Integrationsteori

Claesson, Tomas; Hörmander, Lars

1993

Document Version:
Annan version

Link to publication

Citation for published version (APA):
Claesson, T., & Hörmander, L. (1993). *Integrationsteori*. (2.1 uppl.)

Total number of authors:
2

INTEGRATIONSTEORI

Andra upplagan (v. 2.1)

Tomas Claesson **Lars Hörmander**

Matematiska Institutionen

Box 118, 221 00 Lund

Tomas Claesson, Lars Hörmander
Matematiska Institutionen
Lunds Universitet
Box 118
221 00 Lund

FÖRORD

Detta häfte är en bearbetning av ett kompendium baserat på en av författarnas föreläsningar vid Stockholms Högskola ht 1959. Kapitlen I–II i detta har varit en del av kursen för fyra betyg i fil. kand.-examen medan hela kompendiet ingått i fordringarna för licentiatexamen, åtminstone i Lund. Vi hoppas att kapitlen I–II i den nya versionen skall lämpa sig för en påbyggnadskurs (6 poäng) i fil. kand.-examen och att hela häftet skall passa till kurserna för doktorsexamen. På grund av oklarheten för närvarande beträffande grundkursernas innehåll har det inledande kapitlet om Riemannintegralen utökats så att tvåbetygskursen i integrationsteori inte förutsätts bekant. Problemsamlingen har också utökats med nyare tentamensproblem och seminarieuppgifter som förekommit i Lund. I ett appendix har vi samlat definitioner, beteckningar och anmärkningar som vi inte velat tynga huvudtexten med.

Urvalssatser för funktioner i L^p och mått behandlas lämpligare i samband med studiet av svaga topologier i dualrummet till ett Banachrum varför läsaren hänvisas till någon lärobok om funktionalanalys för sådana resultat. För en fylligare framställning hänvisas läsaren också till Bourbakis bok om integrationsteori vars uppläggning vi har följt i stort.

Lund i mars 1970

Tomas Claesson Lars Hörmander

FÖRORD TILL ANDRA UPPLAGAN

Den viktigaste förändringen i denna upplaga är att problemsamlingen kompletterats med ett representativt urval av tentamensproblem som givits i Lund under perioden 1970–1993. Anvisningarna till problemen har gjorts något utförligare, och de har placerats i grupper motsvarande olika avsnitt i texten för att underlätta självstudier. Givetvis är denna gruppering inte helt entydigt bestämd eftersom man i många fall kan tänka sig alternativa lösningar. Vidare har diskussionen i avsnitt 1.2 om gränsövergång under det Riemannska integraltecknet utökats med Arzelà-Osgoods sats, och avsnitt 2.10 har kompletterats med Rademachers sats. Slutligen har en kort historik om integralbegreppet tillfogats i kapitel IV.

Lund i november 1993

Tomas Claesson Lars Hörmander

Innehåll

KAPITEL 1

Riemannintegralen

1.1. Definition av Riemannintegralen

Vi betraktar här endast begränsade funktioner definierade i ett fixt ändligt *intervall* $I \subset \mathbf{R}^d$,

$$I = \{x; a_j \le x_j \le b_j,\ 1 \le j \le d\} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d].$$

(Med intervall menar vi alltid en sådan axelparallell parallellepiped.) Vi definierar måttet av I som

$$m(I) = \prod_1^d (b_j - a_j).$$

Måttet av andra intervall än I definieras analogt.

En funktion f i I kallas *sträckvis konstant* om I kan indelas i ändligt många intervall I_j så att f är konstant i det inre av varje intervall. Om $f = c_j$ i det inre av I_j sätter vi

$$\int_I f\,dx = \int_I f(x)\,dx = \sum c_j m(I_j).$$

Denna definition ändras ej om man använder en annan intervallindelning I'_k. Detta inses genast om man övergår till indelningen med intervallen $I'_k \cap I_j$ som är en förfining av båda indelningarna.

Vi inskränker oss till reellvärda funktioner och betecknar med T mängden av alla sträckvis konstanta funktioner i I. Integralen som vi har definierat på T har egenskaperna

$$\int_I f\,dx \ge 0, \quad \text{om } f \in T \text{ och } f \ge 0, \tag{1.1.1}$$

$$\int_I (af + bg)\,dx = a\int_I f\,dx + b\int_I g\,dx, \quad \text{om } f, g \in T \text{ och } a, b \in \mathbf{R}. \tag{1.1.2}$$

Om f är en begränsad reellvärd funktion på I så definierar vi *övre och undre Riemannintegralen* av f genom

$$\overline{\int_I} f\,dx = \inf_{f \le h \in T} \int_I h\,dx, \qquad \underline{\int_I} f\,dx = \sup_{f \ge h \in T} \int_I h\,dx. \tag{1.1.3}$$

Vi har då

$$\underline{\int_I} f\,dx \le \overline{\int_I} f\,dx. \tag{1.1.4}$$

För om $h_1 \le f \le h_2$ så är $h_2 - h_1 \ge 0$, och om $h_1, h_2 \in T$ så följer av (1.1.1) och (1.1.2) att

$$0 \le \int_I (h_2 - h_1)\,dx = \int_I h_2\,dx - \int_I h_1\,dx,$$

vilket bevisar påståendet.

Definition 1.1.1. f kallas *integrerbar i Riemanns mening* om

$$\underline{\int_I} f\,dx = \overline{\int_I} f\,dx.$$

Man definierar då $\int_I f\,dx$ som detta gemensamma värde och kallar det för integralen av f.

Definitionen kan också formuleras så: *f är integrerbar om till varje $\varepsilon > 0$ finns $h_1 \in T$ och $h_2 \in T$ så att $h_1 \leq f \leq h_2$ och*

$$\int_I (h_2 - h_1)\,dx < \varepsilon. \tag{1.1.5}$$

Varje kontinuerlig funktion i I är Riemannintegrerbar, för en sådan funktion är likformigt kontinuerlig. För varje $\varepsilon > 0$ är därför oscillationen av f i varje intervall I_j i en intervallindelning av I mindre än ε om intervallindelningen är tillräckligt fin, dvs maximala diametern är tillräckligt liten. Om vi definierar h_2 och h_1 i det inre av varje intervall som maximum respektive minimum av f över intervallet och sätter $h_1 = h_2 = f$ på intervallens ränder, så följer att $h_2 - h_1 < \varepsilon$, alltså

$$\int_I (h_2 - h_1)\,dx < \varepsilon\, m(I),$$

vilket bevisar (1.1.5). Eftersom $\int_I f\,dx$ ligger mellan $\int_I h_1\,dx$ och $\int_I h_2\,dx$ så är

$$|\int_I f\,dx - \int_I h_k\,dx| < \varepsilon m(I), \quad k = 1, 2,$$

vilket betyder att $\int_I h_k\,dx$ för $k = 1, 2$ konvergerar mot $\int_I f\,dx$ då indelningens finhet går mot 0. Om ξ_j är en godtycklig punkt i I_j har vi därför

$$\sum f(\xi_j) m(I_j) \to \int_I f\,dx$$

om f är kontinuerlig och indelningens finhet går mot 0.

Om a och b är reella icke negativa tal och f, g är begränsade reellvärda funktioner så har vi

$$\begin{aligned} \overline{\int_I} (af + bg)\,dx &\leq a \overline{\int_I} f\,dx + b \overline{\int_I} g\,dx, \\ \underline{\int_I} (af + bg)\,dx &\geq a \underline{\int_I} f\,dx + b \underline{\int_I} g\,dx. \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

(Verifiera detta som övning!) Om både f och g är Riemannintegrerbara är de högra sidorna lika och därför också de vänstra på grund av (1.1.4). Alltså är $af + bg$ Riemannintegrerbar. Eftersom det är självklart att $-f$ är Riemannintegrerbar om f är Riemannintegrerbar så har vi bevisat:

Sats 1.1.2. *Om f och g är Riemannintegrerbara och a, b är reella tal, så är $af + bg$ Riemannintegrerbar och*

$$\int_I (af + bg)\,dx = a \int_I f\,dx + b \int_I g\,dx. \tag{1.1.7}$$

Övning. Visa att om f *eller* g är Riemannintegrerbar så gäller likhet i (1.1.6). Visa också omvänt, att om f är begränsad och

$$\overline{\int_I}(f+g)\,dx = \overline{\int_I} f\,dx + \overline{\int_I} g\,dx$$

för alla begränsade g så måste f vara Riemannintegrerbar.

Vi har här utgått från de sträckvis konstanta funktionerna för att definiera integralen. Det är emellertid ofta bättre att arbeta med klassen $C = C(I)$ av kontinuerliga funktioner på I, sedan man väl definierat integralen för dem, ty

$$\overline{\int_I} f\,dx = \inf_{f\le h\in C}\int_I h\,dx, \qquad \underline{\int_I} f\,dx = \sup_{f\ge h\in C}\int_I h\,dx. \tag{1.1.3$'$}$$

För att bevisa detta observerar vi först att om $h \in C$ och $h \geq f$ så gäller att

$$\overline{\int_I} f\,dx \le \overline{\int_I} h\,dx = \int_I h\,dx.$$

Alltså är

$$\overline{\int_I} f\,dx \le \inf_{f\le h\in C}\int_I h\,dx.$$

För varje $\varepsilon > 0$ kan vi välja $g \in T$ begränsad med $g \geq f$ så att $\int_I g\,dx \leq \overline{\int}_I f\,dx + \varepsilon$. Till g kan vi finna en kontinuerlig funktion h, exempelvis styckvis lineär, så att $g \leq h$ och $\int_I h\,dx \leq \int_I g\,dx + \varepsilon$. Då är $f \leq h$ och $\int_I h\,dx \leq \overline{\int}_I f\,dx + 2\varepsilon$, vilket bevisar $(1.1.3)'$. Definitionen av Riemannintegrerbarhet kan därför också formuleras: *En funktion f i I är Riemannintegrerbar om och endast om till varje $\varepsilon > 0$ finns $h_j \in C(I)$ så att $h_1 \leq f \leq h_2$ och $\int_I(h_2 - h_1)\,dx < \varepsilon$.* Observera att denna definition alltid är användbar så snart man på ett eller annat sätt definierat $\int_I f\,dx$, $f \in C(I)$, så att (1.1.1) och (1.1.2) gäller.

Övning. Visa att f är Riemannintegrerbar om och endast om till varje $\varepsilon > 0$ finns $g \in C(I)$ så att $\overline{\int}_I |f-g|\,dx < \varepsilon$.

Övning. Bevisa : För varje begränsad funktion i I gäller att

$$\sum(\sup_{I_j} f)m(I_j) \to \overline{\int_I} f\,dx \quad \text{och} \quad \sum(\inf_{I_j} f)m(I_j) \to \underline{\int_I} f\,dx$$

då finheten för indelningen (I_j) av I går mot 0. (Ledning: Använd att vi känner påståendet för kontinuerliga funktioner.)

Av den nu utvecklade integrationsteorin får man också en metod att mäta volymen — måttet — av delmängder E av intervallet I. Om χ_E är karakteristiska funktionen för E (se appendix) så kallar vi övre (undre) Riemannintegralen av χ_E för *yttre (inre) Jordanmåttet* för E och använder beteckningen $\overline{m}(E)$ ($\underline{m}(E)$). Om χ_E är Riemannintegrerbar säger man att E är *Jordanmätbar* och använder beteckningen $m(E)$ för $\int \chi_E\,dx$. Vi skriver också

$$\overline{\int_E} f\,dx = \overline{\int_I} \chi_E f\,dx.$$

En ändlig mängd är uppenbart Jordanmätbar med måttet noll. Däremot behöver en uppräknelig delmängd av I inte ens vara Jordanmätbar:

EXEMPEL. Låt E vara mängden av alla punkter med rationella koordinater i ett givet intervall I. Eftersom varje öppet delintervall av I skär både E och dess komplement så ger definitionen direkt att $\overline{m}(E) = m(I)$ och $\underline{m}(E) = 0$.

Vidare behöver en Jordanmätbar mängd med måttet noll inte vara uppräknelig. För $d \geq 2$ är detta självklart, och för $d = 1$ visas det av följande konstruktion av Cantor:

EXEMPEL. Starta med $E_0 = [0, 1]$ och bilda

$$E_1 = E_0 \setminus (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}) = [0, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, 1].$$

Upprepa proceduren för vart och ett av de två delintervallen, dvs tag bort den öppna tredjedelen i mitten av vart och ett så att vi får kvar

$$E_2 = [0, \tfrac{1}{9}] \cup [\tfrac{2}{9}, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, \tfrac{7}{9}] \cup [\tfrac{8}{9}, 1].$$

Genom upprepning av konstruktionen får vi efter n steg en mängd E_n som består av 2^n slutna intervall av längden 3^{-n}. *Cantormängden* $E_\infty = \cap_1^\infty E_n$ är då en kompakt mängd som är Jordanmätbar med måttet noll, ty $0 \leq \overline{m}(E_\infty) \leq m(E_n) = (2/3)^n$ för alla n, vilket medför $\overline{m}(E_\infty) = 0$. Vidare är E_∞ inte uppräknelig, eftersom E_∞ består av de tal x som kan skrivas

$$x = \sum_1^\infty x_n/3^n, \quad \text{där } x_n = 0 \text{ eller } x_n = 2,$$

och denna framställning är entydig. (Imitera beviset för att $\mathbf{R}$ inte är uppräknelig.)

Vi visar slutligen en enkel sats om gränsövergång under integraltecknet:

SATS 1.1.3. *Låt f_n, $n = 1, 2, \dots$ vara Riemannintegrerbara funktioner i I, och antag att f_n konvergerar likformigt i I mot en funktion f då $n \to \infty$. Då är f också Riemannintegrerbar och*

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n \, dx = \int_I f \, dx. \tag{1.1.8}$$

BEVIS. Om $\varepsilon > 0$ så gäller för stora n att

$$f_n - \varepsilon \leq f \leq f_n + \varepsilon.$$

Vi har därför

$$\int_I f_n \, dx - \varepsilon m(I) \leq \underline{\int_I} f \, dx \leq \overline{\int_I} f \, dx \leq \int_I f_n \, dx + \varepsilon m(I).$$

Eftersom ytterleden skiljer sig med $2\varepsilon m(I)$ och ε är ett godtyckligt positivt tal så måste mellanleden vara lika, vilket betyder att f är Riemannintegrerbar. Vi får

$$\Big| \int_I f \, dx - \int_I f_n \, dx \Big| \leq \varepsilon m(I),$$

vilket medför (1.1.8). $\square$

1.2. Integration av positiva serier

Om a_{nm}, $n, m = 1, 2, \dots$, är en dubbelföljd med icke negativa termer så gäller som bekant alltid

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nm};$$

om ena sidan har mening (är ändlig) så har också den andra det, och likhet gäller. Detta följer genast av att summan av en positiv serie är supremum av dess ändliga delsummor.

Om den ena summationen (eller båda) utbyts mot en integration är emellertid situationen inte lika tillfredsställande såvida man bara har tillgång till Riemannintegralen. Bristerna i följande sats är en huvudmotivering för införandet av Lebesgueintegralen.

Sats 1.2.1. *Låt u_n vara icke negativa Riemannintegrerbara funktioner i I. Då gäller*

$$\underline{\int}_I \Big(\sum_1^{\infty} u_n\Big)\, dx = \sum_1^{\infty} \int_I u_n\, dx. \tag{1.2.1}$$

Det kan emellertid inträffa att $\sum_1^\infty u_n$ ej är Riemannintegrerbar även om alla u_n är kontinuerliga och $\sum_1^\infty u_n$ är begränsad.

Observera att undre integralen är väldefinierad för varje funktion som är nedåt begränsad. — Det väsentliga steget i beviset är , som vi därför ger som ett särskilt lemma.

Lemma 1.2.2. *Om f_n är kontinuerliga icke negativa funktioner i I och $f_n(x) \downarrow 0$ för varje $x \in I$ då $n \to \infty$, så går f_n mot 0 likformigt, vilket medför att*

$$\int_I f_n\, dx \to 0. \tag{1.2.2}$$

Bevis. Låt $\varepsilon > 0$. För varje $x \in I$ kan vi finna ett tal N så att $f_N(x) < \varepsilon$. Eftersom f_N är kontinuerlig så följer det att $f_N(y) < \varepsilon$ för alla y i en omgivning O_x till x, alltså $f_n(y) < \varepsilon$ om $n \ge N$ och $y \in O_x$ eftersom följden är monoton. Då I är kompakt kan vi enligt Borel-Lebesgues lemma övertäcka I med ändligt många omgivningar O_x. Alltså är $f_n < \varepsilon$ i I då n är tillräckligt stort, vilket fullbordar beviset. □

Bevis för sats 1.2.1. Eftersom

$$\underline{\int}_I \Big(\sum_1^{\infty} u_n\Big)\, dx \ge \int_I \Big(\sum_1^{N} u_n\Big)\, dx = \sum_1^{N} \int_I u_n\, dx \to \sum_1^{\infty} \int_I u_n\, dx \quad \text{då } N \to \infty$$

så gäller det att uppskatta vänsterledet uppåt. Låt H vara en kontinuerlig funktion med $H \le \sum_1^\infty u_n$, och välj för givet $\varepsilon > 0$ kontinuerliga funktioner h_n så att

$$h_n \ge u_n, \quad \int_I h_n\, dx \le \int_I u_n\, dx + \varepsilon/2^n.$$

Då är $\sum_1^\infty h_n(x) \ge H(x)$ för varje x. Eftersom $h_n \ge 0$ följer att

$$f_n(x) = \max(H(x) - \sum_1^{n} h_k(x), 0) \downarrow 0,$$

och enligt lemma 1.2.2 medför det att $\int_I f_n\,dx \to 0$. Nu är

$$\int_I f_n\,dx \geq \int_I H\,dx - \sum_1^n \int_I h_k\,dx \geq \int_I H\,dx - \sum_1^n \int_I u_k\,dx - \varepsilon.$$

Då $n \to \infty$ får vi $\int_I H\,dx \leq \sum_1^\infty \int_I u_k\,dx + \varepsilon$, alltså

$$\underline{\int}_I \Big(\sum_1^\infty u_n\Big)\,dx \leq \sum_1^\infty \int_I u_k\,dx + \varepsilon,$$

vilket bevisar (1.2.1) eftersom ε är ett godtyckligt positivt tal.

Det återstår nu endast att ge ett exempel på det sista påståendet. Om man inte nödvändigtvis vill ha funktionerna u_n kontinuerliga så kan man helt enkelt numrera alla punkter i I med rationella koordinater i en svit $r_1, r_2, \ldots$ och sätta $u_n(x) = 0$ för $x \neq r_n$, $u_n(r_n) = 1$. För att uppnå kontinuitet modifierar vi ansatsen en smula. Låt f_n vara en kontinuerlig funktion sådan att

$$0 \leq f_n \leq 1, \quad f_n(r_n) = 1, \quad \int_I f_n\,dx \leq m(I)/2^{n+1},$$

och sätt $u_n = f_n(1-f_1)\ldots(1-f_{n-1})$. Då får vi

$$\sum_1^n u_k = 1 - (1-f_1)\ldots(1-f_n) \leq 1,$$

varför $\sum_1^\infty u_k(x) \leq 1$ med likhet i alla rationella punkter. Alltså gäller att

$$\overline{\int}_I \Big(\sum_1^\infty u_k\Big)\,dx = m(I),$$

medan (1.2.1) ger

$$\underline{\int}_I \Big(\sum_1^\infty u_k\Big)\,dx = \sum_1^\infty \int_I u_k\,dx \leq m(I)/2.$$

Alltså är $\sum_1^\infty u_k$ inte Riemannintegrerbar, vilket fullbordar beviset. □

Sats 1.2.1 antyder en lucka i integralbegreppet. Integralen av den oändliga seriens summa borde ha mening så att (1.2.1) gäller med "integral" på båda sidor. Vi skall se i nästa kapitel hur man kan utvidga integralbegreppet så att sats 1.2.1 blir perfekt, men vi visar nu hur beviset för sats 1.2.1 kan modifieras så att det ger det bästa resultat om gränsövergång under integraltecknet som gäller för Riemannintegralen. Vi behöver ett enkelt lemma:

Lemma 1.2.3. *Antag att f_1, f_2 är begränsade funktioner i I, att $g_1, g_2 \in C(I)$ och att*

$$g_i \geq f_i, \quad \int_I g_i\,dx \leq \overline{\int}_I f_i\,dx + \varepsilon_i, \quad i = 1,2.$$

Om $f_1 \leq f_2$ så gäller då

$$\int_I \max(g_1, g_2)\,dx \leq \overline{\int}_I f_2\,dx + \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

BEVIS. Av formeln $\max(g_1, g_2) + \min(g_1, g_2) = g_1 + g_2$ får vi

$$\int_I \max(g_1, g_2)\,dx + \int_I \min(g_1, g_2)\,dx = \int_I g_1\,dx + \int_I g_2\,dx$$
$$\leq \overline{\int_I} f_1\,dx + \varepsilon_1 + \overline{\int_I} f_2\,dx + \varepsilon_2.$$

Härav följer påståendet eftersom $f_1 = \min(f_1, f_2) \leq \min(g_1, g_2)$. $\square$

SATS 1.2.4. *Om f_n är en likformigt begränsad följd av funktioner i I så gäller*

$$\underline{\int_I} \varliminf_{n\to\infty} f_n\,dx \leq \varliminf_{n\to\infty} \overline{\int_I} f_n\,dx \tag{1.2.3}$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} \underline{\int_I} f_n\,dx \leq \overline{\int_I} \varlimsup_{n\to\infty} f_n\,dx. \tag{1.2.4}$$

Om $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existerar för alla $x \in I$ och f såväl som alla f_n är Riemannintegrerbara så följer att

$$\int_I \lim_{n\to\infty} f_n\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n\,dx. \tag{1.2.5}$$

BEVIS. Om (1.2.3) tillämpas på följden $-f_n$ så erhålls (1.2.4). Det räcker därför att bevisa (1.2.3). Antag först att följden f_n är växande. Tag $\varepsilon > 0$ och välj $g_n \in C(I)$ så att $f_n \leq g_n$ och

$$\int_I g_n\,dx \leq \overline{\int_I} f_n\,dx + \varepsilon/2^n.$$

Eftersom följden g_n inte behöver vara växande så sätter vi

$$g_n' = \max(g_1, \dots, g_n) = \max(g_{n-1}', g_n).$$

Då ger upprepad användning av lemma 1.2.3 att

$$\int_I g_n'\,dx \leq \overline{\int_I} f_n\,dx + \sum_1^n \varepsilon/2^k < \overline{\int_I} f_n\,dx + \varepsilon.$$

Om nu $G \in C(I)$ och $G \leq \lim f_n$ så följer att

$$h_n = \max(G(x) - g_n'(x), 0) \downarrow 0,$$

och enligt lemma 1.2.2 medför det att $\int_I h_n\,dx \to 0$, vilket ger

$$\int_I G\,dx - \int_I g_n'\,dx = \int_I (G - g_n')\,dx \leq \int_I h_n\,dx \to 0, \quad \text{då } n \to \infty.$$

Alltså är $\int_I G\,dx \leq \lim \overline{\int}_I f_n\,dx + \varepsilon$, och eftersom ε är ett godtyckligt positivt tal och G är en godtycklig kontinuerlig minorant till $\lim f_n$ så följer (1.2.3) för växande följder

För en allmän följd f_n inför vi följden $F_n = \inf_{j\geq n} f_j$, som växer mot $\varliminf f_n$. Det redan bevisade specialfallet av (1.2.3) ger nu

$$\underline{\int_I} \varliminf_{n\to\infty} f_n\,dx \leq \lim_{n\to\infty} \overline{\int_I} F_n\,dx \leq \lim_{n\to\infty} \inf_{j\geq n} \overline{\int_I} f_j\,dx = \varliminf_{n\to\infty} \overline{\int_I} f_j\,dx,$$

vilket fullbordar beviset. $\square$

Det är lätt att inse att det räcker att anta att $f_n(x) \to f(x)$ för alla x utom i en mängd av Jordanmått noll. Den sista delen av Sats 1.2.4 brukar kallas Osgoods sats, men den bevisades först av Arzelà.

1.3. Upprepad integration

Låt I (resp. J) vara ett intervall i $\mathbf{R}^d$ (resp. $\mathbf{R}^e$), där vi betecknar variablerna med x (resp. y). Då är

$$I \times J = \{(x,y); x \in I, y \in J\}$$

ett intervall i $\mathbf{R}^{d+e}$. Låt nu f vara en begränsad reellvärd funktion på $I \times J$. Vi påstår att

$$\overline{\int_I}\Big(\overline{\int_J} f(x,y)\,dy\Big)\,dx \le \overline{\iint_{I\times J}} f(x,y)\,dx\,dy, \tag{1.3.1}$$

$$\underline{\int_I}\Big(\underline{\int_J} f(x,y)\,dy\Big)\,dx \ge \underline{\iint_{I\times J}} f(x,y)\,dx\,dy. \tag{1.3.2}$$

Här har vi i vänsterledet övre (resp. undre) integralen av f betraktad som funktion av y för fixt $x \in I$, vilket ger en funktion av x som integreras på samma sätt över I. I högerledet har vi en integral av f betraktad som funktion på $I \times J$. För att bevisa (1.3.1) observerar vi att olikheterna uppenbarligen gäller som likheter om f är sträckvis konstant, för om I_j (resp. J_k) är intervall $\subset I$ (resp. $\subset J$) så är $m(I_j)m(J_k) = m(I_j \times J_k)$ enligt definitionen av måttet för ett intervall. Om nu h är en sträckvis konstant funktion med $f \le h$ så har vi

$$\overline{\int_I}\Big(\overline{\int_J} f(x,y)\,dy\Big)\,dx \le \overline{\int_I}\Big(\overline{\int_J} h(x,y)\,dy\Big)\,dx = \iint_{I\times J} h(x,y)\,dx\,dy,$$

och enligt definition av övre integralen är infimum av högerledet över alla sådana h lika med högerledet i (1.3.1). Detta bevisar (1.3.1), och (1.3.2) följer på samma sätt eller genom användning av (1.3.1) på $-f$.

Låt oss speciellt anta att f är en kontinuerlig funktion på $I \times J$. Då är f likformigt kontinuerlig vilket medför att

$$I(x) = \int_J f(x,y)\,dy$$

är en kontinuerlig funktion av x. För om $x_n \in I$ och $x_n \to x$ så följer att $f(x_n, y)$ går likformigt mot $f(x,y)$ betraktad som funktion av y, alltså $I(x_n) \to I(x)$ enligt sats 1.1.3. Över- och underintegralerna i (1.3.1) och (1.3.2) kan därför utbytas mot integraler, och av de två motsatta olikheterna följer:

Sats 1.3.1. *Om f är en kontinuerlig funktion i $I \times J$ så gäller*

$$\int_I \Big(\int_J f(x,y)\,dy\Big)\,dx = \iint_{I\times J} f(x,y)\,dx\,dy, \tag{1.3.3}$$

och integralen med avseende på y i vänsterledet är en kontinuerlig funktion av x.

Vi skall nu beröra situationen för allmänna Riemannintegrerbara funktioner f men endast helt kort eftersom det även i detta fall krävs en utvidgning av integralbegreppet för att satserna skall bli helt tillfredsställande. Antag alltså att f är Riemannintegrerbar i $I \times J$. Av (1.3.1), (1.3.2) följer att

$$\begin{aligned}(1.3.4)\qquad \iint_{I\times J} f(x,y)\,dx\,dy &\le \underline{\int}_I \Big(\underline{\int}_J f(x,y)\,dy\Big)\,dx \\ &\le \overline{\int}_I \Big(\underline{\int}_J f(x,y)\,dy\Big)\,dx \le \iint_{I\times J} f(x,y)\,dx\,dy,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1.3.5)\qquad \iint_{I\times J} f(x,y)\,dx\,dy &\le \underline{\int}_I \Big(\overline{\int}_J f(x,y)\,dy\Big)\,dx \\ &\le \overline{\int}_I \Big(\overline{\int}_J f(x,y)\,dy\Big)\,dx \le \iint_{I\times J} f(x,y)\,dx\,dy.\end{aligned}$$

Eftersom ytterleden är lika drar vi slutsatsen att funktionerna

$$x \mapsto \overline{\int}_J f(x,y)\,dy, \quad \text{och } x \mapsto \underline{\int}_J f(x,y)\,dy$$

är Riemannintegrerbara över I och att

$$(1.3.6)\qquad \iint_{I\times J} f(x,y)\,dx\,dy = \int_I \Big(\overline{\int}_J f(x,y)\,dy\Big)\,dx,$$

$$(1.3.7)\qquad \iint_{I\times J} f(x,y)\,dx\,dy = \int_I \Big(\underline{\int}_J f(x,y)\,dy\Big)\,dx.$$

Exempel. Låt $I = J = [0,1] \subset \mathbf{R}$ och sätt $g(x) = 1/q$ då $x = p/q$ med relativt prima positiva heltal p och q, och $g(x) = 0$ för andra $x \in I$. Låt vidare $h(y) = 1$ då y är rationellt och $h(y) = 0$ då y är irrationellt. Då är

$$\int_I g(x)\,dx = 0 \quad \text{medan} \ \overline{\int}_J h\,dy = 1 \text{ och } \underline{\int}_J h\,dy = 0.$$

Sätt $f(x,y) = g(x)h(y)$. Eftersom $0 \le f(x,y) \le g(x)$ ser man genast att f är Riemannintegrerbar över $I \times J$ med integralen noll. Men

$$\overline{\int}_J f(x,y)\,dy - \underline{\int}_J f(x,y)\,dy = g(x),$$

och $g(x) \ne 0$ om x är rationellt. Integralen $\int_J f(x,y)\,dy$ är alltså inte definierad för dessa x, så (1.3.3) är i allmänhet inte väldefinierad.

Övning. Visa att om $f(x,y) = g(x)h(y)$ där g och h är godtyckliga icke negativa begränsade funktioner så gäller likhet i (1.3.1) och (1.3.2). Speciellt kan vi ta g och h som karakteristiska funktioner, vilket ger att

$$\overline{m}(E \times F) = \overline{m}(E)\overline{m}(F), \quad \text{om } E \subset I \text{ och } F \subset J.$$

I denna övning är förutsättningen $g, h \ge 0$ väsentlig, vilket framgår av följande:

Övning. Låt $I = [0,1]$, $J = [0,2]$, och definiera för $x \in I$ och $y \in J$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } x \text{ är rationellt} \\ -x & \text{om } x \text{ är irrationellt} \end{cases}, \quad h(y) = \begin{cases} -1 & \text{om } y \text{ är rationellt} \\ y & \text{om } y \text{ är irrationellt} \end{cases}.$$

Sätt $f(x,y) = g(x)h(y)$ och visa att de tre integralerna

$$\overline{\iint_{I\times J}} f(x,y)\,dx\,dy, \quad \overline{\int_I}\Big(\overline{\int_J} f(x,y)\,dy\Big)\,dx, \quad \overline{\int_J}\Big(\overline{\int_I} f(x,y)\,dx\Big)\,dy,$$

alla är olika.

1.4. Variabelsubstitution

För att undvika komplicerade beteckningar är det nu praktiskt att införa något förändrade konventioner. Vi betecknar med C_0 mängden av alla kontinuerliga funktioner på $\mathbf{R}^d$ med kompakt stöd, och med C_0^+ mängden av icke negativa funktioner i C_0. Om $f \in C_0$ så har Riemannintegralen

$$\int_I f\,dx$$

samma värde för varje intervall som omfattar stödet för f. Vi betecknar detta värde med $\int f\,dx$ och kallar det för integralen av f över hela rummet $\mathbf{R}^d$. För en godtycklig begränsad funktion på $\mathbf{R}^d$ med kompakt stöd definierar vi (övre och undre) Riemannintegralen på motsvarande sätt.

I avsnitt 1.1 har vi visat att

$$\int (af+bg)\,dx = a\int f\,dx + b\int g\,dx; \quad a,b \in \mathbf{R},\ f,g \in C_0. \tag{1.4.1}$$

$$\int f\,dx \geq 0 \quad \text{om } f \in C_0^+. \tag{1.4.2}$$

Integralen är *translationsinvariant*:

$$\int f\,dx = \int f_h\,dx, \quad f \in C_0,\ h \in \mathbf{R}^d, \quad \text{där } f_h(x) = f(x-h). \tag{1.4.3}$$

(Vi skall senare visa att egenskaperna (1.4.1)–(1.4.3) väsentligen karakteriserar integralen.) Om $A : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ är en inverterbar lineär transformation så skall vi nu visa att

$$|\det A| \int A^*f\,dx = \int f\,dx, \ f \in C_0, \quad \text{där } A^*f(x) = f(Ax). \tag{1.4.4}$$

Om $d = 1$ så är $Ax = ax$ där $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Då f är karakteristiska funktionen för intervallet $I = \{x \in \mathbf{R}; b \leq x \leq c\}$, så är A^*f karakteristiska funktionen för intervallet $\{x; b \leq ax \leq c\}$ som har måttet $m(I)/|a|$, vilket ger (1.4.4) då $d = 1$. Antag nu att $d > 1$ och att (1.4.4) redan bevisats för dimensionen $d-1$. Om $A = (a_{jk})$ där $a_{j1} = 0$ då $j \neq 1$ och vi sätter $A' = (a_{jk})_{j,k=2}^n$ så blir $\det A = a_{11}\det A'$. Sats 1.3.1 och translationsinvariansen i x_1 ger med beteckningen

$x' = (x_2, \dots, x_n)$

$$\int A^* f(x)\, dx = \int dx' \int f(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, A'x')\, dx_1 = \int dx' \int f(x_1, A'x') dx_1/|a_{11}|$$
$$= \int dx_1 \int f(x_1, A'x')\, dx'/|a_{11}| = \int dx_1 \int f(x_1, x')\, dx'/(|a_{11}||\det A'|).$$

Eftersom integralen inte beror på koordinaternas ordningsföljd har vi därmed bevisat (1.4.4) då en kolonn bara innehåller diagonalelementet. Genom omnumrering av koordinaterna kan vi alltid uppnå att $a_{11} \neq 0$ och kan då skriva $A = BC$ där $B = (b_{jk})$, $C = (c_{jk})$, med

$$b_{jj} = 1, b_{j1} = a_{j1}/a_{11},\ j = 1, \dots, d;\quad c_{1k} = a_{1k},\ c_{jk} = a_{jk} - a_{j1}a_{1k}/a_{11},\ 1 \le j, k \le d,\ j \neq 1,$$

och övriga element i B är 0. (Detta är första steget i en Gausselimination.) Då är (1.4.4) redan bevisad för B och för C, och vi får

$$|\det A| \int A^* f\, dx = |\det B||\det C| \int C^*(B^* f)\, dx = |\det B| \int B^* f\, dx = \int f\, dx,$$

vilket bevisar (1.4.4) allmänt. Speciellt ser vi att integralen bevaras då A är en *ortogonal transformation*, dvs $\|Ax\| = \|x\|$, $x \in \mathbf{R}^d$, för då är $\det A = \pm 1$.

Formeln (1.4.4) gäller naturligtvis också för övre och undre Riemannintegralen om f är begränsad med kompakt stöd, vilket visar att $A^* f$ är Riemannintegrerbar om och endast om f är det. Speciellt kan vi ta $f = 1$ i bilden $A(I) = \{Ax; x \in I\}$ av ett intervall $I \subset \mathbf{R}^d$. Då säger (1.4.4) att $A(I)$ är Jordanmätbar och att $m(A(I)) = |\det A| m(I)$. Vi har alltså strängt verifierat determinantens tolkning som volymsförhållande. Observera att formeln $m(A(I)) = |\det A| m(I)$ också gäller om $\det A = 0$. Då ligger nämligen $A(I)$ i ett hyperplan som genom ortogonal transformation (vilket inte påverkar mätbarhet eller mått) kan överföras i koordinatplanet $x_d = 0$, och då är det klart att $m(A(I)) = 0$.

Normen av A definieras av

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \|Ax\|/\|x\|,$$

där $\|x\| = (\sum_1^d x_j^2)^{\frac{1}{2}}$ är den euklidiska normen. Om $\det A \neq 0$ och vi tillämpar (1.4.4) med A ersatt av $A/\|A\|$ och en funktion $f \in C_0^+$ som är en avtagande funktion av $\|x\|$, så följer att $1 \ge |\det(A/\|A\|)| = |\det A|/\|A\|^d$, för $f(Ax/\|A\|) \ge f(x)$. Volymen av $A(I)$ är därför alltid högst $\|A\|^d m(I)$. Om I är en kub med sidan δ och centrum x^0, så är $A(I)$ innehållen i kuben med sidan $\delta\sqrt{d}\|A\|$ och centrum Ax^0, ty avståndet från en punkt i I till x^0 är högst $\frac{1}{2}\delta\sqrt{d}$. Denna enkla observation ger den grova uppskattningen $m(A(I)) \le (\delta\sqrt{d})^d \|A\|^d$, och vi skall också använda den i beviset för följande lemma som är viktigt vid utvidgningen av (1.4.4) till icke lineära avbildningar.

LEMMA 1.4.1. *Låt A vara en reell $d \times d$ matris, låt I vara en kub i $\mathbf{R}^d$ med sidan δ, och låt $A(I)_\eta$ vara mängden av punkter med avstånd $\le \eta$ till $A(I)$. Då är*

$$\overline{m}(A(I)_\eta) \le \delta^d |\det A| + 4d\eta(2\eta + \delta\sqrt{d-1}\|A\|)^{d-1}. \tag{1.4.5}$$

BEVIS. Om ∂I är randen av I så är $A(\partial I)$ lika med randen av $A(I)$. Detta är klart om $\det A \neq 0$ eftersom inre punkter i I då avbildas i inre punkter i $A(I)$. Om $\det A = 0$ så finns å andra sidan genom varje punkt i I en linje som av A avbildas på en enda punkt, och denna linje måste skära ∂I så vi får till och med $A(I) = A(\partial I)$ i så fall. Om x är en punkt med avstånd $\leq \eta$ från $A(I)$ och x inte tillhör $A(I)$ så måste x därför ha avstånd $\leq \eta$ från någon punkt i $A(\partial I)$. (Rita figur för fallet $d = 2$!) Eftersom måttet av $A(I)$ är $\delta^d |\det A|$ räcker det därför att visa att yttre Jordanmåttet av mängden av punkter med avstånd $\leq \eta$ från $A(I')$ är högst $2\eta(2\eta + \delta\sqrt{d-1}\|A\|)^{d-1}$, om I' är en $(d-1)$-dimensionell sida i I, för ∂I är unionen av $2d$ sådana sidor i I. På grund av den ortogonala invariansen och translationsinvariansen kan vi anta att $A(I')$ ligger i hyperplanet $x_d = 0$, i en $(d-1)$-dimensionell kub med sida $\leq \delta\sqrt{d-1}\|A\|$. Om $x = (x', x_d)$ har avstånd $\leq \eta$ till $A(I')$ så måste $(x', 0)$ ha avstånd $\leq \eta$ till $A(I')$ och $|x_d| \leq \eta$, så x ligger i produkten av en $(d-1)$-dimensionell kub i planet $x_d = 0$ med sidan $2\eta + \delta\sqrt{d-1}\|A\|$ och ett 1-dimensionellt intervall på x_d-axeln av längden 2η. Det yttre måttet av denna mängd är högst

$$2\eta(2\eta + \delta\sqrt{d-1}\|A\|)^{d-1},$$

vilket bevisar lemmat. □

Vi kan nu studera allmänna kontinuerligt deriverbara avbildningar. Till en början förutsätter vi inte att de är bijektiva.

Sats 1.4.2. *Låt O_1 och O_2 vara öppna mängder i $\mathbf{R}^d$ och låt $\Phi : O_1 \to O_2$ vara en kontinuerligt deriverbar avbildning. Om K är en kompakt delmängd av O_1 så är*

$$\overline{\int}_{\Phi(K)} u\,dx \leq \overline{\int}_K u(\Phi(x))|\det \Phi'(x)|\,dx, \quad u \in C_0(O_2),\ u \geq 0. \tag{1.4.6}$$

Här har vi använt beteckningen $\Phi'(x) = (\partial\Phi_j(x)/\partial x_k)$ då $\Phi(x) = (\Phi_1(x), \dots, \Phi_d(x))$. Före beviset observerar vi en viktig konsekvens av satsen då $\det \Phi'(x) = 0$ för $x \in K$.

Följdsats 1.4.3 (Morse-Sard). *Under förutsättningarna i sats 1.4.2 har mängden av kritiska värden $\{\Phi(x); x \in K, \det \Phi'(x) = 0\}$ Jordanmåttet 0.*

Observera att detta betyder att för de flesta val av $y \in O_2$ kan man av implicita funktionssatsen dra slutsatsen att $\{x; x \in K, \Phi(x) = y\}$ består av ändligt många punkter och att Φ är bijektiv på en omgivning av var och en av dessa.

Bevis för sats 1.4.2. Låt ε vara ett godtyckligt tal > 0. Om I är en kub med sidan δ som råkar K och om δ är tillräckligt litet, så följer av likformig kontinuitet för Φ' och Taylors formel att

$$\|\Phi(x) - \Phi_y(x)\| \leq \varepsilon\delta; \quad x, y \in I.$$

Här är $\Phi_y(x) = \Phi(y) + \Phi'(y)(x-y)$ den lineära termen i Taylors formel. Detta betyder med beteckningarna i lemma 1.4.1 att

$$\Phi(I) \subset (\Phi_y(I))_{\varepsilon\delta}.$$

Alltså har vi för en lämplig konstant C

$$\overline{m}(\Phi(I)) \leq \delta^d|\det \Phi'(y)| + C\varepsilon\delta^d = m(I)(|\det \Phi'(y)| + C\varepsilon).$$

Välj nu en övertäckning av K med små kuber I_j utan gemensamma inre punkter och i varje kub I_j en punkt $y_j \in K \cap I_j$ där $u(\Phi(y))$ antar sitt maximum. Då är

$$\chi_{\Phi(K)} u \leq \sum \chi_{\Phi(I_j)} u(\Phi(y_j)),$$

där som vanligt χ_E betecknar karakteristiska funktionen för mängden E. Vi får alltså

$$\overline{\int} \chi_{\Phi(K)} u\,dx \leq \sum m(I_j)(|\det \Phi'(y_j)| + C\varepsilon)u(\Phi(y_j)).$$

Vi kan välja indelningen så att högerledet är godtyckligt nära

$$\overline{\int_K} u(\Phi(x))|\det \Phi'(x)|\,dx,$$

vilket bevisar satsen. □

Det är nu lätt att få den vanliga satsen om variabeltransformation i en multipelintegral.

