитуды внешней силы f_0 .

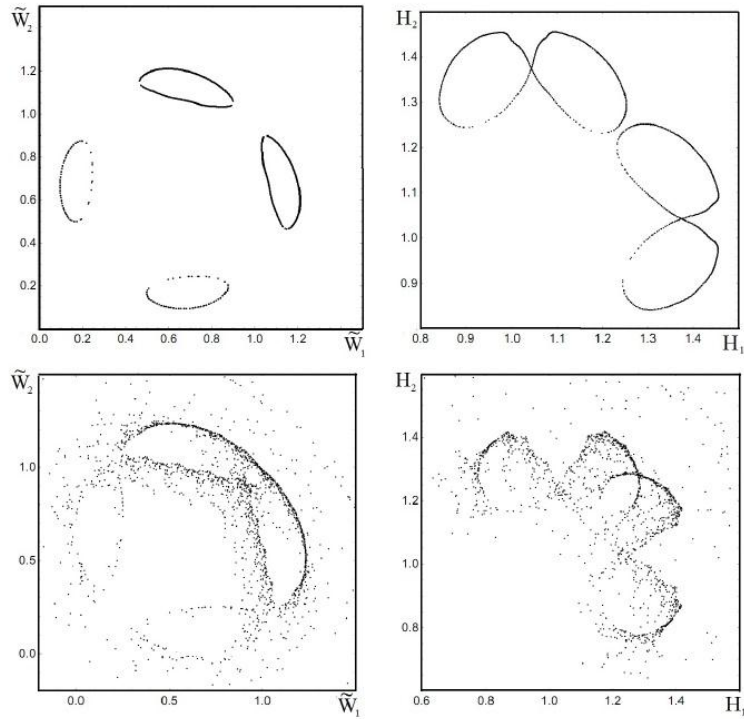


Рис. 4.4. Показаны сечения Пуанкаре для двух фазовых траекторий. Сверху для траектории с начальными условиями $\tilde{W}_1(0) = 1$, $\tilde{W}_2(0) = 1$, $H_1(0) = 1.2$, $H_2(0) = 1.2$, а снизу с начальными условиями $\tilde{W}_1(0) = 1$, $\tilde{W}_2(0) = 1$, $H_1(0) = 1.149$, $H_2(0) = 1.149$. Легко заметить, что траектория, соответствующая верхним рисункам, навивается на торы. Это регулярный тип траекторий. Нижние рисунки демонстрируют стохастические слои, которым и принадлежит соответствующая хаотическая траектория

Проанализируем зависимость этих коэффициентов от безразмерных параметров, полагая для простоты безразмерную амплитуду внешней силы f_0 равной $f_0 = 10$. Фиксирование уровня безразмерной силы означает выбор определенного уровня стационарного фона мелкомасштабных и быстрых осцилляций. В коэффициентах α_1 , α_2 , $\alpha_N^{(1)}$, $\alpha_N^{(2)}$ вместо декартовых проекций D_1 и D_2 удобно перейти к их проекциям в сферической системе координат (D, φ, θ) . Координатная поверхность

$D = const$ представляет собой сферу, θ – широта: $\theta \in [0, \pi]$, φ – долгота: $\varphi \in [0, 2\pi]$. Проведем анализ зависимости коэффициентов усиления α_1 , α_2 , $\alpha_H^{(1)}$, $\alpha_H^{(2)}$ от эффекта вращения, полагая для простоты $D_1 = D_2$, что соответствует фиксированному значению долготы $\varphi = \pi/4 + \pi n$, где $n = 0, 1, 2, \dots, k$, k – целое число. В этом случае коэффициенты усиления вихревых и магнитных возмущений соответственно равны:

$$\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = f_0^2 \frac{8\sqrt{2}D \sin \theta (D^2 \sin^2 \theta - 4)}{(D^4 \sin^4 \theta + 16)^2},$$

$$\alpha_H = \alpha_H^{(1)} = \alpha_H^{(2)} = f_0^2 \frac{2\sqrt{2}D \sin \theta Pm}{(1 + Pm^2)(D^4 \sin^4 \theta + 16)}.$$

Отсюда видно, что на полюсах ($\theta = 0, \theta = \pi$) генерация вихревых и магнитных возмущений не эффективна, поскольку $\alpha, \alpha_H \rightarrow 0$, т.е. крупномасштабная неустойчивость возникает, если вектор угловой скорости вращения $\vec{\Omega}$ отклонен от оси Z . Зависимость коэффициента α от вращения жидкости (параметра D) при фиксированном значении широты $\theta = \pi/2$ изображена в левой части рис. 4.2. Отсюда видно, что максимальное отрицательное значение $-\alpha_{\max}$ достигает при $D = 1$. В этом случае происходит нарастание затухающей моды. Далее, при увеличении параметра D происходит смещение значений α в положительную сторону, проходя нулевую отметку $\alpha = 0$ для $D = 2$. После достижения своего максимального значения α_{\max} , с ростом параметра D , коэффициент α плавно стремится к нулю, т.е. при «быстром» вращении происходит подавление ГД α -эффекта. Подобное явление было описано в работе [99]. Рассмотрим теперь зависимость коэффициента α_H от параметра вращения D , полагая при этом значении широты $\theta = \pi/2$ и магнитное число Прандтля $Pm = 1$. Магнитогидродинамический α -эффект (или α_H -эффект) также увеличивается при «медленном» вращении до максимального значения $\alpha_{H\max}$, после которого при увеличении параметра D наблюдается спад α_H , но знак коэффициента α_H не изменяется. Анализ зависимости $\alpha_H(D)$ показал, что при «быстром» вращении среды также происходит подавление МГД α -эффекта (см. правую часть рис. 4.2). Фиксируя значения параметров вращения D и магнитного числа Прандтля Pm для широтных углов

$\theta = \pi/2$, построим графики зависимости темпа роста вихревых Γ_1 и магнитных Γ_2 возмущений от волновых чисел K . Эти графики имеют типичный для α -эффекта вид (см. рис. 4.3).

Таким образом, в результате развития неустойчивости в наклонно вращающейся электропроводящей жидкости генерируются крупномасштабные спиральные циркулярно-поляризованные вихри и магнитные поля Бельтрамиевского типа.

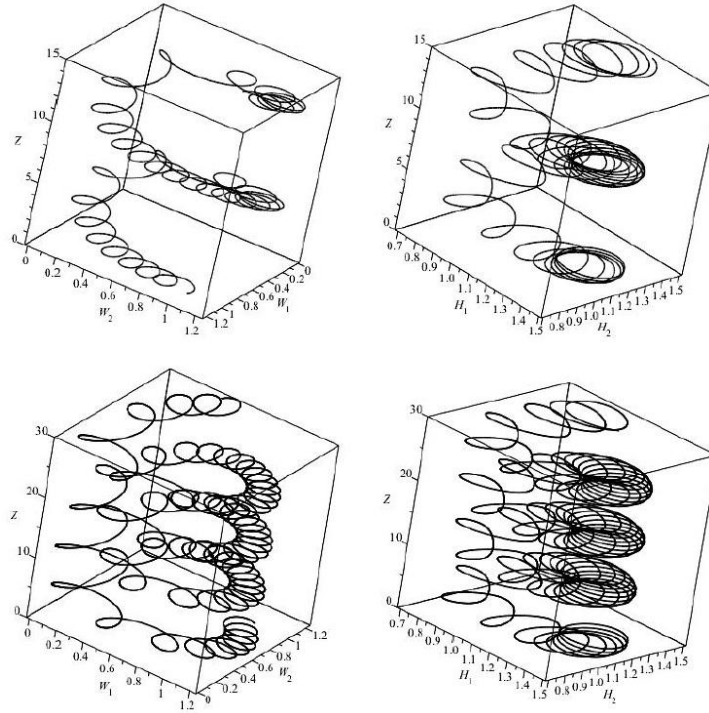


Рис. 4.5. Сверху показана зависимость скорости и магнитного поля с высотой для численного решения системы уравнений (4.18)-(4.21) с начальными условиями: $\tilde{W}_1(0) = 1$, $\tilde{W}_2(0) = 1$, $H_1(0) = 1.2$, $H_2(0) = 1.2$. Эта зависимость соответствует регулярным движениям сечения Пуанкаре, которые показаны на рис. 4.4 сверху. Снизу аналогичная зависимость для численного решения системы уравнений (4.18)-(4.21) с начальными условиями: $\tilde{W}_1(0) = 1$, $\tilde{W}_2(0) = 1$, $H_1(0) = 1.149$, $H_2(0) = 1.149$. Эта хаотическая зависимость соответствует сечениям Пуанкаре, на рис. 4.4 показанным внизу

4.3. Стационарные хаотические структуры крупномасштабных полей

Естественно, что с ростом амплитуды возмущений $W_{1,2}$ и $H_{1,2}$ нелинейные коэффициенты $\alpha_{(1)}$, $\alpha_{(2)}$, $\alpha_H^{(1)}$, $\alpha_H^{(2)}$ уменьшаются и неустойчивость насыщается, переходя к стационарному режиму. В результате образуются нелинейные стационарные структуры. Для описания таких структур рассмотрим нелинейную систему уравнений (4.6)-(4.9) в стационарном случае, полагая $\partial_T W_1 = \partial_T W_2 = \partial_T H_1 = \partial_T H_2 = 0$ и интегрируя эти уравнения по Z :

$$\frac{d\tilde{W}_1}{dZ} = -\alpha_{(2)}\tilde{W}_2 + C_1, \tag{4.18}$$

$$\frac{d\tilde{W}_2}{dZ} = \alpha_{(1)}\tilde{W}_1 + C_2, \tag{4.19}$$

$$\frac{1}{Pm} \frac{dH_1}{dZ} = \alpha_H^{(2)}H_2 + C_3, \tag{4.20}$$

$$\frac{1}{Pm} \frac{dH_2}{dZ} = -\alpha_H^{(1)}H_1 + C_4. \tag{4.21}$$

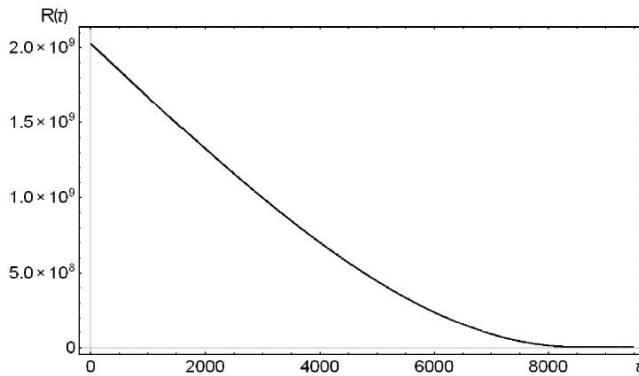


Рис. 4.6. Показан график зависимости автокорреляционной функции $R_{\tilde{W}_1\tilde{W}_1}$ от времени τ для траектории с начальными условиями $\tilde{W}_1(0) = 1$, $\tilde{W}_2(0) = 1$, $H_1(0) = 1.149$, $H_2(0) = 1.149$ (хаотическое движение)

Здесь приняты обозначения $\tilde{W}_1 = 1 - W_1$, $\tilde{W}_2 = 1 - W_2$, C_1 , C_2 , C_3 и C_4 – произвольные постоянные интегрирования. Перейдем, как и в предыдущем разделе, в коэффициентах $\alpha_{(1)}$, $\alpha_{(2)}$, $\alpha_H^{(1)}$, $\alpha_H^{(2)}$ вместо декартовых проекций D_1 и D_2 к их проекциям в сферической системе координат. Считая, для простоты вычислений, фиксированными значения долготы $\varphi = \pi/4$ и широты $\theta = \pi/2$, коэффициенты $\alpha_{(1)}$, $\alpha_{(2)}$, $\alpha_H^{(1)}$, $\alpha_H^{(2)}$ примут следующий вид:

$$\alpha_{(1)} = f_0^2 \frac{\sqrt{2} D q_1 Q_1 \tilde{W}_1^{-1}}{16 \tilde{W}_1^2 q_1^2 Q_1^2 + [D^2 + 2(1 - \tilde{W}_1^2) + 2\mu_1]^2},$$

$$\alpha_{(2)} = f_0^2 \frac{\sqrt{2} D q_2 Q_2 \tilde{W}_2^{-1}}{16 \tilde{W}_2^2 q_2^2 Q_2^2 + [D^2 + 2(1 - \tilde{W}_2^2) + 2\mu_2]^2},$$

$$\alpha_H^{(1)} = f_0^2 \frac{2\sqrt{2} D P m \tilde{W}_1 Q_1}{(1 + P m^2 \tilde{W}_1^2) [16 \tilde{W}_1^2 q_1^2 Q_1^2 + [D^2 + 2(1 - \tilde{W}_1^2) + 2\mu_1]^2]},$$

$$\alpha_H^{(2)} = f_0^2 \frac{2\sqrt{2} D P m \tilde{W}_2 Q_2}{(1 + P m^2 \tilde{W}_2^2) [16 \tilde{W}_2^2 q_2^2 Q_2^2 + [D^2 + 2(1 - \tilde{W}_2^2) + 2\mu_2]^2]}.$$

Уравнения (4.18)-(4.21) представляют собой нелинейную динамическую систему в четырехмерном фазовом пространстве. Нетрудно заметить, что система уравнений (4.18)-(4.21) консервативна. Однако поиск гамильтониана этой нелинейной системы технически громоздкая задача. Выполнение интегрирования усложняется зависимостью нелинейных коэффициентов $\alpha_{(1)}$, $\alpha_{(2)}$, $\alpha_H^{(1)}$, $\alpha_H^{(2)}$ от полей \vec{W} , \vec{H} и выводит его за класс элементарных функций.

Полный качественный анализ этой системы исключительно сложен как из-за высокой размерности фазового пространства, так и большого числа параметров, входящих в систему. Исходя из общих представлений, в такой системе консервативных уравнений следует ожидать наличие структуры резонансных и нерезонансных торов в фазовом пространстве и как следствие существование хаотических стационарных структур гидродинамических и магнитных полей. Один из способов исследования такой сложной системы нелинейных уравнений (4.18)-(4.21) является метод построения сечений Пуанкаре. Выбирая безразмерные

параметры $D = 1.5$, $Q = Pm = 1$, $f_0 = 10$ и постоянные $C_1 = 1, C_2 = -1$, $C_3 = -1, C_4 = 1$, можно численно, с помощью стандартных программ в среде Mathematica, построить сечения Пуанкаре траекторий в фазовом пространстве.

Верхняя часть рис. 4.4 демонстрирует сечение Пуанкаре регулярной траектории для поля скорости и магнитного поля. На нижнем сечении хорошо заметна структура хаотического слоя, которому и принадлежит выделенная траектория. Наличие таких хаотических траекторий означает существование стационарных хаотических структур как поля скорости, так и магнитного поля. На рис. 4.5 представлена зависимость стационарных крупномасштабных полей от высоты Z , которая была получена численно для начальных условий, которые соответствуют сечениям Пуанкаре на рис. 4.4. Из этих рисунков также видно появление стационарных хаотических решений для магнитного и вихревого поля. При численном решении системы уравнений (4.18)-(4.21) возникновение хаотических структур наблюдалось с уменьшением амплитуд начального поля магнитного поля. Кроме метода сечений Пуанкаре, для доказательства возникновения хаотического режима стационарных крупномасштабных полей воспользуемся понятием автокорреляционной функции. Как известно (см., например, [104]), автокорреляционная функция $R(\tau)$ используется в качестве величины, характеризующей интенсивность хаоса, и по определению представляет собой усреднение по «большому» интервалу времени Δt произведения случайных функций $P(t)$ в момент времени t и $P(t + \tau)$ в момент времени $t + \tau$:

$$R(\tau) = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} P(t)P(t + \tau) dt .$$

В нашей задаче роль времени t играет

координата Z , а произведение $P(t)P(t + \tau)$ состоит из шестнадцати компонент:

$$P(t)P(t + \tau) = \begin{bmatrix} \tilde{W}_1(t) \\ \tilde{W}_2(t) \\ H_1(t) \\ H_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{W}_1(t + \tau) & \tilde{W}_2(t + \tau) & H_1(t + \tau) & H_2(t + \tau) \end{bmatrix} .$$

С помощью известных программ, в среде Mathematica, получен график зависимости автокорреляционной функции для компоненты $R_{\tilde{W}_1\tilde{W}_1}$ от времени τ , изображенный на рис. 4.6.

Случай хаотического движения соответствует участку траектории на рис. 4.6 с экспоненциальным спадом функции $R_{\tilde{W}_1\tilde{W}_1}$. Очевидно, что участок экспоненциального спада, в логарифмическом масштабе авто-

корреляционной функции $R_{\tilde{w}_1\tilde{w}_1}$, аппроксимируется прямой линией (см. рис. 4.7). Данные, представленные на рис. 4.7, позволяют нам определить характерное время корреляции $\tau_{cor} \approx 69$ стационарного случайного процесса $P_{\tilde{w}_1}$. Если перейти к введенному выше «смыслу» времени t , то становится ясно, что мы нашли оценочное значение высоты $Z_{cor} \approx 69$, от которой начинается хаотическое движение стационарных крупномасштабных полей. На нижней части рис. 4.5 показаны хаотические решения для полей скорости и магнитного поля до высоты $Z = 40$, которая меньше Z_{cor} . Однако и в этом случае видно начало сложной запутанной траектории для крупномасштабных полей по мере увеличения высоты Z . Визуализация таких траекторий на графике уже теряет смысл. Таким образом, с увеличением высоты Z до некоторого критического значения Z_{cor} , квазипериодическое движение стационарных крупномасштабных полей сменяется на хаотическое.

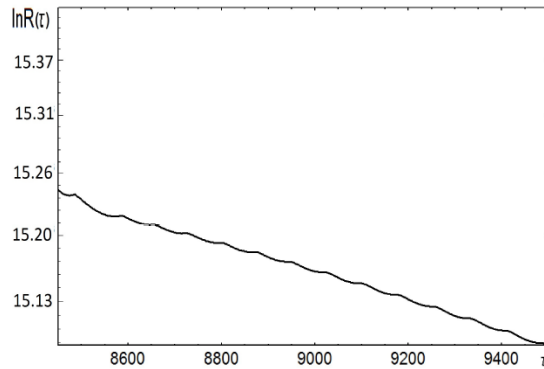


Рис. 4.7. Показана прямолинейная зависимость автокорреляционной функции $R_{\tilde{w}_1\tilde{w}_1}$ в логарифмических масштабах от интервала времени τ для сильно хаотического движения

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этом обзоре мы хотели отразить новые результаты по генерации крупномасштабных структур (КС) в магнитной гидродинамике (плазме). Результаты, которые здесь обсуждаются, получены в последнее время и связаны в основном с интересами авторов. Генерация КС в плазменных средах играет большую роль как в процессах тепло-массопереноса, так и в возникновении крупномасштабных магнитных полей. Особую роль в этих процессах играет мелкомасштабная турбу-

лентность. В 2D турбулентных средах генерация КС происходит в результате развития неустойчивости из-за явления «отрицательной вязкости». В 3D турбулентных средах крупномасштабная неустойчивость возникает при наличии в мелкомасштабной турбулентности спиральных свойств. Физический механизм этих неустойчивостей заключается в инверсном каскаде передачи энергии от мелкомасштабных вихревых движений к крупномасштабным. В качестве математического формализма для описания этих неустойчивостей мы используем метод многомасштабного асимптотического разложения. Этот метод, основанный на разложении по малому числу Рейнольдса, позволяет более корректно выделить главную часть (крупномасштабную) от пульсационной (мелкомасштабной) в общем возмущенном потоке. Из секулярных уравнений асимптотического разложения для конвективных сред мы получаем, что крупномасштабные вертикальные движения отсутствуют $W_z = 0$. Однако, учитывая зависимость крупномасштабных величин только от высоты Z , мы можем описывать эволюцию «квазидвумерных» структур в проводящих средах. Так, в стратифицированной по температуре проводящей среде при наличии мелкомасштабной спиральности возможно существование двух неустойчивых мод, которые возникают в определенных областях параметров. Одна мода имеет инкремент (1.103) и нулевую частоту. Типичная зависимость ее инкремента от волновых чисел K показана на рис. 1.3 и имеет ярко выраженный максимум. Положение и величина этого максимума зависит от параметров и легко определяется из соотношения (1.103). Вторая мода с отличной от нуля частотой, равной (1.105), и инкрементом (1.104) реализуется при других значениях параметров, обсуждаемых выше. Максимум инкремента этой моды достигается при значении волновых чисел $K = \frac{K_3}{2}$, частота при этом равна $\omega = \pm Im |K_3 / 2| \sqrt{\Pi} \Big|_{K=\frac{K_3}{2}}$. При умеренных числах $Ra \approx 1$ и $Pr \approx 1$

именно эта мода и нарастает. С ростом амплитуды эти неустойчивости выходят на нелинейную стадию и формируют стационарные крупномасштабные структуры. Нелинейная стадия также может быть систематически исследована методом многих масштабов, что было продемонстрировано в разделе 2. Полученная там замкнутая система нелинейных уравнений описывает как линейную, так и нелинейную стадии нарастания гидродинамических течений и магнитных полей в проводящей среде. Это позволяет применять ее для объяснения возникновения и стабилизации крупномасштабных магнитных полей ряда космических объектов, в частности звезд. Также интересно применить ее для описания генерации крупномасштабных полей конвекцией в электропроводящей среде в недрах планет. Качественные оценки линейной стадии для солнечных условий [84] позволяют установить хорошее совпадение характерных масштабов и времен, возникающих гидродинамических струк-

тур, с ранее обнаруженными экспериментально [105]. Это обстоятельство позволяет ожидать обнаружения и других стационарных магнитогидродинамических структур, например, солитоноподобных структур в фотосфере Солнца. Кроме стационарных магнитных структур (нелинейные волны, кинки и солитоны), в разделе 2 показана возможность существования крупномасштабных стационарных хаотических структур.

