Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado
Facultad de Ciencias Matemáticas
Unidad de Posgrado

Una generalización de cohomología local para complejos de módulos

TESIS

Para optar el Grado Académico de Doctor en Matemática Pura

AUTOR

Wilfredo MENDOZA QUISPE

ASESOR

Dr. Alfonso PÉREZ SALVATIERRA

Lima, Perú

2022

Referencia bibliográfica

Mendoza, W. (2022). *Una generalización de cohomología local para complejos de módulos*. [Tesis de doctorado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Unidad de Posgrado]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Wilfredo Mendoza Quispe
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	07407715
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0003-3303-4955
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Alfonso Pérez Salvatierra
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	06445739
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0001-9944-4020
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Eugenio Cabanillas Lapa
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	06445518
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Jorge Alberto Coripaco Huarcaya
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	41075852
Miembro del jurado 2	
Nombres y apellidos	Napoleón Caro Tuesta
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	10192983
Datos de investigación	
Línea de investigación	Álgebra
Grupo de investigación	Álgebra

Agencia de financiamiento	Autofinanciamiento
Ubicación geográfica de la investigación	Universidad Nacional Mayor de San Marcos Latitud: -12.058192 Longitud: -77.01891818
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2019 - 2020
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas Puras https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
VICEDECANATO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO
UNIDAD DE POSGRADO

ACTA DE SUSTENTACIÓN VIRTUAL DE TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE DOCTOR EN MATEMÁTICA PURA

Siendo las, 16:07 horas del día Miércoles veintidós de Junio de dos mil veintidós, en la sala virtuales: Google Meet meet.google.com/fom-umuk-ceu , el Jurado de Tesis conformado por los siguientes docentes:

Presidente:	Dr. Eugenio Cabanillas Lapa
Miembro:	Dr. Jorge Alberto Coripaco Huarcaya
Miembro Externo:	Dr. Napoleón Caro Tuesta
Miembro Asesor:	Dr. Alfonso Pérez Salvatierra

se reunieron para la sustentación de la tesis titulada**:** «UNA GENERALIZACIÓN DE COHOMOLOGÍA LOCAL PARA COMPLEJOS DE MÓDULOS», presentada por el Señor Magister **Wilfredo Mendoza Quispe**, para optar al Grado Académico de Doctor en Matemática Pura.

Concluida la exposición, los miembros del Jurado de Tesis procedieron a formular sus preguntas que fueron absueltas por el graduando; acto seguido se procedió a la evaluación correspondiente, según tabla adjunta, habiendo obtenido el Señor Magister Wilfredo Mendoza Quispe, el calificativo de **Excelente (19)**.

Habiendo sido aprobada la sustentación de la Tesis, el Jurado Evaluador recomienda para que el Consejo de Facultad apruebe el otorgamiento del Grado Académico de **Doctor en Matemática Pura** al **Magister Wilfredo Mendoza Quispe**.

Siendo las 17:40 horas, se levantó la sesión, firmando para constancia la presente Acta:

Dr. Eugenio Cabanillas Lapa
PRESIDENTE

Dr. Jorge Alberto Coripaco Huarcaya
MIEMBRO

Dr. Napoleón Caro Tuesta
MIEMBRO EXTERNO

Dr. Alfonso Perez Salvatierra
MIEMBRO ASESOR

DEDICATORIA

Este trabajo está dedicado
a mi esposa Sofía y a mis
hijas Valeria y Natalia.

AGRADECIMIENTOS

Me gustaría agradecer de manera especial al Dr. Napoleón Caro Tuesta, profesor asociado del Departamento de Matemática de la Universidade Federal da Paraíba (Brasil), por haberme sugerido el tema de mi tesis, por su apoyo académico constante y sus valiosas sugerencias durante la redacción de este trabajo.

También me gustaría agradecer al Dr. Alfonso Pérez Salvatierra, por aceptar ser mi asesor de tesis; al Dr. Pedro Celso Contreras Chamorro, por su apoyo y motivación para la realización de este proyecto; y a todos mis colegas y amigos de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la UNMSM.

¡Muchas gracias!

UNA GENERALIZACIÓN DE COHOMOLOGÍA LOCAL PARA COMPLEJOS DE MÓDULOS

Wilfredo Mendoza Quispe

2022

Asesor : Dr. Alfonso Pérez Salvatierra
Grado obtenido : Doctor en Matemática Pura

. . . .

RESUMEN

Sean A un anillo conmutativo perfecto, $\mathfrak{a}$ un ideal de A y φ un conjunto no vacío de ideales de A. Denotemos por $\mathcal{D}(A)$ la categoría derivada de la categoría de los A-módulos y por $\mathcal{D}^{f}_{<}(A)$ la subcategoría plena de $\mathcal{D}(A)$ cuyos objetos son los A-complejos limitados a la izquierda con cohomología finita. En este trabajo introducimos los funtores derivados

$$\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(-),\ \mathbf{L}\Lambda^{\mathfrak{a},\varphi}(-) : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{D}(A),$$

y probamos que si $X^{\bullet} \in \mathcal{D}(A)$ e $Y^{\bullet} \in \mathcal{D}^{f}_{<}(A)$. Entonces existe un isomorfismo natural

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(X^{\bullet}), Y^{\bullet}) \cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(X, \mathbf{L}\Lambda^{\mathfrak{a},\varphi}(Y^{\bullet})).$$

Nuestro resultado es una generalización, en el contexto de los anillos perfectos, del celebrado *Teorema de Dualidad de Greenlees-May*.

Palabras clave
Sistema de ideales, Φ-torsión, cohomología local, módulo Matlis reflexivo, topología Max, homología local, cohomología local formal, homología local formal, categoría derivada, cohomología local derivada, dualidad de Greenlees-May.

A GENERALIZATION OF LOCAL COHOMOLOGY FOR COMPLEX OF MODULES

Wilfredo Mendoza Quispe

2022

Advisor	: Dr. Alfonso Pérez Salvatierra
Degree obtained	: Doctor in Pure Mathematics

. . . .

ABSTRACT

Let A be a perfect commutative ring, $\mathfrak{a}$ an ideal of A and φ a non-empty set of ideals of A. We denote by $\mathcal{D}(A)$ the derived category of the category of A-modules and by $\mathcal{D}^f_<(A)$ the full subcategory of $\mathcal{D}(A)$ whose objects are the bounded below chain complexes with finite cohomology. In this work we introduce the derived funtors

$$\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(-),\ \mathbf{L}\Lambda^{\mathfrak{a},\varphi}(-) : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{D}(A),$$

and we show that if $X^\bullet \in \mathcal{D}(A)$ and $Y^\bullet \in \mathcal{D}^f_<(A)$, then there is a natural isomorphism

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(X^\bullet), Y^\bullet) \cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(X, \mathbf{L}\Lambda^{\mathfrak{a},\varphi}(Y^\bullet)).$$

Our result is a generalization, in the context of perfect rings, of the celebrated *Greenlees-May Duality Theorem.*

Keywords
System of ideals, Φ-torsion, local cohomology, Matlis reflexive module, Max topology, local homology, formal local cohomology, formal local homology, derived category, derived local cohomology, Greenlees-May duality.

Índice general

Introducción

La cohomología local fue introducida por Alexander Grothendieck a principios de los años sesenta, en sus seminarios en Harvard y el IHES (Institut de Hautes Études Scientifiques). En base a las lecturas de Grothendieck en Harvard, Robin Hartshorne publicó en 1967 su ahora clásica monografía *Local Cohomology, a seminar given by A. Grothendieck, Harvard University, Fall 1961* (ver [11]). Las conferencias en el IHES fueron publicadas inicialmente en 1968, y posteriormente republicadas en 2005 con el título *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie - 1962 - Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et gloubax-SGA 2* (ver [10]). Desde entonces, la cohomología local se ha convertido en una herramienta indispensable en geometría algebraica y álgebra conmutativa y es objeto de mucha investigación.

En geometría algebraica, la cohomología local fue introducida como una teoría análoga de la cohomología relativa. Recordemos su definición: Sean X un espacio topológico y Z un subconjunto cerrado de X. Para cada haz $\mathscr{F}$ de grupos abelianos sobre X, el conjunto

$$\Gamma_Z(X,\mathscr{F}) := \{s \in \mathscr{F}(X) |\ \mathrm{Supp}(s) \subseteq Z\}$$

es un subgrupo del grupo de secciones globales $\mathscr{F}(X)$. Además, si $\varphi : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ es un morfismo de haces de grupos abelianos, la restricción de $\varphi_X : \mathscr{F}(X) \longrightarrow \mathscr{G}(X)$ para $\Gamma_Z(X,\mathscr{F})$ induce un homomorfismo de grupos

$$\Gamma_Z(X,\varphi) : \Gamma_Z(X,\mathscr{F}) \longrightarrow \Gamma_Z(X,\mathscr{G}).$$

Las correspondencias $\mathscr{F} \longmapsto \Gamma_Z(X,\mathscr{F})$ y $\varphi \longmapsto \Gamma_Z(X,\varphi)$ definen un funtor exacto a la izquierda

$$\Gamma_Z(X,-) : Sh(X) \longrightarrow Ab$$

de la categoría $Sh(X)$ de *haces abelianos* sobre X en la categoría de *grupos abelianos* Ab. Desde que $Sh(X)$ posse suficientes objetos inyectivos existen los *funtores derivados a la derecha* $\left\{\mathscr{R}^i\Gamma_Z(X,-)\right\}_{i\geq 0}$ del funtor $\Gamma_Z(X,-)$. Para cada entero no negativo i, el i*-ésimo funtor de cohomología local de* X *soportado en* Z es definido por

$$\mathrm{H}^i_Z(X,-) := \mathscr{R}^i\Gamma_Z(X,-).$$

En particular, desde que el funtor $\Gamma_Z(X,-)$ es exacto a la izquierda, existe un isomorfismo natural

$$\mathrm{H}^0_Z(X,-) \cong \Gamma_Z(X,-).$$

Dado un haz $\mathscr{F} \in Sh(X)$, el grupo $H^i_Z(X,\mathscr{F})$ es obtenido de la siguiente manera: consideremos una resolución inyectiva $0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{J}^\bullet$ de $\mathscr{F}$, i.e., un complejo exacto de haces abelianos

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{J}^0 \longrightarrow \mathscr{J}^1 \longrightarrow \cdots,$$

donde cada $\mathscr{J}^n$ es un haz inyectivo. Entonces,

$$\mathrm{H}^i_Z(X,\mathscr{F}) = \mathrm{H}^i(\Gamma_Z(X,\mathscr{J}^\bullet)).$$

Notemos que cuando $Z = X$, la cohomología descrita arriba es precisamente la *cohomología de haces* sobre X.

Ahora consideremos el abierto $U = X \setminus Z$, entonces existe una sucesión exacta larga natural

$$0 \longrightarrow \Gamma_Z(X,\mathscr{F}) \longrightarrow \Gamma(X,\mathscr{F}) \longrightarrow \Gamma(U,\mathscr{F}|_U) \xrightarrow{\partial} \mathrm{H}^1_Z(X,\mathscr{F}) \longrightarrow \cdots$$

$$\longrightarrow \mathrm{H}^i_Z(X,\mathscr{F}) \longrightarrow \mathrm{H}^i(X,\mathscr{F}) \longrightarrow \mathrm{H}^i(U,\mathscr{F}|_U) \xrightarrow{\partial} \mathrm{H}^{i+1}_Z(X,\mathscr{F}) \longrightarrow \cdots$$

Esta sucesión muestra que los grupos de cohomología $\mathrm{H}^i_Z(X,\mathscr{F})$ juegan un rol semejante a los grupos de cohomología relativa de X con respecto a U. De hecho, para "buenos espacios" en los cuales la cohomología de haces coincide con la cohomología singular (por ejemplo, espacios de Hausdorff paracompactos), existe un isomorfismo

$$\mathrm{H}^i_Z(X,\underline{G}) \cong \mathrm{H}^i(X,U,G),$$

donde G es un grupo Abeliano, $\underline{G}$ es el haz constante asociado a G y $\mathrm{H}^i(X,U,G)$ es el i-ésimo grupo de cohomología singular de X relativo a U con coeficientes en G .

Por otro lado, si $V \subseteq X$ es un conjunto abierto tal que $Z \subseteq V$, entonces existe un isomorfismo de δ-funtores

$$\mathrm{H}^i_Z(X,\mathscr{F}) \cong \mathrm{H}^i_Z(V,\mathscr{F}|_V).$$

Tal resultado es un análogo al conocido *Teorema de la Excisión* de la cohomología singular.

A continuación consideremos un esquema $(X,\mathscr{O}_X)$, $Z \subseteq X$ un subconjunto cerrado y $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo cuasi-coherente. Supongamos que existe un subconjunto abierto afín $V = \operatorname{Spec} A$ de X tal que $Z \subseteq V$. Entonces

$$\mathrm{H}^i_Z(X,\mathscr{F}) \cong \mathrm{H}^i_Z(V,\mathscr{F}|_V) \cong \mathrm{H}^i_Z(V,\widetilde{M}),$$

donde $M := \mathscr{F}(V)$ y $\widetilde{M}$ es el haz de $\mathscr{O}_X$-módulos asociado a M. Pero

$$\Gamma_Z(V,\widetilde{M}) = \{m \in M \mid \operatorname{Supp}(m) \subseteq Z\}.$$

Por lo tanto, cuando A es un anillo Noetheriano y $Z = V(\mathfrak{a})$ para algún ideal $\mathfrak{a}$ de A obtenemos la siguiente igualdad:

$$\Gamma_Z(V,\widetilde{M}) = \{m \in M \mid \mathfrak{a}^n m = 0 \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}.$$

La última relación permite abordar la teoría de la cohomología local desde una perspectiva totalmente algebraica.

Sean A un anillo conmutativo (no necesariamente Noetheriano) y $\mathfrak{a}$ un ideal de A. Dado un A-módulo M, el *submódulo de $\mathfrak{a}$-torsión* de M es definido por

$$\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) := \{m \in M \mid \mathfrak{a}^n m = 0 \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}.$$

Si $f : M \longrightarrow N$ es un homomorfismo A-lineal, su restricción a $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ induce un homomorfismo $\Gamma_{\mathfrak{a}}(f) : \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \longrightarrow \Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$. Las correspondencias $M \longmapsto \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ y $f \longmapsto \Gamma_{\mathfrak{a}}(f)$ definen un funtor aditivo exacto a la izquierda

$$\Gamma_{\mathfrak{a}}(-) : Mod_A \longrightarrow Mod_A,$$

de la categoría de A-módulos Mod_A en sí misma. Como Mod_A es una categoría con suficientes objetos inyectivos, existen los funtores derivados a la derecha $\left\{\mathscr{R}^i \Gamma_{\mathfrak{a}}(-)\right\}_{i \geq 0}$ del funtor $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$. Para cada entero no negativo i, el *i-ésimo funtor de cohomología local soportado en* $\mathfrak{a}$ es definido por

$$\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(-) := \mathscr{R}^i \Gamma_{\mathfrak{a}}(-).$$

Nuevamente, desde que el funtor $\Gamma_Z(X, -)$ es exacto a la izquierda, existe un isomorfismo natural de funtores

$$\mathrm{H}^0_{\mathfrak{a}}(-) \cong \Gamma_{\mathfrak{a}}(-).$$

Dado un A-módulo M, el A-módulo $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ es obtenido de la siguiente manera: consideremos una resolución inyectiva $0 \longrightarrow M \longrightarrow I^\bullet$ de M, i.e., un complejo exacto de A-módulos

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow \cdots,$$

donde cada I^n es un A-módulo inyectivo. Entonces,

$$\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(M) = \mathrm{H}^i(\Gamma_{\mathfrak{a}}(I^\bullet)).$$

Uno de los resultados clásicos garantiza la existencia de un isomorfismo natural

$$\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(-) \cong \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{a}^n, -).$$

Otra aproximación interesante que permite calcular la cohomología local soportada en un ideal: Dado un elemento a del anillo A consideremos el complejo de A-módulos

$$\check{\mathrm{C}}_a : \qquad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\ \iota\ } A_a \longrightarrow 0\,,$$

donde A es colocado en la posición 0, A_a en la posición 1 y $\iota : A \longrightarrow A_a$ es el mapa de localización. Para una sucesión finita $\bar{a} = a_1, a_2, \dots, a_n$ de elementos de A, el *complejo de Čech algebraico* es definido por

$$\check{\mathrm{C}}_{\bar{a}} := \check{\mathrm{C}}_{a_1} \otimes \check{\mathrm{C}}_{a_2} \otimes \cdots \otimes \check{\mathrm{C}}_{a_n}.$$

Supongamos que $\mathfrak{a} = (a_1, \dots, a_n)$ es un ideal finitamente generado de A, entonces existe un isomorfismo natural

$$\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(-) \cong \mathrm{H}^i(\check{\mathrm{C}}_{\overline{a}} \otimes -).$$

La teoría de cohomología local en su contexto algebraico ha sido ampliamente estudiada y es una área fecunda de investigación. De hecho existen muchos artículos y libros en esta dirección. Ver por ejemplo el excelente libro de T.Y. Brodman and R. Sharp ([6]), así como las referencias que aparecen en el texto.

Ahora recordemos que una *familia de soportes* en un espacio topológico X es un conjunto Ω de cerrados de X tal que

(1) Si $S_1, S_2 \in \Omega$, entonces $S_1 \cup S_2 \in \Omega$;

(2) Si $S_1 \in \Omega$ y $S_2 \subseteq S_1$ es un subconjunto cerrado de X, entonces $S_2 \in \Omega$.

Familias de soportes fueron introducidas para estudiar una variante de la cohomología de haces, la denominada *cohomología con soportes en* Ω. Dado un haz $\mathscr{F}$ de grupos abelianos sobre X, el conjunto

$$\Gamma_\Omega(X, \mathscr{F}) := \{s \in \mathscr{F}(X) |\ \mathrm{Supp}(s) \in \Omega\}$$

es un subgrupo del grupo de secciones globales $\mathscr{F}(X)$. Además, si $f : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ es un morfismo de haces de grupos abelianos, la restricción de $f_X : \mathscr{F}(X) \longrightarrow \mathscr{G}(X)$ para $\Gamma_\Omega(X, \mathscr{F})$ induce un homomorfismo de grupos

$$\Gamma_\Omega(X, f) : \Gamma_\Omega(X, \mathscr{F}) \longrightarrow \Gamma_\Omega(X, \mathscr{G}).$$

Las correspondencias $\mathscr{F} \longmapsto \Gamma_\Omega(X, \mathscr{F})$ y $f \longmapsto \Gamma_\Omega(X, f)$ definen un funtor exacto a la izquierda

$$\Gamma_\Omega(X, -) : Sh(X) \longrightarrow Ab,$$

cuyos funtores derivados a la derecha

$$\mathrm{H}^i_\Omega(X, \mathscr{F}) := \mathscr{R}^i\Gamma_\Omega(X, \mathscr{F})$$

son precisamente los *grupos de cohomología de* X *con coeficientes en* $\mathscr{F}$ *y con soporte en la familia* Ω. Note que esta cohomología generaliza la cohomología local soportada en un cerrado Z de X. De hecho vale la igualdad,

$$\mathrm{H}^i_Z(X, \mathscr{F}) = \mathrm{H}^i_{\Omega_Z}(X, \mathscr{F}),$$

donde

$$\Omega_Z := \{W \subseteq Z |\ W \text{ es un subconjunto cerrado en } X\}.$$

En el contexto algebraico existe una noción análoga a la de familia de soportes, a saber: Un *sistema completo de ideales* es un conjunto Φ de ideales de un anillo conmutativo A tal que

(i) Si $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \in \Phi$, entonces $\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2 \in \Phi$;

(ii) Si $\mathfrak{a}_1 \in \Phi$ y $\mathfrak{a}_2 \supseteq \mathfrak{a}_1$ es un ideal de A, entonces $\mathfrak{a}_2 \in \Phi$.

Tal noción fue introducida por T.Y. Brodman and R. Sharp en [6], y por K. Divanni-Azar, R. Naghipour and M.Tousi en [8], donde los autores presentan brevemente los *módulos de cohomología local generalizada soportada en* Φ,

$$\mathrm{H}^i_\Phi(M) := \mathscr{R}^i\Gamma_\Phi(M).$$

Aquí $\Gamma_\Phi(-)$ es el funtor (exacto a la izquierda) de la categoría de A-módulos sobre sí misma que asocia a cada A-módulo M el A-módulo,

$$\Gamma_\Phi(M) = \{x \in M |\ \mathfrak{a}x = 0 \ \text{ para algún } \ \mathfrak{a} \in \Phi\}.$$

Los fundamentos de esta *teoría de cohomología local generalizada*, así como versiones generalizadas de resultados clásicos, son estudiados con mayor profundidad por L. A. Alba-Sarria, R. Callejas-Bedregal y N. Caro-Tuesta en [1]. Como nuestro trabajo está soportado sobre tal teoría, recopilamos en el Capítulo 1 las nociones básicas de cohomología local generalizada e incluímos demostraciones detalladas de cada una de las proposiciones enunciadas.

Supongamos a partir de ahora que A es un anillo conmutativo Noetheriano. Denotemos por I el cogenerador inyectivo minimal de la categoría de A-módulos. Un A-módulo M es denominado *I-Matlis reflexivo* si el homomorfismo natural evaluación de M en $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(M,I),I)$ es un isomorfismo. Tales módulos son clasificados por R. G. Belshoff, E. E. Enochs and J. R. García Rozas en [5]. En la primera sección del Capítulo 2 introducimos los *módulos E- Matlis reflexivos*, donde E es un cogenerador inyectivo arbitrario de la categoría de A-módulos, y generalizamos algunas propiedades presentadas en [5]. En la sección 2.2 introducimos los *A-módulos maximalmente completos* como aquellos módulos M tales que el homomorfismo natural $M \longrightarrow \varprojlim_{\mathfrak{a}\in\mathcal{M}} M/\mathfrak{a}M$ es un isomorfismo, y probamos entre otros resultados, que si M es un A-módulo finitamente generado, entonces existe un isomorfismo natural

$$\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(M,I),I) \cong \varprojlim_{\mathfrak{a}\in\mathcal{M}} M/\mathfrak{a}M$$

(ver el Teorema 7). En particular, un A-módulo M finitamente generado es I-Matlis reflexivo, si y solo si, M es maximalmente completo. Un resultado clásico de cohomología local es el siguiente: Si $(A,\mathfrak{m})$ es local y M es un A-módulo finitamente generado, entonces $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M)$ es un módulo Artiniano para todo $i \geq 0$ (ver [6, Theorem 7.1.3]). En la sección final del Capítulo 2 extendemos ese resultado para un anillo Noetheriano cualquiera y demostramos que si M es un A-módulo I-Matlis reflexivo, entonces $\mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(M)$ es un módulo Artiniano para todo $i \geq 0$, donde $\mathcal{M}$ denota el sistema de ideales generado por el conjunto de ideales maximales de A (ver el Teorema 9).

En [19], R. Takahashi, Y. Yoshini and Y. Yoshisawa introducen la llamada *cohomología local con respecto a un par de ideales $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$* de A como una generalización de la teoría de cohomología local para un ideal. Más precisamente, a cada A-módulo M asocian el conjunto

$$\Gamma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(M) := \{x \in M |\ \mathfrak{a}^n x \subseteq \mathfrak{b}x \text{ para algún entero positivo } n\}.$$

Como es de esperar, tal correspondencia define un funtor exacto a la izquierda

$$\Gamma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(-) : Mod_A \longrightarrow Mod_A,$$

cuyos funtores derivados a la derecha,

$$\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(M) := \mathscr{R}^i\Gamma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(M),$$

son los *módulos de cohomología local con respecto al par de ideales $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$*. Uno de los aspectos importantes de esta teoría es que módulos de cohomología local con respecto a un par de ideales pueden ser calculados como los módulos de cohomología de un *complejo generalizado de Čech*. De manera más explícita, para un elemento $a \in A$, los autores consideran el conjunto multiplicativo $S_{a,\mathfrak{b}} := \{a^n + b \mid n \in \mathbb{N},\ b \in \mathfrak{b}\}$ y definen el complejo de A-módulos

$$\check{\mathrm{C}}_{a,\mathfrak{b}} : \qquad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} A_{a,\mathfrak{b}} \longrightarrow 0\,,$$

donde A es colocado en la posición 0, el módulo de fracciones $A_{a,\mathfrak{b}} := S_{a,\mathfrak{b}}^{-1}A$ está en la posición 1 y $\iota : A \longrightarrow A_{a,\mathfrak{b}}$ es el mapa de localización. Para una sucesión finita $\bar{a} = a_1, a_2, ..., a_n$ de elementos de A, definen el *complejo de Čech con respecto a la sucesión $\bar{a}$ y el ideal* $\mathfrak{b}$ por

$$\check{\mathrm{C}}_{\bar{a},\mathfrak{b}} := \check{\mathrm{C}}_{a_1,\mathfrak{b}} \otimes \check{\mathrm{C}}_{a_2,\mathfrak{b}} \otimes \cdots \otimes \check{\mathrm{C}}_{a_n,\mathfrak{b}}.$$

Y demuestran que si $\mathfrak{a} = (a_1, ..., a_n)$ es el ideal generado por los elementos $a_1, .., a_n$, entonces existe un isomorfismo natural

$$\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(-) \cong \mathrm{H}^i(\check{\mathrm{C}}_{\bar{a},\mathfrak{b}} \otimes -).$$

En el Capítulo 3 introducimos los *funtores de cohomología local con respecto a un ideal y un conjunto de ideales de A* como una generalización de los funtores estudiados en [19], pero con la diferencia que el estudio de nuestra teoría local es abordado en el contexto de la cohomología generalizada descrita en el primer capítulo. De manera más explícita, dados un ideal $\mathfrak{a} \trianglelefteq A$ y un conjunto no vacío φ de ideales de A, definimos el funtor

$$\Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(-) := \Gamma_{\mathcal{G}(\mathfrak{a},\varphi)}(-) : Mod_A \longrightarrow Mod_A,$$

donde $\mathcal{G}(\mathfrak{a},\varphi)$ es un sistema completo de ideales de A descrito en la sección 3.1 Como en el caso de [19], la importancia este tipo especial de cohomología local radica en que puede ser calculada como la cohomología de cierto complejo de A-módulos. De forma más concreta, para un elemento $a \in A$, primero consideramos el conjunto multiplicativo

$$S_{a,\varphi} := \{a^n + b \mid n \geq 0 \text{ y } b \in \mathfrak{b} \text{ para algún } \mathfrak{b} \in \langle\varphi\rangle\}.$$

Luego definimos el complejo de A-módulos

$$\mathrm{C}^{\bullet}_{\mathfrak{a},\varphi} : \qquad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} A_{a,\mathfrak{b}} \longrightarrow 0\,,$$

donde A es colocado en la posición 0, el módulo de fracciones $A_{a,\varphi} := S_{a,\varphi}^{-1}A$ está en la posición 1 y $\iota : A \longrightarrow A_{a,\mathfrak{b}}$ es el mapa de localización. Para una sucesión finita $\bar{a} = a_1, a_2, ..., a_n$ de elementos de A, definimos el *complejo de Čech con respecto a la sucesión $\bar{a}$ y el conjunto de ideales φ* como

$$\mathrm{C}^{\bullet}_{\bar{a},\varphi} := \check{\mathrm{C}}_{a_1,\varphi} \otimes \check{\mathrm{C}}_{a_2,\varphi} \otimes \cdots \otimes \check{\mathrm{C}}_{a_n,\varphi}.$$

Y entonces demostramos en el Teorema 10 que si $\mathfrak{a} = (a_1, ..., a_n)$ es el ideal generado por los elementos $a_1, .., a_n$, entonces existe un isomorfismo natural

$$\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a},\varphi}(-) \cong \mathrm{H}^i(\mathrm{C}^{\bullet}_{\bar{a},\varphi} \otimes -).$$

En la sección 3.3, introducimos el *co-complejo de Cech de un módulo M con respecto a la sucesión $\bar{a}$ y a un conjunto de ideales φ* como el complejo de A-módulos $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}^{\bullet}_{\bar{a},\varphi}, M)$. Luego definimos el *$i$-ésimo funtor de homología local com respecto al par* $(\mathfrak{a},\varphi)$ por

$$\mathrm{H}_i^{\mathfrak{a},\varphi}(-) := \mathrm{H}_i(\mathrm{Hom}(\mathcal{C}^{\bullet}_{\bar{a},\varphi}, -))$$

como noción dual de la cohomología local. Y entonces demostramos en el Teorema 11 que si M es un A-módulo Matlis reflexivo con respecto a un cogenerador inyectivo de la categoría de A-módulos, existe un isomorfismo natural

$$\mathrm{H}_i^{\mathfrak{a},\varphi}(M) \cong \varprojlim_{\mathfrak{b}\in\mathcal{G}(\mathfrak{a},\varphi)} \mathrm{Tor}_i^A(A/\mathfrak{b}, M).$$

En particular,

$$\mathrm{H}_0^{\mathfrak{a},\varphi}(M) \cong \Lambda^{\mathfrak{a},\varphi}(M),$$

donde

$$\Lambda^{\mathfrak{a},\varphi}(-) := \varprojlim_{\mathfrak{b}\in\mathcal{G}(\mathfrak{a},\varphi)} (A/\mathfrak{b} \otimes_A -).$$

Supongamos que $(A,\mathfrak{m})$ es un anillo local (Noetheriano). Dado un ideal $\mathfrak{a}$ de A y un A-módulo finitamente generado M, Peter Schenzel estudia, de manera sistemática, en [17] los *módulos de cohomología formal* $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^i(M/\mathfrak{a}^n M)$. En el caso no local, proponemos estudiar los *módulos de cohomología formal generalizados*

$$\mathscr{F}_\Phi^i(M) := \varprojlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} \mathrm{H}_{\mathcal{M}}^i(M/\mathfrak{a}M),$$

donde Φ es un sistema completo de ideales de A y $\mathcal{M}$ es el sistema generado por los ideales maximales de A. Las propiedades de estos módulos son descritas en el Capítulo 4. En particular, demostramos que si M es un A-módulos Matlis reflexivo de dimensión d, entonces $\mathscr{F}_\Phi^i(M)$ es Artiniano (ver Teorema 19). En la sección 4.3 introducimos los *módulos de homología formal generalizados*

$$\mathscr{F}_i^\Phi(M) := \varinjlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} \mathrm{H}_{\mathcal{M}}^i(M/\mathfrak{a}M),$$

y probamos un resultado de dualidad entre los funtores $\mathscr{F}_\Phi^i(-)$ y $\mathscr{F}_i^\Phi(-)$ (ver el Teorema 20).

Finalmente, en el Capítulo 5 generalizamos el estudio de la cohomología local de módulos para complejos de módulos. De manera más precisa: Sean Φ es un sistema completo de ideales de un anillo conmutativo A, $\mathcal{K}(A)$ la categoría homotópica de Mod_A y $\mathcal{D}(A)$ la categoría derivada de Mod_A. Consideremos el funtor triangulado

$$\Gamma_\Phi(-) : \mathcal{K}(A) \longrightarrow \mathcal{K}(A)$$

definido por $\Gamma_\Phi(C^\bullet)^i := \Gamma_\Phi(C^i)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Desde que todo complejo de A-módulos posee una resolución semi-inyectiva, existe el *funtor derivado a la derecha*

$$\mathbf{R}\Gamma_\Phi(-) : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{D}(A).$$

En la sección 5.1 describimos con precisión el funtor $\mathbf{R}\Gamma_\Phi(-)$ y definimos, para cada entero i, el *i-ésimo funtor de cohomología local derivado con respecto a* Φ

$$\mathrm{H}_\Phi^i(-) : \mathcal{D}(A) \longrightarrow Mod_A$$

como la composición de los funtores

$$\mathcal{D}(A) \xrightarrow{\mathbf{R}\Gamma_\Phi(-)} \mathcal{D}(A) \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{H}}^i(-)} Mod_A\,.$$

En la sección 5.2 introducimos los *funtores derivados*

$$\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(-),\ \mathbf{L}\Lambda^{\mathfrak{a},\varphi} : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{D}(A),$$

y usamos los resultados del Capítulo 3 para demostrar nuestros próximos resultados:

- Sea $X^\bullet \in \mathcal{D}(A)$. Entonces existen isomorfismos naturales en $\mathcal{D}(A)$,

$$\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(X^\bullet) \cong C^\bullet_{\bar{a},\varphi} \otimes^{\mathbf{L}}_A X^\bullet.$$

- Supongamos que A es un anillo perfecto. Sea $X^\bullet \in \mathcal{D}^f_<(A)$, entonces existen isomorfismos naturales en $\mathcal{D}^f_<(A)$,

$$\mathbf{L}\Lambda^{\mathfrak{a},\varphi}(X^\bullet) \cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(C^\bullet_{\bar{a},\varphi}, X^\bullet).$$

Ver el Teorema 27 y el Teorema 29. Finalizamos el trabajo demostrando nuestro resultado principal (Teorema 31), el cual generaliza para anillo perfectos, el celebrado *Teorema de dualidad de Greenlees-May* (ver [13, Corollary 4.1.1]). Más precisamente: Supongamos que A es un anillo conmutativo perfecto y sean $X^\bullet \in \mathcal{D}(A)$ e $Y^\bullet \in \mathcal{D}^f_<(A)$, entonces existe un isomorfismo natural

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(X^\bullet), Y^\bullet) \cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(X, \mathbf{L}\Lambda^{\mathfrak{a},\varphi}(Y^\bullet)).$$

Para facilitar el entendimiento del Capítulo 5 hemos incluído un Apéndice A donde recopilamos las nociones básicas sobre Categorías Derivadas, Resoluciones de Complejos y Funtores Derivados.

