

DOI: 10.17516/1999-494X-0408

УДК 534.11

## Control of Extended Beam Dynamic Behavior by Means of Supports at Temperature Changes

Ilya V. Kudryavtsev\*,  
Viktor A. Ivanov, Andrey V. Kolotov,  
Nadezhda V. Sukhodoeva, Alexander E. Mityaev  
*Siberian Federal University  
Krasnoyarsk, Russian Federation*

Received 01.12.2021, received in revised form 08.04.2022, accepted 24.04.2022

**Abstract.** The dynamic behavior of beam structures at transient loads is largely determined by the spectrum of their natural frequencies of bending vibrations, in which the first natural frequency is usually the most dangerous. Changing the beam temperature results in a longitudinal force that shifts the spectrum of natural frequencies of bending vibrations into a dangerous resonant area and can even lead to a loss of beam stability when it reaches a critical value. An effective way to control the dynamic behavior of the beam is the reasonable choice of the support system, however, such a design approach is practically not considered in the known literature.

This paper proposes a method of reasonable selection of a support scheme for rectilinear multi-span beams in order to provide the given values of the first eigen frequency of bending vibrations and the first critical load due to the action of axial force caused by changing the temperature of the beam. The technique is based on the known positions of beam vibration theory, Euler stability theory and uses support coefficients, which are pre-normalized to achieve comparable values, as a criterion for selecting the support scheme. The selected support scheme provides the specified value of the first eigen frequency, the value of the first critical temperature, or both at the same time.

According to the developed methodology, comparative calculations of the pipeline by the finite element method for beam and shell models were carried out, which showed good convergence of results for all controlled parameters. The proposed approach can be used in designing structures of extended beams for control of their own frequency of the spectrum of vibrations and critical force (or temperature) by means of a reasonable selection of appropriate support systems.

**Keywords:** beam, support, free vibrations, stability, critical force, temperature, support factor, normalizing.

**Acknowledgment.** Research was funded by RFBR, Krasnoyarsk Territory and Krasnoyarsk Regional Fund of Science, project number 20-48-242922.

---

© Siberian Federal University. All rights reserved

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-Non Commercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0).

\* Corresponding author E-mail address: ikudryavcev@sfu-kras.ru

Citation: Kudryavtsev, I. V., Ivanov, V. A., Kolotov, A. V., Sukhodoeva, N. V., Mityaev, A. E. Control of extended beam dynamic behavior by means of supports at temperature changes. J. Sib. Fed. Univ. Eng. & Technol., 2022, 15(4), 472–488. DOI:10.17516/1999–494X-0408

## Управление динамическим поведением протяженной балки посредством закреплений с учетом температуры

**И. В. Кудрявцев, В. А. Иванов,  
А. В. Колотов, Н. В. Суходоева, А. Е. Митяев**  
*Сибирский федеральный университет  
Российская Федерация, Красноярск*

**Аннотация.** Динамическое поведение балочных конструкций при переменных нагрузках во многом определяется спектром их собственных частот изгибных колебаний, в котором обычно наиболее опасной является первая собственная частота. Изменение температуры закрепленной балки приводит к появлению продольной силы, которая смещает спектр собственных частот изгибных колебаний в опасную резонансную область и может даже привести к потере устойчивости при достижении ею критического значения. Эффективным способом управления динамическим поведением балки является обоснованный выбор системы опор, однако в известной литературе практически не рассматривается такой проектный подход. В данной работе предлагается методика обоснованного выбора схемы закрепления для прямолинейных многоопорных балок с целью обеспечения заданных значений первой частоты собственных изгибных колебаний и первой критической нагрузки от действия осевой силы, вызванной изменением температуры балки. Методика основана на известных положениях теории колебаний балок, теории устойчивости по Эйлеру и использует в качестве критерия выбора схемы закрепления коэффициенты опор, которые предварительно нормируются для достижения сопоставимых значений. Выбранная схема обеспечивает заданное значение первой собственной частоты колебаний, величину первой критической температуры или одновременно оба условия работоспособности. Согласно разработанной методике выполнены сравнительные расчеты прямого трубопровода методом конечных элементов для балочной и оболочечной моделей, которые показали хорошую сходимость результатов по всем контролируемым параметрам. Предложенный подход может быть использован при проектировании конструкций протяженных балочных конструкций для управления любой их собственной частоты спектра колебаний и критической силы (или температуры) посредством обоснованного выбора соответствующей системы опор.

**Ключевые слова:** балка, опора, свободные колебания, устойчивость, критическая сила, температура, коэффициент опор, нормирование.

**Благодарности.** Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Правительства Красноярского края и Красноярского краевого фонда науки в рамках научного проекта № 20-48-242922.

Цитирование: Кудрявцев, И. В. Управление динамическим поведением протяженной балки посредством закреплений с учетом температуры / И. В. Кудрявцев, В. А. Иванов, А. В. Колотов, Н. В. Суходоева, А. Е. Митяев // Журн. Сиб. федер. ун-та. Техника и технологии, 2022, 15(4). С. 472–488. DOI:10.17516/1999-494X-0408

## Введение

В машиностроении существует большое количество протяженных многоопорных конструкций, которые подвержены динамическим воздействиям в виде вынужденных колебаний в сочетании со значительными изменениями температур: трубопроводы, маслопроводы, паропроводы, ж/д рельсы, тяги, кабели, волноводы и др. Изменение температуры материала конструкции вызывает изменение его геометрических размеров, что при наличии препятствий, например в виде неподвижных опор, приводит к появлению температурных усилий, которые изменяют значения собственных частот протяженных балочных конструкций и могут вызвать потерю их устойчивости. Условиями работоспособности таких протяженных многоопорных балочных конструкций является недопущение совпадения их собственных частот колебаний с частотами внешних воздействий и ограничение силовых воздействий критическими значениями. В большинстве случаев из всего спектра собственных частот и критических нагрузок протяженной балки наиболее опасными являются первая собственная частота изгибных колебаний  $f_1$  и первая критическая сила  $P_{cr1}$ , или соответствующая ей температура  $\Delta T_{cr1}$ . В этом случае условие работоспособности имеет вид:

$$f_1 \geq [f_1], P_{cr1} \geq [P_{cr1}], \text{ или } \Delta T_{cr1} \geq [\Delta T_{cr1}], \quad (1)$$

где допустимые значения частоты  $[f_1]$ , силы  $[P_{cr1}]$  и изменения температуры  $[\Delta T_{cr1}]$  берутся с учетом величин коэффициентов запаса.