Во вращающейся электропроводящей жидкости (плазме) для «квасидвумерного» крупномасштабного движения устанавливается геострофическое равновесие [94]. Генерация КС возникает в результате совместного действия силы Кориолиса и мелкомасштабной спиральной силы. На линейной стадии генерация крупномасштабных вихревых возмущений происходит благодаря развитию неустойчивости типа гидродинамического α -эффекта, а генерация крупномасштабных магнитных полей из-за неустойчивости типа МГД α -эффекта. С ростом амплитуды вихревых и магнитных возмущений неустойчивость стабилизируется и переходит в стационарный режим. В случае, когда электропроводность среды очень мала или параметр вращения мал, то нелинейные уравнения магнито-вихревого динамо трансформируются в вихревую подсистему уравнений. В этом режиме формируются нелинейные стационарные вихревые структуры—спиральные кинки, аналогичные тем, которые были найдены в обычной гидродинамике в работе [100]. Если электропроводность среды существенна, а вихревые возмущения малы, то для магнитной подсистемы мы получили решения в виде периодических нелинейных волн и кинков.

Если вектор угловой скорости вращения $\vec{\Omega}$ отклонён на некоторый угол θ от вертикальной оси OZ , то генерация КС возможна мелкомасштабной неспиральной силой $\vec{F}_0 \text{rot} \vec{F}_0 = 0$. Причём на линейной стадии генерация крупномасштабных вихревых возмущений происходит благодаря развитию неустойчивости типа гидродинамического (ГД) α -эффекта, а генерация крупномасштабных магнитных полей из-за неустойчивости типа МГД α -эффекта. Обе неустойчивости возникают в результате совместного действия мелкомасштабной внешней силы и силы Кориолиса. В общем случае коэффициенты усиления для ГД и МГД α -эффектов, при переходе от декартовых проекций к сферическим, зависят от величины углов φ (долгота) и θ (широта). При этом минимальным значениям α соответствуют широты $\theta \rightarrow 0$ или $\theta \rightarrow \pi$ (вблизи полюсов), а максимальным при $\theta \rightarrow \pi/2$ (вблизи экватора). Проведенный в работе анализ влияния эффекта вращения на рост вихревых и магнитных возмущений показал, что при быстром «вращении» происходит их подавление. С ростом амплитуды вихревых и магнитных возмущений неустойчивость стабилизируется и переходит в стационарный режим. В этом режиме формируются нелинейные стационарные вихревые и магнитные структуры. Динамическая система уравнений, описывающая эти структуры, является гамильтоновой в четырехмерном

фазовом пространстве. Численными методами доказана возможность существования крупномасштабных хаотических вихревых и магнитных полей в стационарном режиме.

В турбулентной плазме присутствует целый спектр мелкомасштабных осцилляций. Поэтому асимптотическая техника, основанная на наличии мелкомасштабных осцилляций применима и к турбулентным плазменным средам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. McKee G. R., Fonck R. J., Jakubowski M., Burrell K. H., Hallatschek K., Moyer R. A., Rudakov D. L., Nevins W., Porter G. D., Schoch P., and Xu X. Experimental characterization of coherent, radially-sheared zonal flows in the DIII-D tokamak // *Phys. Plasmas*. - 2003. - V. 5. - P. 1712-1719.
2. Conway G. D., Scott B., Schirmer J., Reich M., Kendl A., and the ASDEX Upgrade Team. Direct measurement of zonal flows and geodesic acoustic mode oscillations in ASDEX Upgrade using Doppler reflectometry // *Plasma Phys. Control. Fusion*. - 2005. - V. 47. - P. 1165-1186.
3. Ido T., Miura Y., Kamiya K., Hamada Y., Hoshino K., Fujisawa A., Itoh K., Itoh S.-L., Nishizawa A., Ogawa H., Kusama Y., and JFT-2M group. Geodesic-acoustic mode in JFT-2M tokamak plasmas // *Plasma Phys. Control. Fusion*. - 2006. - V. 48. - P. S41-S50.
4. Goncalves B., Hidalgo C., Pedrosa M. A., Orozco R. O., Sanchez E., and Silva C. Role of Turbulence on Edge Momentum Redistribution in the TJ-II Stellarator // *Phys. Rev. Lett.* - 2006. - V. 96. - P. 145001.
5. Melnikov A. V., Vershkov V. A., Eliseev L. G., Grashin S. A., Gudoshnikov A. V., Krupnik L. L., Lysenko S. E., Mavrin V. A., Perfilov S. V., Shelukhin D. A., Soldatov S. V., Ufimtsev M. V., Urazbaev A. O., Van Oost G., and Zimeleva L. G. Investigation of geodesic-acoustic mode oscillations in the T-10 tokamak // *Plasma Phys. Control. Fusion*. - 2006. - V. 48. - P. S87-S110.
6. Сагдеев Р. З., Шапиро В. Д., Шевченко В. И. Конвективные ячейки и аномальная диффузия плазмы // *Физика плазмы*. - 1978. - Т. 4. - С. 551-559.
7. Shapiro V.D., Diamond P. H., Lebedev V. B., Soloviev G. I., and Shevchenko V. I. Generation of dipolar structures in drift wave turbulence // *Plasma Phys. Control. Fusion*. - 1993. - V. 35. - P. 1033-1050.
8. Guzdar P.N., Drake J.F., McCarthy D., Hassam A. B., and Liu C. S. Three-dimensional fluid simulations of the nonlinear drift-resistive ballooning modes in tokamak edge plasmas // *Phys. Fluids B*. - 1993. - V. 5. - P. 3712-3727.
9. Drake J.F., Finn J.M., Guzdar P., Shapiro V., Shevchenko V., Waelbroeck F., Hassam A. B., Liu C. S. and Sagdeev R. Peeling of convection cells and the generation of sheared flow // *Phys. Fluids B*. - 1992. - V. 4. - P. 488-491.
10. Finn J.M., Drake J.F., and Guzdar P.N. Instability of fluid vortices and generation of sheared flow // *Phys. Fluids B*. - 1992. - V. 4. - P. 2758-2768.
11. Guzdar P.N. Shear-flow generation by drift Rossby waves // *Phys. Plasmas*. - 1995. - V. 2. - P. 4174-4176.
12. Shapiro V.D., Diamond P. H., Lebedev V. B., Soloviev G. I., and Gruzinov A.V. On the generation of structured shear flow patterns by modulational interactions in drift wave turbulence // *Comments Plasma Phys. Controlled Fusion*. - 1995. - V. 16. - P. 155-166.
13. Shapiro V.D., Diamond P. H., Lebedev V. B., Soloviev G. I., and Shevchenko V. I. Generation of dipolar structures in drift wave turbulence // *Plasma Phys. Control. Fusion*. - 1993. - V. 35. - P. 1033-1050.
14. Guzdar P.N., Drake J.F., McCarthy D., Hassam A. B., and Liu C. S. Three-dimensional fluid simulations of the nonlinear drift-resistive ballooning modes in tokamak edge plasmas // *Phys. Fluids B*. - 1993. - V. 5. - P. 3712-3727.
15. Drake J.F., Finn J.M., Guzdar P., Shapiro V., Shevchenko V., Waelbroeck F., Hassam A. B., Liu C. S. and Sagdeev R. Peeling of convection cells and the generation of sheared flow // *Phys. Fluids B*. - 1992. - V. 4. - P. 488-491.
16. Finn J.M., Drake J.F., and Guzdar P.N. Instability of fluid vortices and generation of sheared flow // *Phys. Fluids B*. - 1992. - V. 4. - P. 2758-2768.
17. Guzdar P.N. Shear-flow generation by drift/Rossby waves // *Phys. Plasmas*. - 1995. - V. 2. - P. 4174-4176.

18. Shapiro V.D., Diamond P. H., Lebedev V. B., Soloviev G. I, and Gruzinov A.V. On the generation of structured shear flow patterns by modulational interactions in drift wave turbulence // *Comments Plasma Phys. Controlled Fusion*. - 1995. - V. 16. - P. 155-166.
19. Guzdar P.N., Kleva R.G., Das A., and Kaw P. K. Zonal flow and zonal magnetic field generation by finite β drift waves: a theory of low to high transitions in tokamaks // *Phys. Rev. Lett.* - 2001. - V. 87. - P. 015001.
20. Guzdar P.N., Kleva R.G., Das A., and Kaw P. Zonal flow and field generation by finite β drift waves and kinetic drift-Alfvén waves // *Phys. Plasmas*. - 2001. V. 8. P. 3907-3912.
21. Kaladze T. D., Wu D. J., Pokhotelov O. A., Sagdeev R. Z., Stenflo L., and Shukla P. K. Drift wave driven zonal flows in plasmas // *Phys. Plasmas*. - 2005. - V. 12. - P. 122311.
22. Hasegawa A., Mima K. Pseudo-three dimensional turbulence in magnetized nonuniform plasma // *Phys. Fluids*. - 1978. - V. 21. - P. 87-92.
23. Charney J.G., *Geophys. Public. Kosjones Nors. Videnshap. Akad. Oslo* 17, 3 (1948).
24. Hasegawa A., MacLennan G.C., and Kodama Y. Nonlinear behavior and turbulence spectra of drift waves and Rossby waves // *Phys. Fluids*. - 1979. - V. 22. - P. 2122.
25. Hasegawa A., MacLennan G.C., and Kodama Y., Stationary Spectrum of Strong Turbulence in Magnetized Nonuniform Plasma // *Phys. Rev. Lett.* - 1977 - V. 39. - P. 205.
26. Петвиашвили В.И., Похотелов О.А. Уединенные волны в плазме и атмосфере - М.: Энергоатомиздат, 1989. - 200 с.
27. J.D. Meiss, and W. Horton. Solitary drift waves in the presence of magnetic shear // *Phys. Fluids*. - 1983. - V. 26. - P. 990.
28. V.P. Pavlenko, and V.I. Petviashvili. Solitary vortex in a flute instability // *Sov. J. Plasma Phys.* - 1983. - V. 9. - P. 603.
29. Балк А. М., Захаров В. Е., Назаренко С. В. Нелокальная турбулентность дрейфовых волн // *ЖЭТФ*. - 1990. - V. 98. - P. 446-467.
30. Веденов А.А., Рудаков Л.И. О взаимодействии волн в сплошных средах // *ДАН СССР*. - 1964. - Т. 159. - С. 767-770.
31. Maikov M. A., Diamond P.H., and Smolyakov A.I. On the stability of drift wave spectra with respect to zonal flow excitation // *Phys. Plasmas*. - 2001. - V. 8. - P. 1553-1558.
32. Smolyakov A.I., Diamond P.H., Shevchenko V.I. Zonal flow generation by parametric instability in magnetized plasmas and geostrophic fluids // *Phys. Plasmas*. - 2000. - V. 7. - P. 1349-1351.
33. Smolyakov A.I., Diamond P.H., and Maikov M. Coherent Structure Phenomena in Drift Wave Zonal Flow Turbulence // *Phys. Rev. Lett.* - 2000. - V. 84. - P. 491-494.
34. Лахин В.П. О генерации зональных течений и крупномасштабных магнитных полей дрейфово-альфвеновской турбулентностью // *Физика плазмы*. - 2003. - Т. 29. - С. 157-171.
35. Lakhin V.P. Finite ion Larmor radius effects in the problem of zonal flow generation by kinetic drift-Alfvén turbulence // *Plasma Phys. Contr. Fus.* - 2004. - V. 46. - P. 877-897.
36. Gruzinov A.V., Diamond P.H., and Lebedev V.B. Spontaneous mean flow shear amplification in turbulent plasmas // *Phys. Plasmas*. - 1994. - V.1. - P. 3148-3150.
37. Chechkin A.V., Kopp M.I., Yanovsky V.V., and Tur A.V. Negative Viscosity For Rossby Wave and Drift Wave Turbulence // *ЖЭТФ*. - 1998. - Т. 113. - С. 646-663.
38. Вайнштейн С. И., Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А. Турбулентное динамо в астрофизике. - М.: Наука, 1980. - 352 с.
39. Моффат Г. Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. - М.: Мир, 1980. - 343 с.
40. Лахин В.П. О генерации крупномасштабных структур сильной дрейфовой турбулентностью // *Физика плазмы*. - 2001. - Т. 27. - С. 777-792.
41. Tur A.V., Chechkin A. V., Yanovsky V.V. Negative viscosity and generation of dissipative solitons and zonal dissipative structures by drift waves // *Phys. Fluids B*. - 1992. - V. 4. - P. 3513-3523.
42. Старр В. П. Физика явлений с отрицательной вязкостью. - М.: Мир, 1971. - 130 с.
43. Biskamp D., Welter H. Negative anomalous resistivity - a mechanism of the major disruption in tokamaks // *Phys. Lett. A*. - 1983. - V.96, №1. - P. 25-28.
44. Biskamp D. Anomalous Resistivity and Viscosity Due to Small-Scale Magnetic Turbulence // *Plasma Phys. Contr. Fusion*. - 1984. - V.26, №18. - P. 311-319.
45. Chechkin A.V. Negative Magnetic Viscosity in Two Dimensions // *ЖЭТФ*. - 1999. - Т. 116, № 4(10). - С. 1264-1286.
46. Johansen A., Youdin A., and Klahr H. Zonal flows and long-lived axisymmetric pressure bumps in magnetorotational turbulence // *Astrophys. J.* - 2009. - V. 697. - P. 1269.
47. Kunz M. W. and Lesur G. Magnetic self-organization in Hall-dominated magnetorotational turbulence // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. - 2013. - V. 434. - P. 2295-2312.
48. Scalo J. M., in *Protostars and Planets II*, ed. D. C. Black & M. S. Matthews (Tucson: Univ. Arizona Press). 1985. P. 201.

49. Scalo J. M., in *Interstellar Processes*, ed. D. J. Hollenbach & N. A. Thronson, Jr. (Dordrecht: Reidel). 1987. P. 349.
50. Штеенбек М., Краузе Ф. Возникновение магнитных полей звезд и планет в результате турбулентного движения их веществ // *Магнитная гидродинамика*. - 1967. - №3. - С. 19-44.
51. Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. *Магнитные поля в астрофизике*. - Ижевск: Инст. комп. иссл. РХД, 2006. - 384 с.
52. Вайнштейн С. И. *Магнитные поля в космосе*. - М.: Наука, 1983. - 237 с.
53. Паркер Ю. *Беседы об электрических и магнитных полях в космосе*. - Ижевск: Инст. комп. иссл. РХД, 2010. - 208 с.
54. Краузе Ф., Рэдлер К.-Х. *Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо*. - М.: Мир, 1984. - 314 с.
55. Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д., Шукуров А. М. *Магнитные поля галактик*. - М.: Наука, 1988. - 279 с.
56. Соколов Д. Д., Степанов Р. А., Фрик П. Г. Динамо на пути от астрофизических моделей к лабораторному эксперименту // *УФН*. - 2014. - Т. 184. - С. 318-335.
57. Моффат Г. Некоторые направления развития турбулентности. *Соврем. гидродинамика. Успехи и проблемы*. - М.: Мир, 1984. - С. 48-76.
58. Krause F., Rudiger G. On the Reynolds stresses in mean-field hydrodynamics. I. Incompressible homogeneous isotropic turbulence // *Astron. Nachr.* - 1974. - V. 295. - P.93-99.
59. Моисеев С. С., Сагдеев Р. З., Тур А. В., Хоменко Г. А., Яновский В. В. Теория возникновения крупномасштабных структур в гидродинамической турбулентности // *ЖЭТФ*. - 1983. - Т. 85. - С. 1979-1987.
60. Moiseev S.S., Rutkevitch P.B., Tur A.V., Yanovsky V.V. Vortex dynamos in a helical turbulent convection // *Sov. Phys. JETP*. - 1988. - V. 67. - P. 294.
61. Лурьян Е.А., Мазуров А.А., Rutkevitch P.B., Тур А.В. Generation of large-scale vortices through the action of spiral turbulence of a convective nature // *Sov. Phys. JETP*. - 1992. - V. 75. - P. 838.
62. Моисеев С.С., Оганян К.Р., Руткевич П.Б., Тур А.В., Хоменко Г.А., Яновский В.В. Вихревое динамо в спиральной турбулентности. // *Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов*. - Киев: Наук.думка - 1990. - С.280-382.
63. Levina G.V., Moiseev S.S., Rutkevitch P.B. Hydrodynamic alpha-effect in a convective system // *Advance in Fluid Mechanics*. - 2000. - V. 25. - P. 111.
64. Зимин В.Д., Левина Г.В., Моисеев С.С., Тур А.В. Возникновение крупномасштабных структур при турбулентной конвекции в подогреваемом снизу вращающемся слое // *Докл. АН СССР*. - 1989. - Т. 309. - С. 88.
65. Rutkevich P. B. Equation for vortex Instability Caused by Convective Turbulence and Coriolis Force // *JETF*. - 1993. - V. 77. - P.933.
66. Smith L. M. and Waleffe F. Transfer of Energy to Two-Dimensional Large Scales in Forced, Rotating Three-Dimensional Turbulence // *Physics of Fluids*. - 1999. - V. 11. - No. 6. - P.1608.
67. Smith L. M. and Waleffe F. Generation of Slow Large Scales in Forced Rotating Stratified Turbulence // *Journal of Fluid Mechanics*. - 2002. - V.451. - P. 145-168.
68. Berezin Y. A. and Zhukov V. P. An Influence of Rotation on Convective Stability of Large Scale Disturbances in Turbulent Fluid // *Izv. AN SSSR, Mech. Zhidk. Gaza*. - 1989. - V. 4. - P.3.
69. Kitchatinov L.L., Rudiger G. and Khomenko G. Large - scale vortices in rotating stratified disks // *Astron. Astrophys.* - 1994. - V. 287. - P. 320.
70. Katz M. E. and Yacobi V. M. Large-Scale Structures in the Interstellar Medium // *The Astrophysical Journal*. - 1997. - V. 483. - P.274-281.
71. Frishe U., She Z.S., Sulem P.L. Large Scale Flow Driven by the Anisotropic Kinetic Alpha Effect // *Physica D*. - 1987. - V. 28. - P. 382.
72. Busse F.H. Generation of planetary by convection // *Phys. Earth. Planet. Jnter* 12. - 1976. - P.350-358.
73. Zang K.K., Busse F.H. Generation of magnetic fields by convection in rotating spherical fluid shell of infinite Prandtl number // *Phys. Earth. Planet. Inter* 59. - 1990. - P.202-222.
74. Jones C. A. Convection-driven geodynamo models // *Phil.Trans.Roy.Soc. Lond.* - 2006. - A358, p.873-897.
75. Glantzmaier G. A. , Roberts P.H. Simulating the geodynamo // *Contemj.Phys.* - 1998. - V. 38. - P.269-288.
76. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. *Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости*. - М.: Наука, 1972. - 392 с.
77. Гетлинг А. В. *Конвекция Рэлея-Бенара*. - М.: Эдиториал УРСС, 1999. - 248 с.
78. Chandrasekhar S. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. - Dover Pub.N.Y., 1961. - 652 pp.