Es importante indicar que, como fruto de mi investigación, pretendemos publicar dos artículos con los resultados principales de mi tesis doctoral.

CAPÍTULO 1

Preliminares

En [6] y [8], los autores introdujeron una teoría de cohomología local generalizada. Los fundamentos de tal teoría, así como versiones generalizadas de resultados clásicos son estudiadas con profundidad en [1]. Con el objetivo que el trabajo sea autocontenido, incluímos demostraciones detalladas de cada una de las proposiciones enunciadas.

A lo largo de este capítulo, A denotará un anillo conmutativo con elemento unitario. Escribiremos $\mathfrak{a} \trianglelefteq A$ para indicar que $\mathfrak{a}$ es un ideal de A.

1.1. Sistemas de ideales

Definición 1.1. Sea Φ un conjunto no vacío de ideales de A. Decimos que Φ es un *sistema de ideales* de A si, para cada par $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \Phi$ existe $\mathfrak{c} \in \Phi$ tal que $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{a}\mathfrak{b}$.
Un sistema de ideales es *completo* cuando satisface la siguiente condición: si $\mathfrak{a} \in \Phi$ y $\mathfrak{b}$ es un ideal de A tal que $\mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{a}$, entonces $\mathfrak{b} \in \Phi$.

Ejemplo 1.1. Un ejemplo importante de sistema de ideales de A es el conjunto formado por todas las potencias de un ideal $\mathfrak{a}$ de A, i.e.,

$$\{\mathfrak{a}^n \mid n \geq 0\}.$$

Ejemplo 1.2. Dada una colección no vacía φ de ideales de A, el conjunto

$$\langle \varphi \rangle := \{\mathfrak{b} \trianglelefteq A \mid \mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_n \text{ para algunos } \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n \in \varphi\}$$

es un sistema de ideales completo, que llamaremos *sistema generado por* φ. De hecho, $\langle \varphi \rangle$ es el menor (con respecto a la inclusión) sistema de ideales completo que contiene a φ. En particular, si $\varphi = \{\mathfrak{a}\}$ para algún ideal $\mathfrak{a}$ de A, el sistema generado por φ será denotado por $\langle \mathfrak{a} \rangle$. De esa manera,

$$\langle \mathfrak{a} \rangle = \{\mathfrak{b} \trianglelefteq A \mid \mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{a}^n \text{ para algún entero } n \geq 1\}.$$

En el caso que $\varphi = \emptyset$, definimos

$$\langle \emptyset \rangle := \{A\}.$$

Ejemplo 1.3. Sea $f : A \longrightarrow B$ un homomorfismo de anillos. Supongamos que Φ es un sistema completo de ideales de A, entonces

$$f_*(\Phi) := \left\{\mathfrak{b} \trianglelefteq B |\, f^{-1}(\mathfrak{b}) \in \Phi\right\}$$

es un sistema completo de ideales de B. Más aún,

$$f_*(\Phi) = \langle\{\mathfrak{a}B |\, \mathfrak{a} \in \Phi\}\rangle.$$

En efecto, si $\mathfrak{b} \in f_*(\Phi)$, entonces $f^{-1}(\mathfrak{b}) \in \Phi$. Desde que $\mathfrak{b} \supseteq f^{-1}(\mathfrak{b})B$ obtenemos que $\mathfrak{b} \in \langle\{\mathfrak{a}B |\, \mathfrak{a} \in \Phi\}\rangle$. Recíprocamente, si $\mathfrak{b} \in \langle\{\mathfrak{a}B |\, \mathfrak{a} \in \Phi\}\rangle$, entonces $\mathfrak{b} \supseteq (\mathfrak{a}_1 B)\cdots(\mathfrak{a}_k B)$ para algunos $\mathfrak{a}_i \in \Phi$. Luego, $f^{-1}(\mathfrak{b}) \supseteq f^{-1}((\mathfrak{a}_1 B)\cdots(\mathfrak{a}_k B)) \supseteq f^{-1}(\mathfrak{a}_1 B)\cdots f^{-1}(\mathfrak{a}_k B) \supseteq \mathfrak{a}_1\cdots\mathfrak{a}_k$. Como Φ es un sistema completo concluimos que $f^{-1}(\mathfrak{b}) \in \Phi$ y por lo tanto, $\mathfrak{b} \in f_*(\Phi)$.

Por otro lado, si Ψ es un sistema completo de ideales de B, entonces

$$f^*(\Psi) := \left\{\mathfrak{a} \trianglelefteq A |\, \mathfrak{a} \in \langle f^{-1}(\mathfrak{b})\rangle \text{ para algún ideal } \mathfrak{b} \in \Psi\right\}$$

es un sistema completo de ideales de A.

Recordemos que el “conjunto de ceros ” de un ideal $\mathfrak{a}$ de A es dado por

$$\mathrm{V}(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} A : \ \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}\}$$

Lema 1. *Supongamos que A es Noetheriano y sea Φ una colección no vacía de ideales de A. Entonces Φ es un sistema completo, si y solo si, posee la siguiente propiedad: un ideal $\mathfrak{a}$ de A es un elemento de Φ, si y solo si,* $\mathrm{V}(\mathfrak{a}) \subseteq \Phi$.

Prueba. Supongamos que Φ es un sistema completo y sea $\mathfrak{a}$ un ideal de A tal que $\mathrm{V}(\mathfrak{a}) \subseteq \Phi$. Desde que A es Noetheriano, el conjunto de ideales primos minimales sobre $\mathfrak{a}$ es finito. Denotemos por $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ tales ideales, entonces $\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_s$. Nuevamente, como A es Noetheriano, existe un entero positivo r tal que $\mathfrak{a} \supseteq \sqrt{\mathfrak{a}}^r$. Luego,

$$\mathfrak{a} \supseteq (\mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_s)^r \supseteq \mathfrak{p}_1^r \cdots \mathfrak{p}_s^r.$$

Ésto implica que $\mathfrak{a} \in \Phi$. La otra dirección es obvia.

Recíprocamente, supongamos que Φ tiene la propiedad mencionada. Si $\mathfrak{a} \in \Phi$ y $\mathfrak{b}$ es un ideal de A que contiene $\mathfrak{a}$, la inclusión $V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a})$ implica que $\mathfrak{b} \in \Phi$. Más aún, desde que $V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$ para todo par de ideales $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ de A, obtenemos que Φ es cerrado por producto de ideales. Por lo tanto Φ es un sistema completo de ideales. ■

Una noción que está intimamente ligada con la noción de sistemas de ideales de un anillo, es la siguiente.

Definición 1.2. Un subconjunto $\mathcal{V}$ de $\mathrm{Spec}(A)$ es *cerrado por especialización* si para cada par $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ de ideales primos, $\mathfrak{p} \in \mathcal{V}$ implica que $\mathfrak{q} \in \mathcal{V}$.

Por ejemplo, para cada A-módulo M, el conjunto

$$\mathrm{Supp}(M) = \left\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \middle| \, M_{\mathfrak{p}} \neq 0\right\}$$

es cerrado por especialización.

Ahora consideremos los conjuntos $\mathcal{S} = \{\text{sistemas completos de ideales de } A\}$ y $\mathcal{E} = \{\text{subconjuntos cerrados por especialización de } \mathrm{Spec}(A)\}$.

Proposición 1. *Supongamos que A es Noetheriano, entonces la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ & \Phi & \longmapsto & \Phi \cap \mathrm{Spec}(A) \end{array}$$

es una biyección.

Prueba. Consideremos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} G: & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{S} \\ & \mathcal{V} & \longmapsto & \langle \mathcal{V} \rangle. \end{array}$$

Probaremos que $G = F^{-1}$. En efecto, sea $\Phi \in \mathcal{S}$. Supongamos que $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_s$ para algunos $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s \in \Phi \cap \mathrm{Spec}(A)$. Desde que Φ es un sistema completo de ideales, $\mathfrak{a} \in \Phi$, pues $\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_s \in \Phi$. Por otro lado, si $\mathfrak{a} \in \Phi$, entonces por el Lema 1, $V(\mathfrak{a}) \subseteq \Phi$ y por lo tanto, $V(\mathfrak{a}) \subseteq \langle \Phi \cap \mathrm{Spec}(A) \rangle$. Nuevamente, por el Lema 1, $\mathfrak{a} \in \langle \Phi \cap \mathrm{Spec}(A) \rangle$. Esto prueba que $\langle \Phi \cap \mathrm{Spec}(A) \rangle = \Phi$ para todo $\Phi \in \mathcal{S}$, o equivalentemente, $G \circ F = \mathrm{id}_{\mathcal{S}}$. Ahora tome $\mathcal{V} \in \mathcal{E}$. Es claro que $\langle \mathcal{V} \rangle \cap \mathrm{Spec}(A) \supseteq \mathcal{V}$. Recíprocamente, si $\mathfrak{p} \in \langle \mathcal{V} \rangle \cap \mathrm{Spec}(A)$, entonces $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_s$ para algunos $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s \in \mathcal{V}$, entonces existe un índice i tal que $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{p}_i$. Como $\mathcal{V}$ es cerrado por especialización, concluimos que $\mathfrak{p} \in \mathcal{V}$. En consecuencia, $\langle \mathcal{V} \rangle \cap \mathrm{Spec}(A) = \mathcal{V}$ para todo $\mathcal{V} \in \mathcal{E}$, o equivalentemente, $F \circ G = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$. ∎

1.2. El funtor Φ-torsión

Sean Φ un sistema de ideales de A y M un A-módulo. Consideremos el conjunto

$$\Gamma_{\Phi}(M) := \{x \in M | \, \mathfrak{a}x = 0 \text{ para algún } \mathfrak{a} \in \Phi\}.$$

Es claro que $0 \in \Gamma_{\Phi}(M)$. Afirmamos que $\Gamma_{\Phi}(M)$ es un submódulo de M. En efecto: si $x, y \in \Gamma_{\Phi}(M)$, existen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \Phi$ tales que $\mathfrak{a}x = 0$ y $\mathfrak{b}y = 0$. Elijamos $\mathfrak{c} \in \Phi$ de modo que $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, entonces $\mathfrak{c}(x - y) = 0$. Además, $\mathfrak{a}(rx) = r(\mathfrak{a}x) = 0$ para todo $r \in A$.

Lema 2. *Asuma que A es un anillo Noetheriano y que Φ es un sistema completo de ideales de A. Para todo A-módulo M vale la siguiente igualdad:*

$$\Gamma_{\Phi}(M) = \{x \in M | \, \mathrm{Supp}(Ax) \subseteq \Phi\}.$$

Prueba. Sea x un elemento de M. Supongamos que $x \in \Gamma_{\Phi}(M)$, entonces existe $\mathfrak{a} \in \Phi$ tal que $\mathfrak{a}x = 0$, esto implica que $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{Ann}(x)$. Como Φ es completo, $\mathrm{Ann}(x) \in \Phi$. Usando el Lema 1 obtenemos que $\mathrm{Supp}(Ax) = V(\mathrm{Ann}(x)) \subseteq \Phi$.

Recíprocamente, si $\mathrm{Supp}(Ax) \subseteq \Phi$, o equivalentemente, $V(\mathrm{Ann}(x)) \subseteq \Phi$. Luego, $\mathrm{Ann}(x) \in \Phi$ por el Lema 1. Desde que, obviamente, $\mathrm{Ann}(x)x = 0$, concluimos que $x \in \Gamma_{\Phi}(M)$. ∎

Ahora sea $f : M \longrightarrow N$ un homomorfismo de A-módulos. Si $x \in M$ es tal que $\mathfrak{a}x = 0$ para algún $\mathfrak{a} \in \Phi$, entonces $\mathfrak{a}f(x) = 0$. En consecuencia, $f(\Gamma_\Phi(M)) \subseteq \Gamma_\Phi(N)$. Por lo tanto, la restricción de f para $\Gamma_\Phi(M)$ induce un homomorfismo de A-módulos

$$\Gamma_\Phi(f) : \Gamma_\Phi(M) \longrightarrow \Gamma_\Phi(N).$$

No es difícil ver que las correspondencias $M \longmapsto \Gamma_\Phi(M)$ y $f \longmapsto \Gamma_\Phi(f)$ definen un funtor A-lineal

$$\Gamma_\Phi(-) : Mod_A \longrightarrow Mod_A.$$

de la categoría de A-módulos Mod_A en sí misma.

Definición 1.3. El funtor $\Gamma_\Phi(-)$ es llamado Φ*-torsión*. Diremos que un A-módulo M es Φ-torsión cuando $\Gamma_\Phi(M) = M$. En el caso que $\Gamma_\Phi(M) = 0$, diremos que M es libre de Φ-torsión.

Lema 3. *Asuma que A es un anillo Noetheriano y que Φ es un sistema completo de ideales de A. Entonces, un A-módulo M es Φ-torsión, si y solamente si,* $\mathrm{Supp}(M) \subseteq \Phi$.

Prueba. Supongamos que M es Φ-torsión. El Lema 2 implica que $V(\mathrm{Ann}(x)) = \mathrm{Supp}(Ax) \subseteq \Phi$ para todo $x \in M$. Desde que $\mathrm{Supp}(M) = \bigcup_{x \in M} V(\mathrm{Ann}(x))$, obtenemos que $\mathrm{Supp}(M) \subseteq \Phi$.

Recíprocamente, si $\mathrm{Supp}(M) \subseteq \Phi$, entonces $\mathrm{Supp}(Ax) \subseteq \Phi$ para cada $x \in M$. Por lo tanto, gracias al Lema 2, concluimos que $\Gamma_\Phi(M) = M$. ■

Ejemplo 1.4. Asuma que A es un anillo Noetheriano y que Φ es un sistema completo de ideales de A. Dado un ideal primo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, entonces $A/\mathfrak{p}$ es Φ-torsión, si y solamente si, $\mathfrak{p} \in \Phi$. Por otro lado, $A/\mathfrak{p}$ es libre de torsión, si y solamente si, $\mathfrak{p} \notin \Phi$.

Lema 4. *Asuma que A es un anillo Noetheriano y que Φ es un sistema completo de ideales de A. Entonces, la subcategoría plena de Mod_A cuyos objetos son los A-módulos Φ-torsión es una categoría de Serre.*

Prueba. Sea

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de A-módulos. Sabemos que $\mathrm{Supp}(M) = \mathrm{Supp}(L) \cup \mathrm{Supp}(N)$. Esto implica que M es Φ-torsión, si y solamente si, L y N son Φ-torsión. ■

Proposición 2. *Para todo sistema Φ de ideales de A y todo A-módulo M, tenemos que*

$$\Gamma_\Phi(M) = \bigcup_{\mathfrak{a} \in \Phi} \Gamma_{\mathfrak{a}}(M).$$

Prueba. Si $x \in \Gamma_\Phi(M)$, entonces $\mathfrak{b}x = 0$ para algún $\mathfrak{b} \in \Phi$. Por lo tanto, $x \in \Gamma_{\mathfrak{b}}(M)$. Por otro lado, si $x \in \Gamma_{\mathfrak{b}}(M)$ para algún $\mathfrak{b} \in \Phi$, entonces existe $n \geq 1$ tal que $\mathfrak{b}^n x = 0$. Como Φ es un sistema de ideales,existe $\mathfrak{c} \in \Phi$ tal que $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{b}^n$. Esto implica que $\mathfrak{c}x = 0$ y por lo tanto, $x \in \Gamma_\Phi(M)$. En consecuencia, $\Gamma_\Phi(M) = \bigcup_{\mathfrak{a} \in \Phi} \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$. ■

Observación. Consideremos el orden parcial $\preceq$ en el conjunto Φ definido por la inclusión inversa, i.e.,

$$\mathfrak{a} \preceq \mathfrak{b}, \quad \text{si} \quad \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}.$$

Para un A-módulo M, las inclusiones $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \hookrightarrow \Gamma_{\mathfrak{b}}(M)$, cuando $\mathfrak{a} \preceq \mathfrak{b}$ inducen un sistema directo de A-módulos tal que

$$\varinjlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = \bigcup_{\mathfrak{a}\in\Phi} \Gamma_{\mathfrak{a}}(M).$$

Por lo tanto, la Proposición 2 puede ser reescrita de la siguiente manera: Para todo sistema Φ de ideales de A y todo A-módulo M, tenemos que

$$\Gamma_{\Phi}(M) = \varinjlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} \Gamma_{\mathfrak{a}}(M).$$

Corolario 1. *Supongamos que A es un anillo Noetheriano y que Φ es un sistema de ideales de A. Si I es un A-módulo inyectivo, entonces $\Gamma_{\Phi}(I)$ también es un A-módulo inyectivo. Más aún, $\Gamma_{\Phi}(I)$ es un sumando directo de I.*

Prueba. Sea $\mathfrak{a} \in \Phi$. Por [6, Proposition 2.1.4], $\Gamma_{\mathfrak{a}}(I)$ es un A-módulo inyectivo. Desde que A es Noetheriano, límites directos de A-módulos inyectivos también son inyectivos. Por la Proposición 2 concluimos que $\Gamma_{\Phi}(I)$ es inyectivo. La última afirmación es consecuencia del hecho que la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \Gamma_{\Phi}(I) \longrightarrow I \longrightarrow I/\Gamma_{\Phi}(I) \longrightarrow 0$$

se escinde. ■

Lema 5. *El funtor $\Gamma_{\Phi}(-)$ es exacto a la izquierda.*

Prueba. Sea

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de A-módulos. Desde que $\Gamma_{\Phi}(-)$ es un funtor tenemos que $\Gamma_{\Phi}(g) \circ \Gamma_{\Phi}(f) = \Gamma_{\Phi}(g \circ f) = \Gamma_{\Phi}(0) = 0$. Por otro lado, si $y \in \mathrm{Ker}(\Gamma_{\Phi}(g))$, entonces existe $\mathfrak{a} \in \Phi$ tal que $\mathfrak{a}y = 0$ y $g(y) = 0$. Como $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$ podemos escribir $y = f(x)$ para algún $x \in M$. En vista que f es un homomorfismo A-lineal inyectivo, $\mathrm{Ann}(x) = \mathrm{Ann}(f(x)) = \mathrm{Ann}(y)$. Esta igualdad implica que $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{Ann}(x)$ y por lo tanto, $x \in \Gamma_{\Phi}(M)$. De esa manera, $\mathrm{Ker}(\Gamma_{\Phi}(g)) = \mathrm{Im}(\Gamma_{\Phi}(f))$. Finalmente, si $x \in \mathrm{Ker}(\Gamma_{\Phi}(f))$, la igualdad $\mathrm{Ann}(x) = \mathrm{Ann}(f(x))$ garantiza que $x = 0$. En conclusión, la sucesión

$$0 \longrightarrow \Gamma_{\Phi}(M) \xrightarrow{\Gamma_{\Phi}(f)} \Gamma_{\Phi}(N) \xrightarrow{\Gamma_{\Phi}(g)} \Gamma_{\Phi}(L)$$

es exacta. ■

Observación. En general el funtor $\Gamma_{\Phi}(-)$ no es exacto a la derecha. Por ejemplo, consideremos $A = \mathbb{Z}$ el anillo de los números enteros y $\Phi := \langle\{(2),(3),(5),\ldots\}\rangle$, el sistema generado por todos los ideales maximales de $\mathbb{Z}$. Entonces $\Gamma_{\Phi}(\mathbb{Z}) = 0$. En efecto, si $x \in \Gamma_{\Phi}(\mathbb{Z})$, entonces existe $\mathfrak{a} \in \Phi$ tal que $\mathfrak{a}x = 0$. Por definición de sistema generado, $\mathfrak{a} \supseteq (\mathfrak{p}_1)\cdots(\mathfrak{p}_s)$ para algunos números primos $p_1,\ldots,p_s$. En particular, $p_1\cdots p_s x = 0$, lo

que implica que $x=0$.
Ahora fijemos un número primo p. Afirmamos que $\Gamma_\Phi(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. En efecto, desde que $\Gamma_q(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$ cuando $q \neq p$ y $\Gamma_p(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, la igualdad $\Gamma_\Phi(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \bigcup_{q\in \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})} \Gamma_{(q)}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ (vea el Lema 2), demuestra la afirmación.
A continuación consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Después de aplicar el funtor Φ-torsión obtenemos la sucesión

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

que claramente no es exacta a la derecha.

1.3. Funtores de cohomología local generalizada

Sea Φ un sistema de ideales de A. Como la categoría de los A-módulos Mod_A posee suficientes objetos inyectivos, i.e., para cada A-módulo M existe un homomorfismo A-lineal inyectivo $0 \longrightarrow M \longrightarrow I$, donde I es un A-módulo inyectivo, podemos considerar los *funtores derivados a la derecha* $\left\{\mathscr{R}^i\Gamma_\Phi(-)\right\}_{i\geq 0}$ del funtor Φ-torsión.

Definición 1.4. Para cada $i \geq 0$, el *i-ésimo funtor de cohomología local generalizada soportada en* Φ es definido por

$$\mathrm{H}^i_\Phi(-) := \mathscr{R}^i\Gamma_\Phi(-).$$

Siguen directamente de la definición, las siguientes propiedades:

(i) Los funtores $\Gamma_\Phi(-)$ y $\mathrm{H}^0_\Phi(-)$ son naturalmente isomorfos, pues $\Gamma_\Phi(-)$ es exacto a la izquierda.

(ii) Si I es un A-módulo inyectivo, entonces $\mathrm{H}^i_\Phi(I) = 0$ para todo $i \geq 1$.

(iii) Toda sucesión exacta corta $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ induce naturalmente una sucesión exacta larga en los módulos de cohomología local

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^0_\Phi(L) \longrightarrow \mathrm{H}^0_\Phi(M) \longrightarrow \mathrm{H}^0_\Phi(N) \xrightarrow{\delta^0_\Phi} \mathrm{H}^1_\Phi(L) \longrightarrow \mathrm{H}^1_\Phi(M) \longrightarrow \mathrm{H}^1_\Phi(N) \xrightarrow{\delta^1_\Phi} \cdots.$$

De manera explícita, para cada A-módulo M, el A-módulo $\mathrm{H}^i_\Phi(M)$ es obtenido de la siguiente manera: Sea $0 \longrightarrow M \longrightarrow E^\bullet$ una resolución inyectiva de M, entonces

$$\mathrm{H}^i_\Phi(M) = \mathrm{H}^i(\Gamma_\Phi(E^\bullet)).$$

Como antes, consideremos el orden parcial $\preceq$ en Φ definido por la inclusión inversa,

$$\mathfrak{a} \preceq \mathfrak{b}, \quad \text{si} \quad \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}.$$

Sean M un A-módulo y $0 \longrightarrow M \longrightarrow E^\bullet$ una resolución inyectiva de M. Dado un par de ideales $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \Phi$ tal que $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$, las inclusiones $\Gamma_{\mathfrak{a}}(E^i) \hookrightarrow \Gamma_{\mathfrak{b}}(E^i)$ definen un morfismo de complejos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Gamma_{\mathfrak{a}}(E^0) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \Gamma_{\mathfrak{a}}(E^1) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \Gamma_{\mathfrak{a}}(E^2) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \Gamma_{\mathfrak{b}}(E^0) \arrow[r] & \Gamma_{\mathfrak{b}}(E^1) \arrow[r] & \Gamma_{\mathfrak{b}}(E^2) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Tal morfismo induce, para cada $i \geq 0$, un homomorfismo de A-módulos

$$\iota^i_{\mathfrak{b}\mathfrak{a}} : \mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(M) \longrightarrow \mathrm{H}^i_{\mathfrak{b}}(M).$$

No es difícil ver que $\left\{\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(M),\ \iota^i_{\mathfrak{b}\mathfrak{a}}\right\}$ es un sistema directo de A-módulos.

Lema 6. *Para todo sistema completo Φ de ideales de A, la sucesión $\left\{\varinjlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} \mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(-)\right\}_{i\geq 0}$ es un δ-funtor cohomológico.*

Prueba. Para $\mathfrak{a} \in \Phi$, cada sucesión exacta corta A-módulos

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

induce una sucesión exacta de módulos

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^0_{\mathfrak{a}}(L) \longrightarrow \mathrm{H}^0_{\mathfrak{a}}(M) \longrightarrow \mathrm{H}^0_{\mathfrak{a}}(N) \xrightarrow{\delta^0_{\mathfrak{a}}} \mathrm{H}^1_{\mathfrak{a}}(L) \longrightarrow \mathrm{H}^1_{\mathfrak{a}}(M) \longrightarrow \mathrm{H}^1_{\mathfrak{a}}(N) \xrightarrow{\delta^1_{\mathfrak{a}}} \cdots.$$

Desde que el funtor límite directo es exacto, obtenemos la siguiente sucesión exacta larga

$$0 \longrightarrow \varinjlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} \mathrm{H}^0_{\mathfrak{a}}(L) \longrightarrow \varinjlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} \mathrm{H}^0_{\mathfrak{a}}(M) \longrightarrow \varinjlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} \mathrm{H}^0_{\mathfrak{a}}(N) \xrightarrow{\Delta^0_{\Phi}} \varinjlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} \mathrm{H}^1_{\mathfrak{a}}(L) \longrightarrow \cdots,$$

donde $\Delta^i_{\Phi} = \varinjlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} \delta^i_{\mathfrak{a}}$ para todo $i \geq 0$.

Por otro lado, dado un diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r] & M' \arrow[r] & N' \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(N) \arrow[r, "\delta^i_{\mathfrak{a}}"] \arrow[d] & \mathrm{H}^{i+1}_{\mathfrak{a}}(L) \arrow[d] \\
\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(N') \arrow[r, "\delta^i_{\mathfrak{a}}"] & \mathrm{H}^{i+1}_{\mathfrak{a}}(L')
\end{tikzcd}$$

es commutativo para cada ideal $\mathfrak{a}$ en Φ y para todo $i \geq 0$. Después de tomar límites directos obtenemos que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^i_\Phi(N) \arrow[r, "\Delta^i_\Phi"] \arrow[d] & \mathrm{H}^{i+1}_\Phi(L) \arrow[d] \\ \mathrm{H}^i_\Phi(N') \arrow[r, "\Delta^i_\Phi"] & \mathrm{H}^{i+1}_\Phi(L') \end{tikzcd}$$

es commutativo, concluyendo que la sucesión $\left\{ \varinjlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} \mathrm{H}^i_\mathfrak{a}(-) \right\}_{i\geq 0}$ es un δ-funtor cohomológico. ■

Proposición 3. *Sea Φ un sistema completo de ideales de A.*

(i) Existe un único isomorfismo de δ-funtores

$$\left\{ T^i : \varinjlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} \mathrm{H}^i_\mathfrak{a}(-) \longrightarrow \mathrm{H}^i_\Phi(-) \right\}_{i\geq 0}$$

tal que $T^0 = Id$.

(ii) En consecuencia, para todo A-módulo M y todo $i \geq 0$,

$$\varinjlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} \mathrm{H}^i_\mathfrak{a}(M) \cong \mathrm{H}^i_\Phi(M).$$

Prueba. Por el Lema 2 y el Lema 6 es suficiente probar que el δ-funtor $\left\{ \varinjlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} \mathrm{H}^i_\mathfrak{a}(-) \right\}_{i\geq 0}$ es universal. Para tal objetivo, sea I un A-módulo inyectivo. Entonces $\mathrm{H}^i_\mathfrak{a}(I) = 0$ para todo $i \geq 1$ y todo $\mathfrak{a} \in \Phi$. Por lo tanto $\varinjlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} \mathrm{H}^i_\mathfrak{a}(I) = 0$ para todo $i \geq 1$. ■

A continuación consideremos un homomorfismo $f : A \longrightarrow B$ de anillos Noetherianos. Dado un B-módulo L, denotaremos por L_A la restricción de escalares de L a A vía f.

Corolario 2. *Sea Φ un sistema de ideales de A. Si E es un B-módulo inyectivo, entonces E_A es Γ_Φ-acíclico.*

Prueba. Por [6, Theorem 4.1.6], E_A es $\Gamma_\mathfrak{a}$-acíclico para todo ideal $\mathfrak{a}$ de A. Ahora el resultado es una aplicación inmediadata de la parte (ii) de la Proposición 3. ■

Corolario 3. *Sean Φ un sistema completo de ideales de A y M un módulo sobre A. Entonces $\mathrm{H}^i_\Phi(M) = 0$ para todo $i > \dim(M)$.*

Prueba. Para cada $\mathfrak{a} \in \Phi$, el Teorema del anulamiento de Grothendieck (vea por ejemplo [6, Theorem 6.1.2]) garantiza que $\mathrm{H}^i_\mathfrak{a}(M) = 0$ para todo $i > \dim(M)$. El resultado ahora sigue directamente de la parte (ii) de la Proposición 3. ■

Corolario 4. *Para todo sistema completo Φ de ideales de A y todo $i \geq 0$, existe un isomorfismo natural*

$$\mathrm{H}^i_\Phi(-) \cong \varinjlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} \mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{a}, -).$$

Prueba. Como vimos en la Introducción de nuestro trabajo, para cada ideal $\mathfrak{a} \in \Phi$, los funtores $\mathrm{H}^i_\mathfrak{a}(-)$ y $\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{a}^n, -)$ son naturalmente isomorfos. Por lo tanto, por la Proposición 3 y desde que límites directos conmutan con límites directos, tenemos los isomorfismos naturales

$$\mathrm{H}^i_\Phi(-) \cong \varinjlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{a}^n, -) \cong \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \varinjlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} \mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{a}^n, -).$$

Pero, para cada $n \in \mathbb{N}$ fijo, el conjunto $\{\mathfrak{a}^n : \mathfrak{a} \in \Phi\}$ es un subconjunto cofinal de Φ. En consecuencia,

$$\varinjlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} \mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{a}^n, -) \cong \varinjlim_{\mathfrak{b}\in\Phi} \mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{b}, -).$$

Por lo tanto, tenemos un isomorfismo natural

$$\mathrm{H}^i_\varphi(-) \cong \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \varinjlim_{\mathfrak{b}\in\Phi} \mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{b}, -) = \varinjlim_{\mathfrak{b}\in\Phi} \mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{b}, -).$$

Esto prueba el corolario. ■

Lema 7. *Asuma que A es un anillo Noetheriano. Sean Φ un sistema completo de ideales de A y M un A-módulo, entonces $\mathrm{H}^i_\Phi(M)$ es Φ-torsión para todo $i \geq 0$*

Prueba. Basta observar que cada A-módulo de cohomolología local $\mathrm{H}^i_\Phi(M)$ es un subcociente de un módulo Φ-torsión y aplicar el Lema 4. ■

Dado $f : A \longrightarrow B$ un homomorfismo de anillos conmutativos y Φ un sistema completo de ideales de A, recordemos que $f_*(\Phi) = \langle \Phi B \rangle$, donde $\Phi B = \{\mathfrak{a}B |\ \mathfrak{a} \in \Phi\}$ (vea el Ejemplo 1.3). En los siguientes resultados, L_A denotará el A-módulo obtenido al restringir la estructura de un B-módulo L a A vía f.

Lema 8. *Sean $f : A \longrightarrow B$ un homomorfismo de anillos conmutativos Noetherianos y Φ un sistema completo de ideales de A. Para todo B-módulo L vale la igualdad*

$$\Gamma_\Phi(L_A) = \Gamma_{f_*(\Phi)}(L),$$

como subconjuntos de L. Por lo tanto,

$$\Gamma_\Phi(L_A) = (\Gamma_{f_*(\Phi)}(L))_A$$

como A-módulos.

Prueba. Si $x \in L_A$ es tal que $V(\mathrm{Ann}_A(x)) \subseteq \Phi$, consideremos $\mathfrak{p} \in V(\mathrm{ann}_B(x))$. Entonces $f^{-1}(\mathfrak{p}) \in V(\mathrm{Ann}_A(x))$ y por lo tanto, $f^{-1}(\mathfrak{p}) \in \Phi$, o equivalentemente, $\mathfrak{p} \in f_*(\Phi)$, lo cual demuestra que $V(\mathrm{ann}_B(x)) \subseteq f_*(\Phi)$ y en consecuencia, $\Gamma_\Phi(L_A) \subseteq \Gamma_{f_*(\Phi)}(L)$.