Sats 1.4.4. *Låt O_1 och O_2 vara öppna mängder i $\mathbf{R}^d$ och låt Φ vara en bijektiv avbildning av O_1 på O_2 sådan att både Φ och Φ^{-1} är kontinuerligt deriverbara. Om u är en begränsad funktion med kompakt stöd i O_2 så är $\Phi^* u = u \circ \Phi$ Riemannintegrerbar om och endast om u är det, och vi har då*

$$\int \Phi^* u |\det \Phi'|\,dx = \int u\,dx. \tag{1.4.7}$$

Bevis. Om $\Phi_1 = \Phi^{-1}$ så är enligt kedjeregeln $|\det \Phi'(\Phi_1(x))||\det \Phi_1'(x)| = 1$, $x \in O_2$. Om vi använder (1.4.6) på Φ_1 också, med u ersatt av $u(\Phi(x))|\det \Phi'(x)|$, och tar K så stor att $u = 0$ utanför $\Phi(K)$ så får vi därför

$$\overline{\int} u\,dx \leq \overline{\int} u(\Phi(x))|\det \Phi'(x)|\,dx \leq \overline{\int} u\,dx,$$

om $u \in C_0(O_2)$ och $u \geq 0$, varför likhet måste gälla. För övrigt är integranderna här kontinuerliga så Riemannintegralerna existerar. Detta bevisar (1.4.7) först då u är kontinuerlig och ≥ 0, därefter på grund av lineariteten för alla $u \in C_0$. Som vanligt följer sedan att (1.4.7) gäller för övre resp. undre Riemannintegralen när u är begränsad och noll utanför en kompakt mängd $\subset O_2$, och detta bevisar satsen. □

Det vore nu lätt att utvidga definitionen av Riemannintegralen till funktioner som inte nödvändigtvis har kompakt stöd och utvidga sats 1.4.4 till det fallet. Eftersom vårt huvudmål är studiet av Lebesgueintegralen nöjer vi oss med några korta antydningar och lämnar detaljerna åt den intresserade läsaren. Vi definierar integralen av en godtycklig icke negativ kontinuerlig funktion f på en öppen mängd O som

$$\int_O f\,dx = \sup_{0 \leq g \leq f,\ g \in C_0(O)} \int g\,dx.$$

Detta kan naturligtvis vara $+\infty$, men det är klart att definitionen överensstämmer med den gamla om $f \in C_0(O)$. För en funktion $f \geq 0$ som är lokalt begränsad på O, dvs begränsad på varje kompakt delmängd av O, sätter vi nu

$$\overline{\int_O} f\,dx = \inf_{f \leq g \in C(O)} \int_O g\,dx.$$

(Sådana funktioner g existerar!) En lokalt begränsad funktion på O kallas nu Riemannintegrerbar om till varje $\varepsilon > 0$ finns en funktion $g \in C_0(O)$ med $\overline{\int_O} |f - g|\,dx < \varepsilon$, och integralen definieras soms gränsvärdet av $\int g\,dx$ då $\varepsilon \to 0$. (Detta existerar och är entydigt.) Med detta integralbegrepp får man genast en utvidgning av sats 1.4.4 till godtyckliga lokalt begränsade Riemannintegrerbara funktioner.

Slutligen skall vi visa att egenskaperna (1.4.1)–(1.4.3) väsentligen karakteriserar integralen.

SATS 1.4.5. *Låt $I : C_0 \to \mathbf{R}$ vara en funktion för vilken*

(i) $I(af+bg) = aI(f)+bI(g)$ *då* $f, g \in C_0$, $a, b \in \mathbf{R}$;
(ii) $I(f) \geq 0$ *då* $f \in C_0^+$;
(iii) $I(f_h) = I(f)$ *då* $f \in C_0$, $h \in \mathbf{R}^d$.

Här är $f_h(x) = f(x-h)$ *som i* (1.4.3). *Då finns en konstant* $c \geq 0$ *så att*

$$I(f) = c\int f\,dx, \quad f \in C_0.$$

Observera att detta medför en identitet av formen (1.4.4) med någon positiv funktion av A i stället för $|\det A|$, och det är lätt att inse att den måste vara just $|\det A|$.

BEVIS. Observera först att (i) och (ii) medför att $I(f) \leq I(g)$ om $f, g \in C_0$ och $f \leq g$, för vi har $0 \leq I(g-f) = I(g) - I(f)$. Detta medför att om $f_n \in C_0$ är en följd med stöd i en fix begränsad mängd M och $f_n \to f$ likformigt, så gäller att $I(f_n) \to I(f)$. För om $0 \leq g \in C_0$ och $g \geq 1$ på M så är

$$-\varepsilon_n g \leq f - f_n \leq \varepsilon_n g$$

där $\varepsilon_n = \sup|f-f_n| \to 0$ då $n \to \infty$, och vi får $|I(f) - I(f_n)| \leq \varepsilon_n I(g) \to 0$ då $n \to \infty$.

Låt nu $f, g \in C_0$ ha stöd i intervallet I, och låt $I_1, \dots, I_N$ vara en uppdelning av I i delintervall utan gemensamma inre punkter. Välj $h_j \in I_j$ och observera att (iii) och (i) medför att

$$I(F) = I(f)\sum_1^N g(h_j)m(I_j), \quad \text{om } F(x) = \sum_1^N f(x-h_j)g(h_j)m(I_j). \tag{1.4.8}$$

För en tillräckligt fin indelning ligger $F(x)$ nära *faltningen*

$$(f*g)(x) = \int f(x-h)g(h)\,dh. \tag{1.4.9}$$

Funktionen $(x, h) \mapsto f(x-h)g(h)$ är nämligen kontinuerlig med stöd i intervallet $(I-I)\times I$, alltså också likformigt kontinuerlig, så vi får

$$|F(x) - (f*g)(x)| < \varepsilon m(I)$$

om vi väljer indelningen så fin att oscillationen av $h \mapsto f(x-h)g(h)$ över I_j är $< \varepsilon$ för alla x och j. Då indelningens finhet går mot noll följer av (1.4.8) att

$$I(f*g) = I(f)\int g\,dx. \tag{1.4.10}$$

Men om vi i (1.4.9) inför variabelsubstitutionen $h = x-y$ så ser vi enligt (1.4.3), (1.4.4) att $f*g = g*f$. Detta visar att

$$I(f)\int g\,dx = I(g)\int f\,dx.$$

För fixt $g \in C_0$ med $\int g\,dx \neq 0$ får vi $I(f) = c\int f\,dx$ där $c = I(g)/\int g\,dx$. □

KAPITEL 2

Lebesgueintegralen

2.1. Integration av nedåt halvkontinuerliga positiva funktioner

Med de beteckningar som införts i avsnitt 1.4 har integralen av funktioner i $C_0 = C_0(\mathbf{R}^d)$ följande egenskaper, de enda vi utnyttjar i fortsättningen:

$$\int (af + bg)\,dx = a\int f\,dx + b\int g\,dx; \quad a, b \in \mathbf{R}; \quad f, g \in C_0, \tag{2.1.1}$$

$$\int f\,dx \geq 0 \quad \text{om } f \in C_0^+. \tag{2.1.2}$$

Av (2.1.2) och (2.1.1) följer också

$$\int f\,dx \leq \int g\,dx \quad \text{om } f \leq g \text{ och } f, g \in C_0. \tag{2.1.3}$$

Observera att vi inte skall använda oss av translationsinvariansen hos Riemannintegralen. Konsekvenserna av detta kommer att utredas närmare i kapitel III.

Vi skall börja med att utvidga integralbegreppet till funktioner som kan skrivas som en summa $\sum u_n$ där alla $u_n \in C_0^+$. Först utreder vi vilka funktioner som kan framställas på detta sätt.

Definition 2.1.1. En funktion f med värden i $(-\infty, +\infty]$ kallas *nedåt halvkontinuerlig* om till varje x och varje $a < f(x)$ finns en omgivning U till x så att $f(y) > a$ då $y \in U$. Mängden av icke negativa nedåt halvkontinuerliga funktioner betecknas med I^+. Om $-f$ är nedåt halvkontinuerlig kallas f *uppåt halvkontinuerlig.*

I fortsättningen kommer det ofta att visa sig praktiskt att tillåta $+\infty$ som funktionsvärde och därvid använda konventionerna

$$a < +\infty \text{ om } a \text{ är ett reellt tal,}$$
$$(+\infty) + a = a + (+\infty) = +\infty \text{ om } -\infty < a \leq +\infty,$$
$$a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = +\infty \text{ om } 0 < a \leq +\infty.$$

En fördel med att acceptera $+\infty$ är bland annat att en icke tom mängd av reella tal alltid får ett supremum.

Definitionen av öppen mängd (se appendix) ger att definition 2.1.1 också kan formuleras: *f är nedåt halvkontinuerlig om $\{y; f(y) > a\}$ är öppen för varje a.* Eftersom godtyckliga föreningsmängder och ändliga genomsnitt av öppna mängder är öppna, så följer härav:

Lemma 2.1.2. *Om f_α, $\alpha \in A$, är en godtycklig familj av nedåt halvkontinuerliga funktioner, så är $\sup_{\alpha\in A} f_\alpha$ också nedåt halvkontinuerlig. Är A ändlig så är också $\inf_{\alpha\in A} f_\alpha$ nedåt halvkontinuerlig.*

Vi kan nu lätt ge den önskade karakteriseringen av summor av funktioner i C_0^+.

SATS 2.1.3. *En icke negativ funktion f kan skrivas i formen*

$$f = \sum_1^\infty u_n, \tag{2.1.4}$$

med alla $u_n \in C_0^+$, om och endast om $f \in I^+$.

BEVIS. Att varje summa (2.1.4) med termer i C_0^+ är nedåt halvkontinuerlig följer genast av lemma 2.1.2 eftersom summan är supremum av ändliga delsummor. Låt å andra sidan f vara en godtycklig funktion i I^+. Vi börjar med att konstruera en växande följd av icke negativa kontinuerliga funktioner som går mot f. Vi kan anta att $f \not\equiv +\infty$, för $\sum u_n = +\infty$ om $u_n(x) = g(x/n)$, $g(x) = \min(1, \max(2 - \|x\|, 0))$ för alla n. Sätt

$$s_n(x) = \inf_z (f(z) + n\|z - x\|), \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{2.1.5}$$

Det är klart att s_n växer med n, att $s_n < +\infty$, och att $0 \le s_n(x) \le f(x)$ inses genast om vi sätter $z = x$. Eftersom $|\|z - x\| - \|z - y\|| \le \|x - y\|$ får vi (se appendix)

$$|s_n(x) - s_n(y)| \le n\|x - y\|,$$

vilket visar att s_n är kontinuerlig. För att visa att $s_n(x) \uparrow f(x)$ då $n \to \infty$ tar vi $a < f(x)$ och bestämmer U enligt definition 2.1.1. Då är

$$f(z) + n\|z - x\| > a$$

då $z \in U$, och om vi tar n tillräckligt stort så är också $n\|z - x\| > a$ då $z \notin U$. Alltså är $s_n(x) \ge a$ för sådana n, vilket bevisar påståendet.

Sätt $s_0 = 0$. Då uppfyller funktionerna $u_n = s_n - s_{n-1}$ fordringarna i satsen bortsett från att de inte är noll utanför en begränsad mängd. Funktionsföljden $S_n(x) = s_n(x)g(x/n)$, med g definierad ovan, växer emellertid också med n mot $f(x)$, och om vi sätter $u_n = S_n - S_{n-1}$ får vi nu en serie med de önskade egenskaperna. Detta fullbordar beviset. $\square$

ANMÄRKNING. Man kan välja $u_n \in C_0^+$ med stöd i den öppna mängden $O = \{x; f(x) > 0\}$, för om $O \ne \mathbf{R}^d$ och $d(x, \complement O)$ är avståndet från x till $\complement O = \{x; f(x) = 0\}$ så kan man välja $S_n(x) = s_n(x)g(x/n)(1 - g(nd(x, \complement O)))$.

ÖVNING. Visa att infimum i själva verket antas i (2.1.5).

Om $f \in I^+$ och (2.1.4) är en framställning av f med termer $u_n \in C_0^+$ kan man med en enkel modifikation av beviset för sats 1.2.1 visa att

$$\sum_1^\infty \int u_n \, dx = \sup_{f \ge g \in C_0} \int g \, dx.$$

Det är därför naturligt att införa följande definition:

DEFINITION 2.1.4. Om $f \in I^+$ menar man med *överintegralen* av f det icke negativa talet (eventuellt $+\infty$)

$$\int^* f \, dx = \sup_{f \ge g \in C_0} \int g \, dx. \tag{2.1.6}$$

Det räcker naturligtvis att låta g genomlöpa C_0^+. För att motivera att vi kallar den Riemannska underintegralen av en funktion i I^+ för dess överintegral vill vi redan nu nämna att varje $f \in I^+$ med $\int^* f\,dx < \infty$ kommer att bli integrerbar, och i så fall kan vi alltså lika väl använda benämningen integral.

Det är inte nödvändigt att låta g genomlöpa hela C_0^+ i (2.1.6):

Lemma 2.1.5. *Låt $M \subset C_0^+$ och antag att för alla $g_1, g_2 \in M$ finns $g \in M$ med $g_1 \leq g$, $g_2 \leq g$. Sätt $f = \sup_{g \in M} g$. Då är $f \in I^+$ och*

$$\int^* f\,dx = \sup_{g \in M} \int g\,dx. \tag{2.1.7}$$

Bevis. Högerledet kan naturligtvis inte vara större än $\int^* f\,dx$. För att visa en olikhet i motsatt riktning tar vi en godtycklig funktion $g \in C_0$ med $g \leq f$ och sedan en funktion $h \in C_0^+$ med $h > 0$ i $\operatorname{supp} g$. Vi skall visa att det för varje $\varepsilon > 0$ finns en funktion $G \in M$ med $G > g - \varepsilon h$. Detta medför att

$$\sup_{G \in M} \int G\,dx \geq \int g\,dx - \varepsilon \int h\,dx.$$

Eftersom ε är ett godtyckligt tal > 0 och g är en godtycklig funktion $\in C_0$ som är $\leq f$, så följer nu att vänsterledet i (2.1.7) är högst lika med högerledet.

För att visa existensen av G observerar vi att för varje $x \in \operatorname{supp} g$ kan vi finna $G_x \in M$ med $G_x(x) > g(x) - \varepsilon h(x)$. Denna olikhet gäller då också i en omgivning U_x av x. Enligt Borel-Lebesgues lemma kan vi välja ändligt många punkter $x_1, \ldots, x_k \in \operatorname{supp} g$ så att $\operatorname{supp} g \subset U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_k}$, och en funktion $G \in M$ med $G \geq \max(G_{x_1}, \ldots G_{x_k})$ har då den önskade egenskapen. □

Speciellt får vi

$$\int^* f\,dx = \lim_{n \to \infty} \int f_n\,dx \quad \text{om } f_n \in C_0^+ \text{ och } f_n \uparrow f,$$

genom att välja $M = \{f_1, f_2, \ldots\}$.

Vi samlar nu i en sats de viktigaste egenskaperna hos överintegralen av funktioner i I^+.

Sats 2.1.6. *Om $f, g \in I^+$ och $f \leq g$ så är $\int^* f\,dx \leq \int^* g\,dx$. Om $f \in I^+$ och a är ett positivt reellt tal så är $\int^*(af)\,dx = a\int^* f\,dx$. För en följd $(f_n)_1^\infty$ av funktioner i I^+ är $\sum_1^\infty f_n \in I^+$ och*

$$\int^* \Big(\sum_1^\infty f_n\Big)\,dx = \sum_1^\infty \int^* f_n\,dx. \tag{2.1.8}$$

Om dessutom $f_n \uparrow f$ när $n \to \infty$ så följer att $f \in I^+$ och att

$$\int^* f_n\,dx \to \int^* f\,dx, \quad \text{då } n \to \infty. \tag{2.1.9}$$

Bevis. Alla påståendena utom eventuellt (2.1.8) och (2.1.9) är självklara. Vi får (2.1.8) (resp. (2.1.9)) om vi använder lemma 2.1.5 med M lika med mängden av alla summor $\sum_1^\infty g_n$ (resp. alla suprema $\sup_n g_n$) där $g_n \leq f_n$, $g_n \in C_0^+$, och alla g_n utom ändligt många är identiskt noll. □

2.2. Överintegralen av positiva funktioner

Vi inför nu en definition analog med definitionen av överintegralen i Riemanns mening — men med den avgörande skillnaden att vi nu arbetar med funktioner i I^+ i stället för sträckvis konstanta eller kontinuerliga funktioner:

DEFINITION 2.2.1. Låt f vara en godtycklig funktion ≥ 0. *Överintegralen* av f definieras då genom

$$\int^* f\,dx = \inf_{f\leq h\in I^+} \int^* h\,dx. \tag{2.2.1}$$

Det är klart att för $f \in I^+$ sammanfaller denna definition av $\int^* f\,dx$ med den i definition 2.1.4. Observera också att om $f \geq 0$ är begränsad med kompakt stöd så är

$$\int^* f\,dx \leq \overline{\int} f\,dx. \tag{2.2.2}$$

Av sats 2.1.6 får vi följande egenskaper hos överintegralen.

SATS 2.2.2. *Om $0 \leq f \leq g$ så är $\int^* f\,dx \leq \int^* g\,dx$. Om $f \geq 0$ och $0 < a < +\infty$ så är $\int^*(af)\,dx = a\int^* f\,dx$. För en följd $(f_n)_1^\infty$ av icke negativa funktioner gäller*

$$\int^* \Big(\sum_1^\infty f_n\Big)\,dx \leq \sum_1^\infty \int^* f_n\,dx, \tag{2.2.3}$$

$$\int^* f_n\,dx \uparrow \int^* f\,dx \quad \textit{om } f_n \uparrow f \textit{ då } n \to \infty. \tag{2.2.4}$$

BEVIS. De första påståendena är självklara. För att visa (2.2.3) tar vi $\varepsilon > 0$ och väljer $g_n \in I^+$ så att $g_n \geq f_n$ och

$$\int^* g_n\,dx \leq \int^* f_n\,dx + \varepsilon/2^n.$$

Om vi sätter $g = \sum_1^\infty g_n$ så är $\sum_1^\infty f_n \leq g \in I^+$ och vi får enligt (2.1.8)

$$\int^* \Big(\sum_1^\infty f_n\Big)\,dx \leq \int^* g\,dx = \sum_1^\infty \int^* g_n\,dx \leq \sum_1^\infty \int^* f_n\,dx + \varepsilon,$$

vilket bevisar (2.2.3). För beviset av (2.2.4) behöver vi en hjälpsats som ligger mycket nära lemma 1.2.3: □

LEMMA 2.2.3. *Antag att*

$$0 \leq f_i \leq g_i \in I^+ \text{ och } \int^* g_i\,dx \leq \int^* f_i\,dx + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2,$$

och att $f_1 \leq f_2$. Då gäller

$$\int^* \max(g_1, g_2)\,dx \leq \int^* f_2\,dx + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

Bevis. Sats 2.1.6 och formeln $\max(g_1, g_2) + \min(g_1, g_2) = g_1 + g_2$ ger

$$\begin{aligned}\int^* \max(g_1, g_2)\, dx + \int^* \min(g_1, g_2)\, dx &= \int^* g_1\, dx + \int^* g_2\, dx \\ &\leq \int^* f_1\, dx + \int^* f_2\, dx + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2).\end{aligned}$$

Härav följer påståendet ty $f_1 = \min(f_1, f_2) \leq \min(g_1, g_2)$. □

Bevis för (2.2.4). Tag $\varepsilon > 0$ och välj $g_n \in I^+$ så att $f_n \leq g_n$ och

$$\int^* g_n\, dx \leq \int^* f_n\, dx + \varepsilon/2^n.$$

Eftersom följden g_n ej behöver vara växande så sätter vi

$$g'_n = \max(g_1, \dots, g_n) = \max(g'_{n-1}, g_n).$$

Då ger lemmat att

$$\int^* g'_n\, dx \leq \int^* f_n\, dx + \sum_1^n \varepsilon/2^k. \tag{2.2.5}$$

Sätter vi $g = \lim g'_n$ och låter $n \to \infty$ så ger (2.2.5) och sats 2.1.6 att

$$\int^* f\, dx \leq \int^* g\, dx \leq \lim \int^* f_n\, dx + \varepsilon,$$

ty $f \leq g$ och $I^+ \ni g'_n \uparrow g$ då $n \to \infty$. Eftersom $\varepsilon > 0$ är godtyckligt så följer

$$\int^* f\, dx \leq \lim \int^* f_n\, dx,$$

och då den omvända olikheten är trivial så har vi bevisat (2.2.4). □

Det är egenskaperna (2.2.3) och (2.2.4) som gör överintegralen $\int^*$ så överlägsen Riemanns övre integral, som saknar dessa egenskaper.

2.3. Nollmängder och nollfunktioner

Vi skall i detta avsnitt utreda på vilka mängder som man kan modifiera en funktion godtyckligt utan att ändra dess överintegral.

Definition 2.3.1. En funktion $f \geq 0$ kallas en *nollfunktion*[1] om $\int^* f\, dx = 0$.

Ibland kallas varje f med $\int^* |f|\, dx = 0$ en nollfunktion. — Av sats 2.2.2 får vi genast:

Lemma 2.3.2. *Om $0 \leq f \leq g$ och g är en nollfunktion så är f en nollfunktion. Om f_n är nollfunktioner så är $\sum_1^\infty f_n$ en nollfunktion.*

Härav får vi lätt:

Sats 2.3.3. *Om f och g är icke negativa och g är en nollfunktion samt $f(x) \neq 0$ medför $g(x) \neq 0$, så är f en nollfunktion.*

[1] Bourbaki använder termen “fonction négligeable”.

BEVIS. Enligt lemma 2.3.2 är $g+g+\cdots = \lim_{n\to\infty} ng$ en nollfunktion. Den är $+\infty$ överallt där $f(x) \neq 0$ och majorerar alltså f, varför f är en nollfunktion. □

Enligt sats 2.3.3 behöver man alltså bara intressera sig för $\{x; f(x) \neq 0\}$ då man vill avgöra om f är en nollfunktion. Vi inför därför:

DEFINITION 2.3.4. En delmängd E av $\mathbf{R}^d$ kallas en *nollmängd* om dess karakteristiska funktion χ_E är en nollfunktion.

Av lemma 2.3.2 och sats 2.3.3 får vi följande:

SATS 2.3.5. *Varje delmängd av en nollmängd är en nollmängd, och föreningsmängden av uppräkneligt många nollmängder är en nollmängd. En funktion är en nollfunktion om och endast om den är* $\neq 0$ *endast på en nollmängd.*

Observera att enligt (2.2.2) är en begränsad mängd med yttre Jordanmått noll (alltså speciellt en punkt) en nollmängd enligt definition 2.3.4. Omvändningen gäller emellertid inte eftersom varje uppräknelig mängd enligt sats 2.3.5 är en nollmängd och det finns begränsade uppräkneliga mängder med positivt yttre Jordanmått. För en kompakt mängd gäller dock omvändningen enligt följande:

ÖVNING. Om K är en kompakt nollmängd så är $\overline{m}(K) = 0$. (Ledning: Visa att om $C_0^+ \ni g_n \uparrow g \geq \chi_K$ så är $g_n \geq (1-\varepsilon)\chi_K$ för stora n om $\varepsilon > 0$.)

Detta visar speciellt att om $K = [0,1]$ vore uppräknelig så skulle K vara en nollmängd och vi skulle då få motsägelsen $0 = \overline{m}(K) = 1$. Alltså är $[0,1]$ inte uppräknelig.

Man säger att ett påstående som beror på punkten x är sant *nästan överallt* (förkortat n.ö.) om det är sant utom då x tillhör en nollmängd. Sats 2.3.5 innebär alltså att en funktion är en nollfunktion om och endast om den är noll nästan överallt.

SATS 2.3.6. *Om* f *och* g *är icke negativa funktioner som är lika nästan överallt så är* $\int^* f\,dx = \int^* g\,dx$.

BEVIS. Låt $h = +\infty$ i den nollmängd där $f \neq g$ och $h = 0$ annars. Då är $f \leq g + h$, $g \leq f + h$, alltså

$$\int^* f\,dx \leq \int^* g\,dx + \int^* h\,dx, \qquad \int^* g\,dx \leq \int^* f\,dx + \int^* h\,dx,$$

och då $\int^* h\,dx = 0$ får vi $\int^* f\,dx = \int^* g\,dx$. □

SATS 2.3.7. *Om* $f \geq 0$ *och* $\int^* f\,dx < \infty$ *så är* f *ändlig nästan överallt.*

BEVIS. Om χ är karakteristiska funktionen för $\{x; f(x) = +\infty\}$ så är $n\chi \leq f$ då $n > 0$, ty $f \geq 0$. Alltså är

$$0 \leq \int^* \chi\,dx \leq \frac{1}{n}\int^* f\,dx \quad \text{för alla } n,$$

vilket då $n \to \infty$ ger att $\int^* \chi\,dx = 0$. □

Kombination av denna sats med sats 2.2.2 ger:

SATS 2.3.8. *Låt $0 \le f_n$ och antag att $\sum_1^\infty \int^* f_n\,dx < \infty$. Då är $\sum_1^\infty f_n(x) < \infty$ för nästan alla x.*

Slutligen ger vi en ekvivalent definition av nollmängder som ofta är användbar och som belyser skillnaden mellan Lebesgues och Jordans nollmängder.

SATS 2.3.9. *En delmängd E av $\mathbf{R}^d$ är en nollmängd om och endast om för varje $\varepsilon > 0$ finns uppräkneligt många kuber I_j med $E \subset \cup I_j$ och $\sum m(I_j) < \varepsilon$.*

BEVIS. Om E har denna egenskap så är

$$\int^* \chi_E\,dx \le \sum_1^\infty \int^* \chi_{I_j}\,dx < \varepsilon$$

vilket visar att E är en nollmängd.

Antag å andra sidan att E är en nollmängd, och välj $f \in I^+$ med $f \ge 2\chi_E$ så att $\int^* f\,dx < \varepsilon$. Då är $E \subset O = \{x; f(x) > 1\}$, vilket är en öppen mängd. Om $d = 1$ så är $O = \cup I_j$ där I_j är disjunkta öppna intervall (se appendix), och då karakteristiska funktionen för en öppen mängd är i I^+ så ger (2.1.8)

$$\sum m(I_j) = \sum \int^* \chi_{I_j}\,dx = \int^* \chi_O\,dx \le \int^* f\,dx < \varepsilon.$$

Då $d > 1$ är motsvarande bevis något mera komplicerat eftersom en öppen mängd i allmänhet inte är föreningsmängd av disjunkta öppna intervall. I stället kan man använda följande sats: □

SATS 2.3.10. *Varje öppen delmängd O av $\mathbf{R}^d$ är föreningsmängd av en följd I_j av slutna kuber utan gemensamma inre punkter.*

BEVIS. Först delar vi in $\mathbf{R}^d$ i slutna kuber $\{x; n_j \le x_j \le n_j + 1, j = 1, \dots, d\}$ där n_j är heltal och väljer ut de som är delmängder av O. Varje icke utvald kub delas sedan upp i 2^d kuber genom halvering av alla kanterna. De som är delmängder av O väljs ut och proceduren upprepas för de andra. Detta ger en följd av slutna kuber $I_k \subset O$ som saknar gemensamma inre punkter. Om en punkt x inte tillhör någon av dem så ligger x i godtyckligt små kuber som har någon punkt i $\complement O$, och då kan x inte tillhöra O för i så fall skulle en omgivning av x också tillhöra O. Alltså är $\cup I_k = O$. □

2.4. Lebesgueintegralens definition och viktigaste egenskaper

Analogt med kriteriet för Riemannintegrerbarhet i en övning i avsnitt 1.1 inför vi nu:

DEFINITION 2.4.1. En funktion f med värden i $[-\infty, +\infty]$ kallas *integrerbar i Lebesgues mening* om till varje $\varepsilon > 0$ finns en funktion $g \in C_0$ så att

$$\int^* |f - g|\,dx < \varepsilon.$$

Observera att definitionen medför att $f(x)$ är ändlig nästan överallt. Enligt definitionen av överintegralen innebär den att f är integrerbar om och endast om till varje $\varepsilon > 0$ finns $g \in C_0$ och $h \in I^+$ med

$$|f - g| \leq h \text{ och } \int^* h\,dx < \varepsilon.$$

Beviset för följande två satser lämnas som övning.

Sats 2.4.2. *Antag att f för varje $\varepsilon > 0$ kan approximeras med en integrerbar funktion g så att $\int^* |f - g|\,dx < \varepsilon$. Då är f integrerbar.*

Observera att $f - g$ är definierad nästan överallt och det räcker för att $\int^* |f - g|\,dx$ skall vara definierad.

Sats 2.4.3. *En funktion $f \in I^+$ är integrerbar om och endast om $\int^* f\,dx < \infty$.*

Låt nu f vara en integrerbar funktion. För att definiera integralen av f tar vi en följd $g_n \in C_0$ så att

$$\int^* |f - g_n|\,dx \to 0. \tag{2.4.1}$$

Vi har då

$$\Big|\int g_n\,dx - \int g_m\,dx\Big| \leq \int |g_n - g_m|\,dx \leq \int^* |f - g_n|\,dx + \int^* |f - g_m|\,dx \to 0,$$

och av Cauchys konvergensprincip följer alltså att $\lim_{n\to\infty} \int g_n\,dx$ existerar. Gränsvärdet är oberoende av valet av sviten g_n, för om vi väljer en annan svit $h_n \in C_0$ för vilken $\int^* |f - h_n|\,dx \to 0$ så får vi $|\int g_n\,dx - \int h_n\,dx| \to 0$ om vi ersätter g_m med h_n i föregående olikhet. Vi definierar integralen av f genom $\int f\,dx = \lim_{n\to\infty} \int g_n\,dx$.

Enligt sats 2.3.6 påverkas varken integrerbarheten av f eller $\int f\,dx$ om definitionen av f ändras på en nollmängd. Två integrerbara funktioner som är lika utom på en nollmängd kan betraktas som ekvivalenta; *mängden av ekvivalensklasser betecknas med L^1*. För att definiera ett element i L^1 är det alltså tillräckligt att definiera en funktion nästan överallt.

Övning. Visa att om $0 \leq f \in L^1$ så är $\int f\,dx = \int^* f\,dx$.

Sats 2.4.4. *Om $f, g \in L^1$ och $a, b \in \mathbf{R}$ så följer att $af + bg \in L^1$ och att*

$$\int (af + bg)\,dx = a\int f\,dx + b\int g\,dx. \tag{2.4.2}$$

(Observera att $af + bg$ har mening nästan överallt.) Vidare är $\max(f, g)$ och $\min(f, g)$ i L^1 och

$$\int f\,dx \leq \int g\,dx \quad \text{om } f \leq g. \tag{2.4.3}$$

Bevis. Om $f_0, g_0 \in C_0$ så ger triangelolikheten

$$|af + bg - (af_0 + bg_0)| \leq |a||f - f_0| + |b||g - g_0|$$

vilket medför att $af + bg \in L^1$ och att (2.4.2) gäller, och (2.4.3) följer av (2.4.2) och föregående övning. Av olikheten

$$|\max(f, g) - \max(f_0, g_0)| \leq \max(|f - f_0|, |g - g_0|) \leq |f - f_0| + |g - g_0|$$

får vi $\max(f,g) \in L^1$, varav $\min(f,g) = -\max(-f,-g) \in L^1$. $\square$

Observera speciellt att om $f \in L^1$ så är $|f| = \max(f,-f) \in L^1$.

Övning. Visa att om $f \in L^1$ så är $\int |f(x+h) - f(x)|\,dx$ en kontinuerlig funktion av $h \in \mathbf{R}^d$.

Övning. Visa att om $f \in L^1$ och $|f| \le M$ så är $\Phi(f) \in L^1$ om $\Phi(0) = 0$ och Φ är Lipschitzkontinuerlig på $[-M, M]$, dvs. $|\Phi(t) - \Phi(s)| \le C|t-s|$ då $|t| \le M$, $|s| \le M$.

Vi ger ytterligare en övning som visar hur nära lineariteten i sats 2.4.4 sammanhänger med integrerbarheten.

Övning. Låt $f \ge 0$ och $\int^* f\,dx < \infty$. Visa att

$$\int^* (f+g)\,dx = \int^* f\,dx + \int^* g\,dx$$

för varje $g \ge 0$ om och endast om $f \in L^1$. (Ledning: Välj $f + g \in I^+$ vid beviset av omvändningen.)

Sats 2.4.5 (Beppo Levis sats). *Låt $L^1 \ni f_n \uparrow f$. Då är $f \in L^1$ och*

$$\int f\,dx = \lim \int f_n\,dx \tag{2.4.4}$$

om högerledet är ändligt; omvänt, om $f \in L^1$ så är högerledet ändligt.

Bevis. $\int f_n\,dx$ växer med n och gränsvärdet är ändligt om $f \in L^1$, för då är $\int f_n\,dx \le \int f\,dx$. Antag nu att

$$I = \lim \int f_n\,dx < \infty.$$

Då gäller för $n \ge m$

$$\int^* (f_n - f_m)\,dx = \int (f_n - f_m)\,dx = \int f_n\,dx - \int f_m\,dx \to I - \int f_m\,dx \quad \text{då } n \to \infty,$$

varför enligt (2.2.4)

$$\int^* (f - f_m)\,dx = I - \int f_m\,dx \to 0 \quad \text{då } m \to \infty.$$

Sats 2.4.2 ger nu att $f \in L^1$, och (2.4.4) följer av att

$$\int f\,dx - \int f_m\,dx = \int (f - f_m)\,dx \to 0 \quad \text{då } m \to \infty.$$

$\square$

Sats 2.4.5 kan också formuleras som en sats om serier med positiva termer: Om $0 \le u_n \in L^1$ så är $\sum_1^\infty u_n \in L^1$ om och endast om $\sum_1^\infty \int u_n\,dx < +\infty$, och vi har då

$$\int \Big(\sum_1^\infty u_n\Big)\,dx = \sum_1^\infty \int u_n\,dx.$$

Härmed har vi visat att sats 1.2.1 om integration av positiva serier verkligen förbättras av Lebesgueintegralen.

Vi kommer senare att behöva följande enkla konsekvens av sats 2.4.5.

SATS 2.4.6. *Låt $f \geq 0$ och $\int^* f\,dx < \infty$. Då existerar en svit $g_n \in I^+$ så att $f \leq g_n \downarrow g \in L^1$, där $g \geq f$ och*

$$\int^* f\,dx = \int^* g\,dx = \int g\,dx.$$

Om $f \in L^1$ så är $f = g$ nästan överallt.

Bevisa detta som övning. Med hjälp av sats 2.4.6 kan man lätt återföra beviset för sats 2.2.2 med godtyckliga icke negativa f_n till specialfallet då alla $f_n \in L^1$.

Det är klart att om vi använder sats 2.4.5 på $-f_n$ så får vi en motsvarande sats för en avtagande följd f_n i L^1. I nästa sats studerar vi utvidgningen av detta till icke monotona följder.

SATS 2.4.7 (Fatous lemma). *Om $f_n \geq 0$ så gäller*

$$\int^* (\varliminf_{n\to\infty} f_n)\,dx \leq \varliminf_{n\to\infty} \int^* f_n\,dx. \tag{2.4.5}$$

Om dessutom $f_n \in L^1$ för alla n och högerledet är ändligt så har vi också $\varliminf_{n\to\infty} f_n \in L^1$.

BEVIS. Sätt för $n \leq m$

$$h_{nm} = \min(f_n, \dots, f_m).$$

Då existerar

$$\lim_{m\to\infty} h_{nm} = h_n \text{ (avtagande) och } \lim_{n\to\infty} h_n = \varliminf_{n\to\infty} f_n \text{ (växande).}$$

Alltså är enligt sats 2.2.2

$$\int^* \varliminf_{n\to\infty} f_n\,dx = \int^* \lim_{n\to\infty} h_n\,dx = \lim_{n\to\infty} \int^* h_n\,dx \leq \varliminf_{n\to\infty} \int^* f_n\,dx,$$

där den sista olikheten följer av att $h_n \leq f_n$. Om nu $f_n \in L^1$ för alla n så gäller att

$$L^1 \ni h_{nm} \downarrow h_n \geq 0 \quad \text{då } m \to \infty$$

varav följer att $h_n \in L^1$, enligt sats 2.4.5. Samma sats ger att $\lim h_n = \varliminf f_n \in L^1$ om $\lim \int h_n\,dx < +\infty$, vilket enligt ovan är fallet om $\varliminf \int^* f_n\,dx < +\infty$. □

ÖVNING. Beräkna de två sidorna av (2.4.5) då $f_n(x) = n^2|x|e^{-n|x|}$ (en variabel).

SATS 2.4.8 (Lebesgues majorantsats). *Om $f_n \in L^1$ och $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ existerar nästan överallt, och om det vidare existerar en funktion $g \geq 0$ med $\int^* g\,dx < +\infty$ så att $|f_n| \leq g$ för varje n, så följer att $f \in L^1$ och att*

$$\int f\,dx = \lim_{n\to\infty} \int f_n\,dx. \tag{2.4.6}$$

Funktionen g kallas en majorant till följden f_n.

Bevis. Det är ingen inskränkning att anta att $g \in L^1$, för vi kan ersätta g med en funktion $h \in I^+$ med $g \le h$ och $\int^* h\,dx < +\infty$, alltså $h \in L^1$. Vi tillämpar nu Fatous lemma på följden $2g - |f - f_n| \ge 0$ och får

$$\int 2g\,dx \le \varliminf_{n\to\infty} \int^* (2g - |f - f_n|)\,dx.$$

Men $|f - f_n| \in L^1$ enligt Fatous lemma igen, ty

$$\varliminf_{m\to\infty} \int^* |f_m - f_n|\,dx \le 2\int^* g\,dx < +\infty.$$

Alltså är $\int^*(2g - |f - f_n|)\,dx = \int 2g\,dx - \int |f - f_n|\,dx$, så att

$$\varlimsup_{n\to\infty} \int |f - f_n|\,dx \le 0,$$

varav enligt sats 2.4.2 följer att $f \in L^1$ och att (2.4.6) gäller. □

Förutsättningen att $|f_n| \le g$ för alla n och något g med $\int^* g\,dx < +\infty$ kan inte slopas, eftersom föregående övning ger ett exempel där (2.4.6) inte gäller.

Övning. Verifiera direkt att $\sup_n f_n$ i föregående övning inte har ändlig överintegral.

Sats 2.4.9. *Låt $u_n \in L^1$ och antag att $\sum_1^\infty \int |u_n|\,dx < \infty$. Då existerar*

$$f(x) = \sum_1^\infty u_n(x) \tag{2.4.7}$$

nästan överallt med absolut konvergens, och $f \in L^1$. Vidare gäller

$$\int \Big|f - \sum_1^n u_k\Big|\,dx \le \sum_{n+1}^\infty \int |u_k|\,dx \to 0 \quad \text{då } n \to \infty. \tag{2.4.8}$$

Bevis. Enligt sats 2.4.5 är $F = \sum_1^\infty |u_n|$ en funktion i L^1. För alla x där $F(x) < +\infty$, alltså för nästan alla x, konvergerar serien $\sum_1^\infty u_n(x)$ absolut. Alltså existerar (2.4.7) nästan överallt. Om vi sätter

$$f_n(x) = \sum_1^n u_k(x)$$

så är $|f_n| \le F$ för alla n och $f_n(x) \to f(x)$ nästan överallt. Detta medför enligt sats 2.4.8 att $f \in L^1$, och att $|f| \le F$. Använt på $\sum_{n+1}^\infty u_k$ ger detta (2.4.8). □

Övning. Ge ett annat bevis för sats 2.4.9 genom att sätta

$$u_n^+ = \max(u_n, 0), \quad u_n^- = \max(-u_n, 0)$$

och tillämpa sats 2.4.5 på serierna $\sum_1^\infty u_n^+$ och $\sum_1^\infty u_n^-$.

Övning. Visa att om $f \in L^1$ så finns $f_1, f_2 \in I^+$ så att $f = f_1 - f_2$ nästan överallt. (Ledning: Visa först att f kan skrivas i formen (2.4.7) nästan överallt med $u_n \in C_0$, och använd föregående övning.)

Övning. Visa att om $f \in L^1$ (en dimension) så konvergerar $\sum_{-\infty}^\infty f(x+n)$ för nästan alla $x \in \mathbf{R}$.

SATS 2.4.10 (Riesz-Fischers sats). *Om* $f_n \in L^1$ *och*

$$\int |f_n - f_m|\,dx \to 0 \quad \textit{då } n, m \to \infty, \tag{2.4.9}$$

så existerar en funktion $f \in L^1$ *så att*

$$\int |f - f_n|\,dx \to 0 \quad \textit{då } n \to \infty. \tag{2.4.10}$$

Omvänt följer (2.4.9) *av* (2.4.10).

BEVIS. Det sista påståendet följer omedelbart av att

$$\int |f_n - f_m|\,dx \le \int |f - f_n|\,dx + \int |f - f_m|\,dx.$$

För att bevisa det första betecknar vi med n_k heltal sådana att

$$\int |f_n - f_m|\,dx < 2^{-k} \quad \text{då } n, m \ge n_k.$$

Då gäller

$$\int |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|\,dx < 2^{-k}.$$

Alltså existerar enligt sats 2.4.9 summan

$$f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_1^\infty (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$$

för nästan alla x, och $f \in L^1$. Av (2.4.8) följer att

$$\int |f - f_{n_k}|\,dx < 2^{1-k} \to 0 \quad \text{då } k \to \infty.$$

Nu har vi för varje k

$$\int |f - f_m|\,dx \le \int |f - f_{n_k}|\,dx + \int |f_{n_k} - f_m|\,dx \le 2^{1-k} + 2^{-k}, \ \text{om } m \ge n_k,$$

och då $k \to \infty$ så följer (2.4.10). □

Före urvalet behöver följden $f_n(x)$ inte konvergera för något x. Ett exempel ges i följande övning, där vi antar att dimensionen är 1.

ÖVNING. Om n är ett positivt heltal och m är det heltal för vilket $m^3 \le n < (m+1)^3$ så sätter vi

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{då } 0 \le n - m^3 - m|x| < 1, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Visa att $\int |f_n|\,dx \to 0$ då $n \to \infty$ men att $\lim f_n(x)$ ej existerar för något x.

Sats 2.4.10 är tydligen analog med Cauchys konvergensprincip för följder av reella tal. Beviset ovan är också parallellt med ett bevis för Cauchys konvergensprincip med utgångspunkt från satsen att en absolut konvergent serie är konvergent.

2.5. Mätbara och lokalt integrerbara funktioner

För att en funktion f skall vara integrerbar krävs dels viss regularitet hos f, dels begränsningar på storleken av $|f|$ såväl lokalt som globalt (dvs. på varje kompakt mängd och då $x \to \infty$ i $\mathbf{R}^d$). Vi skall nu först studera den klass av funktioner man får ur L^1 om man tar bort alla villkor på storleken.

DEFINITION 2.5.1. En funktion definierad nästan överallt i $\mathbf{R}^d$ med värden i $[-\infty, +\infty]$ kallas *mätbar* om

$$T_g f \in L^1 \quad \text{för alla } g \in C_0^+.$$

Här är $T_g f = \max(-g, \min(g, f))$. (Rita figur!)

Det är klart att modifikation av f på en nollmängd ej påverkar mätbarheten. Definitionen ger också direkt att f är mätbar om f är kontinuerlig eller integrerbar. Eftersom $\int^* |f|\, dx = \int |f|\, dx < +\infty$ för ett integrerbart f så har vi ena hälften av följande sats som ger ett samband mellan integrerbarhet och mätbarhet.