Теоретические основы для расчета колебаний и устойчивости многоопорных балок изложены в работах многих ученых начиная с начала 20 века и по настоящее время [1–10]. В результате к настоящему времени постановку задачи расчета колебаний и потери устойчивости для различных механических конструкций, подвергающихся изменению температур, с математической точки зрения можно считать решенной, и она сводится к дифференциальным уравнениям в частных производных с заданными граничными условиями. Решение такой задачи сводится к нахождению собственных векторов и собственных значений для некоторой, полученной после ряда математических преобразований, системы линейных алгебраических уравнений [11–41].

Из-за сложности получения аналитического решения данной задачи часто применяют различные численные и получисленные методы расчета (численное итерационное решение, бесконечные ряды, специальные функции, комплексные числа и др.). Также распространена практика использования специализированных программ на ЭВМ (Ansys, Nastran и др.), которые обычно основаны на методе конечных элементов (МКЭ), что устраняет проблему получения решений для рассматриваемой конструкции практически любой сложности [43–45]. Вместе с тем численные методы позволяют получать только отдельные частные решения, не представимые в явном аналитическом виде, что затрудняет их использование в инженерной практике при проектных и исследовательских работах для оперативной качественной оценки принимаемых предварительных решений. Для решения данной проблемы были разработаны прикладные методы расчета и различные справочники по динамике типовых элементов конструкций (балки, пластинки, оболочки и др.), призванные помочь инженеру-проектировщику проводить необходимые расчеты без необходимости составления и решения дифференциальных уравнений [46, 47].

Однако практически вся литература по колебаниям и устойчивости многоопорных балок основана на исследовательском подходе, то есть она ориентирована только на ее использование для оценки динамических параметров уже существующих конструкций с заданными опорами, без возможности их проектного расчета и обоснования требований к закреплениям. Аспекты влияния вида опор на динамическое поведение балки и возможность управлять им кратко упоминаются в работе Тимошенко С.П. [42], однако данное предположение не получило у него дальнейшего развития. Между тем перед инженером-проектировщиком обычно стоит именно обратная задача: для заданной неизменяемой протяженной конструкции необходимо определить, какие опоры, с какой жесткостью и с каким шагом необходимо установить, чтобы получить требуемое значение первой собственной частоты колебаний и величину первой критической нагрузки (силы или температуры). Отсутствие проектных методов расчета многоопорных балок приводит к тому, что инженеру приходится выполнять серию расчетов с различными закреплениями для достижения требуемого динамического поведения имеющейся конструкции.

Некоторым исключением можно считать направления виброзащиты и оптимизации балочных конструкций, но используемые там подходы и методы также обходят стороной вопрос об обосновании числа и вида опор для получения требуемого динамического поведения конструкции. Литература по виброзащите [48–54] в основном рассматривает следующие способы регулирования вибраций: виброизоляция, дополнительное демпфирование, балансировка и т.д., только упоминая вариант обоснованного выбора схемы закрепления. Рассматривая тему оптимального проектирования балочных конструкций [55–58], авторы сосредотачиваются в основном на внесении изменений в саму балку (форма, размеры, материал и др.), причем варьируемые переменные должны быть непрерывными и гладкими, что затруднительно, например, для дискретного изменения числа и вида опор. Во многих практических случаях конструкция балки дается в неизменяемом виде, что осложняет применение методов оптимального проектирования. Также получаемые авторами расчетные зависимости зачастую носят весьма общий характер, что совершенно неприменимо для инженерной практики.

Аналогичная ситуация наблюдается и с расчетом балок на устойчивость: в известной литературе не обнаружен проектный метод расчета с целью обоснования условий закрепления на основе требуемого значения критической силы [59–61]. Между тем обоснованный выбор типа и способов расстановки опор является эффективным методом обеспечения условий работоспособности (1) для протяженных балочных конструкций.

В данной работе на основе известных аналитических зависимостей теории колебаний балок и теории устойчивости балок предложена методика, позволяющая проводить обоснованный выбор схемы закрепления, которая обеспечивает требуемые значения первой частоты собственных колебаний и первой критической силы или температуры для прямолинейных балок как раздельно, так и одновременно, что позволяет также явно оценить вклад различных факторов (опоры, геометрические формы и размеры, материал и др.) на получаемые результаты.

## 1. Уравнения динамического состояния балки

Рассмотрим основные аналитические зависимости динамического состояния балки относительно первой собственной частоты изгибных колебаний и первой критической силы как

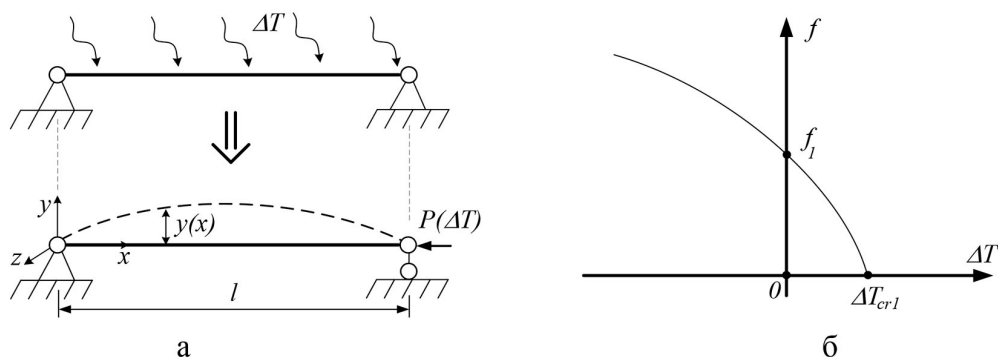


Рис. 1. Влияние температуры балки на ее динамическое состояние: а – расчетная схема; б – зависимость частоты от температуры

Fig. 1. Influence of beam temperature on its dynamic state: a – design diagram; b – dependence of frequency on temperature

наиболее опасные для ее работоспособности. Уравнение свободных колебаний балки с учетом действия сжимающей продольной силы (рис. 1, а) имеет вид [11–15]:

$$EJ_z \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

где  $y=y(x, t)$  – функция прогиба при колебаниях;  $E$  – модуль Юнга;  $J_z$  – момент инерции поперечного сечения;  $m$  – удельная масса,  $m=\rho S$ , где  $\rho$  – плотность материала;  $S$  – площадь поперечного сечения;  $P$  – продольная сила.

В качестве функции прогиба  $y(x)$  для рассматриваемой изгибной формы колебаний на первой собственной частоте примем уравнение вида:

$$y(x, t) = A \sin\left(\frac{x\pi}{l}\right) \sin(\omega t), \quad (3)$$

где  $A$  – амплитуда колебаний;  $l$  – длина балки;  $\omega$  – круговая частота колебаний.

Для однозначного решения уравнения (2) необходимо задать граничные условия, которые отражают условия закрепления балки в опорах.