Recíprocamente, sea $x \in L$ tal que $\mathrm{Ann}_B(x) \in f_*(\Phi)$. Entonces $f^{-1}(\mathrm{Ann}_B(x)) \in \Phi$. Pero $f^{-1}(\mathrm{Ann}_B(x)) \subseteq \mathrm{Ann}_A(x)$ y como Φ es un sistema completo de ideales de A, obtenemos que $\mathrm{Ann}_A(x) \in \Phi$. En consecuencia, $\Gamma_{f_*(\Phi)}(L) \subseteq \Gamma_\phi(L_A)$.

La última afirmación es consecuencia del hecho que restricción por escalares preserva inclusiones, y por lo tanto, $(\Gamma_{f_*(\Phi)}(L))_A$ es un A-submódulo de L_A. ■

Por otro lado, el Lema 8 garantiza también que $\Gamma_\Phi(L_A)$ tiene estructura de módulo sobre B (de hecho es un B-submódulo of L). Más generalmente, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4. *Sea L un módulo sobre B. Para cualquier $i \geq 0$, $\mathrm{H}^i_\Phi(L_A)$ también es un B-módulo. Más aún, existe un isomorfismo*

$$\mathrm{H}^i_\Phi(L_A) \cong \mathrm{H}^i_{f_*(\Phi)}(L)$$

como B-módulos.

Prueba. Consideremos una resolución inyectiva de L

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow \cdots$$

en Mod_B. Por el Corolário 2,

$$0 \longrightarrow L_A \longrightarrow E^0_A \longrightarrow E^1_A \longrightarrow \cdots$$

es una resolución acíclica de L_A. Por lo tanto, $\mathrm{H}^*_\Phi(L_A) = \mathrm{H}^*(\Gamma_\Phi(E^*_A))$. Pero, por el Lema 8, $\Gamma_\Phi(E^j_A) = \Gamma_{f_*(\Phi)}(E^j)$ es un B-módulo para todo j. Consecuentemente, $\mathrm{H}^i_\Phi(L_A)$ es un módulo sobre B para todo $i > 0$. Nuevamente, por el Lema 8 obtenemos que

$$\mathrm{H}^*_\Phi(L_A) = \mathrm{H}^*(\Gamma_\Phi(E^*_A)) = \mathrm{H}^*(\Gamma_{f_*(\Phi)}(E^*)) = \mathrm{H}^i_{f_*(\Phi)}(L).$$

Esto prueba el resultado. ■

Proposición 5. *Sean $f : A \longrightarrow B$ un homomorfismo de anillos Noetherianos, Φ un sistema completo de ideales de A, M un A-módulo y S un B-módulo que como A-módulo es plano. Entonces*

$$\mathrm{H}^i_\Phi(M) \otimes_A S \cong \mathrm{H}^i_{f_*(\Phi)}(M \otimes_A S)$$

para todo $i \geq 0$.

Prueba. Ver [1, Theorem 1.15] ■

Finalizamos este capítulo presentando una versión de la *sucesión de Mayer-Vietoris*. Antes recordemos lo siguiente: sean $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ dos ideales de A y E un A-módulo inyectivo. Entonces, como se ve en [6, pág. 53], la sucesión de A-módulos

$$0 \longrightarrow \Gamma_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}(E) \xrightarrow{f} \Gamma_{\mathfrak{a}}(E) \oplus \Gamma_{\mathfrak{b}}(E) \xrightarrow{g} \Gamma_{\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}}(E) \longrightarrow 0, \tag{1.1}$$

donde $f(x) = (x, x)$ y $g(x, y) = x - y$, es exacta. Este resultado puede ser fácilmente generalizado para sistemas completos de ideales de A, como veremos a continuación.

Proposición 6. *Sean Φ y Ψ dos sistemas completos de ideales de A. Para todo A-módulo M existe una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow \Gamma_{\Phi\cap\Psi}(M) \longrightarrow \Gamma_{\Phi}(M)\oplus\Gamma_{\Psi}(M) \longrightarrow \Gamma_{\langle\Phi\cup\Psi\rangle}(M) \longrightarrow$$

$$\mathrm{H}^1_{\Phi\cap\Psi}(M) \longrightarrow \mathrm{H}^1_{\Phi}(M)\oplus\mathrm{H}^1_{\Psi}(M) \longrightarrow \mathrm{H}^1_{\langle\Phi\cup\Psi\rangle}(M) \longrightarrow \mathrm{H}^2_{\Phi\cap\Psi}(M) \longrightarrow \cdots$$

Prueba. Es suficiente probar que si E es un A-módulo inyectivo, entonces la sucesión de A-módulos

$$0 \longrightarrow \Gamma_{\Phi\cap\Psi}(E) \xrightarrow{f} \Gamma_{\Phi}(E)\oplus\Gamma_{\Psi}(E) \xrightarrow{g} \Gamma_{\langle\Phi\cup\Psi\rangle}(E) \longrightarrow 0,$$

donde $f(x)=(x,x)$ y $g(x,y)=x-y$, es exacta. Es claro que f es un A-homomorfismo inyectivo y que $\mathrm{Ker}(g)=\mathrm{Im}(f)$. Por otro lado, si $z\in\Gamma_{\langle\Phi\cup\Psi\rangle}(E)$, entonces por el Lema 2 tenemos que $\mathrm{Ann}(z)\supseteq\mathfrak{a}_1\cdots\mathfrak{a}_r\mathfrak{b}_1\cdots\mathfrak{b}_s$ para algunos $\mathfrak{a}_i\in\Phi$ y $\mathfrak{b}_j\in\Psi$. Por lo tanto, $z\in\Gamma_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}(E)=\Gamma_{\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}}(E)$, donde $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_1\cdots\mathfrak{a}_r\in\Phi$ y $\mathfrak{b}:=\mathfrak{b}_1\cdots\mathfrak{b}_s\in\Psi$. Más aún, existen $x\in\Gamma_{\mathfrak{a}}(E)\subseteq\Gamma_{\Phi}(E)$ e $y\in\Gamma_{\mathfrak{b}}(E)\subseteq\Gamma_{\Psi}(E)$ tal que $z=x-y$ por la exactitud de la sucesión (1.1). ■

CAPÍTULO 2

Módulos reflexivos y la Topología Max

Sean A un anillo conmutativo Noetheriano e I el cogenerador inyectivo minimal de la categoría de A-módulos. R. G. Belshoff, E. E. Enochs y J. R. García Rozas introducen y clasifican en [5] los *I-módulos Matlis reflexivos*. En la primera sección de este capítulo introducimos los *módulos E- Matlis reflexivos*, donde E es un cogenerador inyectivo arbitrario de la categoría de A-módulos, y generalizamos algunas propiedades presentadas en [5]. En la sección 2.2 introducimos los *A-módulos maximalmente completos* y probamos entre otros resultados, que si M es un A-módulo finitamente generado, entonces M es I-Matlis reflexivo, si y solo si, M es maximalmente completo (ver el Teorema 7 para un enunciado más completo). Finalmente, en la última sección probamos que si M es un A-módulo I-Matlis reflexivo, entonces $\mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(M)$ es Artiniano para todo $i \geq 0$, donde $\mathcal{M}$ denota el sistema de ideales generado por el conjunto de ideales maximales de A (ver el Teorema 9). Nuestro resultado generaliza [6, Theorem 7.1.3].

2.1. Módulos E-Matlis reflexivos

Empezamos esta sección recordando que un A- módulo E es un *cogenerador inyectivo* de A si el funtor

$$\mathrm{Hom}_A(-, E) : (\mathrm{Mod}_A)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Mod}_A$$

es exacto y fiel. El principal ejemplo de un cogenerador inyectivo de A es dado por

$$E_A\left(\bigoplus_{\mathfrak{m}\in\mathrm{Max}(A)} A/\mathfrak{m}\right),$$

donde, como es usual, $E_A(M)$ denota la *cápsula inyectiva* de un A-módulo M. Cuando A es un anillo Noetheriano vale la igualdad

$$E_A\left(\bigoplus_{\mathfrak{m}\in\mathrm{Max}(A)} A/\mathfrak{m})\right) = \bigoplus_{\mathfrak{m}\in\mathrm{Max}(A)} E_A(A/\mathfrak{m}).$$

A continuación, fijemos un cogenerador inyectivo E de A y denotemos por $D_E(-)$ el funtor (contravariante) $\mathrm{Hom}_A(-, E)$. Notemos que existe una transformación natural

$$\theta : \mathrm{id}(-) \longrightarrow D_E D_E(-)$$

que es inyectiva para cada A-módulo M. A saber,

$$\begin{array}{rcccl} \theta_M & : & M & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(M, E), E) \\ & & x & \longmapsto & \theta_M(x) : \varphi \longmapsto \varphi(x). \end{array}$$

La inyectividad de θ_M es consecuencia del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_A(A, M) \arrow[r, "D_E"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(M, E), \mathrm{Hom}_A(A, E)) \arrow[d, "\cong"] \\ M \arrow[r, "\theta_M"] & \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(M, E), E) \end{tikzcd}$$

y del hecho que la primera fila es inyectiva, a raiz que $D_E(-)$ es un funtor fiel.

Definición 2.1. Diremos que un A-módulo M es E-*Matlis reflexivo* si

$$\theta_M : M \longrightarrow D_E D_E(M)$$

es una biyección. Cuando el anillo A es Noetheriano y $E = E_A\left(\bigoplus_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Max}(A)} A/\mathfrak{m}\right)$, simplemente diremos que M es *Matlis reflexivo.*

Antes de enunciar el próximo resultado, recordemos que una subcategoría plena C de la categoría de A-módulos Mod_A es una *subcategoría de Serre*, si para toda sucesión exacta $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ de A-módulos, M pertenece a C, si y solamente si, L y N pertenecen a C. Por ejemplo, la subcategoría de los A-*módulos finitamente generados* mod_A es una subcategoría de Serre.

Proposición 7. *La clase formada por todos los A-módulos E-Matlis reflexivos es una subcategoría de Serre.*

Prueba. Sea

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de A-módulos. Desde que $D_E(-)$ es un funtor exacto y θ es una transformación natural, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\theta_L"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\theta_M"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\theta_N"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & D_E D_E(L) \arrow[r, "D_E D_E(f)"] & D_E D_E(M) \arrow[r, "D_E D_E(g)"] & D_E D_E(N) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

es conmutativo con filas exactas y cuyos homomorfismos verticales son inyectivos.

Supongamos que M es E-Matlis reflexivo, entonces θ_M es un isomorfismo. Sea $z \in D_E D_E(N)$, entonces $z = D_E D_E(g)(y)$ para algún $y \in D_E D_E(N)$. Por otro lado, existe $m \in M$ tal que $y = \theta_M(m)$. Luego, $z = D_E D_E(g)(\theta_M(m))$. Ahora sea $x = g(m)$, entonces $\theta_N(x) = \theta_N(g(m)) = D_E D_E(g)\theta_M(m) = z$. Esto prueba que θ_N es sobreyectiva (biyectiva) y, por lo tanto, N es E-Matlis reflexivo.
Ahora probaremos que L es E-Matlis reflexivo. Tomemos $x \in D_E D_E(L)$, entonces existe $m \in M$ tal que $D_E D_E(f)(x) = \theta_M(m)$, pues θ_M es un homomorfismo A-lineal sobreyectivo. Luego, $g(m) = g(\theta_M^{-1}(D_E D_E(f)(x)))$. Mas, $\theta_N \circ g = D_E D_E(g) \circ \theta_M$. Así, $g(m) = \theta_N^{-1} \circ D_E D_E(g) \circ \theta_M \circ \theta_M^{-1}(D_E D_E(f))(x) = D_E D_E(g \circ f) = 0$. Desde que $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$, existe $l \in L$ tal que $m = g(l)$. Además, $D_E D_E(f) \circ \theta_L(l) = \theta_M(f(l)) = \theta_M(m) = D_E D_E(f)(x)$. En consecuencia, $\theta_L(l) = x$, debido a que $D_E D_E(f)$ es un homomorfismo inyectivo. Esto implica que θ_L es un homomorfismo sobreyectivo (biyectivo).

Recíprocamente, supongamos ahora que L y N son E-Matlis reflexivos, entonces θ_L y θ_N son isomorfismos. Aplicando el *Lema de los cinco* al diagrama (2.1), concluimos que θ_M también es un isomorfismo y por lo tanto, M es E-Matlis reflexivo. ∎

A continuación, probaremos otras propiedades sobre A-módulos E-Matlis reflexivos, semejantes a las establecidas en [5]. Antes recordemos lo siguiente: Sean X un A-módulo y $\{N_i\}_{i\in I}$ una familia de A-módulos. Para cada $j \in I$ denotemos por $\lambda_j : N_j \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} N_i$ la inclusión natural. Entonces la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \Sigma : & \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_A(N_i, X) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(\bigoplus_{i\in I} N_i, X) \\ & (\varphi_i) & \longmapsto & \psi, \end{array}$$

donde $\psi : \bigoplus_{i\in I} N_i \longrightarrow X$ es el único homomorfismo de A-módulos que hace conmutativo cada uno de los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{i\in I} N_i \arrow[rr, "\psi"] & & X \\ & N_j, \arrow[ul, "\lambda_j"] \arrow[ur, "\varphi_j"'] & \end{tikzcd}$$

es un isomorfismo.

En la siguiente proposición, denotaremos por $\iota : \bigoplus_{i\in I} N_i \longrightarrow \prod_{i\in I} N_i$ la inclusión natural.

Proposición 8. *Si M es un A-módulo E-Matlis reflexivo, entonces M no contiene sumas directas infinitas.*

Prueba. Supongamos que $\bigoplus_{i\in I} M_i$ está contenida en M. Por la Proposición 7, $\bigoplus_{i\in I} M_i$ y cada sumando directo M_i son A-módulos E-reflexivos. Denotemos por α el homomorfismo A-lineal inyectivo, resultado de la composición de los homomorfismos

$\bigoplus_{i\in I} D_E(M_i) \xrightarrow{\iota} \prod_{i\in I} D_E(M_i) \xrightarrow[\cong]{\Sigma} D_E\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right)$. Como D_E es un funtor exacto, obtenemos el homomorfismo sobreyectivo

$$\Sigma^{-1}\circ D_E(\alpha) : D_E D_E\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) \longrightarrow D_E\left(\bigoplus_{i\in I} D_E(M_i)\right) \cong \prod_{i\in I} D_E D_E(M_i).$$

Denotemos por Θ el isomorfismo $\theta_{\bigoplus_{i\in I} M_i} : \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow D_E D_E(\bigoplus_{i\in I} M_i)$. Afirmamos que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\Theta"', "\cong"] & \prod_{i\in I} M_i \arrow[d, "\cong"', "\prod_{i\in I}\theta_{M_i}"] \\
D_E D_E\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) \arrow[r, "\Sigma^{-1}\circ D_E(\alpha)"] & \prod_{i\in I} D_E D_E(M_i)
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. En efecto, dado $(x_i)\in \bigoplus_{i\in I} M_i$ tenemos que $D_E(\Theta((x_i))) = \Theta((x_i))\circ\alpha$. Sea $\Lambda_j : D_E(M_j) \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} D_E(M_i)$ la inclusión natural. Entonces, para $\varphi\in D_E(M_i)$ se cumple que $(\alpha\circ\Lambda_j)(\varphi) = \alpha(\Lambda_j(\varphi)) = \psi$, donde $\psi\circ\lambda_j = \varphi$ y $\psi\circ\lambda_i = 0$ cuando $i\neq j$. Luego,

$$((\Theta((x_i))\circ\alpha)\circ\Lambda_j)(\varphi) = \Theta((x_i))(\psi) = \psi((x_i)) = \varphi(x_j) = \theta_{M_j}(x_j)(\varphi).$$

Por lo tanto, $(\Theta((x_i))\circ\alpha)\circ\Lambda_j = \theta_{M_j}(x_j)$ para todo $j\in I$. Pero

$$(\Sigma\circ\prod_{i\in I}\theta_{M_i}\circ\iota)((x_i)) = \Sigma((\theta_{M_i}(x_i)))$$

es el único homomorfismo A-lineal tal que $\Sigma((\theta_{M_i}(x_i)))\circ\Lambda_j = \theta_j(x_j)$ para todo $j\in I$. Ésto implica que, $\Sigma\circ\prod_{i\in I}\theta_{M_i}\circ\iota = \Theta((x_i))\circ\alpha$.

En consecuencia, ι es un homomorfismo sobreyectivo y por lo tanto, un isomorfismo. Pero, esto solo puede suceder cuando el conjunto de índices I es finito. ■

El siguiente resultado será usado en la próxima sección.

Proposición 9. *Si M es un A-módulo Artiniano, entonces existe un homomorfismo inyectivo $\varphi : M \longrightarrow E^n$ para algún número entero $n\geq 1$.*

Prueba. Consideremos la familia

$$\mathscr{F} := \{\ker\varphi |\ \varphi : M \longrightarrow E^n \text{ para algún entero positivo } n\}.$$

Note que $\mathscr{F} \neq \emptyset$, pues E es un cogenerador inyectivo. Como M es Artiniano, $\mathscr{F}$ tiene un elemento minimal, digamos $\ker\varphi$. Caso exista un elemento $0 \neq x \in \ker\varphi$, podemos hallar $\psi : M \longrightarrow E$ tal que $\psi(x) \neq 0$. Defina el homomorfismo $\widehat{\varphi} : M \longrightarrow E \oplus E^n$ por $\widehat{\varphi}(m) = (\psi(m), \varphi(m))$. Entonces $\ker\widehat{\varphi} \in \mathscr{F}$. Pero $\ker\widehat{\varphi} \subsetneq \ker\varphi$, lo que es una contradicción. Ésto implica que $\ker\varphi = 0$ y por lo tanto, $\varphi : M \longrightarrow E^n$ es un homomorfismo inyectivo. ■

Proposición 10. *Un A-módulo M es E-Matlis reflexivo, si y solo si, $D_E(M)$ es E-Matlis reflexivo.*

Prueba. Supongamos que M es E-Matlis reflexivo. Consideremos el homomorfismo A-lineal $\theta_{D_E(M)} : D_E(M) \longrightarrow D_E D_E D_E(M)$. Tome un elemento $\varphi \in D_E D_E D_E(M)$, entonces $\varphi \circ \theta_M \in D_E(M)$. Afirmamos que $\theta_{D_E(M)}(\varphi \circ \theta_M) = \varphi$. En efecto, sea $\beta \in D_E D_E M$, entonces existe $x \in M$ tal que $\beta = \theta_M(x)$. Luego,

$$\theta_{D_E(M)}(\varphi \circ \theta_M)(\beta) = \beta(\varphi \circ \theta_M) = \theta_M(x)(\varphi \circ \theta_M) = \varphi(\theta_M(x)) = \varphi(\beta).$$

Por lo tanto, $\theta_{D_E(M)}$ es sobreyectivo, y en consecuencia, $D_E(M)$ es E-Matlis reflexivo.

Recíprocamente, supongamos que $D_E(M)$ es E-Matlis reflexivo. Observemos que $D_E(\theta_M) \circ \theta_{D_E(M)} = \mathrm{id}_{D_E(M)}$. Desde que $\theta_{D_E(M)}$ es un isomorfismo tenemos que $D_E(\theta_M)$ también es un isomorfismo. Como $D_E(-)$ es un funtor exacto y fiel, concluímos que θ_M es un isomorfismo. Por lo tanto, M es E-Matlis reflexivo. ■

En particular, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 5. *Si A es E-Matlis reflexivo, entonces A es semilocal.*

Prueba. Como A es E-Matlis reflexivo, $D_E(A)$ es E-Matlis reflexivo en virtud de la Proposición 10. Pero $D_E(A) = \mathrm{Hom}_A(A, E) \cong E$. Por otro lado, desde que E_A es un sumando directo de E, la Proposición 7 garantiza que E_A también es E-Matlis reflexivo. Luego, por la Proposición 8, E_A no contiene sumas directas infinitas. En consecuencia, $A/\mathfrak{m} \neq 0$ apenas para una cantidad finita de ideales maximales. Por lo tanto, A es semilocal. ■

Proposición 11. *Supongamos que A es Noetheriano. Si M es un A-módulo finitamente generado y E-Matlis reflexivo, entonces* $\mathrm{Supp}(M) \cap \mathrm{Max}(A)$ *es un conjunto finito.*

Prueba. Como el anillo A es Noetheriano, podemos escribir $E = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \Lambda} E_A(A/\mathfrak{p})$ para algún conjunto de índices $\Lambda \subseteq \mathrm{Spec}(A)$. Desde que E es un cogenerador inyectivo de A tenemos que $\mathrm{Max}(A) \subseteq \Lambda$. Como M es finitamente generado existe un isomorfismo natural $D_E(M) \cong \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \Lambda} \mathrm{Hom}_A(M,\ E_A(A/\mathfrak{p}))$. El hecho que $D_E(M)$ es E-Matlis reflexivo (gracias a la Proposición 10) implica que solamente un número finito de los A-módulos $\mathrm{Hom}_A(M,\ E_A(A/\mathfrak{p}))$ es diferente de cero. En particular, $\mathrm{Hom}_A(M,\ E_A(A/\mathfrak{m})) \neq 0$ para un número finito de ideales maximales $\mathfrak{m}$ de A. Finalmente, la igualdad

$$\mathrm{Ass}(\mathrm{Hom}_A(M,\ E_A(A/\mathfrak{p}))) = \mathrm{Supp}(M) \cap \mathrm{Ass}(E_A(A/\mathfrak{p})) = \mathrm{Supp}(M) \cap \{\mathfrak{p}\},$$

para cada ideal primo $\mathfrak{p}$, demuestra el resultado. ■

Antes de enunciar el siguiente resultado, recordemos que dados A-módulos X, Y, Z, existe un homomorfismo natural

$$\gamma : \operatorname{Hom}_A(X,Y) \otimes_A Z \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(\operatorname{Hom}_A(Z,X),Y)$$

que es un isomorfismo cuando Y es inyectivo y Z es de presentación finita. A saber,

$$\gamma(f \otimes z)(g) = (f \circ g)(z), \text{ para todo } f \in \operatorname{Hom}_A(X,Y), g \in \operatorname{Hom}_A(Z,X), z \in Z.$$

Proposición 12. *Supongamos que A es Noetheriano. Sean M un A-módulo finitamente generado y N un A-módulo E-Matlis reflexivo. Entonces los A-módulos $\operatorname{Ext}^n_A(M,N)$ y $\operatorname{Tor}^A_n(M,N)$ son E-Matlis reflexivos para todo $n \geq 0$.*

Prueba. Primero notemos que existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_A(M,\ N) \arrow[r, "\theta^N", "\cong"'] \arrow[d, "\theta_{\operatorname{Hom}_A(M,\ N)}"'] & \operatorname{Hom}_A(M,\ D_E D_E(N)) \arrow[d, "\cong"', "\sigma^{-1}"] \\
D_E D_E(\operatorname{Hom}_A(M,\ N)) \arrow[r, "\gamma", "\cong"'] & D_E(M \otimes_A D_E(N))
\end{tikzcd}$$

donde $\theta^N := \operatorname{Hom}_A(M, \theta_N)$ y σ es el isomorfismo de adjunción Tensor-Hom. Desde que N es E-Matlis reflexivo, θ^N es un isomorfismo. Como M es finitamente generado, γ también es un isomorfismo. En consecuencia, $\theta_{\operatorname{Hom}_A(M,N)}$ es un isomorfismo y, por lo tanto, $\operatorname{Hom}_A(M,\ N)$ es E-Matlis reflexivo.

Para demostrar que $\operatorname{Ext}^n_A(M,\ N)$ es E-Matlis reflexivo, consideremos una resolución libre $F_* \longrightarrow M \longrightarrow 0$ donde cada F_n es finitamente generado . De esa manera, cada A-módulo $\operatorname{Hom}_A(F_n,\ N)$ es E-Matlis reflexivo. Como la clase de los E-Matlis reflexivos es una categoría de Serre (Proposición 7), concluimos que $\operatorname{Ext}^n_A(M,\ N)$ es E-Matlis reflexivo para todo $n \geq 0$.

De manera semejante, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_A N \arrow[r, "M \otimes_A \theta_N", "\cong"'] \arrow[d, "\theta_{M \otimes_A N}"'] & M \otimes_A D_E D_E(N) \arrow[d, "\cong"', "\gamma^{-1}"] \\
D_E D_E(M \otimes_A N) \arrow[r, "D_E(\sigma)", "\cong"'] & D_E(\mathrm{Hom_A(M,\ D_E(N))}).
\end{tikzcd}$$

Desde que N es E-Matlis reflexivo, $M \otimes_A \theta_N$ es un isomorfismo. Como M es finitamente generado, γ también es un isomorfismo. Por otro lado, como σ es el isomorfismo de adjunción Tensor-Hom, $D_E(\sigma)$ también es un isomorfismo. En consecuencia, $\theta_{M \otimes_A N}$ es un isomorfismo y, por lo tanto, $M \otimes_A N$ es E-Matlis reflexivo. Tomando nuevamente una resolución libre de M de rango finito, obtenemos que los A-módulos $\operatorname{Tor}^n_A(M,\ N)$ son E-Matlis reflexivos para todo $n \geq 0$.

■

2.2. Topología Max

Denotaremos por $\mathcal{M}$ el sistema completo de ideales generado por el conjunto $\mathrm{Max}(A)$ de todos los ideales maximales de A, i.e.,

$$\mathcal{M} := \langle \mathrm{Max}(A) \rangle.$$

Así, un ideal $\mathfrak{a} \trianglelefteq A$ es un elemento de $\mathcal{M}$, si y solo si, existen ideales maximales $\mathfrak{m}_1, ..., \mathfrak{m}_s$ y enteros positivos $n_1, .., n_s$ tales que $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{m}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{m}_s^{n_s}$.

Supongamos que un A-módulo M está equipado con una topología τ. Recordemos que τ es una *topología lineal*, si $(M, +, \tau)$ es un grupo aditivo topológico tal que 0 tiene un sistema fundamental de vecindades abierta consistente de submódulos de M. En esta situación, es habitual decir que M está *linealmente topologizado*.

Consideremos ahora un A-módulo M. Equiparemos M con una topología lineal como sigue: diremos que un subconjunto U de M es *abierto*, si para cada $m \in U$ existe $\mathfrak{a} \in \mathcal{M}$ tal que $m + \mathfrak{a}M \subseteq U$. De esa manera, el conjunto $\{\mathfrak{a}M \mid \mathfrak{a} \in \mathcal{M}\}$ forma un sistema fundamental de vecindades del elemento cero de M. Tal topología será llamada de *topología max*. Note que M es Hausdorff, si y solo si, $\bigcap_{\mathfrak{a} \in \mathcal{M}} \mathfrak{a}M = 0$. Observe también que $\mathcal{M}$ es un conjunto dirigido con respecto al orden parcial dado por $\mathfrak{a} \preceq \mathfrak{b}$, si $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$. Para cada par de ideales $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathcal{M}$ tales que $\mathfrak{a} \preceq \mathfrak{b}$ consideremos el homomorfismo natural de A-módulos
$\varphi_{\mathfrak{ab}} : M/\mathfrak{b}M \longrightarrow M/\mathfrak{a}M$. Entonces $\{M/\mathfrak{a}M, \varphi_{\mathfrak{ab}}\}$ forma un sistema inverso de A-módulos. Denotaremos por $\Lambda_{\mathcal{M}}(M)$ su límite inverso, i.e.,

$$\Lambda_{\mathcal{M}}(M) = \varprojlim_{\mathfrak{a} \in \mathcal{M}} M/\mathfrak{a}M.$$

Ahora equipemos cada A-módulo cociente $M/\mathfrak{a}M$ con la topología discreta y $\Lambda_{\mathcal{M}}(M)$ con la *topologia límite inverso*, i.e., con la menor topología tal que cada una de las proyecciones $\pi_{\mathfrak{a}} : \Lambda_{\mathcal{M}}(M) \longrightarrow M/\mathfrak{a}M$ es continua. Recordemos que la topología límite inverso es lineal donde el conjunto $\{\ker(\pi_{\mathfrak{a}}) \mid \mathfrak{a} \in \mathcal{M}\}$ es un sistema fundamental de vecindades de $0 \in \Lambda_{\mathcal{M}}(M)$. De este modo, el homomorfismo natural de A-módulos

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & M & \longrightarrow & \Lambda_{\mathcal{M}}(M) \\ & x & \longmapsto & (x + \mathfrak{a}M) \end{array}$$

es continuo. En efecto, dado $\mathfrak{a} \in \mathcal{M}$ tenemos que $\varphi^{-1}(\ker(\pi_{\mathfrak{a}})) = \mathfrak{a}M$. Observe que M es Hausdorff con respecto a la topología Max, si y solo si, el homomorfismo φ es inyectivo.

Por otro lado, cuando $M = A$, el A-módulo $\Lambda_{\mathcal{M}}(A)$ también es un anillo y φ un homomorfismo de anillos.

Definición 2.2. Diremos que un A-módulo M es *maximalmente completo* cuando φ es una biyección.

Lema 9. *Sea M un A-módulo Artiniano, entonces M es maximalmente completo, si y solo si, M es finitamente generado. En particular, todo anillo Artiniano es maximalmente completo.*

Prueba. Desde que M es Artiniano, la familia $\mathscr{F} = \{\mathfrak{a}M\}_{\mathfrak{a}\in\mathcal{M}}$ de submódulos de M posee un elemento minimal, digamos $\mathfrak{b}M$. Luego $\mathfrak{a}M = \mathfrak{b}M$ para todo $\mathfrak{a} \preceq \mathfrak{b}$. Esto implica que

$$\Lambda_{\mathcal{M}}(M) = \varprojlim_{\mathfrak{a}\in\mathcal{M}} M/\mathfrak{a}M \cong \varprojlim_{\mathfrak{b}\preceq\mathfrak{a}} M/\mathfrak{a}M = M/\mathfrak{b}M.$$

Supongamos que M es maximalmente completo, entonces $\mathfrak{b}M = 0$ para algún $\mathfrak{b} \in \mathcal{M}$. Ésto implica que $\mathrm{Ann}(M) \in \mathcal{M}$ pues $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{Ann}(M)$. Por lo tanto, existen ideales maximales diferentes $\mathfrak{m}_1, .., \mathfrak{m}_s$ y enteros positivos $n_1, ..., n_s$ tales que $\mathrm{Ann}(M) \supseteq \mathfrak{m}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{m}_s^{n_s}$. El homomorfismo A-lineal sobreyectivo

$$\underbrace{A/\mathfrak{m}_1 \oplus \cdots \oplus A/\mathfrak{m}_1}_{n_1 \text{ veces}} \oplus \cdots \oplus A/\underbrace{\mathfrak{m}_s \oplus \cdots \oplus A/\mathfrak{m}_s}_{n_s \text{ veces}} \cong A/\mathfrak{m}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{m}_s^{n_s} \longrightarrow A/\mathrm{Ann}(M)$$

implica que $A/\mathrm{Ann}(M)$ es un A-módulo Artiniano y por lo tanto, un anillo Artiniano. Como M tiene estructura de $A/\mathrm{Ann}(M)$-módulo, M es Artiniano como $A/\mathrm{Ann}(M)$-módulo. Por lo tanto, M es finitamente generado como $A/\mathrm{Ann}(M)$-módulo o, equivalentemente, M es finitamente generado como A-módulo.
Recíprocamente, supongamos que M es finitamente generado. Como M es Artiniano, sabemos que $V(\mathrm{Ann}(M)) = \mathrm{Supp}(M)$ es un conjunto finito formado por ideales maximales, digamos $\mathfrak{m}_1, ..., \mathfrak{m}_s$. Entonces $\sqrt{\mathrm{Ann}(M)} = \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_s = \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_s \in \mathcal{M}$. Por otro lado, $\mathrm{Att}_A(M) \subseteq V(\mathrm{Ann}(M))$, donde $\mathrm{Att}_A(M)$ es el conjunto de los *ideales primos anexados* de M. Luego, por [18, Lemma 2.5] existe un entero positivo n tal que $\mathrm{Ann}(M)^n M = 0$. Por lo tanto, M es maximalmente completo. ■

Proposición 13. *Supongamos que M es un A-módulo $\mathcal{M}$-torsión, entonces $D(M)$ es maximalmente completo. En particular,* $\bigcap_{\mathfrak{a}\in\mathcal{M}} \mathfrak{a}D(M) = 0$.

Prueba. El objetivo es demostrar que el homomorfismo canónico

$$\varphi : D(M) \longrightarrow \Lambda_{\mathcal{M}}(D(M))$$

es una biyección. Pero tenemos los siguientes isomorfismos naturales

$$\begin{aligned} D(M) &= D(\Gamma_{\mathcal{M}}(M)) \\ &\cong D(\varinjlim_{\mathfrak{a}\in\mathcal{M}} \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, M)) \\ &\cong \varprojlim_{\mathfrak{a}\in\mathcal{M}} D(\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, M)) \\ &\cong \varprojlim_{\mathfrak{a}\in\mathcal{M}} D(M) \otimes_A A/\mathfrak{a} \\ &\cong \varprojlim_{\mathfrak{a}\in\mathcal{M}} D(M)/\mathfrak{a}D(M) \\ &= \Lambda_{\mathcal{M}}(D(M)), \end{aligned}$$

donde el penúltimo isomorfismo sigue por la adjunción $\mathrm{Hom} - \otimes$. Ahora no es difícil ver que este isomorfismo es precisamente φ. ■

Corolario 6. *Sea M un A-módulo. Son válidas las siguientes afirmaciones:*

(i) Si M es Artiniano, entonces $D(M)$ es maximalmente completo.