79. Podvigina O. The onset of convection in a rotating layer of viscous fluid with an imposed magnetic field: dependence on the Prandtl numbers // arXiv:1102.4092v1.
80. Подвигина О. М. Конвективная устойчивость вращающегося слоя проводящей жидкости в магнитном внешнем поле // Изв. РАН. МЖГ. - 2009. - Т. 4. - С. 29-39.
81. Ohkawa T., Chan V.C., Chu M.S., Daminez R.R., Miller R.L., in Proc. 12th Int. Conference in Plasma Physics Control of Nuclear Fusion. Res. Nice, France. - 1988. - CN50/1-4.
82. Соколов И. В. Момент импульса электромагнитной волны, эффект Садовского и генерация магнитных полей в плазме // УФН. - 1991. - Т.161. - №10. - С. 175-189.
83. Balbus S.A., Hawley J.F. A powerful local shear instability in weakly magnetized disk // Astrophysical Journal. - 1991. - V.376. - P.214.
84. Копп М. И., Тур А. В., Яновский В. В. Крупномасштабная конвективная неустойчивость в электропроводящей среде с мелкомасштабной спиральной турбулентностью // ЖЭТФ – 2015, Т. 147 – №4, С. 846-866.
85. Tur A., Yanovsky V. Large-scale instability in hydrodynamics with stable temperature stratification driven by small-scale helical force // ArXiv:1204.5024v1. - 2012.
86. Тур А. В., Яновский В. В. Гидродинамические вихревые структуры. - Харьков: Институт монокристаллов, 2012. - 290 с.
87. Tur A.V., Yanovsky V.V. Non Linear Vortex Structures in Stratified Fluid Driven by Small-Scale Helical Force // Open Journal of Fluid Dynamics. - 2013. - V. 3. - P. 64-74.
88. Долгинов А.З., Урпин В.А. Термодинамическая неустойчивость неоднородной плазмы // ЖЭТФ. - 1978. - Т. 77. - С.1921-1932.
89. Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А. Гидромагнитное динамо как источник планетарного, солнечного и галактического магнетизма // УФН. - 1987. - Т. 152. - Вып. 2. - С. 263-284.
90. Каплан С.А., Пикельнер С.Б., Цытович В.Н. Физика плазмы солнечной атмосферы. - М.: Наука. - 1977. - 255 с.
91. Копп М. И., Тур А. В., Яновский В. В. Нелинейная теория динамо // Нелинейная динамика. 2015. - Т. 11. - № 2. С. 241-266.
92. Kopp M. I., Tur A. V., Yanovsky V. V. Nonlinear Dynamo // arXiv:1612.08860v1 [astro-ph. EP] . - 2016.
93. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. Пер. с англ. - Ленинград: Гидрометеоиздат, 1975. - 304 с.
94. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика в 2-х т. Пер. с англ. - М.: Мир. - 1984.
95. Абурджания Г.Д. Самоорганизация нелинейных вихревых структур и вихревой турбулентности в диспергирующих средах. - М.: КомКнига, 2006. - 328 с.
96. Колесниченко А.В., Маров М. Я. Турбулентность и самоорганизация. Проблемы моделирования космических и природных сред. - М.: БИНОМ, 2009. - 632 с.
97. Онищенко О. Г., Похотелов О. А., Астафьева Н. М. Генерация крупномасштабных вихрей и зональных ветров в атмосферах планет // УФН. - 2008. - Т. 178. - С. 605.
98. Незлин М. В., Снежкин Е. Н. Вихри Россби и спиральные структуры: Астрофизика и физика плазмы в опытах на мелкой воде. - М.: Наука, 1990. - 240 с.
99. Rudiger G. On the Effect for Slow and Fast Rotation // Astron. Nachr. - 1978. - V.299. - No.4. - P. 217-222.
100. Kopp M., Tur A., Yanovsky V. The Large Scale Instability in Rotating Fluid with Small Scale Force // Open Journal of Fluid Dynamics. - 2015. - Vol. 5. - P. 128-138.
101. Копп М.И., Тур А. В., Яновский В.В. Нелинейное динамо во вращающейся электропроводящей жидкости // East Eur. J. Phys. - 2017. - V. 4. - No.1. - P.4-27.
102. Kopp M. I., Tur A. V., Yanovsky V. V. Nonlinear Vortex Structures in Obliquely Rotating Fluid // Open Journal of Fluid Dynamics. - 2015. - V. 5. - P. 311-321.
103. Kopp M. I., Tur A. V., Yanovsky V. V. Nonlinear dynamo in obliquely rotating electroconductive fluids // ArXiv:1711.08623v1[physics. plasma-ph]. - 2017
104. Данилов Ю. А. Лекции по нелинейной динамике. - М.: КомКнига, 2006. - 208 с
105. Brandt P.N., Scharmert G.B., Ferguson S., Shine R.A., Tarbell T.D., Title A.M. Vortex flow in the solar photosphere // Nature. - 1988. - V.335. - P.238-240.

Азаренков Н.А., Карась В.И. История и современное состояние плазменной электроники и новых методов ускорения // Проблемы теоретической физики. Научные труды. Выпуск 4/ Н.А. Азаренков, С.С. Апостолов, В.Г. Барьяхтар, В.А. Буц, А.А. Голованов, А.Г. Данилевич, В.И. Карась, М.И. Кош, И.Ю. Костюков, З.А. Майзелис, А.М. Пухов, Т.Н. Рохманова, П.С. Стрелков, Й. Томас, А.В. Тур, В.А. Ямпольский, В.В. Яновский: под общей редакцией А.Г. Загороднего, Н.Ф. Шульги, ред. вып. В.И. Карась. ХНУ имени В. Н. Каразина, 2019; Вып. 4. 456 с. (Серия «Проблемы теоретической и математической физики. Научные труды»).

Аннотация

Плазменная электроника – это четко сформировавшийся раздел физики плазмы, который связан, с одной стороны, с фундаментальными свойствами плазмы, колебательными и волновыми процессами в ней, разнообразными неустойчивостями, стохастичностью и турбулентностью плазмы и, с другой, с важными приложениями. Среди них упомянем только следующие:

– сверхвысокочастотная нерелятивистская и релятивистская плазменная электроника, изучающая процессы возбуждения в плазме интенсивного электромагнитного излучения от микроволнового до светового диапазона длин волн;

– одно из основных направлений коллективных методов ускорения – метод ускорения заряженных частиц волнами плотности заряда в плазме и некомпенсированных пучках, создание на его основе сильноточных ускорителей электронов, протонов и ионов;

– создание сильноточных плазменных индукционных ускорителей электронов и ионов с коллективной фокусировкой, в том числе тяжелых ионов, которые могут быть использованы для инерциального управляемого термоядерного синтеза (УТС);

– новый тип газового разряда – плазменно-пучковый разряд (ППР) и плазменно-ионно-пучковый разряд. Плазменная электроника привела к открытию нового типа разряда, так называемого плазменно-пучкового разряда, который сейчас обнаружен в большинстве лабораторных и космических экспериментов;

– неравновесная пучковая плазмохимия, основанная на ППР, и ее использование для синтеза и диссоциации молекул, разложения вредных и создания полезных соединений, имплантации, сухой очистки поверхности, нанесения покрытий;

– коллективный пучковый и турбулентный нагрев плазмы вплоть до термоядерных температур и коллективные процессы при транспортировке и фокусировке сильноточных пучков заряженных частиц;

– активные эксперименты в околоземной и космической плазме, в основе которых лежит плазменно-пучковое взаимодействие (ППВ);

– исследование взаимодействия СВЧ-излучения, возбуждаемого при ППВ, с веществом.

Такое многообразие совершенно различных на первый взгляд направлений связано с тем, что в основе всех их лежит коллективное ППВ.

Ключевые слова: плазменная электроника, неустойчивость, стохастичность, турбулентность, плазменно-пучковое взаимодействие, плазменно-пучковый разряд.

Реферат

В данной статье кратко излагается история и современное состояние указанного стремительно развивающегося направления физики плазмы и ускорителей заряженных частиц.

Плазменная электроника – это четко сформировавшийся раздел физики плазмы, который связан, с одной стороны, с фундаментальными свойствами плазмы, колебательными и волновыми процессами в ней, разнообразными неустойчивостями, стохастичностью и турбулентностью плазмы и, с другой, с важными приложениями. Среди них упомянем только следующие:

- сверхвысокочастотная нерелятивистская и релятивистская плазменная электроника, изучающая процессы возбуждения в плазме интенсивного электромагнитного излучения от микроволнового до светового диапазона длин волн;

- одно из основных направлений коллективных методов ускорения - метод ускорения заряженных частиц волнами плотности заряда в плазме и некомпенсированных пучках, создание на его основе сильноточных ускорителей электронов, протонов и ионов;

- создание сильноточных плазменных индукционных ускорителей электронов и ионов с коллективной фокусировкой, в том числе тяжелых ионов, которые могут быть использованы для инерциального управляемого термоядерного синтеза (УТС);

- новый тип газового разряда - плазменно-пучковый разряд (ППР) и плазменно-ионно-пучковый разряд. Плазменная электроника привела к открытию нового типа разряда, так называемого плазменно-пучкового разряда, который сейчас обнаружен в большинстве лабораторных и космических экспериментов;

- неравновесная пучковая плазмохимия, основанная на ППР, и ее использование для синтеза и диссоциации молекул, разложения вредных и создания полезных соединений, имплантации, сухой очистки поверхности, нанесения покрытий;

- коллективный пучковый и турбулентный нагрев плазмы вплоть до термоядерных температур и коллективные процессы при транспортировке и фокусировке сильноточных пучков заряженных частиц;

- активные эксперименты в околоземной и космической плазме, в основе которых лежит плазменно-пучковое взаимодействие (ППВ);

- исследование взаимодействия СВЧ-излучения, возбуждаемого при ППВ, с веществом.

Такое многообразие совершенно различных на первый взгляд направлений связано с тем, что в основе всех их лежит коллективное ППВ.

Для всех перечисленных выше направлений ПЭ общим является то, что лежащие в их основе элементарные механизмы излучения и поглощения одни и те же или представляют собой обращенные эффекты (эффект Черенкова, нормальный и аномальный эффекты Доплера, параметрический эффект Черенкова или резонансное переходное излучение, томсоновское, комптоновское и аномальное рассеяние, циклотронное и синхротронное излучение и поглощение, ондуляторное и параметрическое излучение, переходное излучение, эффекты Рамана, Манделъштамма - Ландсберга и Манделъштамма - Бриллюэна). В общем, практически все элементарные эффекты излучения и поглощения охватываются этими направлениями. В наших работах мы уже многие годы исходим из утверждения, теперь уже доказанного, о том, что генераторы и ускорители допускают обращение, в результате которого можно создавать новые виды ускорителей и генераторов. Физическая причина этого заключается в возможности обращения элементарных процессов, лежащих в основе механизмов излучения и ускорения. Последовательное проведение идеи о возможном обращении генераторов-ускорителей имеет важное

значення для пошуків нових видів генераторів і ускорителів, а також нових неустойчивостей і управління ими.

Ключевые слова: плазменная електроніка, неустойчивость, стохастичность, турбулентность, плазменно-пучковое взаимодействие, плазменно-пучковый разряд.

PACS numbers: 52.35.Fp, 52.35.Mw, 52.38.Kd, 52.40.Mj, 52.65.Rr, 52.75. ± d, 84.30.Jc

Азаренков М.О., Карась В.І. Історія та сучасний стан плазмової електроніки та нових методів прискорення

Анотація

Плазмова електроніка – це чітко сформований розділ фізики плазми, який пов'язаний, з одного боку, з фундаментальними властивостями плазми, коливальними та хвильовими процесами в ній, різноманітними нестійкостями, стохастичністю і турбулентністю плазми і, з другого, – з важливими застосуваннями. Серед них зазначимо тільки наступні:

– надвисокочастотна нерелятивістська та релятивістська плазмова електроніка, що вивчає процеси збудження в плазмі інтенсивного електромагнітного випромінення від мікрохвильового до світлового діапазону довжин хвиль;

– один з основних напрямків колективних методів прискорення – метод прискорення заряджених частинок хвилями густини заряду в плазмі та некомпенсованих пучках, створення на його основі сильнострумівих прискорювачів електронів, протонів та іонів;

– створення сильнострумівих плазмових індукційних прискорювачів електронів та іонів з колективним фокусуванням, у тому числі важких іонів, які можуть бути застосовані для інерціального керованого термоядерного синтезу (КТС);

– новий тип газового розряду – плазмово-пучковий розряд (ППР) та плазмово-іонно-пучковий розряд. Плазмова електроніка привела до відкриття нового типу розряду, так званого плазмово-пучкового розряду, який зараз виявлено у більшості лабораторних та космічних експериментів;

– нерівноважна пучкова плазмохімія, що основана на ППР, та її застосування для синтезу та дисоціації молекул, розкладі шкідливих та створенні корисних з'єднань, імплантації, сухої чистки поверхонь, нанесення покриттів;

– колективний пучковий та турбулентний нагрів плазми навіть до термоядерних температур та колективні процеси при транспортуванні та фокусуванні сильнострумівих пучків заряджених частинок;

– активні експерименти у навколоземній та космічній плазмі, в основі яких лежить плазмово-пучкова взаємодія (ППВ);

– дослідження взаємодії НВЧ-випромінення, що збуджується при ППВ, з речовиною.

Таке розмаїття цілком різних на перший погляд напрямків пов'язано з тим, що в усіх основі їх лежить колективна ППВ.

Ключові слова: плазмова електроніка, нестійкість, стохастичність, турбулентність, плазмово-пучкова взаємодія, плазмово-пучковий розряд.

Реферат

У даному розділі коротко викладається історія та сучасний стан указанного напрямку фізики плазми та прискорювачів заряджених частинок, який стрімко розвивається.

Плазмова електроніка – це чітко сформований розділ фізики плазми, який пов'язаний, з одного боку, з фундаментальними властивостями плазми, коливальними та хвильовими процесами в ній, різноманітними нестійкостями, стохастичністю і турбулентністю плазми і, з другого, – з важливими застосуваннями. Серед них зазначимо тільки наступні:

- надвисокочастотна нерелятивістська та релятивістська плазмова електроніка, що вивчає процеси збудження в плазмі інтенсивного електромагнітного випромінювання від мікрохвильового до світлового діапазону довжин хвиль;

- один з основних напрямків колективних методів прискорення – метод прискорення заряджених частинок хвилями густини заряду в плазмі та некомпенсованих пучках, створення на його основі сильнострумкових прискорювачів електронів, протонів та іонів;

- створення сильнострумкових плазмових індукційних прискорювачів електронів та іонів з колективним фокусуванням, у тому числі важких іонів, які можуть бути застосовані для інерціального керованого термоядерного синтезу (КТС);

- новий тип газового розряду – плазмово-пучковий розряд (ППР) та плазмово-іонно-пучковий розряд. Плазмова електроніка привела до відкриття нового типу розряду, так званого плазмово-пучкового розряду, який зараз виявлено у більшості лабораторних та космічних експериментів;

- нерівноважна пучкова плазмохімія, що оснований на ППР, та її застосування для синтезу та дисоціації молекул, розкладі шкідливих та створенні корисних з'єднань, імплантації, сухої чистки поверхонь, нанесення покриттів;

- колективний пучковий та турбулентний нагрів плазми навіть до термоядерних температур та колективні процеси при транспортуванні та фокусуванні сильнострумкових пучків заряджених частинок;

- активні експерименти у навколоземній та космічній плазмі, в основі яких лежить плазмово-пучкова взаємодія (ППВ);

- дослідження взаємодії НВЧ-випромінювання, що збуджується при ППВ, з речовиною.

Таке розмаїття цілком різних на перший погляд напрямків пов'язано з тим, що в усіх на основі їх лежить колективна ППВ.

Для всіх перерахованих вище напрямків ППВ загальним є те, що елементарні механізми випромінювання та поглинання, які лежать в їх основі, одні і ті ж або представляють собою обернуті ефекти (ефект Черенкова, нормальний та аномальний ефекти Доплера, параметричний ефект Черенкова або резонансне перехідне випромінювання, томсонівське, комптонівське та аномальне розсіяння, циклотронне та синхротронне випромінювання і поглинання, ондуляторне та параметричне випромінювання, перехідне випромінювання, ефекти Рамана, Мандельштама - Ландсберга та Мандельштама - Брилюєна). Взагалі практично всі елементарні ефекти випромінювання та поглинання охоплюються цими напрямками. У наших роботах ми уже багато років виходимо з твердження, тепер уже доведеного, про те, що генератори та прискорювачі допускають обертання, в результаті якого можна створювати нові види прискорювачів та генераторів. Фізична причина цього полягає в можливості обертання елементарних процесів, що лежать в основі механізмів випромінювання та прискорення. Послідовне проведення ідеї про можливе обертання генераторів-прискорювачів має важливе значення для пошуків нових видів генераторів та прискорювачів, а також нових нестійкостей та керування ними.

Ключові слова: плазмова електроніка, нестійкість, стохастичність, турбулентність, плазмово-пучкова взаємодія, плазмово-пучковий розряд.

PACS numbers: 52.35.Fp, 52.35.Mw, 52.38.Kd, 52.40.Mj, 52.65.Rr, 52.75. ± d, 84.30.Jc

Azarenkov N. A., Karas` V.I. History and current state of plasma electronics and new methods of acceleration**Annotation**

This article briefly describes the history and current state of the rapidly developing direction of plasma physics and accelerators of charged particles.

Plasma electronics is a well-formed branch of plasma physics, which is associated, on the one hand, with the fundamental properties of plasma, vibrational and wave processes in it, various instabilities, stochasticity and turbulence of plasma and, on the other hand, with important applications. Among them, let us mention only the following:

- ultra-high-frequency nonrelativistic and relativistic plasma electronics, studying the processes of excitation in plasma of intense electromagnetic radiation from microwave to light wavelength range;

- one of the main directions of collective acceleration methods is the method of acceleration of charged particles by charge density waves in plasma and uncompensated beams, creation of high-current accelerators of electrons, protons and ions on its basis;

- creation of high-current plasma induction accelerators of electrons and ions with collective focusing, including heavy ions, which can be used for inertial controlled thermonuclear fusion (ICTNF);

- a new type of gas discharge - plasma beam discharge (PBD) and plasma ion beam discharge. Plasma electronics has led to the discovery of a new type of discharge, the so-called plasma beam discharge, which is now found in most laboratory and space experiments;

- nonequilibrium beam plasma chemistry based on PBD, and its use for the synthesis and dissociation of molecules, decomposition of harmful and useful compounds, implantation, dry cleaning of the surface, coating;

- collective beam and turbulent plasma heating up to thermonuclear temperatures and collective processes during transportation and focusing of high-current bundles of charged particles;

- active experiments in near-Earth and space plasma, based on plasma beam interaction (PBI);

- study of the interaction of microwave radiation excited at PBI with matter.

Such a variety of absolutely different at first sight directions is connected with the fact that all of them are based on collective PBI.

For all the above mentioned directions of PE, it is common that the underlying elementary mechanisms of radiation and absorption are the same or are reversed effects (the Cherenkov effect, normal and abnormal Doppler effects), Parametric Cherenkov effect or resonance transient radiation, Thomson, Compton and anomalous scattering, cyclotron and synchrotron radiation and absorption, muscular and parametric radiation, transient radiation, Raman, Mandelstamm-Landsberg and Mandelstamm-Brillouin effects). In general, practically all elementary effects of radiation and absorption are covered by these directions. Our work has for many years been based on a statement, now proven, that generators and accelerators can be handled to create new types of accelerators and generators. The physical reason for this is that the elementary processes underlying the radiation and acceleration mechanisms can be reversed. The consistent implementation of the idea of the possible circulation of accelerator generators is important in the search for and control of new types of generators and accelerators, as well as new instabilities.

Keywords: plasma electronics, instability, stochasticity, turbulence, plasma beam interaction, plasma beam discharge.

Abstract

This article briefly describes the history and current state of the rapidly developing direction of plasma physics and accelerators of charged particles.