SATS 2.5.2. *f är integrerbar om och endast om f är mätbar och $\int^* |f|\, dx < +\infty$.*

BEVIS. Välj en svit $g_n \in C_0^+$ sådan att $g_n(x) \to +\infty$ för alla $x \in \mathbf{R}^d$ då $n \to \infty$. Om f är mätbar har vi då

$$L^1 \ni T_{g_n} f \to f \text{ då } n \to \infty, \text{ och } |T_{g_n} f| \leq |f| \text{ för alla } n.$$

Enligt Lebesgues majorantsats är alltså $f \in L^1$ om vi har $\int^* |f|\, dx < +\infty$. □

På grund av sats 2.5.2 skriver man ofta $\int f\, dx = +\infty$ om f är icke negativ och mätbar samt $\int^* f\, dx = +\infty$. Ofta används Sats 2.5.2 så här: Om f är mätbar och $|f| \leq g \in L^1$ så är $f \in L^1$.

SATS 2.5.3. *Om f_n är en följd av mätbara funktioner och $f_n \to f$ nästan överallt då $n \to \infty$ så är f mätbar.*

BEVIS. Om $g \in C_0^+$ så gäller att

$$L^1 \ni T_g f_n \to T_g f \text{ nästan överallt då } n \to \infty,$$

och då $|T_g f_n| \leq g$ ger Lebesgues sats att $T_g f \in L^1$. □

Varje funktion $f \in I^+$ är alltså mätbar, och sats 2.4.3 är därför ett specialfall av sats 2.5.2. Observera också att sats 2.5.3 och beviset för sats 2.5.2 ger att f är mätbar om och endast om det finns begränsade $f_n \in L^1$ med $f = \lim f_n$ (nästan överallt). Detta ger:

SATS 2.5.4. *Om f och g är mätbara så är $\max(f, g)$ och $\min(f, g)$ mätbara. Vidare är $f + g$ och fg mätbara om f och g är ändliga nästan överallt.*

BEVIS. Vi nöjer oss med att visa att fg är mätbar. Då

$$fg = \tfrac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$$

räcker det att visa att kvadraten av en mätbar funktion är mätbar. Om f är mätbar så finns begränsade $f_n \in L^1$ för vilka $f_n \to f$ då $n \to \infty$. Enligt en övning efter sats 2.4.4 är f_n^2 integrerbar, vilket bevisar att $f^2 = \lim f_n^2$ är mätbar. □

För en följd f_n av mätbara funktioner ger satserna 2.5.3 och 2.5.4 att exempelvis $\sup_n f_n$ och $\underline{\lim}\, f_n$ är mätbara. Ur satserna 2.5.2 och 2.5.4 får vi:

FÖLJDSATS 2.5.5. *Om $f \in L^1$ och g är mätbar och begränsad så är fg integrerbar.*

Vi skall nu ägna oss åt den klass av funktioner som uppkommer ur L^1 om bara begränsningarna i oändligheten tas bort.

DEFINITION 2.5.6. En funktion f definierad nästan överallt i $\mathbf{R}^d$ och med värden i $[-\infty, +\infty]$ kallas *lokalt integrerbar* om

$$fg \in L^1 \quad \text{för alla } g \in C_0^+.$$

Mängden av alla lokalt integrerbara funktioner betecknas med L^1_{lok}.

ÖVNING. Visa att om $f \in L^1_{\text{lok}}$ så är f ändlig nästan överallt.

ÖVNING. Visa att a) om $f \in L^1_{\text{lok}}$ så är f mätbar, b) om f är lokalt begränsad, dvs. begränsad på varje kompakt, och om f är mätbar så är $f \in L^1_{\text{lok}}$.

SATS 2.5.7. *$f \in L^1_{lok}$ om och endast om till varje $\varepsilon > 0$ finns en kontinuerlig funktion g med $\int^* |f - g|\, dx < \varepsilon$.*

BEVIS. Tag $h_n \in C_0^+$ med $0 \leq h_n \leq 1$ så att

$$h_n(x) = 1 \text{ då } \|x\| \leq n \text{ och } h_n(x) = 0 \text{ då } \|x\| \geq n + 1.$$

Om $f \in L^1_{\text{lok}}$ så kan vi eftersom $h_n - h_{n-1} \in C_0^+$ välja $g_n \in C_0$ med

$$\int^* |f(h_n - h_{n-1}) - g_n|\, dx < \varepsilon/2^n.$$

Multiplikation med $|h_{n+1} - h_{n-2}| \leq 1$ ger att

$$\int^* |f(h_n - h_{n-1}) - g_n(h_{n+1} - h_{n-2})|\, dx < \varepsilon/2^n$$

eftersom $h_{n+1} - h_{n-2} = 1$ på $\{x; n - 1 \leq \|x\| \leq n + 1\}$, som omfattar stödet för $h_n - h_{n-1}$. Sätter vi

$$g = \sum_1^\infty g_n(h_{n+1} - h_{n-2})$$

är alltså

$$\int^* |f - g|\, dx = \int^* \Big|f\Big(\sum_1^\infty (h_n - h_{n-1})\Big) - \sum_1^\infty g_n(h_{n+1} - h_{n-2})\Big|\, dx < \sum_1^\infty \varepsilon/2^n = \varepsilon.$$

Här har vi satt $h_{-1} = h_0 = 0$. Eftersom $h_{n+1} - h_{n-2}$ har sitt stöd i $\{x; n - 2 \leq \|x\| \leq n + 2\}$ så är i omgivningen av en godtycklig punkt högst 4 termer i definitionen av g_n skilda från 0, vilket visar att g är kontinuerlig.

Beviset för omvändningen överlåtes åt läsaren. □

Vi avslutar detta avsnitt med att ge ytterligare egenskaper hos L^1_{lok} i form av övningar.

ÖVNING. Om f är mätbar och $|f| \leq g \in L^1_{\text{lok}}$ så $f \in L^1_{\text{lok}}$.

ÖVNING. Om $f, g \in L^1_{\text{lok}}$ så är $|f|$, af $(a \in \mathbf{R})$, $f + g$, $\max(f, g)$ och $\min(f, g)$ i L^1_{lok}.

Däremot behöver en produkt fg av funktioner i L^1_{lok} inte vara lokalt integrerbar. Vi har emellertid:

ÖVNING. Om $f \in L^1_{\text{lok}}$ och g är lokalt begränsad och mätbar så är $fg \in L^1_{\text{lok}}$.

2.6. Mätbara och integrerbara mängder

Med hjälp av integrationsteorin i de föregående avsnitten får vi nu lätt en måtteori för mängder i $\mathbf{R}^d$.

DEFINITION 2.6.1. Låt E vara en delmängd av $\mathbf{R}^d$ och χ_E dess karakteristiska funktion. *Yttre måttet* av E definieras genom

$$m^*(E) = \int^* \chi_E \, dx.$$

E kallas *integrerbar* om χ_E är integrerbar, och måttet för E definieras då av

$$m(E) = \int \chi_E \, dx = \int^* \chi_E \, dx = m^*(E).$$

På motsvarande sätt kallas E *mätbar* om χ_E är mätbar.

Enligt sats 2.5.2 är E integrerbar om E är mätbar och $m^*(E) < +\infty$. Alltså kan vi för mätbara E skriva $m(E)$ i stället för $m^*(E)$ utom då $m^*(E) = +\infty$.

De viktiga egenskaperna hos yttre måttet följer genast av sats 2.2.2, men vi formulerar dem som en ny sats.

SATS 2.6.2. *Om $E_1 \subset E_2$ så är $m^*(E_1) \leq m^*(E_2)$. Om $E = \cup_1^\infty E_n$ så är*

$$m^*(E) \leq \sum_1^\infty m^*(E_n). \tag{2.6.1}$$

Om E_n växer mot E då $n \to \infty$, dvs. om

$$E_n \subset E_{n+1} \text{ för alla } n \text{ och } E = \cup_1^\infty E_n,$$

så gäller att $m^*(E_n) \uparrow m^*(E)$ då $n \to \infty$.

Det är klart att $\chi_E \in I^+$ om och endast om E är öppen. De öppna mängderna har därför samma roll i måtteorin som funktionerna ur I^+ har i integrationsteorin. Exempelvis gäller:

SATS 2.6.3. *För varje mängd E är*

$$m^*(E) = \inf_{O \supset E} m^*(O), \tag{2.6.2}$$

där O endast genomlöper öppna mängder.

BEVIS. Eftersom $E \subset O$ är $m^*(E) \leq m^*(O)$, alltså $m^*(E) \leq \inf_O m^*(O)$. Det räcker därför att bevisa en olikhet i motsatt riktning under förutsättning att $m^*(E) < +\infty$. Till varje $\varepsilon > 0$ kan vi då finna $f \in I^+$ så att $\chi_E \leq f$ och

$$\int^* f \, dx \leq m^*(E) + \varepsilon.$$

Låt $\varepsilon > 0$ och låt O vara den öppna mängd där $f(x) > 1 - \varepsilon$. Vi har då $E \subset O$, och om $0 < \varepsilon < 1$ så är $\chi_O \leq f/(1-\varepsilon)$, alltså

$$m^*(O) \leq (m^*(E) + \varepsilon)/(1-\varepsilon).$$

Eftersom ε kan väljas godtyckligt litet bevisar detta satsen. □

Övning. Visa att

$$m^*(E) = \inf \sum_1^\infty m(I_n)$$

där infimum tas över alla sviter $(I_n)_1^\infty$ av intervall med $E \subset \cup_1^\infty I_n$.
Ledning: Använd sats 2.3.10.

Satserna i avsnitt 2.5 ger omedelbart satser om mätbara och integrerbara mängder:

Sats 2.6.4. *Komplementet till en mätbar mängd är mätbar. Snittet* $\cap E_n$ *och unionen* $\cup E_n$ *av en följd av mätbara mängder* E_n *är mätbara, liksom* $\underline{\lim}\, E_n$ *och* $\overline{\lim}\, E_n$. *Symmetriska differensen av mätbara mängder är mätbar. Varje öppen och varje sluten mängd är mätbar.*

Beviset för sats 2.6.4 lämnas som övning. Vi påminner bara om att $\underline{\lim}\, E_n$ och $\overline{\lim}\, E_n$ definieras genom motsvarande operationer på de karakteristiska funktionerna. Detta betyder att $\underline{\lim}\, E_n$ (resp. $\overline{\lim}\, E_n$) består av de punkter som tillhör alla utom ändligt många (resp. tillhör oändligt många) E_n. Vidare är den *symmetriska differensen* $E_1 \triangle E_2$ definierad som mängden av punkter som tillhör precis en av mängderna E_1 och E_2 så att den karakteristiska funktionen för $E_1 \triangle E_2$ är $|\chi_{E_1} - \chi_{E_2}|$. Slutligen erinrar vi om att $\chi_E \in I^+$ om E är öppen.

Motsvarande sats för integrerbara mängder är:

Sats 2.6.5. *En öppen eller sluten mängd är integrerbar om och endast om dess yttre mått är ändligt. Speciellt är varje kompakt mängd integrerbar. Om* E_n *är en följd av integrerbara mängder så är* $\cap_1^\infty E_n$ *integrerbar, och*

$$E = \cup_1^\infty E_n \text{ är integrerbar och } m(E) \leq \sum_1^\infty m(E_n)$$

såvida summan i högerledet är ändlig. Om mängderna E_n *är parvis disjunkta så gäller likhet,*

$$m(E) = \sum_1^\infty m(E_n). \tag{2.6.3}$$

(Lebesguemåttets fullständiga additivitet.)

För en mätbar mängd som inte är integrerbar definierar man ibland också måttet som yttre måttet $= +\infty$. Med denna konvention är måttet fullständigt additivt på mängden av alla mätbara mängder.

Även beviset för sats 2.6.5 lämnas åt läsaren.

Övning. Visa att E är mätbar då och endast då $E \cap K$ är mätbar (och alltså integrerbar) för alla kompakta mängder K.

Hitintills har vi integrerat över hela $\mathbf{R}^d$. Låt nu f vara en funktion definierad på en mätbar mängd E. Vi säger att f *är integrerbar (mätbar) på* E *om funktionen* f_0 *där* $f_0 = f$ *på* E *och* $f_0 = 0$ *utanför* E *är integrerbar (mätbar), och vi skriver*

$$\int_E f(x)\,dx = \int f_0\,dx.$$

Om E' är en mätbar delmängd av E så är f enligt följdsats 2.5.5 också integrerbar på E' ty $\chi_{E'}$ är mätbar och begränsad. Det är klart att de tidigare satserna om integrerbara och mätbara funktioner direkt kan överföras till satser om funktioner definierade på en mätbar mängd E. Även formler av typen

$$\int_{E\cup E'} f(x)\,dx + \int_{E\cap E'} f(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx + \int_{E'} f(x)\,dx$$

där E och E' är mätbara mängder följer direkt ur föregående satser, i detta fall sats 2.4.4.

Även i fortsättningen nöjer vi oss med att formulera satserna för integration över hela $\mathbf{R}^d$ och överlåter åt läsaren att tänka efter hur de skall formuleras för integration över mätbara mängder.

Övning. Visa att $f \in L^1_{\text{lok}}$ om och endast om f är integrerbar på varje kompakt mängd.

Vi skall nu visa några karakteriseringar av mätbara mängder som brukar förekomma i läroböcker som börjar med måtteori.

Sats 2.6.6. *Följande villkor på en delmängd* E *av* $\mathbf{R}^d$ *är ekvivalenta:*

(1) E *är mätbar,*
(2) *till varje* $\varepsilon > 0$ *finns en öppen mängd* $O \supset E$ *så att* $m^*(O \setminus E) < \varepsilon$*,*
(2)′ *till varje* $\varepsilon > 0$ *finns en sluten mängd* $F \subset E$ *så att* $m^*(E \setminus F) < \varepsilon$*,*
(3) *det finns en avtagande svit* $(O_n)_1^\infty$ *av öppna mängder så att*

$$O_n \supset E \text{ och } \bigcap_1^\infty O_n \setminus E \text{ är en nollmängd,}$$

(3)′ *det finns en växande svit* $(F_n)_1^\infty$ *av slutna mängder så att*

$$F_n \subset E \text{ och } E \setminus \bigcup_1^\infty F_n \text{ är en nollmängd.}$$

Bevis. Då en mängd är öppen (resp. mätbar) om och endast om dess komplement är slutet (resp. mätbart) så räcker det att visa att (1), (2) och (3) är ekvivalenta.

Antag att (1) gäller. Om $m^*(E) < \infty$ så visar sats 2.6.3 att vi kan finna en öppen mängd $O \supset E$ med $m^*(O) < m^*(E) + \varepsilon$. Då är O integrerbar och

$$m(O \setminus E) + m(E) = m(O) < m(E) + \varepsilon$$

vilket ger att $m(O \setminus E) < \varepsilon$. För en godtycklig mätbar mängd E är $E_n = \{x \in E; \|x\| \le n\}$ integrerbar. Vi kan därför välja en öppen mängd $O_n \supset E_n$ med $m^*(O_n \setminus E_n) < \varepsilon/2^n$. Den öppna mängden $O = \cup_1^\infty O_n$ innehåller då E och $O \setminus E \subset \cup_1^\infty (O_n \setminus E_n)$, vilket medför $m^*(O \setminus E) < \varepsilon$ och bevisar (2).

Antag nu att (2) gäller. Då kan vi välja öppna $O_n \supset E$ så att $m^*(O_n \setminus E) \to 0$ då $n \to \infty$. Genom att ersätta O_n med $O_1 \cap \cdots \cap O_n$ kan vi uppnå att sviten $(O_n)_1^\infty$ är avtagande. Eftersom

$$0 \le m^*\Big(\bigcap_1^\infty O_n \setminus E\Big) \le m^*(O_n \setminus E) \to 0 \text{ då } n \to \infty$$

måste $\cap_1^\infty O_n \setminus E$ vara en nollmängd. Detta bevisar (3) och därmed satsen eftersom (3) $\Longrightarrow$ (1) enligt sats 2.6.4. □

Övning. Visa att E är integrerbar om och endast om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ändligt många intervall $I_1, \ldots, I_k$ så att

$$m^*(E \triangle (I_1 \cup \cdots \cup I_k)) < \varepsilon.$$

Övning. Visa att E är integrerbar om och endast om till varje $\varepsilon > 0$ finns en öppen mängd O och en kompakt mängd K så att $K \subset E \subset O$ och $m(O \setminus K) = m(O) - m(K) < \varepsilon$.

Övning. Visa att om E är integrerbar så är $m(E) = \sup m(K)$ när K varierar över alla kompakta delmängder av E.

Vi skall nu ge ett exempel på en icke mätbar mängd. Sätt för reella x och y

$$x \sim y \text{ om } x - y \in \mathbf{Q},$$

där $\mathbf{Q}$ betecknar de rationella talen. Detta är en ekvivalensrelation och den indelar alltså de reella talen i ekvivalensklasser. Låt oss anta att det är möjligt att välja exakt ett element ur varje klass så att vi därmed får en mängd E som innehåller ett och endast ett element ur varje ekvivalensklass. (Detta går om man accepterar urvalsaxiomet.) Vi kan också anta E vald så att E tillhör intervallet $[0, 1]$. Då kan E inte vara mätbar, för om $E_r = r + E = \{r + x; x \in E\}$ har vi

$$\cup_{r\in\mathbf{Q}} E_r = \mathbf{R}, \tag{2.6.4}$$

$$E_r \subset (0, 2) \text{ om } 0 < r < 1. \tag{2.6.5}$$

Vore nu E mätbar så vore E integrerbar eftersom yttre måttet är ≤ 1. Alla E_r skulle då ha samma mått eftersom de bara skiljer sig med en translation. Eftersom alla E_r med $r \in \mathbf{Q} \cap (0, 1)$ är disjunkta medför emellertid (2.6.5) att

$$\sum_{r\in\mathbf{Q}\cap(0,1)} m(E_r) = m\Big(\bigcup_{r\in\mathbf{Q}\cap(0,1)} E_r\Big) \le 2.$$

Då serien har oändligt många termer som alla är lika måste termerna vara noll. Alltså är $m(E_r) = 0$ för varje r. Men föreningsmängden av uppräkneligt många nollmängder är en nollmängd, varför $\mathbf{R}$ skulle vara en nollmängd enligt (2.6.4). Denna motsägelse bevisar att E inte kan vara mätbar.

Vi skall nu visa att vår definition av mätbarhet av funktioner överensstämmer med den klassiska som utgår från mätbarhet av mängder.

Sats 2.6.7. *f är mätbar om och endast om $\{x; f(x) > a\}$ är mätbar för varje $a \in \mathbf{R}$.*

BEVIS. a) Nödvändigheten. Antag att f är mätbar. Eftersom $f - a$ är mätbar om f är det så kan vi anta $a = 0$. Det gäller då att visa att $E = \{x; f(x) > 0\}$ är mätbar. Men detta följer av att $\chi_E = \lim_{n\to\infty} \min(nf^+, 1)$ där $f^+ = \max(f, 0)$.

b) Tillräckligheten. Antag att $\{x; f(x) > a\}$ är mätbar då $a \in \mathbf{R}$. Mängderna

$$E_+ = \{x; f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n\in\mathbf{Z}} \{x; f(x) > n\},$$
$$E_- = \{x; f(x) = -\infty\} = \complement \bigcup_{n\in\mathbf{Z}} \{x; f(x) > n\}$$

är båda mätbara. Beteckna med $[t]$ det största heltalet $< t$ om $t \in \mathbf{R}$, sätt $[\pm\infty] = 0$, och sätt

$$f_n(x) = \frac{1}{n}[nf(x)].$$

Om $k/n < f(x) \le (k+1)/n$ så är $[nf(x)] = k$ och $f_n(x) = k/n$, varför $0 \le f - f_n \le 1/n$, och

$$f_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{k}{n} \chi_{E_{nk}},$$

där $E_{nk} = \{x; k/n < f(x) \le (k+1)/n\}$ är mätbar. Alltså är f_n och därmed också $f = \lim_{n\to\infty} f_n + \infty \cdot (\chi_{E_+} - \chi_{E_-})$ mätbara. □

ÖVNING. Visa att $\Phi \circ f$ är mätbar om f är mätbar och ändlig nästan överallt, och Φ är kontinuerlig eller växande på $\mathbf{R}$.

Vi bevisar avslutningsvis några viktiga satser som belyser relationen mellan mätbarhet och kontinuitet.

SATS 2.6.8 (Lusins sats). *Låt f vara en mätbar funktion som är ändlig nästan överallt. Då kan man för varje $\varepsilon > 0$ finna en sluten mängd F så att restriktionen av f till F är kontinuerlig och $m(\complement F) < \varepsilon$. Omvänt är varje funktion med denna egenskap mätbar.*

BEVIS. a) Nödvändigheten. Låt Φ vara den växande kontinuerliga funktionen $\Phi(x) = x/(1 + |x|)$ från $\mathbf{R}$ till $(-1, 1)$, och sätt $\Phi(\pm\infty) = \pm 1$. Då är $\tilde{f}(x) = \Phi(f(x))$ mätbar och begränsad, alltså i L^1_{lok}. Välj nu enligt sats 2.5.7 en följd g_n av kontinuerliga funktioner så att $\int^* |\tilde{f} - g_n|\,dx < 4^{-n}$. Då finns $h_n \in I^+$ med

$$|\tilde{f} - g_n| \le h_n \text{ och } \int^* h_n\,dx < 4^{-n}.$$

Sätt $E_n = \{x; h_n(x) > 2^{-n}\}$. Då är E_n öppen och

$$2^{-n}\chi_{E_n} \le h_n, \text{ alltså } m^*(E_n) \le 2^n \int^* h_n\,dx < 2^{-n},$$

varför

$$m^*\Big(\bigcup_N^\infty E_n\Big) \le \sum_N^\infty m^*(E_n) \le \sum_N^\infty 2^{-n} < \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

om $2^{2-N} < \varepsilon$. Eftersom E_n är öppen så är

$$F = \bigcap_N^\infty \complement E_n$$

sluten, och $m^*(\complement F) = m^*(\cup_N^\infty E_n) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Vidare går h_n och därmed också $\tilde{f} - g_n$ mot noll likformigt på F, ty $x \in F$ medför att $x \notin E_n$, alltså

$$0 \le h_n(x) \le 2^{-n} \text{ när } n \ge N.$$

Då ett likformigt gränsvärde av kontinuerliga funktioner är en kontinuerlig funktion så är restriktionen av $\tilde{f}$ till F kontinuerlig. Välj nu en öppen mängd $O \supset \{x; |f(x)| = \infty\}$ med $m(O) < \frac{1}{2}\varepsilon$ och sätt $F_0 = F \cap \complement O$. Då är $m(\complement F_0) \le m(\complement F) + m(O) < \varepsilon$ och restriktionen av $\tilde{f}$ till F_0 är kontinuerlig och $\neq \pm 1$. Alltså är $f(x) = \tilde{f}(x)/(1 - |\tilde{f}(x)|)$ kontinuerlig på F_0.

b) Tillräckligheten. Om villkoret i satsen är uppfyllt så kan vi finna en svit F_n av slutna mängder så att restriktionen av f till F_n är kontinuerlig för varje n och $\sum m(\complement F_n) < \infty$. Sätt $f_n = f$ i F_n och $f_n = +\infty$ i $\complement F_n$. Då är f_n nedåt halvkontinuerlig, alltså mätbar. Då $n \to \infty$ konvergerar f_n mot f utom i nollmängden $\overline{\lim} \complement F_n$, varför f är mätbar enligt sats 2.5.3. Detta fullbordar beviset. $\square$

Bourbaki använder Lusins sats som definition av mätbarhet, vilket är praktiskt då man betraktar funktioner med värden i topologiska vektorrum.

Lusins sats kombinerad med (2) och (2)$'$ i sats 2.6.6 ger att en funktion som är kontinuerlig på en mätbar mängd E är mätbar på E.

Övning. Visa att Lusins sats övergår i (2) och (2)$'$ i sats 2.6.6 om f är den karakteristiska funktionen för en mätbar mängd.

Observera att Lusins sats inte påstår att f är kontinuerlig i någon punkt på F; det är bara restriktionen till F som är kontinuerlig. Exemplet $f(x) = 0$ då $x \in \mathbf{Q}$ och $f(x) = 1$ då $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ visar att en mätbar funktion kan vara diskontinuerlig i varje punkt.

Situationen är annorlunda för Riemannintegralen. Vi har endast definierat denna för funktioner med kompakt stöd. För sådana har vi:

Sats 2.6.9. *En funktion f med kompakt stöd är Riemannintegrerbar om och endast om den är begränsad och dess diskontinuitetspunkter bildar en nollmängd.*

Bevis. Sätt $f_1(x) = \underline{\lim}_{y \to x} f(y)$ och $f_2(x) = \overline{\lim}_{y \to x} f(y)$. Vi har då $f_1 \le f \le f_2$, och f_1 (resp. f_2) är nedåt (resp. uppåt) halvkontinuerlig. (Bevisa detta som övning.) Om nu Φ tillhör C_0 och $\Phi \le f$ så måste $\Phi \le f_1$. Alltså är

$$\int \Phi\, dx \le \underline{\int} f_1\, dx,$$

vilket medför

$$\underline{\int} f\, dx \le \underline{\int} f_1\, dx.$$

Men eftersom $f_1 \le f$ har vi en olikhet i motsatt riktning också, alltså

$$\underline{\int} f\, dx = \underline{\int} f_1\, dx.$$

På samma sätt inses att $\overline{\int} f\,dx = \overline{\int} f_2\,dx$. Men eftersom den undre Riemannintegralen av en funktion i I^+ är lika med dess Lebesgueintegral får vi med integraler i Lebesgues mening av f_1 och f_2

$$\underline{\int} f\,dx = \int f_1\,dx, \quad \overline{\int} f\,dx = \int f_2\,dx,$$

och f är alltså Riemannintegrerbar om och endast om $\int (f_2 - f_1)\,dx = 0$, alltså $f_2 = f_1$ nästan överallt. Men detta betyder att f skall vara kontinuerlig nästan överallt. $\square$

Beviset för Lusins sats ger med små modifikationer också:

Sats 2.6.10 (Egoroffs sats). *Låt f_n vara en följd av nästan överallt ändliga funktioner som går mot ett ändligt gränsvärde f nästan överallt. Om alla f_n är mätbara så kan man till varje kompakt mängd K och $\varepsilon > 0$ finna en kompakt mängd $K_1 \subset K$ så att $m(K \setminus K_1) < \varepsilon$ och f_n konvergerar likformigt mot f i K_1.*

Bevis. Vi sätter

$$h_n = \sup_{m \geq n} |f - f_m|$$

med konventionen $h_n = +\infty$ i varje punkt där f eller något f_m är oändlig. Enligt antagandet konvergerar då h_n monotont mot 0 utom i en nollmängd. Den mätbara mängden

$$E_{n,\delta} = \{x; x \in K, h_n(x) > \delta\}$$

avtar alltså med n, och $\lim_{n\to\infty} E_{n,\delta}$ är en nollmängd för varje $\delta > 0$. Eftersom $E_{n,\delta} \subset K$ och K är en integrerbar mängd så följer av Lebesgues majorantsats att $m(E_{n,\delta}) \to 0$ då $n \to \infty$, för fixt $\delta > 0$. För $j = 1, 2, \ldots$ kan vi därför välja N_j så stort att för $e_j = E_{N_j,1/j}$ gäller

$$m(e_j) < \varepsilon/2^j; \text{ vi har } h_n(x) \leq 1/j \text{ om } n \geq N_j \text{ och } x \in K \setminus e_j,$$

enligt definitionen av $E_{n,\delta}$. Sätt $e = \cup e_j$. Då är e mätbar och $m(e) < \varepsilon$. För $x \in K \setminus e$ är $h_n(x) \leq 1/j$ då $n \geq N_j$, dvs. $h_n \to 0$ likformigt i $K \setminus e$, alltså $f_n \to f$ likformigt i $K \setminus e$. Om O är en öppen mängd med $O \supset e$ och $m(O) < \varepsilon$ så är $K_1 = K \setminus O$ en kompakt mängd $\subset K \setminus e$ med $m(K_1) \geq m(K) - \varepsilon$ eftersom $K \subset K_1 \cup O$, och som $f_n \to f$ likformigt i $K_1 \subset K \setminus e$ är beviset slutfört. $\square$

Övning. Visa att man i sats 2.6.10 kan välja K_1 så att alla f_n och f är kontinuerliga i K_1. Bevisa att Lebesgues majorantsats och Lusins sats följer av Egoroffs sats.

2.7. Variabelsubstitution

Låt oss först observera att om O är en öppen mängd i $\mathbf{R}^d$ så kan man definiera överintegralen och integralen av funktioner som bara är definierade i O liksom förut men med utgångspunkt från $C_0(O)$, de kontinuerliga funktionerna med kompakt stöd i O. Vi lämnar som övning att visa att $f \in L^1(O)$ om och endast om funktionen f_0 som är f på O och 0 utanför O är i $L^1(\mathbf{R}^d)$, och att integralen av f_0 över $\mathbf{R}^d$ är lika med integralen av f över O. (Se anmärkning efter sats 2.1.3.)

Låt nu O_1 och O_2 vara två öppna delmängder av $\mathbf{R}^d$, och låt Φ som i sats 1.4.4 vara en bijektiv avbildning av O_1 på O_2 sådan att både Φ och Φ^{-1} är kontinuerligt deriverbara. Om f är en funktion definierad i O_2 skriver vi liksom i avsnitt 1.4 $\Phi^* f$ för $f \circ \Phi$.

SATS 2.7.1. *$f \in L^1(O_2)$ om och endast om $(\Phi^* f)|\det \Phi'| \in L^1(O_1)$, och vi har då*

$$\int_{O_2} f\,dx = \int_{O_1} (\Phi^* f)|\det \Phi'|\,dx. \tag{2.7.1}$$

BEVIS. Riktigheten av (2.7.1) då $f \in C_0(O_2)$ följer av sats 1.4.4. Härav fås genast att

$$\int^* f\,dx = \int^* (\Phi^* f)|\det \Phi'|\,dx, \quad f \in I^+(O_2), \tag{2.7.2}$$

för vi kan ta en följd $f_n \in C_0^+(O_2)$ som växer mot f. Observera att $\Phi^* f \in I^+(O_1)$, och att avbildningen

$$I^+(O_2) \ni f \mapsto (\Phi^* f)|\det \Phi'| \in I^+(O_1)$$

är bijektiv eftersom $|\det \Phi'| > 0$ på grund av existensen av en kontinuerligt deriverbar invers till Φ. Det följer nu genast att (2.7.2) gäller för överintegralen av en godtycklig funktion $f \geq 0$. Existensen av en funktion $g \in C_0(O_2)$ med $\int^* |g - f|\,dx < \varepsilon$ är därför ekvivalent med att $g_1 = (\Phi^* g)|\det \Phi'|$ uppfyller villkoret

$$\int^* |g_1 - (\Phi^* f)|\det \Phi'||\,dx < \varepsilon.$$

Detta visar att $f \in L^1(O_2)$ om och endast om $(\Phi^* f)|\det \Phi'| \in L^1(O_1)$, och vi får genast (2.7.1) eftersom denna formel gäller då $f \in C_0(O_2)$. $\square$

ÖVNING. Visa med förutsättningarna i sats 2.7.1 att en funktion f definierad i O_2 är mätbar om och endast $\Phi^* f$ är mätbar i O_1.

2.8. Upprepad integration; Lebesgue-Fubinis sats

Vi skall här betrakta funktioner f av $(x, y) \in \mathbf{R}^{d+e}$ där $x \in \mathbf{R}^d$ och $y \in \mathbf{R}^e$. Om $f \in C_0(\mathbf{R}^{d+e})$ vet vi från avsnitt 1.3 att

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy = \int \Big(\int f(x,y)\,dy \Big)\,dx, \tag{2.8.1}$$

där vänstra sidan betecknar integralen av f betraktad som funktion i $\mathbf{R}^{d+e}$ medan vi i högra sidan först integrerar med avseende på y för fixt x och därefter integrerar resultatet med avseende på x. Vi skall nu visa att (2.8.1) gäller allmänt med Lebesgues integralbegrepp, och vi börjar därvid som vanligt med att betrakta funktioner i I^+.

SATS 2.8.1. *Låt $f \in I^+$ som funktion av (x, y). Då är $f(x, y)$ i I^+ som funktion av y för fixt x, och $\int^* f(x,y)\,dy$ tillhör I^+ som funktion av x,*

$$\iint^* f(x,y)\,dx\,dy = \int^* \Big(\int^* f(x,y)\,dy \Big)\,dx. \tag{2.8.2}$$

BEVIS. Vi kan ta $f_n \in C_0$ så att $0 \leq f_n \uparrow f$. Detta medför att $f(x, y)$ är i I^+ som funktion av y för fixt x, och vidare gäller

$$g_n(x) = \int f_n(x,y)\,dy \uparrow \int^* f(x,y)\,dy = g(x).$$

Eftersom $0 \le g_n \in C_0$ får vi att $g \in I^+$ och att

$$\int^* g\,dx = \lim \int g_n\,dx = \lim \iint f_n\,dx\,dy = \iint^* f\,dx\,dy,$$

där vi har använt att (2.8.1) gäller för f_n. Detta bevisar (2.8.2). □

SATS 2.8.2. *För varje $f \ge 0$ gäller*

$$\int^* \Big(\int^* f(x,y)\,dy \Big)\,dx \le \iint^* f(x,y)\,dx\,dy. \tag{2.8.3}$$

BEVIS. Om $f \le g \in I^+$ så ger monotoniteten hos överintegralen

$$\int^* \Big(\int^* f(x,y)\,dy \Big)\,dx \le \int^* \Big(\int^* g(x,y)\,dy \Big)\,dx = \iint^* g(x,y)\,dx\,dy,$$

där likheten följer av sats 2.8.1. Eftersom infimum av högra sidan är $\iint^* f\,dx\,dy$ följer olikheten (2.8.3). □

ÖVNING. Visa att likhet gäller i (2.8.3) om $f(x,y) = g(x)h(y)$ med $g, h \ge 0$.

ÖVNING. Låt g_1 och g_2 vara två icke negativa funktioner av x med

$$\int^* (g_1 + g_2)\,dx < \int^* g_1\,dx + \int^* g_2\,dx. \tag{2.8.4}$$

(Se övningen före sats 2.4.5.) Låt h_1 och h_2 vara de karakteristiska funktionerna för två disjunkta kompakta mängder i $\mathbf{R}^e$ med måttet 1, och sätt

$$f(x,y) = g_1(x)h_1(y) + g_2(x)h_2(y).$$

Visa att de två sidorna av (2.8.3) blir lika med motsvarande sidor i (2.8.4) och att likhet alltså ej alltid gäller.

FÖLJDSATS 2.8.3. *Om f är en nollfunktion så är $y \mapsto f(x,y)$ en nollfunktion för nästan alla x.*

SATS 2.8.4 (Lebesgue-Fubinis sats). *Om $f \in L^1(\mathbf{R}^{d+e})$ så är $\mathbf{R}^e \ni y \mapsto f(x,y)$ integrerbar för nästan alla $x \in \mathbf{R}^d$, och funktionen*

$$\mathbf{R}^d \ni x \mapsto \int f(x,y)\,dy,$$

som alltså är definierad nästan överallt, är också integrerbar med

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy = \int \Big(\int f(x,y)\,dy \Big)\,dx. \tag{2.8.5}$$

BEVIS. Välj $g_n \in C_0(\mathbf{R}^{d+e})$ så att

$$\sum_1^\infty \iint^* |f(x,y) - g_n(x,y)|\,dx\,dy < \infty.$$

Detta medför

$$\int^* \Big(\sum_1^\infty \int^* |f(x,y) - g_n(x,y)|\,dy\Big)\,dx \le \sum_1^\infty \int^* \Big(\int^* |f(x,y) - g_n(x,y)|\,dy\Big)\,dx$$
$$\le \sum_1^\infty \iint^* |f(x,y) - g_n(x,y)|\,dx\,dy < \infty.$$

Allltså konvergerar serien $\sum_1^\infty \int^* |f(x,y) - g_n(x,y)|\,dy$ för nästan alla x. Speciellt går termerna i serien mot 0 för nästan alla x. Alltså är $y \mapsto f(x,y)$ integrerbar för nästan alla x, så

$$F(x) = \int f(x,y)\,dy$$

är definierad nästan överallt. Sätt $G_n(x) = \int g_n(x,y)\,dy$. Vi har $G_n \in C_0$ och

$$\int^* |F(x) - G_n(x)|\,dx \le \int^* \Big(\int^* |f(x,y) - g_n(x,y)|\,dy\Big)\,dx$$
$$\le \iint^* |f(x,y) - g_n(x,y)|\,dx\,dy \to 0.$$

Alltså är F integrerbar och

$$\int F(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int G_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \iint g_n\,dx\,dy = \iint f(x,y)\,dx\,dy,$$

vilket bevisar satsen. □

Funktionen $y \mapsto f(x,y)$ i sats 2.8.4 är i allmänhet inte integrerbar för alla x eftersom $f(x,y)$ kan ändras godtyckligt för ett fixt x eller till och med för alla x i en nollmängd utan att integrerbarheten i $\mathbf{R}^{d+e}$ påverkas.

Övning. Visa att om $f \ge 0$ är en mätbar funktion på $\mathbf{R}^{d+e}$ så gäller likhet i (2.8.3). Visa också att om $f(x,y) = g(x)h(y)$ med g och h integrerbara (mätbara) så är f integrerbar (mätbar).

Övning. Visa att om f och $g \in L^1(\mathbf{R}^d)$ så existerar *faltningen*

$$h(x) = \int f(x-y)g(y)\,dy$$

för nästan alla x. Visa också att $h \in L^1(\mathbf{R}^d)$ och att

$$\int h\,dx = \int f\,dx \int g\,dx, \qquad \int |h|\,dx \le \int |f|\,dx \int |g|\,dx.$$

Faltningen brukar betecknas $f * g$. Visa att $f * g = g * f$.

Övning. Visa att om $f(x,y)$ är mätbar så är $x \mapsto \int^* |f(x,y)|\,dy$ mätbar och $y \mapsto f(x,y)$ är mätbar för nästan alla x.

Observera att av existensen av högra sidan i (2.8.5) kan man inte dra slutsatsen att den vänstra existerar. Ett exempel ges av övningen före följdsats 2.8.3 om man väljer g_1 och g_2 så att $g_1 + g_2 \in L^1$. Däremot har vi:

SATS 2.8.5. *Om f är mätbar i $\mathbf{R}^{d+e}$ så är f integrerbar då och endast då*

$$\int^* \Big(\int^* |f(x,y)|\,dy\Big)\,dx < +\infty. \tag{2.8.6}$$

BEVIS. Om f är integrerbar så är $|f|$ också integrerbar, och Lebesgue-Fubinis sats ger (2.8.6). Enligt sats 2.5.2 kan vi anta $f \geq 0$ när vi bevisar omvändningen. Välj $g_n \in C_0^+$ så att $g_n(x,y) \uparrow +\infty$ för alla $(x,y) \in \mathbf{R}^{d+e}$ när $n \to \infty$. Då $f \geq 0$ är mätbar gäller med beteckningen i definition 2.5.1

$$L^1 \ni T_{g_n} f \uparrow f.$$

Alltså ger Beppo Levis sats att $f \in L^1$, ty

$$\iint T_{g_n} f\,dx\,dy = \int \Big(\int T_{g_n} f\,dy\Big)\,dx \leq \int^* \Big(\int^* f\,dy\Big)\,dx < +\infty.$$

□

Satserna 2.8.4 och 2.8.5 ger att för en mätbar funktion f som uppfyller (2.8.6) är

$$\int \Big(\int f(x,y)\,dy\Big)\,dx = \int \Big(\int f(x,y)\,dx\Big)\,dy. \tag{2.8.7}$$

Speciellt kan man byta integrationsordningen om f är mätbar och positiv. Positiviteten är väsentlig:

ÖVNING. Visa att de upprepade integralerna

$$\int_0^1 \Big(\int_1^\infty (e^{-xy} - 2e^{-2xy})\,dy\Big)\,dx \text{ och } \int_1^\infty \Big(\int_0^1 (e^{-xy} - 2e^{-2xy})\,dx\Big)\,dy$$

till och med har olika tecken.

En annan konsekvens av sats 2.8.5 är att en *mätbar* delmängd E av $\mathbf{R}^{d+e}$ är en nollmängd om och endast om

$$E_x = \{y \in \mathbf{R}^e; (x,y) \in E\}$$

är en nollmängd för nästan alla $x \in \mathbf{R}^d$. Speciellt är E en nollmängd om E är mätbar och E_x är ändlig för nästan alla x. Villkoret att E är mätbar är väsentligt. Det kan inte ens utelämnas om E_x är en punkt för varje x.[2]

SATS 2.8.6. *Låt $O_1 \subset \mathbf{R}^d$ och $O_2 \subset \mathbf{R}^e$ vara öppna mängder och $O_1 \ni x \mapsto \Psi(x) = (\Psi_1(x), \dots, \Psi_e(x)) \in O_2$ vara en kontinuerligt deriverbar avbildning. Om Jacobimatrisen $(\partial\Psi_j(x)/\partial x_k)_{j=1,\dots,e}^{k=1,\dots,d}$ har rangen e för varje $x \in O_1$ och f är en mätbar funktion i O_2 så är $\Psi^* f$ en mätbar funktion i O_1.*

BEVIS. Låt $x_0 \in O_1$ och numrera koordinaterna så att $\det(\partial\Psi_j(x)/\partial x_k)_{j,k=1,\dots,e} \neq 0$. Sätt

$$\Phi(x) = (\Psi_1(x), \dots, \Psi_e(x), x_{e+1}, \dots, x_d).$$

Enligt inversa funktionssatsen är Φ en bijektiv avbildning av en omgivning $\Omega \subset O_1$ av x_0 på en öppen mängd $\widetilde{\Omega} \subset O_2 \times \mathbf{R}^{d-e}$. Vi har

$$(\Psi^* f)(x) = f(\Phi_1(x), \dots, \Phi_e(x)) = (\Phi^* F)(x)$$

[2]Se W. Sierpiński, Sur un problème concernant les ensembles mesurables superficiellement, Fundamenta Mathematica 1(1920), 112–115.

där $F(y) = f(y_1, \dots, y_e)$ då $y \in O_2 \times \mathbf{R}^{d-e}$. Enligt övningen efter sats 2.8.4 är F mätbar och av övningen efter sats 2.7.1 följer då att $\Phi^* F$ är mätbar, alltså att $\Psi^* f$ är mätbar i en omgivning av x_0. Då x_0 är en godtycklig punkt i O_1 följer nu att $\Phi^* f$ är mätbar i O_1. □

2.9. $\mathbf{L}^{\mathbf{p}}$-rummen

Låt $1 \le p < \infty$. Vi skall nu definiera L^p även för $p > 1$. Vi väljer en definition som på grund av sats 2.5.2 sammanfaller med definitionen i avsnitt 2.4 då $p = 1$.