(ii) Si M es finitamente generado, entonces $D(M)$ es maximalmente completo. En particular, si M es Matlis reflexivo y finitamente generado, M es maximalmente completo.

(iii) $D(E)$ es maximalmente completo.

Prueba. (i) Basta notar que $\mathrm{Supp}(M) \subseteq \mathrm{Max}(A)$ cuando M es Artiniano.

(ii) En el caso que M es finitamente generado,

$$\mathrm{Ass}(D(M)) = \mathrm{Ass}(\mathrm{Hom_A(M,E)}) = \mathrm{Supp}(M) \cap \mathrm{Ass}(E) \subseteq \mathrm{Ass}(E) \subseteq \mathcal{M}.$$

Esto implica que $D(M)$ es $\mathcal{M}$-torsión. Por lo tanto, $DD(M)$ es maximalmente completo.

(iii) Observe que E es $\mathcal{M}$-torsión. En efecto,

$$\Gamma_{\mathcal{M}}(E) \cong \bigoplus_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Max}(A)} \Gamma_{\mathcal{M}}(E_A(A/\mathfrak{m})) \cong \bigoplus_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Max}(A)} E_A(A/\mathfrak{m}) = E.$$

Por lo tanto, $D(E)$ es maximalmente completo.

■

Lema 10. *Si $\mathfrak{a} \in \mathcal{M}$, entonces $D(E) \otimes_A A/\mathfrak{a}$ es isomorfo a $A/\mathfrak{a}$.*

Prueba. Como $\mathfrak{a} \in \mathcal{M}$ existen ideales maximales $\mathfrak{m}_1, ..., \mathfrak{m}_s$ y enteros positivos $n_1, ..., n_s$ tales que $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{m}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{m}_s^{n_s}$. Un argumento semejante al usado en la demostración del Lema 9 prueba que $A/\mathfrak{a}$ es un anillo Artiniano. Por lo tanto, $A/\mathfrak{a}$ posee una cantidad finita de ideales maximales, digamos $\mathrm{Max}(A/\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{n}_1/\mathfrak{a}, ..., \mathfrak{n}_k/\mathfrak{a}\}$. Afirmamos que $D(A/\mathfrak{a}) = \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, E)$ es el cogenerador inyectivo minimal de $A/\mathfrak{a}$. En efecto, consideremos el $A/\mathfrak{a}$-módulo $M := \bigoplus_{i=1}^{k} A/\mathfrak{a}/\mathfrak{n}_i/\mathfrak{a} \cong \bigoplus_{i=1}^{k} A/\mathfrak{n}_i$. Entonces visto como A-módulo se cumple que

$$\Gamma_a(E_A(M)) = \bigoplus_{i=1}^{k} E_A(A/\mathfrak{n}_i) = \bigoplus_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Max}(A)} E_A(A/\mathfrak{m}) = E,$$

pues el funtor $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ preserva sumas directas y además $\Gamma_{\mathfrak{a}}(E_A(A/\mathfrak{n}_i)) = E_A(A/\mathfrak{n}_i)$ para todo $i = 1, .., k$ y $\Gamma_{\mathfrak{a}}(E_A(A/\mathfrak{m})) = 0$ para un ideal maximal $\mathfrak{m} \notin \{\mathfrak{n}_1, ..., \mathfrak{n}_k\}$. Por lo tanto, aplicando el [6, Lemma 10.1.16] obtenemos,

$$\begin{aligned} E_{A/\mathfrak{a}}(M) &\cong \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, E_A(M)) \cong \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, \Gamma_{\mathfrak{a}}(E_A(M)) \\ &= \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, E) = D(A/\mathfrak{a}). \end{aligned}$$

Luego, por [15, Theorem 1.6, (5)],

$$\mathrm{Hom}_{A/\mathfrak{a}}(\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, E), \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, E)) \cong A/\mathfrak{a}.$$

Ahora tenemos los siguientes isomorfismos naturales

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{A/\mathfrak{a}}(\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a},E),\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a},E)) &\cong \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a},E),E)\\ &\cong \mathrm{Hom}_A(E,E)\otimes_A A/\mathfrak{a},\end{aligned}$$

lo que prueba el lema. ■

Teorema 7. *Sea M un A-módulo finitamente generado, entonces existen isomorfismos canónicos*

$$DD(M)\cong \Lambda_{\mathcal{M}}(A)\otimes_A M\cong \Lambda_{\mathcal{M}}(M).$$

Prueba. Primero probaremos que $DD(M)\cong \Lambda_{\mathcal{M}}(A)\otimes_A M$. Para esto, supongamos inicialmente que $M=A$. Usando el Lema 10 tenemos los siguientes isomorfismos naturales

$$\begin{aligned}\Lambda_{\mathcal{M}}(A) &= \varprojlim_{\mathfrak{a}\in\mathcal{M}} A/\mathfrak{a}\\ &\cong \varprojlim_{\mathfrak{a}\in\mathcal{M}} D(E)\otimes_A A/\mathfrak{a}\\ &\cong \varprojlim_{\mathfrak{a}\in\mathcal{M}} DD(A/\mathfrak{a})\\ &\cong D(\varinjlim_{\mathfrak{a}\in\mathcal{M}} D(A/\mathfrak{a}))\\ &\cong D(\Gamma_{\mathcal{M}}(E))\cong D(E)\\ &= DD(A).\end{aligned}$$

En el caso general, tenemos lo siguientes isomorfismos naturales

$$DD(M)\cong D(E)\otimes_A M\cong DD(A)\otimes_A M\cong \Lambda_{\mathcal{M}}(A)\otimes_A M.$$

A continuación probaremos que $\Lambda_{\mathcal{M}}(M)\cong DD(M)$. Aplicando nuevamente el Lema 10, tenemos los siguientes isomorfismos naturales

$$\begin{aligned}\Lambda_{\mathcal{M}}(M) &\cong \varprojlim_{\mathfrak{a}\in\mathcal{M}} A/\mathfrak{a}\otimes_A M\\ &\cong \varprojlim_{\mathfrak{a}\in\mathcal{M}} D(E)\otimes_A A/\mathfrak{a}\otimes_A M\\ &\cong \varprojlim_{\mathfrak{a}\in\mathcal{M}} DD(M\otimes_A A/\mathfrak{a})\\ &\cong D(\varinjlim_{\mathfrak{a}\in\mathcal{M}} D(M\otimes_A A/\mathfrak{a}))\\ &\cong D(\varinjlim_{\mathfrak{a}\in\mathcal{M}} \mathrm{Hom}_A(M,D(A/\mathfrak{a})))\\ &\cong D(\mathrm{Hom}_A(M,\varinjlim_{\mathfrak{a}\in\mathcal{M}} D(A/\mathfrak{a}))\\ &\cong D(\mathrm{Hom}_A(M,\Gamma_{\mathcal{M}}(E)))\\ &\cong D(\mathrm{Hom}_A(M,E))\\ &= DD(M).\end{aligned}$$

Así concluimos la demostración del Teorema. ■

En virtud del Teorema 7, el funtor de completamiento maximal restricto a la categoría mod_A de los A-módulos finitamente generados ,

$$\Lambda_{\mathcal{M}}(-) : \mathrm{mod}_A \longrightarrow \mathrm{Mod}_A,$$

es exacto y fiel.

Proposición 14. *Sea M un A-módulo tal que $\mathrm{Supp}(M) \subseteq \mathcal{M}$, entonces M tiene una estructura natural de $\Lambda_{\mathcal{M}}(A)$-módulo tal que*

$$\Lambda_{\mathcal{M}}(A) \otimes_A M \cong M$$

como $\Lambda_{\mathcal{M}}(A)$-módulos.

Prueba. Supongamos inicialmente que M es un A-módulo finitamente generado. Entonces $V(\mathrm{Ann}(M)) \subseteq \mathcal{M}$. Luego, por el Lema 1, $\mathfrak{b} := \mathrm{Ann}(M) \in \mathcal{M}$. Consideremos la projección $\pi_{\mathfrak{b}} : \Lambda_{\mathcal{M}}(A) \longrightarrow A/\mathfrak{b}$. Desde que M es un $A/\mathfrak{b}$-módulo, M tiene estructura natural de $\Lambda_{\mathcal{M}}(a)$-módulo por restricción de escalares. De manera más específica,

$$(r_{\mathfrak{a}} + \mathfrak{a}) \cdot m = r_{\mathfrak{b}} m \;\text{ para todo }\; (r_{\mathfrak{a}} + \mathfrak{a}) \in \Lambda_{\mathcal{M}}(A) \;\text{ y para todo }\; m \in M.$$

Consideremos ahora un homomorfismo de A-módulos $f : M \longrightarrow N$, donde $\mathrm{Supp}(N) \subseteq \mathrm{Max}(A)$. Escribamos $\mathfrak{c} = \mathrm{Ann}(M) \in \mathcal{M}$. Probaremos que f es un homomorfimos de $\Lambda_{\mathcal{M}}(A)$-módulos. En efecto, para todo $m \in M$ y para todo $(r_{\mathfrak{a}} + \mathfrak{a}) \in \Lambda_{\mathcal{M}}(A)$ tenemos

$$f((r_{\mathfrak{a}} + \mathfrak{a})) \cdot m = f(r_{\mathfrak{b}} m) = f(r_{\mathfrak{bc}} m) = r_{\mathfrak{bc}} f(m) = r_{\mathfrak{c}} f(m) = (r_{\mathfrak{a}} + \mathfrak{a}) f(m).$$

Además, para cada A-módulo finitamente generado M tenemos un isomorfismo natural de $\Lambda_{\mathcal{M}}(A)$-módulos $\Lambda_{\mathcal{M}}(A) \otimes_A M \cong M$ por el Teorema 7.

En el caso general, podemos escribir $M \cong \varinjlim_{i \in I} M_i$, donde cada M_i es un submódulo finitamente generado de M. Por el argumento previo, M también es un límite directo de $\Lambda_{\mathcal{M}}(A)$-módulos. Por lo tanto, M tiene estructura natural de $\Lambda_{\mathcal{M}}(A)$-módulo y además,

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mathcal{M}}(A) \otimes_A M &\cong \Lambda_{\mathcal{M}}(A) \otimes_A \varinjlim_{i \in I} M_i \\ &\cong \varinjlim_{i \in I} \Lambda_{\mathcal{M}}(A) \otimes_A M_i \\ &\cong \varinjlim_{i \in I} M_i \cong M, \end{aligned}$$

que demuestra el enunciado. ■

Corolario 8. *Para todo A-módulo M, su dual generalizado de Matlis $D(M)$ tiene una estructura natural de $\Lambda_{\mathcal{M}}(A)$-módulo. Si M es Artiniano, entonces $D(M)$ es finitamente generado como $\Lambda_{\mathcal{M}}(A)$-módulo.*

Prueba. Desde que $\mathrm{Supp}(E) \subseteq \mathrm{Max}(A)$, E tiene una estructura natural de $\Lambda_{\mathcal{M}}(A)$-módulo. Por lo tanto, $D(M) = \mathrm{Hom}_A(M, E)$ tiene estructura natural de $\Lambda_{\mathcal{M}}(A)$-módulo.

Supongamos ahora que M es Artiniano. Gracias a la Proposición 9 existe una sucesión exacta $0 \longrightarrow M \longrightarrow E^n$ para algún $n \geq 1$. Después de aplicar el funtor $D(-)$ obtenemos la sucesión exacta $D(E^n) \longrightarrow D(M) \longrightarrow 0$. Desde que $D(E) \cong \Lambda_{\mathcal{M}}(A)$ por el Corolario 6, sigue el resultado. ■

Proposición 15. *Sea M un A-módulo finitamente generado, entonces existe un isomorfismo canónico de A-módulos*

$$\Lambda_{\mathcal{M}}(M) \cong \prod_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Max}(A)} \widehat{M_{\mathfrak{m}}}.$$

Prueba. Para todo A-módulo finitamente generado tenemos los siguientes isomorfismos naturales

$$\begin{aligned}
DD(M) &\cong D\left(\mathrm{Hom}_A(M, \bigoplus_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Max}(A)} E_A(A/\mathfrak{m}))\right) \\
&\cong D\left(\bigoplus_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Max}(A)} \mathrm{Hom}_A(M, E_A(A/\mathfrak{m}))\right) \\
&\cong \prod_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Max}(A)} D(\mathrm{Hom}_A(M, E_A(A/\mathfrak{m})) \\
&\cong \prod_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Max}(A)} M \otimes_A D(E_A(A/\mathfrak{m})) \\
&\cong \prod_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Max}(A)} M \otimes_A \mathrm{Hom}_A(E_A(A/\mathfrak{m}), E_A(A/\mathfrak{m})) \\
&\cong \prod_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Max}(A)} M \otimes_A \widehat{A_{\mathfrak{m}}} \\
&\cong \prod_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Max}(A)} \widehat{M_{\mathfrak{m}}}.
\end{aligned}$$

Ahora el resultado sigue directamente del Teorema 7. ■

Proposición 16. *Si A es un anillo Noetheriano, entonces $\Lambda_{\mathcal{M}}(A)$ es un A-módulo fielmente plano.*

Prueba. Por el Teorema 7, el A-módulo $\Lambda_{\mathcal{M}}(A)$ es plano. Ahora sea $\mathfrak{n}$ un ideal maximal de A. Por la Proposición 15 tenemos

$$\begin{aligned}
\mathfrak{n}\Lambda_{\mathcal{M}}(A) &\cong \mathfrak{n} \prod_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Max}(A)} \widehat{A_{\mathfrak{m}}} \\
&= \prod_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Max}(A)} \mathfrak{n}\widehat{A_{\mathfrak{m}}} \\
&\subsetneq \prod_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Max}(A)} \widehat{A_{\mathfrak{m}}} \\
&\cong \Lambda_{\mathcal{M}}(A).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathfrak{n}\Lambda_{\mathcal{M}}(A) \subsetneq \Lambda_{\mathcal{M}}(A)$, lo cual demuestra el resultado. ■

2.3. Módulos reflexivos y cohomología local

Lema 11. *Sean M un A-módulo, Φ un sistema completo de ideales de A y X un subconjunto de* $\operatorname{Spec}(A)$ *que contiene* $\operatorname{Supp}(M)$*. Entonces*

$$\Gamma_\Phi(M) = \Gamma_{\langle X\cap\Phi\rangle}(M).$$

Prueba. Sea $x \in \Gamma_\Phi(x)$, entonces $\operatorname{Supp}(Ax) \subseteq \Phi$. Como $\operatorname{Supp}(Ax) \subseteq \operatorname{Supp}(M) \subseteq X$ tenemos que $\operatorname{Supp}(Ax) \subseteq \langle X\cap\Phi\rangle$. Por lo tanto, $x \in \Gamma_{\langle X\cap\Phi\rangle}(M)$. La inclusión recíproca es clara, pues $\langle X\cap\Phi\rangle \subseteq \Phi$. ■

Proposición 17. *Sean Φ un sistema completo de ideales de A y M un A-módulo tal que* $\operatorname{Supp}(M)\cap\Phi = \{\mathfrak{m}_1,\dots,\mathfrak{m}_s\} \subseteq \operatorname{Max}(A)$*. Entonces*

$$\mathrm{H}^i_\Phi(M) \cong \bigoplus_{j=1}^{s} \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}_j}(M)$$

para todo i.

Prueba. Haremos la demostración por inducción sobre s. Supongamos inicialmente que $s=1$, entonces $\operatorname{Supp}(M)\cap\Phi = \{\mathfrak{m}\} \subseteq \operatorname{Max}(A)$. Consideremos una resolución inyectiva minimal (I^i, d^i) de M. Entonces $\operatorname{Supp}(M) = \operatorname{Supp}(I^0) \supseteq \operatorname{Supp}(I^1) \supseteq \cdots$. Luego, $\operatorname{Supp}(I^i)\cap\Phi \subseteq \operatorname{Supp}(M)\cap\Phi = \{\mathfrak{m}\}$ para todo i. Caso exista j tal que $\operatorname{Supp}(I^i)\cap\Phi = \emptyset$ (podemos suponer que es el mayor índice con tal propiedad), tenemos que $I^i = 0$ para todo $i \geq j$ y $\operatorname{Supp}(I^i)\cap\Phi = \{\mathfrak{m}\}$ para todo $i < j$. Por el Lema 11 obtenemos que $\Gamma_\Phi(I^i) = \Gamma_{\mathfrak{m}}(I^i)$ y $\Gamma_\Phi(d^i) = \Gamma_{\mathfrak{m}}(d^i)$ para todo i. Por lo tanto, $\mathrm{H}^i_\Phi(M) = \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M)$. Por otro lado, si $\operatorname{Supp}(I^i)\cap\Phi = \{\mathfrak{m}\}$ para todo i, claramente la conclusión es la misma.
Ahora supongamos que la Proposición es válida para $s \geq 1$ y que $\operatorname{Supp}(M)\cap\Phi = \{\mathfrak{m}_1,\dots,\mathfrak{m}_s,\mathfrak{m}_{s+1}\} \subseteq \operatorname{Max}(A)$. Consideremos el sistema completo de ideales

$$\Psi := \langle \mathfrak{m}_1,\dots,\mathfrak{m}_s\rangle \cap \Phi.$$

Note que $\Psi\cap\langle\mathfrak{m}_{s+1}\rangle = \{A\}$, pues si $\mathfrak{a} \in \Psi\cap\langle\mathfrak{m}_{s+1}\rangle$, entonces $\mathfrak{a} \supseteq {\mathfrak{m}_{s+1}}^n$ y $\mathfrak{a} \supseteq {\mathfrak{m}_1}^{n_1}\cdots\mathfrak{m}_s^{n_s}$ para algunos enteros no negativos $n, n_1,\dots,n_s$. Por la comaximalidad de los ideales ${\mathfrak{m}_{s+1}}^n$ y ${\mathfrak{m}_1}^{n_1}\cdots\mathfrak{m}_s^{n_s}$, concluimos que $\mathfrak{a} = A$. También observe que $\mathfrak{m}_{s+1} \notin \langle\mathfrak{m}_1,\dots,\mathfrak{m}_s\rangle$. Por lo tanto,

$$\operatorname{Supp}(M)\cap\Psi = (\operatorname{Supp}(M)\cap\Phi)\cap\langle\mathfrak{m}_1,\dots,\mathfrak{m}_s\rangle = \{\mathfrak{m}_1,\dots,\mathfrak{m}_s,\mathfrak{m}_{s+1}\}\cap\langle\mathfrak{m}_1,\dots,\mathfrak{m}_s\rangle = \{\mathfrak{m}_1,\dots,\mathfrak{m}_s\}.$$

Por la hipótesis inductiva tenemos que $\mathrm{H}^i_\Psi(M) \cong \bigoplus_{j=1}^{s}\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}_j}(M)$. Ahora consideremos el sistema de ideales completo $\Phi' := \langle\Psi\cup\langle\mathfrak{m}_{s+1}\rangle\rangle$. Entonces

$$\{\mathfrak{m}_1,\dots,\mathfrak{m}_s,\mathfrak{m}_{s+1}\} = \operatorname{Supp}(M)\cap\Phi \supseteq \operatorname{Supp}(M)\cap\Phi' \supseteq \{\mathfrak{m}_1,\dots,\mathfrak{m}_s,\mathfrak{m}_{s+1}\}.$$

Luego, aplicando el Lema 11, tenemos que

$$\mathrm{H}^i_\Phi(M) = \mathrm{H}^i_{\langle\operatorname{Supp}(M)\cap\Phi\rangle}(M) = \mathrm{H}^i_{\langle\operatorname{Supp}(M)\cap\Phi\rangle}(M) = \mathrm{H}^i_\Phi(M)$$

para todo i. Finalmente, aplicando la sucesión (exacta) de Mayer-Vietoris a los sistemas Ψ y $\langle \mathfrak{m}_{s+1} \rangle$ (ver Proposición 6),

$$0 \longrightarrow \underbrace{\Gamma_A(M)}_{0} \longrightarrow \Gamma_\Psi(M) \oplus \Gamma_{\mathfrak{m}_{s+1}}(M) \longrightarrow \Gamma_\Phi(M) \longrightarrow \underbrace{\mathrm{H}^1_A(M)}_{0}$$

$$\longrightarrow \mathrm{H}^1_\Psi(M) \oplus \mathrm{H}^1_{\mathfrak{m}_{s+1}}(M) \longrightarrow \mathrm{H}^1_\Phi(M) \longrightarrow \underbrace{\mathrm{H}^2_A(M)}_{0} \longrightarrow \cdots$$

obtenemos que

$$\mathrm{H}^i_\Phi(M) \cong \mathrm{H}^1_\Psi(M) \oplus \mathrm{H}^1_{\mathfrak{m}_{s+1}}(M) \cong \bigoplus_{j=1}^{s} \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}_j}(M) \oplus \mathrm{H}^1_{\mathfrak{m}_{s+1}}(M) \cong \bigoplus_{j=1}^{s+1} \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}_j}(M)$$

para todo i. Ésto demuestra el resultado. ■

Lema 12. *Sea M un A-módulo finitamente generado. Entonces $\mathrm{H}^i_\mathfrak{m}(M)$ es Artiniano para todo i.*

Prueba. Tenemos que $(\mathrm{H}^i_\mathfrak{m}(M))_\mathfrak{m} \cong \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}A_\mathfrak{m}}(M_\mathfrak{m})$ es un $A_\mathfrak{m}$-módulo Artiniano. También $(\mathrm{H}^i_\mathfrak{m}(M))_\mathfrak{n} \cong \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}A_\mathfrak{n}}(M_\mathfrak{n}) = 0$ cuando $\mathfrak{n}$ es un ideal maximal diferente de $\mathfrak{m}$. Por lo tanto, $\mathrm{H}^i_\mathfrak{m}(M)$ es Artiniano. ■

Proposición 18. *Sea M un A-módulo finitamente generado tal que* $\mathrm{Supp}(M) \cap \mathcal{M}$ *es un subconjunto finito de* $\mathrm{Max}(A)$. *Entonces $\mathrm{H}^i_\mathcal{M}(M)$ es Artiniano para todo i.*

Prueba. Digamos que $\mathrm{Supp}(M) \cap \mathcal{M} = \{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_s\} \subseteq \mathrm{Max}(A)$, entonces por la Proposición 17 tenemos que $\mathrm{H}^i_\mathcal{M}(M) \cong \bigoplus_{j=1}^{s} \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}_j}(M)$. El Lema 12 garantiza que $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}_j}(M)$ es un A-módulo Artiniano para todo $j = 1, \ldots, s$. Por lo tanto, para cada entero no negativo i, el A-módulo $\mathrm{H}^i_\mathcal{M}(M)$ también es Artiniano. ■

Teorema 9. *Supongamos que M es un A-módulo reflexivo, entonces $\mathrm{H}^i_\mathcal{M}(M)$ es Artiniano para todo $i \geq 0$.*

Prueba. Por [5, Theorem 12], existe una sucesión exacta de A-módulos

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0\,, \tag{2.2}$$

donde L es finitamente generado y N es Artiniano. Como la clase de los A-módulos reflexivos es una categoría de Serre (Proposición 7), L es reflexivo. Luego, como consecuencia de la Proposición 11 y la Proposición 18 obtenemos que $\mathrm{H}^i_\mathcal{M}(L)$ es un A-módulo Artiniano para todo i.

Consideremos ahora la sucesión exacta larga inducida por la sucesión corta (2.2),

$$0 \longrightarrow \Gamma_{\mathcal{M}}(L) \longrightarrow \Gamma_{\mathcal{M}}(M) \longrightarrow \Gamma_{\mathcal{M}}(N) \xrightarrow{\delta^0_{\mathcal{M}}} \mathrm{H}^1_{\mathcal{M}}(L) \longrightarrow \mathrm{H}^1_{\mathcal{M}}(M) \longrightarrow \underbrace{\mathrm{H}^1_{\mathcal{M}}(N)}_{0} \xrightarrow{\delta^1_{\mathcal{M}}} \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \underbrace{\mathrm{H}^{i-1}_{\mathcal{M}}(N)}_{0} \xrightarrow{\delta^{i-1}_{\mathcal{M}}} \mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(L) \longrightarrow \mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(M) \longrightarrow \underbrace{\mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(N)}_{0} \xrightarrow{\delta^i_{\mathcal{M}}} \mathrm{H}^{i+1}_{\mathcal{M}}(L) \longrightarrow \cdots$$

El hecho de N ser Artiniano implica que $\mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(N) = 0$ para todo $i \geq 1$, pues $\dim(N) = 0$ (ver Corolario 3). Luego,

$$\mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(M) \cong \mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(L) \text{ para todo } i \geq 2.$$

Por lo tanto, $\mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(M)$ es Artiniano para todo $i \geq 2$. Por otro lado, el homomorfismo sobreyectivo $\mathrm{H}^1_{\mathcal{M}}(L) \longrightarrow \mathrm{H}^1_{\mathcal{M}}(M) \longrightarrow 0$ implica que $\mathrm{H}^1_{\mathcal{M}}(M)$ es un cociente del módulo Artiniano $\mathrm{H}^1_{\mathcal{M}}(L)$ y, por lo tanto, también es un módulo Artiniano. Finalmente, consideremos la parte inicial de la sucesión exacta larga

$$0 \longrightarrow \Gamma_{\mathcal{M}}(L) \xrightarrow{f} \Gamma_{\mathcal{M}}(M) \xrightarrow{g} \Gamma_{\mathcal{M}}(N).$$

Note que $\Gamma_{\mathcal{M}}(M)/\ker(g)$ es un módulo Artiniano, pues $\Gamma_{\mathcal{M}}(M)/\ker(g) \cong \mathrm{Im}(g)$ y $\mathrm{Im}(g)$ es un submódulo del módulo Artiniano $\Gamma_{\mathcal{M}}(L)$. Desde que $\Gamma_{\mathcal{M}}(L)$ es Artiniano, concluimos que $\Gamma_{\mathcal{M}}(M)$ es Artiniano, pues la clase de los A-módulos Artinianos es una categoría de Serre. ■

CAPÍTULO 3

Los funtores de cohomología $H^i_{\mathfrak{a},\varphi}(-)$

En este capítulo introducimos un tipo especial de funtores de cohomología local, que generalizan aquellos presentados por R. Takahashi, Y. Yoshino and T. Yoshisawa en [19], pero a diferencia de los mencionados autores, nuestra teoría es abordada usando el lenguaje presentado en el capítulo 1. En el Teorema 10 demostramos que "nuestros" módulos de cohomología local pueden ser calculados como módulos de cohomología de ciertos complejos de Čech generalizados. Nuestro resultado generaliza [19, Theorem 2.4]. En la sección 3.3, introducimos una *teoría de homología local* como una noción dual de la cohomología local definida en la sección 3.2 y demostramos, que si un módulo es Matlis reflexivo, en el sentido del capítulo 2, la homología local de tal módulo puede ser calculada en términos de un límite inverso de ciertos módulos Tor.

A lo largo de este capítulo, A denotará un anillo conmutativo Noetheriano, $\mathfrak{a}$ un ideal de A y φ un conjunto no vacío de ideales de A.

3.1. El funtor de torsión $\Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(-)$

Consideremos el siguiente conjunto de ideales de A.

$$\mathcal{G}(\mathfrak{a},\varphi) := \{\mathfrak{c} \trianglelefteq A : \ \mathfrak{b}+\mathfrak{c} \in \langle\ \mathfrak{a}\rangle \text{ para algún ideal } \mathfrak{b} \in \langle\varphi\rangle\}.$$

Explícitamente, un ideal $\mathfrak{c}$ de A es un elemento de $\mathcal{G}(\mathfrak{a},\varphi)$, si y solo si, existen un número natural $n \geq 1$ y un ideal $\mathfrak{b} \in \langle\varphi\rangle$ tal que $\mathfrak{b}+\mathfrak{c} \supseteq \mathfrak{a}^n$.

Lema 13. *El conjunto $\mathcal{G}(\mathfrak{a},\varphi)$ es un sistema completo de ideales de A.*

Prueba.

i) Sean $\mathfrak{c} \in \mathcal{G}(\mathfrak{a},\varphi)$ y $\mathfrak{d} \trianglelefteq A$ tal que $\mathfrak{d} \supseteq \mathfrak{c}$. Entonces tenemos las siguientes inclusiones: $\mathfrak{d}+\mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{c}+\mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{a}^n$ para algún $n \geq 1$ y algún $\mathfrak{b} \in \langle\varphi\rangle$. Por lo tanto, $\mathfrak{d} \in \mathcal{G}(\mathfrak{a},\varphi)$.

ii) Supongamos que $\mathfrak{c},\mathfrak{d} \in \mathcal{G}(\mathfrak{a},\varphi)$, entonces podemos escoger números naturales m y n e ideales $\mathfrak{b},\mathfrak{b}' \in \langle\varphi\rangle$ tales que $\mathfrak{c}+\mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{a}^m$ y $\mathfrak{d}+\mathfrak{b}' \supseteq \mathfrak{a}^n$. Luego, $\mathfrak{c}\mathfrak{d}+\mathfrak{b}\mathfrak{b}' \supseteq (\mathfrak{c}+\mathfrak{b})(\mathfrak{d}+\mathfrak{b}') \supseteq \mathfrak{a}^{m+n}$. Por i) concluimos que $\mathfrak{c}\mathfrak{d} \in \mathcal{G}(\mathfrak{a},\varphi)$.

■

El lema anterior nos permite definir, usando el lenguaje presentado en el capítulo 1, el siguiente funtor.

Definición 3.1. El $(\mathfrak{a},\varphi)$-funtor de torsión $\Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(-) : \mathrm{Mod}_A \longrightarrow \mathrm{Mod}_A$ es definido por:

$$\Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(-) := \Gamma_{\mathcal{G}(\mathfrak{a},\varphi)}(-).$$

De manera más explícita, para cada A-módulo M sobre A,

$$\Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(M) = \{x \in M : \ \mathrm{Sup}(Ax) \subseteq \mathcal{G}(\mathfrak{a},\varphi)\}.$$

Como $\mathrm{Sup}(Ax) = \mathrm{V}(\mathrm{Ann}(x))$, el Lema 1 implica que un elemento x de M pertenece a $\Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(M)$ si, y solo sí, $\mathrm{Ann}(x) + \mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{a}^n$ para algún $n \geq 1$ y algún ideal $\mathfrak{b} \in \langle\varphi\rangle$.

A continuación tomemos un elemento $a \in A$ y consideremos el siguiente conjunto

$$S_{a,\varphi} = \{a^n + b : \ n \geq 0, b \in \mathfrak{b} \text{ para algún } \mathfrak{b} \in \langle\varphi\rangle\}.$$

Observamos que $S_{a,\varphi}$ es un subconjunto multiplicativo de A. En efecto, es claro que $1 \in S_{a,\varphi}$. Además, si $x, y \in S_{a,\varphi}$ podemos escribir $x = a^m + b$ e $y = a^n + c$ para algunos enteros no negativos m, n y algunos ideales $\mathfrak{b}, \mathfrak{c} \in \varphi$ con $b \in \mathfrak{b}$ y $c \in \mathfrak{c}$. Por lo tanto, $xy = a^{m+n} + d$, donde $d \in \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$. Desde que $\langle\varphi\rangle$ es un sistema completo de ideales, $\mathfrak{b} + \mathfrak{c} \in \langle\varphi\rangle$ y en consecuencia, $xy \in S_{a,\varphi}$.

Dado un A-módulo M, denotaremos por $M_{a,\varphi}$ el módulo de fracciones de M con respecto al conjunto multiplicativo $S_{a,\varphi}$, i.e., $M_{a,\varphi} = S_{a,\varphi}^{-1}M$.

Lema 14. *Son válidas las siguientes afirmaciones:*

i) $0 \in S_{a,\varphi}$ *si y solo si* $a \in \sqrt{\mathfrak{b}}$ *para algún ideal* $\mathfrak{b} \in \langle\varphi\rangle$.

ii) *Si* $\mathfrak{p} \in \mathcal{G}(\mathfrak{a},\varphi) \cap \mathrm{Spec}(A)$ *y* $a \in \mathfrak{a}$, *entonces* $\mathfrak{p} \cap S_{a,\varphi} \neq \emptyset$.

iii) *Si* $\mathfrak{a} = \langle a_1, ..., a_k\rangle$, *entonces la sucesión natural de* A*-módulos*

$$0 \longrightarrow \Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(M) \longrightarrow M \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{k} M_{a_i,\varphi} \tag{3.1}$$

es exacta.