Подставив функцию прогиба (3) в уравнение свободных колебаний (2), временно приняв  $P=0$  и учитывая условия закрепления балки, получим систему линейных уравнений, первое собственное значение которой и будет определять решение для ее первой частоты собственных колебаний:

$$f_1 = \frac{\alpha^2}{2\pi l^2} \cdot \sqrt{\frac{EJ_z}{m}}, \quad (4)$$

где  $\alpha$  – коэффициент опор, который учитывает влияние способа закрепления балки.

При действии на балку сжимающей продольной силы  $P$  первая собственная частота колебаний будет изменяться по зависимости [46]:

$$f_{1(P>0)} = f_{1(P=0)} \cdot \sqrt{1 - \frac{P}{P_{cr1}}}, \quad (5)$$

где  $f_{1(P<0)}$  – первая собственная частота балки при действии продольной силы  $P$ ;  $f_{1(P=0)}$  – первая частота свободных колебаний при отсутствии продольной силы  $P$ ;  $P_{cr1}$  – первая критическая продольная сила балки.

Будем рассматривать изменение температуры  $\Delta T$  как основную причину появления продольной силы  $P$ , для этого выразим ее через температуру по формуле [47]:

$$P(\Delta T) = \alpha_t \cdot \Delta T \cdot ES, \quad (6)$$

где  $\alpha_t$  – коэффициент температурного расширения материала балки.

Первую критическую силу в уравнении (5) можно определить по формуле Эйлера, которая имеет вид [59–61]:

$$P_{cr1} = \frac{\pi^2 EJ_z}{\mu^2 \cdot l^2}, \quad (7)$$

где  $\mu$  – коэффициент приведения длины, также определяется способом закрепления.

Графически влияние продольной силы (6), выраженной через температуру, на значение первой собственной частоты колебаний балки показано на рис. 1б. Уменьшение температуры ниже нуля приведет к повышению значения первой собственной частоты колебаний, что обычно допустимо и здесь не рассматривается. При увеличении же температуры до некоторого критического значения  $\Delta T_{cr}$  (рис. 1б) частота собственных колебаний уменьшится до нуля, при этом сжимающая сила (6) достигнет своего первого критического значения, что приведет к общей потере устойчивости балки. Таким образом, два условия работоспособности (1) по частоте и температуре оказываются связанными через продольную силу. Объединив уравнения (4–7), получим условие для первой частоты собственных колебаний балки с учетом влияния температуры в виде:

$$f_1(\Delta T) = \left(\frac{\alpha}{\pi l}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{E}{4m}(\pi^2 J_z - \mu^2 \cdot l^2 \cdot \alpha_t \cdot \Delta T \cdot S)} \geq [f_1]. \quad (8)$$

Выполнение условия (8) соответствует одновременному выполнению обоих условий работоспособности (1): обеспечение минимального значения первой собственной частоты колебаний и условие устойчивости конструкции балки при изменении температуры. Потеря устойчивости конструкции, когда ее собственная частота колебаний равна нулю, есть динамический критерий устойчивости. В выражении (8) это соответствует случаю, когда выражение в скобках под корнем обратится в ноль, что позволяет выразить первую критическую температуру балки:

$$\Delta T_{cr1} = \frac{\pi^2 J_z}{\mu^2 \cdot l^2 \cdot \alpha_t \cdot S} \geq [\Delta T_{cr1}]. \quad (9)$$

Значения коэффициентов опор  $\alpha$  и  $\mu$  в разрешающих уравнениях (4,7–9) для простых случаев расстановки опор можно найти во многих справочниках [46,47] или рассчитать для требуемой схемы закрепления. Рассмотрим далее более распространенные случаи многоопорного закрепления протяженных балок с целью создания методики обоснованного выбора схемы закрепления.

## 2. Методика обоснованного выбора схемы закрепления

Коэффициенты опор  $\alpha$  и  $\mu$  обычно используются для проверочных расчетов путем их выбора из справочников для известной конструкции с заданными закреплениями. Рассмотрим постановку и решение обратной задачи – управление первой собственной частотой колебаний и первой критической нагрузкой балки с помощью обоснованного выбора для нее требуемой схемы закрепления.

### 2.1. Выбор базовых схем расстановки опор

Протяженные прямолинейные балочные конструкции в общем случае могут иметь произвольную систему закреплений, но на своих концах они обычно соединяются с массивными блоками, которые можно считать эквивалентом жесткой заделки. Протяженные балки, как правило, имеют несколько промежуточных опор, которые запрещают линейные смещения в поперечном направлении и незначительно ограничивают угловые перемещения, что позволяет их смоделировать шарнирными опорами. В соответствии с таким подходом в данной работе ограничимся тремя базовыми схемами закрепления (рис. 2), для которых значения коэффициентов опор  $\alpha$  и  $\mu$  приведены в табл. 1 [46,47].

Для всех схем при  $N=0$  получаем однопролетную балку как частный случай многопролетной конструкции. Считаем, что во всех схемах опоры располагаются равноудаленно друг от друга, что рационально с точки зрения получения их равной изгибной жесткости и проч-

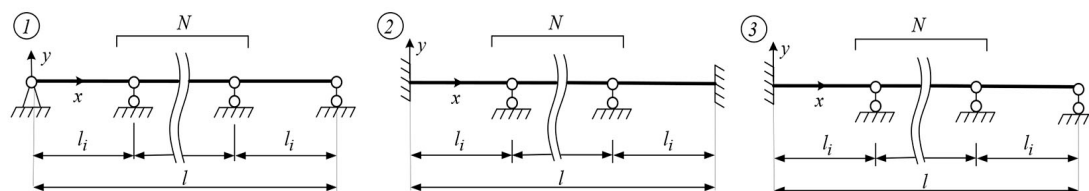


Рис. 2. Схемы способов закрепления балки

Fig. 2. Beam support schemes

Таблица 1. Исходные значения коэффициентов опор

Table 1. Original values of support coefficients

№ схемы	Коэффициент	Число промежуточных опор $N$										
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	$\alpha$	3,1416										
	$\mu$	1										
2	$\alpha$	4,730	3,927	3,557	3,393	3,310	3,260	3,230	3,210	3,196	3,186	3,180
	$\mu$	0,5	0,699	0,814	0,879	0,917	0,939	0,954	0,964	0,971	0,977	0,978
3	$\alpha$	3,927	3,393	3,261	3,210	3,186	3,173	3,164	3,159	3,156	3,153	3,151
	$\mu$	0,7	0,879	0,939	0,964	0,977	0,983	0,988	0,99	0,992	0,994	0,996



ности, и широко применяется на практике. В этом случае длину каждого пролета можно определить как:

$$l_i = \frac{l}{N+1}. \quad (10)$$

Максимальное число промежуточных опор в данной работе принято 10, но при необходимости можно получить значения коэффициентов опор для любого числа и вида промежуточных опор. При этом при анализе табл. 1 можно отметить, что дальнейшее увеличение числа опор малоэффективно: при  $N > 7$  добавление промежуточной опоры слабо влияет на величину коэффициентов опор  $\alpha$ ,  $\mu$  и, соответственно, на первую собственную частоту колебаний балки (4) и ее первую критическую нагрузку (7) или температуру (9).