Definition 2.9.1. Ekvivalensklassen av f modulo nollfunktioner säges tillhöra L^p om f är mätbar och

$$\|f\|_p = \Big(\int^* |f|^p \, dx \Big)^{1/p} < \infty. \tag{2.9.1}$$

Enligt sats 2.5.2 är $|f|^p$ då i L^1 varför vi också kunde skriva integral i stället för övre integral i (2.9.1).

Sats 2.9.2 (Hölders olikhet). *Om $f \in L^p$ och $g \in L^q$ där*

$$1 < p < \infty, \quad 1 < q < \infty, \quad 1/p + 1/q = 1,$$

så är fg integrerbar och

$$\Big| \int fg \, dx \Big| \le \|f\|_p \|g\|_q. \tag{2.9.2}$$

Omvänt, om $f \in L^1_{lok}$ och

$$\Big| \int fg \, dx \Big| \le C \|g\|_q, \quad g \in C_0, \tag{2.9.3}$$

så följer att $f \in L^p$ och att $\|f\|_p \le C$.

Bevis. Sätt $1/p = \alpha$, $1/q = \beta$. Då är $\alpha + \beta = 1$ och $\alpha > 0$, $\beta > 0$. För godtyckliga icke negativa a och b gäller den aritmetisk-geometriska olikheten

$$a^\alpha b^\beta \le \alpha a + \beta b,$$

för om vi sätter $a = e^A$, $b = e^B$ så följer detta av konvexiteten hos $t \mapsto e^t$. Med $a = |f(x)|^p$ och $b = |g(x)|^q$ får vi nu

$$|f(x) g(x)| \le \alpha |f(x)|^p + \beta |g(x)|^q,$$

alltså om $f \in L^p$ och $g \in L^q$

$$\int^* |fg| \, dx \le \alpha {\|f\|_p}^p + \beta {\|g\|_q}^q,$$

vilket medför $fg \in L^1$ enligt sats 2.5.2 och sats 2.5.4. Om $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ följer (2.9.2) eftersom $\alpha + \beta = 1$. Men då olikheten är homogen i f och g följer den därav allmänt.

Om å andra sidan $f \in L^p$ och (2.9.3) gäller när $g \in L^q$ så sätter vi $g = |f|^p / f$, vilket vi definierar som 0 där $f = 0$. Detta är en mätbar funktion, och eftersom $|g|^q = |f|^p$ har vi $\int^* |g|^q \, dx < \infty$ så att $g \in L^q$. Av (2.9.3) får vi ${\|f\|_p}^p \le C {\|f\|_p}^{p/q}$, alltså $\|f\|_p \le C$.

Då vi bara förutsätter att $f \in L^1_{\mathrm{lok}}$ och att (2.9.3) gäller så kan vi först utvidga (2.9.3) till godtyckligt $g \in L^1$ med $|g| \le M$ och $g(x) = 0$ då $|x| > R$ för några konstanter M, R. Vi kan nämligen välja en följd $g_n \in C_0$ så att $|g_n| \le M$, $g_n(x) = 0$ då $|x| \ge 2R$, och $g_n(x) \to g(x)$ för nästan alla x. Då (2.9.3) gäller med g ersatt av g_n så följer (2.9.3) när $n \to \infty$ av Lebesgues majorantsats. Nu kan vi med $\varepsilon > 0$ och $R > 0$ välja

$$g(x) = \begin{cases} |f(x)|^p/(f(x)(1+\varepsilon|f(x)|^{p-1})) & \text{då } |x| \le R, \\ 0 & \text{då } |x| > R, \end{cases}$$

för $|g(x)| \le 1/\varepsilon$. Då får vi av (2.9.3)

$$\int_{|x|<R} |f(x)|^p/(1+\varepsilon|f(x)|^{p-1})\,dx \le C\Big(\int_{|x|<R} |f(x)|^p/(1+\varepsilon|f(x)|^{p-1})\,dx\Big)^{1/q},$$

alltså

$$\Big(\int_{|x|<R} |f(x)|^p/(1+\varepsilon|f(x)|^{p-1})\,dx\Big)^{1/p} \le C,$$

och då $\varepsilon \downarrow 0$ och $R \uparrow \infty$ följer att $\int^* |f|^p\,dx \le C^p$, vilket fullbordar beviset. □

I avsnitt 3.7 skall vi ge en mycket starkare form av sats 2.9.2.

Övning. Visa att Hölders olikhet gäller för godtyckliga $f, g \ge 0$ om integralerna utbyts mot överintegraler.

Övning. Ekvivalensklassen av f sägs tillhöra L^∞ om f är mätbar och det finns en konstant M sådan att $|f(x)| \le M$ nästan överallt. Visa att det finns en minimal konstant med denna egenskap, och att den är oberoende av valet av f i ekvivalensklassen. Sätt $\|f\|_\infty = \min M = \operatorname{essup}|f|$ och visa att sats 2.9.2 också gäller då $p = 1$, $q = \infty$ eller $p = \infty$, $q = 1$.

Övning. Visa att om $f \in L^\infty$ och dessutom $f \in L^p$ för något $p < \infty$ så är

$$\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p.$$

Sats 2.9.3 (Minkowskis olikhet). *Om $f \in L^p$ och $g \in L^p$ så följer att $f + g \in L^p$ och att*

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{2.9.4}$$

Bevis. Vi kan anta $1 < p < \infty$ för påståendet är annars trivialt. Att $f+g$ är mätbar följer av sats 2.5.4. Vidare ger uppskattningen $|f+g| \le 2\max(|f|,|g|)$ att $|f+g|^p \le 2^p(|f|^p + |g|^p)$, vilket visar att $\int^* |f+g|^p\,dx < \infty$. Alltså har vi $f+g \in L^p$. Om $h \in L^q$ där $1/p + 1/q = 1$ så ger Hölders olikhet

$$\Big|\int (f+g)h\,dx\Big| \le \Big|\int fh\,dx\Big| + \Big|\int gh\,dx\Big| \le (\|f\|_p + \|g\|_p)\|h\|_q,$$

och enligt den senare delen av sats 2.9.2 följer därav att (2.9.4) gäller. □

Övning. Utvidga olikheten (2.9.4) till fallet då f och g inte nödvändigtvis är mätbara.

En ekvivalent definition av L^p som är analog med den ursprungliga definitionen av L^1 i avsnitt 2.4 ges av följande sats:

Sats 2.9.4. *Ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att $f \in L^p$, där $1 \le p < \infty$, är att för varje $\varepsilon > 0$ finns $g \in C_0$ så att*

$$\int^* |f-g|^p\,dx < \varepsilon^p. \tag{2.9.5}$$

Bevis. a) Nödvändigheten. Sätt $f_n(x) = f(x)$ då $1/n < |f(x)| < n$ och sätt $f_n(x) = 0$ annars. Då är f_n mätbar, och eftersom $|f_n| \le |f|$ har vi $f_n \in L^p$. Eftersom $|f_n| \le n^{p-1}|f_n|^p$ har vi också $f_n \in L^1$. Då $|f|^p \ge |f - f_n|^p \to 0$ nästan överallt kan vi enligt Lebesgues majorantsats finna n så stort att till ett givet $\varepsilon > 0$

$$\|f - f_n\|_p^p = \int |f - f_n|^p \, dx < \varepsilon^p.$$

Med n fixerat väljer vi nu $g \in C_0$ så att

$$\int |f_n - g| \, dx < \varepsilon^p/(2n)^{p-1}.$$

Eftersom vi utan att öka vänstra ledet kan ersätta g med $\max(-n, \min(n, g))$ kan vi anta att $|g| \le n$. Då är $|f_n - g| \le 2n$ och

$$\|f_n - g\|_p{}^p = \int |f_n - g|^p \, dx < \varepsilon^p.$$

Av Minkowskis olikhet följer nu att $\|f - g\|_p < 2\varepsilon$.

b) Tillräckligheten. Låt h vara en kontinuerlig funktion i L^q som är $\ne 0$ överallt. (Vi kan anta $p > 1$, alltså $q = p/(p-1) < \infty$.) Då följer av övningen efter sats 2.9.2 att

$$\int^* |fh - gh| \, dx \le \|h\|_q \Big(\int^* |f - g|^p \, dx \Big)^{1/p} < \|h\|_q \varepsilon.$$

Alltså är fh integrerbar och därför mätbar. Eftersom $1/h$ är kontinuerlig följer att f är mätbar, vilket bevisar satsen. □

Vi utvidgar nu Riesz-Fischers sats (sats 2.4.10) till $p > 1$.

Sats 2.9.5 (Riesz-Fischer). *Om $f_n \in L^p$, $1 \le p \le \infty$, och $\|f_n - f_m\|_p \to 0$ då $n, m \to \infty$, så existerar $f \in L^p$ så att $\|f - f_n\|_p \to 0$ då $n \to \infty$.*

Bevis. Vi kan anta $1 < p < \infty$ för fallet $p = 1$ är redan behandlat och fallet $p = \infty$ är en enkel tillämpning av Cauchys konvergensprincip som kan lämnas som övning. Tag som i beviset för sats 2.4.10 en svit n_k så att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_p < \infty.$$

Låt h vara en kontinuerlig funktion i L^q som är $\ne 0$ överallt. Av Hölders olikhet följer då att

$$\sum_1^{\infty} \|hf_{n_k} - hf_{n_{k+1}}\|_1 < \infty.$$

Detta medför (se beviset för sats 2.4.10) att $\lim_{k\to\infty} h(x) f_{n_k}(x)$ existerar för nästan alla x. Alltså existerar också

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} f_{n_k}(x)$$

för nästan alla x, och f är mätbar. För godtyckligt $\varepsilon > 0$ kan vi välja N så att

$$\|f_m - f_n\|_p < \varepsilon \quad \text{om } m, n > N.$$

Vi har alltså

$$\int |f_m - f_{n_k}|^p \, dx < \varepsilon^p, \quad m > N,$$

om $n_k > N$. Enligt Fatous lemma följer därför då $k \to \infty$ att $|f_m - f|^p$ är integrerbar och att

$$\int |f_m - f|^p \, dx \leq \varepsilon^p, \quad m > N.$$

Alltså har vi $f \in L^p$ och $\|f_m - f\|_p \to 0$ då $m \to \infty$. Beviset är fullbordat. □

2.10. Derivation av Lebesgueintegralen

Följande sats av Lebesgue är fundamental i tillämpningarna av integrationsteorin på trigonometriska serier, harmoniska funktioner och flera andra områden.

SATS 2.10.1. *Om $f \in L^1_{lok}(\mathbf{R}^d)$ så gäller för nästan alla x*

$$f(x) = \lim_{m(S) \to 0} (m(S))^{-1} \int_S f \, dy, \tag{2.10.1}$$

där S betecknar klot som innehåller punkten x. Vi har till och med för nästan alla x

$$\lim_{m(S) \to 0} (m(S))^{-1} \int_S |f(y) - f(x)| \, dy = 0. \tag{2.10.2}$$

Sådana punkter kallas Lebesguepunkter för f.

Om f är kontinuerlig så är satsen en självklar följd av medelvärdessatsen. För att bevisa den allmänt skall vi studera *Hardy-Littlewoods maximalfunktion*

$$\tilde{f}(x) = \sup_{x \in S} (m(S))^{-1} \int_S |f| \, dy, \tag{2.10.3}$$

där S åter betecknar klot som innehåller punkten x.

ÖVNING. Visa att $\tilde{f}$ är halvkontinuerlig nedåt, alltså att $\tilde{f} \in I^+$.

SATS 2.10.2. *Om $f \in L^1_{lok}(\mathbf{R}^d)$ så gäller olikheten*

$$m\{x; \tilde{f}(x) > s\} \leq \frac{3^d}{s} \int^* |f| \, dx. \tag{2.10.4}$$

BEVIS. Vi kan anta att $f \in L^1$. Mängden E_s vars mått vi skall uppskatta är tydligen föreningsmängden av familjen $\mathcal{F}$ av alla öppna klot över vilka medelvärdet av $|f|$ är $> s$. För varje kompakt $K \subset E_s$ kan vi finna en ändlig delfamilj $\mathcal{F}_K$ vars föreningsmängd innehåller K. Vi skall visa att det finns en delfamilj $\mathcal{F}'_K$ av $\mathcal{F}_K$ som består av *disjunkta* klot så att

$$\bigcup_{S \in \mathcal{F}_K} S \subset \bigcup_{S \in \mathcal{F}'_K} S^*$$

där S^* är det klot som är koncentriskt med S och har tre gånger större radie. Detta medför att

$$m(K) \leq \sum_{S \in \mathcal{F}'_K} m(S^*) = 3^d \sum_{S \in \mathcal{F}'_K} m(S) \leq 3^d s^{-1} \sum_{S \in \mathcal{F}'_K} \int_S |f| \, dx,$$

varav (2.10.4) följer eftersom kloten i $\mathcal{F}'_K$ är disjunkta och K är en godtycklig kompakt delmängd av E_s.

Vi bevisar existensen av $\mathcal{F}'_K$ genom induktion över antalet klot i $\mathcal{F}_K$. Välj ett klot $S_1 \in \mathcal{F}_K$ med maximal radie, och låt $\widetilde{\mathcal{F}}_K$ bestå av de klot ur $\mathcal{F}_K$ som inte skär S_1. De som skär S_1 är innehållna i S_1^* eftersom deras radier högst är lika med radien för S_1. Antalet klot i $\widetilde{\mathcal{F}}_K$ är mindre än antalet klot i $\mathcal{F}_K$ så vi kan anta att det finns en delfamilj $\widetilde{\mathcal{F}}'_K$ av disjunkta klot med

$$\bigcup_{S \in \widetilde{\mathcal{F}}_K} S \subset \bigcup_{S \in \widetilde{\mathcal{F}}'_K} S^*.$$

Då har familjen $\widetilde{\mathcal{F}}'_K$ utökad med S_1 den önskade egenskapen. □

Sats 2.10.2 kallas ofta för Hardy-Littlewoods maximalsats. Då $d = 1$ är den så när som på beteckningarna ett klassiskt lemma av F. Riesz.

Bevis för sats 2.10.1. Sätt för $\varepsilon > 0$

$$E_\varepsilon = \{x; \varlimsup_{m(S)\to 0, x\in S} m(S)^{-1} \int_S |f(y) - f(x)|\, dy > \varepsilon\}.$$

För varje $x \in E_{2\varepsilon}$ gäller antingen $\tilde{f}(x) > \varepsilon$ eller $|f(x)| > \varepsilon$. Eftersom $\varepsilon m\{x; |f(x)| > \varepsilon\} \leq \int^* |f|\, dx$ får vi av sats 2.10.2

$$m^*(E_{2\varepsilon}) \leq (3^d + 1)\varepsilon^{-1} \int^* |f|\, dx.$$

Men $E_{2\varepsilon}$ ändras ej om vi ersätter f med $f - g$ där $g \in C$, för

$$m(S)^{-1} \int_S |g(y) - g(x)|\, dy \to 0 \text{ då } m(S) \to 0,\ x \in S.$$

Nu kan g väljas så att $\int^* |f - g|\, dx$ blir godtyckligt litet, så det följer att $m^*(E_{2\varepsilon}) = 0$. Alltså är $E = \cup_1^\infty E_{1/k}$ en nollmängd, och i dess komplement gäller (2.10.2). □

Övning. Visa att satserna 2.10.2 och 2.10.1 också gäller om man i stället för att endast betrakta klot S som innehåller x betraktar alla mätbara mängder E sådana att det för en fix konstant K finns ett klot $S \supset E \cup \{x\}$ för vilket $m(S) \leq Km(E)$.

Övning. Låt $f \in L^1_{\text{lok}}(\mathbf{R}^d)$ och låt $g \in L^\infty(\mathbf{R}^d)$ vara noll utanför en kompakt mängd. Visa att

$$f_\varepsilon(x) = \int f(x - \varepsilon y) g(y)\, dy$$

är en kontinuerlig funktion av (x, ε) då $\varepsilon > 0$, och att $\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(x) = f(x) \int g(y)\, dy$ för nästan alla x. (Ledning: Använd sats 2.10.1.) Visa också att $f_\varepsilon \in L^p(\mathbf{R}^d)$ och att $\|f_\varepsilon - f\|_p \to 0$ då $\varepsilon \to 0$ om $f \in L^p(\mathbf{R}^d)$.

Övning. Visa att nästan alla punkter x i en mätbar mängd E är *täthetspunkter* i den meningen att

$$m(E \cap S)/m(S) \to 1$$

då S är ett klot med $x \in S$ och $m(S) \to 0$.

För funktioner i L^p, $p > 1$, skall vi nu förbättra satserna 2.10.2 och 2.10.1.

SATS 2.10.3. *Om $f \in L^p(\mathbf{R}^d)$, där $1 < p < \infty$, så gäller olikheten*

$$\|\tilde{f}\|_p \leq C_p \|f\|_p \tag{2.10.5}$$

med ${C_p}^p = 3^d 2^p p/(p-1)$.

Konstanten är naturligtvis inte den bästa möjliga, men om man för f tar en godtycklig icke negativ funktion inser man att storleksordningen av C_p då $p \to 1$ inte kan förbättras. För $p = 1$ existerar speciellt ingen olikhet av formen (2.10.5) utan bara den svagare uppskattningen (2.10.4).

BEVIS FÖR SATS 2.10.3. Sätt $E_s = \{x; \tilde{f}(x) > s\}$ och $\Phi(s) = m(E_s)$. Fubinis sats använd på karakteristiska funktionen för $\{(x,s) \in \mathbf{R}^{d+1}; 0 \leq s < \tilde{f}(x)^p\}$, som är mätbar eftersom $\tilde{f} \in I^+$, ger

$$\int \tilde{f}^p \, dx = \int_0^\infty \Phi(s^{1/p}) \, ds = \int_0^\infty \Phi(s) d(s^p).$$

För att uppskatta $\Phi(s)$ sätter vi

$$f = g_s + h_s \text{ där } g_s = \begin{cases} f & \text{då } |f| \leq s/2, \\ 0 & \text{då } |f| > s/2. \end{cases}$$

Vi får då $\tilde{g}_s \leq s/2$, och eftersom $\tilde{f} \leq \tilde{g}_s + \tilde{h}_s$ följer att $\tilde{h}_s > s/2$ i E_s. Sats 2.10.2 ger därför

$$\Phi(s) \leq m\{x; \tilde{h}_s(x) > s/2\} \leq 3^d (s/2)^{-1} \int |h_s| \, dx.$$

Härav får vi

$$\int \tilde{f}^p \, dx \leq p \int_0^\infty s^{p-1} (2s^{-1} 3^d \int |h_s| \, dx) \, ds$$
$$= 2^{1-p}(p-1) C_p^p \int \Big(\int_0^\infty s^{p-2} |h_s(x)| \, ds \Big) \, dx = C_p^p {\|f\|_p}^p,$$

eftersom

$$2^{1-p}(p-1) \int s^{p-2} |h_s(x)| \, ds = 2^{1-p}(p-1) \int_0^{2|f(x)|} s^{p-2} |f(x)| \, ds = |f(x)|^p.$$

Omkastningen av integrationsordningen är tillåten på grund av sats 2.8.1 om $|f| \in I^+$ för då är funktionen som $= s^{p-2}|f(x)|$ då $|f(x)| > s/2$ och $= 0$ annars också i I^+ som funktion av (x,s). Härav följer olikheten allmänt eftersom man kan finna $F \in I^+$ så att $F \geq |f|$ och $\int |F|^p \, dx \leq \int |f|^p \, dx + \varepsilon$ för godtyckligt $\varepsilon > 0$. □

SATS 2.10.4. *Låt $f \in L^p_{lok}(\mathbf{R}^d)$ där $1 < p < \infty$. Då gäller för nästan alla x*

$$f(x) = \lim (m(I))^{-1} \int_I f \, dy \tag{(2.10.2)'}$$

där I betecknar ett intervall som innehåller x och vars diameter $\to 0$. Vi har till och med för nästan alla x

$$\lim (m(I))^{-1} \int_I |f(y) - f(x)| \, dy = 0. \tag{(2.10.3)'}$$

Observera att satsen inte innehåller något villkor på förhållandet mellan intervallets kantlängder. Satsen gäller inte då $p = 1$ om $d > 1$.

Bevis för sats 2.10.4. Med supremum över alla intervall I med $x \in I$ sätter vi

$$f^*(x) = \sup m(I))^{-1} \int_I |f| \, dy. \tag{2.10.6}$$

Om $K_p^p = 3 \cdot 2^p p/(p-1)$ så gäller då

$$\|f^*\|_p \leq K_p^d \|f\|_p, \quad f \in L^p, \tag{2.10.7}$$

Då $n = 1$ sammanfaller detta med (2.10.5), och därav följer (2.10.7) allmänt om man observerar att f^* kan erhållas genom att man successivt utför operationen $\tilde{}$ på variablerna $x_1, \ldots, x_d$. (Genomför detaljerna som övning.) Av (2.10.7) följer att

$$m\{x; f^*(x) > s\} \leq K_p^{dp}(\|f\|_p/s)^p. \tag{2.10.8}$$

Beviset för sats 2.10.1 kan nu upprepas med den enda skillnaden att man använder (2.10.8) i stället för (2.10.4). Vi lämnar detta som övning. □

(2.10.6) gäller i själva verket om man bara förutsätter att $|f|(\max(0, \log|f|))^{d-1}$ är integrerbar och att f är mätbar. [3]

Övning. Låt $\mathcal{F}$ vara en familj av slutna, begränsade, konvexa, symmetriska omgivningar till origo i $\mathbf{R}^d$ sådana att $\cap_{S\in\mathcal{F}} = \{0\}$ och för två godtyckliga element $S, S' \in \mathcal{F}$ gäller antingen $S \subset S'$ eller $S' \subset S$. Visa att om $f \in L^1$ så gäller för nästan alla x

$$\lim_{S\in\mathcal{F}, m(S)\to 0} m(S)^{-1} \int_S |f(x+y) - f(x)| \, dy \to 0.$$

(Ledning: Observera att om $S, S' \in \mathcal{F}$ och $S' \subset S$ så medför $(x+S) \cap (x'+S') \neq \emptyset$ att $x' + S' \subset x + 3S$, och bevisa därefter en utvidgning av sats 2.10.2 för maximalfunktionen

$$\tilde{f}(x) = \sup_{S\in\mathcal{F}} m(S)^{-1} \int_S |f(x+y)| \, dy.)$$

Vi skall nu använda satserna 2.10.1 och 2.10.2 för att visa att varje växande funktion f på $\mathbf{R}$ är deriverbar nästan överallt. Bevisidén kommer kanske naturligare fram i den allmännare version som ges i kapitel III, men det kan vara av intresse att se ett kort direkt bevis.

Låt oss införa den undre och den övre derivatan av den *växande* funktionen f,

$$f'_{\mathrm{u}}(x) = \varliminf_{m(I)\to 0} [f]_I/m(I), \quad f'_{\mathrm{ö}}(x) = \varlimsup_{m(I)\to 0} [f]_I/m(I).$$

Här är $I = [x_1, x_2]$, $x_1 < x_2$, ett intervall som innehåller x och $[f]_I = f(x_2) - f(x_1)$. Både f'_{u} och $f'_{\mathrm{ö}}$ är mätbara, för f är mätbar och det räcker att ta $I = [x - \alpha, x + \beta]$ där α och β är rationella tal. Det är lätt att inse att $f'_{\mathrm{u}} \in L^1_{\mathrm{lok}}$ och att

$$g(x) = f(x) - \int_0^x f'_{\mathrm{u}}(t) \, dt$$

[3]Se A. Zygmund, Trigonometrical series II, Chapter 17, §2.

är en växande funktion. (Om $x < 0$ definieras naturligtvis integralen som minus integralen från x till 0.) För låt oss integrera en differenskvot

$$\int_{x+\varepsilon}^{y-\varepsilon} (f(t+\varepsilon) - f(t-\varepsilon))/2\varepsilon \, dt = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{y-2\varepsilon}^{y} f(t) \, dt - \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x}^{x+2\varepsilon} f(t) \, dt.$$

Låter vi $\varepsilon \to 0$ genom en svit så följer av Fatous lemma att $f'_{\mathrm{u}} \in L^1([x, y])$ och att

$$\int_x^y f'_{\mathrm{u}}(t) \, dt \leq f(y-0) - f(x+0) \leq f(y) - f(x), \quad x < y.$$

Men detta innebär att g växer.

Eftersom derivatan av integralen av f'_{u} enligt sats 2.10.1 är lika med f'_{u} nästan överallt så drar vi slutsatsen att $g'_{\mathrm{u}} = 0$ nästan överallt. Vi vill bevisa att derivatan av g är noll nästan överallt. För att göra det räcker det att visa att

$$E = \{x; g'_{\mathrm{u}}(x) = 0 \text{ och } g'_{\mathrm{ö}}(x) > \varepsilon\}$$

är en nollmängd för varje $\varepsilon > 0$. Om $\delta > 0$ och $x \in E$ så kan vi välja ett intervall $I = [x_1, x_2]$ som innehåller x så att

$$[g]_I < \delta m(I).$$

Låt

$$G(x) = \begin{cases} g(x_1) & \text{för } x < x_1, \\ g(x) & \text{för } x_1 \leq x \leq x_2, \\ g(x_2) & \text{för } x > x_2. \end{cases}$$

Om vi sätter

$$H(x) = \sup_{x \in J} [G]_J / m(J),$$

där J är ett intervall, så följer med lätt modifikation av beviset för sats 2.10.2 att för varje växande funktion G gäller

$$m\{x; H(x) > \varepsilon\} \leq 3(G(+\infty) - G(-\infty))/\varepsilon = 3[g]_I/\varepsilon.$$

Alltså får vi

$$m(I \cap E) \leq m\{x \in I; g'_{\mathrm{ö}}(x) > \varepsilon\} \leq m\{x; H(x) > \varepsilon\} \leq 3[g]_I/\varepsilon \leq 3\delta m(I)/\varepsilon.$$

Då δ är ett godtyckligt positivt tal får vi om χ är den karakteristiska funktionen för E att derivatan av $\int_0^x \chi(t) \, dt$ är lika med noll i varje punkt i E där den existerar. Alltså är karakteristiska funktionen för E lika med noll nästan överallt i E, vilket betyder att E är en nollmängd. Vi har därmed bevisat:

Sats 2.10.5. *Om f är en växande funktion på $\mathbf{R}$ så existerar derivatan f' nästan överallt och är en lokalt integrerbar funktion. Vi har*

$$f(x) = \int_0^x f'(t) \, dt + g(x)$$

där g är en växande funktion med $g'(x) = 0$ nästan överallt.

Att g inte behöver vara en konstant är klart eftersom g till exempel kan vara en språngfunktion. Men det finns också kontinuerliga växande funktioner g vars derivata är noll nästan överallt. Följande exempel är klassiskt:

Exempel. Vi skall konstruera en växande kontinuerlig funktion på $[0,1]$ sådan att $g'(x)=0$ utom på Cantormängden E_∞ i exemplet före sats 1.1.3. Med beteckningarna där sätter vi $O_n=[0,1]\setminus E_n$, så att O_n består av de 2^n-1 öppna intervall som tagits från [0,1] för att konstruera E_n. Definiera g_n på O_n genom att sätta $g_n(x)=k/2^n$ om x tillhör det k:te intervallet från vänster i O_n. Observera att $O_n\subset O_{n+1}$ och att g_n är restriktionen av g_{n+1} till O_n. (Rita figur!) Vi kan alltså definiera g på $O=[0,1]\setminus E_\infty=\cup O_n$ genom $g(x)=g_n(x)$ om $x\in O_n$. Det gäller att (se figuren!)

$$|g(x)-g(y)|\le 2^{-n}\quad \text{om } |x-y|\le 3^{-n},$$

så g är likformigt kontinuerlig och kan därför entydigt utvidgas kontinuerligt till $\overline{O}=[0,1]$. Det är klart att g är växande och att $g'(x)=0$ då $x\in O$, eftersom $x\in O_n$ för något n och $g=g_n$ är konstant i en omgivning av x.

Övning. Visa att $|g(x)-g(y)|\le 2|x-y|^\alpha$, $\alpha=\log 2/\log 3$, då $x,y\in[0,1]$ och g är den nyss konstruerade funktionen. Visa också att om man ändrar konstruktionen så att $E_1=[0,\lambda]\cup[1-\lambda,1]$, där $0<\lambda<\frac12$, och fortsätter på samma sätt, så får man samma uppskattning med $\alpha=\log 2/|\log\lambda|$, dvs. $\lambda=2^{-1/\alpha}$. Observera att α kan bli ett godtyckligt tal $\in(0,1)$.

Följdsats 2.10.6. *Om f är en Lipschitzkontinuerlig funktion på $\mathbf{R}$, dvs.*

$$|f(x)-f(y)|\le C|x-y|,\quad x,y\in\mathbf{R},$$

så existerar derivatan $f'(x)$ nästan överallt, $|f'(x)|\le C$ så $f'\in L^\infty(\mathbf{R})$, och

$$f(x)-f(y)=\int_y^x f'(t)\,dt,\quad x,y\in\mathbf{R}.$$

Bevis. Funktionerna $f_\pm(x)=Cx\pm f(x)$ är växande, så det följer av sats 2.10.5 att de är deriverbara nästan överallt och att

$$f_\pm(x)-\int_0^x f_\pm'(t)\,dt=Cx\pm f(x)-\int_0^x(C\pm f'(t))\,dt=\pm(f(x)-\int_0^x f'(t)\,dt)$$

är växande. Alltså är $f(x)-\int_0^x f'(t)\,dt$ konstant. □

Övning. Visa att om f och g är Lipschitzkontinuerliga funktioner på $\mathbf{R}$ och endera har kompakt stöd så är

$$\int(f'g+fg')\,dx=0.$$

Vi skall nu visa en viktig utvidgning av följdsatsen till funktioner av flera variabler.

Sats 2.10.7 (Rademachers sats). *Om f är en Lipschitzkontinuerlig funktion på $\mathbf{R}^d$, dvs. $|f(x)-f(y)|\le C\|x-y\|$, $x,y\in\mathbf{R}^d$, så existerar de partiella derivatorna $f_j(x)=\partial f(x)/\partial x_j$ för nästan alla x, $\|f_j\|_\infty\le C$ så $f_j\in L^\infty(\mathbf{R}^d)$, och f är differentierbar med differentialen $\sum_1^d f_j(x)\,dx_j$ för nästan alla x.*

Bevis. Sätt

$$f_1(x)=\overline{\lim_{h\to0}}(f(x_1+h,x')-f(x))/h,\quad g_1(x)=\underline{\lim}_{h\to0}(f(x_1+h,x')-f(x))/h,$$

där $x'=(x_2,\dots,x_d)$. Eftersom f är kontinuerlig så påverkas inte f_1 och g_1 om vi inskränker h till de rationella talen $\mathbf{Q}$, vilket visar att f_1 och g_1 är mätbara. För fixt x' är $g_1(x_1,x')=$

$f_1(x_1, x')$ för nästan alla x_1 enligt följdsats 2.10.6, så det följer av Lebesgue-Fubinis sats att $f_1 - g_1$ är en nollfunktion. Den partiella derivatan $\partial f(x)/\partial x_1$ existerar alltså för nästan alla $x \in \mathbf{R}^d$ och är där lika med $f_1(x)$. På samma sätt ser vi att $\partial f(x)/\partial x_j = f_j(x)$ existerar nästan överallt.

Vi skall bevisa att f är differentierbar i x med differentialen $\sum_1^d f_j(x)\, dx_j$ om x är en Lebesguepunkt för f_j, $j = 1, \ldots, d$. Vid beviset kan vi anta att $x = 0$ och att $f(0) = 0$, $f_j(0) = 0$, $j = 1, \ldots, d$, för vi kan subtrahera en lineär funktion från f. Då har vi

$$\int_{\|y\|<r} |f_j(y)|\, dy/r^n \to 0 \text{ då } r \to 0, \quad j = 1, \ldots, d, \tag{2.10.9}$$

och vi måste bevisa att $f(y)/\|y\| \to 0$ då $y \to 0$. Låt $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ och sätt

$$u_\delta(y) = f(\delta y)/\delta, \quad y \in I^d.$$

Då har vi $|u_\delta(y) - u_\delta(z)| \le C\|y - z\|$ och $u_\delta(0) = 0$. Av (2.10.9) följer att

$$\int_{I^d} |\partial u_\delta(y)/\partial y_j|\, dy \to 0 \text{ då } \delta \to 0,$$

för $\partial u_\delta(y)/\partial y_j = f_j(\delta y)$. Enligt följande hjälpsats medför detta att $u_\delta \to 0$ likformigt i I^d, vilket fullbordar beviset. □

Lemma 2.10.8. *Låt u vara en Lipschitzkontinuerlig funktion i I^d, $|u(y) - u(z)| \le C\|y - z\|$ då $y, z \in I$, och antag att*

$$\int_{I^d} |\partial u(y)/\partial y_j|\, dy < \eta, \quad j = 1, \ldots, d, \tag{2.10.10}$$

där $\eta < 1$. Då följer att

$$|u(y) - u(z)| \le 2d(2C\sqrt{d-1})^{(d-1)/d}\eta^{1/d}, \quad y, z \in I. \tag{2.10.11}$$

Bevis. Om $A > 1$ så ger Lebesgue-Fubinis sats och (2.10.10) att

$$\int_I |\partial u(y_1, y')/\partial y_1|\, dy_1 < A\eta \text{ då } y' \in I^{d-1} \setminus E,$$

där E har mått $< 1/A$ i $\mathbf{R}^{d-1}$. Givet $z' \in I^{d-1}$ kan vi finna $y' \in I^{d-1} \setminus E$ med $|z_j - y_j| \le A^{-1/(d-1)}$, $j = 2, \ldots, d$, och får då för godtyckliga $a, b \in I$

$$\begin{aligned} |u(a, z') - u(b, z')| \le |u(a, z') - u(a, y')| + |u(b, z') - u(b, y')| + |u(a, y') - u(b, y')| \\ \le 2C\sqrt{d-1}A^{-1/(d-1)} + A\eta. \end{aligned}$$

Vi väljer A så att $A^{1/(d-1)}A\eta = 2C\sqrt{d-1}$ och får

$$|u(a, z') - u(b, z')| \le 2(2C\sqrt{d-1})^{(d-1)/d}\eta^{1/d}.$$

På samma sätt kan vi uppskatta oscillationen i andra koordinatriktningar, vilket bevisar (2.10.11). □

Med hjälp av Sats 2.10.7 kan vi bevisa en utvidgning av sats 1.4.2:

Sats 2.10.9. *Låt O_1 och O_2 vara öppna mängder i $\mathbf{R}^d$ och låt $\Phi : O_1 \to O_2$ vara lokalt Lipschitz kontinuerlig, alltså*

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \le C_K|x-y|, \quad x, y \in K,$$

där K är en godtycklig kompakt delmängd av O_1. Då gäller

$$\int_{\Phi(K)} u\,dx \le \int_K u(\Phi(x))|\det \Phi'(x)|\,dx, \quad u \in C_0(O_2),\ u \ge 0. \tag{2.10.12}$$

Bevis. Sätt $|x| = \max_{1\le j\le d}|x_j|$ då $x \in \mathbf{R}^d$ och låt $I_{\delta,y} = \{x \in \mathbf{R}^d, |x-y| \le \delta\}$ då $y \in \mathbf{R}^d$ och $\delta > 0$. För tillräckligt små värden av δ är $K_\delta = \{z \in \mathbf{R}^d; |z-y| \le \delta$ för något $y \in K\}$ en kompakt delmängd av O_1, och

$$\int_{\Phi(K)} u(x)\,dx \le \iint_{y\in K_\delta, x\in\Phi(I_{\delta,y})} u(x)\,dx\,dy/(2\delta)^d.$$

Integralen i högerledet går nämligen över en kompakt, alltså mätbar mängd, och om $x = \Phi(z)$ där $z \in K$ så har vi $z \in I_{\delta,y}$, alltså $x \in \Phi(I_{\delta,y})$ då $|z-y| \le \delta$. Enligt Fubinis sats har vi alltså

$$\int_{\Phi(K)} u(x)\,dx \le \int_{K_\delta} F_\delta(y)\,dy, \quad F_\delta(y) = \int_{x\in\Phi(I_{\delta,y})} u(x)\,dx/(2\delta)^d\,dx. \tag{2.10.13}$$

Om M är en Lipschitzkonstant för Φ i $K_{2\delta}$ så har vi den likformiga begränsningen $|F_\delta(y)| \le M^d \max u$. I varje punkt $y \in K$ där Φ är differentiabel, alltså nästan överallt enligt sats 2.10.8, så följer av lemma 1.4.1 och medelvärdessatsen att $F_\delta(y) \to u(\Phi(y))|\det \Phi'(y)|$. Då $\delta \to 0$ följer nu (2.10.12) av (2.10.13) på grund av Lebesgues majorantsats. □

Sats 2.10.9 ger en utvidgning av sats 2.7.1:

Sats 2.10.10. *Låt O_1 och O_2 vara öppna delmängder av $\mathbf{R}^d$ och låt $\Phi : O_1 \to O_2$ vara en bijektion sådan att Φ och Φ^{-1} är lokalt Lischitzkontinuerliga. Då gäller $u \in L^1(O_2)$ om och endast om $(\Phi^* f)|\det \Phi'| \in L^1(O_1)$, och då gäller* (2.7.1).

Bevis. Av sats 2.10.9 får vi

$$\int_{O_2}^* u\,dx \le \int_{O_1}^* (\Phi^* u)|\det \Phi'|\,dx, \quad u \in I^+(O_2), \tag{2.10.14}$$

för om $0 \le u_j \in C_0(O_2)$ växer mot u så gäller (2.10.14) med u ersatt av u_j och vänsterledet växer mot $\int^* u\,dx$ då $j \to \infty$. Speciellt har vi

$$\int_{O_2}^* dx \le \int_{O_1}^* |\det \Phi'|\,dx.$$

Om $E \subset O_1$ är en nollmängd som tillhör en kompakt delmängd av O_1 så kan vi välja en avtagande följd av relativt kompakta öppna delmängder O_1^j av O_1 som innehåller E och vars mått går mot 0. Då får vi

$$m^*(\Phi(E)) \le \int_{\Phi(O_1^j)}^* dx \le \int_{O_1^j}^* |\det \Phi'|\,dx \to 0,$$

så $\Phi(E)$ är en nollmängd. Därav följer att också Φ^{-1} avbildar en nollmängd i O_2 på en nollmängd i O_1. Vi kan nu inse att (2.10.14) gäller för alla $u \ge 0$ i $L^\infty(O_2)$ som är noll utanför en kompakt delmängd: Vi kan välja en avtagande följd $u_j \in I^+(O_2)$ med $u \le u_j \le \sup u$ och stöd i en fix kompakt delmängd av O_2 så att $\int^* u_j\,dx \to \int u\,dx$. Detta medför att $u_j \downarrow U$ där $U \geq u$ med likhet utom i en nollmängd E. Av

$$\int_{O_2}^* u_j\,dx \leq \int_{O_1}^* (\Phi^* u_j)|\det \Phi'|\,dx$$

följer då $j \to \infty$ att

$$\int_{O_2}^* u\,dx = \int_{O_2}^* U\,dx \leq \int_{O_1}^* (\Phi^* U)|\det \Phi'|\,dx = \int_{O_1}^* (\Phi^* u)|\det \Phi'|\,dx$$

där den sista likheten följer av att $\Phi^* U = \Phi^* u$ utom i nollmängden $\Phi^{-1}E$. Nu är $u \in L^\infty(O_1)$ ekvivalent med $u(\Phi)|\det \Phi'| \in L^\infty(O_1)$ då u har kompakt stöd i O_1, så det följer som i beviset för sats 1.4.4 att det gäller likhet i (2.10.14) för sådana u.

Nu är varje $u \in L^1(O_2)$ med $u \geq 0$ gränsvärde av en växande följd $u_j \in L^\infty(O_2)$ som alla har kompakt stöd, t.ex. $u_j = \min(u, j)$ i en kompakt mängd $K_j \uparrow O_2$ och $u_j = 0$ i $O_2 \setminus K_j$. Eftersom

$$\int_{O_2} u_j\,dx = \int_{O_1} (\Phi^* u_j)|\det \Phi'|\,dx$$

så följer då $j \to \infty$ att

$$\int_{O_2} u\,dx = \int_{O_1} (\Phi^* u)|\det \Phi'|\,dx,$$

vilket fullbordar beviset. □

KAPITEL 3

Radon-Stieltjesintegralen

3.1. Definition av ett positivt mått

Redan i avsnitt 2.1 påpekades att utvidgningen av Riemannintegralen till Lebesgueintegralen bara beror på ett fåtal egenskaper hos Riemannintegralen av kontinuerliga funktioner. Låt allmänt $f \mapsto \mu(f)$ vara en avbildning från C_0 till de reella talen sådan att

$$\mu(af + bg) = a\mu(f) + b\mu(g) \text{ om } a, b \in \mathbf{R} \text{ och } f, g \in C_0. \tag{3.1.1}$$

$$\mu(f) \geq 0 \text{ om } f \in C_0^+. \tag{3.1.2}$$

Härav följer

$$\mu(f_n) \to 0 \text{ om } C_0^+ \ni f_n \downarrow 0. \tag{3.1.3}$$

För låt $f \in C_0^+$ vara lika med 1 där $f_1 \neq 0$. Om M_n är maximum av f_n så vet vi enligt lemma 1.2.2 att $M_n \to 0$ då $n \to \infty$, och eftersom $f_n \leq M_n f$ får vi $0 \leq \mu(f_n) \leq M_n\mu(f) \to 0$ då $n \to \infty$.

Då $f \in I^+$ kan vi som i kapitel II definiera överintegralen med avseende på μ

$$\mu^*(f) = \sup_{f \geq g \in C_0} \mu(g)$$

och bevisa samma påståenden angående överintegralen som tidigare. För allmänt $f \geq 0$ sätter vi

$$\mu^*(f) = \inf_{f \leq g \in I^+} \mu^*(g).$$

Klassen L^1_μ av funktioner som är integrerbara med avseende på μ definieras nu som förut: $f \in L^1_\mu$ om till varje $\varepsilon > 0$ finns $g \in C_0$ så att $\mu^*(|f - g|) < \varepsilon$, integralen $\mu(f)$ definieras sedan då $f \in L^1_\mu$, och satserna om Lebesgueintegralen gäller oförändrade. Observera att μ-nollmängderna i hög grad beror på valet av μ, vilket gör att man får vara noggrann med den precisa formuleringen av alla satser där nollmängder kommer in.

Man kallar en funktional $\mu(f)$ med de angivna egenskaperna för ett *positivt Radonmått*. Om vi ovan låter C_0 betyda $C_0(\Omega)$ där Ω är en öppen delmängd av $\mathbf{R}^d$ så får vi Radonmått i Ω. För att inte tynga beteckningarna betraktar vi i fortsättningen oftast Radonmått i $\mathbf{R}^d$ och lämnar åt läsaren att övertyga sig om att alla satser gäller oförändrade för Radonmått i Ω. I fortsättningen skriver vi i allmänhet mått i stället för Radonmått.

