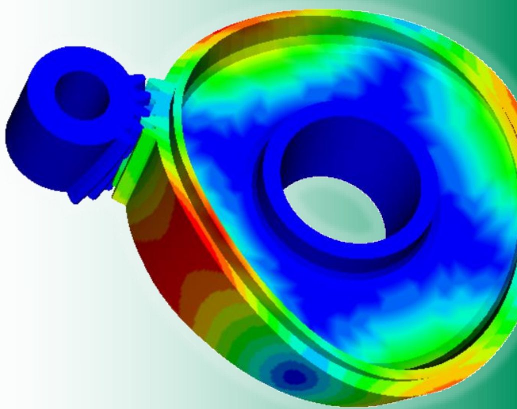
FE-Modalanalyse auf Basis von Z88
Eigenschwingungen in der Antriebstechnik

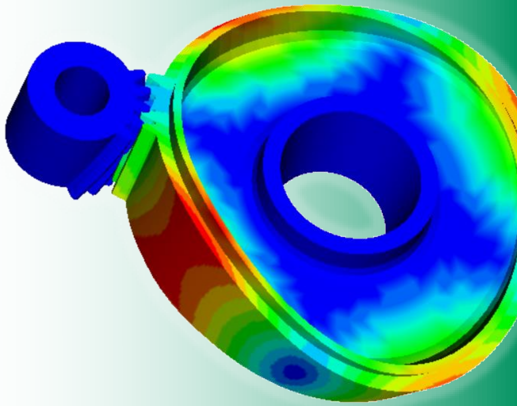
Johannes Wittmann, Florian Hüter

23. Bayreuther 3D-Konstrukteurstag
Bayreuth, 14.09.2022



Lehrstuhl für
Konstruktionslehre und CAD
Prof. Dr.-Ing. Stephan Tremmel

- Motivation
- Eigenschwingungsanalyse auf Basis von Z88
- Zwangsbedingungen bei Eigenschwingungen
- Modalanalyse mit Betriebspunkt-Tangentensteifigkeit
- Zusammenfassung, Fazit & Ausblick



Eigenschwingungsanalyse mit Z88

Motivation

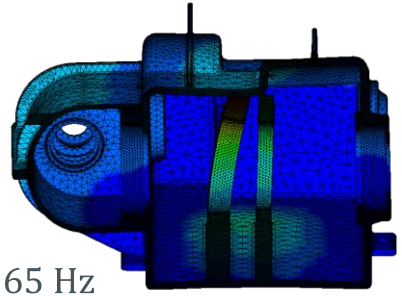
UNIVERSITÄT BAYREUTH

Geräusch- und Schwingungsanregung

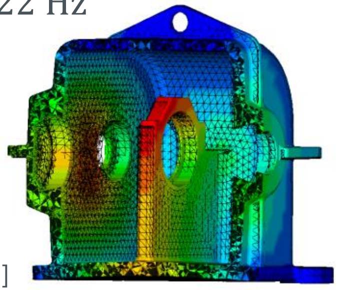
- Anwendungsgebiete: Zahnradgetriebe und Getriebegehäuse mechanischer Antriebsstränge
- Lösung der Eigenschwingungen im relevanten **Frequenzbereich** wünschenswert

Betriebspunkt-Modalanalyse

- Resonanzfrequenzen bei zugrunde liegendem nichtlinearem Strukturverhalten
- Lösung der Eigenschwingungen unter Berücksichtigung der **Tangentensteifigkeit**



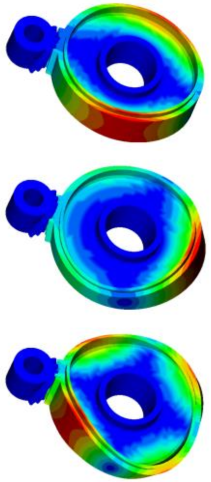
$f = 565$ Hz



$f = 922$ Hz

[FVA-WORKBENCH]

[www.rw-kupplungen.de]