## 2.2. Преобразование коэффициентов опор

Обеспечение условий работоспособности (1) основано на выполнении условия (8), в которое входят два разнозначных коэффициента опор  $\alpha$  и  $\mu$ , что затрудняет получение одного критерия выбора требуемой схемы закрепления. Необходимо получить единый критерий выбора схемы закрепления, для этого коэффициенты опор должны иметь сопоставимые значения. Принимая единую изгибную форму деформаций балки (3) при колебаниях и потере устойчивости для заданных закреплений с учетом (10), выполним нормирование исходных значений коэффициентов опор в табл. 1 для всех схем закреплений по отношению к коэффициентам опор абсолютно свободной балки по зависимостям:

$$\alpha' = \left( \frac{\alpha \cdot (N+1)}{\pi} \right)^2, \mu' = \left( \frac{N+1}{\mu} \right)^2. \quad (11)$$

Полученные новые значения коэффициентов опор  $\alpha'$  и  $\mu'$  для всех базовых схем на рис. 2 сведем в табл. 2.

Нормирование по выражениям (11) позволило установить прямую зависимость для первой собственной частоты колебаний, критической силы и критической температуры от новых зна-

Таблица 2. Нормированные значения коэффициентов опор

Table 2. Normalized values of support coefficients

№ схемы	Коэффициент	Число промежуточных опор $N$										
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	$\alpha'$	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121
	$\mu'$	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121
2	$\alpha'$	2,267	6,250	11,54	18,66	27,75	38,77	51,80	66,82	83,83	102,8	124,0
	$\mu'$	4	8,187	13,58	20,71	29,73	40,83	53,84	68,87	85,91	104,8	126,5
3	$\alpha'$	1,563	4,666	9,697	16,71	25,72	36,72	49,70	64,71	81,75	100,7	121,7
	$\mu'$	2,041	5,177	10,21	17,22	26,19	37,26	50,20	65,30	82,31	101,2	122,0



чений коэффициентов опор, при этом вид записи этих уравнений практически не изменился с классического написания (7–9):

$$f_1(\Delta T) = \frac{\alpha'}{2l^2} \cdot \sqrt{\frac{E}{m} \left( \pi^2 J_z - \frac{1}{\mu'} \cdot l^2 \cdot \alpha_l \cdot \Delta T \cdot S \right)} \leq [f_1], \quad (12)$$

$$P_{cr1} = \mu' \cdot \frac{\pi^2 E J_z}{l^2} \leq [P_{cr1}], \quad (13)$$

$$\Delta T_{cr1} = \mu' \cdot \frac{\pi^2 J_z}{l^2 \cdot \alpha_l \cdot S} \leq [\Delta T_{cr1}]. \quad (14)$$

Преобразование по формулам (11) позволяет в уравнениях (12–14) оставить исходную длину  $l$  балки, а количество промежуточных опор  $N$  уже учтено новыми коэффициентами опор  $\alpha'$  и  $\mu'$ . Вариант представления коэффициентов  $\alpha'$  и  $\mu'$  после нормирования также позволил получить их удобные и сопоставимые значения. Например, по значениям в табл. 2 можно легко установить, во сколько раз изменятся первая собственная частота, критическая температура и первая критическая сила в зависимости от вида краевых опор и числа промежуточных опор  $N$ , поскольку нормированные коэффициенты  $\alpha'$  и  $\mu'$  теперь напрямую это определяют согласно зависимостям (12–14).

### 2.3. Единое условие работоспособности балки

После пересчета коэффициентов опор по зависимостям (11) новые значения  $\alpha'$  и  $\mu'$  оказываются очень близки друг к другу для каждого варианта схемы опоры (табл. 2), и при увеличении  $N$  это различие быстро уменьшается за счет того, что для всех схем закреплений исходные коэффициенты  $\alpha$  и  $\mu$  (табл. 1) очень быстро сходятся к характерным константам:

$$\alpha = \pi, \mu = 1 \text{ при } N \rightarrow \infty \quad (15)$$

Принимая условие равенства коэффициентов опор в пределах каждой схемы закрепления, получаем искомый единый критерий выбора схемы закрепления в виде минимально допустимого значения коэффициента опор:

$$\alpha_{\min} = \alpha' = \mu' \quad (16)$$

Подставляя равенство (16) в условие работоспособности (8), получаем квадратное уравнение относительно искомого коэффициента  $\alpha_{\min}$  в виде:

$$-\alpha_{\min}^2 \cdot \pi^2 E \cdot J_z + \alpha_{\min} \cdot l^2 \alpha_l \Delta T \cdot E \cdot S + 4l^4 m [f_1]^2 = 0. \quad (17)$$

Решение уравнения (17) с учетом знаков имеет вид:

$$\alpha_{\min} = C_{\Delta T} + \sqrt{C_{\Delta T}^2 + \frac{4m [f_1]^2 l^4}{\pi^2 E J_z}}, \quad (18)$$

где  $C_{\Delta T}$  – коэффициент учета влияния температуры, определяется как:

$$C_{\Delta T} = \frac{\alpha_l \cdot \Delta T \cdot S l^2}{2\pi^2 J_z}. \quad (19)$$

Таким образом, для обеспечения условий работоспособности (1) необходимо из табл. 2 выбрать такую схему закрепления и число промежуточных опор, для которых значения коэффициентов  $\alpha'$  и  $\mu'$  будут не меньше, чем рассчитанная величина по выражению (18), то есть:

$$\min(\alpha', \mu') \geq \alpha_{\min} = C_{\Delta T} + \sqrt{C_{\Delta T}^2 + \frac{4m[f_1]^2 l^4}{\pi^2 E J_z}}. \quad (20)$$

Выбранная схема закрепления балки с соответствующими ей значениями коэффициентов  $\alpha'$  и  $\mu'$  будет обеспечивать одновременное выполнение условий работоспособности (1) по частоте, критической силе и температуре, в чем можно убедиться, проверив их фактические значения по зависимостям:

$$f_1(\Delta T) = \frac{\alpha'}{2l^2} \cdot \sqrt{\frac{E}{m} \left( \pi^2 J_z - \frac{1}{\mu'} \cdot l^2 \cdot \alpha_i \cdot \Delta T \cdot S \right)} \geq [f_1], \quad (21)$$

$$P_{cr1} = \frac{\mu' E}{l^2} \left( \pi^2 J_z - \frac{4l^4 [f_1]^2 m}{\alpha'^2 E} \right) \geq [P_{cr1}], \quad (22)$$

$$\Delta T_{cr1} = \frac{\mu'}{l^2 \cdot \alpha_i \cdot S} \left( \pi^2 J_z - \frac{4l^4 [f_1]^2 m}{\alpha'^2 E} \right) \geq [\Delta T_{cr1}]. \quad (23)$$

Зависимости (21–23) получены в соответствии с новыми значениями коэффициентов опор из табл. 2, при этом если принять условие  $[f_1]=0$ , то вид записи этих уравнений совпадет с классическим вариантом их написания (7–9), который становится их частным случаем.