Plasma electronics is a well-formed branch of plasma physics, which is associated, on the one hand, with the fundamental properties of plasma, vibrational and wave processes in it, various instabilities, stochasticity and turbulence of plasma and, on the other hand, with important applications. Among them, let us mention only the following:

- ultra-high-frequency nonrelativistic and relativistic plasma electronics, studying the processes of excitation in plasma of intense electromagnetic radiation from microwave to light wavelength range;

- one of the main directions of collective acceleration methods is the method of acceleration of charged particles by charge density waves in plasma and uncompensated beams, creation of high-current accelerators of electrons, protons and ions on its basis;

- creation of high-current plasma induction accelerators of electrons and ions with collective focusing, including heavy ions, which can be used for inertial controlled thermonuclear fusion (ICTNF);

- a new type of gas discharge - plasma beam discharge (PBD) and plasma ion beam discharge. Plasma electronics has led to the discovery of a new type of discharge, the so-called plasma beam discharge, which is now found in most laboratory and space experiments;

- nonequilibrium beam plasma chemistry based on PBD, and its use for the synthesis and dissociation of molecules, decomposition of harmful and useful compounds, implantation, dry cleaning of the surface, coating;

- collective beam and turbulent plasma heating up to thermonuclear temperatures and collective processes during transportation and focusing of high-current bundles of charged particles;

- active experiments in near-Earth and space plasma, based on plasma beam interaction (PBI);

- study of the interaction of microwave radiation excited at PBI with matter.

Such a variety of absolutely different at first sight directions is connected with the fact that all of them are based on collective PBI.

For all the above mentioned directions of PE, it is common that the underlying elementary mechanisms of radiation and absorption are the same or are reversed effects (the Cherenkov effect, normal and abnormal Doppler effects), Parametric Cherenkov effect or resonance transient radiation, Thomson, Compton and anomalous scattering, cyclotron and synchrotron radiation and absorption, muscular and parametric radiation, transient radiation, Raman, Mandelstamm-Landsberg and Mandelstamm-Brillouin effects). In general, practically all elementary effects of radiation and absorption are covered by these directions. Our work has for many years been based on a statement, now proven, that generators and accelerators can be handled to create new types of accelerators and generators. The physical reason for this is that the elementary processes underlying the radiation and acceleration mechanisms can be reversed. The consistent implementation of the idea of the possible circulation of accelerator generators is important in the search for and control of new types of generators and accelerators, as well as new instabilities.

Keywords: plasma electronics, instability, stochasticity, turbulence, plasma beam interaction, plasma beam discharge.

PACS numbers: 52.35.Fp, 52.35.Mw, 52.38.Kd, 52.40.Mj, 52.65.Rr, 52.75. ± d, 84.30.Jc

Стрелков П.С. Экспериментальная плазменная СВЧ электроника // Проблемы теоретической физики. Научные труды. Выпуск 4/ Н.А. Азаренков, С.С. Апостолов, В.Г. Барьяхтар, В.А. Буц, А.А. Голованов, А.Г. Данилевич, В.И. Карась, М.И. Кош, И.Ю. Костюков, З.А. Майзелис, А.М. Пухов, Т.Н. Рохманова, П.С. Стрелков, Й. Томас, А.В. Тур, В.А. Ямпольский, В.В. Яновский; под общей редакцией А.Г. Загороднего, Н.Ф. Шульги, ред. вып. В.И. Карась. ХНУ имени В. Н. Каразина, 2019. - Вып. 4. - 456 с. (Серия «Проблемы теоретической и математической физики. Научные труды»).

Аннотация

В статье представлен обзор экспериментальных работ по плазменной релятивистской СВЧ электронике, выполненных в лаборатории «Плазменная электроника» Института общей физики РАН им. А.М.Прохорова в 1980–2017 годах. Созданы плазменные релятивистские СВЧ генераторы и усилители. Эти приборы принципиально отличаются от вакуумных релятивистских СВЧ приборов возможностью широкой перестройки частоты излучения. Результаты экспериментальных исследований сравниваются с выводами аналитической теории, а также с результатами численного моделирования.

Ключевые слова: физика плазмы, релятивистский электронный пучок, мощные СВЧ генераторы и усилители.

Реферат

Экспериментальным исследованиям по плазменной релятивистской СВЧ электронике предшествовали теоретические работы А. А. Рухадзе. Рассматривалась задача возбуждения медленных плазменных волн релятивистским электронным пучком в металлическом волноводе, заполненном плазмой. В этих первых теоретических работах указывалась главная особенность плазменных СВЧ приборов, состоящая в возможности управления частотой излучения за счёт изменения плотности плазмы. Это означает, что в плазменных СВЧ источниках появляется возможность кардинально перестраивать свойства их электродинамических систем электронным образом, что невозможно выполнить в рамках вакуумной релятивистской СВЧ электроники. Также ожидалось, что нейтрализация пространственного заряда электронного пучка позволит транспортировать большой ток пучка и тем самым получить высокую мощность излучения. Эксперименты начались с изучения процессов инжекции релятивистского электронного пучка в заранее заготовленную плазму. Было показано, что можно пропустить через плазменный волновод ток, превышающий значение предельного вакуумного тока в 10 раз.

В экспериментальных исследованиях неустойчивости пучка в плазме возникла проблема разделения области диода, в котором формируется электронный пучок, и плазмы. В первых экспериментах анод диода был выполнен из тонкой металлической фольги, прозрачной для релятивистских электронов. Оказалось, что в такой схеме эксперимента медленные плазменные волны не возбуждаются. Электроны, проходя через фольгу, приобретали разброс по углу. Появление разброса продольной скорости электронов приводило к резкому сокращению инкремента плазменно-пучковой неустойчивости. Была предложена новая геометрия эксперимента, в которой трубчатые плазма и пучок имеют разные радиусы. Эта схема позволяет избавиться от фольги и обеспечить отсутствие плазмы в диоде.

Именно в этой схеме был проведён в 1982 году первый успешный эксперимент с плазменным СВЧ генератором. После 1982 года все теоретические и экспериментальные исследования проводились в такой геометрии пучка и плазмы.

В данном обзоре описаны методы создания трубчатых пучка и плазмы, а также методы регистрации параметров СВЧ излучения.

Первая задача экспериментального исследования состояла в определении типа возникающих в плазме волн. Было обнаружено совпадение теоретического и экспериментального значения критической плотности плазмы, при которой возбуждаются медленные плазменные волны. Было показано, что экспериментальная зависимость средней частоты излучения от плотности плазмы совпадает с расчётной. Отметим, что частота излучения изменялась в 7 раз. Эти два эксперимента доказали, что излучение, регистрируемое в эксперименте, происходит из-за возбуждения медленных плазменных волн.

Экспериментальные исследования стимулировали развитие теории. Было показано, что оптимальная эффективность плазменных релятивистских СВЧ приборов достигается при токе примерно в 2 раза меньшем, чем предельный вакуумный ток I_0 . Увеличение тока пучка в эксперименте выше значения $0.5 I_0$ не привело к увеличению мощности СВЧ излучения. Единственная возможность достижения большой мощности излучения за счёт использования высокого значения тока пучка при фиксированной энергии электронов заключается в использовании геометрии эксперимента, в которой значение I_0 велико, т.е. радиус пучка близок к радиусу волновода. В эксперименте такую схему нам реализовать не удалось. В нашей схеме плазменного СВЧ источника, как правило, радиус пучка незначительно меньше радиуса плазмы и в 3 раза меньше радиуса волновода. Поэтому абсолютное значение предельного тока не велико. Увеличение радиуса пучка при сохранении радиуса плазмы, то есть переход к геометрии, в которой радиус пучка больше радиуса плазмы, не привёл к увеличению мощности. В результате в вакуумных черенковских релятивистских СВЧ приборах при фиксированной энергии электронов удаётся эффективно использовать больший ток, чем в наших экспериментах, поскольку в вакуумных приборах радиус пучка близок к радиусу волновода.

Малый зазор между пучком и стенкой в вакуумных черенковских приборах является необходимым условием их действия, поскольку эффективность вакуумного черенковского прибора резко уменьшается с увеличением этого зазора. Однако малый зазор приводит к пробоем на стенке волновода. Поэтому в вакуумной релятивистской СВЧ электронике удалось получить значительно более высокое значение мощности излучения, чем в плазменных СВЧ приборах, но в импульсах малой длительности. В плазменном СВЧ усилителе при умеренном значении мощности излучения (более 100 МВт) получены импульсы, превышающие длительность СВЧ импульсов любых вакуумных релятивистских СВЧ приборов.

Первые наши эксперименты проводились с импульсным электронным пучком малой длительности 30 нс. Источник электронного пучка работал в режиме одиночных импульсов. Исследовалось излучение на частотах 10 – 30 ГГц. Спектр СВЧ излучения исследовался грубо при помощи фильтров. После 2000 года появилась возможность измерять зависимость электрического поля от времени каждого СВЧ импульса при помощи скоростного осциллографа с полосой частот до 4 ГГц. Для генерации частот менее 4 ГГц была изготовлена новая установка, и использовался другой источник электронного пучка с длительностью импульса тока до 600 нс.

Новые эксперименты подтвердили утверждения, сделанные ранее. Подтвердился вывод о том, что спектр СВЧ генератора имеет широкую полосу частот. Кроме того, было обнаружено, что средняя частота излучения уменьшается со временем в течение СВЧ импульса. Это объясняется ускоренным распадом плазмы в сильном СВЧ поле. Затем эффект ускоренного распада плазмы был обнаружен и в плазменном СВЧ усилителе. Но частота выходного излучения СВЧ усилителя определяется

частотой входного сигнала, а изменение плотности плазмы приводит к изменению формы СВЧ импульса. Таким образом, удалось реализовать стабильный СВЧ источник монохроматического излучения со слабой зависимостью мощности излучения в течение 200 нс. Осуществлена перестройка частоты в 30 % полосе частот при уровне мощности излучения более 100 МВт. Частота излучения изменяется за счёт изменения плотности плазмы от одного импульса к другому, то есть электронным образом. В вакуумной релятивистской СВЧ электронике достигнута перестройка в 10 % полосе частот, и перестройка осуществляется механически.

Ключевые слова: электронная перестройка частоты, спектры излучения плазменных СВЧ генераторов и усилителей, диагностика плазмы, релятивистского электронного пучка и мощного СВЧ излучения.

PACS numbers: 52.75. ± d, 84.30.Jc

Стрелков П.С. Експериментальна плазмова НВЧ електроніка

Анотація

У статті наведено огляд експериментальних робіт з плазмової релятивістської НВЧ електроніки, виконаних в лабораторії «Плазмова електроніка» Інституту загальної фізики РАН ім. О. М. Прохорова у 1980–2017 роках. Створені плазмові релятивістські НВЧ генератори та підсилювачі. Ці прилади принципово відрізняються від вакуумних релятивістських НВЧ приладів можливістю широкої перебудови частоти випромінювання. Результати експериментальних досліджень порівнюються з висновками аналітичної теорії, а також з результатами числового моделювання.

Ключові слова: фізика плазми, релятивістський електронний пучок, потужні НВЧ генератори та підсилювачі.

Реферат

Експериментальним дослідженням з плазмової релятивістської НВЧ електроніки передували теоретичні роботи А. А. Рухадзе. Розглядалась задача збудження повільних плазмових хвиль релятивістським електронним пучком у металевому хвилеводі, заповненому плазмою. У цих перших теоретичних роботах указувалась головна особливість плазмових НВЧ приладів, що полягає в можливості керування частотою випромінювання за рахунок зміни густини плазми. Це означає, що в плазмових НВЧ джерелах з'являється можливість кардинально перебудувати властивості їх електродинамічних систем електронним чином, що неможливо виконати в межах вакуумної релятивістської НВЧ електроніки. Також очікувалось, що нейтралізація просторового заряду електронного пучка дозволить транспортувати великий струм пучка і тим самим отримати високу потужність випромінювання. Експерименти почалися з вивчення процесів інжекції релятивістського електронного пучка в наперед заготовлену плазму. Було показано, що можна пропустити крізь плазмовий хвилевід струм, що перевищує значення граничного вакуумного струму в 10 разів.

В експериментальних дослідженнях нестійкості пучка в плазмі виникла проблема розділення області діода, в якій формується електронний пучок, та плазми. У перших експериментах анод діода було виконано з тонкої металевої фольги, прозорої для релятивістських електронів. Виявилось, що в такій схемі експерименту повільні плазмові хвилі не збуджуються. Електрони, проходячи крізь фольгу, набувають розкид за кутом. Поява розкиду подовжньої швидкості електронів приводила до різкого скорочення інкременту плазмово-пучкової нестійкості. Була запропонована нова геометрія експерименту, в якій трубчасті плазма та пучок мають різні радіуси. Ця схема дозволяє позбутися фольги, та забезпечити відсутність плазми в діоді. Саме в цій схемі було проведено в 1982 році перший успішний експеримент з плазмовим НВЧ генератором. Після 1982 року всі теоретичні та експериментальні дослідження проводились в такій геометрії пучка та плазми.

У даному огляді описані методи створення трубчастих пучка та плазми, а також методи реєстрації параметрів НВЧ випромінення.

Перша задача експериментального дослідження полягала у визначенні типу виникаючих у плазмі хвиль. Було виявлено співпадіння теоретичного та експериментального значення критичної густини плазми, при якій збуджуються повільні плазмові хвилі. Було показано, що експериментальна залежність середньої частоти випромінення від густини плазми співпадає з розрахунковою. Відзначимо, що частота випромінення змінювалась у 7 разів. Ці два експерименти довели, що випромінення, яке реєструється в експерименті, відбувається внаслідок збудження повільних плазмових хвиль.

Експериментальні дослідження стимулювали розвиток теорії. Було показано, що оптимальна ефективність плазмових релятивістських НВЧ приладів досягається при струмі приблизно в 2 рази меншому, ніж граничний вакуумний струм I_0 . Збільшення струму пучка в експерименті вище значення $0.5 I_0$ не привело до зростання потужності НВЧ випромінення. Єдина можливість досягнення великої потужності випромінення за рахунок використання високого значення струму пучка при фіксованій енергії електронів полягає в застосуванні геометрії експерименту, в якій значення I_0 велике, тобто радіус пучка близький до радіуса хвилеводу. В експерименті таку схему нам реалізувати не вдалося. В нашій схемі плазмового НВЧ джерела, як правило, радіус пучка незначно менше радіуса плазми та в 3 рази менше радіуса хвилеводу. Тому абсолютне значення граничного струму не велике. Збільшення радіуса пучка при збереженні радіуса плазми, тобто перехід до геометрії, в якій радіус пучка більше радіуса плазми не привів до збільшення потужності. В результаті у вакуумних черенковських релятивістських НВЧ приладах при фіксованій енергії електронів удається ефективно використовувати великий струм, ніж у наших експериментах, оскільки у вакуумних приладах радіус пучка близький до радіуса хвилеводу.

Малий зазор між пучком та стінкою у вакуумних черенковських приладах є необхідною умовою їх дії, оскільки ефективність вакуумного черенковського приладу різко зменшується зі збільшенням цього зазору. Але малий зазор приводить до пробою на стінки хвилеводу. Тому в вакуумній релятивістській НВЧ електроніці вдалося отримати значно більш високе значення потужності випромінення, ніж у плазмових НВЧ приладах, але в імпульсах малої тривалості. У плазмовому НВЧ підсилювачі при помірному значенні потужності випромінення (більше 100 МВт) отримані імпульси, перевищуючі тривалість НВЧ імпульсів будь-яких вакуумних релятивістських НВЧ приладів.

Перші наші експерименти проводились з імпульсним електронним пучком малої тривалості 30 нс. Джерело електронного пучка працювало в режимі одиничних імпульсів. Досліджувалось випромінення на частотах 10 – 30 ГГц. Спектр НВЧ випромінення досліджувався грубо за допомогою фільтрів. Після 2000 року з'явилася можливість вимірювати залежність електричного поля від часу кожного НВЧ імпульсу за допомогою швидкісного осцилографа з полосою частот до 4 ГГц. Для генерації частот менше 4 ГГц була виготовлена нова установка, та використулося інше джерело електронного пучка з тривалістю імпульсу струму до 600 нс.

Нові експерименти підтвердили твердження, зроблені раніше. Підтвердився висновок про те, що спектр НВЧ генератора має широку смугу частот. Крім того, було виявлено, що середня частота випромінення зменшується з часом упродовж НВЧ імпульсу. Це пояснюється прискореним розпадом плазми в сильному НВЧ полі. Потім ефект прискореного розпаду плазми був виявлений і в плазмовому НВЧ підсилювачі. Але частота вихідного випромінення НВЧ підсилювача визначається частотою вхідного сигналу, а зміна густини плазми приводить до зміни форми НВЧ імпульсу. Таким чином, вдалося реалізувати стабільне НВЧ джерело монохроматичного випромінення зі слабкою залежністю потужності випромінення впродовж 200 нс. Здійснена перебудова частоти в 30 % смуги

зі частот при рівні потужності випромінення більше 100 МВт. Частота випромінення змінюється за рахунок зміни густини плазми від одного імпульсу до другого, тобто електронним чином. У вакуумній релятивістській НВЧ електроніці досягнута перебудова в 10 % смузі частот та перебудова здійснюється механічно.

Ключові слова: електронна перебудова частоти, спектри випромінення плазмових НВЧ генераторів та підсилювачів, діагностика плазми, релятивістського електронного пучка та потужного НВЧ випромінення.

PACS numbers: 52.75. ± d, 84.30.Jc

Strelkov P.S. Experimental plasma UHF electronics

Annotation

The article presents an overview of experimental work on plasma relativistic microwave electronics performed in the laboratory "Plasma Electronics" of the Prokhorov General Physics Institute, Russian Academy of Sciences in the years 1980 - 2017. Plasma relativistic microwave oscillators and amplifiers are created. These devices are fundamentally different from vacuum relativistic microwave devices by the possibility of a wide frequency tuning of the radiation. The results of experimental studies are compared with the conclusions of the analytical theory, as well as with the results of numerical simulation.

Keywords: plasma physics, relativistic electron beam, powerful plasma microwave oscillators and amplifiers.

Abstract

Experimental studies on plasma relativistic microwave electronics were preceded by theoretical works of A.A. Rukhadze. The problem of slow plasma waves excitation by relativistic electron beam in a metal waveguide filled with plasma was considered. In these first theoretical works the main feature of plasma microwave devices was pointed out, which consists in the possibility of controlling the radiation frequency due to changes in plasma density. This means that in plasma microwave sources it is possible to change radically the properties of their electrodynamic systems electronically, which is impossible to perform within the vacuum relativistic microwave electronics. It was also expected that neutralization of the spatial charge of the electron beam would transport a large beam current and thereby obtain high radiation power. The experiments began with studying the processes of a relativistic electron beam injection into a prepared plasma. It was shown that it is possible to pass through the plasma waveguide the current exceeding the value of the limiting vacuum current by 10 times.

In experimental studies of the beam instability in the plasma has the problem of the separation region of the diode, which the electron beam is formed, and plasma. In the first experiments, the anode of the diode was made of a thin metallic foil transparent to relativistic electrons. It turned out that in such a scheme of experiment slow plasma waves are not excited. The electrons passing through the foil, was acquired the scatter angle. The occurrence of the longitudinal electrons velocity spread led to a sharp reduction in the increment of beam-plasma instability. New geometry of experiment was proposed, in which tubular plasma and beam have different radii. This scheme allows you to get rid of the foil and ensure the absence of plasma in the diode. It was in this scheme that the first successful experiment with a plasma microwave oscillator was carried out in 1982. After 1982 all theoretical and experimental researches were carried out in such geometry of a beam and plasma.

This review describes methods for creating tubular beam and plasma, as well as methods for recording microwave radiation parameters.

The first task of the experimental study was to determine the type of waves arising in the plasma. The coincidence of the theoretical and experimental values of

the critical plasma density at which slow plasma waves are excited was found. It was shown that the experimental dependence of the radiation frequency on the plasma density coincides with the calculated one. Note that the frequency of radiation changed 7 times. These two experiments proved that the radiation recorded in the experiment is due to the excitation of slow plasma waves.

Experimental studies stimulated the development of the theory. It was shown that the optimal efficiency of plasma relativistic microwave devices is achieved at a current of about 2 times less than the limiting vacuum current I_0 . The increase of the beam current in the experiment above $0.5 I_0$ did not lead to an increase in the microwave power. The only possibility of achieving a high radiation power due to the use of a high beam current at a fixed electron energy is to use the geometry of the experiment in which the value of I_0 is large, i.e. the radius of the beam is close to the radius of the waveguide. In the experiment, such a scheme was not realized. In our scheme of a plasma microwave source, as a rule, the beam radius is slightly smaller than the radius of the plasma and is 3 times smaller than the radius of the waveguide. Therefore, the absolute value of the limiting current is not large. An increase in the beam radius while maintaining the plasma radius, that is, a transition to a geometry in which the radius of the beam is larger than the plasma radius did not lead to an increase in the microwave power.