Prueba. i) Supongamos que $0 \in S_{a,\varphi}$, entonces existen un entero no negativo n, un ideal $\mathfrak{b} \in \varphi$ y un elemento $b \in \mathfrak{b}$ tal que $0 = a^n + b$. Esto implica que $a^n \in \mathfrak{b}$ o equivalentemente, $a \in \sqrt{\mathfrak{b}}$. Recíprocamente, si $a \in \sqrt{\mathfrak{b}}$ para algún ideal $\mathfrak{b} \in \varphi$, entonces $b := -a^n \in \mathfrak{b}$. Luego podemos escribir $0 = a^n + b$, lo que muestra que $0 \in S_{a,\varphi}$.

ii) Supongamos que existe un ideal primo $\mathfrak{p}$ tal que $\mathfrak{p} \in \mathcal{G}(\mathfrak{a},\varphi)$, entonces $\mathfrak{p} + \mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{a}^n$ para algún número natural $n \geq 1$ y algún ideal $\mathfrak{b} \in \varphi$. Si además suponemos que $a \in \mathfrak{a}$, es posible escribir $a^n = x + b$ con $x \in \mathfrak{p}$ y $b \in \mathfrak{b}$. Luego, $x = a^n + (-b) \in S_{\mathfrak{a},\varphi} \cap \mathfrak{p}$.

iii) El primer homomorfismo A-lineal en la sucesión (3.1) es la inclusión natural ι, que obviamente es inyectivo. El segundo homomorfismo, que denotaremos por π es dado por $\pi(x) = (\frac{x}{1}, \ldots, \frac{x}{1}) \in \bigoplus_{i=1}^{k} M_{a_i,\varphi}$ para todo $x \in M$. Debemos probar que $\ker(\pi) = \operatorname{im}(\iota)$. En efecto, si $x \in \Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(M)$, entonces existe un número natural $n \geq 1$ y un ideal $\mathfrak{b} \in \varphi$ de manera que $\operatorname{Ann}(x) + \mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{a}^n$. Luego, para cada $i = 1, \ldots, k$ podemos escribir $a_i^n = r_i + b_i$ con $r_i \in \operatorname{Ann}(x)$ y $b_i \in \mathfrak{b}$. Por lo tanto, $a_i^n x = b_i x$, o equivalentemente, $(a_i^n + (-b_i))x = 0$. Desde que $a_i^n + (-b_i) \in S_{a_i,\varphi}$, la última relación muestra que $\pi(x) = 0$. Recíprocamente, supongamos que $x \in \ker(\pi)$. Entonces para cada $i = 1, \ldots, k$ existe un entero no negativo n_i, un ideal $\mathfrak{b}_i \in \varphi$ y un elemento $b_i \in \mathfrak{b}_i$ tal que $(a_i^{n_i} + b_i)x = 0$. De esa forma, $r_i := a_i^{n_i} + b_i \in \operatorname{Ann}(x)$. Por lo tanto, si $n := n_1 + \cdots + n_k$ y $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1 + \cdots + \mathfrak{b}_k \in \varphi$, las relaciones anteriores implican que $\mathfrak{a}^n \subseteq \operatorname{Ann}(x) + \mathfrak{b}$. En consecuencia, $x \in \Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}$.

■

3.2. Los funtores de cohomología $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a},\varphi}(-)$

Comenzamos esta sección presentando una de las principales nociones de nuestro trabajo.

Definición 3.2. Para cada entero no negativo $i \geq 0$, el *i-ésimo funtor de cohomología local con respecto al par* $(\mathfrak{a}, \varphi)$, denotado por $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a},\varphi}(-)$, es definido como i-ésimo funtor derivado a la derecha del $(\mathfrak{a}, \varphi)$- funtor de torsión $\Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(-)$, i.e.,

$$\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a},\varphi}(-) := \mathscr{R}^i \Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(-).$$

Por lo visto en el capítulo 1, las siguientes propiedades caracterizan a los funtores $\left\{H^i_{\mathfrak{a},\varphi}(-)\right\}_{i\geq 0}$.

i) Los funtores $\mathrm{H}^0_{\mathfrak{a},\varphi}(-)$ y $\Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(-)$ son isomorfos naturalmente.

ii) $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a},\varphi}(E) = 0$ para todo módulo inyectivo E y para todo entero positivo $i > 0$.

iii) Toda sucesión exacta corta de módulos

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

induce una sucesión exacta larga natural

$$0 \longrightarrow \Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(L) \longrightarrow \Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(M) \longrightarrow \Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(N) \xrightarrow{\partial} \mathrm{H}^1_{\mathfrak{a},\varphi}(L) \longrightarrow \mathrm{H}^1_{\mathfrak{a},\varphi}(M) \longrightarrow \cdots$$

Proposición 19. *Sea M un A-módulo. Si $a \in \mathfrak{a}$, entonces*

$$\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a},\varphi}(M_{a,\varphi}) = 0 \;\; \textit{para todo} \;\; i \geq 0.$$

Prueba. Sea $I^\bullet$ una resolución inyectiva de M, entonces $(I^\bullet)_{a,\varphi}$ es una resolución inyectiva de $M_{a,\varphi}$. Luego, $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a},\varphi}(M_{a,\varphi}) = \mathrm{H}^i(\Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}((I^\bullet)_{a,\varphi}))$. Ahora escriba cada I^i como suma directa de módulos inyectivos irreducibles, $I^i = \bigoplus_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(A)} E_A(A/\mathfrak{p})^{\mu_i(\mathfrak{p},M)}$.

Entonces

$$(I^i)_{a,\varphi} \cong \bigoplus_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(A)} E_A(A/\mathfrak{p})^{\mu_i(\mathfrak{p},M)}_{a,\varphi} \cong \bigoplus_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(A)} E_{A_{a,\varphi}}(A_{a,\varphi}/\mathfrak{p}A_{a,\varphi})^{\mu_i(\mathfrak{p},M)}.$$

Por lo tanto, gracias a la parte ii) del Lema 14, obtenemos

$$\Gamma_{a,\varphi}(I^i)_{a,\varphi} \cong \bigoplus_{\mathfrak{p}\in\mathcal{G}(\mathfrak{a},\varphi)} \Gamma_{a,\varphi}(E_{A_{a,\varphi}}(A_{a,\varphi}/\mathfrak{p}A_{a,\varphi})^{\mu_i(\mathfrak{p},M)}) = 0.$$

En consecuencia, $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a},\varphi}(M_{a,\varphi}) = 0$ para todo entero no negativo i. ∎

Necesitaremos del siguiente resultado sobre localizaciones.

Lema 15. *Sean S y T dos subconjuntos multiplicativos de A, entonces existe un isomorfismo de A-álgebras*

$$A_S \otimes_A A_T \cong (A_S)_{\overline{T}},$$

donde $\overline{T} := \iota(T)$ es la imagen de T vía el homomorfismo de localización $\iota : A \longrightarrow A_S$.

Prueba. Consideremos el homomorfismo de A-álgebras $\sigma : A \longrightarrow A_S \otimes_A A_T$ definido por $\sigma(a) = \iota(a) \otimes 1$. Notemos que si $a \in S$, entonces $\sigma(a)$ es una unidad de $A_S \otimes_A A_T$. Luego, por la propiedad universal de A_S, existe un único homomorfismo de A-álgebras $\alpha : A_S \longrightarrow A_S \otimes_A A_T$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\sigma"'] & & A_S \arrow[dl, "\alpha"] \\ & A_S \otimes_A A_T. & \end{tikzcd}$$

Observemos que para cualquier elemento $t \in T$, $\alpha(\iota(t)) = \sigma(t) = t\sigma(1) = 1 \otimes \frac{t}{1}$ es una unidad de $A_S \otimes_A A_T$. Denotemos por $j : A_S \longrightarrow (A_S)_{\overline{T}}$ el homomorfismo de localización. La propiedad universal de $(A_S)_{\overline{T}}$ garantiza la existencia de un único homomorfismo de A-álgebras $\beta : (A_S)_{\overline{T}} \longrightarrow A_S \otimes_A A_T$ tal que el diagrama que sigue es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} A_S \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & (A_S)_{\overline{T}} \arrow[dl, "\beta"] \\ & A_S \otimes_A A_T. & \end{tikzcd}$$

Sea $k : A \longrightarrow A_T$ el homomorfismo de localización. Desde que la composición $j \circ \iota : A \longrightarrow (A_S)_{\overline{T}}$ lleva elementos de T en unidades de $(A_S)_{\overline{T}}$, la propiedad universal de

A_T implica que existe un único homomorfismo de A-álgebras $\varphi : A_T \longrightarrow (A_S)_{\overline{T}}$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "j\circ\iota"'] & & A_T \arrow[dl, "\varphi"] \\ & (A_S)_{\overline{T}}. & \end{tikzcd}$$

Consideremos ahora la aplicación A-bilineal $\gamma : A_S \times A_T \longrightarrow (A_S)_{\overline{T}}$ definida por $\gamma(x,y) = j(x)\varphi(y)$. Entonces, por la propiedad universal del producto tensorial $A_S \otimes_A A_T$, existe un único homomorfismo A-lineal $\theta : A_S \otimes_A A_T \longrightarrow (A_S)_{\overline{T}}$ de manera tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} A_S \times A_T \arrow[rr, "\otimes"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & A_S \otimes_A A_T \arrow[dl, "\theta"] \\ & (A_S)_{\overline{T}}. & \end{tikzcd}$$

No es difícil verificar que $\beta \circ \theta = \mathrm{id}$ y $\theta \circ \beta = \mathrm{id}$. Esto concluye la demostración. ∎

Definición 3.3. Para un elemento a de A y un conjunto no vacío de ideales φ de A, definimos el complejo $\mathcal{C}^\bullet_{a,\varphi}$ por

$$\mathcal{C}^\bullet_{a,\varphi} : \qquad 0 \longrightarrow \underbrace{A}_{0} \xrightarrow{\iota} \underbrace{A_{a,\varphi}}_{1} \longrightarrow 0,$$

donde A está colocado en la posición 0, $A_{a,\varphi}$ en la posición 1, y ι es la aplicación de localización.

Observemos que para un módulo M sobre A,

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^0(\mathcal{C}^\bullet_{a,\varphi} \otimes_A M) &= \ker(\iota \otimes M) \\ &= \left\{x \in M : \ rx = 0 \text{ para algún } r \in S_{a,\varphi}\right\} \\ &= \{x \in M : \ (a^n + b)x = 0 \text{ para algunos } n \geq 1, \mathfrak{b} \in \langle\varphi\rangle \text{ con } b \in \mathfrak{b}\} \\ &= \{x \in M : \ a^n \in \mathrm{Ann}(x) + \mathfrak{b} \text{ para algunos } n \geq 1, \mathfrak{b} \in \langle\varphi\rangle\} \\ &= \Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(M), \end{aligned}$$

donde $\mathfrak{a}$ es el ideal principal generado por a.

Ahora podemos definir el *complejo generalizado de Čech* de la siguiente manera:

Definición 3.4. Para una sucesión finita $\bar{a} = a_1, \ldots, a_n$ de elementos de A y un conjunto no vacío φ de ideales de A, el complejo de A-módulos $\mathcal{C}^\bullet{}_{\bar{a},\varphi}$ es definido por

$$\mathcal{C}^\bullet{}_{\bar{a},\varphi} := \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{C}^\bullet_{a_i,\varphi}.$$

Por ejemplo, como consecuencia del Lema 15, para $n = 2$ tenemos el siguiente complejo

$$\mathcal{C}^{\bullet}{}_{(a_1,a_2),\varphi}: \qquad 0 \longrightarrow A \longrightarrow A_{a_1,\varphi} \oplus A_{a_2,\varphi} \longrightarrow (A_{a_1,\varphi})_{a_2,\varphi} \longrightarrow 0$$

De manera más general,

$$\mathcal{C}^{\bullet}{}_{\bar{a},\varphi}: \qquad 0 \longrightarrow A \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} A_{a_i,\varphi} \longrightarrow \bigoplus_{i<j} (A_{a_i,\varphi})_{a_j,\varphi} \longrightarrow \cdots \longrightarrow (\cdots A_{a_1,\varphi} \cdots)_{a_n,\varphi} \longrightarrow 0$$

En el próximo lema usaremos la siguiente notación: Dada una sucesión $\bar{a} = a_1, \ldots, a_n$ de elementos de A y un elemento $b \in A$, denotaremos por $\bar{a} \cup b$ la sucesión $a_1, \ldots, a_n, b$.

Lema 16. *Sean φ un conjunto no vacío de ideales de A y M un A-módulo. Existe una sucesión exacta corta de complejos de A-módulos.*

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}^{\bullet}{}_{\bar{a},\varphi}[-1] \otimes M_b \longrightarrow \mathcal{C}^{\bullet}{}_{\bar{a}\cup b,\varphi} \otimes M \longrightarrow \mathcal{C}^{\bullet}{}_{\bar{a},\varphi} \otimes M \longrightarrow 0$$

Prueba. Sigue directamente de la definición. ■

El siguiente resultado permite calcular los módulos de cohomología local soportados en el sistema de ideales $\mathcal{G}(\mathfrak{a}, \varphi)$ en términos de los módulos de cohomología del complejo generalizado de Čech.

Teorema 10. *Sea $\bar{a} = a_1, \ldots, a_n$ una sucesión finita de elementos de A y φ un conjunto no vacío de ideales de A. Para todo $i \geq 0$ existe un isomorfismo natural de funtores*

$$\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a},\varphi}(-) \cong \mathrm{H}^i(\mathcal{C}^{\bullet}{}_{\bar{a},\varphi} \otimes_A -),$$

donde $\mathfrak{a} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ es el ideal generado por la sucesión $\bar{a}$.

Prueba. La parte iii) del Lema 14 garantiza la existencia de un isomorfismo natural de funtores

$$\mathrm{H}^0(\mathcal{C}^{\bullet}{}_{\bar{a},\varphi} \otimes_A -) \cong \Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(-).$$

Como la sucesión $\left\{\mathrm{H}^i(\mathcal{C}^{\bullet}{}_{\bar{a},\varphi} \otimes_A -)\right\}_{i\geq 0}$ es un δ-funtor cohomológico, para demostrar el Teorema es suficiente mostrar que $\mathrm{H}^i(\mathcal{C}^{\bullet}{}_{\bar{a},\varphi} \otimes_A I) = 0$ para todo A-módulo inyectivo I y para todo $i \geq 1$. A partir de la descomposición $I \cong \bigoplus_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(A)} E_A(A/\mathfrak{p})$ y del hecho que cada funtor $\mathrm{H}^i(\mathcal{C}^{\bullet}{}_{\bar{a},\varphi} \otimes_A -)$ preserva sumas directas, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $I = E_A(A/\mathfrak{p})$ para algún ideal primo $\mathfrak{p}$. Procederemos por inducción sobre n, el número de elementos de la sucesión $\bar{a}$.

Si $n = 1$, entonces el complejo de A-módulos $\mathcal{C}^{\bullet}_{a_1,\varphi} \otimes_A E_A(A/\mathfrak{p})$ es dado por

$$0 \longrightarrow E_A(A/\mathfrak{p}) \xrightarrow{\iota} E_A(A/\mathfrak{p})_{a_1,\varphi} \longrightarrow 0,$$

Tenemos las siguientes posibilidades: si $\mathfrak{p} \in \mathcal{G}(\langle a_1 \rangle, \varphi)$, entonces por la parte ii) del Lema 14, $\mathfrak{p} \cap S_{a,\varphi} \neq \emptyset$. Por lo tanto, $E_A(A/\mathfrak{p})_{a_1,\varphi} = 0$ (ver [6, Proposition 10.1.14 (i)]. Por

otro lado, si $\mathfrak{p} \notin \mathcal{G}(\langle a_1 \rangle, \varphi)$, entonces $\mathfrak{p} \cap S_{a_1,\varphi} = \emptyset$. Caso contrario, existe un elemento $c \in \mathfrak{p} \cap S_{a_1,\varphi}$. Por lo tanto podemos escribir $c = a_1^n + b$, para algún $\mathfrak{b} \in \langle \varphi \rangle$ con $b \in \mathfrak{b}$. Así, $a_1^n = (-b) + c \in \mathfrak{b} + \mathfrak{p}$. Luego $\mathfrak{p} \in \mathcal{G}(\langle a_1 \rangle, \varphi)$, lo que contradice nuestra suposición. Como consecuencia de [6, Proposition 10.1.14 (i)], $E_A(A/\mathfrak{p}) \cong E_A(A/\mathfrak{p})_{a_1,\varphi}$ como A-módulos. En cualquiera de los casos, obtenemos que $\mathrm{H}^1(\mathcal{C}^\bullet_{a_1,\varphi} \otimes_A E_A(A/\mathfrak{p})) = 0$.
Ahora supongamos que $n \geq 1$ y que el resultado vale para valores menores o iguales que n. Sea $a_1, ..., a_n, a_{n+1}$ una sucesión finita de elementos de A. Denote por $\bar{a}$ la sucesión $a_1, ..., a_n$. Por el Lema 16 existe una sucesión exacta corta de complejos de A-módulos

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}^\bullet{}_{\bar{a},\varphi}[-1] \otimes E_A(A/\mathfrak{p})_{a_{n+1}} \longrightarrow \mathcal{C}^\bullet{}_{\bar{a}\cup a_{n+1},\varphi} \otimes E_A(A/\mathfrak{p}) \longrightarrow \mathcal{C}^\bullet{}_{\bar{a},\varphi} \otimes E_A(A/\mathfrak{p}) \longrightarrow 0.$$

Tal sucesión induce una sucesión exacta larga de A-módulos de cohomología

$$\begin{aligned}
0 &\to \mathrm{H}^0(\mathcal{C}^\bullet{}_{\bar{a},\varphi}[-1] \otimes E_A(A/\mathfrak{p})_{a_{n+1}}) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{C}^\bullet{}_{\bar{a}\cup a_{n+1},\varphi} \otimes E_A(A/\mathfrak{p})) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{C}^\bullet{}_{\bar{a},\varphi} \otimes E_A(A/\mathfrak{p})) \\
&\xrightarrow{\delta^0} \mathrm{H}^1(\mathcal{C}^\bullet{}_{\bar{a},\varphi}[-1] \otimes E_A(A/\mathfrak{p})_{a_{n+1}}) \to \mathrm{H}^1(\mathcal{C}^\bullet{}_{\bar{a}\cup a_{n+1},\varphi} \otimes E_A(A/\mathfrak{p})) \to \underbrace{\mathrm{H}^1(\mathcal{C}^\bullet{}_{\bar{a},\varphi} \otimes E_A(A/\mathfrak{p}))}_{0} \\
&\xrightarrow{\delta^1} \underbrace{\mathrm{H}^2(\mathcal{C}^\bullet{}_{\bar{a},\varphi}[-1] \otimes E_A(A/\mathfrak{p})_{a_{n+1}})}_{0} \to \mathrm{H}^2(\mathcal{C}^\bullet{}_{\bar{a}\cup a_{n+1},\varphi} \otimes E_A(A/\mathfrak{p})) \to \underbrace{\mathrm{H}^2(\mathcal{C}^\bullet{}_{\bar{a},\varphi} \otimes E_A(A/\mathfrak{p}))}_{0} \to \cdots
\end{aligned}$$

Desde que $E_A(A/\mathfrak{p})_{a_{n+1}}$ es un módulo inyectivo, deducimos a partir de la hipótesis inductiva que

$$\mathrm{H}^i(\mathcal{C}^\bullet{}_{\bar{a},\varphi}[-1] \otimes E_A(A/\mathfrak{p})_{a_{n+1}}) = 0 \ \text{ para todo } i \geq 2$$

y

$$\mathrm{H}^i(\mathcal{C}^\bullet{}_{\bar{a},\varphi} \otimes E_A(A/\mathfrak{p})) = 0 \ \text{ para todo } i \geq 1.$$

Ésto implica que

$$\mathrm{H}^i(\mathcal{C}^\bullet{}_{\bar{a}\cup a_{n+1},\varphi} \otimes E_A(A/\mathfrak{p})) = 0 \ \text{ para todo } i \geq 2.$$

Finalmente, como

$$\mathrm{H}^0(\mathcal{C}^\bullet{}_{\bar{a},\varphi} \otimes E_A(A/\mathfrak{p})) \cong \Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(E_A(A/\mathfrak{p}))$$

y

$$\mathrm{H}^1(\mathcal{C}^\bullet{}_{\bar{a},\varphi}[-1] \otimes E_A(A/\mathfrak{p})_{a_{n+1}}) = \mathrm{H}^0(\mathcal{C}^\bullet{}_{\bar{a},\varphi} \otimes E_A(A/\mathfrak{p})_{a_{n+1}}) \cong \Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(E_A(A/\mathfrak{p})_{a_{n+1}}),$$

vemos que $\delta^0 = \Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(f)$, donde $f : E_A(A/\mathfrak{p}) \longrightarrow E_A(A/\mathfrak{p})_{a_{n+1}}$ es el mapa de localización. Consideremos ahora el conjunto multiplicativo $T := \left\{1, a_{n+1}, a_{n+1}^2, ...\right\}$. Tenemos dos posibilidades: Si $\mathfrak{p} \cap T \neq \emptyset$, entonces por [6, Proposition 10.1.14 (i)], $E_A(A/\mathfrak{p})_{a_{n+1}} = 0$. Por otro lado, si $\mathfrak{p} \cap T = \emptyset$, entonces por [6, Proposition 10.1.14 (i)], $E_A(A/\mathfrak{p})_{a_{n+1}} \cong E_A(A/\mathfrak{p})$ como A-módulos. En cualquier caso, la sucesión exacta larga permite concluir que

$$\mathrm{H}^1(\mathcal{C}^\bullet{}_{\bar{a}\cup a_{n+1},\varphi} \otimes E_A(A/\mathfrak{p})) = 0.$$

Ésto completa el proceso inductivo, y por lo tanto, la demostración del Teorema. ■

Observación. Para completar el paso inductivo, también podemos proceder de la siguiente manera: Desde que $\mathcal{C}^\bullet{}_{\bar{a}\cup a_{n+1}} = \mathcal{C}^\bullet{}_{a_{n+1}} \otimes \mathcal{C}^\bullet{}_{\bar{a}}$, existe una sucesión espectral

$$\mathrm{E}_2^{p,q} = \mathrm{H}^p(\mathcal{C}^\bullet{}_{a_{n+1}} \otimes \mathrm{H}^q(\mathcal{C}^\bullet{}_{\bar{a}} \otimes E_A(A/\mathfrak{p}))) \Rightarrow \mathrm{H}^{p+q}(\mathcal{C}^\bullet{}_{\bar{a}\cup a_{n+1}} \otimes E_A(A/\mathfrak{p})).$$

En vista que $\mathrm{H}^q(\mathcal{C}^\bullet{}_{\bar{a}} \otimes E_A(A/\mathfrak{p})) = 0$ para todo $q \geq 1$ por causa de la hipótesis inductiva, la sucesión espectral degenera. Por lo tanto tenemos los siguientes isomorfismos

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}^i(\mathcal{C}^\bullet{}_{\bar{a}\cup a_{n+1}} \otimes E_A(A/\mathfrak{p})) &\cong \mathrm{H}^i(\mathcal{C}^\bullet{}_{a_{n+1}} \otimes \mathrm{H}^0(\mathcal{C}^\bullet{}_{\bar{a}} \otimes E_A(A/\mathfrak{p}))) \\
&\cong \mathrm{H}^i(\mathcal{C}^\bullet{}_{a_{n+1}} \otimes \Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(E_A(A/\mathfrak{p}))) \\
&= \mathrm{H}^i(\ 0 \longrightarrow \Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(E_A(A/\mathfrak{p}) \longrightarrow \Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(E_A(A/\mathfrak{p})_{a_{n+1}} \longrightarrow 0\ ).
\end{aligned}$$

Ésto implica que

$$\mathrm{H}^i(\mathcal{C}^\bullet{}_{\bar{a}\cup a_{n+1},\varphi} \otimes E_A(A/\mathfrak{p})) = 0 \ \text{ para todo } i \geq 2.$$

Finalmente, si $\mathfrak{p} \notin \mathcal{G}(\mathfrak{a},\varphi)$ entonces $\Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(E_A(A/\mathfrak{p}) = 0$. Por otro lado, si $\mathfrak{p} \in \mathcal{G}(\mathfrak{a},\varphi)$, entonces $\Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(E_A(A/\mathfrak{p})) = E_A(A/\mathfrak{p})$. Luego podemos usar el mismo argumento que en la parte final de la demostración del Teorema para concluir que

$$\mathrm{H}^1(\mathcal{C}^\bullet{}_{\bar{a}\cup a_{n+1},\varphi} \otimes E_A(A/\mathfrak{p})) = 0.$$

3.3. Homología local

La homología local con respecto a un ideal es estudiada con profundidad en [9]. En esta sección introducimos una definición de homología local como una noción dual de la cohomología local estudiada en la sección 3.2. Dada una sucesión finita $\bar{a} = a_1, \ldots, a_n$ de elementos de A, un conjunto no vacío φ de ideales de A y un A-módulo M, definimos el *co-complejo de Cech generalizado de* M como el complejo de A-módulos $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}^\bullet_{\bar{a},\varphi}, M)$.

Definición 3.5. Para cada $i \geq 0$ definimos el *i-ésimo funtor de homología local con respecto al par* $(\mathfrak{a},\varphi)$ por

$$\mathrm{H}_i^{\mathfrak{a},\varphi}(-) := \mathrm{H}_i(\mathrm{Hom}(\mathcal{C}^\bullet_{\bar{a},\varphi}, -))$$

De esa forma, para cada A-módulo M,

$$\mathrm{H}_i^{\mathfrak{a},\varphi}(M) := \mathrm{H}_i(\mathrm{Hom}(\mathcal{C}^\bullet_{\bar{a},\varphi}, M)).$$

Por ejemplo, cuando $n = 1$ y $n = 2$, la homología local con respecto al par $(\mathfrak{a},\varphi)$ puede ser calculada como la homología de los siguientes complejos, respectivamente.

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A_{a_1,\varphi}, M) \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A((A_{a_1,\varphi})_{a_2,\varphi}, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A_{a_1,\varphi}, M) \oplus \mathrm{Hom}_A(A_{a_2,\varphi}, M) \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Lema 17. *Sean E y N dos módulos sobre A tales que E es inyectivo y N es finitamente generado. Para cada $i \geq 0$ existe un isomorfismo natural*

$$\mathrm{Tor}_i^A(N, D_E(-)) \cong D_E(\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{N}, -)).$$

Prueba. Sea $\mathcal{P}_\bullet$ una resolución libre de N tal que cada término de $\mathcal{P}_\bullet$ es de rango finito. Luego,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tor}_i^A(N, D_E(-)) &= \mathrm{Tor}_i^A(N, \mathrm{Hom}_A(-, E)) \\
&= \mathrm{H}_i(\mathcal{P}_\bullet \otimes \mathrm{Hom}_A(-, E)) \\
&\cong \mathrm{H}_i(\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(\mathcal{P}_\bullet, -), E)) \\
&\cong \mathrm{Hom}_A(H^i(\mathrm{Hom}(\mathcal{P}_\bullet, -)), E) \\
&= \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{A}}(N, -), E) \\
&= D_E(\mathrm{Ext}^i_A(N, -)).
\end{aligned}$$

■

Teorema 11. *Sean E un A-módulo inyectivo y M un A-módulo E-Matlis reflexivo, entonces para cada $i \geq 0$, existe un isomorfismo natural*

$$\mathrm{H}_i^{\mathfrak{a},\varphi}(M) \cong \varprojlim_{\mathfrak{b} \in \mathcal{G}(\mathfrak{a},\varphi)} \mathrm{Tor}_i^A(A/\mathfrak{b}, M).$$

Prueba. Por la definición de módulo E-Matlis reflexivo, $D_E D_E(M) \cong M$. Aplicando el Lema 17, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}_i^{\mathfrak{a},\varphi}(M) &= \mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}_A(\mathcal{C}_{\bar{a},\varphi}, M) \\
&\cong \mathrm{H}_i(\mathrm{Hom}_A(\mathcal{C}_{\bar{a},\varphi}, D_E D_E M) \\
&\cong \mathrm{H}_i(\mathrm{Hom}_A(\mathcal{C}_{\bar{a},\varphi} \otimes_A D_E M, E)) \\
&\cong D_E(\mathrm{H}^i(\mathcal{C}_{\bar{a},\varphi} \otimes_A D_E M)) \\
&\cong D_E(\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a},\varphi}(D_E M)) \\
&\cong D_E(\varinjlim_{\mathfrak{b} \in \mathcal{G}(\mathfrak{a},\varphi)} \mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{b}, D_E M)) \\
&\cong \varprojlim_{\mathfrak{b} \in \mathcal{G}(\mathfrak{a},\varphi)} D_E(\mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{b}, D_E M)) \\
&\cong \varprojlim_{\mathfrak{b} \in \mathcal{G}(\mathfrak{a},\varphi)} \mathrm{Tor}_i^A(A/\mathfrak{b}, D_E D_E M) \\
&\cong \varprojlim_{\mathfrak{b} \in \mathcal{G}(\mathfrak{a},\varphi)} \mathrm{Tor}_i^A(A/\mathfrak{b}, M).
\end{aligned}$$

■

Ahora definimos el funtor $\Lambda^{\mathfrak{a},\varphi} : \mathrm{Mod}_A \longrightarrow \mathrm{Mod}_A$ por

$$\Lambda^{\mathfrak{a},\varphi}(-) := \varprojlim_{\mathfrak{b} \in \mathcal{G}(\mathfrak{a},\varphi)} (A/\mathfrak{b} \otimes_A -).$$

Corolario 12. *Sean E un A-módulo inyectivo y M un A-módulo E-Matlis reflexivo, entonces existe un isomorfismo natural*

$$\mathrm{H}_0^{\mathfrak{a},\varphi}(M) \cong \Lambda^{\mathfrak{a},\varphi}(M).$$

Prueba. Basta recordar que

$$\mathrm{Tor}_0^A(A/\mathfrak{b}, M) \cong A/\mathfrak{b} \otimes_A M \cong M/\mathfrak{b}M$$

y aplicar el Teorema 11. ■

Corolario 13. *Sean E un A-módulo inyectivo y M un A-módulo E-Matlis reflexivo, entonces*

$$\mathrm{H}_i^{\mathfrak{a},\varphi}(D_E M) \cong D_E(\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a},\varphi}(M)).$$

Prueba. Por la Proposición 10, $D_E M$ es un A-módulo E-Matlis reflexivo. Luego, por el Teorema 11, el Lema 17 y el Corolario 4, obtenemos lo siguiente.

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}_i^{\mathfrak{a},\varphi}(D_E M) &\cong \varprojlim_{\mathfrak{b}\in\mathcal{G}(\mathfrak{a},\varphi)} \mathrm{Tor}_i^A(A/\mathfrak{b}, D_E M)\\
&\cong \varprojlim_{\mathfrak{b}\in\mathcal{G}(\mathfrak{a},\varphi)} D_E(\mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{b}, M))\\
&\cong D_E(\varinjlim_{\mathfrak{b}\in\mathcal{G}(\mathfrak{a},\varphi)} \mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{b}, M))\\
&\cong D_E(\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a},\varphi}(M)).
\end{aligned}$$

■

Corolario 14. *Sea* $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ *una sucesión exacta corta de módulos Artinianos, entonces existe una sucesión exacta larga en los módulos de homología local con respecto al par* $(\mathfrak{a}, \varphi)$

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}_1^{\mathfrak{a},\varphi}(M) \longrightarrow \mathrm{H}_1^{\mathfrak{a},\varphi}(N) \longrightarrow \mathrm{H}_0^{\mathfrak{a},\varphi}(L) \longrightarrow \mathrm{H}_0^{\mathfrak{a},\varphi}(M) \longrightarrow \mathrm{H}_0^{\mathfrak{a},\varphi}(N) \longrightarrow 0.$$

Prueba. Para cada $\mathfrak{b} \in \mathcal{G}(\mathfrak{a}, \varphi)$, la sucesión exacta corta $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ induce una sucesión exacta larga

$$\begin{gathered}
\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^A(A/\mathfrak{b}, L) \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^A(A/\mathfrak{b}, M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^A(A/\mathfrak{b}, N) \longrightarrow \cdots\\
\cdots \to A/\mathfrak{b} \otimes L \longrightarrow A/\mathfrak{b} \otimes M \longrightarrow A/\mathfrak{b} \otimes N \longrightarrow 0.
\end{gathered}$$

Desde que L, M y N son A-módulos Artinianos, los módulos que aparecen en la sucesión exacta larga también son Artinianos. Por [12, Corollaire 7.2] el funtor límite inverso es exacto en la categoría de los A-módulos Artinianos. Por lo tanto, aplicando $\varprojlim_{\mathfrak{b}\in\mathcal{G}(\mathfrak{a},\varphi)} (-)$, obtenemos la sucesión exacta larga

$$\begin{gathered}
\cdots \longrightarrow \varprojlim_{\mathfrak{b}\in\mathcal{G}(\mathfrak{a},\varphi)} \mathrm{Tor}_i^A(A/\mathfrak{b}, L) \longrightarrow \varprojlim_{\mathfrak{b}\in\mathcal{G}(\mathfrak{a},\varphi)} \mathrm{Tor}_i^A(A/\mathfrak{b}, M) \longrightarrow \varprojlim_{\mathfrak{b}\in\mathcal{G}(\mathfrak{a},\varphi)} \mathrm{Tor}_i^A(A/\mathfrak{b}, N) \longrightarrow \cdots\\
\cdots \to \varprojlim_{\mathfrak{b}\in\mathcal{G}(\mathfrak{a},\varphi)} A/\mathfrak{b} \otimes L \longrightarrow \varprojlim_{\mathfrak{b}\in\mathcal{G}(\mathfrak{a},\varphi)} A/\mathfrak{b} \otimes M \longrightarrow \varprojlim_{\mathfrak{b}\in\mathcal{G}(\mathfrak{a},\varphi)} A/\mathfrak{b} \otimes N \longrightarrow 0.
\end{gathered}$$

Finalmente, como módulos Artinianos son Matlis reflexivos, el Teorema 11 demuestra que la última sucesión es precisamente la sucesión exacta larga deseada. ■

CAPÍTULO 4

Cohomología formal generalizada y los funtores $\mathscr{F}_{\Phi}^{i}(-)$

Supongamos que $(A, \mathfrak{m})$ es un anillo local (Noetheriano). Dado un ideal $\mathfrak{a}$ de A y un A-módulo finitamente generado M, Peter Schenzel estudia, de manera sistemática, en [17] los *módulos de cohomología formal* $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M/\mathfrak{a}^n M)$. En el caso no local, proponemos estudiar los *módulos de cohomología formal generalizados* $\mathscr{F}_{\Phi}^{i}(M) := \varprojlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} \mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(M/\mathfrak{a}M)$, donde Φ es un sistema completo de ideales de A y $\mathcal{M}$ es el sistema generado por los ideales maximales de A. Las propiedades de estos módulos son descritas en este capítulo. En particular, demostramos que si M es un A-módulos Matlis reflexivo de dimensión d, entonces $\mathscr{F}_{\Phi}^{i}(M)$ es Artiniano (ver el Teorema 19). En la sección 4.3 introducimos los *módulos de homología formal generalizados* $\mathscr{F}_{i}^{\Phi}(M) := \varinjlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} \mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(M/\mathfrak{a}M)$, y probamos un resultado de dualidad entre los funtores $\mathscr{F}_{\Phi}^{i}(-)$ y $\mathscr{F}_{i}^{\Phi}(-)$ (ver el Teorema 20).