#### 2.4. Алгоритм обоснованного выбора схемы закрепления

Предложенный способ нормирования значений коэффициентов опор и единый критерий выбора схемы закрепления (20) позволяют решать проектные задачи по обоснованному выбору такого закрепления балки, для которого будут выполнены все условия работоспособности (1). Для этого на подготовительном этапе необходимо:

- 1) создать набор базовых схем многоопорного закрепления, аналогично рис. 2;
- 2) определить коэффициенты опор  $\alpha$  и  $\mu$  для каждой схемы по справочной литературе либо расчетным путем;
- 3) нормировать значения коэффициентов опор  $\alpha$  и  $\mu$  для каждой схемы закрепления по формулам (11) или аналогичным зависимостям таким образом, чтобы они приняли близкие значения:  $\alpha' \approx \mu'$ .

После этого обоснованный выбор схемы закрепления состоит из трех этапов:

1. Расчет минимального требуемого значения коэффициента опор  $\alpha_{\min}$  по формуле (18).
2. Выбор из созданного набора базовых схем закреплений такой схемы, для которой выполняется условие (20).
3. Проверка фактических значений динамических параметров конструкции с выбранной схемой закрепления по формулам (21–23).

Рассмотрим пример расчета протяженной конструкции по разработанной методике и полученным аналитическим зависимостям.

### 3. Пример расчета

Рассмотрим трубопровод круглого поперечного сечения с характеристиками: длина  $l=1,5$  м, наружный диаметр  $D=15$  мм, внутренний диаметр  $d=13$  мм; материал: алюминиевый сплав  $E=7.1 \cdot 10^5$  МПа, плотность  $\rho=2770$  кг/м<sup>3</sup>, коэффициент теплового расширения  $\alpha_t=0,000023$  1/°C. Исходное закрепление трубопровода выполнено в виде жесткой заделки на обоих краях, промежуточных опор нет, этому соответствует схема 2 на рис. 2 при  $N=0$ .

Необходимо выбрать схему расположения опор и требуемое число промежуточных, при которых обеспечивалось бы значение первой собственной частоты колебаний  $[f_1]=250$  Гц и критическая температура  $[\Delta T_{crit}]=90$  °C. Выполним решение по разработанной методике и полученные результаты расчетов верифицируем методом конечных элементов в программе Ansys 17 для балочной и оболочечной моделей конструкции трубопровода.

#### 3.1. Аналитическое решение по разработанной методике

Первым шагом проверим текущие динамические параметры заданного трубопровода при исходном закреплении для схемы 2 на рис. 2 при  $N=0$ . Согласно табл. 2 этой схеме соответствуют значения нормированных коэффициентов опор  $\alpha'=2,267$  и  $\mu'=4$ . По зависимостям (21,23) при  $\Delta T=0$  °C и  $[f_1]=0$  Гц получаем следующие исходные динамические характеристики трубопровода:

$$f_1 = 39,76 \text{ Гц}; \quad \Delta T_{crit} = 18,79 \text{ °C}. \quad (24)$$

Потеря устойчивости будет происходить при нагреве на  $T_{crit}=18.79$  °C, что не позволяет использовать такое исходное закрепление не только для требуемых условий работоспособности, но даже при  $\Delta T=0$  °C, поскольку в этом случае первая собственная частота колебаний будет составлять всего  $f_1 = 39,76$  Гц. Необходимо выбрать другую схему закрепления, которая обеспечила бы требуемые условия работоспособности. Для этого подставим исходные данные трубопровода в условие (20) и получим требуемое минимальное значение нормированных коэффициентов опор:

$$\alpha_{min} = 26,76. \quad (25)$$

Из табл. 2 выбираем схему закрепления, для которой  $\min(\alpha', \mu') > 26,76$ , например, схему № 2 с четырьмя промежуточными опорами ( $N=4$ ), для которой коэффициенты опор равны:

$$\alpha' = 27,75; \quad \mu' = 29,73. \quad (26)$$

Проверяем фактические значения первой собственной частоты колебаний трубопровода по формуле (21) и критической температуры по выражению (23), получаем решение:

$$f_1 = 290,16 \text{ Гц и } \Delta T_{crit} = 102,78 \text{ °C}, \quad (27)$$

что обеспечивает оба требования задачи.

На рис. 3 графически показано различие динамического поведения конструкции между исходным закреплением ( $N=0$ ) и для выбранной схемы опор ( $N=4$ ).

Точка  $A$  на кривой  $f_1(T)$  при  $N=4$  определяет фактические параметры трубопровода для выбранной схемы закрепления.