$f = 625$ Hz

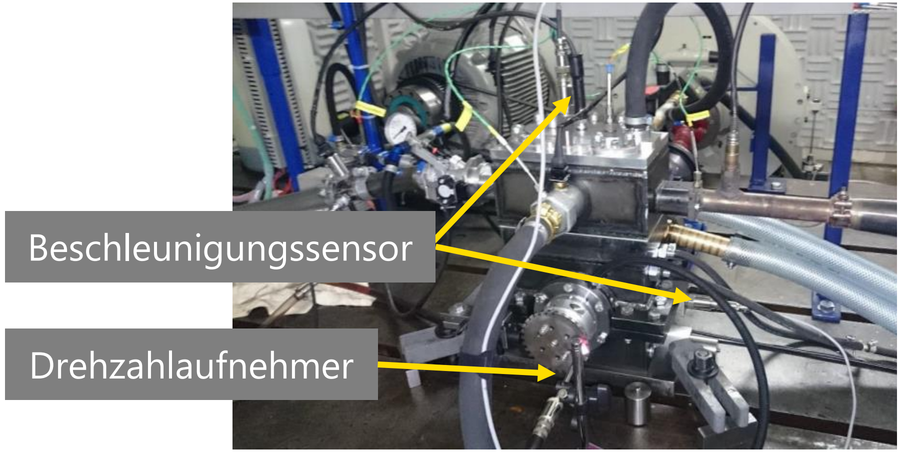
$f = 640$ Hz

$f = 697$ Hz

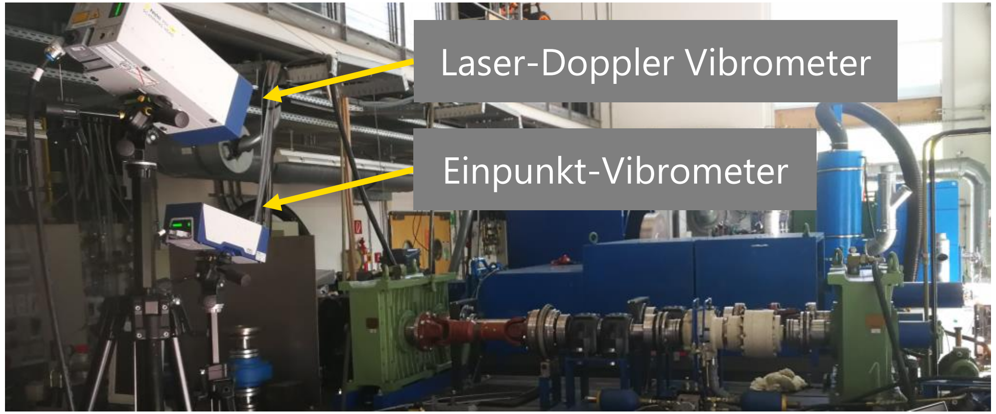
Motivation - Möglichkeiten zur Messung von Schwingungen

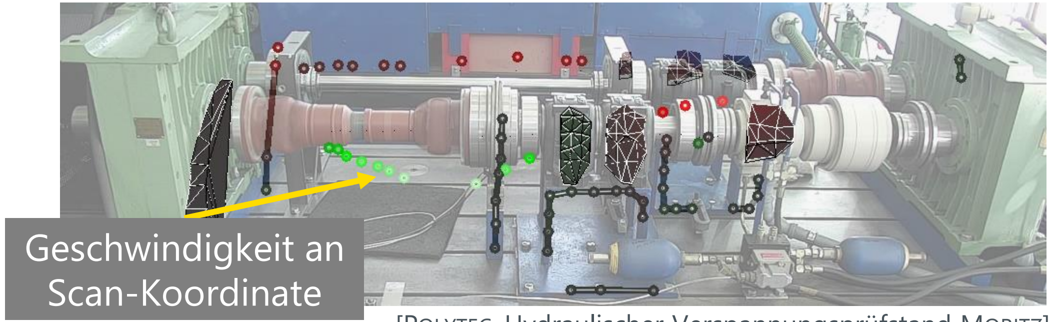
Experimentelle Modalanalyse allgemein

- Vibrationsmessungen über montierte Beschleunigungs- und Drehzahlreferenzaufnehmer
- Berührungsfreie Messung über Laser-Doppler-Vibrometrie (optische Interferenz & DOPPLER-Effekt)



[BRENDEL, Doppelkolbenmotor nach RIEG]





[POLYTEC, Hydraulischer Verspannungsprüfstand MORITZ]

→ Messtechnische Validierung der FE-Modalanalyse

Eigenschwingungsanalyse mit Z88

Überblick der Lösungsansätze in der Strukturdynamik

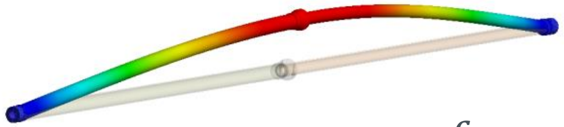
Bewegungs- o. Schwingungsgleichung

Modalanalyse

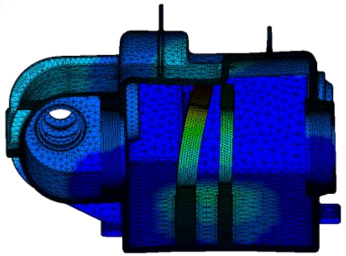
Transiente Analyse

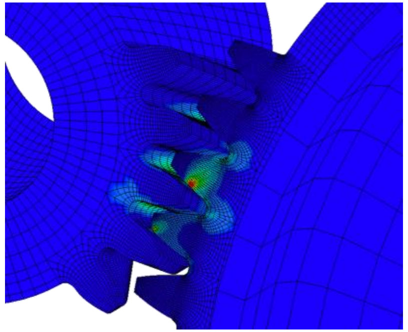
Frequenzganganalyse

Modale Superposition, Dynamische Reduktion, etc.