4.1. Cohomología formal generalizada

Sean $\underline{a} = a_1, \ldots, a_n$ una sucesión finita de elementos de A, φ un conjunto no vacío de ideales de A y Φ un sistema completo de ideales de A. Denote por $\mathfrak{a} = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ el ideal generado por $a_1, \ldots, a_n$. Como antes, equipamos Φ con el orden parcial $\preceq$ definido por la inclusión inversa:

$$\mathfrak{a} \preceq \mathfrak{b}, \quad \text{si} \quad \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}.$$

Dado un A-módulo M, el conjunto $\left\{\mathcal{C}_{\underline{a},\,\varphi} \otimes_A M/\mathfrak{b}M,\ \gamma_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}, \preceq\right\}$, donde

$$\gamma_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} : \mathcal{C}_{\underline{a},\,\varphi} \otimes_A M/\mathfrak{c}M \longrightarrow \mathcal{C}_{\underline{a},\,\varphi} \otimes_A M/\mathfrak{b}M$$

es el mapa de complejos inducido por el A-homomorfismo natural $M/\mathfrak{c}M \longrightarrow M/\mathfrak{b}M$ toda vez que $\mathfrak{b} \preceq \mathfrak{c}$ en Φ, es un sistema inverso de complejos de A-módulos.

Definición 4.1. Para un entero i, el módulo de cohomología

$$\mathrm{H}^i(\varprojlim_{\mathfrak{b}\in\Phi}(\mathcal{C}_{\underline{a},\ \varphi} \otimes_A M/\mathfrak{b}M))$$

es llamado *i-ésimo módulo de cohomología* Φ*-formal con respecto al ideal* $\mathfrak{a}$. En el caso que A es un anillo semilocal y $\mathfrak{a} = \mathfrak{J}$, el radical de Jacobson de A, escribiremos simplemente *i-ésimo módulo de cohomología* Φ*-formal.*

Para cada par de ideales $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ en Φ tales que $\mathfrak{a} \preceq \mathfrak{b}$ consideremos el homomorfismo natural

$$\varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} : M/\mathfrak{b}M \longrightarrow M/\mathfrak{a}M.$$

Entonces

$$\left\{\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a},\varphi}(M/\mathfrak{a}M);\ \mathrm{H}^i_{\mathfrak{a},\varphi}(\varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}) : \mathrm{H}^i_{\mathfrak{a},\varphi}(M/\mathfrak{b}M) \longrightarrow \mathrm{H}^i_{\mathfrak{a},\varphi}(M/\mathfrak{a}M), \mathfrak{a} \preceq \mathfrak{b}\right\}$$

es un sistema inverso de A-módulos.

Proposición 20. *Con las notaciones previas y suponiendo que* Φ *posee un subconjunto enumerable cofinal, existe la siguiente sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow \varprojlim_{\mathfrak{b}\in\Phi}{}^1 \mathrm{H}^{i+1}_{\mathfrak{a},\varphi}(M/\mathfrak{b}M) \longrightarrow \mathrm{H}^i(\varprojlim_{\mathfrak{b}\in\Phi} \mathcal{C}_{\underline{a},\ \varphi} \otimes_A M/\mathfrak{b}M) \longrightarrow \varprojlim_{\mathfrak{b}\in\Phi}(\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a},\varphi}(M/\mathfrak{b}M)) \longrightarrow 0$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Prueba. Supongamos que Φ posee un subconjunto enumerable cofinal $\phi = \{\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \mathfrak{c}_3, \dots\}$. Vamos definir inductivamente una sucesión de elementos $\mathfrak{b}_n \in \phi$ de la siguiente manera: $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{c}_1$ y $\mathfrak{c}_n \preceq \mathfrak{b}_n$ y $\mathfrak{b}_m \preceq \mathfrak{b}_n$ para $m < n$. La nueva sucesión $\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3, \dots\}$ es cresciente y es un subconjunto cofinal de Φ. Luego podemos asumir que $\Phi = \langle\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3, \dots\}\rangle$ con $\mathfrak{b}_j \supseteq \mathfrak{b}_{j+1}$ para todo $j \geq 1$.

Por otro lado, el complejo generalizado de Čech $\mathcal{C}_{\underline{a},\ \varphi}$ es un complejo de A-módulos planos. Luego para cada $n \geq 1$ el epimorfismo natural $M/\mathfrak{b}_{n+1} \longrightarrow M/\mathfrak{b}_n$ induce un morfismo de complejos de A-módulos

$$\mathcal{C}_{\underline{a},\ \varphi} \otimes_A M/\mathfrak{b}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{C}_{\underline{a},\ \varphi} \otimes_A M/\mathfrak{b}_n,$$

el cual es un epimorfismo en cada posición. Por la definición de límite inverso existe una sucesión exacta corta de complejos de A-módulos

$$0 \longrightarrow \varprojlim_{n\geq 1}(\mathcal{C}_{\underline{a},\ \varphi} \otimes_A M/\mathfrak{b}_n) \longrightarrow \prod_{n\geq 1}(\mathcal{C}_{\underline{a},\ \varphi} \otimes_A M/\mathfrak{b}_n) \longrightarrow \prod_{n\geq 1}(\mathcal{C}_{\underline{a},\ \varphi} \otimes_A M/\mathfrak{b}_n) \longrightarrow 0.$$

Ahora, la sucesión exacta larga de módulos de cohomología proporciona la primera parte de la afirmación. Para este fin se divide en sucesiones breves y exactas y se tiene en cuenta que la homología conmuta con productos directos. ∎

Corolario 15. *Supongamos que* Φ *es un sistema completo de ideales de* A *que posee un subconjunto enumerable cofinal.*

(i) Si $(A,\mathfrak{m})$ es un anillo local y M es un A-módulo Matlis reflexivo de dimensión d, entonces existe un isomorfismo de A-módulos

$$\mathrm{H}^i(\varprojlim_{\mathfrak{b}\in\Phi} \mathcal{C}_{\underline{a},\ \varphi} \otimes_A M/\mathfrak{b}M) \cong \varprojlim_{\mathfrak{b}\in\Phi}(\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a},\varphi}(M/\mathfrak{b}M))$$

para todo $i \geq d-1$.

(ii) Si A es un anillo semilocal, $\mathfrak{a} = \mathrm{J}$ es el radical de Jacobson de A, $\varphi = \{0\}$ y M es un A-módulo Matlis reflexivo, entonces existe un isomorfismo de A-módulos

$$\mathrm{H}^i(\varprojlim_{\mathfrak{b}\in\Phi} \mathcal{C}_{\underline{a}} \otimes_A M/\mathfrak{b}M) \cong \varprojlim_{\mathfrak{b}\in\Phi}(\mathrm{H}^i_{\mathrm{J}}(M/\mathfrak{b}M))$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Prueba. Para demostrar la afirmación final, podemos aplicar [2, Theorem 1.3] que garantiza que $\mathrm{H}^d_{\mathcal{G}(\mathfrak{a},\varphi)}(M)$ es un A-módulo Artiniano y por lo tanto,$\mathrm{H}^d_{\mathcal{G}(\mathfrak{a},\varphi)}(M/\mathfrak{b}M)$ también es un A-módulo Artiniano. Luego $\varprojlim_{\mathfrak{b}\in\Phi}{}^1 \mathrm{H}^d_{\mathfrak{a},\varphi}(M/\mathfrak{b}M) = 0$ por [12, Corollaire 7.2]. La prueba ahora es consecuencia de la primera parte. ∎

Observación. La parte (ii) del Corolário 15 nos motiva a estudiar de manera independiente los A-módulos $\varprojlim_{\mathfrak{b}\in\Phi} \mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(M/\mathfrak{b}M)$, donde A es un anillo Noetheriano arbitrario y Φ un sistema completo de ideales de A cualquiera. La próxima sección estará dedicada a estudiar las propiedades de tales módulos.

4.2. Los funtores $\mathscr{F}^i_\Phi(-)$

A lo largo de esta sección, $\mathcal{M}$ denotará el sistema generado por el conjunto de ideales maximales de A, i.e., $\mathcal{M} = \langle \mathrm{Max}(A)\rangle$ y Φ un sistema completo de ideales de A. Como siempre, consideremos en Φ el orden parcial $\preceq$ inducido por la inclusión inversa. Sean i un entero no negativo y M un A-módulo. Para cada par de ideales $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ en Φ tales que $\mathfrak{a} \preceq \mathfrak{b}$ consideremos el homomorfismo natural

$$\varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} : M/\mathfrak{b}M \longrightarrow M/\mathfrak{a}M.$$

Entonces

$$\left\{\mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(M/\mathfrak{a}M);\ \mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(\varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}) : \mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(M/\mathfrak{b}M) \longrightarrow \mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(M/\mathfrak{a}M), \mathfrak{a} \preceq \mathfrak{b}\right\}$$

es un sistema inverso de A-módulos. Esto nos permite definir el A-módulo

$$\mathscr{F}^i_\Phi(M) := \varprojlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} \mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(M/\mathfrak{a}M).$$

Recordemos que $\mathscr{F}^i_\Phi(M)$ viene equipado con una colección de homomorfismos de A-módulos $p_{\mathfrak{a}} : \mathscr{F}^i_\Phi(M) \longrightarrow \mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(M/\mathfrak{a}M)$ tales que si $\mathfrak{a} \preceq \mathfrak{b}$, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & \mathscr{F}_\Phi^i(M) \arrow[dl, "p_{\mathfrak{b}}"'] \arrow[dr, "p_{\mathfrak{a}}"] & \\
\mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(M/\mathfrak{b}M) \arrow[rr, "\mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(\varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}})"] & & \mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(M/\mathfrak{a}M).
\end{tikzcd}$$

Dado un homomorfismo de A-módulos $f : M \longrightarrow N$, para cada ideal $\mathfrak{a} \in \Phi$ existe un único homomorfismo A-lineal $f_{\mathfrak{a}} : M/\mathfrak{a}M \longrightarrow N/\mathfrak{a}N$ que hace el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_M"'] & N \arrow[d, "\pi_N"] \\
M/\mathfrak{a}M \arrow[r, "f_{\mathfrak{a}}"] & N/\mathfrak{a}N,
\end{tikzcd}$$

pues $\mathfrak{a}M \subseteq \ker(\pi_N \circ f)$. Ahora consideremos los homomorfismos

$$\mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(f_{\mathfrak{a}}) \circ p_{\mathfrak{a}}^M : \mathscr{F}_\Phi^i(M) \longrightarrow \mathrm{H}^i_{\mathfrak{M}}(M/\mathfrak{a}N).$$

Desde que $\varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}^N \circ f_{\mathfrak{b}} = f_{\mathfrak{a}} \circ \varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}^M$ siempre que $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(\varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}^N) \circ (\mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(f_{\mathfrak{b}}) \circ p_{\mathfrak{b}}^M) &= (\mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(\varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}^N) \circ \mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(f_{\mathfrak{b}})) \circ p_{\mathfrak{b}}^M \\
&= (\mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(f_{\mathfrak{a}}) \circ \mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(\varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}^M)) \circ p_{\mathfrak{b}}^M \\
&= \mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(f_{\mathfrak{a}}) \circ (\mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(\varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}^M) \circ p_{\mathfrak{b}}^M) \\
&= \mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(f_{\mathfrak{a}}) \circ p_{\mathfrak{a}}^M.
\end{aligned}$$

Consecuentemente, por la propiedad universal del límite inverso $\mathscr{F}_\Phi^i(N) = \varprojlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} \mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(N/\mathfrak{a}N)$, existe un único homomorfismo de A-módulos

$$\mathscr{F}_\Phi^i(f) : \mathscr{F}_\Phi^i(M) \longrightarrow \mathscr{F}_\Phi^i(N)$$

tal que $p_{\mathfrak{a}}^N \circ \mathscr{F}_\Phi^i(f) = \mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(f_{\mathfrak{a}}) \circ p_{\mathfrak{a}}^M$ para todo ideal $\mathfrak{a} \in \Phi$. El siguiente diagrama conmutativo ilustra las relaciones obtenidas.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}_\Phi^i(M) \arrow[r, "\exists!\ \mathscr{F}_\Phi^i(f)"] \arrow[d, "p_{\mathfrak{a}}^M"'] \arrow[dd, bend right=60, "p_{\mathfrak{b}}^M"'] & \mathscr{F}_\Phi^i(N) \arrow[d, "p_{\mathfrak{a}}^N"] \arrow[dd, bend left=60, "p_{\mathfrak{b}}^N"] \\
\mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(M/\mathfrak{a}M) \arrow[r, "\mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(f_{\mathfrak{a}})"] \arrow[d, "\mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(\varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}^M)"'] & \mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(N/\mathfrak{a}N) \arrow[d, "\mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(\varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}^N)"] \\
\mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(M/\mathfrak{b}M) \arrow[r, "\mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(f_J)"] & \mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(N/\mathfrak{b}N).
\end{tikzcd}$$

Ahora no es difícil ver que las correspondencias

$$M \longmapsto \mathscr{F}_\Phi^i(M); \quad (f : M \longrightarrow N) \longmapsto (\mathscr{F}_\Phi^i(f) : \mathscr{F}_\Phi^i(M) \longrightarrow \mathscr{F}_\Phi^i(N))$$

definen, para cada $i \geq 0$, un funtor de la categoría de A-módulos en sí misma.

$$\mathscr{F}_\Phi^i(-) : Mod_A \longrightarrow Mod_A.$$

Teorema 16. *Si M es un A-módulo reflexivo de dimensión d, entonces $\mathscr{F}_\Phi^d(M)$ es un módulo Artiniano.*

Prueba. Por el Teorema de la Independencia (Proposición 4) podemos asumir que $\operatorname{Ann}(M) = 0$ y por lo tanto, $\dim(A) = d$. Como $\mathrm{H}^d_{\mathcal{M}}(-)$ es un funtor A-lineal exacto a la derecha, el Teorema de Watts ([16, Theorem 5.45]) implica que

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}^d_{\mathcal{M}}(M/\mathfrak{a}M) &\cong \mathrm{H}^d_{\mathcal{M}}(A) \otimes_A M/\mathfrak{a}M \\
&\cong \mathrm{H}^d_{\mathcal{M}}(A) \otimes_A (M \otimes_A A/\mathfrak{a}) \\
&\cong (\mathrm{H}^d_{\mathcal{M}}(A) \otimes_A M) \otimes_A A/\mathfrak{a} \\
&\cong \mathrm{H}^d_{\mathcal{M}}(M) \otimes_A A/\mathfrak{a} \\
&\cong \mathrm{H}^d_{\mathcal{M}}(M)/\mathfrak{a}\mathrm{H}^d_{\mathcal{M}}(M)
\end{aligned} \tag{4.1}$$

para todo ideal $\mathfrak{a} \in \Phi$.

Consideremos ahora el conjunto $C = \left\{\mathfrak{a}\mathrm{H}^d_{\mathcal{M}}(M) : \ \mathfrak{a} \in \Phi\right\}$. Desde que $\mathrm{H}^d_{\mathcal{M}}(M)$ es Artiniano por el Teorema 9, existe un ideal $\mathfrak{b} \in \Phi$ tal que $\mathfrak{b}\mathrm{H}^d_{\mathcal{M}}(M)$ es un elemento minimal de C. Luego, para cada ideal $\mathfrak{c} \in \Phi$ tal que $\mathfrak{b} \preceq \mathfrak{c}$,

$$\mathfrak{c}\mathrm{H}^d_{\mathcal{M}}(M) = \mathfrak{b}\mathrm{H}^d_{\mathcal{M}}(M).$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_\Phi^d(M) &= \varprojlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} \mathrm{H}^d_{\mathcal{M}}(M/\mathfrak{a}M) \\
&= \varprojlim_{\mathfrak{b}\preceq\mathfrak{c}} \mathrm{H}^d_{\mathcal{M}}(M/\mathfrak{c}M) \\
&= \varprojlim_{\mathfrak{b}\preceq\mathfrak{c}} \mathrm{H}^d_{\mathcal{M}}(M)/\mathfrak{c}\mathrm{H}^d_{\mathcal{M}}(M) \\
&= \varprojlim_{\mathfrak{b}\preceq\mathfrak{c}} \mathrm{H}^d_{\mathcal{M}}(M)/\mathfrak{b}\mathrm{H}^d_{\mathcal{M}}(M) \\
&= \mathrm{H}^d_{\mathcal{M}}(M)/\mathfrak{b}\mathrm{H}^d_{\mathcal{M}}(M) \\
&\cong \mathrm{H}^d_{\mathcal{M}}(M/\mathfrak{b}M).
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Desde que $M/\mathfrak{b}M$ es reflexivo (Proposición 7), una nueva aplicación del Teorema 9 garantiza que $\mathrm{H}^d_{\mathcal{M}}(M/\mathfrak{b}M)$ es Artiniano y por lo tanto, $\mathscr{F}_\Phi^d(M)$ también es Artiniano. ■

Observación. Dado un sistema completo Φ de ideales de A podemos equipar un A-módulo M con una topología lineal, denominada *topología Φ-ádica*, definida de la siguiente manera: un subconjunto U de M es abierto, si para cada $x \in M$ existe un ideal $\mathfrak{a} \in \Phi$ tal que $x + \mathfrak{a}M \subseteq M$. Obviamente la topología Max estudiada en la sección 2,2 es un caso particular cuando $\Phi = \mathcal{M}$. En este camino, el homomorfismo canónico

$$\varphi : M \longrightarrow \varprojlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} M/\mathfrak{a}M$$

es continuo, donde $\varprojlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} M/\mathfrak{a}M$ está equipado con su topología natural. Es posible demostrar que tal límite proyectivo es el *completamiento de Hausdorff* de M con respecto a la topología Φ-ádica (ver la referencia [3]). En estos términos, la relación (4.1) implica que si M es un A-módulo de dimensión d, entonces $\mathscr{F}_{\Phi}^{d}(M)$ es el completamiento de Hausdorff del módulo $\mathrm{H}^{d}_{\mathcal{M}}(M)$.

Proposición 21. *Para todo A-módulo M y para cada $i \geq 0$, el A-módulo $\mathscr{F}_{\Phi}^{i}(M)$ es* Φ-separado*, es decir,*

$$\bigcap_{\mathfrak{a}\in\Phi} \mathfrak{a}\mathscr{F}_{\Phi}^{i}(M) = 0.$$

Prueba. Note que

$$\begin{aligned}
\bigcap_{\mathfrak{a}\in\Phi} \mathfrak{a}\mathscr{F}_{\Phi}^{i}(M) &\cong \varprojlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} \mathfrak{a}\mathscr{F}_{\Phi}^{i}(M)\\
&\cong \varprojlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} \mathfrak{a} \varprojlim_{\mathfrak{b}\in\Phi} \mathrm{H}^{i}_{\mathcal{M}}(M/\mathfrak{b}M)\\
&\subseteq \varprojlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} \varprojlim_{\mathfrak{b}\in\Phi} \mathfrak{a}\mathrm{H}^{i}_{\mathcal{M}}(M/\mathfrak{b}M)\\
&\cong \varprojlim_{\mathfrak{b}\in\Phi} \varprojlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} \mathfrak{a}\mathrm{H}^{i}_{\mathcal{M}}(M/\mathfrak{b}M)
\end{aligned}$$

Desde que, para cada $\mathfrak{b}\in\Phi$ fijo,

$$\varprojlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} \mathfrak{a}\mathrm{H}^{i}_{\mathcal{M}}(M/\mathfrak{b}M) \cong \varprojlim_{\mathfrak{b}\preceq\mathfrak{a}} \mathfrak{a}\mathrm{H}^{i}_{\mathcal{M}}(M/\mathfrak{b}M)$$

y como

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}\mathrm{H}^{i}_{\mathcal{M}}(M/\mathfrak{b}M) &\cong \mathfrak{a} \varinjlim_{\mathfrak{c}\in\Phi} \mathrm{Ext}^{i}_{A}(A/\mathfrak{c}, M/\mathfrak{b}M)\\
&\subseteq \varinjlim_{\mathfrak{c}\in\Phi} \underbrace{\mathfrak{a}\mathrm{Ext}^{i}_{A}(A/\mathfrak{c}, M/\mathfrak{b}M)}_{0}\\
&= 0,
\end{aligned}$$

siempre que $\mathfrak{b}\preceq\mathfrak{a}$, concluimos que

$$\bigcap_{\mathfrak{a}\in\Phi} \mathfrak{a}\mathscr{F}_{\Phi}^{i}(M) = 0.$$

■

Corolario 17. *Si M es A-módulo reflexivo de dimensión d, entonces $\mathscr{F}_{\Phi}^{d}(M)$ es Hausdorff completo con respecto a la topología Φ-ádica.*

Prueba. Por el Teorema 4.2, $\mathscr{F}_{\Phi}^{d}(M)$ es un A-módulo Artiniano. Ahora el resultado es consecuencia de [3, Theorem 3.6]. ■

Sea S un subconjunto multiplicativo de A. En [14] los autores introdujeron la *co-localización* de un A-módulo M con respecto a S como el $S^{-1}A$-módulo

$$S_{-1}M := \operatorname{Hom}_A(S^{-1}A, M).$$

Dado un homomofismo de A-módulos $f : M \longrightarrow N$, denote por $S_{-1}f$ el homomorfismo $\operatorname{Hom}_A(S^{-1}A, f) : S_{-1}M \longrightarrow S_{-1}N$. Las correspondencias

$$M \longmapsto S_{-1}M, \quad f \longmapsto S_{-1}f$$

definen un funtor de la categoría Mod_A en la categoría $Mod_{S^{-1}A}$, cuya restricción a la subcategoría (plena) de los A-módulos Artinianos es un funtor exacto (ver [14, Proposition 2.4]).

Si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de A y $S = A - \mathfrak{p}$ escribiremos ${}_{\mathfrak{p}}M$ en lugar de $S_{-1}M$. El *cosoporte* de M es el conjunto

$$\operatorname{cosupp}_A(M) := \left\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : \ {}_{\mathfrak{p}}M \neq 0\right\}.$$

Proposición 22. *Sean S un subconjunto multiplicativo de A, Φ un sistema completo de ideales de A y M un A-módulo. Supongamos que $S \cap \mathfrak{a} \neq \emptyset$ para todo $\mathfrak{a} \in \Phi$, entonces*

$$S_{-1}\mathscr{F}^i_{\Phi}(M) = 0$$

para todo $i \geq 0$.

Prueba. Sea $f \in S_{-1}\mathscr{F}^i_{\Phi}(M) = \operatorname{Hom}_A(S^{-1}A, \mathscr{F}^i_{\Phi}(M))$ y tome $\frac{r}{s} \in S^{-1}A$. Para cada $\mathfrak{a} \in \Phi$, existe $t \in S \cap \mathfrak{a}$. Por lo tanto, $f\left(\frac{r}{s}\right) = f\left(\frac{tr}{ts}\right) = tf\left(\frac{r}{ts}\right) \in \mathfrak{a}\mathscr{F}^i_{\Phi}(M)$. De esa manera, $f\left(\frac{r}{s}\right) \in \bigcap_{\mathfrak{a}\in\Phi} \mathfrak{a}\mathscr{F}^i_{\Phi}(M)$ para todo $\frac{r}{s} \in S^{-1}A$. Pero, por la Proposición 21, $\bigcap_{\mathfrak{a}\in\Phi} \mathfrak{a}\mathscr{F}^i_{\Phi}(M) = 0$. En consecuencia, $f = 0$. ■

Corolario 18. *Sean Φ un sistema completo de ideales de A y M un A-módulo. Entonces*

$$\operatorname{cosupp}_A(\mathscr{F}^i_{\Phi}(M)) \subseteq \Phi$$

para todo $i \geq 0$.

Prueba. Sea $\mathfrak{p} \in \operatorname{cosupp}_A(\mathscr{F}^i_{\Phi}(M))$. Por la Proposición 22, $(A - \mathfrak{p}) \cap \mathfrak{a} = \emptyset$ para algún $\mathfrak{a} \in \Phi$. Ésto implica que $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}$. Desde que Φ es un sistema completo de ideales de A, concluimos que $\mathfrak{p} \in \Phi$. ■

Dado un A-módulo M, en [3] los autores definen, para cada $i \geq 0$, la *i-ésima homología local M con respecto a $\mathcal{M}$* por

$$\operatorname{H}^{\mathcal{M}}_i(M) := \varprojlim_{\mathfrak{a}\in\mathcal{M}} \operatorname{Tor}^A_i(A/\mathfrak{a}, M).$$

y demuestran las siguientes equivalencias El siguiente resultado muestra una relación entre las nociones de homología local y cohomología formal.

Proposición 23. *Si M es A-módulo reflexivo entonces*

$$\mathrm{H}_i^{\mathcal{M}}(\mathscr{F}_\Phi^j(M)) = \begin{cases} \mathscr{F}_\Phi^j(M), & si\ i = 0 \\ 0, & si\ i > 0. \end{cases}$$

Prueba. Por [3, Lemma 3.4], tenemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_i^{\mathcal{M}}(\mathscr{F}_\Phi^j(M)) &= \mathrm{H}_i^{\mathcal{M}}(\varprojlim_{\mathfrak{a}\in\Phi}(\mathrm{H}_{\mathcal{M}}^j(M/\mathfrak{a}M))) \\ &\cong \varprojlim_{\mathfrak{a}\in\Phi}(\mathrm{H}_i^{\mathcal{M}}(\mathrm{H}_{\mathcal{M}}^j(M/\mathfrak{a}M)). \end{aligned}$$

Afirmamos que, para cada $\mathfrak{a} \in \Phi$ y para cada $j \geq 0$, el A-módulo $\mathrm{H}_{\mathcal{M}}^j(M/\mathfrak{a}M))$ es Φ-separado. En efecto,

$$\begin{aligned} \bigcap_{\mathfrak{b}\in\Phi} \mathfrak{b}\mathrm{H}_{\mathcal{M}}^j(M/\mathfrak{a}M)) &\cong \varprojlim_{\mathfrak{b}\in\Phi} \mathfrak{b}\mathrm{H}_{\mathcal{M}}^j(M/\mathfrak{a}M)) \\ &\cong \varprojlim_{\mathfrak{a}\preceq\mathfrak{b}} \underbrace{\mathfrak{b}\mathrm{H}_{\mathcal{M}}^j(M/\mathfrak{a}M))}_{0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pero por el Teorema 9, para cada $\mathfrak{a} \in \Phi$ y para cada $j \geq 0$, el A-módulo $\mathrm{H}_{\mathcal{M}}^j(M/\mathfrak{a}M)$ es Artiniano, pues $A/\mathfrak{a}M$ es reflexivo (ver Proposición 7). Luego, por [3, Theorem 3.6]

$$\mathrm{H}_i^{\mathcal{M}}(\mathrm{H}_{\mathcal{M}}^j(M/\mathfrak{a}M)) = \begin{cases} \mathrm{H}_{\mathcal{M}}^j(M/\mathfrak{a}M), & \text{si } i = 0 \\ 0, & \text{si } i > 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, aplicando $\varprojlim_{\mathfrak{a}\in\Phi}(-)$, obtenemos el resultado deseado. ∎

Lema 18. *Sea M un A-módulo, entonces*

i) *Para todo $i \geq 0$, $\mathrm{H}_{\mathcal{M}}^i(M)$ tiene estructura natural de $\Lambda_{\mathcal{M}}(A)$-módulo tal que*

$$\Lambda_{\mathcal{M}}(A) \otimes_A \mathrm{H}_{\mathcal{M}}^i(M) \cong \mathrm{H}_{\mathcal{M}}^i(M)$$

como $\Lambda_{\mathcal{M}}(A)$-módulos.

ii) *Si Φ es un sistema completo de ideales de A, entonces $\mathscr{F}_\Phi^i(M)$ tiene estructura natural de $\Lambda_{\mathcal{M}}(A)$-módulo.*

Prueba. Sea i un entero no negativo. Sabemos por el Lema 7 que $\mathrm{H}_{\mathcal{M}}^i(M)$ es un A-módulo $\mathcal{M}$-torsión, o equivalentemente, $\mathrm{Supp}(\mathrm{H}_{\mathcal{M}}^i(M)) \subseteq \mathcal{M}$. Ahora la parte i) es consecuencia directa de la Proposición 14. Por otro lado, como $\mathscr{F}_\Phi^i(M) = \varprojlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} \mathrm{H}_{\mathcal{M}}^i(M)$, la parte ii) sigue inmediatamente de i). ∎

A continuación consideremos el homomorfismo canónico $\varphi : A \longrightarrow \Lambda_{\mathcal{M}}(A)$.

Teorema 19. *Sea M un A-módulo finitamente generado, entonces existen isomorfismos de $\Lambda_{\mathcal{M}}(A)$-módulos*

$$\mathscr{F}^i_{\Phi}(M) \cong \varprojlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} \mathrm{H}^i_{\varphi_*(\mathcal{M})}(\Lambda_{\mathcal{M}}(M)/\mathfrak{a}\Lambda_{\mathcal{M}}(M)).$$

para todo $i \geq 0$.