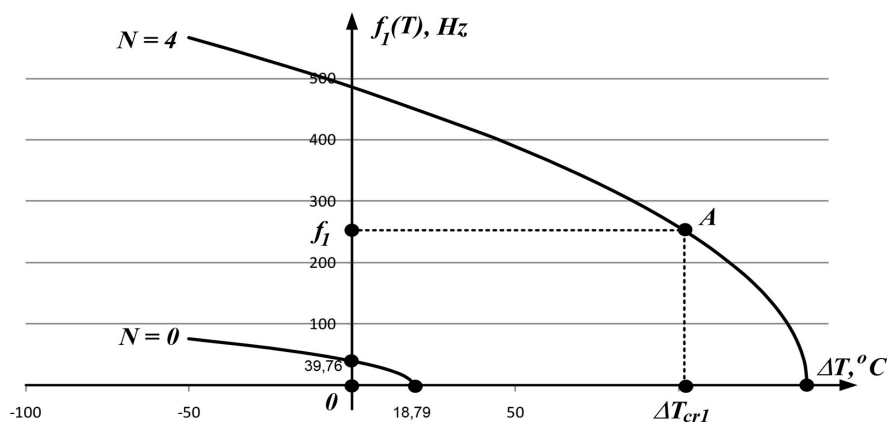


Рис. 3. Зависимость первой собственной частоты колебаний от температуры

Fig. 3. Dependence of the first eigen frequency on temperature

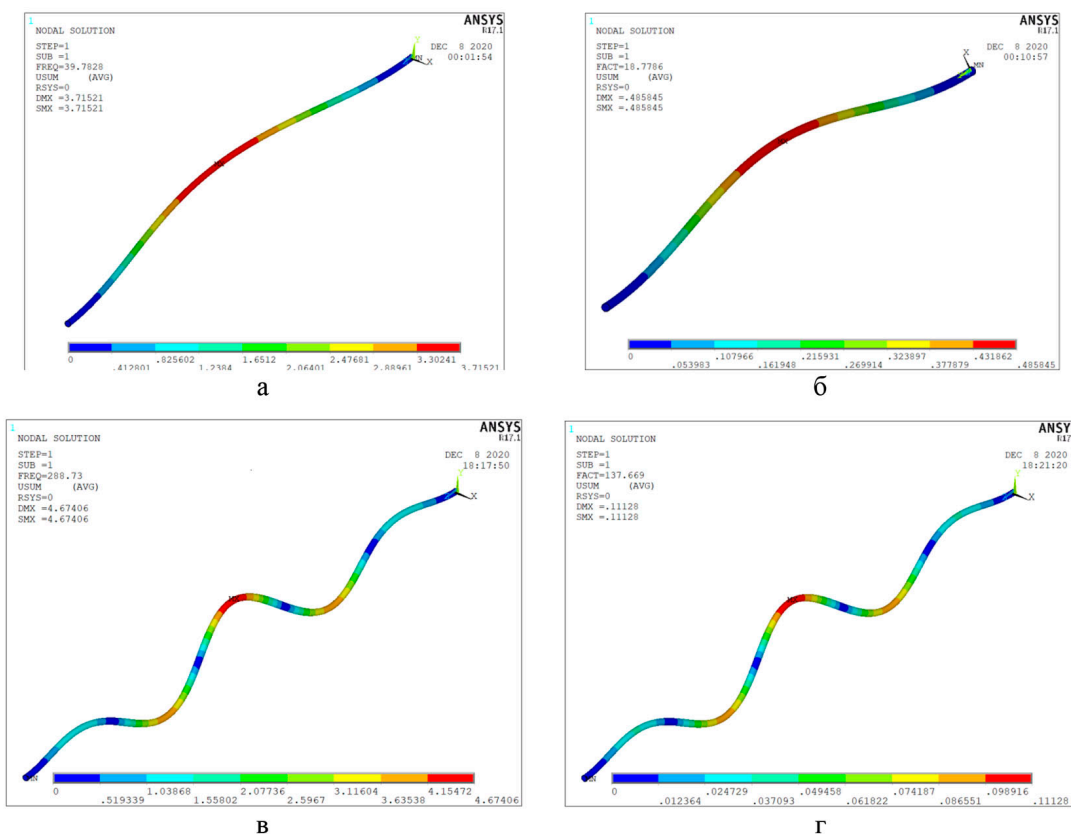


Рис. 4. Результаты расчета оболочечной модели трубопровода: а – первая мода колебаний при  $N=0$  и  $\Delta T=0^\circ\text{C}$ ; б – потеря устойчивости при  $T_{cr1}$ ,  $N=0$  и  $[f_1]=0$  Гц; в – первая мода колебаний при  $N=4$  и  $\Delta T=90^\circ\text{C}$ ; г – потеря устойчивости при  $T_{cr1}$ ,  $N=4$  и  $[f_1]=0$  Гц

Fig. 4. Calculation results of the pipeline shell model: а – the first vibration mode at  $N=0$  and  $\Delta T=0^\circ\text{C}$ ; б – stability loss at  $T_{cr1}$ ,  $N=0$  and  $[f_1]=0$  Hz; в – the first vibration mode at  $N=4$  and  $\Delta T=90^\circ\text{C}$ ; г – stability loss at  $T_{cr1}$ ,  $N=4$  and  $[f_1]=0$  Hz

### 3.2. Численное решение задачи

Проведем верификацию полученных результатов численным методом конечных элементов в Ansys. Для этого создадим балочную и оболочечную модели трубопровода и рассчитаем параметры их динамического состояния для разных условий закреплений и температурах. Балочная модель содержит 1500 конечных элементов типа Beam189, а оболочечная модель имеет 14328 конечных элементов Shell 281. На рис. 4 приведены некоторые характерные результаты численного расчета для оболочечной модели, а основные численные значения результатов расчета сведены в табл. 3.

Таблица 3. Сравнение результатов расчета

Table 3. Comparison of calculation results

Параметр	N=0		N=4		
	$f_i$ , Гц при $\Delta T=0$ °C	$T_{crit}$ , °C при $[f_i]=0$ Гц	$f_i$ , Гц при $\Delta T=90$ °C	$T_{crit}$ , °C	
				при $[f_i]=0$ Гц	при $[f_i]=250$ Гц
Разработанная методика	39,76	18,79	290,16	139,62	102,78
Ansys, Beam189	39,75	18,78	290,39	139,93	102,91
Отклонение,%	0,00961	0,00786	0,0812	0,219	0,119
Ansys, Shell281	39,78	18,77	288,73	137,67	100,23
Отклонение,%	0,0532	0,0353	0,494	1,40	1,52

Сравнение результатов расчета по предложенной методике с численными решениями по методу конечных элементов показывает хорошую сходимость по всем контролируемым параметрам, максимальное различие в результатах составляет не более 0,219 % для балочной и 1,52 % для оболочечной модели.

## 4. Обсуждение

Разработанная методика обоснованного выбора закреплений является развитием известной теории колебаний и теории устойчивости балок с учетом действия температуры, и поэтому полученные зависимости хорошо согласуются с известными решениями, которые становятся частными случаями предложенного проектного подхода. Полученные в работе аналитические зависимости позволяют проводить разносторонние исследования динамического состояния балки в зависимости не только от схем закрепления, но также и от ее геометрии (геометрия поперечного сечения, длина), материала (удельная масса, модуль Юнга) и критической температуры.

Предложенный подход справедлив не только для рассмотренных типов опор (заделка, шарнирная опора), но и для любых опор, для которых будут известны коэффициенты опор  $\alpha$  и  $\mu$ . Методика также справедлива и при наличии в балочных конструкциях криволинейных

участков, если по их краям установлены промежуточные опоры и длина дуги меньше длины пролета прямых участков. В этом случае жесткость криволинейного участка будет заведомо выше, чем у прямых участков и это не нарушит условие работоспособности (1).

Особенностью предложенной в данной работе методики выбора схемы закрепления является дискретность выбора, поскольку мы можем выбирать только целое число промежуточных опор и их определенный тип. Следствием этого, в частности, является невозможность подбора схемы закреплений таким образом, чтобы протяженная конструкция была точно настроена на заданную первую частоту колебаний или критическую нагрузку. Такая точная настройка возможна путем применения опор с регулируемой жесткостью, однако решение такой задачи будет более сложным и здесь не рассматривается. Из табл. 2 можно заметить, что при малом числе промежуточных опор  $N < 2$  принятое допущение о равенстве значений нормированных коэффициентов опор (16) становится некорректным, в этом случае предложенный подход можно использовать как первое приближение, проверяя фактические параметры конструкции по зависимостям (21–23).