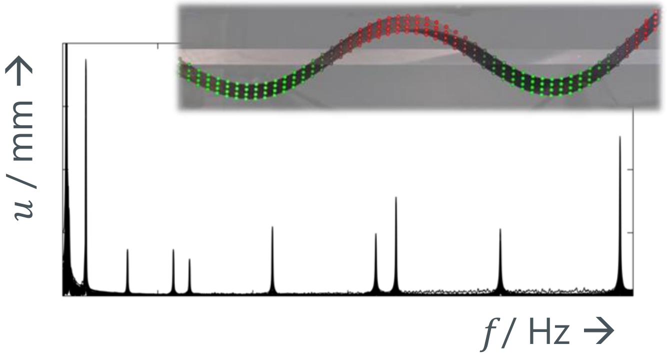


φ_1, f_1





Abwälzsimulation, nichtlinear, gedämpft



[GROTH, POLYTEC]

Eigenschwingungsanalyse mit Z88

Grundlagen Massenmatrix und Bewegungsgleichung

Trägheitsabbildung

Elementweise Erzeugung der Massenmatrix

- Konsistente Form

$$\boldsymbol{M}_e = \rho_e \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{N} \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,s,t)}\right| \mathrm{drdsdt}$$

x			x	x	
	x	x			x
	x	x	x		
x		x	x		x
x				x	
	x		x		x

- Diagonalform nach HINTON

$$\boldsymbol{M}_{ii}^{diag} = \vartheta_e M_{ii} \boldsymbol{I}$$

mit $M_{ii} = \int_{V_e} \rho_e N_i^2 \mathrm{dV}, \;\; \vartheta_e = \frac{m_e}{\sum_{i=1}^{dof} M_{ii}}$

x					
	x				
		x			
			x		
				x	
					x

- Compilation zu **Gesamtmassenmatrix**
- **Schwingungsgleichung** aus der FE-Strukturdynamik

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{F}(t)$$

[HINTON, BATHE, RIEG]

Eigenschwingungsanalyse mit Z88

Grundlagen Eigenwertproblem

Ungedämpftes Eigenwertproblem

- Ausgangsgleichung des Schwingungssystems

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{F}(t)$$

- Vernachlässigung der Dämpfung in Bewegungsgleichung
  → reelle Eigenwerte und Eigenvektoren als Ergebnis
- Freie Schwingungen
  → keine Berücksichtigung äußerer Kräfte

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{0}$$

- Lösungsansatz $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\phi} e^{i\omega t}$ ergibt allgemeines Eigenwertproblem (EWP)

$$(\boldsymbol{K} - \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{M})\boldsymbol{\phi} = 0$$

mit Eigenwerten $\boldsymbol{\Lambda}$ und Modalmatrix $\boldsymbol{\phi}$

Transformation

- Standard-Eigenwertproblem über Cholesky-Zerlegung:

$$\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\phi}$$

mit $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$ und $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{L}^{-\mathrm{T}}$

- *Shift & invert spectral transformation:*

$$(\boldsymbol{K} - \sigma\boldsymbol{M})^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi} = \nu\boldsymbol{\phi}$$

mit $\lambda = \sigma + \frac{1}{\nu}$

- ➢ Rücktransformation größter Eigenwerte ν führt zu kleinsten Eigenwerten λ des Originalsystems (allgemeines EWP)

→ Sehr effektiv, um Eigenwerte nahe σ und im **relevanten Frequenzbereich** zu berechnen

[Gasch, Nasdala, Köckler, Lehoucq, Hetmaniuk]

Eigenschwingungsanalyse mit Z88

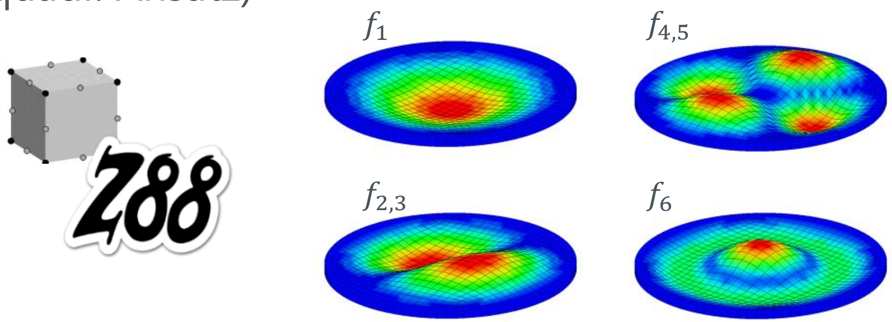
Lösung des Eigenwertproblems

Lösungsmethoden

- LANCZOS-Algorithmus (z. B. in Z88Aurora®)
- *Implicitly Restarted ARNOLDI Method (IRAM)*
  → Geschwindigkeitsvorteil für große
  & dicht besetzte Strukturen
  → Verbesserte Konvergenz bei Singularitäten