A small gap between the beam and the wall in vacuum Cherenkov devices is a necessary condition for their action, since the efficiency of the vacuum Cherenkov device decreases sharply with an increase in this gap. However, a small gap leads to a breakdown on the wall of the waveguide. Therefore, in vacuum electronics it was possible to obtain a much higher value of the radiation power than in plasma microwave devices, but in short-duration pulses. Pulses exceeding the duration of microwave pulses of any vacuum relativistic microwave devices were obtained in a plasma microwave amplifier with a moderate value of radiation power (more than 100 MW).

The first our experiments were carried out with a pulsed electron beam of short duration of 30 ns. The electron beam source operated in single pulse mode. We studied the radiation at frequencies 10 and 30 GHz. Spectrum of microwave radiation was investigated roughly with the help of filters. After 2000, it became possible to measure the dependence of the electric field on the time of each microwave pulse using a high-speed oscilloscope with a frequency band up to 4 GHz. To generate frequencies of less than 4 GHz, a new installation was made, and another electron beam source with a beam current pulse duration of up to 600 ns was used.

New experiments confirmed the statements made earlier. It was confirmed that the spectrum of the microwave oscillator has a wide frequency band. In addition, it was found that the average emission frequency decreases over time during the microwave pulse. This is due to the accelerated plasma decay in a strong microwave field. Then the effect of accelerated plasma decay was found in the plasma microwave amplifier. But the frequency of the output radiation of the microwave amplifier is determined by the frequency of the input signal, and the change in plasma density leads to a change in the shape of the microwave pulse. Thus, it was possible to realize a stable microwave source of monochromatic radiation with a weak dependence of the radiation power for 200 ns. Frequency tuning in 30% of the frequency band at the level of the radiation power exceeding 100 MW is carried out. The radiation frequency is changed by changing the plasma density from one pulse to another, that is, electronically. In vacuum relativistic microwave electronics, tuning in 10% of the frequency band is achieved and tuning is carried out mechanically.

Keywords: electronic radiation frequency tuning, spectra of plasma microwave oscillators and amplifiers, diagnostics of plasma, relativistic electron beam and high-power microwave radiation.

PACS numbers: 52.75. ± d, 84.30.Jc

А.А. Голованов, И.Ю. Костюков, Й.Томас, А.М. Пухов. Теория сильно нелинейной кильватерной волны, генерируемой электронным сгустком или лазерным импульсом в неоднородной плазме // Проблемы теоретической физики. Научные труды. Выпуск 4/ Н.А. Азаренков, С.С. Апостолов, В.Г. Барьяхтар, В.А. Буц, А.А. Голованов, А.Г. Данилевич, В.И. Карась, М.И. Кош, И.Ю. Костюков, З.А. Майзелис, А.М. Пухов, Т.Н. Рохманова, П.С. Стрелков, Й. Томас, А.В. Тур, В.А. Ямпольский, В.В. Яновский; под общей редакцией А.Г. Загороднего, Н.Ф. Шульги, ред. вып. В.И. Карась. ХНУ имени В. Н. Каразина, 2019.- Вып. 4. - 456 с. (Серия «Проблемы теоретической и математической физики. Научные труды»).

Аннотация

Рассматривается задача о возбуждении мощным коротким лазерным импульсом или релятивистским сгустком заряженных частиц кильватерной волны в плазме в сильно нелинейном режиме (режиме плазменной полости). Последовательно излагается построение теории сильно нелинейного режима, исследуются важные следствия этой теории. Важной особенностью представляемой теории является рассмотрение поперечно-неоднородной плазмы, что представляет интерес для ускорения частиц в плазменных каналах. Постулируется феноменологическая модель плазменной полости, в рамках которой выводится дифференциальное уравнение, описывающее форму ее границы. Находятся явные выражения для компонент электромагнитного поля внутри и снаружи плазменной полости. Рассматривается как полость без ускоряемых электронов, так и влияние ускоряемого сгустка на форму полости. Исследуется эффективность передачи энергии ускоряемому сгустку, а также возможность его ускорения в однородном поле. Предсказания теории показывают хорошее согласие с результатами численного моделирования методом «частиц в ячейках».

Ключевые слова: плазменные методы ускорения, кильватерная волна, режим плазменной полости

Реферат

Использование кильватерных волн, возбуждаемых в плазме драйвером, в роли которого может выступать короткий лазерный импульс или сгусток заряженных частиц, является одним из перспективных методов ускорения электронов. Образование волны происходит за счет воздействия ponderomotive силы лазерного импульса или кулоновской силы со стороны сгустка частиц, приводящей к разделению заряда в плазме. Эта волна обладает продольным электрическим полем большой амплитуды и распространяется в плазме со скоростью, близкой к скорости света, что позволяет ускорять релятивистские частицы на больших дистанциях. При слабом воздействии драйвера кильватерная волна возбуждается в линейном режиме, при этом профиль продольного электрического поля является синусоидальным. При повышении интенсивности лазерного импульса или заряда в сгустке возникают нелинейные эффекты. Особый интерес представляет сильно нелинейный режим кильватерной волны, в котором воздействие драйвера приводит к образованию позади него полости сферической формы, практически полностью свободной от электронов плазмы.

В работе приводится последовательное изложение теории сильно нелинейного режима кильватерной волны. Предполагается, что драйвер (короткий лазерный импульс или релятивистский сгусток заряженных частиц) движется в неограниченной плазме с цилиндрически-симметричным относительно оси распространения драйвера распределением плотности. Рассмотрение неоднородного профиля обусловлено интересом к кильватерным волнам в различных типах плазменных каналов. Процесс распространения считается квазистационарным, то есть можно пренебречь эволюцией драйвера и структуры кильватерной волны. При этом скорость драйвера предполагается равной скорости света. Для описания плазмы и сгустков используется кинетическое уравнение Власова для компонент плазмы в бесстолкновительном приближении. При этом плазма также считается полностью ионизованной и холодной (не учитывается тепловое движение), а ионы плазмы — покоящимися, что обусловлено малой длительностью драйвера. Для описания электромагнитного поля в кильватерной волне используются уравнения Максвелла, в которых не учитывается поле лазера, описываемое при помощи пондеромоторной силы, воздействующей на электроны.

Подобное самосогласованное описание оказывается слишком сложным для дальнейшего теоретического исследования и используется, в основном, в численном моделировании. Поэтому в работе мы предлагаем феноменологическую модель сильно нелинейного режима, в которой мы считаем, что внутри плазменной полости отсутствуют электроны плазмы, а на ее границе находится тонкий электронный слой, экранирующий плазменную полость от окружающей плазмы. Эта модель основана на наблюдениях, полученных в результате численного моделирования методом «частиц в ячейках». В рамках модели удается получить обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее границу плазменной полости, а также явные выражения для компонент электромагнитного поля внутри и снаружи полости. Обсуждаются приближения, при которых полученное уравнение можно значительно упростить.

На основе разработанной модели исследуются важные частные случаи плазменной полости. В частности, приводится описание ненагруженной плазменной полости (полости без ускоряемых электронов), обсуждается влияние ускоряемого сгустка на форму плазменной полости и ускоряемое поле с учетом наличия канала в плазме. Нами получено выражение для эффективности ускорения, а также показано, что путем выбора формы ускоряемого сгустка можно добиться его ускорения в однородном поле. Полученные результаты показывают хорошее согласие с результатами численного моделирования методом «частиц в ячейках» для плазмы с глубоким каналом.

Ключевые слова: плазменные методы ускорения, кильватерная волна, режим плазменной полости.

PACS numbers: 52.35.Fp, 52.35.Mw, 52.38.Kd, 52.40.Mj, 52.65.Rr

А.О. Голованов, І.Ю. Костюков, Й.Томас, О.М. Пухов. Теорія сильно нелінійної кильватерної хвилі, яка генерується електронним згустком або лазерним імпульсом у неоднорідній плазмі

Анотація

Розглядається задача про збудження потужним коротким лазерним імпульсом або релятивістським згустком заряджених частинок кильватерної хвилі в плазмі в сильно нелінійному режимі (режимі плазменної порожнини). Послідовно викладається побудова теорії сильно нелінійного режиму, досліджуються важливі

наслідки цієї теорії. Важливою особливістю представленої теорії є розгляд поперечно-неоднорідної плазми, що представляє інтерес для прискорення частинок у плазмових каналах. Постулюється феноменологічна модель плазмової порожнини, в рамках якої виводиться диференціальне рівняння, що описує форму її границі. Знаходяться явні вирази для компонент електромагнітного поля в та зовні плазмової порожнини. Розглядається як порожнина без прискорюваних електронів, так і вплив прискорюваного згустка на форму порожнини. Досліджується ефективність передачі енергії прискорюваному згустку, а також можливість його прискорення в однорідному полі. Передбачення теорії показують хорошу узгодженість з результатами числового моделювання методом «частинок в комірках».

Ключевые слова: плазмові методи прискорення, кільватерна хвиля, режим плазмової порожнини.

Реферат

Використання кільватерних хвиль, збуджуваних у плазмі драйвером, у ролі якого може виступати короткий лазерний імпульс або згусток заряджених частинок, є одним з перспективних методів прискорення електронів. Утворення хвилі відбувається за рахунок дії пондеромоторної сили лазерного імпульсу або кулонівської сили з боку згустку частинок, що приводить до розділення заряду в плазмі. Ця хвиля має подовжне електричне поле великої амплітуди і поширюється в плазмі зі швидкістю, близькою до швидкості світла, що дозволяє прискорювати релятивістські частинки на великих дистанціях. При слабкій дії драйвера кільватерна хвиля збуджується в лінійному режимі, при цьому профіль подовжного електричного поля є синусоїдальним. При підвищенні інтенсивності лазерного імпульсу або заряду в згустку виникають нелінійні ефекти. Особливий інтерес представляє сильно нелінійний режим кільватерної хвилі, в якому дія драйвера приводить до утворення позаду нього порожнини сферичної форми, практично повністю вільної від електронів плазми.

У роботі наводиться послідовний виклад теорії сильно нелінійного режиму кільватерної хвилі. Припускається, що драйвер (короткий лазерний імпульс або згусток релятивістських заряджених частинок) рухається в необмеженій плазмі з циліндрично-симетричним відносно осі поширення драйвера розподілом густини. Розгляд неоднорідного профіля обумовлено інтересом до кільватерних хвиль у різноманітних типах плазмових каналів. Процес поширення вважається квазістаціонарним, тобто можна знехтувати еволюцією драйвера та структури кільватерної хвилі. При цьому швидкість драйвера припускається рівною швидкості світла. Для опису плазми та згустків застосовується кінетичне рівняння Власова для компонент плазми у беззіштохувальному наближенні. При цьому плазма також вважається повністю іонізованою та холодною (не враховується тепловий рух), а іони плазми — нерухомі, що обумовлено малою тривалістю драйвера. Для опису електромагнітного поля в кільватерній хвилі застосовуються рівняння Максвелла, в яких не враховується поле лазера, що описується за допомогою пондеромоторної сили, яка діє на електрони.

Подібний самоузгоджений опис виявляється занадто складним для подальшого теоретичного дослідження та застосовується, в основному, в числовому моделюванні. Тому в роботі ми пропонуємо феноменологічну модель сильно нелінійного режиму, в якій ми вважаємо, що в плазмовій порожнині відсутні електрони плазми, а на її границі знаходиться тонкий електронний шар, що екранує плазмову порожнину від оточуючої плазми. Ця модель основана на спостереженнях, отриманих у результаті числового моделювання методом «частинок в комірках». В рамках моделі вдається одержати звичайне диференціальне рівняння другого порядку, що описує границі плазмової порожнини, а також явні вирази для компонент електро-

магнітного поля в та зовні порожнини. Обговорюються наближення, при яких отримане рівняння можна значно спростити.

На основі розробленої моделі досліджуються важливі часткові випадки плазмової порожнини. Зокрема наводиться опис ненавантаженої плазмової порожнини (порожнини без прискорюваних електронів), обговорюється вплив прискорюваного згустка на форму плазмової порожнини та прискорюване поле з урахуванням наявності каналу в плазмі. Нами отримано вираз для ефективності прискорення, а також показано, що шляхом вибору форми прискорюваного згустка можна добитись його прискорення в однорідному полі. Отримані результати показують хороше узгодження з результатами числового моделювання методом «частинок в комірках» для плазми з глибоким каналом.

Ключові слова: плазмові методи прискорення, кільватерна хвиля, режим плазмової порожнини.

PACS numbers: 52.35.Fp, 52.35.Mw, 52.38.Kd, 52.40.Mj, 52.65.Rr

A.A. Golovanov, I.Yu. Kostyukov, Y. Tomas, A.M. Pukhov. Theory of a strongly nonlinear wakefield wave excited by an electron bunch or a laser pulse in inhomogeneous plasma

Annotation

We consider strongly nonlinear plasma wakefield (bubble) excited by a short intense laser pulse or a relativistic electron bunch. The theory of the strongly nonlinear regime is consistently developed, important consequences are investigated. The important feature of the presented theory is the consideration of transversely inhomogeneous plasma, which is of interest for the acceleration of particles in plasma channels. We postulate a phenomenological model of a bubble and derive a differential equation describing the shape of its boundary. We find explicit expressions for the electromagnetic field components inside and outside the bubble. We consider a bubble without accelerated electrons as well as the influence of the accelerated bunch on its shape. We investigate the efficiency of the energy transfer to the accelerated bunch and the possibility of its acceleration in uniform field. The predictions of the theory are in a good agreement with the results of particle-in-cell numerical simulations.

Keywords: plasma acceleration methods, wakefield, bubble regime.

Abstract

The use of wakefields excited in plasma by a driver (a short laser pulse or a charged particle bunch) is one of the perspective methods of acceleration of electrons. A plasma wave (a wakefield) is excited due to the ponderomotive force of the laser pulse or the Coulomb force of the particle bunch which leads to charge separation in plasma. This wave has large-amplitude longitudinal electric and propagates in plasma with the velocity close to the speed of light thus making it possible to accelerate relativistic particles over long distances. When the influence of the driver is weak, a wakefield is excited in the linear regime in which the longitudinal electric field profile is sinusoidal. If the intensity of the laser pulse or the charge of the bunch is increased, nonlinear effects appear. Of particular interest is the strongly nonlinear regime in which the influence of the driver leads to the formation of a spherical cavity almost free of plasma electrons behind the driver.

In this paper, we consistently develop a theory of the strongly nonlinear regime of plasma wakefields. We assume that a driver (a short laser pulse or a relativistic charged particle bunch) is moving in a boundless plasma with density distribution which is cylin-

drically symmetric with respect to the axis of the driver propagation. The consideration of the non-uniform plasma profile is based on the interest to wakefields in different types of plasma channels. The process of the driver propagation is considered quasi-stationary, so that the evolution of both the driver and the structure of the wakefield can be neglected. The velocity of the driver is considered to be equal to the speed of light. For the description of plasma and bunches, Vlasov kinetic equation in the collisionless approximation is used. Also, plasma is considered fully ionized and cold (thermal motion is neglected), while ions are considered immobile, which is justified when the driver is short. For the description of electromagnetic field in the wakefield, Maxwell's equations are used. However, the field of the laser is not taken into account in them, and the laser is described by a ponderomotive force.

Such self-consistent description is too difficult for further theoretical consideration and is used predominantly in numerical simulations. Because of that we propose a phenomenological model of the strongly nonlinear regime in which we assume that there are no plasma electrons inside the bubble and, on its boundary, there is a thin electron sheath which screens the bubble from the surrounding plasma. This model is based on observations obtained from particle-in-cell numerical simulations. In the scope the model, a second-order ordinary differential equation for the boundary of the bubble is obtained, and explicit expressions for the electromagnetic field components inside and outside the bubble are derived. Approximations allowing for significant simplification of the obtained equation are discussed.

Based on the model, important particular examples of bubbles are investigated. In particular, non-loaded bubble (without accelerated particles) is described, the influence of an accelerated bunch on the shape of the bubble and the accelerating field in it is discussed taking into account the plasma channel. We obtain acceleration efficiency and show that it is possible to accelerate an electron bunch in a uniform field by choosing its shape. The obtained results are in a good agreement with the results of particle-in-cell numerical simulations for plasmas with a deep channel.

Keywords: plasma acceleration methods, wakefield, bubble regime

PACS numbers: 52.35.Fp, 52.35.Mw, 52.38.Kd, 52.40.Mj, 52.65.Rr.

В.Г. Барьяхтар, А.Г. Данилевич. Связанные магнитоупругие колебания в ферромагнетиках // Проблемы теоретической физики. Научные труды. Выпуск 4/ Н.А. Азаренков, С.С. Апостолов, В.Г. Барьяхтар, В.А. Буц, А.А. Голованов, А.Г. Данилевич, В.И. Карась, М.И. Копп, И.Ю. Костюков, З.А. Майзелис, А.М. Пухов, Т.Н. Рохманова, П.С. Стрелков, Й. Томас, А.В. Тур, В.А. Ямпольский, В.В. Яновский; под общей редакцией А.Г. Загородного, Н.Ф. Шульги, ред. вып. В.И. Карась. ХНУ имени В. Н. Каразина, 2019.-Вып. 4. 456 с. (Серия «Проблемы теоретической и математической физики. Научные труды»).

Аннотация

Рассчитаны законы дисперсии связанных магнитоупругих волн для ферромагнетиков кубической и одноосной симметрии. Показано, что взаимодействие между звуковыми и спиновыми волнами зависит как от направления волнового вектора колебаний, так и от направления магнитного момента ферромагнетика.

Проанализировано поведение спектров связанных магнитоупругих волн в окрестности фазовых переходов в решетке, а именно в окрестности мартенситных фазовых превращений в материалах с эффектом памяти формы. Теоретически объяснено явление резкого уменьшения упругих модулей таких сплавов при приближении к мартенситным фазовым переходам. Показано, что при этом основное влияние на упругие характеристики материала оказывает неоднородная магнитострикция.

Исследовано влияние магнитоупругого взаимодействия на закон дисперсии квази-спиновых волн в вырожденном основном состоянии одноосного ферромагнетика «легкая плоскость». Магнитоупругое взаимодействие снимает вырождение и приводит к появлению магнитоакустических щелей в спектре.

Построена модель диссипативной функции, описывающей релаксационные процессы, обусловленные затуханием связанных магнитоупругих волн в ферромагнетиках кубической и одноосной симметрии.

Ключевые слова: магнитоупругое взаимодействие, закон дисперсии, упругий модуль, мартенситный фазовый переход, диссипативная функция.

Реферат

Проведен подробный анализ основных типов моделей описания взаимодействия спиновых и звуковых волн в магнитоупорядоченных материалах. Разработаны методики теоретических и экспериментальных исследований магнитоакустических свойств материалов с эффектом памяти формы. Построены выражения для энергии магнитной и упругой подсистемы для магнетиков различной симметрии. Построена система динамических магнитоакустических уравнений для основных состояний ферромагнетиков кубической и одноосной симметрии.

Рассчитаны законы дисперсии связанных магнитоакустических волн для ферромагнетиков кубической и одноосной симметрии. Проведен анализ особенностей полученных законов дисперсии в окрестностях спин-переориентационных фазовых переходов. Показано, что взаимодействие (коэффициент магнитоупругого взаимодействия) между звуковыми и спиновыми волнами зависит как от направления волнового вектора колебаний, так и от направления магнитного

момента ферромагнетика. Коэффициент магнитоупругого взаимодействия может сильно меняться (даже принимать нулевые значения) в зависимости от указанных параметров. Этот факт объясняет полученную во многих экспериментах, зависимость упругих модулей ферромагнетика от направления внешнего магнитного поля.

Проанализировано поведение спектров связанных магнитоакустических волн в окрестности фазовых переходов в решетке, а именно в окрестности мартенситных фазовых превращений в материалах с эффектом памяти формы. Полученные результаты использованы для интерпретации экспериментальных данных для сплава Ni-Mn-Ga. Теоретически объяснено явление резкого уменьшения упругих модулей данного сплава вблизи мартенситных фазовых переходов. Показано, что при этом основное влияние на упругие характеристики материала оказывает неоднородная магнитоstriction.

Исследовано влияние магнитоупругого взаимодействия на закон дисперсии квази-спиновых волн в вырожденном основном состоянии одноосного ферромагнетика «легкая плоскость». Расчеты показывают, что магнитоупругое взаимодействие снимает вырождение и приводит к появлению магнитоакустической щели в спектре, то есть магнитоупругое взаимодействие «превращает» Голдстоуновскую моду в бозон Хиггса. В данном случае появление магнитоупругой щели не зависит от направления волнового вектора колебаний.