3.2. Det 1-dimensionella fallet. Stieltjesintegralen

Låt $\Omega = (\alpha, \beta)$ vara ett öppet, ändligt eller oändligt intervall i $\mathbf{R}$, och låt μ vara ett positivt Radonmått i Ω. Vi skall ge en mera konkret representation av μ. Sätt

$$H_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{då } y > x, \\ 0 & \text{då } y \le x. \end{cases}$$

Vi har då $H_x \in I^+$, och skillnaden $H_{x_1} - H_{x_2}$ med $x_j \in \Omega$ är alltså μ-mätbar. Då dess överintegral uppenbart är ändlig tillhör den L^1_μ. Det existerar en och så när som på en konstant endast en funktion ϕ så att

$$\phi(x_2) - \phi(x_1) = \mu(H_{x_1} - H_{x_2}); \quad x_1, x_2 \in \Omega. \tag{3.2.1}$$

För tag ett fixt $x_0 \in \Omega$. Om $\phi(x_0) = C$ måste vi ha

$$\phi(x) = \mu(H_{x_0} - H_x) + C. \tag{3.2.2}$$

Omvänt följer genast av integralens additivitet att funktionen (3.2.2) uppfyller (3.2.1) för varje val av konstanten C.

Positiviteten av μ (villkoret (3.1.2) som ju överföres på L^1_μ) visar att ϕ är en växande funktion. Eftersom $H_{x+h}(y) \uparrow H_x(y)$ då $h \downarrow 0$ så följer också att ϕ är kontinuerlig till höger.

Vi skall nu visa hur man kan rekonstuera måttet μ med hjälp av funktionen ϕ. Låt f vara en funktion i C_0, gör en intervallindelning av Ω med delningspunkterna x_k, och låt M_k resp. m_k vara maximum och minimum av f i intervallet $[x_k, x_{k+1}]$. Eftersom

$$\sum m_k(H_{x_k} - H_{x_{k+1}}) \le f \le \sum M_k(H_{x_k} - H_{x_{k+1}})$$

så ger monotoniteten hos μ och definitionen (3.2.1)

$$\sum m_k(\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)) \le \mu(f) \le \sum M_k(\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)). \tag{3.2.3}$$

Nu kan vi för en godtycklig växande funktion ϕ i Ω liksom i avsnitt 1.1 införa den övre och undre *Riemann-Stieltjesintegralen* genom

$$\overline{\int} f\, d\phi = \inf \sum M_k(\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)),$$
$$\underline{\int} f\, d\phi = \sup \sum m_k(\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)).$$

Här är f en begränsad funktion som är noll utanför ett kompakt delintervall av Ω. På samma sätt som där inses också att för $f \in C_0$ är $\overline{\int} f\, d\phi = \underline{\int} f\, d\phi$ och att $f \mapsto \int f\, d\phi$ är ett positivt mått om $\int f\, d\phi$ definieras som detta gemensamma värde. Om speciellt ϕ erhållits genom (3.2.1) med utgångspunkt från ett givet mått μ så är enligt (3.2.3)

$$\mu(f) = \int f\, d\phi, \quad f \in C_0(\Omega).$$

Det återstår för oss att utreda när två olika växande funktioner ϕ och ψ definierar samma mått, dvs. när

$$\int f\, d\phi = \int f\, d\psi \text{ för alla } f \in C_0.$$

Låt $x_1 < x_2$ och tag en följd av funktioner $f_n \in C_0$ med $0 \le f_n \le 1$ som är 1 i intervallet $(x_1 - 1/n, x_2 + 1/n)$ och noll utanför intervallet $(x_1 - 2/n, x_2 + 2/n)$. Vi får då

$$\phi(x_2 + 1/n) - \phi(x_1 - 1/n) \le \int f_n \, d\phi \le \phi(x_2 + 2/n) - \phi(x_1 - 2/n),$$

och om vi låter $n \to \infty$ följer eftersom gränsvärdena av de yttre leden blir lika att

$$\phi(x_2 + 0) - \phi(x_1 - 0) = \lim \int f_n \, d\phi = \lim \int f_n \, d\psi = \psi(x_2 + 0) - \psi(x_1 - 0).$$

Alltså är

$$\phi(x_2 + 0) - \psi(x_2 + 0) = \phi(x_1 - 0) - \psi(x_1 - 0) = C$$

där C är en konstant. För varje $x \in \Omega$ gäller alltså

$$\phi(x + 0) - \psi(x + 0) = \phi(x - 0) - \psi(x - 0) = C.$$

Bortsett från en additiv konstant är alltså ψ och ψ lika i alla kontinuitetspunkter. Om både ϕ och ψ är kontinuerliga till höger blir $\phi - \psi = C$ överallt. Vi har därmed bevisat:

Sats 3.2.1 (F. Riesz). *Varje positivt mått μ i (α, β) är en Stieltjesintegral med avseende på en växande fuktion ϕ. Denna funktion är entydigt bestämd av μ om man kräver att den skall vara kontinuerlig till höger och föreskriver dess värde i en punkt.*

Övning. Visa att en växande funktion har högst uppräkneligt många diskontinuitetspunkter. (Ledning: Visa att om $\varepsilon > 0$ så finns på varje kompakt delintervall bara ett ändligt antal punkter där funktionen har ett språng $> \varepsilon$.)

Det är alltså endast i uppräkneligt många punkter som man kan ändra definitionen av en växande funktion utan att motsvarande Stieltjesintegral ändras.

Eftersom allmänna Radonmått är en naturlig generalisering av Stieltjesintegraler skriver man även i fallet av flera variabler ofta $\int f \, d\mu$ i stället för $\mu(f)$.

3.3. Allmänna Radonmått och deras uppdelning i positiva och negativa delar

Om μ är ett positivt Radonmått så gäller att $\mu(f_n) \to 0$ om funktionerna $f_n \in C_0$ går mot 0 likformigt och är noll utanför en fix kompakt mängd K. För vi kan finna en funktion $f \in C_0^+$ så att $f = 1$ i K. Om $M_n = \sup |f_n|$ har vi $-M_n f \le f_n \le M_n f$, alltså $-M_n \mu(f) \le \mu(f_n) \le M_n \mu(f)$, och eftersom $M_n \to 0$ då $n \to \infty$ får vi att $\mu(f_n) \to 0$. Med anledning härav kan vi utvidga måttbegreppet på följande sätt:

Definition 3.3.1. En reellvärd funktional $\mu(f)$ definierad för $f \in C_0$ kallas ett *Radonmått* om

$$\mu(af + bg) = a\mu(f) + b\mu(g), \text{ då } a, b \in \mathbf{R} \text{ och } f, g \in C_0, \tag{3.3.1}$$

och dessutom $\mu(f_n) \to 0$ då $n \to \infty$ för varje följd $f_n \in C_0$ som är lika med 0 utanför en fix kompakt mängd och går likformigt mot 0.

Införandet av allmänna Radonmått gör det möjligt att definiera godtyckliga lineärkombinationer av mått: Om μ och ν är Radonmått och $a, b \in \mathbf{R}$ så definieras ett mått $a\mu + b\nu$ genom

$$(a\mu + b\nu)(f) = a\mu(f) + b\nu(f), \quad f \in C_0.$$

Definition 3.3.2. Om μ och ν är Radonmått så skriver man $\mu \leq \nu$ om $\nu - \mu$ är ett positivt Radonmått, dvs. om

$$\mu(f) \leq \nu(f), \quad f \in C_0^+.$$

Sats 3.3.3. *Varje Radonmått μ kan skrivas $\mu = \mu^+ - \mu^-$ där μ^+ och μ^- är positiva mått och uppdelningen är minimal i den meningen att för varje uppdelning $\mu = \mu_1 - \mu_2$ med $\mu_j \geq 0$, $j = 1, 2$, gäller att $\mu_1 \geq \mu^+$ och $\mu_2 \geq \mu^-$.*

Av den sista egenskapen följer genast att μ^+ och μ^- är entydigt bestämda.

Bevis. Notera först att då man skall konstruera ett positivt Radonmått ν så räcker det att definiera $\nu(f)$ då $f \geq 0$ så att (3.1.1) och (3.1.2) gäller (med μ ersatt av ν) för funktioner i C_0^+ och skalärer ≥ 0. För då varje funktion i C_0 kan skrivas som differensen mellan två funktioner i C_0^+ kan man sedan på entydigt sätt utvidga definitionen av $\nu(f)$ till allmänna f så att (3.1.1) och (3.1.2) gäller.

Antag nu att vi har en uppdelning $\mu = \mu_1 - \mu_2$ med $\mu_j \geq 0$. Om $0 \leq g \leq f$ och $f, g \in C_0$ så får vi då $\mu(g) \leq \mu_1(g) \leq \mu_1(f)$. Alltså är

$$\mu_1(f) \geq \sup_{0 \leq g \leq f} \mu(g) = \mu^+(f); \quad f \in C_0^+, \ g \in C_0^+.$$

Vi skall nu visa att funktionalen $\mu^+(f)$ som definieras av denna ekvation verkligen uppfyller (3.1.1) och (3.1.2). Det är trivialt att $\mu^+(f) \geq 0$ och att

$$\mu^+(f_1 + f_2) \geq \mu^+(f_1) + \mu^+(f_2) \text{ då } f_1, f_2 \in C_0^+.$$

För att bevisa den motsatta olikheten tar vi ett $g \in C_0^+$ med $g \leq f_1 + f_2$. Sätt $g_1 = \min(g, f_1)$ och $g_2 = g - g_1$. Det är klart att $g_1, g_2 \in C_0^+$ och att $g_1 \leq f_1$. Vidare har vi

$$g_2 = g - \min(g, f_1) = g + \max(-g, -f_1) = \max(0, g - f_1) \leq f_2.$$

Alltså får vi

$$\mu(g) = \mu(g_1) + \mu(g_2) \leq \mu^+(f_1) + \mu^+(f_2)$$

för varje $g \in C_0^+$ med $g \leq f_1 + f_2$. Detta medför att

$$\mu^+(f_1 + f_2) \leq \mu^+(f_1) + \mu^+(f_2).$$

Alltså är μ^+ additiv på C_0^+. Då homogeniteten är självklar följer att μ^+ är ett positivt mått. Nu sätter vi

$$\mu^-(f) = \mu^+(f) - \mu(f) = \sup_{0 \leq g \leq f} \mu(g - f) = \sup_{0 \leq h \leq f} -\mu(h), \quad f \in C_0^+,$$

alltså $\mu^- = (-\mu)^+$. Då är μ^- också ett positivt mått, vi har $\mu = \mu^+ - \mu^-$, och att uppdelningen är minimal följer av bevisets första del. □

Man kallar μ^+ och μ^- för *positiva respektive negativa delen av* måttet μ, och med *absolutbeloppet av* μ menas måttet

$$|\mu| = \mu^+ + \mu^-.$$

Övning. Visa att för $f \in C_0^+$ är

$$|\mu|(f) = \sup_{|g| \leq f} \mu(g), \quad g \in C_0.$$

Visa också triangelolikheten $|\mu + \nu| \leq |\mu| + |\nu|$ och att $\mu^\pm = \frac{1}{2}(|\mu| \pm \mu)$.

Bildningen av μ^+ och μ^- är helt analog med att ta $f^+ = \max(f, 0)$ och $f^- = \max(-f, 0)$ för en funktion f, som vi ofta gjort tidigare. Att det är mer än en analogi skall vi se i ett senare avsnitt. Analogt med en formel för maximum av två funktioner bildar vi nu:

DEFINITION 3.3.4. Om μ och ν är mått så sätter vi

$$\max(\mu, \nu) = \tfrac{1}{2}(\mu + \nu + |\mu - \nu|)$$
$$\min(\mu, \nu) = \tfrac{1}{2}(\mu + \nu - |\mu - \nu|).$$

Speciellt har vi naturligtvis $\mu^+ = \max(\mu, 0)$ och $\mu^- = \max(-\mu, 0)$. För att motivera definitionen noterar vi först att t.ex.

$$\max(\mu, \nu) \geq \mu, \quad \max(\mu, \nu) \geq \nu,$$

för vi kan skriva

$$\max(\mu, \nu) - \mu = \tfrac{1}{2}(|\mu - \nu| + \nu - \mu) = (\nu - \mu)^+.$$

Å andra sidan följer av olikheterna $\sigma \geq \mu$ och $\sigma \geq \nu$ att $\sigma \geq \max(\mu, \nu)$. För om vi skriver $\mu = \sigma - \mu'$ och $\nu = \sigma - \nu'$ så är $\mu' \geq 0$, $\nu' \geq 0$, och eftersom $|\mu' - \nu'| \leq \mu' + \nu'$ får vi att

$$\sigma - \max(\mu, \nu) = \tfrac{1}{2}(\mu' + \nu' - |\mu' - \nu'|) \geq 0.$$

Vi har därmed bevisat:

SATS 3.3.5. *$\max(\mu, \nu)$ är det minsta av alla mått σ med $\sigma \geq \mu$ och $\sigma \geq \nu$, och $\min(\mu, \nu)$ är det största av alla mått σ med $\sigma \leq \mu$ och $\sigma \leq \nu$.*

SATS 3.3.6. *För varje mått μ kan man finna komplementära mängder E^+ och E^- (dvs. $\complement E^+ = E^-$) så att E^+ är en nollmängd för μ^- och E^- är en nollmängd för μ^+. Man kan välja E^- och E^+ så att de är mätbara med avseende på varje positivt mått.*

BEVIS. Tag en kontinuerlig funktion f med $\int f\, d\mu^+ < \infty$ så att $f > 0$ överallt. Eftersom $f \in I^+$ har vi

$$\int f\, d\mu^+ = \sup_{f \geq g \in C_0^+} \int g\, d\mu.$$

Välj en svit $g_n \in C_0^+$ med $g_n \leq f$ så att

$$\mu(g_n) \geq \mu^+(f) - 2^{-n}.$$

Detta kan också skrivas

$$(\mu^+(f) - \mu^+(g_n)) + \mu^-(g_n) \leq 2^{-n}.$$

Alltså är var och en av de positiva termerna i vänstra sidan högst 2^{-n}. Sätt $g = \overline{\lim}\, g_n$. Eftersom $g_n \in C_0$ så är g mätbar med avseende på varje positivt mått, och vi har $0 \leq g \leq f$. Då vidare $g \leq g_N + g_{N+1} + \ldots$ för varje N får vi att $\mu^-(g) \leq 2^{1-N}$ för varje N, varför g är en nollfunktion med avseende på μ^-. Eftersom $\mu^+(f - g_n) \leq 2^{-n} \to 0$ och $\underline{\lim}(f - g_n) = f - g$ så följer vidare av Fatous lemma att $\mu^+(f - g) = 0$.

Sätt nu $E^+ = \{x; g(x) > 0\}$, $E^- = \complement E^+ = \{x; g(x) = 0\}$. Eftersom $\mu^-(g) = 0$ så är E^+ en nollmängd för μ^-. Då vidare $f - g = f > 0$ i E^- och $f - g$ är en nollfunktion med avseende på μ^+, så följer att E^- är en nollmängd för μ^+. Detta fullbordar beviset. $\square$

SATS 3.3.7. *Om μ och ν är två Radonmått så är följande villkor ekvivalenta:*

1) $\min(|\mu|, |\nu|) = 0$.

2) *Det existerar två komplementära mängder* E^μ *och* E^ν *som är nollmängder för* $|\nu|$ *respektive* $|\mu|$.

Bevis. Det räcker givetvis att anta att μ och ν är positiva mått. Antag först att $\min(\mu, \nu) = 0$, alltså att $|\mu - \nu| = \mu + \nu$. Sätt $\varrho = \mu - \nu$. Då är $\varrho^+ = \mu$ och $\varrho^- = \nu$, varför 2) följer av sats 3.3.6. Antag nu i stället att villkoret 2) är uppfyllt och låt $\sigma = \min(\mu, \nu)$. Eftersom $\sigma \leq \mu$ och E^ν är en nollmängd för μ så är E^ν också en nollmängd för σ. Eftersom $\sigma \leq \nu$ är E^μ också en nollmängd för σ, varför hela rummet är en nollmängd för σ som alltså är noll. □

Definition 3.3.8. Man säger att μ och ν är *främmande* om något av de ekvivalenta villkoren i sats 3.3.7 är uppfyllt.

I klassisk terminologi säger man att det ena är *singulärt* med avseende på det andra, men denna terminologi uttrycker inte att relationen är symmetrisk.

3.4. Det 1-dimensionella fallet

För att beskriva det allmänna Radonmåttet med en Stieltjesintegral liksom vi beskrivit det positiva Radonmåttet i avsnitt 3.2 behöver vi ett nytt begrepp:

Definition 3.4.1. En funktion definierad i intervallet $(\alpha, \beta) \subset \mathbf{R}$ säges vara av (lokalt) *begränsad variation* om för varje kompakt delintervall $[a, b]$ finns en konstant V så att om $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ gäller

$$\sum_1^{n-1} |\phi(x_k) - \phi(x_{k+1})| \leq V.$$

Den minsta begränsningen V kallas *totalvariationen* för ϕ i $[a, b]$.

Sats 3.4.2. *Varje funktion ϕ av begränsad variation kan skrivas i formen $\phi = \phi^+ - \phi^-$ med växande ϕ^+ och ϕ^-. Omvänt är varje sådan differens en funktion av begränsad variation. Om ϕ är kontinuerlig till höger kan man välja ϕ^+ och ϕ^- så att de blir kontinuerliga till höger.*

Bevis. Det räcker att arbeta i intervallet $[a, b]$. Om r är ett reellt tal sätter vi som vanligt $r^+ = \max(r, 0)$ och $r^- = \max(-r, 0)$. Antag att $\phi(a) = 0$ och sätt för $x \in [a, b]$

$$\phi^+(x) = \sup \sum_1^{n-1} (\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k))^+,$$

$$\phi^-(x) = \sup \sum_1^{n-1} (\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k))^-,$$

$$\Phi(x) = \sup \sum_1^{n-1} |\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)|,$$

där supremum tas över alla ändliga sviter $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = x$. På grund av villkoret i definition 3.4.1 är alla tre suprema ändliga, och de växer uppenbarligen med x. För $x = a$ är de 0. Det är också klart att om ϕ är skillnaden mellan två växande funktioner som är noll i a så måste dessa vara $\geq \phi^+$ resp. $\geq \phi^-$. Det gäller nu att visa att $\phi = \phi^+ - \phi^-$, och vi skall samtidigt visa att $\Phi = \phi^+ + \phi^-$.

För varje $r \in \mathbf{R}$ gäller att $r = r^+ - r^-$ och $|r| = r^+ + r^-$. Vi får alltså

$$\phi(x) - \phi(a) + \sum_1^{n-1}(\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k))^- = \sum_1^{n-1}(\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k))^+.$$

Högerledet uppskattar vi med $\phi^+(x)$. Tar vi sedan supremum av vänstra sidan får vi därför $\phi(x)-\phi(a)+\phi^-(x) \le \phi^+(x)$. Om vi å andra sidan börjar med att uppskatta vänstra sidan med $\phi(x)-\phi(a)+\phi^-(x)$ får vi motsatt olikhet. Eftersom $\phi(a) = 0$ har vi alltså $\phi(x) = \phi^+(x)-\phi^-(x)$. Beviset för att $\Phi = \phi^+ + \phi^-$ genomföres analogt om man observerar att summorna i definitionen inte kan avta vid förfinad indelning.

Då vi har sett att uppdelningen $\phi = \phi^+ - \phi^-$ är minimal så kan inte både ϕ^+ och ϕ^- ha ett språng till höger i någon punkt, för man kunde då få en uppdelning med mindre ϕ^+ och ϕ^- genom att helt enkelt ta bort det minsta språnget från båda. Om ϕ är kontinuerlig till höger så måste emellertid ϕ^+ och ϕ^- överallt ha samma språng till höger, varför de är kontinuerliga till höger. □

Stieltjesintegralen av en funktion $f \in C_0$ med avseende på en funktion ϕ av begränsad variation definieras som då ϕ är växande: Man betraktar en intervallindelning med delningspunkter x_k och sätter

$$\int f\, d\phi(x) = \lim \sum f(\xi_k)(\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)). \tag{3.4.1}$$

Här är ξ_k en punkt i $[x_k, x_{k+1}]$ och indelningens finhet går mot noll. Att gränsvärdet existerar följer av att ϕ är skillnaden mellan två växande funktioner för vilka vi tidigare bevisat att det existerar. (Ett direkt bevis fås också lätt om man konstaterar att en Riemann-Stieltjessumma (3.4.1) blir högst totalvariationen av ϕ gånger största funktionsvärdet av $|f|$.) Enligt sats 3.4.2 är nu varje allmän Stieltjesintegral skillnaden mellan två Stieltjesintegraler med avseende på växande funktioner och omvänt. Det allmänna Radonmåttet i 1 dimension kan alltså identifieras med Stieltjesintegralen med avseende på en funktion av begränsad variation.

Övning. Visa att om funktionen ϕ av begränsad variation definierar måttet μ så definierar de funktioner ϕ^+, ϕ^- och Φ som infördes i beviset för sats 3.4.2 måtten μ^+, μ^- och $|\mu|$.

3.5. Mått med basen μ

Om μ är ett *positivt* mått så kan vi liksom i avsnitt 2.5 definiera att en funktion g är lokalt μ-integrerbar om g är μ-integrerbar på varje kompakt mängd eller, ekvivalent, om $fg \in L^1_\mu$ för varje $f \in C_0$.

Definition 3.5.1. Om μ är ett positivt mått och g är lokalt μ-integrerbar så betecknar man måttet

$$\nu(f) = \mu(fg) = \int fg\, d\mu, \quad f \in C_0,$$

med $g\mu$ och kallar det för produkten av μ med funktionen g. Varje sådant mått kallas ett *mått med basen μ.*

Detta är Bourbakis terminologi. Den klassiska termen är att ν är *absolut kontinuerligt med avseende på μ.* (Jämför sats 3.6.5.)

För att visa definitionens berättigande observerar vi att om $f = 0$ utanför den kompakta mängden K så är

$$|\nu(f)| \leq \sup|f| \int_K |g|\, d\mu,$$

varför kontinuitetskravet på ett mått är uppfyllt. Lineariteten är trivial.

Sats 3.5.2. *Låt $g \geq 0$ vara lokalt μ-integrerbar. Då gäller att $f \in L^1_{g\mu}$ om och endast om $fg \in L^1_\mu$ (vi sätter $0 \cdot \infty = 0$), och vi har då*

$$(g\mu)(f) = \mu(fg).$$

Vi bevisar först en hjälpsats.

Lemma 3.5.3. *Om $g \geq 0$ är lokalt μ-integrerbar så gäller för varje $f \geq 0$*

$$(g\mu)^*(f) = \mu^*(fg). \tag{3.5.1}$$

Bevis. (3.5.1) gäller enligt definitionen av $g\mu$ om $f \in C_0^+$. Om $f_n \uparrow f$ och (3.5.1) gäller för alla f_n så följer av sats 2.2.2 att (3.5.1) också gäller för gränsvärdet f. (Observera att definitionen $fg = 0$ om $f = \infty$ och $g = 0$ tvingas på oss här.) Detta visar genast att (3.5.1) gäller då $f \in I^+$. Eftersom det finns en följd $h_n \in C_0^+$ som växer mot $+\infty$, alltså $T_{h_n} f \uparrow f$, ser vi också att det räcker att bevisa (3.5.1) då f är majorerad av en funktion ur C_0^+.

Om f är en godtycklig funktion ≥ 0 och $f \leq F \in I^+$ så får vi

$$\mu^*(fg) \leq \mu^*(Fg) = (g\mu)^*(F),$$

vilket medför

$$\mu^*(fg) \leq (g\mu)^*(f). \tag{3.5.2}$$

För att få en olikhet i motsatt riktning tar vi en godtycklig funktion $H \in I^+$ med $H \geq fg$. Sätt $F = H/g$ då $g \neq 0$ och $F = \infty$ då $g = 0$. Då är $f \leq F$ och $gF \leq H$. Vidare är F mätbar med avseende på μ. Om vi redan visste att (3.5.1) gäller för μ-mätbara funktioner f så skulle vi få

$$(g\mu)^*(f) \leq (g\mu)^*(F) = \mu^*(gF) \leq \mu^*(H),$$

vilket ger en olikhet motsatt mot (3.5.2) om vi tar undre gränsen med avseende på H.

Det återstår alltså bara att bevisa (3.5.1) då f är μ-mätbar och $0 \leq f \leq h \in C_0$. Enligt sats 2.4.6 kan vi då finna en följd $f_n \in I^+$ så att $f_n \downarrow f$ utom i en μ-nollmängd, och vi kan naturligtvis anta att $f_n \leq h$ för alla n. Detta ger

$$(g\mu)^*(f) \leq (g\mu)^*(f_n) = \mu^*(gf_n) \to \mu(gf)$$

enligt Lebesgues majorantsats, ty $L^1_\mu \ni gf_n \leq gh \in L^1_\mu$. Denna olikhet är motsatt mot (3.5.2) och bevisar därför (3.5.1). □

Bevis. Bevis för sats 3.5.2Av (3.5.1) följer speciellt att en mängd E är nollmängd med avseende på $g\mu$ om och endast om $g = 0$ nästan överallt i E med avseende på μ. Enligt sats 2.6.6 är en mängd E därför mätbar med avseende på $g\mu$ om och endast om $E \cap \{x; g(x) \neq 0\}$ är mätbar med avseende på μ. Alltså är f mätbar med avseende på $g\mu$ om och endast om funktionen

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x) & \text{då } g(x) \neq 0, \\ 0 & \text{då } g(x) = 0, \end{cases}$$

är μ-mätbar, alltså om och endast om fg är μ-mätbar. Sats 3.5.2 följer nu av lemma 3.5.3 och sats 2.5.2. □

Längre fram behöver vi också följande enkla resultat:

SATS 3.5.4. *Om μ och ν är positiva mått så är $L^1_\mu \cap L^1_\nu = L^1_{\mu+\nu}$ och*

$$(\mu+\nu)(f) = \mu(f) + \nu(f), \quad f \in L^1_{\mu+\nu}. \tag{3.5.3}$$

BEVIS. För varje $f \geq 0$ gäller

$$(\mu+\nu)^*(f) = \mu^*(f) + \nu^*(f), \tag{3.5.4}$$

för detta är definitionen av $\mu+\nu$ om $f \in C_0^+$ och följer därav för $f \in I^+$. Utvidgningen till allmänt f lämnas som övning. Speciellt är alltså en mängd nollmängd med avseende på $\mu+\nu$ om och endast om den är nollmängd med avseende på både μ och ν. Med hjälp av sats 2.6.6 får vi härav att en funktion är $(\mu+\nu)$-mätbar om och endast om den är både μ-mätbar och ν-mätbar. På grund av (3.5.4) och sats 2.5.2 följer nu att $L^1_{\mu+\nu} = L^1_\mu \cap L^1_\nu$, och likheten (3.5.3) följer av att den gäller när $f \in C_0$. □

Vi skall nu utreda hur operationerna som definierats i avsnitt 3.3 utförs på mått med basen μ, där μ är ett positivt mått.

SATS 3.5.5. *Om g är lokalt μ-integrerbar så är $(g\mu)^+ = g^+\mu$, $(g\mu)^- = g^-\mu$ och $|g\mu| = |g|\mu$.*

BEVIS. Sätt $g^+\mu = \nu_1$ och $g^-\mu = \nu_2$ och inför

$$E^+ = \{x; g(x) \geq 0\}, \quad E^- = \{x; g(x) < 0\}.$$

Dessa mängder är komplementära och det följer av sats 3.5.2 att E^+ är nollmängd för ν_2 och att E^- är nollmängd för ν_1. Enligt sats 3.3.7 är därför $\min(\nu_1, \nu_2) = 0$, alltså $|\nu_1 - \nu_2| = \nu_1 + \nu_2$. Detta betyder att $(\nu_1 - \nu_2)^+ = \nu_1$ och att $(\nu_1 - \nu_2)^- = \nu_2$. Eftersom $\nu_1 - \nu_2 = g\mu$ fullbordar detta beviset. □

SATS 3.5.6. *Måttet $g\mu$ är noll om och endast om $|g|$ är en μ-nollfunktion.*

BEVIS. Att detta är tillräckligt är klart. Antag nu att $g\mu = 0$. Då är också $|g|\mu = |g\mu| = 0$. Alltså är 1 integrerbar med integralen 0 med avseende på $|g|\mu$, varför enligt sats 3.5.2 också $|g|$ är integrerbar med avseende på μ med integralen 0. Detta bevisar satsen. □

SATS 3.5.7. *Om $0 \leq g_n \uparrow g$ och alla g_n är lokalt μ-integrerbara, $g_n\mu \leq \nu$ för något mått ν och alla n, så följer att g är lokalt μ-integrerbar.*

BEVIS. Låt $0 \leq f \in C_0$. Då växer fg_n mot fg och $\mu(fg_n) = (g_n\mu)(f) \leq \nu(f)$. Alltså är fg i L^1_μ, vilket bevisar satsen. □

3.6. Lebesgues uppdelning, Lebesgue-Radon-Nikodyms sats

Vi skall först bevisa följande sats av Lebesgue:

SATS 3.6.1. *Låt μ vara ett positivt mått. Varje mått ν kan då på ett och endast ett sätt skrivas i formen*

$$\nu = g\mu + \nu'$$

där g är lokalt μ-integrerbar och ν' är främmande för μ. Om ν är positiv så är också $g\mu$ och ν' positiva.

BEVIS. Entydigheten följer om vi visar att $g\mu + \nu' = 0$ medför att $g\mu$ och ν' är noll. Nu vet vi enligt sats 3.3.7 att det finns två komplementära mängder E_1 och E_2 så att E_1 är en nollmängd för $|\nu'|$ och E_2 är en nollmängd för μ. Då är E_2 också en nollmängd för $|g|\mu = |\nu'|$, varför hela rummet är en $|\nu'|$-nollmängd. Alltså är $\nu' = 0$, vilket bevisar entydigheten.

I beviset för existensen räcker det att betrakta positiva mått ν. Vi behöver några hjälpsatser. □

LEMMA 3.6.2. *Om μ och ν är positiva mått så finns bland alla mått med basen μ som är $\leq \nu$ ett som är maximalt.*

BEVIS. Tag en funktion f som är kontinuerlig och positiv överallt så att f är ν-integrerbar. Låt $M = \sup_g (g\mu)(f)$ då g är lokalt μ-integrerbar och $0 \leq g\mu \leq \nu$. Vi skall visa att denna övre gräns antas. Tag nämligen en följd g_n så att $0 \leq g_n\mu \leq \nu$ och $(g_n\mu)(f) \to M$. Enligt satserna 3.3.5 och 3.5.5 kan vi utbyta följden mot följden $\max(g_1, \ldots, g_n)$ så vi kan anta att följden växer. Enligt sats 3.5.7 är gränsvärdet $\hat{g} = \lim g_n$ en lokalt μ-integrerbar funktion, och då $M \geq (\hat{g}\mu)(f) \geq (g_n\mu)(f) \to M$ följer att $(\hat{g}\mu)(f) = M$.

Låt nu h vara en godtycklig lokalt μ-integrerbar funktion sådan att $h\mu \leq \nu$. Vi skall visa att $h\mu \leq \hat{g}\mu$. Sätt $\tilde{h} = \max(h, \hat{g})$. Återigen enligt satserna 3.3.5 och 3.5.5 har vi

$$\tilde{h}\mu = (\max(h, \hat{g}))\mu = \max(h\mu, \hat{g}\mu) \leq \nu.$$

Nu har vi enligt definitionen av M

$$(\hat{g}\mu)(f) \leq (\tilde{h}\mu)(f) \leq M = (\hat{g}\mu)(f),$$

alltså $\mu((\tilde{h} - \hat{g})f) = 0$. Eftersom $(\tilde{h} - \hat{g}) \geq 0$ och $f > 0$ överallt får vi att $\tilde{h} - \hat{g}$ är en μ-nollfunktion, alltså $h\mu \leq \tilde{h}\mu = \hat{g}\mu$. Detta bevisar lemmat. □

Maximalegenskapen hos $g = \hat{g}$ kan också uttryckas så: Om vi skriver $\nu = g\mu + \nu'$ så är $\nu' \geq 0$, och om ett positivt mått med basen μ är $\leq \nu'$ så måste det vara noll. För att visa sats 3.6.1 återstår det att visa att ν' är främmande för μ.

LEMMA 3.6.3. *Låt $0 \leq \nu \leq \mu$ och antag att $\nu \neq 0$. Då existerar ett positivt mått $\neq 0$ med basen μ som är $\leq \nu$.*

BEVIS. Vi kan välja ett tal $t > 0$ så att $\nu - t\mu$ inte är ≤ 0, för annars vore $\nu \leq t\mu$ för varje $t > 0$ vilket medför att $\nu \leq 0$, alltså $\nu = 0$. Bilda för ett sådant t de två måtten $(\nu - t\mu)^+$ och $(\nu - t\mu)^-$ och en uppdelning av rummet i komplementära mängder E^+ och E^- enligt sats 3.3.6. Detta bör innebära att i någon mening $\nu \geq t\mu$ på E^+, så vi inför karakteristiska funktionen χ för E^+ och påstår att

a) $t\chi\mu \leq \nu$;
b) $t\chi\mu \neq 0$

vilket kommer att bevisa lemmat. Sats 3.3.6 innebär med våra nuvarande beteckningar att

$$\chi(\nu - t\mu)^- = 0, \quad (1-\chi)(\nu - t\mu)^+ = 0. \tag{3.6.1}$$

Påståendet a) följer nu om vi i identiteten

$$(\nu - t\mu)^+ - (\nu - t\mu)^- = \nu - t\mu$$

multiplicerar med χ, vilket enligt (3.6.1) ger

$$0 \leq \chi(\nu - t\mu)^+ = \chi\nu - t\chi\mu \leq \nu - t\chi\mu.$$

För att visa b) observerar vi att enligt förutsättningen är $\mu \geq \nu$, varför (3.6.1) ger

$$\chi\mu \geq \chi\nu \geq \chi(\nu - t\mu)^+ = (\nu - t\mu)^+ \neq 0.$$

□

LEMMA 3.6.4. *Låt μ och ν vara positiva mått. Om* $\min(\mu,\nu) \neq 0$*, alltså om μ och ν inte är främmande, så existerar ett positivt mått $\neq 0$ med basen μ som är $\leq \nu$.*

BEVIS. Sätt $\nu_1 = \min(\mu,\nu)$. Då är $0 \neq \nu_1 \leq \mu$, varför vi kan tillämpa föregående lemma med ν ersatt av ν_1. Lemmat följer eftersom varje mått $\leq \nu_1$ också är $\leq \nu$. □

SLUT PÅ BEVISET FÖR SATS 3.6.1. Vi har redan efter lemma 3.6.2 konstaterat att ett positivt mått ν kan skrivas $\nu = g\mu + \nu'$ där $g \geq 0$ och $\nu' \geq 0$ och ν' ej majorerar något positivt mått med basen μ. Men enligt lemma 3.6.4 medför det att $\min(\nu',\mu) = 0$, alltså att μ och ν' är främmande. Detta fullbordar beviset. □

SATS 3.6.5 (Lebesgue-Radon-Nikodym). *Låt μ och ν vara två positiva mått. Då är följande villkor ekvivalenta:*

a) *ν är ett mått med basen μ.*
b) *Varje μ-nollmängd är också en ν-nollmängd.*

BEVIS. Att a) medför b) följer av sats 3.5.2. För att bevisa att b) medför a) tar vi Lebesgueuppdelningen av ν,

$$\nu = g\mu + \nu'$$

där ν' är främmande för μ. Varje ν-nollmängd är då också en ν'-nollmängd, för $\nu' \leq \nu$. Nu betyder villkoret att μ och ν' är främmande att det finns en uppdelning av rummet i två komplementära delar varav den ena är en ν'-nollmängd och den andra är en μ-nollmängd, alltså också en ν'-nollmängd om b) gäller. Hela rummet är alltså en ν'-nollmängd, vilket bevisar att $\nu' = 0$. □

FÖLJDSATS 3.6.6. *Om $0 \leq \nu \leq \mu$ så är ν ett mått med basen μ. Vi har $\nu = g\mu$ med $0 \leq g \leq 1$.*

BEVIS. Det första påståendet följer av sats 3.6.5. Om $\nu = g\mu$ har vi $(1-g)\mu \geq 0$. Alltså är $(1-g)^-$ en μ-nollfunktion, dvs. $g \leq 1$ n.ö. med avseende på μ. □

Observera att följdsats 3.6.6 förbättrar lemma 3.6.3.

Övning 1. Visa att om μ och ν är två godtyckliga positiva mått så kan man finna ett positivt mått λ så att båda har basen λ. Utvidga eventuellt resultatet till uppräkneligt många givna positiva mått.

Övning 2. Använd övning 1 för att visa hur man kan definiera t.ex. $(\mu\nu)^{\frac{1}{2}}$ och $(\mu^2+\nu^2)^{\frac{1}{2}}$ för godtyckliga positiva mått μ och ν. (Detta kan användas för att definiera båglängden av en rektifierbar kurva, dvs. en kurva $\mathbf{R} \ni t \mapsto x(t) \in \mathbf{R}^d$ där alla koordinater $x_j(t)$ är funktioner av begränsad variation. Med $d\sigma = (\sum_1^d (dx_j)^2)^{\frac{1}{2}}$ är $\int \phi(t)d\sigma(t)$ integralen av en funktion ϕ på kurvan med avseende på båglängden.)

I den klassiska Lebesgueuppdelningen gör man en vidare uppdelning av måttet ν' i sats 3.6.1 i en "diskontinuerlig" och en "kontinuerlig" del. I Bourbakis terminologi blir detta följande:

Definition 3.6.7. Ett mått ν kallas *diffust* om varje punkt (och alltså varje uppräknelig mängd) är en nollmängd för $|\nu|$. Ett mått ν kallas *atomärt* om det finns en uppräknelig mängd vars komplement är en nollmängd för $|\nu|$.

Det är klart att ett diffust och ett atomärt mått alltid är främmande.

Sats 3.6.8. *Ett godtyckligt mått μ kan på ett och endast ett sätt skrivas i formen $\mu = \mu_1 + \mu_2$ med μ_1 diffust och μ_2 atomärt.*

Bevis. Entydigheten följer genast av att de två komponenterna måste vara främmande. (Jämför med beviset för entydigheten i sats 3.6.1.) För att visa existensen kan vi anta att $\mu \geq 0$. Mängden av de punkter t för vilka $\mu(\{t\}) \neq 0$ är uppräknelig, för om $\varepsilon > 0$ kan på varje kompakt mängd bara finnas ändligt många t med $\mu(\{t\}) > \varepsilon$. Numrera dessa punkter i en svit t_n, och sätt för $f \in C_0^+$

$$\mu_2(f) = \sum \mu(\{t_n\})f(t_n).$$

Serien är konvergent eftersom delsummorna är $\leq \mu(f)$, och det är klart att serien definierar ett mått. Sätter vi $\mu_1 = \mu - \mu_2$ så är $\mu_1 \geq 0$ och varje punkt är en nollmängd för μ_1, för de punkter som är nollmängder för μ är *a fortiori* nollmängder för μ_1, och punkterna t_n är också nollmängder enligt konstruktionen. Detta bevisar att μ_1 är diffust. $\square$

Kombination av sats 3.6.1 och sats 3.6.8 ger följande resultat:

Sats 3.6.9. *Låt μ vara ett positivt diffust mått. Varje mått ν kan då på ett och endast ett sätt skrivas i formen*

$$\nu = g\mu + \nu' + \nu''$$

där g är lokalt μ-integrerbar, ν' är diffust och främmande för μ och ν'' är atomärt (och alltså främmande för μ).

3.7. Kontinuerliga lineära funktionaler på $\mathbf{L}^{\mathbf{p}}_{\mu}$

Med en kontinuerlig lineär funktional på L^p_μ menas en kontinuerlig lineär funktion

$$L^p_\mu \ni f \mapsto \theta(f) \in \mathbf{R}.$$

Lineariteten betyder att

$$\theta(af+bg) = a\theta(f) + b\theta(g); \quad a, b \in \mathbf{R},\ f, g \in L^p_\mu;$$

och kontinuiteten är ekvivalent med att det finns en konstant C så att

$$|\theta(f)| \le C\|f\|_p, \quad f \in L^p_\mu.$$

Här är $\|f\|_p$ normen i L^p_μ. Att detta medför kontinuitet är uppenbart, och vi lämnar som övning att visa att kontinuitet i origo enbart medför denna olikhet. Den minsta möjliga konstanten C kallas normen av den lineära funktionalen θ.

Sats 3.7.1. *Om θ är en kontinuerlig lineär funktional på L^p_μ, $1 \le p < \infty$, så existerar en funktion $g \in L^q_\mu$, där $1/p + 1/q = 1$, så att*

$$\theta(f) = \int fg\,d\mu, \quad f \in L^p_\mu. \tag{3.7.1}$$

Normen av θ är lika med $\|g\|_q$.

Att högra sidan av (3.7.1) är en lineär funktional på L^p_μ med normen $\|g\|_q$ är Hölders olikhet och dess omvändning som vi visat i sats 2.9.2 då μ är Lebesguemåttet. Beviset är oförändrat för ett allmänt positivt μ.

Bevis. Bevis för satsenOm två kontinuerliga lineära funktionaler på L^p_μ överensstämmer för alla $f \in C_0$ så är de identiska eftersom varje $f \in L^p_\mu$ enligt sats 2.9.4 kan approximeras godtyckligt nära i L^p_μ norm med funktioner i C_0. Det räcker alltså att visa att man kan finna g så att (3.7.1) gäller då $f \in C_0$. Vi betraktar därför restriktionen av θ till C_0 och kallar den för ν. Eftersom

$$|\nu(f)| \le C\|f\|_p, \quad f \in C_0,$$

så är ν ett Radonmått: om en svit $f_n \in C_0$ är noll utanför en fix kompakt mängd och går likformigt mot noll så är det klart att $\|f_n\|_p \to 0$, alltså $\nu(f_n) \to 0$. Av definitionen för ν^+ och ν^- får vi också

$$\nu^+(f) \le C\|f\|_p, \quad \nu^-(f) \le C\|f\|_p, \quad f \in C_0^+.$$

Av symmetriskäl räcker det att diskutera ν^+ i fortsättningen. Vi har

$$\int^* f\,d\nu^+ \le C\Big(\int^* f^p\,d\mu\Big)^{1/p}, \quad f \ge 0,$$

för detta är sant då $f \in C_0^+$, alltså då $f \in I^+$ och därför för varje $f \ge 0$. Varje μ-nollmängd är därför en ν^+-nollmängd så det följer av sats 3.6.5 att $\nu^+ = g^+\mu$ för något g^+ som är lokalt μ-integrerbart. Den sista delen av beviset för sats 2.9.2 visar nu att $g^+ \in L^q_\mu$. Alltså kan θ skrivas i formen (3.7.1) med $g \in L^q_\mu$, och sats 2.9.2 ger också att normen är lika med $\|g\|_q$. □

Observera att satsen inte är sann då $p = \infty$.