Ergebnisse

- Eigenfrequenzen $f = \frac{\omega}{2\pi}$ mit $\omega = \sqrt{\lambda}$
- Eigenformvektoren
  - Massennormiert: $\boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{\varphi}_i = \boldsymbol{I}$
  - Verschiebungsnormiert: $\max(|\boldsymbol{\varphi}_i(k)|) = 1$
- Beispiel: Stahlscheibe aus Hexaederelementen (quadr. Ansatz)



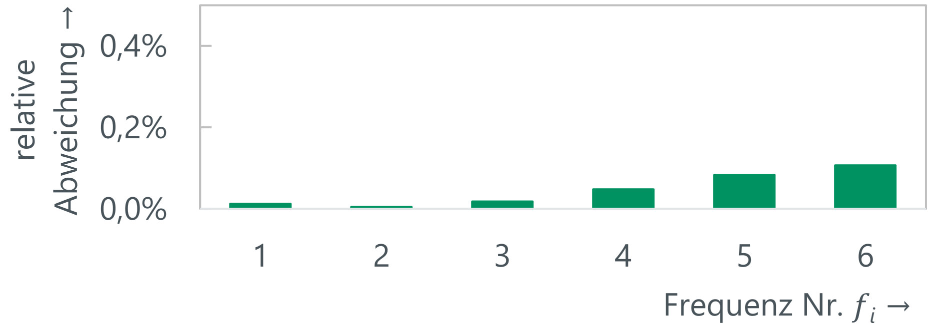
[LEHOUCQ, RIEG, www.z88.de]

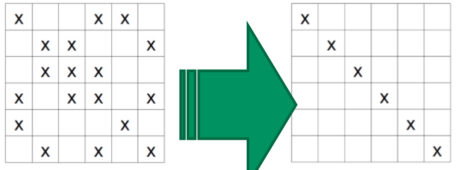
Eigenschwingungsanalyse mit Z88

Einfluss der Massenmatrixform: Beispielmodell

Konsistent vs. Diagonal

- Gute Übereinstimmung der Eigenfrequenzen aus **konsistent & diagonal** besetzter Massenmatrix



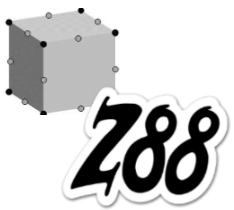


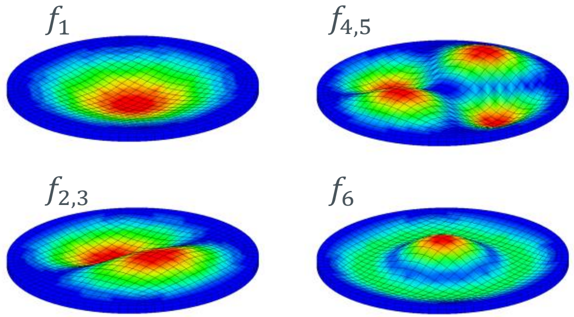
28 sec   **16** sec

→ Deutliche **Zeitersparnis** bei ähnlicher Ergebnisgüte

Ergebnisse

- Eigenfrequenzen $f = \frac{\omega}{2\pi}$ mit $\omega = \sqrt{\lambda}$
- Eigenformvektoren
  - Massennormiert: $\boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{\varphi}_i = \boldsymbol{I}$
  - Verschiebungsnormiert: $\max(|\boldsymbol{\varphi}_i(k)|) = 1$
- Beispiel: Stahlscheibe aus Hexaederelementen (quadr. Ansatz)





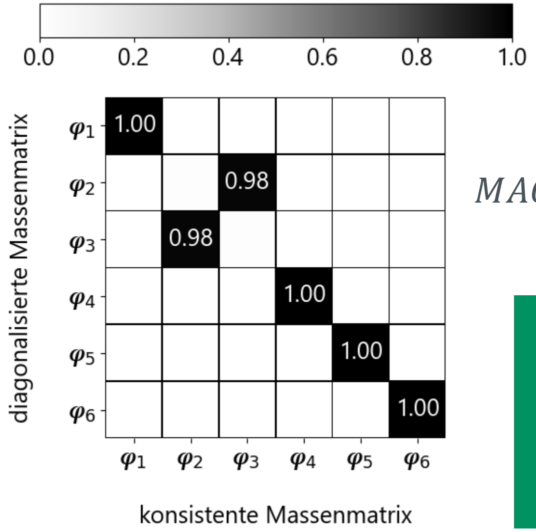
Eigenschwingungsanalyse mit Z88

Einfluss der Massenmatrixform: Beispielmodell

UNIVERSITÄT BAYREUTH

Konsistent vs. Diagonal

- Vergleichsmethode: *Modal Assurance Criterion*
- Prüft Orthogonalität des Eigenvektorpaares über das normierte Skalarprodukt