Для случая одноосного ферромагнетика также показано, что магнитоупругое взаимодействие может сильно увеличиваться в окрестности фазовых переходов в решетке, сопровождающихся резким изменением упругих модулей ферромагнетика. Для одноосного ферромагнетика зависимость магнитоупругого взаимодействия от направления волнового вектора и магнитного момента также присутствует и, в некоторых случаях, даже более выражена. Тот факт, что определенные звуковые моды взаимодействуют со спиновыми волнами в одном основном состоянии ферромагнетика и не взаимодействуют в другом, позволяет четко определять в эксперименте конкретные магнитоупругие константы для одноосного ферромагнетика.

Построенная модель диссипативной функции, описывающей релаксационные процессы, обусловленные затуханием связанных магнитоупругих волн в ферромагнетиках различной симметрии. Полученная модель диссипативной функции базируется на учете симметрии магнетика и описывает как обменное, так и релятивистское взаимодействие в кристалле.

Ключевые слова: магнитоупругое взаимодействие, закон дисперсии, упругий модуль, мартенситный фазовый переход, диссипативная функция.

PACS numbers: 64.60.-i; 62.20.-de; 75.47.Np; 75.80.+q

В.Г. Бар'яхтар, А.Г. Данилевич. Зв'язані магнітопружні коливання в ферромагнетиках

Анотація

Розраховані закони дисперсії зв'язаних магнітопружних хвиль для ферромагнетиків кубічної і одновісної симетрії. Показано, що взаємодія між звуковими і спіновими хвилями залежить як від напрямку хвильового вектора коливань, так і від напрямку магнітного моменту ферромагнетика.

Проаналізовано поведінку спектрів зв'язаних магнітопружних коливань в околі фазових переходів в ґратці, а саме в околиці мартенситних фазових перетворень в матеріалах з ефектом пам'яті форми. Теоретично пояснено явище різкого зменшення пружних модулів таких сплавів при наближенні до мартен-

ситним фазових переходів. Показано, що при цьому основний вплив на пружні характеристики матеріалу має неоднорідна магнітострикція.

Досліджено вплив магнітопружної взаємодії на закон дисперсії квазі-спінових хвиль у виродженому основному стані одновісного феромагнетика «легка площина». Магнітопружна взаємодія знімає виродження і призводить до появи магнітоакустичної щілини в спектрі.

Побудована модель дисипативної функції, яка описує релаксаційні процеси, зумовлені затуханням зв'язаних магнітопружних хвиль у феромагнетиках кубічної і одновісної осної симетрії.

Ключові слова: магнітопружна взаємодія, закон дисперсії, пружний модуль, мартенситний фазовий перехід, дисипативна функція.

Реферат

Проведено рунтовний аналіз основних типів моделей опису взаємодії спінових та звукових хвиль у магнітовпорядкованих матеріалах. Розроблено методики теоретичних та експериментальних досліджень магнітоакустичних властивостей матеріалів з ефектом пам'яті форми. Побудовані вирази для енергії магнітної та пружної підсистеми для магнетиків різної симетрії. Побудована система динамічних магнітоакустичних рівнянь для основних станів феромагнетиків кубічної та одновісної симетрії.

Розраховані закони дисперсії зв'язаних магнітоакустичних хвиль для феромагнетиків кубічної та одновісної симетрії. Проведено аналіз особливостей отриманих законів дисперсії в околах спін-переорієнтаційних фазових переходів.

Показано, що взаємодія (коефіцієнт магнітопружної взаємодії) між звуковими та спіновими хвилями залежить як від напрямку хвильового вектора коливань, так і від напрямку магнітного моменту феромагнетика. Коефіцієнт магнітопружної взаємодії може сильно змінюватись (навіть приймати нульові значення) в залежності від вказаних параметрів. Цей факт пояснює, отриману в багатьох експериментах залежність пружних модулів феромагнетика від напрямку зовнішнього магнітного поля.

Проаналізовано поведінку спектрів зв'язаних магнітоакустичних хвиль в околі фазових переходів у ґратці, а саме в околі мартенситних фазових перетворень у матеріалах з ефектом пам'яті форми. Отримані результати використані для інтерпретації експериментальних даних для сплаву Ni-Mn-Ga. Теоретично пояснене явище різкого зменшення пружних модулів даного сплаву при наближенні до мартенситних фазових переходів. Показано, що при цьому основний вплив на пружні характеристики матеріалу має неоднорідна магнітострикція.

Досліджено вплив магнітоакустичної взаємодії на закон дисперсії квазі-спінових хвиль у виродженому основному стані одновісного феромагнетика «легка площина». Розрахунки показують, що магнітопружна взаємодія знімає виродження, призводить до появи магнітоакустичної щілини у спектрі, тобто магнітопружна взаємодія «перетворює» Голдстоунівську моду в бозон Хіггса. В даному випадку, поява магнітопружної щілини не залежить від напрямку хвильового вектора коливань.

Для випадку одновісного феромагнетика також показано, що магнітопружна взаємодія може сильно збільшуватись в околі фазових переходів у ґратці, що супроводжуються різкою зміною пружних модулів феромагнетика. Для одновісного феромагнетика залежність магнітопружної взаємодії від напрямку хвильового вектора та магнітного моменту також присутня та, в деяких випадках, навіть більш виражена. Той факт, що певні звукові моди взаємодіють зі спіновими хвилями в одному основному стані феромагнетика та не взаємодіють в іншому, дає змогу чітко визначати в експерименті певні магнітопружні константи для одновісного феромагнетика.

Побудована модель дисипативної функції, що описує релаксаційні процеси, обумовлені затуханням зв'язаних магнітоакустичних хвиль у ферромагнетиках різної симетрії. Отримана модель дисипативної функції базується на врахуванні симетрії магнетика та описує як обмінну, так і релятивістську взаємодію в кристалі.

Ключові слова: магнітопружна взаємодія, закон дисперсії, пружний модуль, мартенситний фазовий перехід, дисипативна функція.

PACS numbers: 64.60.-i; 62.20.-de; 75.47.Np; 75.80.+q

V.G. Bar'yakhtar, A.G. Danilevich. Coupled magnetoelastic oscillations in ferromagnets

Annotation

The dispersion laws of coupled magnetoelastic waves for ferromagnets of cubic and uniaxial symmetry are calculated. It is shown that the interaction between sound and spin waves depends both on the direction of the wave vector of the oscillations and on the direction of the magnetic moment of the ferromagnet.

The behavior of the spectra of coupled magnetoelastic waves in the vicinity of phase transitions in the lattice is analyzed, namely in the vicinity of martensitic phase transformations in materials with shape memory effect. The phenomenon of a sharp decrease of the elastic moduli of such alloys is theoretically explained in the vicinity of the martensitic phase transitions. It is shown that the main influence on the elastic characteristics of the material is caused by inhomogeneous magnetostriction.

The influence of the magnetoelastic interaction on the dispersion law of quasi-spin waves in the degenerate ground state of a uniaxial ferromagnet "easy plane" is investigated. The magnetoelastic interaction removes the degeneracy and leads to the appearance of magnetoacoustic gaps in the spectrum.

A model of a dissipative function describing the relaxation processes due to damping of coupled magnetoelastic waves in ferromagnets of cubic and uniaxial symmetry is constructed.

Keywords: magnetoelastic interaction, dispersion law, elastic modulus, martensitic phase transition, dissipative function.

Abstract

A detailed analysis of the main types of models describing the interaction of spin and sound waves in magnetically ordered materials is carried out. The methods of theoretical and experimental studies of magnetoelastic properties of materials with shape memory effect have been developed. Expressions for the energy of the magnetic and elastic subsystems for magnets of different symmetry are constructed. A system of dynamical magnetoacoustic equations is constructed for the ground states of ferromagnets of cubic and uniaxial symmetry.

The dispersion laws of coupled magnetoacoustic waves for ferromagnets of cubic and uniaxial symmetry are calculated. An analysis is made of the features of the dispersion laws obtained in the vicinity of spin-reorientation phase transitions. It is shown that the interaction (the coefficient of the magnetoelastic interaction) between sound and spin waves depends both on the direction of the wave vector of the oscillations and on the direction of the magnetic moment of the ferromagnet. The coefficient of magnetoelastic interaction can vary greatly (even take zero values) depending on the indicated parameters. This fact explains the dependence of the elastic moduli of a ferromagnet on the direction of an external magnetic field obtained in many experiments.

The behavior of the spectra of coupled magnetoacoustic waves in the vicinity of phase transitions in the lattice is analyzed, namely, in the vicinity of the martensitic

phase transformations in materials with shape memory effect. The results obtained were used to interpret the experimental data for the Ni-Mn-Ga alloy. The phenomenon of a sharp decrease in the elastic moduli of a given alloy in the vicinity of martensitic phase transitions is theoretically explained. It is shown that the inhomogeneous magnetostriction plays the main influence on the elastic characteristics of the material.

The effect of the magnetoelastic interaction on the dispersion law of quasi-spin waves in the degenerate ground state of a uniaxial ferromagnet "easy plane" is investigated. Calculations show that the magnetoelastic interaction removes the degeneracy and leads to the appearance of a magnetoacoustic gap in the spectrum, that is, the magnetoelastic interaction "turns" the Goldstone mode into a Higgs boson. In this case, the appearance of a magnetoelastic gap does not depend on the direction of the wave vector of the oscillations.

In the case of a uniaxial ferromagnet it is also shown that the magnetoelastic interaction can increase strongly in the vicinity of phase transitions in the lattice, accompanied by a sharp change in the elastic moduli of the ferromagnet. For a uniaxial ferromagnet, the dependence of the magnetoelastic interaction on the direction of the wave vector and magnetic moment is also present, and, in some cases, even more pronounced. The fact that certain sound modes interact with spin waves in one ground state of the ferromagnet and do not interact in the other makes it possible to clearly determine in the experiment specific magnetoelastic constants for a uniaxial ferromagnet.

The model of the dissipative function that describes the relaxation processes due to the damping of coupled magnetoacoustic waves in ferromagnets of different symmetry is constructed. The resulting model of the dissipative function is based on taking into account the symmetry of the magnet and describes both the exchange and relativistic interactions in the crystal.

Keywords: magnetoelastic interaction, dispersion law, elastic modulus, martensitic phase transition, dissipative function.

PACS numbers: 64.60.-i; 62.20.-de; 75.47.Np; 75.80.+q

Апостолов С.С., Майзелис З.А., Рожманова Т.Н., Ямпольский В.А. Прохождение, отражение и трансформация электромагнитных волн в слоистых сверхпроводниках // Проблемы теоретической физики. Научные труды. Выпуск 4 / Н.А. Азаренков, С.С. Апостолов, В.Г. Барьяхтар, В.А. Буц, А.А. Голованов, А.Г. Данилевич, В.И. Карась, М.И. Кош, И.Ю. Костюков, З.А. Майзелис, А.М. Пухов, Т.Н. Рожманова, П.С. Стрелков, Й. Томас, А.В. Тур, В.А. Ямпольский, В.В. Яновский; под общей редакцией А.Г. Загороднего, Н.Ф. Шульги, ред. вып. В.И. Карась. ХНУ имени В. Н. Каразина, 2019. Вып. 4. 456 с. (Серия «Проблемы теоретической и математической физики. Научные труды»).

Аннотация

Работа посвящена теоретическому исследованию прохождения и отражения терагерцевых электромагнитных волн при облучении образцов слоистых сверхпроводников. Поскольку слоистые сверхпроводники представляют собой сильно анизотропную нелинейную среду, в них может наблюдаться ряд новых линейных и нелинейных электромагнитных явлений. В первой части работы изучается распространение нелинейных волн. Установлено, что коэффициенты прохождения, отражения и трансформации зависят от амплитуды падающей волны и имеют гистерезисный характер. Показано, что при определенных условиях изменением амплитуды можно достичь полного прохождения и трансформации падающей волны. Во второй части работы представлено теоретическое описание влияния постоянного внешнего магнитного поля на линейные электромагнитные волны в слоистом сверхпроводнике. Показано, что внешнее магнитное поле является удобным и эффективным инструментом для управления прохождением, отражением и трансформацией поляризации волн.

Ключевые слова: слоистые сверхпроводники, джозефсоновские плазменные волны, трансформация поляризации волн.

Реферат

Работа посвящена теоретическому исследованию прохождения и отражения терагерцевых электромагнитных волн при облучении образцов слоистых сверхпроводников. Поскольку слоистые сверхпроводники представляют собой сильно анизотропную нелинейную среду, в них может наблюдаться ряд новых линейных и нелинейных электромагнитных явлений. Во-первых, коэффициенты прохождения и отражения волн оказываются зависящими от их амплитуды и, при определенных условиях, демонстрируют гистерезисное поведение при изменении амплитуды. Во-вторых, волна может претерпевать нелинейную трансформацию поляризации, также зависящую от амплитуды волны, в геометрии, когда сверхпроводящие слои перпендикулярны границе образца. В-третьих, за счет нелинейности электромагнитная волна в образце может взаимодействовать с внешним постоянным магнитным полем, что дает возможность эффективно управлять прохождением, отражением и трансформацией волн, изменяя величину этого поля.

Первая часть работы посвящена изучению прохождения, отражения и трансформации поляризации нелинейных волн в образце слоистого сверхпроводника конечных размеров, помещенного в вакуумный прямоугольный волно-

вод. Установлено, что зависимость коэффициента прохождения нелинейных волн от амплитуды падающей волны имеет гистерезисный характер. Показано, что изменением амплитуды падающей волны можно варьировать коэффициент прохождения в широком диапазоне значений. Предложен оригинальный метод решения задач прохождения, отражения и трансформации нелинейных волн с произвольными поляризациями в слоистых сверхпроводниках. Этот метод основан на выявленном в работе своеобразном аналоге принципа суперпозиции для волн со взаимно ортогональными поляризациями, которые даже в нелинейном режиме практически не взаимодействуют.

Во второй части работы представлено теоретическое описание влияния постоянного внешнего магнитного поля на прохождение, отражение и трансформацию линейных волн. Найдены аналитические выражения для коэффициентов прохождения и отражения поперечно-магнитных (ТМ) волн, а также для коэффициентов трансформации поперечно-магнитных волн в поперечно-электрические (ТЕ) и наоборот. Получены условия практически полного подавления коэффициента отражения и показано, что в определенном частотном диапазоне можно добиться полной трансформации ТЕ-волны в ТМ-волну и наоборот настройкой величины магнитного поля и угла поворота плоскости падения. Таким образом, установлено, что внешнее магнитное поле является удобным и эффективным инструментом для управления прохождением, отражением и трансформацией поляризации волн.

Ключевые слова: слоистые сверхпроводники, джозефсоновские плазменные волны, трансформация поляризации волн.

PACS numbers: 74.72.-h, 74.78.Fk, 74.50.+r, 52.35.Mw

С.С. Апостолов, З.О. Майзеліс, Т.М. Рохманова, В.О. Ямпольський. Відбиття, проходження і трансформація електромагнітних хвиль у шаруватих надпровідниках

Анотація

Робота присвячена теоретичному дослідженню проходження та відбиття терагерцевих електромагнітних хвиль при опроміненні зразків шаруватих надпровідників. Оскільки шаруваті надпровідники являють собою сильно анізотропне нелінійне середовище, в них може спостерігатися ряд нових лінійних і нелінійних електромагнітних явищ. У першій частині роботи вивчається поширення нелінійних хвиль. Встановлено, що коефіцієнти проходження, відбиття і трансформації залежать від амплітуди падаючої хвилі і мають гистерезисний характер. Показано, що за певних умов зміною амплітуди можна досягти повного проходження та трансформації падаючої хвилі. У другій частині роботи представлено теоретичний опис впливу постійного зовнішнього магнітного поля на лінійні електромагнітні хвилі у шаруватому надпровіднику. Показано, що зовнішнє магнітне поле є зручним і ефективним інструментом для управління проходженням, відбиттям і трансформацією поляризації хвиль.

Ключові слова: шаруваті надпровідники, джозефсонівські плазмові хвилі, трансформація поляризації хвиль.

Реферат

Робота присвячена теоретичному дослідженню проходження та відбиття терагерцевих електромагнітних хвиль при опроміненні зразків шаруватих надпровідників. Оскільки шаруваті надпровідники являють собою сильно анізотропне нелінійне середовище, в них може спостерігатися ряд нових лінійних і нелінійних елек-

ромагнітних явищ. По-перше, коефіцієнти проходження та відбиття хвиль виявляються залежними від їх амплітуди і, за певних умов, демонструють гістерезисну поведінку при зміні амплітуди. По-друге, хвиля може зазнавати нелінійну трансформацію поляризації, що також залежить від амплітуди хвилі, в геометрії, коли надпровідні шари перпендикулярні границі зразка. По-третє, за рахунок нелінійності електромагнітна хвиля у зразку може взаємодіяти із зовнішнім постійним магнітним полем, що дає можливість ефективного керування проходженням, відбиттям і трансформацією хвиль, змінюючи величину цього поля.

Перша частина роботи присвячена вивченню проходження, відбиття і трансформації поляризації нелінійних хвиль у зразку шаруватого надпровідника скінченних розмірів, який поміщено у вакуумний прямокутний хвилевід. Встановлено, що залежність коефіцієнта проходження нелінійних хвиль від амплітуди падаючої хвилі має гістерезисний характер. Показано, що зміною амплітуди падаючої хвилі можна варіювати коефіцієнт проходження в широкому діапазоні значень. Запропоновано оригінальний метод вирішення завдань проходження, відбиття і трансформації нелінійних хвиль з довільними поляризаціями у шаруватих надпровідниках. Цей метод базується на виявленому в роботі своєрідному аналогу принципу суперпозиції для хвиль зі взаємно ортогональними поляризаціями, які навіть в нелінійному режимі практично не взаємодіють.

У другій частині роботи представлено теоретичний опис впливу зовнішнього постійного магнітного поля на проходження, відбиття і трансформацію лінійних хвиль. Знайдено аналітичні вирази для коефіцієнтів проходження і відбиття поперечно-магнітних (ТМ) хвиль, а також для коефіцієнтів трансформації поперечно-магнітних хвиль у поперечно-електричні (ТЕ) і навпаки. Отримано умови практично повного пригнічення коефіцієнта відбиття і показано, що в певному частотному діапазоні можна досягти повної трансформації ТЕ-хвилі в ТМ-хвилю і навпаки налаштуванням величини магнітного поля і кута повороту площини падіння. Таким чином, встановлено, що зовнішнє магнітне поле є зручним і ефективним інструментом для управління проходженням, відбиттям і трансформацією поляризації хвиль.

Ключові слова: шаруваті надпровідники, джозефсонівські плазмові хвилі, трансформація поляризації хвилі.

PACS numbers: 74.72.-h, 74.78.Fk, 74.50.+r, 52.35.Mw

S.S. Apostolov, Z.A. Maizelis, T.N. Rokhmanova, V.A. Yampol'skii. Reflection, transmission, and transformation of electromagnetic waves in layered superconductors

Annotation

The work is devoted to the theoretical study of the transmission and reflection of the terahertz electromagnetic waves that irradiate the samples of layered superconductors. Since layered superconductors are a highly anisotropic nonlinear medium, a number of linear and nonlinear electromagnetic phenomena can be observed in them. In the first part of the work, the propagation of nonlinear waves is studied. It is found out that the transmission, reflection and transformation coefficients depend on the amplitude of the incident wave and demonstrate a hysteretic behavior. It is shown that under certain conditions the complete transmission and transformation of the incident wave can be attained by changing the amplitude. In the second part of the paper, a theoretical description of the static external magnetic field effect on the linear electromagnetic waves in the layered superconductor is present-

ed. It is found out that an external magnetic field is a convenient and effective tool to control the transmission, reflection, and transformation of wave polarization.

Keywords: layered superconductors, Josephson plasma waves, transformation of wave polarization.

Abstract

The work is dedicated to the theoretical study of the transmission and reflection of the terahertz electromagnetic waves that irradiate the samples of layered superconductors. Since the layered superconductors are a highly anisotropic nonlinear medium, a number of linear and nonlinear electromagnetic phenomena can be observed in them. Firstly, the transmission and reflection coefficients of the waves are found to be dependent on their amplitude and at certain conditions, they demonstrate the hysteretic behavior with the amplitude change. Secondly, the wave can undergo a nonlinear transformation of polarization that also depends on the wave amplitude in the geometry when superconducting layers are perpendicular to the sample bounds. Finally, due to nonlinearity, the electromagnetic wave in the sample can interact with the external static magnetic field allowing the effective manipulation of the transmission, reflection, and transformation of the waves just by changing the value of this field.