3.8. Lebesgues uppdelning i det klassiska fallet

Vi skall här studera sats 3.6.1 närmare då μ är Lebesguemåttet. Låt alltså ν vara ett godtyckligt mått och betrakta uppdelningen

$$\nu = g\mu + \nu'$$

där ν' är främmande för Lebesguemåttet μ. Vi skall nu anknyta denna uppdelning till derivationen av multipelintegralen som studerades i avsnitt 2.10.

SATS 3.8.1. *För nästan alla x gäller att*

$$g(x) = \lim_{\mu(S)\to 0} (\mu(S))^{-1} \int_S d\nu,$$

där S betecknar klot som innehåller punkten x.

BEVIS. För den del av ν som har basen μ känner vi redan detta resultat från sats 2.10.1. Det gäller därför bara att bevisa att "derivatan" av ett singulärt mått (= mått som är främmande för Lebesguemåttet) existerar och är lika med 0 n.ö.. Vi kan anta att $\nu \geq 0$.

Observera först att om ν är ett godtyckligt positivt mått och vi definierar

$$\tilde{\nu}(x) = \sup_{x\in S} (m(S))^{-1} \int_S d\nu$$

så kan sats 2.10.2 utvidgas till

$$\mu(\{x; \tilde{\nu}(x) > s\}) \leq 3^d s^{-1} \nu^*(1), \quad s > 0.$$

Beviset kräver ingen förändring. Antag nu att ν och μ är främmande. Då existerar en uppdelning av $\mathbf{R}^d$ i två komplementära mängder E_1 och E_2 så att

$$\mu(E_1) = 0, \quad \nu(E_2) = 0.$$

Om O är en öppen mängd innehållande E_2 med $\nu(O) < \infty$ så sätter vi $\nu_O = \chi_O \nu$. Eftersom $\nu(E_2) = 0$ kan man välja O så att $\nu_O(1) = \nu(O)$ är godtyckligt litet. Nu har vi

$$\mu(\{x; \tilde{\nu}_O(x) > s\}) \leq 3^d s^{-1} \nu_O(1).$$

Om M_s betecknar mängden av de x för vilka

$$\overline{\lim_{\mu(S)\to 0, x\in S}} (\mu(S))^{-1} \int_S d\nu > s$$

så är $M_s \cap E_2$ innehållen i O, och $\tilde{\nu}_O(x) > s$ i denna mängd. Eftersom E_1 är en μ-nollmängd har vi alltså

$$\mu^*(M_s) = \mu^*(M_s \cap E_2) \leq \mu^*(\{x; \tilde{\nu}_O(x) > s\}) \leq 3^d s^{-1} \nu_O(1).$$

Då O kan väljas så att $\nu_O(1)$ är godtyckligt litet måste M_s vara en μ-nollmängd för varje $s > 0$. Detta bevisar sats 3.8.1. $\square$

I det 1-dimensionella fallet ger sats 3.8.1 speciellt (se sats 2.10.5:

SATS 3.8.2. *Om ϕ är en funktion av begränsad variation så existerar dess derivata $\phi'(x)$ nästan överallt och är en lokalt integrerbar funktion med avseende på Lebesguemåttet.*

ÖVNING. Visa att för nästan alla x gäller för varje reellt tal a

$$\lim_{\mu(S)\to 0, x\in S} (\mu(S))^{-1} \int_S |d\nu - a d\mu| = |g(x) - a|.$$

Observera speciellt fallet $a = g(x)$.

ÖVNING. Låt $h \in L^\infty$ vara noll utanför en kompakt mängd. Sätt $h_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d} h(x/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Visa att

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int h_\varepsilon(x-y) d\nu(y) = g(x) \int h(y)\, dy \text{ för nästan alla } x.$$

Här har ν och g samma betydelse som i sats 3.8.1.

Övning. Visa direkt genom att generalisera beviset för sats 2.10.5 att

$$g(x) = \lim_{\mu(S)\to 0, x\in S} \mu(S)^{-1} \int d\nu$$

existerar nästan överallt. Detta ger då μ är Lebesguemåttet en alternativ härledning av sats 3.6.1.

3.9. Diverse utvidgningar

Vi har här uteslutande behandlat integration av reellvärda funktioner. Utvidgningen till integration av funktioner med värden i ett Banachrum vållar emellertid inga svårigheter. Man definierar först $\int f\, d\mu$ då f tillhör mängden $C_0(\mathbf{R}^d, B)$ av kontinuerliga funktioner med kompakt stöd som har värden i B genom att använda Riemannsummor och den likformiga kontinuiteten hos f. Därefter kan L^1 definieras som rummet av alla funktioner f med värden i B sådana att för varje $\varepsilon > 0$ finns en funktion $g \in C_0(\mathbf{R}^n, B)$ med

$$\int^* \|f - g\|_B \, d\mu < \varepsilon.$$

Det är också lätt att se att vi inte har använt några egenskaper hos $\mathbf{R}^d$ utom att $\mathbf{R}^d$ är ett lokalt kompakt topologiskt rum (dvs. varje punkt har en kompakt omgivning) med en uppräknelig bas för öppna mängder (dvs. det finns uppräkneligt många öppna mängder så att varje öppen mängd är föreningsmängden av en delföljd av dem). Man kan i själva verket också helt bortse från topologins roll i sammanhanget. Låt alltså E vara en mängd och C_0 en lineär mängd av reellvärda funktioner på E sådan att $f \in C_0$ medför $|f| \in C_0$. Då ligger också $\max(f, g)$ och $\min(f, g)$ i C_0 om $f, g \in C_0$. Låt nu μ vara en positiv lineärform på C_0 som uppfyller villkoret (3.1.3). Om man definierar I^+ som mängden av alla gränsvärden av växande sviter ur C_0^+ så kan man utan väsentliga förändringar upprepa definitionen av L^1, mätbarhet osv. Framställningen blir snarast kortare genom att man inte behöver intressera sig för att karakterisera funktionerna i I^+.

Den nu skisserade situationen förekommer naturligt i sannolikhetsläran. Där är C_0^+ på ett eller annat sätt givet av axiomsystemet, eventuellt som alla ändliga lineärkombinationer av karakteristiska funktioner för mängder som uppträder i detta.

KAPITEL 4

En kort historik

4.1. De antika förebilderna

Beräkning av area och volym av geometriska objekt har sysselsatt matematikerna sedan antiken. Redan babylonierna kunde beräkna arean av rektanglar och trianglar, och grekerna visste hur man med passare och linjal kan konstruera en kvadrat med samma area som en given polygon. Det togs därvid för givet att begreppen area och volym är väldefinierade med följande egenskaper (Euklides elementa bok I):

> Storheter som är lika med samma storhet är också lika med varandra.
> Om lika stora läggs till lika stora blir summorna lika stora.
> Om lika stora tas bort från lika stora blir resterna lika stora.
> Det hela är större än sina delar.

Dessa axiom gör det också möjligt att bestämma arean av en mera komplicerad figur med uttömningsmetoden, dvs. genom att uppskatta den nedåt (resp. uppåt) med arean av en inskriven (resp. omskriven) polygon. För enhetscirkelns area π erhöll exempelvis Archimedes genom att betrakta reguljära $3 \cdot 2^k$ hörningar uppskattningen

$$3\tfrac{10}{71} < \pi < 3\tfrac{10}{70}.$$

(Med $k = 28$ beräknade arabiska matematiker 17 korrekta decimaler på 1400-talet; se [Aa, sid. 125].) Större vikt lade Archimedes vid sin upptäckt att arean av ett parabelsegment är $4/3$ gånger arean av den triangel som bildas av den begränsande kordan och tangeringspunkten för den parallella tangenten. Anakronistiskt kan hans metod beskrivas så att vi väljer ett koordinatsystem där parabeln definieras av $y = ax^2$ och låter kordans ändpunkter vara (x_j, ax_j^2), $j = 1, 2$. Då är lutningen $a(x_1 + x_2)$ lika med tangentens lutning i (x, ax^2) där $x = (x_1 + x_2)/2$, och de tre punkterna bildar en triangel med arean $T = a|x_1 - x_2|^3/8$. Återstoden av segmentet består av två parabelsegment som definieras av kordorna mellan (x_j, ax_j^2) och (x, ax^2) för $j = 1, 2$, och sammanlagda arean av motsvarande trianglar är $2a|(x_1 - x_2)/2|^3/8 = T/4$. Om man fortsätter att inskriva trianglar i de nya överskjutande parabelsegment som bildas så får man efter n steg en inskriven polygon med arean

$$T(1 + 1/4 + \cdots + 1/4^{n-1}) = T(1 - 4^{-n})/(1 - 4^{-1}) \to 4T/3 \quad \text{då } n \to \infty,$$

och man kan finna omskrivna polygoner med samma gränsvärde. Ännu viktigare ansåg Archimedes sitt resultat att volymen (och arean) av ett klot är $2/3$ av volymen (resp. arean) av en omskriven cirkulär cylinder, ett resultat som enligt hans önskan höggs in på gravstenen med en beskrivande figur.

4.2. Från Cavalieri till Riemann

Galileis elev *Cavalieri* (1598–1647) tog upp problemet att generalisera Archimedes resultat om parabelsegmentets area genom att beräkna arean av

$$\{(x,y) \in \mathbf{R}^2; 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x^k\}$$

då k är ett heltal > 2. Genom att approximera uppåt och nedåt med rektanglar med hörn i punkterna $k\nu/n$, där $0 \le \nu \le n$, kunde han uppskatta arean uppåt och nedåt med

$$\sum_1^n \frac{1}{n}\Big(\frac{\nu}{n}\Big)^k \quad \text{resp.} \quad \sum_0^{n-1} \frac{1}{n}\Big(\frac{\nu}{n}\Big)^k.$$

Med alltmera arbete kunde han beräkna summan då $k \le 9$, för den är ett polynom i n av grad $k+1$ delat med n^{k+1}, och han fann gränsvärdet $1/(k+1)$, helt i andan av den klassiska uttömningsmetoden. Svårigheten att klara av ett allmänt k eliminerades av *Fermat* (1601–1665) som observerade att summationerna blev enkla om man valde delningspunkterna i en geometrisk serie i stället. (Se [T, kapitel II].)

Cavalieri uttalade också två allmänna principer: Om f och g är icke negativa funktioner i $[a,b]$ så är arean av

$$\{(x,y) \in \mathbf{R}^2; a \le x \le b, 0 \le y \le f(x) + g(y)\}$$

lika med summan av areorna av

$$\{(x,y) \in \mathbf{R}^2; a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\} \quad \text{och} \ \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; a \le x \le b, 0 \le y \le g(x)\},$$

vidare multipliceras arean av $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2; a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$ med c om f multipliceras med c. Detta motiveras med att arean är en summa av alla vertikala skärningar mellan $x = a$ och $x = b$, ett mycket suspekt resonemang vilket lätt inses om man försöker tillämpa det på en cirkelskiva betraktad som “summan” av sina radier. Fördubbling av radien medför att arean multipliceras med fyra och inte med två. Men Cavalieri visste säkert vad han gjorde och han hade den klassiska uttömningsmetoden i bakhuvudet.

Utvecklingen av differential- och integralkalkylen ledde till systematiskt studium av den bestämda integralen

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

med Leibniz’ beteckning för arean av $\{(x, tf(x)) \in \mathbf{R}^2; a \le x \le b, 0 \le t \le 1\}$, räknad med tecknet av f. Cavalieris principer innebär då att integralen beror lineärt på f. Integralbegreppet knöts till differentialkalkylen genom de fundamentala relationerna

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x), \tag{4.2.1}$$

$$\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a). \tag{4.2.2}$$

Att integralen var väldefinierad som en area ifrågasattes knappast under pionjärtiden. Man hade dock tagit ett långt steg utöver vad Archimedes uppnått genom att i formuleringen som integral kunna känna igen likartade problem och använda (4.2.2) med en stor arsenal av explicit kända primitiva funktioner f. Som påpekas i [W, sid. 225] innebar Archimedes beräkning av parabelsegmentets area och beräkningen av klotets volym i själva verket två evalueringar av samma integral på så olika vägar att det står klart att Archimedes inte insett sambandet.

Cauchy anses vara den förste som preciserade integralbegreppet och frigjorde det från förutsättningen att det *a priori* finns en väldefinierad area att stödja sig på. Han bevisade att om f är kontinuerlig i $[a, b] \subset \mathbf{R}$ så har

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_{i-1}) \tag{4.2.3}$$

ett gränsvärde $\int_a^b f\,dx$ då $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ och $\max(x_i - x_{i-1}) \to 0$. Beviset använder implicit att f är likformigt kontinuerlig (vilket först långt senare bevisades av Heine): Om $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ då $|x - y| \leq \delta$ så skiljer sig två summor av formen (4.2.3) med högst $\varepsilon(b - a)$ om längden av motsvarande delintervall är högst $\delta/2$, så Cauchys konvergensprincip visar att gränsvärdet existerar. Fallet av en växande funktion är ännu enklare att behandla med den klassiska uttömningsmetoden. Arean måste då ligga mellan

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_{i-1}) \quad \text{och} \quad \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_i).$$

Differensen är

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})(f(x_i) - f(x_{i-1}))$$
$$\leq \max(x_i - x_{i-1})\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1})) = \max(x_i - x_{i-1})(f(b) - f(a))$$

varav lätt följer att summorna konvergerar mot samma gränsvärde då $\max(x_i - x_{i-1}) \to 0$. Observera att här behöver man inte ens anta att f är kontinuerlig. Argumentet fungerar också för funktioner med ändligt många maxima och minima, och *Dirichlet* (1805–1859) visade för sådana funktioner i $[0, 2\pi]$ att Fourierserien konvergerar för varje x, med summan $\frac{1}{2}(f(x + 0) + f(x - 0))$. Funktionsklassen har emellertid stora brister, den är inte additiv och inte multiplikativ.

Då *Riemann* (1826–1866) i en avhandling [R] för erhållande av docentur 1854 åter tog upp framställningen av en funktion som en trigonometrisk serie

$$f(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

ägnade han ett par sidor åt att precisera integralbegreppet, som behövs redan för att skriva ner Fouriers formler för koefficienterna

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx. \tag{4.2.4}$$

För en funktion f definierad i $[a, b] \subset \mathbf{R}$ betraktar han en intervallindelning som i (4.2.3), inför summan

$$S = \sum_{j=1}^{n}\delta_j f(\xi_j), \quad \delta_j = x_j - x_{j-1},\ x_{j-1} \leq \xi_j \leq x_j,$$

och fastslår att $\int_a^b f(x)\,dx$ *skall vara gränsvärdet av* S *då* $\max\delta_j \to 0$ *om detta existerar oberoende av valet av* x_j *och* ξ_j*, men i annat fall saknar integralen mening.* (Senare mjukar han upp detta genom att tillåta ändligt många undantagspunkter y_ν förutsatt att integralen existerar över $[a, b]$ med intervall kring varje y_ν bortaget och att denna integral har ett gränsvärde då undantagsintervallens längd går mot noll.)

Eftersom ξ_j får väljas godtyckligt så är kravet tydligen att

$$\sum_1^n m(I_j)\sup_{I_j} f \quad \text{och} \quad \sum_1^n m(I_j)\inf_{I_j} f, \qquad I_j = [x_{j-1}, x_j],$$

skall ha samma gränsvärde då indelningens finhet går mot 0, vilket enligt Darboux' sats är ekvivalent med definitionen av Riemannintegralen i avsnitt 1.1. Riemann fortsatte med att konstatera att villkoret är ekvivalent med att

$$\sum_1^n m(I_j)\,\mathrm{osc}_{I_j} f \to 0, \qquad \mathrm{osc}_I f = \sup_{x,y\in I}(f(x) - f(y))$$

då indelningens finhet går mot noll. Detta medför att för varje fixt $\sigma > 0$ så måste summan av måtten av de intervall där oscillationen av f är minst σ gå mot noll. Om vi definierar oscillationen av f i en punkt x som gränsvärdet av oscillationen i intervallet $[x-\delta, x+\delta]\cap[a, b]$ då $\delta \to 0$ så medför det att Jordanmåttet av mängden E_σ av punkter där oscillationen är $\geq \sigma$ är lika med 0. Omvänt är det en lätt övning att inse att detta också är ett tillräckligt villkor. Det är ekvivalent med villkoret i sats 2.6.9, för mängden E_0 av diskontinuiteter är $\cup_1^\infty E_{1/j}$, vilket är en Lebesguenollmängd om E_σ har Jordanmått, alltså Lebesguemått, noll för alla $\sigma > 0$. Omvänt, om E_0 är en Lebesguenollmängd så är E_σ en sluten Lebesguenollmängd, så Jordanmåttet är noll enligt en övning efter sats 2.3.5. (Detta visar också att Riemanns villkor är ekvivalent med att varje sluten delmängd av E_0 har Jordanmåttet noll. Detta villkor, som har fördelen att bara bero på E_0 och inte alls på oscillationens storlek, upptäcktes av Vitali 1903 och W. H. Young 1904 vid tiden för Lebesgueintegralens genombrott men oberoende av denna; se [H, sid. 146–149]. Bevisa detta som övning utan användning av Lebesguemåttet!)

Riemann gav ett exempel på en integrerbar funktion som är diskontinuerlig för alla rationella punkter med jämn nämnare,

$$f(x) = \sum_1^\infty \frac{g(nx)}{n^2}, \quad g(x) = \begin{cases} x & \text{då } -\frac{1}{2} < x - n < \frac{1}{2}, n \in \mathbf{Z} \\ 0 & \text{då } x - \frac{1}{2} \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Summan konvergerar likformigt vilket medför kontinuitet i alla punkter där termerna är kontinuerliga. Diskontinuitet inträffar om $2nx = p$ där p är ett udda heltal, och om n och p är relativt prima får man då

$$f(x+0) - f(x) = f(x) - f(x-0) = -\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^\infty \frac{1}{n^2(2\nu+1)^2} = -\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{4})\frac{1}{n^2}\sum_1^\infty \nu^{-2} = -\frac{\pi^2}{16n^2}.$$

4.3. Lebesgues föregångare

Riemanns avhandling [R] publicerades först 1867, efter hans död, och det dröjde ännu längre innan den blev allmänt känd. Efterhand blev den emellertid dominerande, och framställningen i läroböckerna närmade sig i huvudsak den som givits här. Över- och underintegraler infördes av flera författare på 1870-talet, och den nuvarande beteckningen infördes av Volterra 1881. Utvidgningen till funktioner av flera variabler ledde bland annat till införandet av Jordanmätbarhet på 1890-talet i samband med att resultaten om upprepad integration i avsnitt 1.3 utkristalliserades.

Under senare delen av 1800-talet utvecklades också mängdläran, i stor utsträckning motiverad av studiet av integral och mått. Konstruktioner i linje med Cantormängden i avsnitt 1.1 (som hade många föregångare) visade på brister hos Riemannintegralen, exempelvis när det gäller den allmänna giltigheten av (4.2.2). Det följer genast av medelvärdessatsen att (4.2.2) gäller om f' existerar i varje punkt och är Riemannintegrerbar. Däremot visade Volterra (1860–1940) redan 1881 som student i Pisa att f' kan existera i varje punkt och vara begränsad men inte Riemannintegrerbar. Hans exempel utgår från en sluten mängd $F \subset [0,1]$ som saknar inre punkter men har positivt yttre Jordanmått. (Se övning 5.) Komplementet $[0,1] \setminus F$ består då av uppräkneligt många disjunkta öppna intervall (α, β). En funktion f definieras så att $f = 0$ i F och i ett av dessa intervall (α, β)

$$f(\alpha + t) = t^2 \sin(1/t) \quad \text{då } 0 \le t \le \gamma$$

där γ är det största tal $\le (\beta - \alpha)/2$ där derivatan blir 0, alltså $\tan(1/t) = 2/t$. Därefter fortsätts f till hela intervallet så att $f(\alpha + t) = f(\beta - t)$ då $0 \le t \le \beta - \alpha$ och f är konstant i $[\alpha + \gamma, \beta - \gamma]$. Om $x \in F$ så blir $|f(x) - f(y)| \le (x - y)^2$ då $y \in [0,1]$ så $f'(x) = 0$ då. I (α, β) är f kontinuerligt deriverbar med derivatan $\le (\beta - \alpha) + 1 \le 2$, och oscillationen är 2 i ändpunkterna. Alltså existerar $f'(x)$ för varje x, $|f'(x)| \le 2$ och oscillationen är minst lika med 2 i varje punkt i F, så f' är inte Riemannintegrerbar.

Redan Fouriers formler för Fourierkoefficienterna ställer frågan om man alltid kan integrera en serie term för term, eller ekvivalent om man kan göra en gränsövergång under integraltecknet. Arzelà [A] bevisade 1885 att

$$\int_I \lim_{n \to \infty} f_n \, dx = \lim_{n \to \infty} \int_I f_n \, dx$$

förutsatt att funktionerna f_n alla är Riemannintegrerbara i I, att det finns en konstant M så att $|f_n| \le M$ för alla n, och att $\lim f_n(x)$ existerar överallt och är Riemannintegrerbar. Satsen återupptäcktes väsentligen av Osgood [O] nästan 15 år senare och kallas ofta för Osgoods sats. (Se sats 1.2.4.) Svagheten i den är att Riemannintegrerbarheten av gränsvärdet inte är en konsekvens av de andra antagandena och är svår att verifiera för en följd om vilken man inte vet mycket mer än att den konvergerar i varje punkt.

Den omedelbare föregångaren till Lebesgue var E. Borel (1871–1956) som kom till integrationsteorin via ett problem i analytisk funktionsteori. Om Γ är en enkel C^2 kurva i det komplexa talplanet $\mathbf{C}$, exempelvis en cirkel, och $(a_n)_1^\infty$ är en tät punktföljd på Γ så är

$$f(z) = \sum_1^\infty \frac{A_n}{z - a_n},$$

där $A_n > 0$ och $\sum_1^\infty A_n < \infty$, en analytisk funktion i det inre och i det yttre av Γ. Det är lätt att inse att $(z - a_n)f(z) \to A_n$ om $z \to a_n$ inom ett slutet vinkelfält som inte innehåller tangentriktningen i a_n. Detta medför att funktionen $f(z)$ i det inre (resp. yttre) av Γ inte i någon punkt kan fortsättas över randen. Borel visade emellertid 1892 att om $\sum \sqrt{A_n} < \infty$ så finns ändå ett nära samband mellan funktionen i det yttre och i det inre. Det finns nämligen en tät punktmängd $E \subset \Gamma$ sådan att restriktionen av f till varje C^1 kurva som korsar Γ transversellt i E är kontinuerlig. Detta följer om $\sum A_n/|z - a_n| < \infty$ då $z \in E$. För att visa att det finns en sådan mängd E tog Borel för litet $\varepsilon > 0$ bort från Γ ett intervall I_n med båglängd $\varepsilon\sqrt{A_n}$ symmetriskt kring a_n och konstaterade att $A_n/|z - a_n| \leq C\sqrt{A_n}/\varepsilon$ då $z \in \Gamma \setminus I_n$. Serien är därför likformigt konvergent på $E_\varepsilon = \Gamma \setminus \cup I_n$, och summan av båglängderna av intervallen I_n är högst $\varepsilon \sum \sqrt{A_n}$. För att visa att $E = \cup E_\varepsilon$ är tät på Γ visade Borel att *om* J_n *är en följd av öppna intervall* $\subset [a,b] \subset \mathbf{R}$ *och* $\sum m(J_n) < b - a$ *så är* $[a,b] \setminus \cup J_n$ *inte tom*. Detta visas lätt genom successiv intervallhalvering. När man har tillgång till Lebesgueintegralen så är påståendet självklart. (Visa som övning med hjälp av övning 18 att under Borels förutsättningar finns $E \subset \Gamma$ så att $\Gamma \setminus E$ är en nollmängd och restriktionen av f till varje kurva som korsar Γ transversellt i E är i C^1.)

Att en uppräknelig mängd, exempelvis de rationella talen, kan övertäckas med *uppräkneligt* många öppna intervall I_j med $\sum m(I_j)$ godtyckligt liten hade tidigare observerats av flera matematiker. Den nya insikten var att varje mängd med den egenskapen har ett stort komplement och att egenskapen ärvs av uppräkneliga föreningsmängder.

1898 var Borel redo att dra vittgående slutsatser av sina erfarenheter. För en öppen delmängd av $\mathbf{R}$ definierade han måttet som $\sum m(I_j)$ där I_j är dess komponenter, som alla är öppna intervall. Han deklarerade sedan att för de delmängder av $\mathbf{R}$ som man kan erhålla med utgångspunkt från öppna mängder genom att upprepa operationerna att ta uppräknelig föreningsmängd och komplement, alltså också ta uppräkneliga snitt, kan man entydigt definiera ett mått så att

$$m\Big(\bigcup_{j=1}^\infty E_j\Big) = \sum_{j=1}^\infty m(E_j) \tag{4.3.1}$$

om E_j är disjunkta mängder i denna klass (som nu kallas). Man säger att måttet är fullständigt additivt. Detaljerade bevis för att detta är möjligt gavs dock inte.

4.4. Lebesgue och hans samtida

Det var Lebesgue (1875–1941) som 1902 i sin doktorsavhandling [L1] lade en fast grund för integrationsteorin på $\mathbf{R}$. Med utgångspunkt från Borels definition av måttet av en öppen mängd definierade han det yttre måttet $m^*(E)$ av en godtycklig mängd $E \subset \mathbf{R}$ som $\inf m(O)$ taget över öppna mängder $O \supset E$. En nollmängd, dvs. en mängd med yttre måttet noll, är då innehållen i en Borelmängd med måttet noll (men är inte nödvändigtvis en Borelmängd). De mätbara mängderna blir de som skiljer sig från en Borelmängd enbart med en nollmängd (se sats 2.6.6). En reellvärd funktion f på $\mathbf{R}$ kallas mätbar om $\{x; f(x) > a\}$ är mätbar för varje $a \in \mathbf{R}$, och för en icke negativ mätbar funktion definieras integralen som

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{k=1}^\infty \varepsilon m(\{x; f(x) > k\varepsilon\})$$

då gränsvärdet är ändligt. (Det existerar alltid men kan vara oändligt.) Med hjälp av den fullständiga additiviteten kunde Lebesgue bevisa den fundamentala majorantsatsen. Han visade också satsen om upprepad integration i den svagare formen att den inre integralen skulle tas som en överintegral såvida inte integranden är Borelmätbar. Denna skönhetsfläck eliminerades av Fubini som bevisade att om E är en nollmängd i $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^e$ så är $\{y \in \mathbf{R}^e; (x, y) \in E\}$ en nollmängd i $\mathbf{R}^e$ för nästan alla $x \in \mathbf{R}^d$.

I en bok [L2] publicerad 1904 kunde Lebesgue komplettera teorin med studiet av derivatan med avseende på övre gränsen av integralen av en funktion i $L^1(\mathbf{R})$. Han visade alltså att (4.2.1) gäller för nästan alla x då $f \in L^1$. Vidare visade han att (4.2.2) gäller för en funktion f av begränsad variation precis då f är absolutkontinuerlig, dvs. $\sum |f(b_j) - f(a_j)| \to 0$ då $[a_j, b_j]$ är disjunkta intervall vars sammanlagda mått går mot 0. (Se Definition 3.5.1 och sats 3.6.5 och för derivationssatsen också avsnitten 2.10 och 3.8. Vi har där använt mycket enklare bevis som härstammar från Hardy och Littlewood [HL].) Motsvarande sats för flera variabler kom några år senare.

Tillämpningarna och ytterligare utvidgningar kom i snabb följd. Den harmoniska analysen och den analytiska funktionsteorin tog ett språng framåt tack vare det nya integralbegreppet. Riesz-Fischers sats (satsERNA 2.4.10 och 2.9.5) kombinerad med karakteriseringen av de kontinuerliga lineärformerna på L^p (sats 3.7.1) gjorde det möjligt att utveckla den abstrakta funktionalanalysen med tillämpning på konkreta problem inom analysen. Sedan F. Riesz (1880–1956) bevisat i [Rz], att de kontinuerliga lineära funktionalerna på rummet av kontinuerliga funktioner på ett kompakt intervall $\subset \mathbf{R}$ kan identifieras med de integraler som 1894 definierats av Stieltjes (1856–1894) (se sats 3.2.1), dröjde det inte länge innan Radon (1887–1956) år 1913 formulerade en motsvarighet för funktioner av flera variabler och en utvidgning av Lebesgues teori till den situationen. I enlighet med den efter Lebesgue dominerande traditionen utgick Radon från en formulering baserad på mått av mängder och inte lineära funktionaler på de kontinuerliga funktionerna som i kapitel III. Vi har där liksom i kapitel II följt en linje som går tillbaka till ett arbete av W. H. Young 1911, och bland annat fullföljts av Bourbaki. Den intresserade läsaren hänvisas till historiken i [B] och till [H] för ytterligare historisk bakgrund och flera referenser.

Litteraturförteckning

[Aa] A. Aaboe *Episodes from the early history of mathematics*, Random House, New York, 1964.

[Ar] C. Arzelà *Sulla integrabilità di una serie di funzioni*, Rend. Acc. dei Lincei **1** (1885), 321–326 *Sulla integrazione per serie* Rend. Acc. dei Lincei **1**, (1885), 532–537, 566–569.

[B] N. Bourbaki *Intégration, Chapitre 5*, Hermann, Paris, 1956.

[H] T. Hawkins *Lebesgue's theory of integration* University of Wisconsin Press, Madison, Milwaukee, London, 1970.

[HL] G. H. Hardy och J.E. Littlewood *A maximal theorem with function-theoretic applications* Acta Math. **54**, 1930, 81–116.

[L1] H. Lebesgue *Intégrale, longueur, aire* Annali di Mat. (3)**7**, 1902, 231–359.

[L2] H. Lebesgue *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* Gauthier-Villars, Paris, 1904.

[O] W. F. Osgood *Non uniform convergence and the integration of series term by term* Amer. J. Math. **19**, 1897, 155–190.

[R] B. Riemann *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe* Gesammelte Mathematische Werke, 259–303, Teubner Verlag, Leipzig, 1892.

[Rz] F. Riesz *Sur les opérations fonctionnelles linéaires* C. R. Acad. Sci. Paris, 1909, **149**, 974–977.

[S] T.-J. Stieltjes *Recherches sur les fractions continues* Toulouse Ann. **8**, 1894, 1–122.

[T] O. Toeplitz *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung* Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1949.

[W] B. L. van der Waerden *Science awakening* P. Noordhoff Ltd, Groningen, 1954.

Appendix

Som bekant är rummet $\mathbf{R}^d$ på vilket vi bedriver vår integrationsteori ett vektorrum över de reella talen $\mathbf{R}$, och varje lineär avbildning på $\mathbf{R}^d$ är av formen $x \mapsto Ax$ där A är en reell $d \times d$ matris och x uppfattas som en $d \times 1$ matris.

Då $x \in \mathbf{R}^d$ menar vi med $\|x\|$ alltid den euklidiska normen, dvs.

$$\|x\| = (x_1^2 + \cdots + x_d^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{om } x = (x_1, \ldots, x_d).$$

Vi påminner om att en delmängd O av $\mathbf{R}^d$ kallas *öppen* om varje $x \in O$ är medelpunkt för något klot innehållet i O dvs. om $\{y; \|y - x\| < \delta\} \subset O$ för något $\delta > 0$. Det följer genast att godtyckliga unioner och ändliga snitt av öppna mängder är öppna. Unionen M° av alla öppna mängder innehållna i en given mängd M är alltså öppen. Denna största öppna delmängd av M kallas *det inre av* M. Observera att $x \in M^\circ$ om och endast om x är medelpunkt för något öppet klot innehållet i M.

Om O är en öppen delmängd av $\mathbf{R}$ så är $O = \cup I_k$ där I_k är en följd (eventuellt ändlig) av disjunkta öppna intervall vars ändpunkter inte tillhör O. För varje $x \in O$ är nämligen $\alpha = \inf\{y; (y, x) \subset O\}$ och $\beta = \sup\{y; (x, y) \subset O\}$ antingen oändliga eller också punkter som inte tillhör O. Intervallet (α, β) är då det största öppna intervall $\subset O$ som innehåller x. Olika maximala öppna intervall $\subset O$ måste vara disjunkta och deras föreningsmängd är lika med O. Om $r_1, r_2, \ldots$ är en uppräkning av de rationella talen som tillhör O så får vi en uppräkning av de maximala intervallen genom att stryka de rationella tal som ligger i samma maximalintervall som något av de tidigare. Detta bevisar påståendet.

En mängd F kallas *sluten* om dess komplement $\complement F = \mathbf{R}^d \setminus F$ är öppet. Godtyckliga snitt och ändliga unioner av slutna mängder är slutna. Den minsta slutna mängd som omfattar en given mängd M, dvs. snittet av alla slutna mängder som omfattar M, kallas *slutna höljet* av M och betecknas med $\overline{M}$. Observera att $x \in \overline{M}$ om och endast om varje öppet klot med medelpunkt i x skär M, alltså att $\complement\overline{M} = (\complement M)^\circ$. Vidare kallas $\overline{M} \cap \overline{\complement M} = \partial M$ för *randen av* M. Den består alltså av alla x sådana att varje öppet klot med medelpunkt x skär både M och dess komplement $\complement M$.

En sluten och begränsad delmängd av $\mathbf{R}^d$ kallas *kompakt.* Varje familj av öppna mängder som täcker en kompakt mängd K har enligt Borel-Lebesgues lemma en ändlig delfamilj som också täcker K.

Övning. Visa att a) F är sluten om och endast om gränsvärdet av varje konvergent följd ur F också tillhör F. b) K är kompakt om och endast om varje följd ur K har en delföljd som konvergerar mot en punkt i K.

För en kontinuerlig funktion $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ definieras *stödet* (engelska eller franska support) $\operatorname{supp} f$ som slutna höljet till mängden av alla x med $f(x) \neq 0$. Vi har alltså att $\complement(\operatorname{supp} f)$ är det inre av den mängd där $f(x) = 0$. Då stödet alltid är en sluten mängd är $\operatorname{supp} f$ kompakt om och endast om $f(x) = 0$ utanför en begränsad mängd. Mängden av alla kontinuerliga funktioner från $\mathbf{R}^d$ till $\mathbf{R}$ betecknas med $C = C(\mathbf{R}^d) = C(\mathbf{R}^d, \mathbf{R})$, och $C_0 = C_0(\mathbf{R}^d)$ består av funktionerna i C med kompakt stöd.

För godtyckliga funktioner definieras som vanligt nya funktioner

$$|f|, \quad f_1 + f_2, \quad f_1 f_2, \quad \max(f_1, f_2), \quad \min(f_1, f_2), \quad \lim f_n, \ \sup_n f_n, \quad \inf_n f_n,$$

genom att använda dessa operationer i varje punkt, alltså till exempel

$$(\max(f_1, f_2))(x) = \max(f_1(x), f_2(x)) \quad \text{och} \quad (\sup_n f_n)(x) = \sup_n f_n(x),$$

för alla $x \in \mathbf{R}^d$. Vi sätter $f^+ = \max(f, 0)$ och $f^- = \max(-f, 0)$, och har då

$$f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-.$$

Om E är en delmängd av $\mathbf{R}^d$ så definierar vi dess *karakteristiska funktion* χ_E genom

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } x \in E, \\ 0 & \text{om } x \in \complement E = \mathbf{R}^d \setminus E. \end{cases}$$

Det gäller att

$$\chi_{\complement E} = 1 - \chi_E, \quad \chi_{E_1 \cup E_2} = \max(\chi_{E_1}, \chi_{E_2}) = \chi_{E_1} + \chi_{E_2} - \chi_{E_1}\chi_{E_2},$$
$$\chi_{E_1 \cap E_2} = \min(\chi_{E_1}, \chi_{E_2}) = \chi_{E_1}\chi_{E_2}, \quad \chi_{E_1 \triangle E_2} = |\chi_{E_1} - \chi_{E_2}| = \chi_{E_1} + \chi_{E_2} - 2\chi_{E_1}\chi_{E_2}.$$

Här definieras den *symmetriska differensen* $E_1 \triangle E_2$ som $(E_1 \cup E_2) \setminus (E_1 \cap E_2)$, dvs. $E_1 \triangle E_2$ består av de punkter som tillhör endera av E_1 och E_2 men inte båda.

Övning. Visa att χ_E är kontinuerlig i punkten x då och endast då $x \notin \partial E$.

För en följd $(a_n)_1^\infty$, där a_n är reella tal eller $+\infty$ eller $-\infty$, skriver vi $a_n \uparrow a$ (resp $a_n \downarrow a$) då $n \to \infty$ om a_n växer (resp. avtar) mot a då $n \to \infty$, dvs. om

$$a_n \le a_{n+1} \text{ (resp. } a_n \ge a_{n+1}) \text{ för alla } n \text{ och } \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Den minsta avtagande följd som är större än eller lika med en godtycklig given följd $(a_n)_1^\infty$ är $(\sup_{k \ge n} a_k)_{n=1}^\infty$, och vi sätter

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (\sup_{k\ge n} a_k) = \inf_n (\sup_{k \ge n} a_k).$$

Analogt sätter vi

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (\inf_{k\ge n} a_k) = \sup_n (\inf_{k\ge n} a_k).$$

Det är klart att

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n \le \varlimsup_{n\to\infty} a_n$$

med likhet om och endast om $\lim_{n\to\infty} a_n$ existerar, ändligt eller oändligt.

Om $f : M \to \mathbf{R}$ är en reellvärd funktion på en godtycklig mängd M så betecknar vi med $\sup_M f$ och $\inf_M f$ supremum resp. infimum av värdemängden $f(M)$. Här sätter vi $\sup_M f = +\infty$ (resp. $\inf_M f = -\infty$) om f ej är uppåt (resp. nedåt) begränsad. Det är klart att

$$\inf_M f = -\sup_M (-f)$$

och att

$$\sup_M (f+g) \le \sup_M f + \sup_M g.$$

Tar vi $M = \{k; k \ge n\}$ så får vi då $n \to \infty$ om (a_n) och (b_n) är nedåt begränsade talföljder

$$\varlimsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) \le \varlimsup_{n\to\infty} a_n + \varlimsup_{n\to\infty} b_n.$$

Av $f \le g + |f-g|$ och $g \le f + |f-g|$ får vi också om f och g är uppåt begränsade att

$$|\sup_M f - \sup_M g| \le \sup_M |f-g|.$$

Detta ger om $M = \{1,2\}$ att

$$|\max(a_1,a_2) - \max(b_1,b_2)| \le \max(|a_1-b_1|, |a_2-b_2|).$$

För en icke-tom delmängd M av $\mathbf{R}^d$ definieras avståndet från $x \in \mathbf{R}^d$ till M genom

$$d(x,M) = \inf_{y\in M} \|x-y\| = -\sup_{y\in M}(-\|x-y\|).$$

Observera att $d(x,M) = 0$ om och endast om $x \in \overline{M}$. Vidare är $x \mapsto d(x,M)$ likformigt kontinuerlig (t.o.m. Lipschitzkontinuerlig) ty

$$|d(x_1,M) - d(x_2,M)| \le \sup_{y\in M} \big| -\|x_1-y\| + \|x_2-y\| \big| \le \|x_1-x_2\|.$$

Övning. Antag att $F \ne \emptyset$ är en sluten delmängd av den öppna mängden $O \subsetneq \mathbf{R}^d$. Visa att funktionen

$$f(x) = \frac{d(x, \complement O)}{d(x,F) + d(x,\complement O)}, \quad x \in \mathbf{R}^d,$$

är kontinuerlig, att $0 \le f \le 1$ och att $f(x) = 1$ (resp. $f(x) = 0$) om och endast om $x \in F$ (resp. $x \in \complement O$). (Visa eventuellt att $|f(x+h) - f(x)| \le \|h\|/(d(x,F) + d(x,\complement O))$.) Visa också att om F är kompakt så finns $f \in C_0$ med $0 \le f \le 1$ så att $\operatorname{supp} f \subset O$ och $f = 1$ i en omgivning av F.

ÖVNINGAR MED ANVISNINGAR OCH SVAR

Avsnitt 1.1 och 1.2

1. Låt $\varphi(x) = 1$ om $x - n \in [0, \frac{1}{2})$ och $\varphi(x) = 0$ om $x - n \in [\frac{1}{2}, 1)$ för något heltal n, och låt a_n vara en följd av reella tal med $\sum_1^\infty |a_n| < \infty$. Visa att serien $f(x) = \sum_1^\infty a_n \varphi(2^n x)$, konvergerar, att f är Riemannintegrerbar på varje intervall, och att för varje heltal $p > 0$

$$\Big(\sum_1^\infty a_n^2\Big)^p \le \int_0^1 f(x)^{2p}\,dx \le p^p \Big(\sum_1^\infty a_n^2\Big)^p.$$

2. Visa a) att om $K_n(x) = (1 + \cos x)^n = (1 + \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}))^n$ så är $I_n = \int_0^{2\pi} K_n(x)\,dx \ge 2^{n+2}/(e\sqrt{n})$, $n = 1, 2, \ldots$; b) att om f är en kontinuerlig funktion på $\mathbf{R}$ med perioden 2π så konvergerar

$$P_n(x) = \int_0^{2\pi} f(x - y) K_n(y)\,dy / I_n = \int_0^{2\pi} f(y) K_n(x - y)\,dy / I_n$$

likformigt mot $f(x)$ då $n \to \infty$; c) att P_n är ett trigonometriskt polynom av graden n, dvs.

$$P_n(x) = \sum_{-n}^{n} c_{n,k} e^{ikx}.$$

Utvidga till periodiska funktioner i $\mathbf{R}^d$!

3. Låt f vara en funktion i $\mathbf{R}^d$ sådan att $f(x + g) = f(x)$ om $x \in \mathbf{R}^d$ och $g \in \mathbf{Z}^d$. Visa att om f är Riemannintegrerbar på

$$I = \{x \in \mathbf{R}^d ; 0 \le x_j \le 1,\ j = 1, \ldots, d\}$$

så gäller

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T}\int_0^T f(t\alpha)\,dt = \underline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T}\int_0^T f(t\alpha)\,dt = \int_I f(x)\,dx$$

såvida koordinaterna $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ av $\alpha \in \mathbf{R}^d$ är lineärt oberoende över de rationella talen, alltså $r_1\alpha_1 + \cdots + r_d\alpha_d = 0$ med alla r_j rationella medför $r_1 = \cdots = r_d = 0$.

4. Visa att om f är en kontinuerlig funktion i kuben $I \subset \mathbf{R}^d$ så finns en följd av polynom P_k med $P_k(x) \to f(x)$ likformigt då $x \in I$.

5. Från det slutna intervallet $[0, 1]$ avskäres i mitten ett öppet intervall av längden a_1. Från vart och ett av de resterande slutna intervallen avskäres i mitten ett öppet intervall vars längd är a_2 gånger det slutna delintervallets längd. Förfarandet fortsättes och efter n steg fås en sluten mängd F_n. Visa att för den slutna mängden $F = \cap_1^\infty F_n$ är inre Jordanmåttet 0 och yttre Jordanmåttet $\prod_1^\infty (1 - a_n)$.

Avsnitt 1.3 och 1.4

6. Låt f vara en kontinuerligt deriverbar funktion i en öppen mängd $O \subset \mathbf{R}^d$ och antag att $K = \{x \in O; a \leq f(x) \leq b\}$ är kompakt samt att $f'(x) = (\partial f(x)/\partial x_1, \ldots, \partial f(x)/\partial x_d) \neq 0$ då $x \in K$. Visa att K är Jordanmätbar.