Prueba. Sea N un A-módulo finitamente generado, entonces por el Lema 18, $\mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(N)$ tiene estructura de $\Lambda_{\mathcal{M}}(A)$-módulo. Más aún,

$$\mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(N) \cong \Lambda_{\mathcal{M}}(A) \otimes_A \mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(N)$$

como $\Lambda_{\mathcal{M}}(A)$-módulos para cualquier $i \geq 0$. Desde que $\Lambda_{\mathcal{A}}(A)$ es un A-módulo plano gracias a la Proposición 16, la Proposición 5 y el Teorema 7 implican que

$$\mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(N) \cong \mathrm{H}^i_{\varphi_*(\mathcal{M})}(\Lambda_{\mathcal{M}}(A) \otimes_A N) \cong \mathrm{H}^i_{\varphi_*(\mathcal{M})}(\Lambda_{\mathcal{M}}(N)) \cong \mathrm{H}^i_{\varphi_*(\mathcal{M})}(\Lambda_{\mathcal{M}}(N)).$$

Tomemos ahora $N = M/\mathfrak{a}M$ con $\mathfrak{a} \in \Phi$. En vista que

$$\Lambda_{\mathcal{M}}(M/\mathfrak{a}M) \cong \Lambda_{\mathcal{M}}(M)/\mathfrak{a}\Lambda_{\mathcal{M}}(M),$$

obtenemos

$$\mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(M/\mathfrak{a}M) \cong \mathrm{H}^i_{\varphi_*(\mathcal{M})}(\Lambda_{\mathcal{M}}(M)/\mathfrak{a}\Lambda_{\mathcal{M}}(M)).$$

Después de aplicar $\varprojlim_{\mathfrak{a}\in\Phi}(-)$ obtenemos el resultado deseado. ■

4.3. Homología formal generalizada

Ahora estudiaremos una noción dual de cohomología formal. Para cada par de ideales $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ en Φ tales que $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ consideremos la inclusión natural

$$\iota_{\mathfrak{b}\mathfrak{a}} : (0 :_M \mathfrak{a}) \longrightarrow (0 :_M \mathfrak{b}).$$

Entonces, para cada $i \geq 0$,

$$\left\{\mathrm{H}^{\mathcal{M}}_i((0 :_M \mathfrak{a}));\ \mathrm{H}^{\mathcal{M}}_i(\iota_{\mathfrak{b}\mathfrak{a}}) : \mathrm{H}^{\mathcal{M}}_i((0 :_M \mathfrak{a})) \longrightarrow \mathrm{H}^{\mathcal{M}}_i((0 :_M \mathfrak{b})), \mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}\right\}$$

es un sistema directo de A-módulos. Ésto permite definir el A-módulo $\mathscr{F}^{\Phi}_i(M)$ por

$$\mathscr{F}^{\Phi}_i(M) := \varinjlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} \mathrm{H}^{\mathcal{M}}_i((0 :_M \mathfrak{a})).$$

Recordemos que $\mathscr{F}^{\Phi}_i(M)$ viene equipado con una colección de homomorfismos de A-módulos $j_{\mathfrak{a}} : \mathrm{H}^{\mathcal{M}}_i((0 :_M \mathfrak{a})) \longrightarrow \mathscr{F}^{\Phi}_i(M)$ tales que si $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{F}^{\Phi}_i(M) & \\ \mathrm{H}^{\mathcal{M}}_i((0 :_M \mathfrak{a})) \arrow[ur, "j_{\mathfrak{a}}"] \arrow[rr, "\mathrm{H}^{\mathcal{M}}_i(\iota_{\mathfrak{b}\mathfrak{a}})"] & & \mathrm{H}^{\mathcal{M}}_i((0 :_M \mathfrak{b})). \arrow[ul, "j_{\mathfrak{b}}"'] \end{tikzcd}$$

Dado un homomorfismo de A-módulos $g : M \longrightarrow N$, para cada ideal $\mathfrak{a} \in \Phi$, existe un único homomorfismo A-lineal $g_{\mathfrak{a}} : (0 :_M \mathfrak{a}) \longrightarrow (0 :_N \mathfrak{a})$ que hace el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] & N \\ (0 :_M \mathfrak{a}) \arrow[u, "\iota_M"] \arrow[r, "g_{\mathfrak{a}}"] & (0 :_N \mathfrak{a}). \arrow[u, "\iota_N"'] \end{tikzcd}$$

De manera explícita, g_a es la restricción de g al submódulo $(0 :_M \mathfrak{a})$. Ahora consideremos los homomorfismos

$$j_{\mathfrak{a}}^N \circ \mathrm{H}_i^{\mathcal{M}}(g_{\mathfrak{a}}) : \mathrm{H}_i^{\mathcal{M}}((0 :_M \mathfrak{a})) \longrightarrow \mathscr{F}_{\Phi}^i(M).$$

Desde que $g_{\mathfrak{b}} \circ \iota_{\mathfrak{ba}}^M = \iota_{\mathfrak{ba}}^N \circ g_{\mathfrak{a}}$ siempre que $\mathfrak{a} \preceq \mathfrak{b}$, obtenemos

$$\begin{aligned} (j_{\mathfrak{b}}^N \circ \mathrm{H}_i^{\mathcal{M}}(g_{\mathfrak{b}})) \circ \mathrm{H}_i^{\mathcal{M}}(\iota_{\mathfrak{ba}}^N) &= j_{\mathfrak{b}}^N \circ (\mathrm{H}_i^{\mathcal{M}}(g_{\mathfrak{b}}) \circ \mathrm{H}_i^{\mathcal{M}}(\iota_{\mathfrak{ba}}^M)) \\ &= j_{\mathfrak{b}}^N \circ (\mathrm{H}_i^{\mathcal{M}}(\iota_{\mathfrak{ba}}^N) \circ \mathrm{H}_i^{\mathcal{M}}(g_{\mathfrak{a}}) \\ &= (j_{\mathfrak{b}}^N \circ (\mathrm{H}_i^{\mathcal{M}}(\iota_{\mathfrak{ba}}^N)) \circ \mathrm{H}_i^{\mathcal{M}}(g_{\mathfrak{a}}) \\ &= j_{\mathfrak{a}}^N \circ \mathrm{H}_i^{\mathcal{M}}(g_{\mathfrak{a}}). \end{aligned}$$

Luego, por la propiedad universal del límite directo $\mathscr{F}_i^{\Phi}(M) = \varinjlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} \mathrm{H}_i^{\mathcal{M}}(0 :_M \mathfrak{a})$, existe un único homomorfismo de A-módulos

$$\mathscr{F}_i^{\Phi}(g) : \mathscr{F}_i^{\Phi}(M) \longrightarrow \mathscr{F}_i^{\Phi}(N)$$

tal que $\mathscr{F}_i^{\Phi}(f) \circ j_{\mathfrak{a}}^M = j_{\mathfrak{a}}^N \circ \mathrm{H}_i^{\mathcal{M}}(g_{\mathfrak{a}})$ para todo ideal $\mathfrak{a} \in \Phi$. El siguiente diagrama conmutativo resume las relaciones obtenidas.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}_i^{\Phi}(M) \arrow[r, "\exists !\, \mathscr{F}_i^{\Phi}(g)"] & \mathscr{F}_i^{\Phi}(N) \\ \mathrm{H}_i^{\mathcal{M}}(0 :_M \mathfrak{a}) \arrow[u, "j_{\mathfrak{a}}^M"] \arrow[r, "\mathrm{H}_i^{\mathcal{M}}(f_{\mathfrak{a}})"] \arrow[d, "\mathrm{H}_i^{\mathcal{M}}(\iota_{\mathfrak{ab}}^M)"'] & \mathrm{H}_i^{\mathcal{M}}(0 :_N \mathfrak{a}) \arrow[u, "j_{\mathfrak{a}}^N"'] \arrow[d, "\mathrm{H}_i^{\mathcal{M}}(\iota_{\mathfrak{ab}}^N)"] \\ \mathrm{H}_i^{\mathcal{M}}(0 :_M \mathfrak{b}) \arrow[r, "\mathrm{H}_i^{\mathcal{M}}(f_{\mathfrak{b}})"] \arrow[uu, bend left=60, "j_{\mathfrak{b}}^M"] & \mathrm{H}_i^{\mathcal{M}}(0 :_N \mathfrak{b}). \arrow[uu, bend right=60, "j_{\mathfrak{b}}^N"'] \end{tikzcd}$$

Ahora no es difícil ver que las correspondencias

$$M \longmapsto \mathscr{F}_i^{\Phi}(M);\ \ (g : M \longrightarrow N) \longmapsto (\mathscr{F}_i^{\Phi}(g) : \mathscr{F}_{\Phi}^i(M) \longrightarrow \mathscr{F}_i^{\Phi}(N))$$

definen, para cada $i \geq 0$, un funtor de la categoría de A-módulos en sí misma.

$$\mathscr{F}_i^{\Phi}(-) : Mod_A \longrightarrow Mod_A.$$

El siguiente resultado es un acompañante del Teorema 19.

Proposición 24. *Sea M un A-módulo Artiniano, entonces existen isomorfismos de $\Lambda_{\mathcal{M}}(A)$-módulos*

$$\mathscr{F}_i^{\Phi}(M) \cong \varinjlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} \mathrm{H}_i^{\varphi_*(\mathcal{M})}((0:_M \mathfrak{a})).$$

para todo $i \geq 0$.

Prueba. Dado un A-módulo Artiniano N, la Proposición 14 garantiza que N tiene estructura de $\Lambda_{\mathcal{M}}(A)$-módulo, pues $\mathrm{Supp}N \subseteq \mathrm{Max}A$. Como consecuencia de [3, Proposition 2.6], existe un isomorfismo de $\Lambda_{\mathcal{M}}(A)$-módulos

$$\mathrm{H}_i^{\mathcal{M}}(N) \cong \mathrm{H}_i^{\varphi_*(\mathcal{M})}(N).$$

Ahora tome $N = (0:_M \mathfrak{a})$ con $\mathfrak{a} \in \Phi$. Después de aplicar el funtor $\varinjlim_{\mathfrak{a}\in\Phi}(-)$ obtenemos, para cada $i \geq 0$, un isomorfismo de $\Lambda_{\mathcal{M}}(A)$-módulos

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_i^{\Phi}(M) &= \varinjlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} \mathrm{H}_i^{\mathcal{M}}((0:_M \mathfrak{a}))\\ &\cong \varinjlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} \mathrm{H}_i^{\varphi_*(\mathcal{M})}((0:_M \mathfrak{a})),\end{aligned}$$

lo que demuestra el resultado. ■

Para finalizar este capítulo probaremos que los funtores $\mathscr{F}_{\Phi}^i(-)$ y $\mathscr{F}_i^{\Phi}(-)$ son duales en el siguiente sentido.

Teorema 20. *Sea Φ un sistema completo de ideales de A y M un A-módulo, entonces*

(i) $\mathscr{F}_i^{\Phi}(DM) \cong D\mathscr{F}_{\Phi}^i(M)$,

(ii) $\mathscr{F}_{\Phi}^i(DM) \cong D\mathscr{F}_i^{\Phi}(M)$

para todo $i \geq 0$.

Prueba. Por la adjunción Tor-Hom

$$\begin{aligned}D(M/\mathfrak{a}M) &\cong D(A/\mathfrak{a} \otimes_A M)\\ &\cong \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, DM)\\ &\cong (0:_{DM} A)\end{aligned}$$

para todo $\mathfrak{a} \in \Phi$. Luego, gracias a [3, Theorem 2.5], obtenemos los siguientes isomorfismos de A-módulos

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_i^{\Phi}(DM) &= \varinjlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} \mathrm{H}_i^{\mathcal{M}}((0:_{DM} \mathfrak{a}))\\ &\cong \varinjlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} \mathrm{H}_i^{\mathcal{M}}(D(M/\mathfrak{a}M))\\ &\cong \varinjlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} D\mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(M/\mathfrak{a}M)\\ &\cong D(\varprojlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} \mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(M/\mathfrak{a}M))\\ &= D(\mathscr{F}_{\Phi}^i(M)).\end{aligned}$$

Ésto demuestra (i). Para demostrar (ii), recordemos que para todo A-módulo N y para todo A-módulo inyectivo I,

$$N \otimes_A \mathrm{Hom}_A(M, I) \cong \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_\mathrm{A}(\mathrm{N}, \mathrm{M}), I).$$

En particular para $N = A/\mathfrak{a}$ con $\mathfrak{a} \in \Phi$ e $I = E$ el cogenerador inyectivo de A, obtenemos

$$\begin{aligned} DM/\mathfrak{a}DM &\cong A/\mathfrak{a} \otimes_A D(M) \\ &\cong D(A/\mathfrak{a}, M) \\ &\cong D((0 :_M \mathfrak{a})). \end{aligned}$$

Por lo tanto, aplicando nuevamente [3, Theorem 2.5], obtenemos los siguientes isomorfismos de A-módulos

$$\begin{aligned} \mathscr{F}^i_\Phi(DM) &= \varprojlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} \mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}((DM/\mathfrak{a}DM))) \\ &\cong \varprojlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} \mathrm{H}^i_{\mathcal{M}}(D((0 :_M \mathfrak{a}))) \\ &\cong \varprojlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} D\mathrm{H}^{\mathcal{M}}_i((0 :_M \mathfrak{a})) \\ &\cong D(\varinjlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} \mathrm{H}^{\mathcal{M}}_i((0 :_M \mathfrak{a})) \\ &= D(\mathscr{F}_i^\Phi(M)). \end{aligned}$$

■

Corolario 21. *Si M es un A-módulo Matlis reflexivo, entonces $\mathscr{F}^i_\Phi(M)$ y $\mathscr{F}_i^\Phi(M)$ también son módulos reflexivos para todo $i \geq 0$.*

Prueba. Aplicando el Teorema 20 obtenemos

$$\begin{aligned} DD\mathscr{F}^i_\Phi(M) &\cong D\mathscr{F}_i^\Phi(DM) \\ &\cong \mathscr{F}^i_\Phi(DDM) \\ &\cong \mathscr{F}^i_\Phi(M). \end{aligned}$$

Esto prueba que $\mathscr{F}^i_\Phi(M)$ es reflexivo. La reflexividad de $\mathscr{F}_i^\Phi(M)$ se demuestra de manera análoga. ■

Corolario 22. *Si M es un A-módulo reflexivo de dimensión d, entonces $\mathscr{F}_d^\Phi(DM)$ es un A-módulo finitamente generado.*

Prueba. Por el Teorema 4.2 $\mathscr{F}^d_\Phi(M)$ es un A-módulo Artiniano. Por lo tanto, $D(\mathscr{F}^d_\Phi(M))$ es finitamente generado. Por la parte (i) del Teorema 20 concluimos que $\mathscr{F}_d^\Phi(DM)$ es un A-módulo finitamente generado. ■

Corolario 23. *Supongamos que A es un anillo completo con respecto a la topología $\mathcal{J}$-ádica, donde $\mathcal{J}$ es el radical de Jacobson de A. Si M es un A-módulo reflexivo de dimensión d, entonces $\mathscr{F}_d^\Phi(DM)$ es Φ-torsión.*

Prueba. Por el Corolario 17 $\mathscr{F}_{\Phi}^{d}(M)$ es Hausdorff completo con respecto a la topología Φ-ádica. Entonces, por [3, Proposition 1.11, (ii)] $D(\mathscr{F}_{\Phi}^{d}(M))$ es Φ-torsión. Ahora el resultado es consecuencia de la parte (i) del Teorema 20. ■

Corolario 24. *Si M es un A-módulo Matlis reflexivo, entonces*

$$\Lambda_{\mathcal{M}}(\mathscr{F}_{\Phi}^{i}(DM)) \cong D\Gamma_{\mathcal{M}}(\mathscr{F}_{j}^{\Phi}(M))$$

para todo $j \geq 0$.

Prueba. Por la Proposición 23 y la dualidad entre cohomología local y homología local (ver [3, Theorem 2.5]) tenemos los siguientes isomorfismos de A-módulos

$$\begin{aligned}\Lambda_{\mathcal{M}}(\mathscr{F}_{\Phi}^{j}(DM)) &\cong \Lambda_{\mathcal{M}}(D\mathscr{F}_{j}^{\Phi}(DM)))\\ &\cong D\Gamma_{\mathcal{M}}(\mathscr{F}_{j}^{\Phi}(M)).\end{aligned}$$

■

Corolario 25. *Si S es un subconjunto multiplicativo de A y M un A-módulo, entonces*

$$D(S^{-1}\mathscr{F}_{i}^{\Phi}(M)) \cong S_{-1}\mathscr{F}_{\Phi}^{i}(DM).$$

Prueba. Por la adjunción Hom-Tensor y el Teorema 20 tenemos los siguientes isomorfismos de A-módulos

$$\begin{aligned}D(S^{-1}\mathscr{F}_{i}^{\Phi}(M)) &= \mathrm{Hom}_A(S^{-1}\mathscr{F}_{i}^{\Phi}(M), E)\\ &\cong \mathrm{Hom}_A(S^{-1}A \otimes_A \mathscr{F}_{i}^{\Phi}(M), E)\\ &\cong \mathrm{Hom}_A(S^{-1}A, Hom_A(\mathscr{F}_{i}^{\Phi}(M), E))\\ &\cong \mathrm{Hom}_A(S^{-1}A, D(\mathscr{F}_{i}^{\Phi}(M)))\\ &= S_{-1}D(\mathscr{F}_{\Phi}^{i})(M)\\ &\cong S_{-1}\mathscr{F}_{\Phi}^{i}(DM).\end{aligned}$$

Ésto demuestra el resultado. ■

Corolario 26. *Sea M un A-módulo, entonces $\mathscr{F}_{i}^{\Phi}(M)$ es Φ-torsión para todo $i \geq 0$.*

Prueba. Tenemos que demostrar que $\mathrm{Supp}\mathscr{F}_{i}^{\Phi}(M) \subseteq \Phi$. Tome $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Cossup}(\mathscr{F}_{\Phi}^{i}(DM))$, entonces por el Corolário 25 $D((\mathscr{F}_{i}^{\Phi}(M))_{\mathfrak{p}}) = 0$. Ésto implica que $(\mathscr{F}_{i}^{\Phi}(M))_{\mathfrak{p}} = 0$ pues E es un cogenerador inyectivo de A. Por lo tanto, $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Supp}\mathscr{F}_{i}^{\Phi}(M)$. De esa forma, $\mathrm{Supp}\mathscr{F}_{i}^{\Phi}(M) \subseteq \mathrm{Cossup}(\mathscr{F}_{\Phi}^{i}(DM))$. Ahora el resultado sigue del Corolario 18. ■

CAPÍTULO 5

Cohomología local derivada

En este Capítulo generalizamos el estudio de la cohomología local de módulos para complejos de módulos. En la Sección 5.1 describimos con precisión la construcción del funtor *funtor derivado a la derecha* $\mathbf{R}\Gamma_\Phi(-) : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{D}(A)$, donde Φ es un sistema completo de ideales de un anillo conmutativo Noetheriano A y $\mathcal{D}(A)$ es la categoría derivada de la categoría Mod_A, lo que nos permite definir, para cada entero i, el *i-ésimo funtor de cohomología local derivado con respecto a* Φ. En la sección 5.2 introducimos los *funtores derivados* $\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(-)$, $\mathbf{L}\Lambda^{\mathfrak{a},\varphi} : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{D}(A)$, y usamos los resultados del Capítulo 3 para demostrar algunos isomorfismos naturales (Ver el Teorema 27 y el Teorema 29). Finalmente, en la sección 5.3 demostramos nuestro resultado principal, una versión generalizada del celebrado *Teorema de dualidad de Greenlees-May* que muestra una adjunción entre los funtores $\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(-)$ y $\mathbf{L}\Lambda^{\mathfrak{a},\varphi}(-)$, cuando el anillo A es perfecto (ver el Teorema 31).

5.1. Cohomología local derivada

Sea Φ un sistema completo de ideales de A. Para un complejo de A-módulos $C^\bullet$ definamos el complejo $\Gamma_\Phi(C^\bullet)$ por

$$\Gamma_\Phi(C^\bullet)^n := \Gamma_\Phi(C^n)$$

con diferencial

$$\delta^n_{\Gamma_\Phi(C^\bullet)} := \Gamma_\Phi(\delta^n_{C^\bullet}) = \delta^n_{C^\bullet} : \Gamma_\Phi(C^n) \longrightarrow \Gamma_\Phi(C^{n+1}).$$

Para un morfismo de A-complejos $f = \{f^n : C^n \longrightarrow D^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ entre $C^\bullet$ y $D^\bullet$ definimos el morfismo de A-complejos $\Gamma_\Phi(f) : \Gamma_\Phi(C^\bullet) \longrightarrow \Gamma_\Phi(D^\bullet)$ por

$$\Gamma_\Phi(f) := \{\Gamma_\Phi(f^n) = f^n : \Gamma_\Phi(C^n) \longrightarrow \Gamma_\Phi(D^n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

Las correspondencias $C^\bullet \longmapsto \Gamma_\Phi(C^\bullet)$ y $[f] \longmapsto [\Gamma_\Phi(f)]$ (donde [ ] indica la clase módulo homotopía) definen un funtor

$$\Gamma_\Phi(-) : \mathcal{K}(A) \longrightarrow \mathcal{K}(A).$$

Afirmamos que $\Gamma_\Phi(-)$ es un *funtor triangulado*. En efecto, desde que $\Gamma_\Phi(M \oplus N) \cong \Gamma_\Phi(M) \oplus \Gamma_\Phi(N)$ para todo par de A-módulos,el funtor $\Gamma_\Phi(-)$ es aditivo. Además,

$$(\Gamma_\Phi(C^\bullet)[1]^n = (\Gamma_\Phi(C^\bullet)^{n+1} = \Gamma_\Phi(C^{n+1}) = \Gamma_\Phi(C^\bullet[1]^n)$$

para todo A-complejo $C^\bullet$ y para todo $n \in \mathbb{Z}$. Esto implica que $\Gamma_\Phi(-)$ conmuta con el *funtor 1-traslación*. Por otro lado, si

$$C^\bullet \xrightarrow{\alpha} D^\bullet \longrightarrow \mathrm{C}(\alpha)^\bullet \longrightarrow C^\bullet[1]$$

es un *triángulo distinguido* en $\mathcal{K}(A)$, un cálculo directo muestra que $\Gamma_\Phi(\mathrm{C}(\alpha)^\bullet) = \mathrm{C}(\Gamma_\Phi(\alpha))^\bullet$ y como $\Gamma_\Phi(C[1]^\bullet) = \Gamma_\Phi(C^\bullet)[1]$, después de aplicar el funtor $\Gamma_\Phi(-)$ al triángulo distiguido de arriba, obtenemos el triángulo distinguido en $\mathcal{K}(A)$

$$\Gamma_\Phi(C^\bullet) \xrightarrow{\Gamma_\Phi(\alpha)} \Gamma_\Phi(D^\bullet) \longrightarrow \mathrm{C}(\Gamma_\Phi(\alpha))^\bullet \longrightarrow \Gamma_\Phi(C^\bullet)[1]\,.$$

Esto prueba la afirmación. Luego, la composición de los funtores

$$\mathcal{K}(A) \xrightarrow{\Gamma_\Phi(-)} \mathcal{K}(A) \xrightarrow{Q} \mathcal{D}(A)$$

también es un funtor triangulado. En consecuencia, existe el *funtor derivado a la derecha* de $Q \circ \Gamma_\Phi(-)$ (ver el Corolario 33). Denotaremos tal funtor por $\mathbf{R}\Gamma_\Phi(-)$.

Definición 5.1. El funtor

$$\mathbf{R}\Gamma_\Phi(-) : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{D}(A)$$

es llamado *funtor Φ-torsión derivado.*

A continuación vamos a describir, de manera detallada, la construcción del funtor Φ-torsión derivado. Dado un complejo de A-módulos $C^\bullet$ defina

$$\mathbf{R}\Gamma_\Phi(C^\bullet) := \Gamma_\Phi(I_{C^\bullet}),$$

donde $\iota : C^\bullet \xrightarrow{\sim} I_{C^\bullet}$ es una *resolución semi-inyectiva* de $C^\bullet$. Tal definición es independiente de la elección de la resolución semi-inyectiva. En efecto, sea $\lambda : C^\bullet \xrightarrow{\sim} E_{C^\bullet}$ otra resolución semi-inyectiva de $C^\bullet$, entonces por la parte ii) de la Proposición 33, existe un único $\mathcal{K}(A)$-isomorfismo $\gamma : I_{C^\bullet} \xrightarrow{\cong} E_{C^\bullet}$ tal que el siguiente diagrama en $\mathcal{K}(A)$ es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} C^\bullet \arrow[r, "\iota", "\sim"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_{C^\bullet}"'] & I_{C^\bullet} \arrow[d, "\cong"', "\exists!\,\gamma"] \\ C^\bullet \arrow[r, "\lambda", "\sim"'] & E_{C^\bullet}. \end{tikzcd}$$

En particular,

$$\Gamma_\Phi(I_{C^\bullet}) \cong \Gamma_\Phi(E_{C^\bullet}).$$

Ahora sea $\alpha = \dfrac{\varphi}{\psi} : C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ un morfismo en $\mathcal{D}(A)$, donde $C^\bullet \xleftarrow[\sim]{\psi} X \xrightarrow{\varphi} D^\bullet$.
Entonces por la Proposición 32 existen un único morfismo $\gamma : I_{X^\bullet} \longrightarrow I_{D^\bullet}$ y un

único casi-isomorfismo (y por lo tanto un $\mathcal{K}(A)$-isomorfismo) $\sigma : I_{X^\bullet} \xrightarrow{\cong} I_{C^\bullet}$ en $\mathcal{K}(A)$ tal que el siguiente diagrama en $\mathcal{K}(A)$ es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
C^\bullet \arrow[d, "\iota_C"', "\sim"] & X^\bullet \arrow[l, "\psi"', "\sim"] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\iota_X"', "\sim"] & D^\bullet \arrow[d, "\iota_D"', "\sim"] \\
I_{C^\bullet} & I_{X^\bullet} \arrow[l, "\sigma"', "\cong"] \arrow[r, "\gamma"] & I_{D^\bullet}.
\end{tikzcd}$$

Defina

$$\mathbf{R}F(\alpha) := \frac{\Gamma_\Phi(\gamma)}{\Gamma_\Phi(\sigma)} : \Gamma_\Phi(C^\bullet) \longrightarrow \Gamma_\Phi(D^\bullet).$$

Veamos que este morfismo está bien definido. En efecto, si $\alpha = \dfrac{\varphi_1}{\psi_1}$ es otra representación de α con $C^\bullet \xleftarrow[\sim]{\psi_1} X_1 \xrightarrow{\varphi_1} D^\bullet$, entonces existe un diagrama conmutativo en $\mathcal{K}(A)$

$$\begin{tikzcd}
& X^\bullet \arrow[dl, "\psi", "\sim"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
C^\bullet & X_2^\bullet \arrow[l, "\psi_2"', "\sim"] \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[u, "\theta"', "\sim"] \arrow[d, "\beta"', "\sim"] & D^\bullet \\
& X_1^\bullet. \arrow[ul, "\psi_1", "\sim"'] \arrow[ur, "\varphi_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Nuevamente por la Proposición 32, existen un único morfismo $\gamma_1 : I_{X_1^\bullet} \longrightarrow I_{D^\bullet}$ y un único casi-isomorfismo (y por lo tanto un $\mathcal{K}(A)$-isomorfismo) $\sigma_1 : I_{X_1^\bullet} \xrightarrow{\cong} I_{C^\bullet}$ en $\mathcal{K}(A)$ tal que el siguiente diagrama en $\mathcal{K}(A)$ es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
C^\bullet \arrow[d, "\iota_C"', "\sim"] & X_1^\bullet \arrow[l, "\psi_1"', "\sim"] \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\iota_{X_1}"', "\sim"] & D^\bullet \arrow[d, "\iota_D"', "\sim"] \\
I_{C^\bullet} & I_{X_1^\bullet} \arrow[l, "\sigma_1"', "\cong"] \arrow[r, "\gamma_1"] & I_{D^\bullet}.
\end{tikzcd}$$

De la misma manera, por la Proposición 32, existen un único morfismo $\gamma_2 : I_{X_2^\bullet} \longrightarrow I_{D^\bullet}$ y un único casi-isomorfismo (y por lo tanto un $\mathcal{K}(A)$-isomorfismo) $\sigma_2 : I_{X_2^\bullet} \xrightarrow{\cong} I_{C^\bullet}$ en $\mathcal{K}(A)$ tal que el siguiente diagrama en $\mathcal{K}(A)$ es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
C^\bullet \arrow[d, "\iota_C"', "\sim"] & X_2^\bullet \arrow[l, "\psi_2"', "\sim"] \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\iota_{X_2}"', "\sim"] & D^\bullet \arrow[d, "\iota_D"', "\sim"] \\
I_{C^\bullet} & I_{X_2^\bullet} \arrow[l, "\sigma_2"', "\cong"] \arrow[r, "\gamma_2"] & I_{D^\bullet}.
\end{tikzcd}$$

Una vez más,por la Proposición 32, existen un único casi-isomorfismo (y por lo tanto un $\mathcal{K}(A)$-isomorfismo) $\xi : I_{X_2^\bullet} \longrightarrow I_{X^\bullet}$ y un único casi-isomorfismo (y por lo tanto un $\mathcal{K}(A)$-isomorfismo) $\zeta : I_{X_2^\bullet} \xrightarrow{\cong} I_{X_1^\bullet}$ en $\mathcal{K}(A)$ tal que el siguiente diagrama en $\mathcal{K}(A)$ es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[d, "\iota_X"', "\sim"] & X_2^\bullet \arrow[l, "\theta"', "\sim"] \arrow[r, "\beta", "\sim"'] \arrow[d, "\iota_{X_2}"', "\sim"] & X_1^\bullet \arrow[d, "\iota_{X_1}"', "\sim"] \\
I_{X^\bullet} & I_{X_2^\bullet} \arrow[l, "\zeta"', "\cong"] \arrow[r, "\xi", "\cong"'] & I_{X_1^\bullet}.
\end{tikzcd}$$

Tales diagramas inducen el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{K}(A)$

$$\begin{tikzcd}
 & I_{X^\bullet} \arrow[dl, "\cong"', "\sigma"] \arrow[dr, "\gamma"] & \\
I_{C^\bullet} & X_2^\bullet \arrow[l, "\sigma_2 \circ \iota_{X_2}"', "\sim"] \arrow[r, "\gamma_2 \circ \iota_{X_2}"] \arrow[u, "\sim", "\zeta \circ \iota_{X_2}"'] \arrow[d, "\sim"', "\xi \circ \iota_{X_2}"] & I_{D^\bullet} \\
 & I_{X_1^\bullet}. \arrow[ul, "\sigma_1", "\cong"'] \arrow[ur, "\gamma_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Después de aplicar el funtor $\Gamma_\Phi(-)$ al diagrama, obtenemos que

$$\frac{\Gamma_\Phi(\gamma)}{\Gamma_\Phi(\sigma)} = \frac{\Gamma_\Phi(\gamma_1)}{\Gamma_\Phi(\sigma_1)}.$$

No es difícil ver que $\mathbf{R}\Gamma_\Phi(-)$ preserva morfismos identidad y composición de morfismos. Por lo tanto,

$$\mathbf{R}\Gamma_\Phi(-) : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{D}(A)$$

es un funtor. Más aún, se trata de un funtor triangulado. En efecto, sea

$$C^\bullet \xrightarrow{\alpha/1} D^\bullet \xrightarrow{f/1} \mathrm{C}(\alpha)^\bullet \xrightarrow{g/1} C^\bullet[1]$$

un *triángulo distinguido* en $\mathcal{D}(A)$, donde

$$C^\bullet \xrightarrow{\alpha} D^\bullet \xrightarrow{f} \mathrm{C}(\alpha)^\bullet \xrightarrow{g} C^\bullet[1]$$

es un *triángulo distinguido* en $\mathcal{K}(A)$. Escogemos $\iota_C : C^\bullet \xrightarrow{\sim} I_{C^\bullet}$ y $\iota_D : D^\bullet \xrightarrow{\sim} I_{D^\bullet}$ dos resoluciones semi-inyectivas, entonces por la Proposición 32 existe un único $\mathcal{K}(A)$-morfismo $\widetilde{\alpha} : I_{C^\bullet} \longrightarrow I_{D^\bullet}$ tal que $\widetilde{\alpha} \circ \iota_C = \iota_D \circ \alpha$. Definimos el morfismo de complejos $\iota : \mathrm{C}(\alpha)^\bullet \longrightarrow \mathrm{C}(\widetilde{\alpha})^\bullet$ por $\iota^n = (\iota_C^{n+1}, \iota_D^n)$. Desde que ι_C y ι_D son casi-isomorfismos (inyectivos), ι también es un casi-isomorfismo (inyectivo). Ahora consideremos un morfismo $\varepsilon : X^\bullet \longrightarrow \mathrm{C}(\widetilde{\alpha})^\bullet$ y un casi-isomorfismo inyectivo $\zeta : X^\bullet \xrightarrow{\sim} Y^\bullet$. Como $I_{C^\bullet}[1]$ es un complejo semi-inyectivo, la Proposición 31 garantiza la existencia de un morfismo de complejos $\gamma : Y^\bullet \longrightarrow I_{C^\bullet}[1]$ tal que $\gamma \circ \zeta = \pi_1 \circ \varepsilon$, donde $\pi_1 : \mathrm{C}(\widetilde{\alpha})^\bullet \longrightarrow I_{C^\bullet}[1]$ es la proyección natural. Del mismo modo, por la Proposición 31 existe un morfismo de complejos $\theta : Y^\bullet \longrightarrow I_{D^\bullet}$ tal que $\theta \circ \zeta = \pi_2 \circ \varepsilon$, donde

$\pi_2 : \mathrm{C}(\widetilde{\alpha})^\bullet \longrightarrow I_{D^\bullet}$ es la proyección natural, pues $I_{D^\bullet}$ es un complejo semi-inyectivo. Definimos el morfismo $\varphi : Y^\bullet \longrightarrow \mathrm{C}(\widetilde{\alpha}^\bullet)$ por

$$\varphi^n(y) = (\gamma^n(y), \theta^n(y)).$$

Entonces, $\varphi \circ \zeta = \varepsilon$. Por la Proposición 31 concluimos que $\mathrm{C}(\widetilde{\alpha}^\bullet)$ es un complejo semi-inyectivo y por lo tanto, $\iota : \mathrm{C}(\alpha)^\bullet \xrightarrow{\sim} \mathrm{C}(\widetilde{\alpha})^\bullet$ es una resolución semi-inyectiva de $\mathrm{C}(\alpha)^\bullet$. Luego, podemos escoger $I_{\mathrm{C}(\alpha)^\bullet} = \mathrm{C}(\widetilde{\alpha})^\bullet$. De esa manera,

$$I_{C^\bullet} \xrightarrow{\widetilde{\alpha}} I_{D^\bullet} \xrightarrow{\widetilde{f}} I_{\mathrm{C}(\alpha)^\bullet} \xrightarrow{\widetilde{g}} I_{C^\bullet[1]}$$

es un triángulo distinguido en $\mathcal{K}(A)$. Por lo tanto,

$$\Gamma_\Phi(I_{C^\bullet}) \xrightarrow{\widetilde{\alpha}} \Gamma_\Phi(I_{D^\bullet}) \xrightarrow{\widetilde{f}} \Gamma_\Phi(I_{\mathrm{C}(\alpha)^\bullet}) \xrightarrow{\widetilde{g}} \Gamma_\Phi(I_{C^\bullet[1]})$$

es un triángulo distinguido en $\mathcal{D}(A)$. Esto prueba que $\mathbf{R}\Gamma_\Phi(-)$ es un funtor triangulado.