Анализ примера расчета показывает (табл. 3), что все результаты расчета оболочечной модели трубопровода в Ansys имеют ожидаемо более низкие значения рассчитываемых параметров по сравнению с балочной моделью, что объясняется влиянием локальных деформаций тонкостенного поперечного сечения. Также добавление опор уменьшает отношение длины свободного участка балки к поперечному размеру, что приводит к росту погрешностей расчета вследствие нарушения основных допущений теории балок. В частности, нарушаются основные ограничения на соотношения размеров балки [62,63], при соблюдении которых предлагаемый подход позволяет с достаточной точностью рассчитывать балки и с неосесимметричной тонкостенной формой поперечного сечения [64].

Еще одной особенностью расчетов является то, что при малых требуемых значениях первой собственной частоты колебаний решение оказывается очень чувствительным к значению коэффициента  $\mu'$ , а при больших значениях частот влияние обоих коэффициентов  $\alpha'$  и  $\mu'$  на решение становится равнозначным. Именно поэтому полученное фактическое значение первой собственной частоты (27) оказалось значительно выше, чем исходные требования в условиях задачи даже при выборе расчетной схемы, у которой значения коэффициентов  $\alpha'$  и  $\mu'$  (26) лишь немного больше требуемой величины (25).

В результате проведенная верификация подтвердила корректность предлагаемой методики и показала эффективность управления динамическим состоянием балки посредством изменения системы расположения опор. В работе были рассмотрены только первая собственная частота изгибных колебаний и первая критическая нагрузка, однако предложенный подход применим и для последующих собственных частот, критических нагрузок, видов колебаний и форм потери устойчивости (продольные, крутильные и др.).

### Заключение

Разработана методика управления динамическим поведением протяженных балок посредством обоснованного выбора схемы закрепления, обеспечивающая их работоспособность при заданных требованиях по частоте собственных колебаний и критической силе (или температуре). Предложенный метод имеет простую аналитическую формулировку, что

позволяет инженеру-проектировщику оперативно и обоснованно проводить многофакторное исследование или проектирование любых протяженных балочных конструкций для обеспечения ими заданных значений первой собственной частоты колебаний и температурной устойчивости.

Методика верифицирована сравнительным расчетом прямолинейного участка трубопровода методом конечных элементов в программе Ansys для балочной и оболочечной моделей и показала хорошую сходимость по всем исследуемым параметрам динамического состояния.

### Список литературы / References

- [1] Крейн М.Г. Вибрационная теория многоопорных балок. *Вестник инженеров и техников*, 1933, 4, 142–145. [Krein M.G. Vibration theory of multi-span beams, *Vestnik Inzhenerov i Tekhnikov*, 1933, 4, 142–145 (In Russian)].
- [2] Miles L. W. Vibration of beams on many supports. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 1956, 82, 1–9.
- [3] Bolotin V. V. An asymptotic method for the study of the problem of eigen values for rectangular regions. *Problems in Continuum Mechanics*, 1961, 25, pp. 56–68.
- [4] Lin Y.K. Free vibration of a continuous beam on elastic supports. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1962, 4, 409–423.
- [5] Lin Y.K., McDaniel T.J. Dynamics of beam type periodic structures. *Journal of Engineering for Industry*, 1969, 93, 1133–1141.
- [6] Mead D.J. Free wave propagation in periodically-supported infinite beams. *Journal of Sound and Vibration*, 1970, 11, 181–197.
- [7] Gupta S.G. Natural flexural wave and the normal modes of periodically-supported beams and plates. *Journal of Sound and Vibration*, 1970, 13, 89–101.
- [8] Abramovich H., Elishakoff I. Application of the Krein's method for determination of natural frequencies of periodically supported beam based on simplified Bresse-Timoshenko equations. *Acta Mechanica*, 1987, 66, 39–59.
- [9] Zhu L., Elisacoff I., Lin Y.K. Free and forced vibrations of periodic multispan beams. *Shock and Vibration*, 1994, 3, 217–232.
- [10] Barsic M., Konieczny J., Kowal J., Sapinski B. Vibration control of mechanical systems. *Acta Montanistica Slovaca Ročník*, 1998, 3, 504–509.
- [11] Ильин М.М., Колесников К.С., Саратов Ю.С. *Теория колебаний*. Москва: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. 272 с. [Il'in M.M., Kolesnikov K.S., Saratov YU.S. *Vibration theory*. Moskva, MGTU im. N.E. Baumana, 2001. 272 p.(in Russian)]
- [12] Бидерман В.Л. *Теория механических колебаний*. Москва: Высшая школа, 1980. 408 с. [Biderman V.L. *Theory of mechanical vibrations*. Moskva, Vysshaya shkola, 1980. 408 p.(in Russian)]
- [13] Бабаков И.М. *Теория колебаний*. Москва: Дрофа, 2004. 591 с. [Babakov I.M. *Vibration theory*. Moskva, Drofa, 2004. 591 p.(in Russian)]
- [14] Блехман И.И. *Вибрационная механика*. Москва: Физматлит, 1994. 400 с. [Blekhman I.I. *Vibration mechanics*. Moskva: Fizmatlit, 1994. 400 p.(in Russian)]
- [15] Доев В.С. *Поперечные колебания балок*. Москва: КНОРУС, 2016. 412 с. [Doev V.S. *Transverse vibrations of beams*. Moskva, KNORUS, 2016. 412 p. (in Russian)]