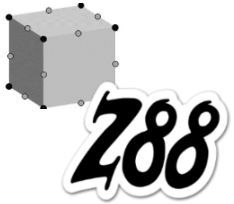


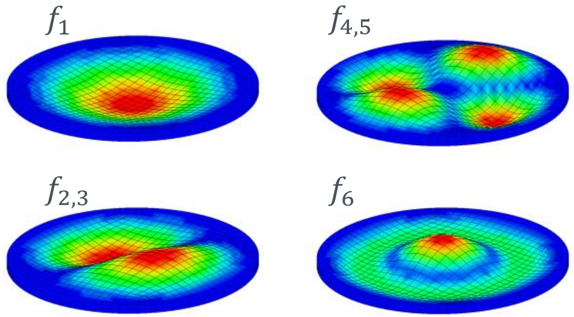
$$MAC(i,j) = \frac{\left(\boldsymbol{\varphi}_{Ai}^{T}\,\boldsymbol{\varphi}_{Bj}\right)^{2}}{\left(\boldsymbol{\varphi}_{Ai}^{T}\,\boldsymbol{\varphi}_{Ai}\right)\left(\boldsymbol{\varphi}_{Bj}^{T}\,\boldsymbol{\varphi}_{Bj}\right)}$$

→ Gute Korrelation der Eigenvektoren aus **konsistent & diagonal** besetzter Massenmatrix

Ergebnisse

- Eigenfrequenzen $f = \frac{\omega}{2\pi}$ mit $\omega = \sqrt{\lambda}$
- Eigenformvektoren
  - Massennormiert: $\boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{\varphi}_i = \boldsymbol{I}$
  - Verschiebungsnormiert: $\max(|\boldsymbol{\varphi}_i(k)|) = 1$
- Beispiel: Stahlscheibe aus Hexaederelementen (quadr. Ansatz)





[Dresig]

Eigenschwingungsanalyse mit Z88

Zwangsbedingungen in der Dynamik

Zwangsbedingungen bei ungedämpften Eigenschwingungen

Berücksichtigung von Kontakt- oder Koppelbedingungen

- Zwangsbedingungen in Ausgangs-Bewegungsgleichung
  $\boldsymbol{GU} - \boldsymbol{V} = \boldsymbol{0} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{F}(t)$
- Einbau in das allgemeine Eigenwertproblem
  - LAGRANGE-Ansatz mit Störparameter

$$\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{K} & \boldsymbol{G}^T \\ \boldsymbol{G} & {}^{-1}\!/_{\beta}\,\boldsymbol{I} \end{bmatrix} - \boldsymbol{\Lambda}\begin{bmatrix} \boldsymbol{M} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\boldsymbol{\Phi} = 0$$

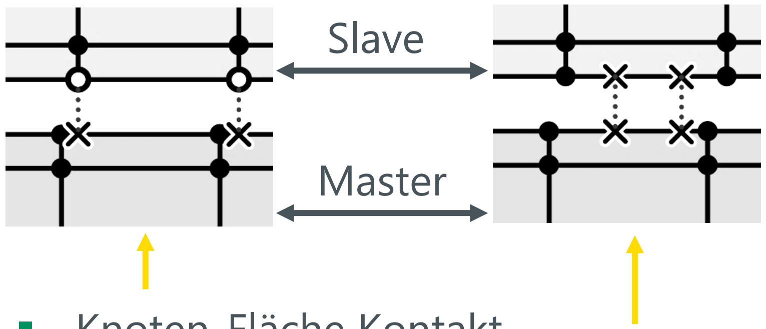
  - Penalty-Methode

$$\left((\boldsymbol{K} + \beta\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{G}) - \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{M}\right)\boldsymbol{\Phi} = 0$$

- Nichtlineare Kontaktzustandsänderung nur in vorgeschalteter quasi-statischer bzw. transienter Simulation

→ **Betriebspunktlinearisierung**: Kontaktzustand ändert sich in der Eigenschwingungsanalyse nicht

Kontaktdiskretisierung



- Knoten-Fläche Kontakt
- Erweiterter Punkt-Fläche Kontakt

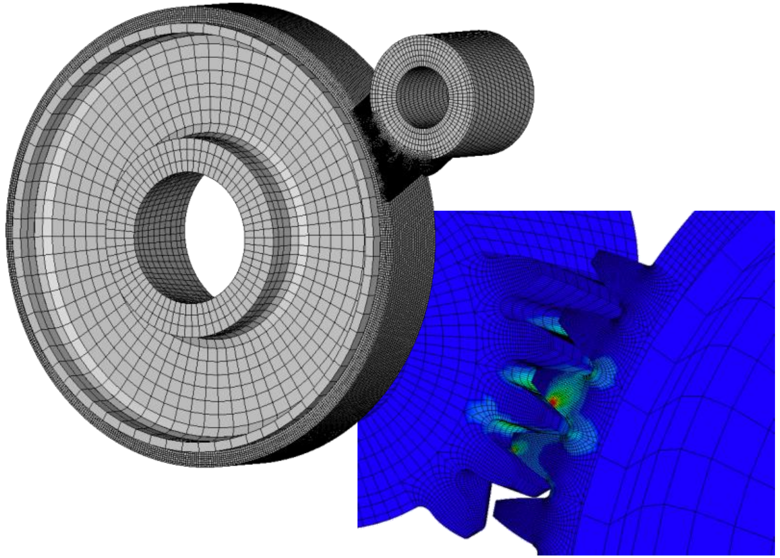
[ABAQUS, BILLENSTEIN, WISSMANN, WRIGGERS]