The first part of the work is focused on the study of the transmission, reflection and polarization transformation of nonlinear waves in the sample of the layered superconductor of finite sizes that is placed in a vacuum rectangular waveguide. It is found out that the dependence of the transmission coefficient of the nonlinear waves on the incident wave amplitude has hysteretic behavior. It is shown that changing the incident wave amplitude one can vary the transmission coefficient in a wide range. The original method for solving problems of the transmission, reflection, and transformation of nonlinear waves with any polarizations in layered superconductors is proposed. This method is based on the developed in the present work the specific analog of superposition principle for waves with the mutually orthogonal polarizations, which practically do not interact with each other even in the nonlinear case.

In the second part of the work, the theoretical study of the external DC magnetic field effect on the transmission, reflection, and transformation of linear waves is presented. The analytical expressions for the transmission coefficients of the transverse magnetic (TM) waves, and also transformation coefficients of the transverse magnetic waves into transverse electric (TE) waves and vice versa, are derived. The conditions of the nearly complete suppression of the reflection coefficient are found and it is shown that in a certain frequency range one can attain complete transformation of TE-wave into TM-wave and vice versa just by tuning the value of the magnetic field and the rotation angle of the incidence plane. Thus, it is found out that the external magnetic field is a convenient and effective tool to control the transmission, reflection and polarization transformation coefficients.

Keywords: layered superconductors, Josephson plasma waves, transformation of wave polarization.

PACS numbers: 74.72.-h, 74.78.Fk, 74.50.+r, 52.35.Mw

Буц В.А. Регулярная и хаотическая динамика волновых процессов // Проблемы теоретической физики. Научные труды. Выпуск 4/ Н.А. Азаренков, С.С. Апостолов, В.Г. Барьяхтар, В.А. Буц, А.А. Голованов, А.Г. Данилевич, В.И. Карась, М.И. Кош, И.Ю. Костюков, З.А. Майзелис, А.М. Пухов, Т.Н. Рохманова, П.С. Стрелков, Й. Томас, А.В. Тур, В.А. Ямпольский, В.В. Яновский: под общей редакцией А.Г. Загороднего, Н.Ф. Шульги, ред. вып. В.И. Карась. ХНУ имени В. Н. Каразина, 2019. Вып. 4. 456 с. (Серия «Проблемы теоретической и математической физики. Научные труды»).

Аннотация

В обзоре описаны некоторые важные стороны регулярной и хаотической динамики волновых процессов. Наиболее важным для протекания волновых процессов является результат, который заключается в существовании новых условий эффективного взаимодействия волн (новых условий синхронизма) в распределенных системах. Показано, что в распределенных системах расстройка вдоль одного пространственно-временного направления может быть скомпенсирована расстройкой вдоль другого направления. В результате волны могут эффективно взаимодействовать в распределенных системах даже в отсутствии известных условий синхронизма. Показано, что такое новое эффективное взаимодействие волн происходит вдоль некоторых пространственно-временных направлений (субхарактеристические направления). Далее в рамках приближения геометрической оптики показано, что существует новый тип фокусировки волн в неоднородных средах. Этот тип фокусировки во многом аналогичен эффекту автофазировки частиц Векслера - Макмиллана в теории ускорителей. В рамках регулярной динамики сформулированы аналитические критерии перехода регулярной динамики взаимодействия волн в хаотический режим. Эти критерии сформулированы как для лучей, так и для волн. Для волн полученные критерии справедливы для наиболее известных и часто используемых линейных и нелинейных процессов трехволнового взаимодействия. Описана динамика каскада распадающихся волн. Этот каскад представляет собой последовательность трехволновых распадов. Причем каждый трехволновой этап оказывается регулярным. Волны, возникающие как результат первого этапа распада, создают следующий трехволновой этап каскада и так далее. Известно, что такой бесконечный каскад так же, как и отдельные этапы, регулярен. Показано, что реальный каскад, состоящий из ограниченного числа (даже большого числа) этапов распада, всегда хаотичен. Интересно, что время регулярной динамики каждого такого каскада определяется временем достижения процесса каскада его последнего звена (этапа). В обзоре показано, что наличие случайных неоднородностей среды, в которой распространяются волны (лучи), приводит к развитию флуктуационной неустойчивости. Результатом этой флуктуационной неустойчивости является экспоненциальное разбегание лучей. Причем вторые моменты растут экспоненциально. Высшие моменты растут тем быстрее, чем больше номер момента. Это так называемый перемежаемый случайный процесс, при котором возникают редкие, но очень сильные флуктуационные всплески. По известной в теории случайных процессов классификации такой процесс относится к супердиффузии и может быть описан либо в рамках теории дробных производных (интегро-дифференциальных уравнений), либо методом моментов. Отмечено, что обнаруженный механизм фокусировки лучей в неоднородных средах может подавить такую неустойчивость, и делать процесс взаимодействия волн более регулярным.

Ключевые слова: регулярная динамика, хаотическая динамика, флуктуационная неустойчивость, трехволновое взаимодействие, супердиффузия.

Реферат

Взаимодействия типа волна-частица и взаимодействие типа волна-волна лежат в основе физики плазмы и плазменной электроники. Материалы, в которых содержатся некоторые важные особенности взаимодействий типа волна-частица, опубликованы в предыдущем выпуске научных трудов Харьковского государственного университета. Некоторые важные особенности взаимодействий типа волна-волна содержатся в данном обзоре.

Дадим краткую характеристику наиболее важных результатов, описание которых дано в этом обзоре. Прежде всего, полезно выделить два направления: регулярную динамику волновых процессов и хаотическую динамику. При описании **регулярной динамики** выделим следующие **два результата**. Наиболее важным из них является описание новых условий эффективного взаимодействия волн. Хорошо известно, что эффективное взаимодействие между волнами происходит при выполнении следующих условий: $\Delta\omega = \sum_i \alpha_i \omega_i = 0$; $\alpha_i = \pm 1$; $\Delta\vec{k} = \sum_i \vec{k}_i = 0$. Здесь ω_i частоты взаимодействующих волн; \vec{k}_i волновые вектора этих волн. Нарушение хотя бы одного из этих условий приводит к существенному уменьшению эффективности взаимодействия. Эти условия часто называют законами сохранения энергии и импульсов. Действительно, если эти соотношения умножить на постоянную Планка, то они приобретают вид этих законов. Похоже, что эта аналогия отодвинула более внимательный анализ этих условий. Действительно, как показано в обзоре, существуют более общие условия эффективного взаимодействия волн. В этих условиях учтено, что в распределенных системах расстройка вдоль одной из пространственно-временных осей может быть скомпенсирована расстройкой вдоль другой оси. Например, новые условия взаимодействия волн в простейшем случае могут иметь такой вид: $\Delta\omega = \Delta k \cdot c / \sqrt{\epsilon_0}$. Видно, что это условие как частный случай содержит известные условия ($\Delta\vec{k} = \Delta\omega = 0$). В новых условиях расстройка вдоль временной оси компенсируется расстройкой вдоль одной из пространственных осей. Учет новых условий существенно расширяет область параметров, в которых волны могут эффективно взаимодействовать. Кроме того, как показано в обзоре, эти условия существенно расширяют область параметров волновых процессов, в которых реализуются режимы с динамическим хаосом. Наличие новых условий может приводить к появлению волн с характеристиками, которые не могут появиться при выполнении известных условий. Вторым важным результатом является описание нового механизма фокусировки лучей в неоднородных волноведущих средах. В рамках геометрической оптики показано, что в таких средах возможен новый механизм фокусировки лучей. Наиболее важным отличием этого механизма от известных механизмов является динамика лучей. В новом механизме лучи собираются к выделенному направлению и после фокусировки не разбегаются. Отметим, что этот механизм по многим своим чертам напоминает автофазировку Векслера - Макмиллана заряженных частиц в теории ускорителей.

Наиболее важными результатами, которые **относятся к хаотической динамике** и которые описаны в обзоре, **являются следующие**: получены и описаны простые аналитические условия возникновения режимов с динамическим хаосом в динамике лучей и в динамике волновых процессов. Описана динамика перехода от регулярного режима к хаотическому режиму при нелинейном трехволновом взаимодействии волн. При распространении волн в случайно неоднородных средах неоднородность среды играет роль мультипликативных флуктуаций. В этом случае показано, что динамика волн в таких средах обладает рядом существенных отличий от динамики диффузионных процессов. Наиболее существенным при этом является тот факт, что

моменты (начиная со второго) экспоненциально растут. При этом высшие моменты растут быстрее, чем предыдущие. Показано, что такая динамика, как минимум, характеризуется супердиффузией. Следует также заметить, что такие процессы не могут быть описаны привычными кинетическими уравнениями типа Фоккера - Планка. Действительно, для описания таких процессов необходим учет высших моментов. Они могут быть описаны либо интегро-дифференциальными уравнениями, либо методом моментов. Именно последним методом описаны эти процессы в данном обзоре.

Ключевые слова: регулярная динамика, хаотическая динамика, флуктуационная неустойчивость, трехволновое взаимодействие, супердиффузия.

PACS numbers: 41.60.Cr, 41.75.Lx, 05.40.-a, 05.45.-a, 52.35.Mw

Буц В.О. Регулярна та хаотична динаміка хвильових процесів

Анотація

В огляді описані деякі важливі сторони регулярної та хаотичної динаміки хвильових процесів. Найбільш важливим для протікання регулярних процесів є результат, який полягає в існуванні нових умов ефективної взаємодії хвиль (нових умов синхронізму) в розподілених системах. Показано, що в розподілених системах розладом вздовж одного просторово-часового напрямку може бути скомпенсована расстройкою вздовж другого напрямку. В результаті хвилі можуть ефективно взаємодіяти в розподілених системах навіть за відсутності відомих умов синхронізму. Показано, що така нова ефективна взаємодія хвиль відбувається вздовж деяких просторово-часових напрямків (субхарактеристичні напрямки). Далі в рамках наближення геометричної оптики показано, що існує новий тип фокусування хвиль у неоднорідних середовищах. Цей тип фокусування багато в чому аналогічний ефекту автофазування частинок Векслера - Макміллана в теорії прискорювачів. У рамках регулярної динаміки сформульовані аналітичні критерії переходу регулярної динаміки взаємодії хвиль в хаотичний режим. Ці критерії сформульовані як для променів, так і для хвиль. Для хвиль отримані критерії справедливі для найбільш відомих і часто використовуваних лінійних та нелінійних процесів трихвильової взаємодії. Описана динаміка каскаду хвиль, що розпадаються. Цей каскад являє собою послідовність трихвильових розпадів. Причому кожний трихвильовий етап виявляється регулярним. Хвилі, що виникають як результат першого етапу розпаду, створюють наступний трихвильовий етап каскаду і так далі. Відомо, що такий нескінченний каскад, як і окремі етапи, регулярний. Показано, що реальний каскад, що складається з обмеженої кількості (навіть великої кількості) етапів розпаду, завжди хаотичний. Цікаво, що час регулярної динаміки кожного такого каскаду визначається часом досягнення процесу каскаду його останньої ланки (етапу). В огляді показано, що наявність випадкових неоднорідностей середовища, в якому поширюються хвилі (промені), приводить до розвитку флуктуаційної нестійкості. Результатом цієї флуктуаційної нестійкості є експоненційне розбігання променів. Причому другі моменти зростають експоненційно. Вищі моменти зростають тим швидше, чим більше номер моменту. Це так званий переміжний випадковий процес, при якому виникають рідкісні, але дуже сильні флуктуаційні спалахи. За відомою в теорії випадкових процесів класифікацією такий процес відноситься до супердифузії і може бути описаний або в рамках теорії дрібних похідних (інтегро-диференціальних рівнянь), або методом моментів. Відзначено, що виявлений механізм фокусування променів у неоднорідних середовищах може придушити таку нестійкість, та зробити процес взаємодії хвиль більш регулярним.

Ключові слова: регулярна динаміка, хаотична динаміка, флуктуаційна нестійкість, трихвильова взаємодія, супердифузія.

Реферат

Взаємодії типу хвиля-частинка та взаємодія типу хвиля-хвиля лежать в основі фізики плазми та плазмової електроніки. Матеріали, в яких містяться деякі важливі особливості взаємодій типу хвиля-частинка, опубліковані в попередньому випуску наукових праць Харківського державного університету. Деякі важливі особливості взаємодій типу хвиля-хвиля містяться в даному огляді. Дано стислу характеристику найбільш важливих результатів, опис яких знаходиться в цьому огляді. Перш за все, корисно виділити два напрямки: регулярна динаміка хвильових процесів і хаотичної динаміки. При описі **регулярної динаміки** виділимо наступні **два результати**. Найбільш важливим з них є опис нових умов ефективної взаємодії хвиль. Добре відомо, що ефективна взаємодія між хвилями відбувається при виконанні наступних умов: $\Delta \vec{k} = \sum_i \vec{k}_i = 0$, $\Delta \omega = \sum_i \alpha_i \omega_i = 0$; $\alpha_i = \pm 1$. Тут ω_i - частоти хвиль,

які взаємодіють; \vec{k} хвильові вектори цих хвиль. Порушення хоча б однієї з цих умов призводить до істотного зменшення ефективності взаємодії. Ці умови часто називають законами збереження енергії та імпульсів. Дійсно, якщо ці співвідношення збільшуються на постійну Планка, то вони набувають вигляд цих законів. Схоже, що ця аналогія призвела до більш уважного аналізу цих умов. Дійсно, як показано в огляді, існують більш загальні умови ефективної взаємодії хвиль. У цих умовах враховано, що в розподілених системах розстановка вздовж однієї з просторово-часових осей може бути компенсована розстановкою вздовж іншої осі. Наприклад, нові умови взаємодії хвиль у простішому випадку можуть мати такий вигляд: $\Delta \omega = \Delta k \cdot c / \sqrt{\epsilon_0}$. Видно, що ця умова, як окремий випадок, містить відомі умови ($\Delta \vec{k} = \Delta \omega = 0$). В нових умовах розстановка вздовж часової осі компенсується розладом уздовж однієї з просторових осей. Урахування нових умов істотно розширює область параметрів, в яких хвилі можуть ефективно взаємодіяти. Крім того, як показано в огляді, ці умови істотно розширюють область параметрів хвильових процесів, в яких реалізуються режими з динамічним хаосом. Наявність нових умов може призвести до появи хвиль з характеристиками, які не можуть з'являтися при виконанні відомих умов.

Другим важливим результатом являється опис нового механізму фокусування променів у неоднорідних хвилеведучих середовищах. В рамках геометричної оптики показано, що в таких середовищах можливий новий механізм фокусування променів. Найбільш важливою відмінністю цього механізму від відомих механізмів є динаміка променів. У новому механізмі промені збираються до виділеного напрямку і після фокусування не розбігаються. Відзначимо, що цей механізм за багатьма своїми ознаками нагадує автофазування Векслера-Макміллана заряджених частинок у теорії прискорювачів.

Найбільш важливими результатами, що відносяться до хаотичної динаміки і описані в огляді, є наступні: отримані та описані прості аналітичні умови виникнення режимів з динамічним хаосом в динаміці променів та в динаміці хвильових процесів. Описана динаміка переходу від регулярного режиму до хаотичного режиму при нелінійній трихвильовій взаємодії хвиль. При розповсюдженні хвиль у випадково неоднорідних середовищах неоднорідність середовища грає роль мультиплікативних флуктуацій. У цьому випадку показано, що динаміка хвиль у таких середовищах має низку істотних відмінностей від динаміки дифузійних процесів. Найбільш істотним при цьому є той факт, що моменти (починаючи з другого) експоненціально зростають. При цьому вищі моменти зростають швидше, ніж попередні. Показано, що така динаміка, як мінімум, характеризується супердифузиею. Необхідно також зауважити, що такі процеси не можуть бути описані звичайними кінетичними рівняннями типу Фоккера - Планка. Дійсно, для опису таких процесів необ-

хідним є урахування вищих моментів. Вони можуть бути описані або інтегро-диференціальними рівняннями, або методом моментів. Саме останнім методом описані ці процеси в даному огляді.

Ключові слова: регулярна динаміка, хаотична динаміка, флуктуаційна нестійкість, трихвильова взаємодія, супердифузія.

PACS numbers: 41.60.Cr, 41.75.Lx, 05.40.-a, 05.45.-a, 52.35.Mw

V.A. Buts Regular and chaotic dynamics of wave processes

Annotation

The review describes some important aspects of the regular and chaotic dynamics of wave processes. The most important for the flow of regular processes is the result, which consists in the existence of new conditions for effective wave interaction (new synchronism conditions) in distributed systems. It is shown that in distributed systems, detuning along one space-time direction can be compensated by detuning along another direction. As a result, waves can effectively interact in distributed systems even in the absence of known synchronism conditions. It is shown that such new effective interaction of waves occurs along some space-time directions (subcharacteristic directions). Further, within the framework of the geometric optics approximation, it is shown that there is a new type of wave focusing in inhomogeneous media. This type of focusing is in many respects similar to the effect of the auto-phasing of Veksler-Makmillan particles in the theory of accelerators. Within the framework of regular dynamics, analytical criteria for the transition of the regular dynamics of wave interaction to a chaotic regime are formulated. These criteria are formulated for both rays and waves. For the waves, the obtained criteria are valid for the most known and frequently used linear and nonlinear three-wave interaction processes. The dynamics of a cascade of decaying waves is described. This cascade is a sequence of three-wave decays. Moreover, every three-wave stage provided to be regular. The waves that arise as a result of the first stage of decay create the next three-wave stage of the cascade and so on. It is known that such an infinite cascades as well as individual stages of such cascades are regular. It is shown that a real cascade consisting of a limited number (even a large number) of decay stages is always chaotic. It is interesting that the time of regular dynamics of each such cascade is determined by the time at which the process of decaying reaches last stage of the cascade. In the review it is shown that the presence of random inhomogeneity of the medium in which the waves (rays) propagate leads to the development of fluctuation instability. The result of this instability is the exponential recession of the rays. At that the second moments grow exponentially. Higher moments grow faster the larger the number of the moment. It's, so-called, intermittent random process, in which rare, but very strong fluctuation outbursts appears. According to the well-known classification in the theory of random processes, such a process refers to superdiffusion and can be described either in the framework of the theory of fractional derivatives (integro-differential equations) or by the method of moments. It is noted that the discovered mechanism of focusing rays in inhomogeneous media can suppress such instability, and make the process of wave interaction more regular.

Keywords: regular dynamics, chaotic dynamics, fluctuation instability, three-wave interaction, superdiffusion.