- [16] Журавлев В. Ф., Климов Д. М. *Прикладные методы в теории колебаний*. Москва: Наука, 1988. 328 с. [Zuravlev V. F., Klimov D. M. *Applied methods in the vibration theory*. Moskva: Nauka, 1988. 328 p. (in Russian)]
- [17] Пановко Я. Г. *Введение в теорию механических колебаний*. Москва: Наука, 1991. 256 с. [Panovko YA.G. *Introduction to the theory of mechanical vibrations*. Moskva, Nauka, 1991. 256 p. (in Russian)]
- [18] Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. *Колебания в инженерном деле*. Москва: Машиностроение, 1985. 472 с. [Timoshenko S. P., YAng D.H., Uiver U. *Vibrations in engineering*. Moskva: Mashinostroenie, 1985. 472 p. (in Russian)]
- [19] Тимошенко С. П. *Прочность и колебания элементов конструкций*. Москва: Наука, 1975. 704 с. [Timoshenko S. P. *Strength and vibrations of structural elements*. Moskva, Nauka, 1975. 704 p. (in Russian)]
- [20] Яблонский А. А., Норејко С. С. *Курс теории колебаний*. Санкт-Петербург: Лань, 2003. 254 с. [Yablonskij A. A., Norejko S. S. *Vibration Theory Course*. Sankt-Petersburg: Lan', 2003. 254 p. (in Russian)]
- [21] Смирнов А. Ф., Александров А. В., Лашеников Б. Я., Шапошников Н. Н. *Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений*. Москва: Стройиздат, 1984. 414 с. [Smirnov A. F., Aleksandrov A. V., Lashchenikov B. YA., Shaposhnikov N. N. *Construction mechanics. Dynamics and stability of structures*. Moskva, Strojizdat, 1984. 414 p. (in Russian)]
- [22] Balachandran B. *Vibrations*. Toronto, 2009. 737 p.
- [23] Benaroya H., Nagurka M., Han S. *Mechanical vibration*. New York, 2017. 602 p.
- [24] Bottega W. J. *Engineering vibrations*. New York, 2006. 750 p.
- [25] Geradin M., Rixen D. J. *Mechanical vibrations*. Chichester, 2015. 617 p.
- [26] Hartog J. P. *Mechanical vibrations*. New York, 1985. 449 p.
- [27] Hagedorn P., DasGupta A. *Vibrations and waves in continuous mechanical systems*. Chichester, 2007. 388 p.
- [28] Inman D. J. *Engineering vibration*. London, 2014. 720 p.
- [29] Kelly S. G. *Advanced vibration analysis*. Boca Raton, 2007. 650 p.
- [30] Jazar R. N. *Advanced vibrations. A modern approach*. New York, 2013. 695 p.
- [31] Kelly S. G. *Mechanical vibrations. Theory and applications*. Stamford, 2012. 896 p.
- [32] Leissa A. W., Quatu M. S. *Vibration of continuous systems*. New York, 2011. 524 p.
- [33] Meirovitch L. *Fundamentals of vibrations*. Boston, 2001. 826 p.
- [34] Paz M., Leigh W. *Structural Dynamics. Theory and Computation*. Dordrecht, 2004, 844 p.
- [35] Rades M. *Mechanical vibrations. Structural dynamic modeling*. Turin, 2010. 354 p.
- [36] Rao S. S. *Mechanical vibrations*. Harlow, 2018. 1295 p.
- [37] Shabana A. S. *Theory of vibration*. Chicago, 2019. 382 p.
- [38] Magnus K. *Vibrations*. London, 1965. 320 p.
- [39] Anderson J. C., Naeim F. *Basic structural dynamics*. Hoboken, 2012. 280 p.
- [40] Baddour N. *Recent advances in vibrations analysis*. Rijeka, 2011. 248 p.
- [41] Clough R. E., Penzien J. *Dynamics of Structures*. Berkeley, 1995. 752 p.
- [42] Weaver W., Timoshenko S. P., Young D. H., *Vibration Problems in Engineering*. New York, 1992. 624 p.

- [43] Shrikhande M. *FEM and computational structural dynamics*. New Delhi, 2008. 484 p.
- [44] Moaveni S. *Finite Element Analysis: Theory and Application with ANSYS*. London, 2015. 936 p.
- [45] Stolarski T., Nakasone Y., Yoshimoto S. *Engineering analysis with Ansys Software*. Oxford, 2018. 562 p.
- [46] Blevins R.D. *Formulas for dynamics, acoustics and vibration*. Chichester, 2016. 458 p.
- [47] Биргер И. А., Пановко Я. Г. *Прочность, устойчивость, колебания*. Т. 3. Москва: Машиностроение, 1988. 567 с. [Birger I. A., Panovko YA.G. *Strength, stability, vibrations*. Vol.3. Moskva: Mashinostroenie, 1988. 567 p. (in Russian)]
- [48] Baz A. M. *Active and passive vibration damping*. Chichester, 2019. 737 p.
- [49] Barez F. *Dynamic systems vibration and control*. San Jose, 2018. 283 p.
- [50] Beards C.F. *Structural vibration. Analysis and damping*. London, 1996. 287 p.
- [51] Genta G. *Vibration dynamics and control*. New York, 2009. 815 p.
- [52] Nashif A. D., Jones D. I.G., Henderson J. P. *Vibration damping*. New York, 1991. 480 p.
- [53] Thorby D. *Structural dynamics and vibration in practice*. London, 2008. 419 p.
- [54] Yao P.F. *Modeling and control in vibrational and structural dynamics*. Beijing, 2011. 417 p.
- [55] Богомолов С. И., Симсон Э. А. *Оптимизация механических систем в резонансных режимах*. Киев: Вища школа, 1983. 153 с. [Bogomolov S. I., Simson E. A. *Optimization of mechanical systems in resonant modes*. Kiev: Vishcha shkola, 1983. 153 p. (in Russian)]
- [56] Баничук Н. В., Иванова С. Ю., Шаранюк А. В. *Динамика конструкций. Анализ и оптимизация*. Москва: Наука, 1989. 268 с. [Banichuk N. V., Ivanova S.YU., SHaranyuk A. V. *Dynamics of structures. Analysis and Optimization*. Moskva: Nauka, 1989. 268 p. (in Russian)]
- [57] Хог Э., Арора Я. *Прикладное оптимальное проектирование. Механические системы и конструкции*. Москва: Мир, 1983. 478 с. [Hog E., Arora YA. *Applied optimal design. Mechanical systems and structures*. Moskva: Mir, 1983. 478 p. (in Russian)]
- [58] Rao S. S. *Engineering Optimization. Theory and Practice*. New York, 2009. 948 p.
- [59] Thomsen J. J. *Vibrations and stability*. New York, 2003. 420 p.
- [60] Timoshenko S. P., Gere J. M. *Theory of Elastic Stability*. New York, 2009. 560 p.
- [61] Алфутов Н. А., Колесников К. С. *Устойчивость движения и равновесия*. Москва: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. 256 с. [Alfutov N. A., Kolesnikov K. S. *Stability of motion and equilibrium*. Moskva: MGTU im. N. E. Baumana, 2003. 256 p. (in Russian)]
- [62] Kudryavtsev I. V., Brungardt M. V., Kudryavtseva Y. M., Kolotov A. V., Rabetskaya O. I. Boundary revision of a beam model for a thin-walled waveguide at bending vibration. *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, 1889(2), 022109.
- [63] Mityaev A. E., Kudryavtsev I. V., Khomutov M. P., Brungardt M. V., Kolotov A. V. Estimation of the minimum beam length for the static, dynamic, and stability problems. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, Vol. 1155, 012101.
- [64] Кудрявцев И. В. Обеспечение динамического состояния прямолинейных волноводных трактов при нагреве с помощью расстановки опор. *Вестник Московского авиационного института*, 2021, 4(28), 92-105. [Kudryavtsev I. V. Ensuring dynamic state of straight waveguide paths at heating by supports arrangement. *Aerospace MAI Journal*, 2021, 4(28), 92-105 p. (in Russian)].