Eigenschwingungsanalyse mit Z88

Einordnung Betriebspunkt-Modalanalyse

Quasistatische Abwälzsimulation

- Reibungsfreier Kontaktzustand in Tangentensteifigkeit
- Nichtlineare Berechnung

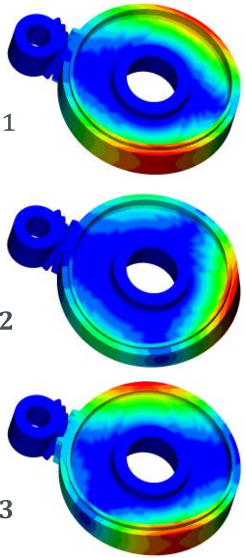


$\boldsymbol{K}_T$
$\boldsymbol{M}$

Modalanalyse

- Eigenfrequenzen
- Eigenformen

$$(\boldsymbol{K}_\mathrm{T} - \boldsymbol{\Lambda M})\boldsymbol{\phi} = 0$$



$f_1, \boldsymbol{\varphi}_1$

$f_2, \boldsymbol{\varphi}_2$

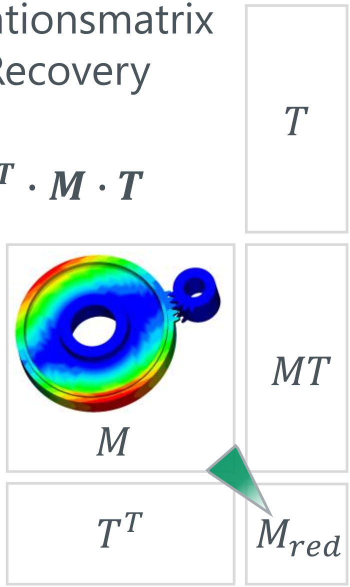
$f_3, \boldsymbol{\varphi}_3$

$\boldsymbol{\varphi}$
f

Dynamische Reduktion

- statisch-modal gemischte Reduktion: z. B. nach Craig-Bampton
- Transformationsmatrix
- Optional: Recovery

$$\boldsymbol{M}_{red}^{dyn} = \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{T}$$



[FVA 892 I]

Eigenschwingungsanalyse mit Z88

Tangentensteifigkeit in Verbindung mit Shift-Invert-Ansatz

Bedeutung des Shift-Invert-Ansatzes

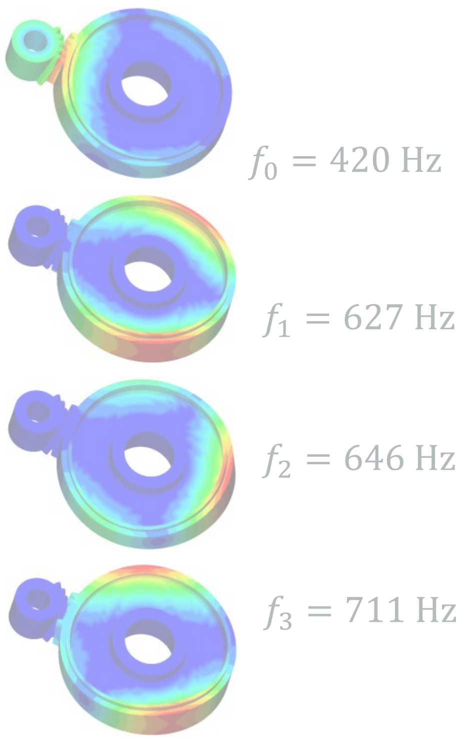
- Berücksichtigung der Tangentensteifigkeit $\boldsymbol{K}_{\mathrm{T}}$ aus vorgeschalteter nichtlinearer FE-Simulation
- Falls $\boldsymbol{K}_{\mathrm{T}}$ schlecht konditioniert oder singulär und $\boldsymbol{M}$ schlecht konditioniert ist, existiert ein Shift-Parameter σ, sodass $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{K}_{\mathrm{T}} - \sigma \boldsymbol{M})$ positiv definit und besser konditioniert ist