7. Låt $a_1, \ldots, a_d$ vara positiva tal. För vilka $\lambda \in \mathbf{R}$ är

$$\int_{r<\|x\|<R} \Big(\sum_1^d |x_j|^{a_j}\Big)^{-\lambda} dx$$

begränsad då $r \to 0$ resp. då $R \to \infty$?

8. Visa att om $g \in C_0(\mathbf{R}^d)$ är k gånger kontinuerligt deriverbar, så är

$$g_\varepsilon(x) = \int_I g(x + \varepsilon y)\, dy \quad \text{där } I = \{y \in \mathbf{R}^d; 0 \leq y_j \leq 1, j = 1, \ldots, d\}$$

också i $C_0(\mathbf{R}^d)$ och $k+1$ gånger kontinuerligt deriverbar. Visa att man i den första övningen på sidan 4 kan låta g vara k gånger kontinuerligt deriverbar för varje givet k.

9. Visa att om C_d är måttet av enhetsklotet $B_d = \{x \in \mathbf{R}^d; \|x\| \leq 1\}$ så gäller

$$\int_{\mathbf{R}^d} \varphi(\|x\|)\, dx = dC_d \int_0^\infty r^{d-1}\varphi(r)\, dr, \quad \varphi \in C_0(\mathbf{R}).$$

Visa också att $C_d = 2\pi C_{d-2}/d$, och beräkna därav C_d för varje d.

10. Visa att om $\varphi \in C_0(\mathbf{R}^d)$ och $\varphi(x)$ bara beror på $\|x\| = (\sum_1^d x_j^2)^{\frac{1}{2}}$ så är

$$\int \Big|\sum_1^d x_j\xi_j\Big|^p \varphi(x)\, dx = C_p\|\xi\|^p \int \|x\|^p\varphi(x)\, dx, \quad \xi \in \mathbf{R}^d,$$

där C_p ej beror av ξ och φ. Beräkna C_2.

11. Låt f vara en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion i en omgivning av en kompakt mängd $K \subset \mathbf{R}^d$, och sätt $f_h(x) = f(x) - \langle xh$. Visa att matrisen $(\partial^2 f_h/\partial x_j \partial x_k)_{j,k=1}^d$ är inverterbar i varje punkt i K där $\partial f_h/\partial x_j = 0$ för $j = 1, \ldots, d$, utom då h tillhör en kompakt mängd i $\mathbf{R}^d$ med Jordanmått noll.

Avsnitt 2.1 och 2.2

12. Låt f vara en kontinuerlig funktion på $\mathbf{R}$ och definiera $g(x) = f(x)$ då x är irrationellt eller 0, och $g(p/q) = 1/q$ då p och q är heltal utan gemensam delare och $q > 0$. Vad är villkoret på f för att g skall vara uppåt halvkontinuerlig? Kan g vara nedåt halvkontinuerlig?

13. Låt f vara en godtycklig icke negativ funktion i $\mathbf{R}^d$. Visa att

$$F(x, r) = \sup_{|x-y|<r} f(y)$$

är en nedåt halvkontinuerlig funktion i $\{(x, r); x \in \mathbf{R}^d, r > 0\}$, med värden i $[0, +\infty]$. Visa också att om f är uppåt begränsad så är $\lim_{r\to 0} F(x, r)$ den minsta uppåt halvkontinuerliga majoranten till $f(x)$.

14. Låt f och g vara icke negativa funktioner i $\mathbf{R}^d$ och sätt

$$h(x) = \sup_{y \in \mathbf{R}^d} (f(y) + g(x-y)).$$

Visa att h är nedåt halvkontinuerlig om f *eller* g är nedåt halvkontinuerlig, att f och g är begränsade om $h \not\equiv +\infty$ och att $\sup h \leq 2 \inf h$. Visa också att om g är begränsad och h är nedåt halvkontinuerlig för varje $f \geq 0$ så är g nedåt halvkontinuerlig.

15. Visa att om $f \in I^+(\mathbf{R})$ så gäller

$$\int^* f\, dx \leq \varliminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=-n^2}^{n^2} f(k/n).$$

Avsnitt 2.3 och 2.4

16. Låt $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara en följd av reella tal sådan att det existerar en konstant K så att inget intervall av längden 1 innehåller flera än K av talen a_n. Visa att om f är en reellvärd funktion på $\mathbf{R}$ med $\int^* |f|\, dx < \infty$ så konvergerar $\sum_1^\infty f(x + a_n)$ för nästan alla $x \in \mathbf{R}$.

17. Visa att om $f \in L^1(\mathbf{R})$ och $a, b \in \mathbf{R}$ med $a + b \geq 1$ och $b > 0$ så konvergerar $\sum_1^\infty n^{-a} f(x + n^b)$ för nästan alla x.

18. Låt $\{a_n\}_1^\infty$ och $\{b_n\}_1^\infty$ vara reella talföljder med $b_n \geq 0$ för alla n. Visa att

$$\sum_1^\infty b_n |x - a_n|^{-\alpha}$$

konvergerar för nästan alla $x \in \mathbf{R}$ om $\sum_1^\infty b_n^{1/\alpha} < \infty$ och $\alpha > 1$.

19. Visa att om $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$ och $a, b \in \mathbf{R}$ med $a + db \geq 1$ och $b > 0$ så konvergerar $\sum_1^\infty n^{-a} f(n^b x)$ för nästan alla $x \in \mathbf{R}^d$. Ge ett exempel som visar att detta inte alltid är sant om $a + db < 1$. När konvergerar summan av termernas L^1 normer?

20. Visa att om $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$ så följer att

$$\int e^{i\langle x, \xi \rangle} f(x)\, dx \to 0 \quad \text{då } \xi \to \infty \text{ i } \mathbf{R}^d; \quad \text{här är } \langle x, \xi \rangle = \sum_1^d x_j \xi_j.$$

21. Låt $f \in L^1(\mathbf{R})$ och låt g vara en kontinuerlig funktion med perioden T. Visa att

$$\int f(x) g(\omega x)\, dx \to \int f(x)\, dx \int_0^T g(y)\, dy/T \quad \text{då } \omega \to \infty.$$

22. Låt $f \in L^1$ och låt g_n vara en likformigt begränsad följd av kontinuerliga funktioner med perioden T, och antag att $g_n(x) \to g(x)$ nästan överallt. Visa att

$$\int f(x) g_n(nx)\, dx \to \int f(x)\, dx \int_0^T g(y)\, dy/T.$$

23. Låt $f \in L^1(\mathbf{R})$ och $\varphi \in C_0$. Visa att

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \int \varphi(x/\varepsilon - k) f(x)\, dx$$

konvergerar absolut då $\varepsilon \neq 0$ och bestäm gränsvärdet då $\varepsilon \to 0$.

24. Låt $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$, låt $a^1, \ldots, a^k \in \mathbf{R}^d$, $c_1, \ldots, c_k \in \mathbf{R}$, och $b_1, \ldots, b_k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Bestäm

$$\lim_{t \to \infty} \int \Big| \sum_1^k c_j f(b_j x + t a^j) \Big|\, dx$$

då alla vektorerna a^j/b_j är olika.

25. Låt $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$ och låt $g \in C_0(\mathbf{R}^d)$. Bestäm gränsvärdet av

$$n^d \int f(nx) g(x)\, dx \quad \text{då } n \to +\infty.$$

26. Låt f_n vara en följd av icke negativa integrerbara funktioner med $\int f_n\, dx = 1$ för varje n men $f_n(x) \to 0$ då $n \to \infty$ för nästan alla x. Är funktionen $f = \sup_n f_n$ integrerbar?

27. Låt $f_n \in L^1(\mathbf{R}^d)$, $n = 1, 2, \ldots$, och antag att $\int |f_n|\, dx$ är en begränsad följd. Visa att om $f_n(x) \to f(x)$ nästan överallt då $n \to \infty$ så följer att $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$ och att

$$\int |f_n|\, dx - \int |f_n - f|\, dx \to \int |f|\, dx \quad \text{då } n \to \infty.$$

Visa också att om $g_n \in L^1$ och $|g_n| \leq |f_n|$ samt $g_n(x) \to g(x)$ nästan överallt så följer att $g \in L^1$ och att

$$\varlimsup_{n \to \infty} \Big(\int |g_n - g|\, dx - \int |f_n - f|\, dx \Big) \leq 0.$$

28. Låt $\{f_n\}_1^\infty$ och $\{g_n\}_1^\infty$ vara följder av funktioner i $L^1(\mathbf{R}^d)$. Antag att $|f_n| \leq g_n$ för alla n, att $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ existerar för nästan alla x och att $\int |g_n - g|\, dx \to 0$ då $n \to \infty$, där $g \in L^1(\mathbf{R}^d)$. Visa att $f \in L^1$ och att $\int |f_n - f|\, dx \to 0$ då $n \to \infty$.

29. Bestäm då $t \geq 0$ gränsvärdet av

$$\int_0^\infty e^{-t^n (\cos x)^{2n}}\, dx / (1 + n e^x) \quad \text{då } n \to +\infty.$$

Avsnitt 2.5 och 2.6

30. Låt f vara en funktion på $\mathbf{R}^d$ med värden i $\mathbf{R}$ sådan att $\{x \in \mathbf{R}^d; f(x) \geq g(x)\}$ är mätbar för varje $g \in C_0(\mathbf{R}^d)$. Visa att f är mätbar.

31. Låt f vara en mätbar icke negativ funktion på $\mathbf{R}^d$. Visa att $f \in L^1$ om och endast om

$$\Big(\int \min(f, g_n)\, dx \Big) \Big/ \Big(\int g_n\, dx \Big) \to 0 \qquad \text{då } n \to \infty$$

för varje växande följd $g_n \in L^1$ med $g_n \geq 0$ och $g_n(x) \to \infty$ för varje x.

32. Vilka värden kan måttet av randen för en öppen icke tom delmängd av $(0, 1)$ anta?

33. Låt E vara en delmängd av $\mathbf{R}$ sådan att för varje $x \in E$ finns ett $\delta > 0$ så att E innehåller minst ett av intervallen $(x - \delta, x)$ och $(x, x + \delta)$. Visa att E är mätbar.

34. Vad är måttet av mängden av alla reella tal i vilkas decimalbråksutveckling någon siffra bara förekommer ändligt många gånger?

35. Låt E vara mängden av alla reella tal i vilkas decimalbråksutveckling varje sifferföljd förekommer oändligt många gånger. Visa att $\complement E$ är en nollmängd.

36. Visa att talföljden $\sin(10^n x)$, $n = 1, 2, \dots$ är tät i $(-1, 1)$ för nästan alla x.

37. Låt E_1, E_2, ... vara delmängder av $\mathbf{R}^d$ med $\sum_1^\infty m^*(E_j) < \infty$. Visa att $\{x; x \in E_j$ för oändligt många $j\}$ är en nollmängd.

38. Låt E_1, E_2, ... vara mätbara delmängder av $\mathbf{R}^d$ och beteckna med A_j mängden av de punkter som tillhör E_k för precis j värden av k. Visa att A_j är mätbar och att

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) = \sum_{j=1}^{\infty} j m(A_j)$$

om summan i vänsterledet är ändlig. Visa också att mängden B_j av punkter som tillhör E_k utom för precis j värden av k är mätbar.

39. Låt E_1, E_2, ... vara mätbara delmängder av $\mathbf{R}^d$. Visa att mängden av punkter som tillhör minst N konsekutiva mängder E_k är mätbar för varje positivt heltal N.

40. E är en mätbar delmängd av $(0, 1)$ med $m(E) > \frac{1}{2}$. Visa att man kan finna $x, y \in E$ med $x + y = 1$.

41. Låt E vara en delmängd av reella axeln. Visa att mängden av punkter $x \in \mathbf{R}$ som är kongruenta modulo 1 med oändligt många punkter ur E är mätbar om E är mätbar och att den är en nollmängd om E har ändligt yttre mått. Visa att mängden av punkter $x \in \mathbf{R}$ med $x + r \in E$ för något rationellt tal r är en nollmängd om E är en nollmängd.

42. Låt f vara en reellvärd funktion på $\mathbf{R}$ sådan att $E_\varepsilon = \{x \in \mathbf{R}; |f(x)| > \varepsilon\}$ har ändligt yttre mått för varje $\varepsilon > 0$. Visa att $f(x + n) \to 0$ då $\mathbf{Z} \ni n \to \infty$, för nästan alla $x \in \mathbf{R}$.

43. För ett reellt tal a låter vi E_a vara mängden av alla $x \in \mathbf{R}^d$ sådana att

$$|\langle g, x \rangle| = |g_1 x_1 + \cdots + g_d x_d| \geq \|g\|^{-a}$$

för alla $g = (g_1, \dots, g_d)$ med heltalskoordinater med högst ändligt många undantag (som får bero av x). Visa att $\complement E_a$ är en nollmängd om $a > d - 1$. Visa eventuellt också att för varje $x \in \mathbf{R}^d$ är

$$\varliminf_{\mathbf{Z}^d \ni g \to \infty} \|g\|^{d-1} |\langle g, z \rangle| \leq C\|x\|$$

om $d > 1$, där C bara beror på d.

44. f_n är en följd av mätbara funktioner på $\mathbf{R}^d$ med värden i $\mathbf{R}$ sådana att för varje $\varepsilon > 0$

$$m(\{x \in \mathbf{R}^d; |f_m(x) - f_n(x)| > \varepsilon\}) \to 0 \quad \text{då } n \text{ och } m \to \infty.$$

Visa att det finns en delföljd f_{n_k} sådan att $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$ existerar fór nästan alla x, och visa att för varje $\varepsilon > 0$

$$m(\{x \in \mathbf{R}^d; |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \to 0 \quad \text{då } n \to \infty.$$

45. Visa att om serien $\sum_1^\infty a_n \sin nx$ konvergerar absolut för alla x i en mängd med positivt mått så är $\sum_1^\infty |a_n| < \infty$.

46. Låt $f_1, f_2, \ldots$ vara icke negativa mätbara funktioner på $\mathbf{R}^d$, och låt g vara en godtycklig icke negativ funktion där. Visa att med konventionen $0 \cdot \infty = 0$

$$\int^* \Big(\sum_{j=1}^\infty f_j(x)g(x)\Big)\,dx = \sum_{j=1}^\infty \int^* f_j(x)g(x)\,dx.$$

47. Låt f_1, f_2, ... vara reellvärda mätbara funktioner på $\mathbf{R}^d$ och låt $F_x \subset \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}^d$, vara mängden av hopningspunkter till följden $f_n(x)$. Visa att om A är en sluten delmängd av $\mathbf{R}$ så är $\{x \in \mathbf{R}^d; F_x \subset A\}$ och $\{x \in \mathbf{R}^d; F_x = A\}$ mätbara mängder.

48. Låt $f_1, f_2, \ldots$ vara en följd av mätbara reellvärda funktioner på $\mathbf{R}^d$. Visa att mängden E av alla $x \in \mathbf{R}^d$ sådana att $f_n(x)$ antar något värde för oändligt många n är mätbar.

49. Låt $f_1, f_2, \ldots$ vara en följd av mätbara reellvärda funktioner på $\mathbf{R}^d$. Visa att mängden E av $x \in \mathbf{R}^d$ sådana att $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existerar, ändligt eller oändligt, är mätbar och att f är mätbar om vi exempelvis definierar $f(x) = 0$ då $x \in \complement E$.

50. Låt f vara en mätbar reellvärd funktion på $\mathbf{R}^d$. Visa att mängden E av lokala maximumpunkter är mätbar.

51. Låt E_j vara en följd av integrerbara mängder $\subset \mathbf{R}^d$ med $m(E_j) \to 0$. Visa att $\int_{E_j} f\,dx \to 0$ om $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$. Visa också att om E_j avtar så finns för varje positiv talföljd $a_j \to 0$ en funktion $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$ med $\int_{E_j} f\,dx \geq a_j$. För vilka positiva följder a_j finns en sådan funktion om alla E_j är disjunkta?

52. Låt f vara en kontinuerlig funktion på $[0,1] \subset \mathbf{R}$ och låt g vara en mätbar funktion på $[0,1]$ med $0 \leq g(x) \leq 1$. Visa att

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(g(x)^n)\,dx$$

existerar och ange gränsvärdet.

53. Visa att om $0 \leq f \in L^1(\mathbf{R})$ så konvergerar serien

$$F_h(x) = \sum_{k=-\infty}^\infty hf(x - kh)$$

för nästan alla x och att delsummorna konvergerar i $L^1_{\text{lok}}(\mathbf{R})$ men inte i $L^1(\mathbf{R})$ om f inte är en nollfunktion. Visa också att F_h har ett gränsvärde i $L^1_{\text{lok}}(\mathbf{R})$ då $h \to 0$ och bestäm detta.

54. Visa att om f är en integrerbar funktion och φ en begränsad mätbar funktion med kompakt stöd på $\mathbf{R}$ så gäller

$$\sum_{k=-Nn}^{Nn} \Big| \int_{\mathbf{R}} \varphi(nx-k) f(x)\, dx \Big| \to \Big| \int_{\mathbf{R}} \varphi(x)\, dx \Big| \int_{\mathbf{R}} |f(x)|\, dx, \quad \text{då } N \text{ och } n \to \infty.$$

55. Visa att om $f \in L^1(\mathbf{R})$ och $0 < a \leq 1$ så är serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^a \int_{n^a}^{n^a+n^{-1}} f(x+y)\, dy$$

absolutkonvergent för nästan alla $x \in \mathbf{R}$.

Avsnitt 2.7 och 2.8

56. Visa att om $f, g \in L^1(\mathbf{R}^d)$ så definierar

$$I(T) = \int_{\mathbf{R}^d} \Big| \int_{R^d} f(x - Ty) g(y)\, dy \Big|\, dx$$

en kontinuerlig funktion av $T \in (0, \infty)$ med ändliga gränsvärden då $T \to 0$ och då $T \to \infty$. Bestäm dessa.

57. Låt M vara en icke tom sluten delmängd av $\mathbf{R}^d$, och låt $\varrho(x) = \min_{y \in M} \|x - y\|$ beteckna avståndet till M. Visa att om $f \in L^1$ och $a > 0$ så är $x \mapsto f(x)\varrho(x)^a \|x - y\|^{-a-d}$ i L^1 för nästan alla $y \in M$.

58. Visa att om $a < d$ och $x \mapsto f(x)(1 + \|x\|)^{-a}$ tillhör $L^1(\mathbf{R}^d)$ så är $y \mapsto f(x+y)\|y\|^{-a}$ i $L^1(\mathbf{R}^d)$ för nästan alla x.

59. Visa att om $x \mapsto f(x)\|x\|^{1-d}$ tillhör $L^1(\mathbf{R}^d)$ så är $t \mapsto f(ty)$ i $L^1(\mathbf{R})$ för nästan alla $y \in \mathbf{R}^d$.

60. Låt $f(x,y)$ vara definierad då $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ och antag att $x \mapsto f(x,y)$ är en kontinuerlig funktion för nästan alla y. Visa att följande villkor är ekvivalenta:

- ä)"$\mathbf{R} \ni y \mapsto f(x,y)$ är mätbar för alla x i en tät delmängd av $\mathbf{R}$.
- b)"$\mathbf{R} \ni y \mapsto f(x,y)$ är mätbar för varje $x \in \mathbf{R}$.
- "c)"$(x,y) \mapsto f(x,y)$ är mätbar i $\mathbf{R}^2$.

61. Låt f vara en funktion som uppfyller villkoren i föregående uppgift. Visa att mängden $E = \{y \in \mathbf{R}; x \mapsto f(x,y) \text{ är växande}\}$ är mätbar och att funktionen $N(y) =$ antalet nollställen till $x \mapsto f(x,y)$ är mätbar.

62. Låt $f(x,y)$ vara en mätbar funktion på $\mathbf{R}^2$. Visa att mängderna

- $E_1 = \{x; f(x,y) = 0 \text{ för nästan alla } y\}$,
- $E_2 = \{x; f(x,y) \geq 0 \text{ för nästan alla } y\}$,
- $E_3 = \{x; y \mapsto f(x,y) \text{ tillhör } L^1_{\text{lok}}(\mathbf{R})\}$

är mätbara. Visa också att $g(x) = \inf\{t; f(x,y) \le t$ för nästan alla $y\}$ är mätbar.

63. Låt $f(x,y)$ vara en reellvärd mätbar funktion på $\mathbf{R}^2$ och låt E_m vara mängden av $x \in \mathbf{R}$ sådana att $y \mapsto f(x,y)$ är lika med ett polynom av grad $\le m$ för nästan alla y. Visa att E_m är mätbar.

64. Låt f vara en icke negativ funktion på $\mathbf{R}^2$ och antag att $x \mapsto f(x,y)$ är nedåt halvkontinuerlig på $\mathbf{R}$ för nästan alla $y \in \mathbf{R}$. Visa att $x \mapsto \int^* f(x,y)\,dy$ är nedåt halvkontinuerlig på $\mathbf{R}$.

65. Visa att en reellvärd funktion f på $\mathbf{R}^d$ är mätbar om och endast om $E_f = \{(x,t) \in \mathbf{R}^{d+1}; t > f(x)\}$ är mätbar.

66. Visa att om $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$ och $m(t) = m(\{x; |f(x)| > t\})$ så är

$$\int |f(x)|\,dx = \int_0^\infty m(t)\,dt \ge \sum_1^\infty \varepsilon\, m(\varepsilon t), \quad \varepsilon > 0,$$

och visa att $t\,m(t) \to 0$ då $t \to \infty$ samt att $\sum_1^\infty \varepsilon\, m(\varepsilon k) \to \int |f(x)|\,dx$ då $\varepsilon \to 0$.

67. De mätbara icke negativa funktionerna f och g är definierade på den mätbara mängden $E \subset \mathbf{R}^d$. Sätt $E_y = \{x \in E; g(x) \ge y\}$ och visa att

$$\int_E^* f(x)g(x)\,dx = \int_{y>0}^* \Big(\int_{E_y}^* f(x)\,dx\Big)\,dy.$$

68. Visa att för varje reellvärd mätbar funktion på $\mathbf{R}^d$ gäller

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \lambda^n m^*(\{x; \lambda^n \le |f(x)| < \lambda^{n+1}\}) \to \int^* |f|\,dx \quad \text{då } \lambda \downarrow 1.$$

69. Visa att om $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$ och g är en begränsad mätbar funktion på $\mathbf{R}^d$, så är faltningen

$$f * g(x) = \int f(x-y)g(y)\,dy$$

en kontinuerlig funktion och att

$$\varlimsup_{x\to\infty} |(f*g)(x)| \le \int |f(x)|\,dx \varlimsup_{x\to\infty} |g(x)|.$$

70. Låt g_n vara en följd av mätbara funktioner på $\mathbf{R}^d$ med $|g_n| \le 1$ och antag att $g_n(x) \to 0$ för nästan alla x. Visa att $f * g_n \to 0$ likformigt på varje kompakt mängd då $n \to \infty$ om $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$.

71. Visa att om $0 \le f \in L^1$ och g är en godtycklig icke negativ begränsad funktion så är

$$h(x) = \int^* f(x-y)g(y)\,dy$$

kontinuerlig. Visa också att h är nedåt halvkontinuerlig för varje mätbart $f \ge 0$ och varje $g \ge 0$.

72. Visa att om f är en mätbar icke negativ funktion på $\mathbf{R}^d$ men inte en nollfunktion och $x_1, x_2, \dots$ är en tät punktföljd i $\mathbf{R}^d$ så är $\sum_1^\infty f(x+x_n) = +\infty$ för nästan alla x.

73. Visa att om $E \subset \mathbf{R}^d$ är en mängd av reella tal med positivt mått så innehåller $E - E = \{x - y; x, y \in E\}$ ett intervall $\{x \in \mathbf{R}; |x| \leq \delta\}$ med $\delta > 0$.

74. Låt $A, B \subset \mathbf{R}^d$ vara mätbara mängder och antag att för varje $x \in \mathbf{R}^d$ finns en nollmängd N_x så att $A + x \subset B \cup N_x$. Visa att om A inte är en nollmängd så är $\complement B$ en nollmängd.

75. Antag att $0 \leq f \in L^1(\mathbf{R})$ och att $f(x) = 0$ då $x < 0$. Sätt $f_1 = f$ och $f_{n+1} = f * f_n$ då $n = 1, 2, \dots$. Visa att $\sum_1^\infty f_n$ konvergerar i $L^1(\mathbf{R})$ om och endast om $\int f\,dx < 1$. Visa också att $\sum_1^\infty f_n(x)$ konvergerar likformigt då $x < A$ om f är begränsad då $x < A$.

Avsnitt 2.9

76. Låt $f_1, f_2, \dots \in L^p(\mathbf{R}^d)$ där $1 \leq p < \infty$ och antag att $f_n(x) \to f(x)$ nästan överallt samt att $\|f_n\|_p \to A < \infty$. Visa att $f \in L^p$ och att

$$\|f_n - f\|_p{}^p \to A^p - \|f\|_p{}^p.$$

77. Låt f_n och f vara som i föregående övning, med $1 < p < \infty$, och låt $g \in L^q$, där $1/p + 1/q = 1$. Visa att $\int f_n g\,dx \to \int fg\,dx$ då $n \to \infty$.

78. Låt $\{f_n\}_1^\infty$ vara en följd i $L^p(\mathbf{R}^d)$, $p \in [1, \infty)$, låt $f \in L^p_{\text{lok}}(\mathbf{R}^d)$ och antag att $\int_K |f_n - f|^p\,dx \to 0$ då $n \to \infty$ för varje kompakt $K \subset \mathbf{R}^d$. Visa att $f \in L^p(\mathbf{R}^d)$ och att $\int_{\mathbf{R}^d} |f_n - f|^p\,dx \to 0$ om och endast om till varje $\varepsilon > 0$ finns en kompakt K sådan att $\int_{\complement K} |f_n|^p\,dx < \varepsilon$ för alla n.

79. Visa att om E är en integrerbar mängd i $\mathbf{R}^d$ med positivt mått så gäller $L^p(E) \subset L^q(E)$ då $1 \leq q \leq p$, och

$$\Big(\int_E |f|^q\,dx\Big)^{\frac{1}{q}} \leq m(E)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\Big(\int_E |f|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in L^p(E).$$

Visa också att om $L^p(E) \subset L^q(E)$ och $p \neq q$ så är $m(E) < \infty$ och $q < p$.

80. Visa att om $f \in L^p \cap L^q$ så följer $f \in L^r$ om $r \in [p, q]$, och visa den logaritmiska konvexiteten

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p{}^\lambda \|f\|_q{}^{1-\lambda}, 1/r = \lambda/p + (1-\lambda)/q,\ \lambda \in [0, 1].$$

81. Visa med beteckningarna i övning 1 att

$$\tfrac{1}{2}\Big(\sum_1^\infty a_n^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big(\int_0^1 |f(x)|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leq (\tfrac{1}{2}p + 1)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_1^\infty |a_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

82. Låt $T_1, \dots, T_n$ vara avbildningar $L^p \to L^p$ med $\|\sum_1^n \varepsilon_j T_j f\|_p \leq \|f\|_p$ då $f \in L^p$ och $\varepsilon_j = \pm 1$. Visa att

$$\Big(\int \Big(\sum_1^n |T_j f(x)|^2\Big)^{\frac{p}{2}} dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leq 2\|f\|_p, \quad f \in L^p.$$

83. Låt $f_j \in L^{p_j}$, $j = 1, \dots, n$, där $p_j \in [1, \infty]$ och $\sum_1^n 1/p_j = 1/q$ med $q \in [1, \infty]$. Visa att $f_1 \cdots f_n \in L^q$ och att $\|f_1 \cdots f_n\|_q \leq \prod_1^n \|f_j\|_{p_j}$.

84. Visa att om $f \in L^p$, $g \in L^q$ så är $f * g(x) = \int f(x-y)g(y)\,dy$ definierad nästan överallt och tillhör L^r om $1/p + 1/q = 1 + 1/r$ och $p, q, r \in [1, \infty)$, samt att $\|f * g\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q$.

85. Visa att om f är en mätbar funktion i $\mathbf{R}^d$ med $\int |f(x)|^p (1+\|x\|)^{-a}\,dx < \infty$, där $1 \le p < \infty$ och $a \ge 0$, så gäller

$$R^{-b} \int_{\|x\|<R} |f(x)|\,dx \to 0 \quad \text{då } R \to \infty$$

om $b \ge d + (a-d)/p$ med sträng olikhet om $a = 0$ och $p = 1$, men inte alltid annars. För vilka b är $x \mapsto |f(x)|(1+\|x\|)^{-b}$ i $L^1(\mathbf{R}^d)$?

86. Låt $f \in L^p(\mathbf{R})$ och $g \in L^q(\mathbf{R})$ där $p, q \in [1, \infty]$. Visa att $F(x) = \int_0^x f(y)\,dy$ är kontinuerlig och att $x \mapsto (\|x\| + 1)^{-a} F(x) g(x)$ är integrerbar om $a > 2 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$.

87. Låt $f \in L^p_{\text{lok}}(\mathbf{R}^d)$ där $1 \le p < \infty$, och antag att

$$\int_{r<\varrho(x)<2r} |f(x)|^p\,dx \le r^{-b}, \; r \ge 1, \quad \text{där } \varrho(x) = \sum_1^d |x_j|^{a_j},$$

med alla a_j positiva och $b \in \mathbf{R}$. När följer det att $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$?

88. Låt $f \in L^p(\mathbf{R})$, där $1 < p < \infty$, låt $\varphi \in L^\infty(\mathbf{R})$ och antag att f och φ har kompakt stöd. Visa att

$$n^{\frac{1}{p}-1} \sum_k \Big(\int |\varphi(nx-k) f(x)|^p\,dx \Big)^{\frac{1}{p}}$$

har ett gränsvärde då $n \to \infty$ och bestäm det.

89. Låt $K(x,y)$ vara en mätbar funktion i $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^e$ sådan att

$$\int^* |K(x,y)| dy \le A \quad \text{för nästan alla } x \in \mathbf{R}^d.$$

Visa att då $f \in L^\infty(\mathbf{R}^e)$ så är

$$(Kf)(x) = \int K(x,y) f(y)\,dy$$

definierad för nästan alla $x \in \mathbf{R}^d$ och att $\|Kf\|_\infty \le A\|f\|_\infty$. Visa också att om

$$\int^* |K(x,y)|\,dx \le B \quad \text{för nästan alla } y \in \mathbf{R}^d$$

så är $(Kf)(x)$ definierad nästan överallt i $\mathbf{R}^d$ då $f \in L^1(\mathbf{R}^e)$ och att $\|Kf\|_1 \le B\|f\|_1$. Visa då båda villkoren är uppfyllda att $Kf(x)$ är definierad för nästan alla $x \in \mathbf{R}^d$ om $f \in L^p$, med $1 < p < \infty$, och att

$$\|Kf\|_p \le A^{1-\frac{1}{p}} B^{\frac{1}{p}} \|f\|_p, \quad f \in L^p(\mathbf{R}^e).$$

90. Låt $T : L^p(\mathbf{R}^d) \to L^p(\mathbf{R}^d)$ vara en lineär avbildning med $\|Tf\|_p \le \|f\|_p$ då $f \in L^p$. Visa att

$$\Big\| \Big(\sum_1^n |Tf_j|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p \le \Big\| \Big(\sum_1^n |f_j|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p, \quad \text{då } f_1, \ldots, f_n \in L^p.$$

Avsnitt 2.10

91. Antag att $g \in L^1(\mathbf{R}^d)$ är en avtagande funktion av $\|x\|$. Visa att

$$\int^* |f(x+y)|g(y)\,dy \leq \tilde{f}(x) \int g(y)\,dy, \quad f \in L^1(\mathbf{R}^d)$$

där $\tilde{f}(x) = \sup_S m(S)^{-1} \int_S |f(y)|\,dy$ och S betecknar klot med medelpunkt i x. Visa att för nästan alla x

$$\int |f(x+\varepsilon y) - f(x)|g(y)\,dy \to 0 \quad \text{då } \varepsilon \to 0 \text{ om } f \in L^1(\mathbf{R}^d).$$

Visa också att man kan ta godtyckligt $g \in L^1 \cap L^\infty$ om $f \in L^\infty$.

92. Låt $f \in L^p(\mathbf{R}^d)$, där $p \in [1,\infty)$, och låt $g \in L^1(\mathbf{R}^d)$. Visa att faltningen $f_\varepsilon(x) = \int f(x+\varepsilon y)g(y)\,dy$ existerar för nästan alla x, att $f_\varepsilon \in L^p$ och att $\|f_\varepsilon - f\|_p \to 0$ då $\varepsilon \to 0$ om $\int g(y)\,dy = 1$.

93. Visa att då $f \in L^1(\mathbf{R})$ så gäller

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x^n + a)\,dx = f(a) \quad \text{för nästan alla } a \in \mathbf{R}.$$

94. Låt E vara en delmängd av $\mathbf{R}$. Visa att

$$m^*(E) = \inf_{f\in K} \big(\lim_{x\to+\infty} (f(x) - f(-x)) \big)$$

där K består av alla växande funktioner f sådana att f' existerar och är ≥ 1 för alla $x \in E$.

95. Visa att om f är en växande funktion på $[0,1]$ så är $\int_0^1 f'(x)\,dx$ högst lika med måttet av värdeförrådet av f.

96. E är en delmängd av $\mathbf{R}^d$ sådan att $m^*(E \cap S) \leq km(S)$ för varje klot S, med en konstant $k < 1$ som ej beror på S. Visa att E är en nollmängd.

97. Konstruera en integrerbar mängd $E \subset \mathbf{R}^d$ så att $0 < m(E \cap O) < m(O)$ för varje öppen icke tom mängd O med ändligt mått.

98. Låt E vara en delmängd av ett intervall $I \subset \mathbf{R}^d$ och låt $0 < \varepsilon < 1$. Om $I_1, \ldots, I_N$ är en indelning av I så betecknar vi med I' föreningsmängden av de intervall I_j för vilka $m^*(I_j \cap E) > \varepsilon\, m(I_j)$. Visa att $m(I') \to m^*(E)$ då indelningens finhet $\to 0$. Låt I'' vara definierad på samma sätt med E ersatt av $I \setminus E$. Visa att E är mätbar om och endast om $m(I' \cap I'') \to 0$ med indelningens finhet.

99. Låt $O \subset \mathbf{R}^d$ vara en öppen icke tom mängd med ändligt mått, och sätt $O_t = \{x \in O; d(x) < t\}$ där $d(x) = d(x, \complement O)$ är avståndet från x till $\complement O$.

- ä)"Visa att $m(O_t)$ är en växande kontinuerlig funktion som är strängt positiv då $t > 0$ och växer i sträng mening mot $m(O)$ då $t \to \sup_{x\in O} d(x)$.
- b)Definiera t_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ så att $m(O_{t_\nu}) = 2^{-\nu} m(O)$, sätt $t_0 = +\infty$ och definiera $f(x) = 2^{\nu/2}$ då $x \in O_{t_{\nu-1}} \setminus O_{t_\nu}$, $f(x) = 0$ då $x \notin O$. Visa att $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$ och att $\int f(x)\,dx \leq m(O)/(\sqrt{2}-1)$.

- "c)"Välj en icke-negativ funktion $g \in L^1(\mathbf{R}^d)$ som är en avtagande funktion av $\|x\|$ så att $\int_{\|x\|<t_\nu} g(x)\,dx = 2^{-\nu/2}$, $\nu = 0, 1, \dots$, och visa att $f * g \geq 2^{-d}$ i O.
- d)"Visa att för varje nollmängd $N \subset \mathbf{R}^d$ finns icke negativa funktioner $f, g \in L^1(\mathbf{R}^d)$ så att $\int^* f(x-y)g(y)\,dy = +\infty$ för alla $x \in N$.

100. Låt A vara en kontinuerlig funktion i $\mathbf{R}^4$ med

$$|A(y_1, \dots, y_4)| \leq C|y_1|.$$

Visa att om $f \in L^p(\mathbf{R})$ och g är en mätbar funktion på $\mathbf{R}$ med värden i $\mathbf{R}$ så är

$$f_T(x) = A(f(t_1x + s_1), g(t_2x + s_2), x, s_3), \quad T = (t_1, t_2, s_1, s_2, s_3) \in \mathbf{R}^5$$

en kontinuerlig funktion av T med värden i $L^p(\mathbf{R})$ då $t_1t_2 \neq 0$, dvs. $f_T \in L^p$ och

$$\|f_T - f_{T^0}\|_p \to 0 \text{ då } T \to T^0.$$

Anvisningar och svar

1. Delsummorna är Riemannintegrerbara och konvergerar likformigt. Utveckla en ändlig delsumma med polynomialteoremet och observera att integralen från 0 till 1 av en ändlig produkt av olika funktioner $\varphi(2^n x)$ alltid är noll. — Funktionerna $\varphi(2^n x)$, $x \in [0, 1]$, kallas Rademacherfunktionerna.

2. Uppskattningen av I_n följer av att

$$1 + \cos x \geq 2(1 - x^2/4) \geq 2\exp(-x^2/4) \geq 2e^{-1/n} \quad \text{då } |x| \leq 2/\sqrt{n}.$$

Det följer att $K_n(y)/I_n \to 0$ likformigt om $0 < \varepsilon \leq |y| \leq \pi$. Skriv

$$P_n(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-y) - f(x))K_n(y)\,dy/I_n$$

och uppskatta integralen dels då $|y| < \varepsilon$, dels då $\varepsilon \leq |y| \leq \pi$. Eftersom $K_n(x-y)$ är ett trigonometriskt polynom i x så följer c). Utvidga genom att betrakta $\prod_1^d K_n(x_j)$, $x \in \mathbf{R}^d$.

3. Enligt föregående uppgift kan f approximeras likformigt med trigonometriska polynom $\sum c_g e^{2\pi i\langle x,g\rangle}$ där $g \in \mathbf{Z}^d$. Modifiera med hjälp därav (1.1.5) så att h_1 och h_2 är trigonometriska polynom. — Tänk också genom betydelsen av resultatet då f är en karakteristisk funktion.

4. Vi kan anta att $I = [-1, 1]^d$. Då är $g(x) = f(\cos x_1, \dots, \cos x_d)$ en kontinuerlig periodisk funktion och kan approximeras likformigt med trigonometriska polynom som är jämna funktioner av varje x_j, alltså polynom i $\cos x_1, \dots, \cos x_d$.

5. Inre Jordanmåttet är 0 för F innehåller inget öppet intervall. Måttet av F_n är $\prod_1^n (1 - a_k)$, och om vi använder sats 1.2.1 på karakteristiska funktionen med omvänt tecken får vi att yttre måttet av F är gränsvärdet då $n \to \infty$. — Observera att då produkten konvergerar, exempelvis då $a_k = 1/2k^2$, så får vi en kompakt mängd som inte är Jordanmätbar.

6. Det gäller att visa att randen ∂K av har Jordanmåttet 0. I en öppen omgivning U av en godtycklig punkt i ∂K kan vi införa nya variabler $(f(x), x_1, \dots, x_d)$ med x_j utelämnad för ett j med $\partial f(x)/\partial x_j \neq 0$. Randen blir då plan i de nya koordinaterna och får alltså Jordanmåttet

0, varför Jordanmåttet av $V \cap \partial K$ är 0 om $\overline{V} \subset U$. Enligt Borel-Lebesgues lemma kan vi övertäcka ∂K med ändligt många sådana omgivningar V.

7. Vi kan anta att $a_j > 1$ för alla j, för vi kan ersätta a_j med κa_j och λ med λ/κ för ett tillräckligt stort κ. Då visar föregående övning att $E_t = \{x \in \mathbf{R}^d; t < \sum_1^d |x_j|^{a_j} \le 2t\}$ är Jordanmätbar, och om vi tar $y_j = x_j/t^{1/a_j}$ som nya variabler så ser vi att integralen över E_t är en konstant gånger $t^{-\lambda+\sum 1/a_j}$. Integralen då $r \to 0$ (resp. $R \to \infty$) är begränsad om och endast om summan då $t = 2^k$ är konvergent för $k < 0$ (resp. $k > 0$), vilket betyder $\lambda < \sum_1^d 1/a_j$ (resp. $\lambda > \sum_1^d 1/a_j$).

8. Derivera k gånger under integraltecknet, inför sedan $x + \varepsilon y$ som ny integrationsvariabel och derivera en gång till. Visa att $g_\varepsilon \to g$ likformigt då $\varepsilon \to 0$.

9. B_d är Jordanmätbart och då $\varphi(r) = 1$ för $r \le R$, $\varphi(r) = 0$ för $r > R$, så är båda sidor lika med $C_d R^d$. Likheten gäller därför för alla sträckvis konstanta funktioner och den följer därav allmänt. Av (1.3.6), (1.3.7) får vi om vi låter $y = (x_{d-1}, x_d)$

$$C_d = \int_{B_{d-2}} \pi(1 - \|x\|^2)\, dr = C_{d-2}\pi \int_0^1 (1 - r^2) d(r^{d-2}) = 2\pi C_{d-2} \int_0^1 r^{d-1}\, dr = 2\pi C_{d-2}/d.$$

Härav fås induktivt $C_{2d} = \pi^d/d!$ och $C_{2d} = 2(2\pi)^d/((2d+1)!!)$.

10. En ortogonal transformation som överför ξ i $(|\xi\|, 0, \dots, 0)$ visar att integralen är lika med $\|\xi\|^p I_p(\varphi)$ där $I_p(\varphi) = \int |x_1|^p \varphi(x)\, dx$. Låt ψ liksom φ vara rotationssymmetrisk, med $\psi \ge 0$ och $\psi(0) > 0$. Om vi multiplicerar med $\psi(\xi)$ och integrerar så får vi genom omkastning av integrationsordningen

$$I_p(\psi) \int \|x\|^p \varphi(x)\, dx = I_p(\varphi) \int \|\xi\|^p \psi(\xi)\, d\xi,$$

vilket visar att $I_p(\varphi) = C_p \int \|x\|^p \varphi(x)\, dx$. Eftersom $\int \|x\|^2 \varphi(x)\, dx = \sum_1^d \int |x_j|^2 \varphi(x)\, dx = d \int |x_1|^2 \varphi(x)\, dx$ får vi $C_2 = 1/d$.

11. Använd Morse-Sards sats (följdsats 1.4.3) på avbildningen $x \mapsto f'(x)$.

12. För alla heltal $n > 0$ har vi $g((pqn + 1)/q^2 n) = 1/^2 qn \to 0$ då $n \to \infty$, så g är inte nedåt halvkontinuerlig i p/q. Halvkontinuitet uppåt kräver $f((pqn + 1)/q^2 n) \le g((pqn + 1)/q^2 n) = 1/q^2 n$, alltså $f(p/q) \le 0$ så $f(x) \le 0$ för varje x. Vi måste också ha $g \ge 0$, alltså $f \ge 0$, eftersom de rationella talen är täta. Alltså måste $f = 0$. Då är g uppåt halvkontinuerlig, för om $a > 0$ så är $\{x; g(x) \ge a\}$ en sluten mängd för den innehåller i varje intervall bara ändligt många punkter.