Absract

Interactions of the wave-particle type and wave-wave interaction are at the ground of plasma physics and plasma electronics. Materials, which contain some important features of wave-particle interactions, are published in the previous issue of scientific papers of Kharkov State University. Some important features of wave-wave interactions are contained in this review. Let us give a brief description of the most important

results, the description of which is given in this review. First of all, it is useful to mark out two areas: regular dynamics of wave processes and chaotic dynamics. In describing the regular dynamics, we select the following two results. The most important of these is the description of new conditions for effective wave interaction. It is well known that effective interaction between waves occurs when the following conditions are fulfilled:

$$\Delta\omega = \sum_i \alpha_i \omega_i = 0; \alpha_i = \pm 1; \Delta\vec{k} = \sum_i \vec{k}_i = 0.$$

Here ω_i - are the frequencies of the interacting waves; \vec{k}_i - wave vectors of these waves. Violation of at least one of these conditions leads to a significant decrease in the effectiveness of the interaction. These conditions are often called the laws of conservation of energy and impulses. Indeed, if these ratios are multiplied by the Planck constant, then they acquire the form of these laws. It seems that this analogy has pushed away a more careful analysis of these conditions. Indeed, as shown in the review, there are more general conditions for effective wave interaction. Under these conditions, it is taken into account that in distributed systems, a detuning along one of the space-time axes can be compensated for by detuning along another axis. For example, the new conditions for the interaction of waves in the simplest case can have the form: $\Delta\omega = \Delta k \cdot c / \sqrt{\epsilon_0}$. It is seen that this condition, as a special case, contains

known conditions ($\Delta\vec{k} = \Delta\omega = 0$). In the new conditions, the detuning along the time axis is compensated by a detuning along one of the spatial axes. Using new conditions significantly expands the range of parameters in which waves can effectively interact. In addition, as shown in the review, these conditions significantly expand the range of parameters of wave processes in which regimes with dynamic chaos are realized. The presence of new conditions can lead to the appearance of waves with characteristics that cannot appear under well-known conditions. The second important result is the description of a new mechanism for focusing rays in inhomogeneous waveguiding medium. Within the framework of geometrical optics it is shown that in such medium a new mechanism for focusing rays is possible. The most important difference of this mechanism from known mechanisms is dynamics of their rays. In the new mechanism, the rays are gathered to the selected direction and after focusing they do not scatter. We note that this mechanism, in many of its features, resembles the Veksler-Makmillan auto-phasing of charged particles in the theory of accelerators. The most important results that pertain to chaotic dynamics and which are described in the review are the following: simple analytical conditions for the emergence of regimes with dynamic chaos in the dynamics of the rays and in the dynamics of wave processes have been obtained and described. The dynamics of the transition from a regular regime to a chaotic regime for a nonlinear three-wave interaction is described. When waves propagate in randomly inhomogeneous medium, the inhomogeneity of the medium plays the role of multiplicative fluctuations. In this case it is shown that the dynamics of waves in such medium has a number of significant differences from the dynamics of diffusion processes. Most significant is the fact that the moments (starting from second one) grow exponentially. In this case, the higher moments grow faster than the previous ones. It is shown that such a dynamics, at least, is characterized by superdiffusion. It should also be noted that such processes cannot be described by the usual kinetic equations of the Fokker-Planck type. Indeed, to describe such processes, it is necessary to take into account the higher moments. They can be described either by integro-differential equations or by the method of moments. Namely the last method was used for describing these processes in this review.

Keywords: regular dynamics, chaotic dynamics, fluctuation instability, three-wave interaction, superdiffusion.

PACS numbers: 41.60.Cr, 41.75.Lx, 05.40.-a, 05.45.-a, 52.35.Mw

Яновский В.В., Тур А.В., Кош М.И. Квазидвумерные крупномасштабные вихревые и магнитные структуры в магнитной гидродинамике // Проблемы теоретической физики. Научные труды. Выпуск 4/ Н.А. Азаренков, С.С. Апостолов, В.Г. Барьяхтар, В.А. Буц, А.А. Голованов, А.Г. Данилевич, В.И. Карась, М.И. Кош, И.Ю. Костюков, З.А. Майзелис, А.М. Пухов, Т.Н. Рохманова, П.С. Стрелков, Й. Томас, А.В. Тур, В.А. Ямпольский, В.В. Яновский; под общей редакцией А. Г. Загороднего, Н. Ф. Шульги, ред. вып. В. И. Карась. ХНУ имени В. Н. Каразина, 2019. Вып.4 с. (Серия «Проблемы теоретической и математической физики. Научные труды»)

Аннотация

В обзоре освещаются последние достижения в области теории генерации крупномасштабных вихревых и магнитных структур в электропроводящих средах. В рамках одножидкостной магнитной гидродинамики рассмотрены вопросы генерации крупномасштабных структур в конвективных средах с мелкомасштабной спиральностью пульсаций скорости и магнитного поля, а также во вращающихся средах с внешней мелкомасштабной силой. Основные результаты в этих моделях получены методом многомасштабных асимптотических разложений. Найдены решения в виде спиральных кинков, нелинейных периодических волн и солитонов. Численный анализ нелинейных уравнений магнито-вихревого динамо в стационарном режиме показал возможность формирования крупномасштабных хаотических структур.

Ключевые слова: многомасштабные асимптотические разложения, сила Кориолиса, α -эффект, нелинейные волны, кинки, солитоны, хаотические структуры.

Реферат

Представлен краткий обзор теоретических исследований по генерации крупномасштабных когерентных структур (КС) в плазме. Широко освещаются работы по генерации крупномасштабного зонального течения, динамике двумерных вихревых структур дипольной и монополярной структуры в гидродинамических моделях плазмы. Особое внимание уделено механизмам генерации КС в двумерных турбулентных плазменных средах. В результате эффекта «отрицательной вязкости» там возможна генерация крупномасштабных вихревых и магнитных полей.

Используя асимптотический метод многих масштабов, найдена крупномасштабная неустойчивость, возникающая в стратифицированной проводящей среде (модель магнитной гидродинамики плазмы) при наличии мелкомасштабной спиральности поля скорости и магнитных полей. Такая спиральность поддерживается малыми внешними источниками при малых числах Рейнольдса. Получены замкнутые уравнения, описывающие эволюцию крупномасштабных вихревых и магнитных возмущений малой амплитуды. Обнаружены два режима неустойчивости с нулевыми частотами и частотами колебаний, отличными от нуля. Установлены критерии возникновения крупномасштабной неустойчивости в такой среде. Построена нелинейная теория возникновения крупномасштабных структур в стратифицированной проводящей среде при наличии мелкомасштабных осцилляций поля скорости и магнитных полей. На основе асимптотического метода многих масштабов для нелинейной теории получена самосогласованная система уравнений, описыва-

ющая эволюцию крупномасштабных структур поля скорости и магнитных полей. В стационарном режиме эти уравнения представляют собой гамильтонову динамическую систему в четырехмерном фазовом пространстве. Численным методом доказана возможность существования стационарных крупномасштабных хаотических полей. В частном случае, когда генерация вихревых возмущений протекает медленнее, чем магнитных возмущений, были найдены стационарные крупномасштабные магнитные структуры в виде нелинейной волны, кинка и солитона.

Исследована новая крупномасштабная неустойчивость, которая возникает во вращающейся электропроводящей жидкости с мелкомасштабной спиральной турбулентностью. Турбулентность генерируется мелкомасштабной внешней силой с малым числом Рейнольдса. Нелинейные уравнения для вихревых и магнитных возмущений получены в третьем порядке по малому числу Рейнольдса. Показано, что в результате совместного действия силы Кориолиса и мелкомасштабной внешней силы во вращающейся электропроводящей жидкости возможна крупномасштабная неустойчивость. Получены инкременты крупномасштабной неустойчивости, соответствующие генерации как вихревых, так и магнитных возмущений. Такой тип неустойчивости классифицируется как гидродинамический и магнитогидродинамический альфа-эффект. Изучены стационарные режимы нелинейных уравнений магнито-вихревого динамо. В пределе слабопроводящей жидкости найдены стационарные решения в виде спиральных кинков. В пределе высокой проводимости жидкости получены стационарные решения в виде нелинейных периодических волн и кинков.

Рассмотрена новая крупномасштабная неустойчивость, которая возникает в наклонно вращающейся электропроводящей жидкости с мелкомасштабной внешней силой, имеющей нулевую спиральность. С помощью метода многомасштабных асимптотических разложений получены нелинейные уравнения для вихревых и магнитных возмущений в третьем порядке по числу Рейнольдса. Исследована линейная стадия магнито-вихревого динамо, возникающего в результате неустойчивостей типа гидродинамического и магнитогидродинамического α -эффектов. Численными методами найдены стационарные решения уравнений нелинейного магнито-вихревого динамо в виде локализованных хаотических структур.

Ключевые слова: многомасштабные асимптотические разложения, сила Кориолиса, α -эффект, нелинейные волны, кинки, солитоны, хаотические структуры.

PACS numbers: 52.35.Ra, 52.35.Sb, 52.65.Kj

Яновський В.В. , Тур А.В. , Кош М.І. Квазідвовимірні великомасштабні вихрові та магнітні структури в магнітній гідродинаміці

Анотація

В огляді висвітлюються останні досягнення в області теорії генерації великомасштабних вихрових і магнітних структур у електропровідних середовищах. В рамках однорідної магнітної гідродинаміки розглянуті питання генерації великомасштабних структур в конвективних середовищах з дрібномасштабною спіральністю пульсацій швидкості і магнітного поля, а також в середовищах, які обертаються із зовнішньою дрібномасштабною силою. Основні результати в цих моделях отримані методом великомасштабних асимптотичних розкладань. Знайдені рішення у вигляді спіральних кінків, нелінійних періодичних хвиль і солітонів. Чисельний аналіз нелінійних рівнянь магніто-вихревого динамо в стаціонарному режимі показав можливість формування великомасштабних хаотичних структур.

Ключові слова: великомасштабні асимптотичні розкладання, сила Коріоліса, α ефект, нелінійні хвилі, кінки, солітони, хаотичні структури.

Реферат

Представлений короткий огляд теоретичних досліджень з генерації великомасштабних когерентних структур (КС) у плазмі. Широко висвітлюються роботи з генерації великомасштабної зональної течії, динаміки двовимірних вихрових структур дипольної і монопольної структури в гідродинамічних моделях плазми. Особливу увагу приділено механізмам генерації КС у двовимірних турбулентних плазмових середовищах. В результаті ефекту «негативної в'язкості» там можлива генерація великомасштабних вихрових і магнітних полів.

Використовуючи асимптотичний метод багатьох масштабів, знайдена великомасштабна нестійкість, що виникає у стратифікованому провідному середовищі (модель магнітної гідродинаміки плазми) за наявності дрібномасштабної спіральності поля швидкості і магнітних полів. Така спіральність підтримується малими зовнішніми джерелами за малих чисел Рейнольдса. Отримано замкнуті рівняння, що описують еволюцію великомасштабних вихрових і магнітних збурень малої амплітуди. Виявлено два режими нестійкості з нульовими частотами і частотами коливань, відмінними від нуля. Встановлено критерії виникнення великомасштабної нестійкості в такому середовищі. Побудована нелінійна теорія виникнення великомасштабних структур у стратифікованому провідному середовищі за наявності дрібномасштабних осциляцій поля швидкості і магнітних полів. На основі асимптотичного методу багатьох масштабів для нелінійної теорії отримана самоузгоджена система рівнянь, що описує еволюцію великомасштабних структур поля швидкості і магнітних полів. У стаціонарному режимі ці рівняння являють собою гамільтонову динамічну систему в чотиривимірному фазовому просторі. Чисельним методом доведена можливість існування стаціонарних великомасштабних хаотичних полів. В окремому випадку, коли генерація вихрових збурень протікає повільніше, ніж магнітних збурень, були знайдені стаціонарні великомасштабні магнітні структури у вигляді нелінійної хвилі, кінка і солітону.

Досліджена нова великомасштабна нестійкість, виникаюча в електропровідній рідині, яка обертається з дрібномасштабною спіральною турбулентністю. Турбулентність генерується дрібномасштабною зовнішньою силою з малим числом Рейнольдса. Нелінійні рівняння для вихрових і магнітних збурень отримані в третьому порядку за малим числом Рейнольдса. Показано, що в результаті спільної дії сили Коріоліса і дрібномасштабної зовнішньої сили в електропровідній рідині, яка обертається, можлива великомасштабна нестійкість. Отримано інкремент великомасштабної нестійкості, відповідні генерації як вихрових, так і магнітних збурень. Такий тип нестійкості класифікується як гідродинамічний і магнітогідродинамічний альфа-ефект. Вивчено стаціонарні режими нелінійних рівнянь магніто-вихрового динамо. У межі слабкопровідної рідини знайдені стаціонарні рішення у вигляді спіральних кінків. У межі високої провідності рідини отримані стаціонарні рішення у вигляді нелінійних періодичних хвиль і кінків.

Розглянута нова великомасштабна нестійкість, виникаюча в електропровідній рідині, яка похило обертається, з мілкомасштабною зовнішньою силою, що має нульову спіральність. За допомогою методу великомасштабних асимптотичних розкладань отримані нелінійні рівняння для вихрових і магнітних збурень у третьому порядку за числом Рейнольдса. Досліджена лінійна стадія магніто-вихрового динамо, що виникає в результаті нестійкостей типу гідродинамічного і магнітогідродинамічного α - ефектів. Чисельними методами знайдені стаціонарні рішення рівнянь нелінійного магніто-вихрового динамо у вигляді локалізованих хаотичних структур.

Ключові слова: великомасштабні асимптотичні розкладання, сила Коріоліса, α - ефект, нелінійні хвилі, кінки, солітони, хаотичні структури.

PACS numbers: 52.35.Ra, 52.35.Sb, 52.65.Kj

V.V. Yanovsky, A.V. Tur, M.I. Kopp. Quasi-two-dimensional large-scale vortex and magnetic structures in magnetohydrodynamics

Annotation

The review highlights recent advances in the theory of generation of large-scale vortex and magnetic structures in electrically conducting media. In the framework of single-fluid magnetohydrodynamics, the problems of generation of large-scale structures in convective media with small-scale helicity of velocity and magnetic field pulsations, as well as in rotating media with external small-scale force are considered. The main results in these models are obtained by the method of multiscale asymptotic expansions. Solutions are found in the form of spiral kinks, nonlinear periodic waves and solitons. Numerical analysis of the nonlinear equations of the magneto-vortex dynamo in the steady-state regime has shown the possibility of formation of large-scale chaotic structures.

Keywords: multiscale asymptotic expansions, Coriolis force, α - effect, nonlinear waves, kinks, solitons, chaotic structures.

Abstract

A brief review of theoretical studies on the generation of large-scale coherent structures (CS) in plasma is presented. Widely presented works on the generation of a large-scale zonal flow, the dynamics of two-dimensional vortex structures of the dipole and monopole structure in hydrodynamic plasma models. Particular attention is paid to the mechanisms of CS generation in two-dimensional turbulent plasma media. As a result of the "negative viscosity" effect there can be generated large-scale vortex and magnetic fields. Using an asymptotic method of many scales, the large-scale instability is obtained in a stratified conducting medium (the model of magnetohydrodynamics of plasma) in the presence of a small-scale helicity of the velocity field and magnetic fields. Such helicity is maintained by small external sources at low Reynolds numbers. Closed equations describing the evolution of large-scale vortex and magnetic perturbations of small amplitude are obtained. Two instability modes with zero frequencies and oscillation frequencies different from zero are found. The criteria for the occurrence of large-scale instability in such a medium are established. A nonlinear theory is constructed, the appearance of large-scale structures in a stratified conducting medium in the presence of small-scale oscillations of the velocity field and magnetic fields. On the basis of an asymptotic method of many scales for a nonlinear theory, a self-consistent system of equations is obtained that describes the evolution of large-scale field structures of velocity and magnetic fields. In the stationary regime, these equations represent a Hamiltonian dynamical system in four-dimensional phase space. The possibility of the existence of stationary large-scale chaotic fields is proved numerically. In the special case, when the generation of vortex perturbations proceeds more slowly than magnetic disturbances, stationary large-scale magnetic structures have been found in the form of a nonlinear wave, a kink and a soliton.

A new large-scale instability that occurs in a rotating electrically conducting liquid with small-scale spiral turbulence is investigated. Turbulence is generated by a small-scale external force with a small Reynolds number. Nonlinear equations for vortex and magnetic disturbances are obtained in third order in a small Reynolds

number. It is shown that as a result of the combined action of the Coriolis force and the small-scale external force in a rotating electroconductive liquid, large-scale instability is possible. The increments of large-scale instability corresponding to the generation of both vortex and magnetic disturbances are obtained. This type of instability is classified as a hydrodynamic and magnetohydrodynamic α effect. Stationary regimes of the nonlinear equations of the magneto-vortex dynamo are studied. In the limit of a weakly conducting liquid stationary solutions are found in the form of spiral kinks. In the limit of high fluid conductivity stationary solutions are obtained in the form of nonlinear periodic waves and kinks.

A new large-scale instability that occurs in an obliquely rotating electroconductive liquid with a small-scale external force having zero helicity is considered. Using the method of multiscale asymptotic expansions, nonlinear equations for vortex and magnetic disturbances in the third order in the Reynolds number were obtained. The linear stage of the magneto-vortex dynamo, which arises as a result of instabilities such as hydrodynamic and magnetohydrodynamic effects is investigated. Numerical methods have been used to find stationary solutions of the equations of a nonlinear magneto-vortex dynamo in the form of localized chaotic structures.

Keywords: multiscale asymptotic expansions, Coriolis force, α - effect, nonlinear waves, kinks, solitons, chaotic structures.

PACS numbers: 52.35.Ra, 52.35.Sb, 52.65.Kj



Азаренков Николай Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, академик Национальной академии наук Украины, проректор по научно-педагогической работе Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина, заслуженный деятель науки и техники Украины.



Апостолов Станислав Сергеевич – доктор физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник отдела теоретической физики Института радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины, доцент кафедры теоретической физики имени академика И. М. Лифшица физического факультета Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина.



Барьяхтар Виктор Григорьевич – доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН Украины. Почетный директор Института магнетизма НАН Украины и МОН Украины. Член Американского физического общества. Член Международного союза по математической физике. Лауреат премии имени Н. Н. Боголюбова (1999). Лауреат Государственной премии Украины. Герой Украины за выдающиеся личные заслуги перед Украинским государством в развитии физической науки, исключительные достижения в организации фундаментальных исследований, многолетнюю плодотворную научно-педагогическую деятельность (2010).



Буз Вячеслав Александрович – доктор физико-математических наук, профессор, начальник лаборатории Национального научного центра «Харьковский физико-технический институт» НАН Украины, профессор Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина.



Голованов Антон Александрович – младший научный сотрудник Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук», Нижний Новгород.



Данилевич Александр Геннадиевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник. Доцент кафедры общей и теоретической физики физико-математического факультета Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского», ведущий научный сотрудник Института магнетизма НАН Украины и МОН Украины.



Карась Вячеслав Игнатьевич – доктор физико-математических наук, начальник лаборатории Национального научного центра «Харьковский физико-технический институт» НАН Украины, профессор Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина, лауреат Государственной премии Украины в области науки и техники, член-корреспондент Международной академии наук прикладной радиоэлектроники Украины, Беларуси и России.



Кощ Михаил Иосифович – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Института монокристаллов НАН Украины (Харьков).



Костюков Игорь Юрьевич – доктор физико-математических наук, профессор РАН, член-корреспондент РАН, заведующий отделом Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук», Нижний Новгород.



Майзелис Захар Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник Института радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины, доцент кафедры теоретической физики имени академика И. М. Лифшица физического факультета Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина.



Пухов Александр Михайлович – доктор философии, профессор, заведующий кафедрой Института теоретической физики Дюссельдорфского университета имени Генриха Гейне (Германия).



Рохманова Татьяна Николаевна – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник отдела теоретической физики Института радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины, доцент кафедры ядерной и медицинской физики физико-технического факультета Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина.



Стрелков Павел Сергеевич – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института общей физики (Москва) имени А. М. Прохорова Российской академии наук.



Тур Анатолий Валентинович – доктор физико-математических наук, научный сотрудник Национального центра научных исследований Франции (CNRS), профессор Университета Пауль Сабатини, института исследований астрофизики и планетологии, выпускник Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина.



Ямпольский Валерий Александрович – доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент Национальной академии наук Украины, заведующий отделом теоретической физики Института радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины, профессор кафедры теоретической физики имени академика И. М. Лифшица физического факультета Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина, лауреат Государственной премии Украины (2013).



Янзовский Владимир Владимирович – доктор физико-математических наук, заведующий отделом Института монокристаллов НАН Украины (Харьков), профессор Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина.

Наукове видання

Азаренков Микола Олексійович
Апостолов Станіслав Сергійович
Бар'яхтар Віктор Григорович
Буц В'ячеслав Олександрович
Голованов Антон Олександрович
Данілевич Олександр Геннадійович
Карась Вячеслав Ігнатович
Копп Михайло Йосипович
Костюков Ігор Юрійович
Майзеліс Захар Олександрович
Пухов Олександр Михайлович
Рохманова Тетяна Миколаївна
Стрелков Павло Сергійович
Томас Джон
Тур Анатолій Валентинович
Ямпольський Валерій Олександрович
Яновський Володимир Володимирович

ПРОБЛЕМИ ТЕОРЕТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Наукові праці

Випуск 4

PROBLEMS OF THEORETICAL PHYSICS

Scientific works

Issue 4

(Рос. мовою)

За редакцією професора В. І. Карася

Серія «Проблеми теоретичної і математичної фізики»

За загальною редакцією
академіка А. Г. Загороднього,
академіка М. Ф. Шульги

Коректор *О. В. Анцибора*
Комп'ютерне верстання *О. С. Чистякова*
Макет обкладинки *І. М. Дончик*

Формат 70×100/16. Ум. друк. арк. 24,9. Наклад 300 пр. Зам. № 47/2020.

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.2009

Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна
Тел. 705-24-32