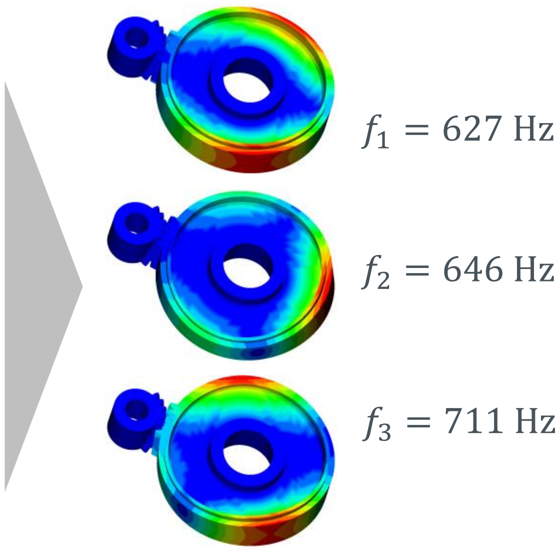
Berücksichtigung des Shift-Parameters in der Modalanalyse am Beispiel Getriebestufe

- Frequenzbereich ab f_σ = 600 Hz ist von Bedeutung
- Wahl des Shift-Parameters $\sigma = (2\pi f_\sigma)^2$
- ✓ Lösung der Modalanalyse liefert interessiertes Frequenzband

$$(\boldsymbol{K} - \boldsymbol{\Lambda M})\boldsymbol{\phi} = 0$$

$$(\boldsymbol{K} - \sigma \boldsymbol{M})^{-1} \boldsymbol{M\phi} = \nu \boldsymbol{\phi}$$





[Hetmaniuk, Lehoucq]

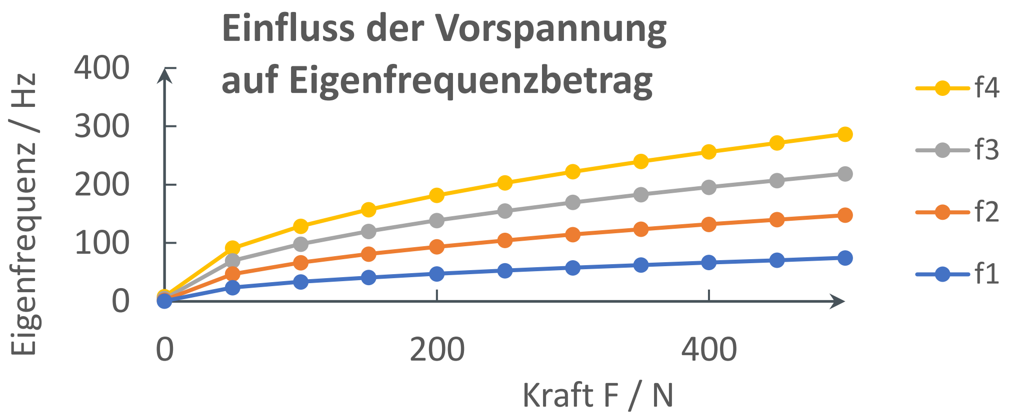
Eigenschwingungsanalyse mit Z88

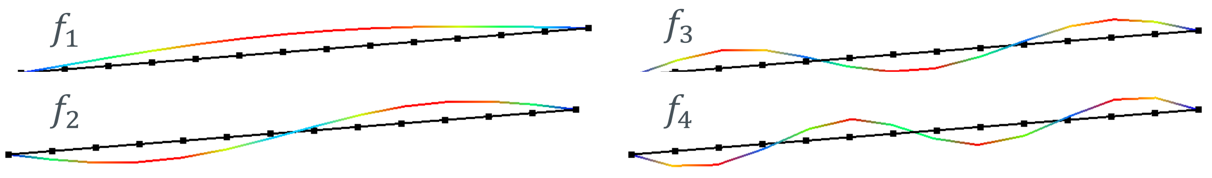
Betriebspunkt-Tangentensteifigkeit

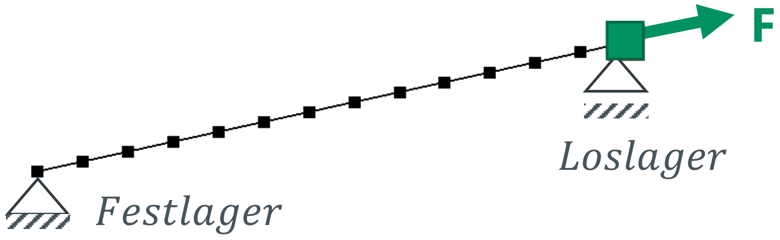
Beispiel: Stahlseil unter Zugbelastung

- Modellinformationen
  - Schub-elastische lineare 2D-Balkenelemente
  - Material: Stahl
  - Querschnitt: 1,979 mm², Länge: 2,54 m
- Berücksichtigung der Tangentensteifigkeit $\boldsymbol{K}_\mathrm{T}$ unterschiedlicher Lastschritte im allgemeinen EWP

$$(\boldsymbol{K}_\mathrm{T} - \boldsymbol{\Lambda M})\boldsymbol{\phi} = 0$$







→ Versteifung aus Belastung in **Betriebspunkt** hat Einfluss auf Betrag der **Eigenfrequenzen**