13. Direkt tillämpning av definitionerna.

14. Definitionerna visar genast att h är nedåt halvkontinuerlig om g är det, och $h \ge \sup f$, $h \ge \sup g$ samt $h \le \sup f + \sup g \le 2 \inf h$. Om man sätter $y = x - z$ så ser man att definitionen av h är symmetrisk i f och g, så resultatet gäller också om f är nedåt halvkontinuerlig. Om $0 \le g \le M$ och vi tar $f(0) > M$ men $f(y) = 0$ då $y \ne 0$ så blir $h(x) = f(0) + g(x)$, så g är nedåt halvkontinuerlig om h är det.

15. Vi har likhet om $f \in C_0$. Approximera f underifrån med funktioner i C_0^+.

16. Välj $F \in I^+$ med $|f| \leq F$ och $\int F\,dx < \infty$. Tag $\chi \in C_0^+(\mathbf{R}^d)$ med $\chi \leq 1$ och använd att

$$\begin{aligned}(4.4.1)\qquad \int^* \chi(x) \sum_1^\infty F(x+a_n)\,dx &= \sum_1^\infty \int^* \chi(x)F(x+a_n)\,dx = \sum_1^\infty \int \chi(x)F(x+a_n)\,dx \\ &= \sum_1^\infty \int \chi(x-a_n)F(x)\,dx = \int^* \sum_1^\infty \chi(x-a_n)F(x)\,dx < \infty\end{aligned}$$

eftersom $\sum \chi(x-a_n) \leq K(M+1)$ om stödet för χ tillhör ett intervall av längden M.

17. Låt $\varphi \in C_0^+$ ha stöd i $[-M, M]$. Vi har

$$\int^* \varphi(x) \sum_1^\infty n^{-a}|f(x+n^b)|\,dx = \int^* \Phi(x)f(x)\,dx, \quad \Phi(x) = \sum_1^\infty n^{-a}\varphi(x-n^b).$$

Termerna i summan är 0 utom då $x - M < n^b < x + M$, så Φ är begränsad då x är begränsad uppåt. För stora positiva x är $n - x^{1/b} = O(x^{1/b-1})$ (varför?) så $\Phi(x) = O(x^{-a/b} \cdot x^{1/b-1}) = O(x^{(1-a-b)/b})$ är begränsad.

18. Låt χ_n vara karakteristiska funktionen för $\{x \in \mathbf{R}; 0 < |x-a_n| < b_n^{1/\alpha}\}$ och sätt $f_n(x) = b_n(1-\chi_n(x))|x-a_n|^{-\alpha}$. Då är $\int \chi_n\,dx + \int f_n\,dx = 2\alpha b_n^{1/\alpha}$ så $\sum f_n(x)$ och $\sum \chi_n(x)$ konvergerar nästan överallt. Då den senare summan konvergerar är alla utom ändligt många termer i $\sum b_n \chi_n(x)|x-a_n|^{-\alpha}$ lika med noll, så denna summa är också konvergent.

19. Om $\varphi \in C_0^+(\mathbf{R}^d)$ är noll nära origo så är

$$\int^* \varphi(x) \sum_1^\infty n^{-a}|f(n^b x)|\,dx = \int^* \Phi(x)|f(x)|\,dx$$

där $\Phi(x) = \sum_1^\infty n^{-a-db}\varphi(x/n^b)$. Om $0 < r \leq \|x\| \leq R$ då $x \in \operatorname{supp}\varphi$ så har vi $r \leq \|x\|/n^b \leq R$ då termerna i summan inte är noll, dvs. $\|x\|/R \leq n^b \leq \|x\|/r$, så antalet termer är $O(\|x\|^{1/b})$ medan den största termen är $O(\|x\|^{-(a+db)/b})$, så Φ är begränsad. Om man tar $f(x) = (1 + \|x\|)^{-\gamma}$ med $\gamma > d$ så är $f \in L^1$ (se övning 7) och serien divergerar för varje x om $a + b\gamma \leq 1$, vilket är sant för lämpligt $\gamma > d$ om $a + db < 1$. Summan av L^1 normerna konvergerar då $a + db > 1$.

20. Om $f \in C_0^1$ (dvs. f är kontinuerligt deriverbar med kompakt stöd) så följer av partialintegration

$$-i\xi_j \int e^{i\langle x,\xi\rangle} f(x)\,dx = \int e^{i\langle x,\xi\rangle} \partial f(x)/\partial x_j\,dx, \quad j = 1, \dots, d.$$

Eftersom högerledet är begränsat är integralen i vänsterledet $O(1/\|\xi\|)$ då $\xi \to \infty$. Vi kan utvidga till allmänt $f \in L^1$ genom att välja $g \in C_0^1$ så att $\int |f-g|\,dx$ är godtyckligt liten. — Resultatet är viktigt i Fourieranalysen och kallas Riemann-Lebesgues lemma.

21. Bevisa detta först då $g \in C_0$ och utvidga sedan som i föregående övning.

22. Av Lebesgues majorantsats följer att $\int_0^T g_n(y)\,dy \to \int_0^T g(y)\,dy$, och i övrigt kan beviset i föregående övning upprepas.

23. Sätt $g(x) = \sum_{-\infty}^\infty \varphi(x-k)$ och $G(x) = \sum_{-\infty}^\infty |\varphi(x-k)|$; detta är kontinuerliga funktioner med perioden 1. Summan av absolutbeloppen är högst $\int G(x/\varepsilon)|f(x)|\,dx \leq \sup G \int |f(x)|\,dx$, och gränsvärdet är $\int f(x)\,dx \int \varphi(y)\,dy$ enligt tidigare övning eftersom $\int_0^1 g(y)\,dy = \int_{\mathbf{R}} \varphi(y)\,dy$.

24. Om $f \in C_0$ så har termerna i summan disjunkta stöd för stora t. (Varför?) Gränsvärdet är i så fall $\sum_1^k |c_j|/|b_j|^d \int |f|\,dx$, och som i de föregående övningarna utvidgas detta till godtyckliga $f \in L^1$.

25. Om $f \in C_0$ så är integralen lika med $\int f(x)g(x/n)\,dx$, och som integranden konvergerar likformigt mot $f(x)g(0)$ i stödet så blir gränsvärdet av integralen $g(0)\int f\,dx$. Genom approximation utvidgas detta resultat till godtyckligt $f \in L^1$. (Man kunde också använda Lebesgues majorantsats efter variabeländring enligt sats 2.7.1.)

26. Den är inte integrerbar för då skulle $\int f_n\,dx \to 0$ enligt Lebesgues majorantsats. Tänk genom hur f uppför sig i ett exempel som $f_n(x) = n\exp(-2n|x|)$.

27. Fatous lemma ger att $f \in L^1$, och Lebesgues majorantsats visar därför till och med att

$$\int ||f_n - f|\,dx - |f_n| + |f||\,dx \to 0, \quad \text{då } n \to \infty,$$

för integranden är $\leq 2|f|$ enligt triangelolikheten. (Observera att resultatet visar att om $f_n(x) \to f(x)$ n.ö. så är $\int |f_n - f|\,dx \to 0$ ekvivalent med $\int |f_n|\,dx \to \int |f|\,dx$.) Vi får på samma sätt $g \in L^1$, och Fatous lemma använt på följden $|f_n| - |g_n|$ ger

$$\int (|f| - |g|)\,dx \leq \varliminf_{n\to\infty} \int (|f_n| - |g_n|)\,dx.$$

Enligt första delen av uppgiften betyder det att

$$0 \leq \varliminf_{n\to\infty} \int (|f_n - f| - |g_n - g|)\,dx$$

vilket bevisar påståendet.

28. Fatous lemma ger genast att $f \in L^1$. Varje delföljd har en delföljd n_j för vilken $\sum_j \int |g_{n_j} - g|\,dx < \infty$. Då är $G = g + \sum_j |g_{n_j} - g|$ i L^1 och $|f_{n_j}| \leq g_{n_j} \leq G$, så majorantsatsen ger att $\int |f_{n_j} - f|\,dx \to 0$. Detta medför att $\int |f_n - f|\,dx \to 0$ då $n \to \infty$.

29. Integranden är majorerad av den integrerbara funktionen e^{-x}, så majorantsatsen ger att gränsvärdet är

$$\int_0^\infty \chi(x)e^{-x}\,dx,$$

där χ är karakteristiska funktionen för den mängd där $t(\cos x)^2 < 1$. Då $0 \leq t \leq 1$ blir gränsvärdet därför lika med 1. Då $t > 1$ observerar vi att den karakteristiska funktionen är periodisk med perioden π och i intervallet $(0, \pi)$ svarar mot intervallet $|x - \frac{1}{2}\pi| < \alpha$ där $\alpha = \arcsin(1/\sqrt{t})$. Gränsvärdet blir därför

$$\sum_0^\infty e^{-(k+\frac{1}{2})\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-x}\,dx = \sinh\alpha/\sinh(\tfrac{1}{2}\pi), \quad \alpha = \arcsin(1/\sqrt{t}).$$

30. Om vi tar en följd $g_n \in C_0$ som växer mot $t > 0$ resp. avtar mot $t < 0$ så ser vi att $\{x; f(x) \geq t\}$ är mätbar för varje t.

31. Om $f \in L^1$ så är täljaren $\leq \int f\,dx$ medan nämnaren $\to \infty$. Om $f \notin L^1$ och $0 \leq f_n \uparrow f$, $f_n \in L^1$ så $F_n = \int f_n\,dx \to \infty$. Välj $g_n = f_n + F_n h$ där h är en positiv kontinuerlig funktion med $\int h\,dx = 1$.

32. Varje värde i $[0,1)$. Detta följer av konstruktionen i övning 5.

33. Det inre av E är en föreningsmängd av öppna intervall I_j, och E är föreningsmängd av $\cup I_j$ och en delmängd av den uppräkneliga mängden $\cup \partial I_j$.

34. Måttet är noll. De tal i $[0,1]$ för vilka en viss siffra saknas bildar i $[0,1]$ en variant E av Cantormängden där man tagit bort $1/10$ av intervallet vid varje steg i konstruktionen, så $m(E) = 0$. Siffran saknas efter den $j$te positionen efter decimalkommat i utvecklingen av x precis då $10^j x + n \in E$ för något heltal n, så dessa x bildar en nollmängd för varje j, vilket medför att deras föreningsmängd är en nollmängd.

35. För en fix sifferföljd är detta väsentligen en upprepning av föregående uppgift, och det finns bara uppräkneligt många ändliga sifferföljder.

36. Sätt $x = 2\pi y$. Enligt föregående uppgift kommer $10^n y$ modulo heltalen godtyckligt nära varje tal i $[0,1]$. — Talet 10 kan givetvis ersättas med ett godtyckligt heltal > 1.

37. Betrakta summan av de karakteristiska funktionerna.

38. Inför de karakteristiska funktionerna för E_k, och betrakta $\complement E_k$ för det sista påståendet. Observera att mängden A_∞ av punkter som tillhör oändligt många E_k också är mätbar.

39. Mängden är föreningsmängden av mängderna $E_k \cap E_{k+1} \cap \cdots \cap E_{k+N-1}$.

40. I annat fall vore E och $E_1 = \{x; 1-x \in E\}$ disjunkta varför $m(E \cup E_1) = m(E) + m(E_1) = 2m(E) > 1$ trots att $E \cup E_1 \subset (0,1)$.

41. Inför den karakteristiska funktionen för E.

42. Enligt föregående uppgift är $N_\varepsilon = \{x; x+n \in E_\varepsilon$ för oändligt många $n \in \mathbf{Z}\}$ en nollmängd, och $\overline{\lim}_{n\to\infty} |f(x+n)| \leq \varepsilon$ då $x \notin N_\varepsilon$, så $\lim_{n\to\infty} f(x+n) = 0$ utanför nollmängden $\cup_1^\infty N_{1/j}$.

43. Upskatta för fixt M måttet av alla x med $\|x\| \leq M$ och $|\langle g, x\rangle| \leq \|g\|^{-a}$. För vilka b konvergerar $\sum_{\mathbf{Z}^d \ni g \neq 0} \|g\|^{-b}$? — Att $\underline{\lim}\, \|g\|^{d-1} |\langle g, x\rangle| \leq C\|x\|$ har inte med integrationsteori att göra, men det visar precisionen av den uppskattning nedåt som integrationsteorin ger. Påståendet är trivialt om $\langle g, x\rangle = 0$ för något $g \neq 0$. Betrakta i annat fall alla skalärprodukter $\langle g, x\rangle$ där $\|g\| \leq R$. De är då alla olika och ligger i intervallet $[-R\|x\|, R\|x\|]$. Eftersom antalet $g \in \mathbf{Z}^d$ med $\|g\| \leq R$ är åtminstone $C_d(R - \sqrt{d})^d$, där C_d är volymen av enhetsklotet i $\mathbf{R}^d$, så finns $g_1(R)$ och $g_2(R)$ i $\{g \in \mathbf{Z}^d, \|g\| \leq R\}$ med

$$0 < |\langle x, g_1(R)\rangle - \langle x, g_2(R)\rangle| \leq 2R\|x\|(C_d(R-\sqrt{d})^d - 1)^{-1} \to 0, \quad R \to \infty,$$

varav $\underline{\lim}\, \|g(R)\|^{d-1} |\langle x, g(R)\rangle| \leq 2^d C_d^{-1} \|x\|$, där $g(R) = g_1(R) - g_2(R) \to \infty$ då $R \to \infty$.

44. Se beviset för sats 2.4.10.

45. Summan av absolutbeloppen är begränsad i någon mängd med positivt mått. Integrera över denna och använd övning 21.

46. Det räcker att bevisa att

$$\int^* (f_1(x) + f_2(x))g(x)\,dx = \int^* f_1(x)g(x)\,dx + \int^* f_2(x)g(x)\,dx,$$

för detta medför påståendet med summation för $j \le N$, vilket då $N \to \infty$ ger resultatet. Vi kan anta f_1, f_2, g begränsade, för annars kan vi ersätta funktionerna med $\min(f_j, n)$, $\min(g_j, n)$ och låta $n \to \infty$ med användning av sats 2.2.2. Vänsterledet är högst lika med högerledet. Om $h \in I^+$ och $h \ge (f_1(x) + f_2(x))g(x)$ så sätt $h_j(x) = f_j(x)h(x)/(f_1(x) + f_2(x))$, definierat som 0 då $f_1(x) + f_2(x) = 0$. Då är $f_j(x)g(x) \le h_j(x) \le h(x)$, och h_j är mätbar, alltså i L^1 om $\int^* h\,dx < \infty$. Detta ger

$$\int^* f_1(x)g(x)\,dx + \int^* f_2(x)g(x)\,dx \le \int h_1(x)\,dx + \int h_2(x)\,dx \le \int h(x)\,dx,$$

så högerledet är högst lika med vänsterledet.

47. Visa t.ex. att

$$E_A = \{x \in \mathbf{R}^d; F_x \subset A\} = \bigcap_{a,b\in\mathbf{Q},[a,b]\cap A=\emptyset} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n\ge N} \{x \in \mathbf{R}^d; f_n(x) \notin [a,b]\}$$

$$\{x \in \mathbf{R}^d; F_x \subsetneqq A\} = \bigcup_{a,b\in\mathbf{Q},(a,b)\cap A\neq\emptyset} E_{A\setminus(a,b)}.$$

48. Visa t.ex. att

$$E = \bigcup_n \bigcap_M \bigcup_{m\ge M} \{x \in \mathbf{R}^d; f_n(x) = f_m(x)\}.$$

49. Genom att betrakta $f_n(x)/(1 + f_n(x)^2)$ kan vi anta att f_n är begränsade. Uttryck existens av gränsvärdet genom Cauchys konvergenskriterium. Om χ är karakteristiska funktionen för E så blir $f(x) = \lim \chi(x)f_n(x)$ för varje x.

50. Att x är en lokal maximumpunkt betyder att $f(x) \ge g_r(x)$ för något rationellt $r > 0$ om $g_r(x) = \sup_{|y-x|<r} f(y)$, och g_r är nedåt halvkontinuerlig enligt en tidigare övning.

51. Om $f \in C_0$ så är $|\int_{E_j} f\,dx| \le \sup|f|m(E_j) \to 0$. Approximera f med funktioner ur C_0. Om E_j avtar och $a_j \to 0$ så låt A_j vara maximum av a_k då $m(E_k) \le m(E_j)$ och välj f konstant $= c_j$ i $E_j \setminus E_{j+1}$ med $c_j(m(E_j) - m(E_{j+1})) = A_j - A_{j+1}$. I fallet av disjunkta E_j krävs att $\sum a_j < \infty$.

52. Lebesgues majorantsats ger gränsvärdet $f(0) + (f(1) - f(0))m(\{x; g(x) = 1\})$.

53. L^1 normen av en delsumma är antalet termer gånger $h\int f\,dx$ så vi har inte konvergens i L^1. Om $0 \le \varphi \in C_0$ så är

$$\int^* F_h(x)\varphi(x)\,dx = \int^* f(x)\Phi_h(x)\,dx, \quad \Phi_h(x) = \sum_k h\varphi(x + kh).$$

Φ_h är likformigt begränsad så vi får $F_h \in L^1_{\text{lok}}$ och genom approximation av f med funktioner i C_0 får vi $F_h \to \int f\,dx$ i L^1_{lok} då $h \to 0$.

54. Verifiera detta först då $f \in C_0$ och utvidga genom approximation.

55. Antag $f \geq 0$, integrera med avseende på x över ett ändligt intervall och byt variabler.

56. Av Lebesgue-Fubinis sats följer att den inre integralen är definierad för nästan alla $x \in L^1$ och att den tillhör L^1, och en variabelsubstitution och Lebesgue-Fubinis sats ger $I(T) \leq \int |f(x)|\,dx \int |g(y)|\,dy$. Använd det för att återföra beviset på fallet då $f, g \in C_0$. Då har vi med likformig konvergens och stöd i fix kompakt

$$\int f(x-Ty)g(y)\,dy \to f(x)\int g(y)\,dy \quad \text{då } T \to 0$$

vilket medför att $I(T) \to \int |f(x)|\,dx |\int g(y)\,dy|$ då $T \to 0$. Variabelsubstitution ger

$$I(T) = \int \Big| \int T^d f(Tx - Ty)g(y)\,dy\Big|\,dx = \int \Big| \int f(y)g(x - y/T)\,dy\Big|\,dx$$

så vi kan låta f och g byta plats om T ersätts med $1/T$. Detta ger

$$I(T) \to \int |f(x)|\,dx \Big| \int g(y)\,dy\Big| \text{ då } T \to 0, \;\; I(T) \to \Big| \int f(x)\,dx\Big| \int |g(y)|\,dy \text{ då } T \to \infty.$$

57. Använd Lebesgue-Fubinis sats på $\int_M (\int f(x)\varrho(x)^a \|x-y\|^{-a-d}\,dx)\,dy$.

58. Använd att $1 \leq (1 + \|x+y\|)/\|y\| \leq 2 + \|x\|$ då $\|y\| \geq 1$ och använd Lebesgue-Fubinis sats på integralen för $\|x\| < R$ och $\|y\| < 1$.

59. Använd Fubinis sats på $f(ty)\chi(y)$ där $\chi \in C_0$ är noll nära origo, och utnyttja sats 2.8.6.

60. Låt $N \subset \mathbf{R}$ vara en nollmängd sådan att $x \mapsto f(x,y)$ är kontinuerlig då $y \notin N$ och låt $F(x,y) = 0$ då $y \in N$, $F(x,y) = f(x,y)$ då $y \notin N$. Då är $x \mapsto F(x,y)$ kontinuerlig för varje y, och a) (resp. b) eller c)) gäller för f om och endast om det gäller för F. Det är klart att b) medför a). Om $y \mapsto F(x_j, y)$ är mätbar och $x_j \to x$ så följer att $y \mapsto F(x,y) = \lim_{j\to\infty} F(x_j, y)$ är mätbar, vilket visar att a) medför b). Av b) följer att

$$F_k(x,y) = F(j/k, y) \quad \text{då } j/k \leq x < (j+1)/k$$

är mätbar i $\mathbf{R}^2$, vilket medför att F är mätbar eftersom $F_k(x,y) \to F(x,y)$ för alla $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. Alltså följer c) av b). Eftersom c) enligt Lebesgue-Fubini medför att a) gäller för nästan alla x, så är ekvivalensen bevisad.

61. Som i anvisningarna till föregående övning kan vi ersätta f med F så att $x \mapsto F(x,y)$ är kontinuerlig för varje y. Då har vi

$$E = \bigcap_{y_1, y_2 \in \mathbf{Q}, y_1 > y_2} \{x \in \mathbf{R}; F(x,y_1) - F(x,y_2) \geq 0\}$$

vilket är en mätbar mängd. Mängden av alla y där $N(y) \geq m$ består dels av mängden

$$\bigcup_{a,b\in\mathbf{Q}, a<b} \Big(\bigcap_{x\in\mathbf{Q}, a<x<b} \{y; F(x,y) = 0\}\Big)$$

av punkter sådana att $x \mapsto F(x,y)$ är 0 i ett äkta intervall, dels av alla y sådana att det finns disjunkta intervall $[a_j, b_j]$, $j = 1, \dots, m$, med rationella ändpunkter sådana att $F \neq 0$ medan $\inf_{x\in\mathbf{Q}, a_j<x<b_j} |F(x,y)| = 0$, vilket lätt ger mätbarheten av N.

62. Använd att $E_1 = \{x; \int^* |f(x,y)|\,dy = 0\}$, att $E_2 = \{x; g(x,y) = 0 \text{ för nästan alla } y\}$ om $g = \min(f, 0)$, och att E_3 är skärningen av mängderna där $\int^*_{|y|<N} |f(x,y)|\,dy < \infty$, för

$N = 1, 2, \ldots$. Vidare är $\{x; g(x) \le t\}$ skärningen av $\{x; r - f(x,y) \ge 0$ för nästan alla $y\}$ då $r > t$ är ett rationellt tal.

63. Välj $\varphi_0, \ldots, \varphi_m \in C_0$ med $\int \varphi_j(y) y^k \, dy = \delta_{jk}$ för $0 \le j, k \le m$. Då är

$$p(y) = \sum_0^m y^k \int p(t)\varphi_k(t)\, dt$$

för varje polynom av grad $\le m$. Enligt Lebesgue-Fubinis sats är

$$c_k(x) = \int f(x,y)\varphi_k(y)\, dy$$

en mätbar funktion på den mätbara mängden där integranden tillhör L^1; definiera $c_0 = +\infty$ och $c_j = 0$ för $j \ne 0$ utanför den mängden. Då är

$$E_m = \{x; f(x,y) - \sum_0^m y^k c_k(x) = 0 \text{ för nästan alla } y\}.$$

64. Använd Fatous lemma.

65. Om f är mätbar så är $E_f = \cup_{r\in\mathbf{Q}}\{x \in \mathbf{R}^d; f(x) < r\} \times \{t \in \mathbf{R}; t > r\}$ mätbar. Om E_f är mätbar så är $\{x; f(x) < t\}$ mätbar för nästan alla t. För varje $t \in \mathbf{R}$ finns en följd $t_j \uparrow t$ så att $\{x; f(x) < t_j\}$ är mätbar, så $\{x; f(x) < t\}$ är alltid mätbar.

66. Likheten fås av Lebesgue-Fubinis sats använd på karakteristiska funktionen för $\{(x,t) \in \mathbf{R}^{d+1}; |f(x)| > t > 0\}$. Resten följer eftersom $m(t)$ är en avtagande funktion.

67. Använd Lebesgue-Fubinis sats — verifiera mätbarheten.

68. $\int^* |f|\, dx$ ligger mellan summan och λ gånger summan.

69. Detta är klart då $f \in C_0$ och följer allmänt genom approximation av f med funktioner i C_0 för $|f * g| \le C \int |f|\, dx$ om $|g| \le C$.

70. Bevisa detta först då $f \in C_0$.

71. Det första påståendet visas som föregående övning och det andra genom att ta lämpliga följder som växer mot f och g.

72. Vi kan anta att $f \in L^1$. Låt χ vara karakteristiska funktionen för en integrabel mängd där summan är $\le M$. Då är

$$M \int \chi\, dx \ge \sum_1^\infty \int f(x + x_n)\chi(x)\, dx = \sum_1^\infty h(x_n)$$

där faltningen h är kontinuerlig. Eftersom följden är tät måste $h = 0$ identiskt, alltså $\int f\, dx \int \chi\, dx = 0$, så χ är en nollfunktion.

73. Vi kan anta att E är integrerbar. Om χ är den karakteristiska funktionen så innehåller $E - E$ varje x för vilket $\int \chi(x+y)\chi(y)\, dy > 0$. Denna faltning är kontinuerlig och positiv i origo.

74. Inför karakteristiska funktioner för integrerbara delmängder av A och $\complement B$ och använd en övning efter Lebesgue-Fubinis sats.

75. Integralen av f_k är $\|f\|_1^k$, och $\|\sum_n^m f_k\|_1 = \sum_n^m \|f_k\|_1 = \sum_n^m \|f\|_1^k \to 0$ då $n, m \to \infty$ om och endast om $\|f\|_1 < 1$. Om $f(x) \le M$ då $x < A$ så är $f_n(x) < M^n x^{n-1}/(n-1)! \le M^n A^{n-1}/(n-1)!$ då $x < A$, och $f_n(x) = 0$ då $x < 0$; summan blir $\le M \exp(Mx)$.

76. Att $f \in L^p$ följer av Fatous lemma. För varje $\varepsilon \in (0,1)$ finns $C_\varepsilon > 1$ så att

$$(1-\varepsilon)(|f_n|^p - |f|^p) \le |f_n - f|^p \le (1+\varepsilon)(|f_n|^p - |f|^p) \quad \text{då } |f_n| \ge C_\varepsilon |f|.$$

Om vi tillämpar Lebesgues majorantsats på integralerna av $|f - f_n|^p$ och $|f|^p - |f_n|^p$ då $|f_n| < C_\varepsilon |f|$ så får vi

$$(1-\varepsilon)(A - \|f\|_p{}^p) \le \underline{\lim} \|f_n - f\|_p{}^p \le \overline{\lim} \|f_n\|_p{}^p \le (1+\varepsilon)(A - \|f\|_p{}^p).$$

77. Vi kan anta att $f = 0$ och bevisa att $\int f_n g \, dx \to 0$. Låt K vara en stor konstant. Om $E_n = \{x; |f_n(x)| > K|g(x)|^{q-1}\}$ så ger majorantsatsen att $\int_{\complement E_n} f_n g \, dx \to 0$. Eftersom

$$\int_{E_n} |f_n|^p \, dx \ge K^p \int_{E_n} |g|^{p(q-1)} \, dx = K^p \int_{E_n} |g|^q \, dx$$

så ger Hölders olikhet att $|\int_{E_n} f_n g \, dx| \le K^{-p/q} \int_{E_n} |f_n|^p \, dx \le C K^{-p/q}$. Då K kan väljas godtyckligt stort bevisar det påståendet.

78. Nödvändigheten: Om $f \in L^p$ kan vi välja K så att $\int_{\complement K} |f|^p \, dx < \frac{1}{2}\varepsilon$ vilket medför $\int_{\complement K} |f_n|^p < \varepsilon$ för stora n; med större K gäller det för övriga ändligt många n också. Tillräckligheten: Visa först att $\int_{\complement K} |f|^p \, dx \le \varepsilon$ också.

79. Använd Hölders olikhet. För att visa att $q < p$ kan vi välja disjunkta $E_j \subset E$ med $0 < m(E_j) < 2^{-j}$ och sätta $f = j^{-2} m(E_j)^{-1/p}$ i E_j. Om $m(E) = \infty$ och $q < p$ kan vi i stället välja E_j med $m(E_j) = 1$ och $f_j = j^{-a}$ i E_j där $qa < 1 < pa$.

80. Använd Hölders olikhet med exponenterna $p/(\lambda r)$ och $q/((1-\lambda)r)$. (Observera att $0 < \lambda < 1$ om $r \ne p, q$.)

81. Använd föregående övning på L^1, L^2, L^4, övning 1 och att $\|f\|_p$ växer med p.

82. Använd föregående övning.

83. Antag först att $q = 1$ och använd den allmänna olikheten mellan aritmetiska och geometriska medelvärden

$$\prod_1^n a_j^{\lambda_j} \le \sum_1^n \lambda_j a_j, \quad \lambda_j \ge 0, \ \sum_1^n \lambda_j = 1, \ a_j \ge 0.$$

Tillfoga en faktor i $L^{q'}$ med $1/q + 1/q' = 1$ om $q > 1$ och använd omvändningen till Hölders olikhet.

84. Antag först att $f, g \in C_0^+$ och tag $h \in C_0^+$. Uppskatta

$$\int (f * g)(x) h(x) \, dx = \iint f(x-y) g(y) h(x) \, dx$$

med hjälp av olikheten

$$abc \le b^q c^{r'}/p' + a^p c^{r'}/q' + a^p b^q/r, \quad 1/p + 1/p' = 1/q + 1/q' = 1/r + 1/r' = 1,$$

som följer av olikheten mellan aritmetiska och geometriska medelvärden eftersom $1/p' + 1/q' + 1/r = 1$. (Man kan utesluta $r' = \infty$ för då är $p = q = 1$ och olikheten är klar.) Använd omvändningen till Hölders olikhet för att visa att $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$, utvidga till $f, g \in I^+$ och behandla sedan det allmänna fallet.

85. Hölders olikhet ger en begränsning av $R^{-b} \int_{\|x\|<R} |f(x)|\, dx$. Skriv $f = f_1 + f_2$ där $f_1(x) = f(x)$ då $\|x\| < \varrho$ och $f_2(x) = f(x)$ då $\|x\| \geq \varrho$ med ett stort ϱ, och använd att $b > 0$. Se på funktionerna $f(x) = (1 + \|x\|)^{-\lambda}$ för att visa nödvändigheten. Hölders olikhet visar att svaret på sista frågan är $b > d + (a - d)/p$ om $p > 1$, och $b \geq a$ då $p = 1$.

86. Uppskatta F som i föregående övning och använd Hölders olikhet.

87. Då $b > (p-1) \sum_1^d 1/a_j$. Uppskatta $\int_{r<\varrho(x)<2r} |f(x)|\, dx$ med Hölders olikhet och summera för $r = 2^\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$. Nödvändigheten inses då $f(x) = (1 + \|x\|)^{-c}$ med lämpligt c.

88. Då $\varphi \in C_0$ så inses lätt att gränsvärdet är $\|\varphi\|_p \|f\|_1$. Utvidga till allmänna $f \in L^p$ med kompakt stöd genom att uppskatta antalet termer och med hjälp av Hölders olikhet (för summor) visa en uppskattning med $\|f\|_p$.

89. De första påståendena följer genast av Lebesgue-Fubinis sats. Om $f \in L^p$ så är f summan av en funktion i L^1 och en i L^∞, så Kf är definierad. Hölders olikhet ger

$$|(Kf)(x)| \leq A^{p-1} \int^* |K(x,y)| |f(y)|^p\, dy$$

och integration med avseende på x ger påståendet.

90. Enligt övning 10 är

$$\Big(\sum_1^n |f_j(x)|^2 \Big)^{\frac{p}{2}} = C \int_{\|\xi\| \leq 1} \Big| \sum_1^n \xi_j f_j(x) \Big|^p\, d\xi$$

där vi också kan ersätta $f_j(x)$ med $(Tf_j)(x)$. Integrera med avseende på x, omkasta integrationsordningen och tillämpa förutsättningen på $f = \sum_1^n \xi_j f_j$.

91. Olikheten är klar om g är en sträckvis konstant funktion av $\|x\|$, och g är gränsvärde av en växande svit av sådana funktioner. Använd sedan beviset för sats 2.10.1. Det sista påståendet följer av att $g = g_1 + g_2$ där $g_1 \in L^\infty$ har kompakt stöd och $\|g_2\|_1$ kan väljas godtyckligt litet.

92. Övning 84 ger att $f_\varepsilon \in L^p$ och att $\|f_\varepsilon\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$. Det räcker därför att bevisa påståendet då $f \in C_0$. Visa då med hjälp av den likformiga kontinuiteten hos f att $\|f_\varepsilon - f\|_p \to 0$ för $p = 1$ och $p = \infty$. — Man kan också använda att $\|f(\cdot + h) - f\|_p \to 0$ då $h \to 0$ för varje $f \in L^p$. Bevisa det!

93. Om $F(t) = \int_0^t f(a + x)$ så gäller $F(t)/t \to f(a)$ då $t \to 0$ för nästan alla a, och då är

$$\int_0^1 f(x^n + a)\, dx = \frac{F(1)}{n} + \frac{n-1}{n^2} \int_0^1 F(t) t^{\frac{1}{n} - 2}\, dt$$

(Detta följer om man sätter in definitionen av F i högerledet och använder Lebesgue-Fubinis sats.) Betrakta integralen först över en omgivning till 0 där $|F(t)/t - f(a)| < \varepsilon$ och sedan över komplementet till denna.

94. Ena riktningen: Låt f vara integralen av karakteristiska funktionen för en öppen mängd som innehåller E. Andra riktningen: Använd att

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-f(-x)) \geq \lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} f'(t)\,dt, \quad f\in K$$

och att f' existerar och är ≥ 1 i en mätbar mängd som innehåller E.

95. Måttet μ av värdeförrådet är lika med $f(1)-f(0)$ minus summan av alla diskontinuiteter. Vi har $f(x)=\int_0^x f'(t)\,dt+g(x)$ där $g(x)$ är växande och har samma diskontinuiteter som f, så $\mu \geq f(1)-f(0)-(g(1)-g(0))=\int_0^1 f'(x)\,dx$.

96. Vi kan anta att $m^*(E)<\infty$. Enligt sats 2.6.6 finns en mätbar mängd $\widetilde{E}\supset E$ med $m(\widetilde{E})=m^*(E)$. Vi har

$$m(\widetilde{E})=m^*(E)\leq m^*(E\cap S)+m^*(E\cap \complement S)\leq m(\widetilde{E}\cap S)+m(\widetilde{E}\cap\complement S)=m(\widetilde{E})$$

så $m(\widetilde{E}\cap S)=m^*(E\cap S)\leq k\,m(S)$. Av Sats 2.10.1 följer därför att karakteristiska funktionen för $\widetilde{E}$ nästan överallt är $\leq k$, alltså lika med noll.

97. Det räcker att åstadkomma detta för en bas för öppna mängder $O_1,O_2,\dots$, exempelvis alla klot med rationell radie och medelpunkt. Välj successivt $\gamma_k\in(0,1)$ och kompakta mängder E_k utan inre punkter som växer med k så att $m(E_k)<1$ och $0<m(E_k\cap O_j)<\gamma_j m(O_j)$ då $j\leq k$. Om γ_k och E_k redan valts för $k\leq\kappa$ kan vi vl̈ja $\gamma_{\kappa+1}\in(m(E_k\cap O_{\kappa+1},1)$ och sedan $E_{\kappa+1}=E_\kappa\cup e_{\kappa+1}$ där $e_{\kappa+1}\subset O_{\kappa+1}$ är kompakt och har så litet men positivt mått att detta gäller för $j\leq k\leq\kappa+1$ och $m(e_{\kappa+1})<2^{-\kappa-1}$. Om $E=\cup E_k$ så är $0<m(E\cap O_j)\leq\gamma_j m(O_j)$ för varje j, och $m(E)\leq 1$. (Se övning 5 för existens av kompakta mängder utan inre punkter med positivt mått.)

98. E är mätbar om $m^*(E)+m^*(I\setminus E)=m(I)$, så det andra påståendet följer av det första. Som i övning 96 kan man reducera till fallet då E är mätbar. Låt $0<\delta<\min(\varepsilon,1-\varepsilon)$ och välj en ändlig föreningsmängd A av intervall så att $m(E\triangle A)/\delta$ är liten. Om $m(I_j\cap(A\triangle E))<\delta m(I_j)$ har vi

$$m(I_j\cap A)>(\varepsilon+\delta)m(I_j)\implies m(I_j\cap E)>\varepsilon m(I_j)\implies m(I_j\cap A)>(\varepsilon-\delta)m(I_j)$$

så $I_j\subset I'$ om $I_j\subset A$ men inte då $I_j\subset\complement A$. Måttet av föreningsmängden av de tveksamma intervallen där $m(I_j\cap(A\triangle E))\geq\delta m(I_j)$ är högst $m(A\triangle E)/\delta$, vilket medför påståendet.

99. a) Det är klart att $m(O_t)$ växer och är kontinuerlig till vänster samt att $m(O_t)>0$ då $t>0$. Majorantsatsen ger $\lim_{s\downarrow t}m(O_s)=m(O_t)+m(E_t)$ där $E_t=\{x\in O; d(x)=t\}$. Det är klart att $E_0=\emptyset$. Att E_t är en nollmängd då $t>0$ följer av att om $d(x)=t>0$ så finns $y\in\partial O$ med $\|x-y\|=t$. Alla punkter z i klotet B_r med radie $r<t$ och medelpunkt i x sådana att $\langle z-x,y-x\rangle>\frac{1}{2}\|z-x\|\|y-x\|$ har då avstånd $<t$ till y (rita figur!). Måttet av denna klotsektor är $\geq m(B_r)/2^d$. (Uppskatta måttet för klotet uppåt med måttet av en omskriven cylinder och måttet för klotsektorn nedåt med måttet av en dubbelkon, vilket ger att måttet av klotsektorn är $\geq(\sqrt{3}/2)^{d-1}m(B_r)/2d\geq m(B_r)/2^d$ då $d\geq 3$, det är $m(B_r)/(d+1)\geq m(B_r)/2^d$ då $d=1,2$.) Det följer att det inte finns någon täthetspunkt för E_t som alltså är en nollmängd. Om det finns en punkt $x\in O$ med $d(x)=t$ och vi väljer y som förut så blir $d(\lambda x+(1-\lambda)y)=\lambda t$ om $0<\lambda<1$. Om $0<s<t$ så får vi $\lambda x+(1-\lambda)y+z\in O_t\setminus O_s$ om $|z|<\min(t-\lambda t,\lambda t-s)$ vilket visar att $m(O_s)<m(O_t)$.

b) Det är klart att f är mätbar, och

$$\int^* f\,dx = \sum_1^\infty 2^{\nu/2} m(O)/2^\nu = m(O)/(\sqrt{2}-1).$$

c) Om $x \in O_{t_\nu}$ så är $f(x-y) \geq 2^{\nu/2}$ i en sektor S av klotet $\{y; \|y\| < t_\nu\}$ vars volym enligt ovan är minst 2^{-d} gånger klotets volym, så $f * g(x) \geq 1/2^d$ eftersom $\int_S g\,dy \geq 2^{-\nu/2}/2^d$.

d) Välj öppna $O_j \supset N$ med $m(O_j) < 4^{-j}$, $j = 1, 2, \ldots$. Vi kan finna icke negativa $f_j, g_j \in L^1$ enligt oven så att

$$\int f_j\,dx = 4^{-j}/(\sqrt{2}-1), \quad \int g_j\,dx = 1, \quad f_j * g_j(x) \geq 2^{-d} \text{ i } O_j.$$

Då har $f = \sum 2^j f_j$ och $g = \sum 2^{-j} g_j$ den önskade egenskapen.

100. För fixt T är F_T mätbar och $|F_T(x)| \leq C|f(t_1x+s_1)|$, så $\int^* |F_T(x)|^p\,dx \leq C^p \|f\|_p{}^p/|t_1|$, vilket visar att $F_T \in L^p$. Låt $K \subset \{(t_1, t_2, s_1, s_2, s_3); t_1t_2 \neq 0\}$ vara kompakt. För att visa kontinuitet av f_T som funktion av $T \in K$ antas först att f har kompakt stöd och att f, g är begränsade. Detta medför att $|x| \leq M$ då $x \in \operatorname{supp} F_T$, $T \in K$, för någon konstant M. Låt A_j vara en följd av kontinuerligt deriverbara funktioner som konvergerar likformigt mot A i $\{y \in \mathbf{R}^4; |y_1| \leq \sup|f|, y_2| \leq \sup|g|, y_3 \leq M, |y_4| \leq \sup_T |s_3|\}$. Ersätter vi A med A_j får vi en följd $F_T^{(j)}$ med stöd i en fix kompakt mängd som konvergerar likformigt mot F_T, och

$$|F_T^{(j)} - F_{T^0}^{(j)}| \leq C_j(|f(t_1x+s_1) - f(t_1^0x+s_1^0)| + |g(t_2x+s_2) - g(t_2^0x+s_2^0)| + |s_3^0 - s_3|).$$

Eftersom $g(t_2x+s_2) - g(t_2^0+s_2^0) \to 0$ i L^p_{lok} och $f(t_1x+s_1) - f(t_1^0x+s_1^0) \to 0$ i L^p då $T \to T^0$ följer kontinuiteten i detta fall.

Om f och g har kompakt stöd men f och g inte längre antas begränsade så sätter vi $f^\nu = \max(-\nu, \min((f,\nu))$ och definierar g^ν analogt. Då är $f^\nu = f$ och $g^\nu = g$ utom i en mängd E^ν med $m(E^\nu) \to 0$ då $\nu \to \infty$. Om F_T^ν svarar mot f^ν, g^ν så är $F_T^\nu = F_T$ utom då $t_1x+s_1 \in E^\nu$ eller $t_2x+s_2 \in E^\nu$ vilket ger

$$\begin{aligned}
\text{(4.4.2)} \quad \|F_T^\nu - F_T\|_p{}^p &\leq 2^pC^p \int_{t_jx+s_j \in E^\nu, j=1 \text{ eller } 2} |f(t_1x+s_1)|^p\,dx \\
&\leq 2^pC^p|t_1|^{-1}\Big(\int_{E^\nu} |f(x)|^p\,dx + \int_{t_2(x-s_1)/t_1+s_2} |f(x)|^p\,dx\Big) \to 0
\end{aligned}$$

då $\nu \to \infty$ och kontinuiteten följer av det redan behandlade fallet.

Om f inte har kompakt stöd så konstaterar vi att

$$\int_{|t_1x+s_1|>\mu} |A(f(t_1x+s_1), g(t_2x+s_2), x, s_3)|\,dx \leq C^p|t_1|^{-1} \int_{|x|>M} |f(x)|^p\,dx \to 0$$

då $M \to \infty$, och beviset fullbordas genom att ersätta f med funktionen som är lika med f i $(-M, M)$ och noll i komplementet och ersätta g med en funktion som är lika med g i ett tillräckligt stort intervall som beror på M.

Övningen har många varianter. Man kan lika väl betrakta en funktion

$$A(f_1(t_1x+s_1), \ldots, f_N(t_1x+s_N), x, s_{N+1})$$

där $f_1, \dots, f_k \in L^p$ medan $f_{k+1}, \dots, f_N$ bara är mätbara, förutsatt att $|A(y)| \le C \sum_1^k |y_j|$. Här kan s_{N+1} beteckna många parametrar. Vi kan också låta $x \in \mathbf{R}^d$, med $s_1, \dots, s_N \in \mathbf{R}^d$ och inverterbara lineära transformationer $t_1, \dots, t_N$ i $\mathbf{R}^d$.

Sakregister