[ABAQUS2]

UNIVERSITÄT BAYREUTH

Zusammenfassung

- Transformation über Shift-Invert-Ansatz
- Massen- oder Verschiebungsnormierung von Eigenformvektoren
- Zwangsbedingungen bei Eigenschwingungen
- Berücksichtigung der Betriebspunkt-Tangentensteifigkeit aus vorliegendem Kontaktzustand bzw. aus geometrisch großer Verformung (Versteifung infolge Belastung)

Fazit & Ausblick

- Hohe Übereinstimmung zwischen Eigenfrequenzen & -vektoren aus diagonal und konsistent besetzter Massenmatrix
- Betriebspunktmodalanalyse als Grundlage für dynamische Reduktionsmethoden
- Integration in die Bedienoberfläche Z88Aurora®

UNIVERSITÄT BAYREUTH

Literatur

FVA Workbench	FVA GmbH; https://www.fva-service.de/en/software/ aufgerufen am 14.08.2022
BRENDEL	Brendel, Joachim: Berechnung, Konstruktion und Prüfstandsverifikation des Massenausgleichs am Doppelkolben-Zweitaktmotor. Masterarbeit, Uni Bayreuth, 2016
POLYTEC	Polytec GmbH: PSV-Auswertungssoftware, Version 10. www.polytec.com, aufgerufen am 15.06.2022
GROTH	Groth, Clemens; Müller, Günter; Stelzmann, Ulrich: Strukturdynamik: Basiswissen und Arbeitsbeispiele zu FEM-Anwendungen der Strukturdynamik. expert Verlag, 2000
BATHE	Bathe, K. J.: Finite Element Procedures. 2nd edition, Prentice Hall, Pearson Education Inc, Watertown, MA, 2014
HINTON	Hinton, E.; Rock, T.; Zienkiewicz, O. C.: A Note on Mass Lumping and Related Processes in the Finite Element Method. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 4, 1976
GASCH	Gasch, Robert; Knothe, Klaus; Liebich, Robert: Strukturdynamik – Diskrete Systeme und Kontinua. 3. Auflage, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2021
NASDALA	Nasdala, Lutz: FEM-Formelsammlung Statik und Dynamik. München, 3. Auflage, Springer Vieweg, 2015
KÖCKLER	Köckler, Norbert: Numerical Methods and Scientific Computing. Clarendon Press, Oxford, 1994
LEHOUCQ	Lehoucq, Richard B.; Sorensen D. C.; Yang C.: ARPACK Users' Guide. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998
HETMANIUK	Hetmaniuk, Ulrich; Lehoucq, Richard B.: Uniform Accuracy of Eigenpairs from a Shift-Invert Lanczos Method. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 2006
RIEG	Rieg, Frank; Hackenschmidt, Reinhard; Alber-Laukant, Bettina: Finite Elemente Analyse für Ingenieure. 6. Auflage, Carl Hanser Verlag, München, 2019
DRESIG	Dresig, Hans; Fidlin, Alexander: Schwingungen mechanischer Antriebssysteme. 4. Auflage, Berlin, Heidelberg: Springer Vieweg, 2020
ABAQUS	Dassault Systemes: Linear perturbation analysis https://classes.engineering.wustl.edu/2009/spring/mase5513/abaqus/docs/v6.6/books/usb/default.htm?startat=pt03ch06s01aus36.html#usb-anl-alinearnonlinear, aufgerufen am 24.08.2022
BILLENSTEIN	Billenstein, Daniel; Glenk, Christian; Diwisch, Pascal; Rieg, Frank: Investigation of contact settings on the result of topology optimization to avoid contact stiffness supports, Schumacher, A.; Vietor, T.; Fiebig, S.; Bletzinger, K. U.; Maute, K., Advances in Structural and Multidisciplinary Optimization, WCSMO 2017, Springer, Cham, 1455-1467, 2018. doi:10.1007/978-3-319-67988-4_110, 2017
WISSMANN	Wissmann, Johannes; Sarnes, Klaus-Dieter: Finite Elemente in der Strukturmechanik, 1. Auflage, Springer, Berlin Heidelberg, 2006
WRIGGERS	Wriggers, Peter: Computational Contact Mechanics, 2nd edition, Springer, Berlin Heidelberg, 2006
FVA 892 I	Namhoff, Christian; Stephan, Rainer; Hammerl, Georg; Brimmers, Jens; Brecher, Christian; Haefke, Norbert: FE-Berechnung Kunststoffzahnräder in der FVA-Workbench. Abschlussbericht FVA 892 I, Heft 1493, 2022
ABAQUS2	Dassault Systemes: Vibration of a cable under tension, https://abaqus-docs.mit.edu/2017/English/SIMACAEBMKRefMap/simabmk-c-vibrationcable.htm, aufgerufen am 24.08.2022