A continuación, para cada $C^\bullet \in \mathcal{K}(A)$, consideremos el morfismo de complejos

$$\eta_C : Q \circ \Gamma_\Phi(C^\bullet) = \Gamma_\Phi(C^\bullet) \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_\Phi(-) \circ Q(C^\bullet) = \Gamma_\Phi(I_{C^\bullet})$$

dado por $\eta_C = \Gamma_\Phi(\frac{\iota_C}{\mathrm{id}_C})$, donde $\iota_C : C^\bullet \xrightarrow{\sim} C^\bullet$ es una resolución semi-inyectiva. Si $f : C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ es un morfismo de complejos, existe (por la Proposición 31) un $\mathcal{K}(A)$-morfismo $\widetilde{f} : I_{C^\bullet} \longrightarrow I_{D^\bullet}$ tal que el siguiente $\mathcal{K}(A)$-diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} C^\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota_C"'] & D^\bullet \arrow[d, "\iota_D"] \\ I_{C^\bullet} \arrow[r, "\widetilde{f}"] & I_{D^\bullet}. \end{tikzcd}$$

Este último diagrama induce el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{D}(A)$:

$$\begin{tikzcd} \Gamma_\Phi(C^\bullet) \arrow[r, "\eta_C"] \arrow[d, "\Gamma_\Phi(f)"'] & \Gamma_\Phi(I_{C^\bullet}) \arrow[d, "\Gamma_\Phi(\widetilde{f})"] \\ \Gamma_\Phi(D^\bullet) \arrow[r, "\eta_D"] & \Gamma_\Phi(I_{D^\bullet}). \end{tikzcd}$$

En consecuencia, $\eta = \{\eta_C\}_{C^\bullet \in \mathcal{K}(A)} : Q \circ \Gamma_\Phi \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_\Phi(-) \circ Q$ es una transformación natural. Finalmente, afirmamos que el par $(\mathbf{R}(\Gamma_\Phi)(-), \eta)$ satisface la propiedad universal que caracteriza al funtor derivado a la derecha de $Q \circ \Gamma_\Phi$. En efecto, sean $G : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{D}(A)$ un funtor triangulado y $\zeta : Q \circ \Gamma_\Phi(-) \longrightarrow G \circ Q$ un morfismo de funtores triangulados. Para cada $C^\bullet \in \mathcal{K}(A)$, consideremos el morfismo de complejos

$$\theta_C : \mathbf{R}\Gamma_\Phi(C^\bullet) = \Gamma_\Phi(I_{C^\bullet}) \longrightarrow G(C^\bullet)$$

dado por $\theta_C := \zeta_C \circ (\Gamma_\Phi(\iota_C/1))^{-1}$, donde $\iota_C : C^\bullet \xrightarrow{\sim} I_{C^\bullet}$ es una resolución semi-inyectiva de $C^\bullet$. Esto define, por construcción, un único morfismo de funtores triangulados $\theta : \mathbf{R}\Gamma_\Phi \longrightarrow G$ tal que $\zeta = \theta \circ \eta$.

Ahora consideremos, para cada $i \in \mathbb{Z}$, el *i-ésimo funtor de cohomología*

$$\mathrm{H}^i(-) : \mathcal{K}(A) \longrightarrow Mod_A \,.$$

Por definición, $\mathrm{H}^i(-)$ transforma casi isomorfismos en isomorfismos. La propiedad universal de la categoría derivada $\mathcal{D}(A)$ garantiza la existencia de un único funtor

$$\widetilde{\mathrm{H}}^i(-) : \mathcal{D}(A) \longrightarrow Mod_A$$

tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{K}(A) \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "\mathrm{H}^i(-)"'] & \mathcal{D}(A) \arrow[dl, "\widetilde{\mathrm{H}}^i(-)"] \\
Mod_A. &
\end{tikzcd}$$

Denotemos por $\mathrm{H}^i_{\Phi}(-)$ la composición de los funtores

$$\mathcal{D}(A) \xrightarrow{\mathbf{R}\Gamma_{\Phi}(-)} \mathcal{D}(A) \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{H}}^i(-)} Mod_A \,.$$

Definición 5.2. Para cada $i \in \mathbb{Z}$, el funtor $\mathrm{H}^i_{\Phi}(-) : \mathcal{D}(A) \longrightarrow Mod_A$ es llamado *i-ésimo funtor de cohomología local derivado con respecto a* Φ.

De manera explícita, para cada $C^\bullet \in \mathcal{D}(A)$,

$$\mathrm{H}^i_{\Phi}(C^\bullet) = \mathrm{H}^i(\Gamma_{\Phi}(I_{C^\bullet})),$$

donde $C^\bullet \longrightarrow I_{C^\bullet}$ es una resolución semi-inyectiva de $C^\bullet$. Y para todo morfismo $\dfrac{\varphi}{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(C^\bullet, D^\bullet)$,

$$\mathrm{H}^i_{\Phi}(\frac{\varphi}{\psi}) = \widetilde{\mathrm{H}}^i\left(\frac{\Gamma_{\Phi}(\gamma)}{\Gamma_{\Phi}(\sigma)}\right) = \mathrm{H}^i(\Gamma_{\Phi}(\gamma)) \circ (\mathrm{H}^i(\Gamma_{\Phi}(\sigma)))^{-1},$$

donde

$$\begin{tikzcd}
C^\bullet \arrow[d, "\iota_C"', "\sim"] & X^\bullet \arrow[l, "\psi"', "\sim"] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\iota_X"', "\sim"] & D^\bullet \arrow[d, "\iota_D"', "\sim"] \\
I_{C^\bullet} & I_{X^\bullet} \arrow[l, "\sigma"', "\sim"] \arrow[r, "\gamma"] & I_{D^\bullet}
\end{tikzcd} ,$$

es un diagrama conmutativo tal que las columnas son resoluciones semi-inyectivas (ver Proposición 32).

Para concluir esta sección, note lo siguiente: Desde que el funtor natural

$$Mod_A \longrightarrow \mathcal{D}(A)$$

que asocia a cada A-módulo M el *complejo concentrado en grado cero*

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

y cada homomorfismo de A-módulos $f : A \longrightarrow N$ el morfismo de complejos

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

es *plenamente fiel*, podemos identificar Mod_A como una subcategoría plena de $\mathcal{D}(A)$. Por lo tanto, las nociones de cohomología local para módulos estudiadas en el capítulo 1, pueden ser estudiadas con mayor generalidad, en el contexto de las categorías derivadas.

5.2. Algunos Isomorfismos

En esta sección, $Com(A)$ denotará la categoría de complejos de A-módulos, φ un conjunto no vacío de ideales de A, $\bar{a} = a_1, ..., a_n$ una sucesión finita de elementos de A y $\mathfrak{a} = \langle a_1, ..., a_n \rangle$ el ideal generado por tales elementos.

Definición 5.3. Sea $F : Com(A) \longrightarrow Com(A)$ un funtor.

(i) Decimos que F *sale a la izquierda* si para todo $n \in \mathbb{Z}$, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $X^\bullet \in Com(A)$ con $\mathrm{H}^i(X^\bullet) = 0$ para todo $i > m$, tenemos que $\mathrm{H}^i(F(X^\bullet)) = 0$ para todo $i > n$.

(ii) Decimos que F *sale a la derecha* si para todo $n \in \mathbb{Z}$, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $X^\bullet \in Com(A)$ con $\mathrm{H}^i(X^\bullet) = 0$ para todo $i < m$, tenemos que $\mathrm{H}^i(F(X^\bullet)) = 0$ para todo $i < n$.

(iii) Decimos que F es un *funtor de salida* si F sale a la izquierda y sale a la derecha.

El siguiente lema facilitará la demostración de nuestros próximos resultados.

Lema 19. *Sean $F, G : Com(A) \longrightarrow Com(A)$ dos funtores aditivos que conmutan con traslaciones y preservan exactitud de sucesiones exactas cortas de A-complejos que se escinden en cada grado. Dada una transformación natural $T : F \longrightarrow G$, las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

(i) Si X es un complejo limitado de A-módulos tal que $T_{X^i} : F(X^i) \longrightarrow G(X^i)$ es un casi-isomorfismo para todo $i \in \mathbb{Z}$, entonces $T_{X^\bullet} : F(X^\bullet) \longrightarrow G(X^\bullet)$ es un casi-isomorfismo.

(ii) Si F y G salen a la derecha y X es un complejo de A-módulos limitado a la izquierda tal que $T_{X^i} : F(X^i) \longrightarrow G(X^i)$ es un casi-isomorfismo para todo $i \in \mathbb{Z}$, entonces $T_{X^\bullet} : F(X^\bullet) \longrightarrow G(X^\bullet)$ es un casi-isomorfismo.

(iii) Si F y G salen a la izquierda y X es un complejo de A-módulos limitado a la derecha tal que $T_{X^i} : F(X^i) \longrightarrow G(X^i)$ es un casi-isomorfismo para todo $i \in \mathbb{Z}$, entonces $T_{X^\bullet} : F(X^\bullet) \longrightarrow G(X^\bullet)$ es un casi-isomorfismo.

(iv) Si F y G son funtores de salida y $X^\bullet$ es un complejo de A-módulos de manera que $T_{X^i} : F(X^i) \longrightarrow G(X^i)$ es un casi-isomorfismo para todo $i \in \mathbb{Z}$, entonces $T_{X^\bullet} : F(X^\bullet) \longrightarrow G(X^\bullet)$ es un casi-isomorfismo.

Prueba. (i) Sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$X^\bullet : \quad 0 \longrightarrow X^0 \xrightarrow{\delta_X^0} X^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X^{n-1} \xrightarrow{\delta_X^{n-1}} X^n \longrightarrow 0.$$

Sea

$$Y^\bullet : \quad 0 \longrightarrow X^0 \xrightarrow{\delta_X^0} X^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X^{n-2} \xrightarrow{\delta_X^{n-2}} X^{n-1} \longrightarrow 0,$$

el complejo que resulta de "retirar" el término X^n del complejo $X^\bullet$. Consideremos la sucesión exacta de complejos que se escinde en cada grado

$$0 \longrightarrow X^n[n] \longrightarrow X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet \longrightarrow 0\ .$$

Después de aplicar los funtores F y G obtenemos el siguiente diagrama conmutativo de A-complejos con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F(X^n)[n] \arrow[r] \arrow[d, "T_{X^n[n]}"'] & F(X^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "T_{X^\bullet}"'] & F(Y^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "T_{Y^\bullet}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & G(X^n)[n] \arrow[r] & G(X^\bullet) \arrow[r] & G(Y^\bullet) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por hipótesis, $T_{X^n[n]}$ es un casi-isomorfismo. Luego, para probar que $T_{X^\bullet}$ es un casi-isomorfismo, es suficiente probar que $T_{Y^\bullet}$ es un casi-isomorfismo. Desde que $Y^\bullet$ es un complejo limitado podemos proceder como en la etapa anterior hasta llegar a un nivel que necesitamos, T_{X^0}, que es un casi-isomorfismo por la hipótesis.

(ii) Sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$X^\bullet : \quad 0 \longrightarrow X^0 \xrightarrow{\delta_X^0} X^1 \longrightarrow \cdots\ .$$

Dado un entero $i \in \mathbb{Z}$ deseamos probar que $\mathrm{H}^i(T_{X^\bullet}) : \mathrm{H}^i(F(X^\bullet)) \longrightarrow \mathrm{H}^i(G(X^\bullet))$ es un isomorfismo. Desde que F y G salen a la derecha, podemos escoger j correspondiente a $i+1$. Consideremos los complejos

$$Y^\bullet : \quad 0 \longrightarrow X^0 \xrightarrow{\delta_X^0} X^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X^{j-1} \xrightarrow{\delta_X^{j-1}} X^j \longrightarrow 0$$

y

$$Z^\bullet : \quad \cdots \longrightarrow X^{j+1} \xrightarrow{\delta_X^{j+1}} X^{j+2} \longrightarrow 0\ .$$

Entonces existe una sucesión exacta de complejos que se escinde en cada grado

$$0 \longrightarrow Y^\bullet \longrightarrow X^\bullet \longrightarrow Z^\bullet \longrightarrow 0\ .$$

Aplicando los funtores F y G obtenemos el siguiente diagrama conmutativo de A-complejos con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F(Y^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "T_{Y^\bullet}"'] & F(X^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "T_{X^\bullet}"'] & F(Z^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "T_{Z^\bullet}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & G(Y^\bullet) \arrow[r] & G(X^\bullet) \arrow[r] & G(Z^\bullet) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

El diagrama anterior induce el siguiente diagrama conmutativo de A-módulos con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 = \mathrm{H}^{i-1}(F(Z^\bullet)) \arrow[r] & \mathrm{H}^i(F(Y^\bullet)) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{H}^i(T_{Y^\bullet})"'] & \mathrm{H}^i(F(X^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{H}^i(T_{X^\bullet})"'] & \mathrm{H}^i(F(Z^\bullet) = 0 \\
0 = \mathrm{H}^{i-1}(G(Z^\bullet)) \arrow[r] & \mathrm{H}^i(G(Y^\bullet)) \arrow[r] & \mathrm{H}^i(G(X^\bullet) \arrow[r] & \mathrm{H}^i(G(Z^\bullet) = 0.
\end{tikzcd}$$

Desde que $Y^\bullet$ es limitado, sigue de la parte (i) que $\mathrm{H}^i(T_{Y^\bullet})$ es un isomorfismo y, en consecuencia, $\mathrm{H}^i(T_{X^\bullet})$ también es un isomorfismo.

(iii) Sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$X^\bullet : \quad \cdots \longrightarrow X^{n-1} \xrightarrow{\delta_X^{n-1}} X^n \longrightarrow 0.$$

Dado un entero $i \in \mathbb{Z}$ deseamos probar que $\mathrm{H}^i(T_{X^\bullet}) : \mathrm{H}^i(F(X^\bullet)) \longrightarrow \mathrm{H}^i(G(X^\bullet))$ es un isomorfismo. Desde que F y G salen a la izquierda, podemos escoger j correspondiente a $i-2$. Consideremos los complejos

$$Y^\bullet : \quad 0 \longrightarrow X^j \xrightarrow{\delta_X^j} X^{j+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X^{n-1} \xrightarrow{\delta_X^{n-1}} X^n \longrightarrow 0$$

y

$$Z^\bullet : \quad \cdots \longrightarrow X^{j-2} \xrightarrow{\delta_X^{j-2}} X^{j-1} \longrightarrow 0\ .$$

Entonces existe una sucesión exacta de complejos que se escinde en cada grado

$$0 \longrightarrow Y^\bullet \longrightarrow X^\bullet \longrightarrow Z^\bullet \longrightarrow 0\ .$$

Aplicando los funtores F y G obtenemos el siguiente diagrama conmutativo de A-complejos con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F(Y^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "T_{Y^\bullet}"'] & F(X^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "T_{X^\bullet}"'] & F(Z^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "T_{Z^\bullet}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & G(Y^\bullet) \arrow[r] & G(X^\bullet) \arrow[r] & G(Z^\bullet) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

El diagrama anterior induce el siguiente diagrama conmutativo de A-módulos con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 = \mathrm{H}^{i-1}(F(Z^\bullet)) \arrow[r] & \mathrm{H}^i(F(Y^\bullet)) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{H}^i(T_{Y^\bullet})"'] & \mathrm{H}^i(F(X^\bullet)) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{H}^i(T_{X^\bullet})"'] & \mathrm{H}^i(F(Z^\bullet)) = 0 \\
0 = \mathrm{H}^{i-1}(G(Z^\bullet)) \arrow[r] & \mathrm{H}^i(G(Y^\bullet)) \arrow[r] & \mathrm{H}^i(G(X^\bullet)) \arrow[r] & \mathrm{H}^i(G(Z^\bullet)) = 0.
\end{tikzcd}$$

Desde que $Y^\bullet$ es limitado, sigue de la parte (i) que $\mathrm{H}^i(T_{Y^\bullet})$ es un isomorfismo y, en consecuencia, $\mathrm{H}^i(T_{X^\bullet})$ también es un isomorfismo.

(iv) Dado un complejo de A-módulos

$$X^\bullet : \quad \cdots \longrightarrow X^{-1} \xrightarrow{\delta_X^{-1}} X^0 \xrightarrow{\delta_X^0} X^1 \longrightarrow \cdots$$

consideremos los complejos

$$Y^\bullet : \quad 0 \longrightarrow X^0 \xrightarrow{\delta_X^0} X^1 \longrightarrow \cdots$$

y

$$Z^\bullet : \quad \cdots \longrightarrow X^{-2} \xrightarrow{\delta_X^{-2}} X^{-1} \longrightarrow 0.$$

Entonces existe una sucesión exacta de complejos que se escinde en cada grado

$$0 \longrightarrow Y^\bullet \longrightarrow X^\bullet \longrightarrow Z^\bullet \longrightarrow 0\ .$$

Aplicando los funtores F y G obtenemos el siguiente diagrama conmutativo de A-complejos con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F(Y^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "T_{Y^\bullet}"'] & F(X^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "T_{X^\bullet}"'] & F(Z^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "T_{Z^\bullet}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & G(Y^\bullet) \arrow[r] & G(X^\bullet) \arrow[r] & G(Z^\bullet) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Desde que $Y^\bullet$ es limitada a la izquierda, T_Y es un casi-isomorfismo por la parte (i). Como $Z^\bullet$ es limitada a la derecha, T_Z es un casi-isomorfismo por la parte (ii). Por lo tanto, T_X es un casi-isomorfismo.

■

Teorema 27. *Sea $X^\bullet \in \mathcal{D}(A)$. Entonces existen isomorfismos naturales en $\mathcal{D}(A)$,*

$$\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(X^\bullet) \cong C^\bullet_{\bar{a},\varphi} \otimes^{\mathbf{L}}_A X^\bullet.$$

Prueba. Sea $X^\bullet \xrightarrow{\cong} E^\bullet$ una resolución semi-inyectiva de $X^\bullet$. Entonces

$$\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(X^\bullet) \cong \Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(E^\bullet)$$

y

$$C^\bullet_{\bar{a},\varphi} \otimes^{\mathbf{L}}_A X^\bullet \cong C^\bullet_{\bar{a},\varphi} \otimes^{\mathbf{L}}_A E^\bullet \cong C^\bullet_{\bar{a},\varphi} \otimes_A E^\bullet,$$

pues $C^\bullet_{\bar{a},\varphi}$ es un complejo semi-plano. Por lo tanto, para demostrar el resultado, es suficiente establecer un casi-isomorfismo $\Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(E^\bullet) \xrightarrow{\cong} C^\bullet_{\bar{a},\varphi} \otimes_A E^\bullet$.

Consideremos un complejo de A-módulos $Y^\bullet$. Para cada $i \in \mathbb{Z}$ sea

$$T^i_Y : \Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(Y^\bullet)^i = \Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(Y^i) \longrightarrow (C^\bullet_{\bar{a},\varphi} \otimes_A Y^i) = (C^\bullet_{\bar{a},\varphi} \otimes_A Y^\bullet)^i$$

la composición de los homomorfismos de A-módulos

$$\Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(Y^i) \xrightarrow{\cong} \mathrm{H}^0_{\mathfrak{a},\varphi}(Y^i) \xrightarrow{\cong} \mathrm{H}^0(C^\bullet_{\bar{a},\varphi} \otimes_A E^i) \longrightarrow (C^\bullet_{\bar{a},\varphi} \otimes_A Y^\bullet)^i,$$

donde el segundo isomorfismo (natural) sigue del Teorema 10 y el último homomorfismo es la composición de los homomorfismos de A-módulos

$$\mathrm{H}^0(C^{\bullet}_{\bar{a},\varphi} \otimes_A Y^i) = \mathrm{Ker}(\partial^0 \otimes_A Y^i) \longrightarrow C^{\bullet}_{\bar{a},\varphi} \otimes_A Y^i \longrightarrow \bigoplus_{s+t=i} (C^{\bullet}_{\bar{a},\varphi})_s \otimes_A Y^t = (C^{\bullet}_{\bar{a},\varphi}) \otimes_A Y^{\bullet})^i.$$

Es claro que

$$T_Y = (T_Y^i)_{i\in\mathbb{Z}} : \Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(Y^{\bullet}) \longrightarrow C^{\bullet}_{\bar{a},\varphi} \otimes_A Y^{\bullet}$$

es un morfismo natural de A-complejos.

Por otro lado, desde que cada E^i es inyectivo, $\mathrm{H}^j(C^{\bullet}_{\bar{a},\varphi}) \otimes_A E^i) \cong \mathrm{H}^j_{\mathfrak{a},\varphi}(E^i) = 0$ para todo $j \geq 1$. Por lo tanto, $T_E^i : \Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(E^i) \longrightarrow (C^{\bullet}_{\bar{a},\varphi}) \otimes_A Y\bullet)^i$ es un casi-isomorfismo.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(E^i) \arrow[r] \arrow[d, "T_E^i"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & (C^{\bullet}_{\bar{a},\varphi})^0 \otimes_A E^i \arrow[r] & (C^{\bullet}_{\bar{a},\varphi})^1 \otimes_A E^i \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & (C^{\bullet}_{\bar{a},\varphi})^n \otimes_A E^i \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Como $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-) : \mathit{Com}(A) \longrightarrow \mathit{Com}(A)$ y $C^{\bullet}_{\bar{a},\varphi} \otimes_A (-) : \mathit{Com}(A) \longrightarrow \mathit{Com}(A)$ son funtores aditivos de salida que conmutan con traslaciones y preservan exactitud de sucesiones exactas cortas de A-complejos que se escinden en cada grado , concluimos por la parte (iv) del Lema 19 que $T_E : \Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(E^{\bullet}) \longrightarrow C^{\bullet}_{\bar{a},\varphi} \otimes_A E^{\bullet}$ es un casi-isomorfismo. ■

Corolario 28. *Sean $X^{\bullet}, Y^{\bullet} \in \mathcal{D}(A)$. Entonces existen isomorfismos naturales*

(i) $\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(X^{\bullet}) \cong \mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(A) \otimes_A^{\mathbf{L}} X^{\bullet}$.

(ii) $X^{\bullet} \otimes_A^{\mathbf{L}} \mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(Y^{\bullet}) \cong \mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(X^{\bullet} \otimes Y^{\bullet}) \cong \mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(X^{\bullet}) \otimes_A^{\mathbf{L}} Y^{\bullet}$.

Prueba. (i) Aplicando el Teorema 27 y la propiedad asociativa del funtor derivado tensor (ver Proposición 39), existen isomorfismos naturales

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(A) \otimes_A^{\mathbf{L}} X^{\bullet} &\cong (C^{\bullet}_{\mathfrak{a},\varphi} \otimes_A^{\mathbf{L}} A) \otimes_A^{\mathbf{L}} X^{\bullet} \\
&\cong C^{\bullet}_{\mathfrak{a},\varphi} \otimes_A^{\mathbf{L}} (A \otimes_A^{\mathbf{L}} X^{\bullet}) \\
&\cong C^{\bullet}_{\mathfrak{a},\varphi} \otimes_A^{\mathbf{L}} X^{\bullet} \\
&\cong \mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(X^{\bullet}).
\end{aligned}$$

(ii) Gracias al Teorema 27 existen isomorfismos naturales

$$X^{\bullet} \otimes_A^{\mathbf{L}} \mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(Y^{\bullet}) \cong X^{\bullet} \otimes_A^{\mathbf{L}} (C^{\bullet}_{\mathfrak{a},\varphi} \otimes_A^{\mathbf{L}} Y^{\bullet}),$$

$$\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(X^{\bullet} \otimes_A^{\mathbf{L}} Y^{\bullet}) \cong C^{\bullet}_{\mathfrak{a},\varphi} \otimes_A^{\mathbf{L}} (X \otimes_A^{\mathbf{L}} Y^{\bullet})$$

y

$$\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(X^{\bullet}) \otimes_A^{\mathbf{L}} Y \cong (C^{\bullet}_{\mathfrak{a},\varphi} \otimes_A^{\mathbf{L}} X) \otimes_A^{\mathbf{L}} Y^{\bullet}.$$

Pero, por las propiedades asociativas y conmutativa del *tensor derivado*, los tres complejos de la derecha son naturalmente isomorfos (ver Proposición 39).

■

Dado un elemento $s \in A$ consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A[X] \oplus A \arrow[r, "f_s"] \arrow[d, "g_s^0"'] & A[X] \arrow[r] \arrow[d, "g_s^1"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\iota_s"] & A_s \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

donde $f_s(p(X), b) = (sX - 1)p(X) + b$, $g_s^0(p(X), b) = b$ es la segunda proyección, ι_s es el homomorfismo de localización y $g_s^1(p(X)) = p(\frac{1}{s})$. Denotemos por $L_s^\bullet$ el complejo de A-módulos definido por la fila superior del diagrama anterior, concentrado en los grados 0 y 1. Notemos que la fila inferior es precisamente el complejo de Čech $C_s^\bullet$. Además los homomorfismos g_s^0 y g_s^1 definen un casi-isomorfismo $g_s : L_s^\bullet \xrightarrow{\cong} C_s^\bullet$.

Dado un elemento $a \in A$, el conjunto multiplicativo $S_{a,\varphi}$ junto con el orden parcial $\leqslant$ definido por $s \leqslant t$ si existe $r \in A$ tal que $t = rs$, es un conjunto dirigido. Para cada par de elementos $s, t \in S_{\mathfrak{a},\varphi}$ tal que $s \leqslant t$ consideremos los homomorfismos de A-módulos $\psi_{ts} : A[X] \oplus A \longrightarrow A[X] \oplus A$ y $\sigma_{ts} : A[X] \longrightarrow A[X]$ definidos por $\psi_{ts}^0(p(X), b) = p(rX) + b$ y $\psi_{ts}^1(p(X)) = p(rX)$, respectivamente. Entonces el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A[X] \oplus A \arrow[r, "f_s"] \arrow[d, "\psi_{ts}^0"'] & A[X] \arrow[r] \arrow[d, "\psi_{ts}^1"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A[X] \oplus A \arrow[r, "f_t"] & A[X] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Esto define un morfismo de complejos de A-módulos $\psi_{ts} : L_s^\bullet \longrightarrow L_t^\bullet$. No es dificil ver que

$$\{L_s^\bullet, \psi_{ts} : L_s^\bullet \longrightarrow L_t^\bullet, \text{ si } s \leqslant t\}_{s \in S_{\mathfrak{a},\varphi}}$$

es un sistema directo de complejos de A-módulos. Sea

$$L_{a,\varphi}^\bullet := \varinjlim_{s \in S_{\mathfrak{a},\varphi}} L_s^\bullet \in Com(A).$$

De manera análoga, para cada par $s, t \in S_{\mathfrak{a},\varphi}$ tal que $s \leqslant t$, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\iota_s"] \arrow[d, "\sigma_{ts}^0"'] & A_s \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_{ts}^1"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\iota_t"] & A_t \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

es conmutativo, donde $\sigma_{ts}^0(b) = b$ y $\sigma_{ts}^1(\frac{b}{s}) = \frac{rb}{t}$. Esto define un morfismo de complejos de A-módulos

$$\sigma_{ts} : C_s^\bullet \longrightarrow C_t^\bullet.$$

No es difícil ver que

$$\{C_s^\bullet, \psi_{ts} : C_s^\bullet \longrightarrow C_t^\bullet, \text{ si } s \leqslant t\}_{s \in S_{\mathfrak{a},\varphi}}$$

es un sistema directo de complejos de A-módulos. Desde que $\varinjlim_{s \in S_{\mathfrak{a},\varphi}} A \cong A$ (pues $\sigma_{ts}^0 = \mathrm{id}_A$ para todo $s \leqslant t$) y $\varinjlim_{s \in S_{\mathfrak{a},\varphi}} A_s \cong A_{\mathfrak{a},\varphi}$, obtenemos

$$\varinjlim_{s \in S_{\mathfrak{a},\varphi}} C_s^\bullet \cong C_{a,\varphi}^\bullet.$$

Ahora es claro que los casi-isomorfismos $g_s : L_s^\bullet \xrightarrow{\sim} C_s^\bullet$ inducen un casi-isomorfismo de complejos de A-módulos

$$g : L_{a,\varphi}^\bullet \xrightarrow{\sim} C_{a,\varphi}^\bullet \, .$$

Recordemos que un anillo A es *perfecto* si todo A-módulo plano es proyectivo. Tales anillos fueron introducidos por Hymann Bass en [4] donde demostró, entre otros resultados, que un anillo A es perfecto, si y solo si, límites directos filtrados de A-módulos proyectivos son proyectivos. Por lo tanto, si asumimos que A es perfecto,

$$L_{a,\varphi}^\bullet \xrightarrow{\sim} C_{a,\varphi}^\bullet$$

es una resolución semi-proyectiva de $C_{a,\varphi}^\bullet$.

Definimos ahora el complejo de A-módulos

$$L_{\bar{a},\varphi}^\bullet := L_{a_1,\varphi}^\bullet \otimes_A \cdots \otimes_A L_{a_n,\varphi}^\bullet,$$

donde $\bar{a} = a_1, \ldots, a_n$ es una sucesión finita de elemntos de A. Entonces $L_{\bar{a},\varphi}^\bullet \xrightarrow{\sim} C_{\bar{a},\varphi}^\bullet$ es una resolución semi-proyectiva de $C_{\bar{a},\varphi}^\bullet$.

A continuación, denotemos por $\mathcal{D}_<^f(A)$ la subcategoría plena de $\mathcal{D}(A)$ cuyos objetos son los complejos de A-módulos $X^\bullet$ tales que $\mathrm{H}_i(X^\bullet)$ es un A-módulo finitamente generado para todo $i \in \mathbb{Z}$ y, existe un entero k de manera que $\mathrm{H}_i(X^\bullet) = 0$ para todo $i > k$.

Teorema 29. *Supongamos que A es un anillo perfecto. Sea $X^\bullet \in \mathcal{D}_<^f(A)$, entonces existen isomorfismos naturales en $\mathcal{D}_<^f(A)$,*

$$\mathbf{L}\Lambda^{\mathfrak{a},\varphi}(X^\bullet) \cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(C_{\bar{a},\varphi}^\bullet, X^\bullet).$$

Prueba. Sea $F^\bullet \xrightarrow{\cong} X^\bullet$ una resolución semi-libre de $X^\bullet$ tal que F_i es finitamente generado para todo $i \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$\mathbf{L}\Lambda^{\mathfrak{a},\varphi}(X^\bullet) \cong \Lambda^{\mathfrak{a},\varphi}(F^\bullet)$$

y

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(C_{\bar{a},\varphi}^\bullet, X^\bullet) \cong \mathrm{Hom}_A(L_{\bar{a},\varphi}^\bullet, X) \cong \mathrm{Hom}_A(L_{\bar{a},\varphi}^\bullet, F^\bullet).$$

Luego, para demostrar el Teorema es suficiente establecer un casi-isomorfismo natural

$$\mathrm{Hom}_A(L_{\bar{a},\varphi}^\bullet, F^\bullet) \xrightarrow{\cong} \Lambda^{\mathfrak{a},\varphi}(F^\bullet) \, .$$

Consideremos un objeto $Y^\bullet \in \mathcal{D}_<^f(A)$. Para cada $i \in \mathbb{Z}$ sea

$$\zeta_i^Y : \mathrm{Hom}_A(L_{\bar{a},\varphi}^\bullet, Y^\bullet)_i = \mathrm{Hom}_A(L_{\bar{a},\varphi}^\bullet, Y_i) \longrightarrow \Lambda^{\mathfrak{a},\varphi}(Y_i) = \Lambda^{\mathfrak{a},\varphi}(Y^\bullet)_i$$

la composición de los homomorfismos de A-módulos

$$\mathrm{Hom}_A(L_{\bar{a},\varphi}^\bullet, Y_i) = \prod_{s \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_A((L_{\bar{a},\varphi}^\bullet)_s, Y_{s+i}) \longrightarrow \mathrm{H}_0(\mathrm{Hom}_A((C_{\bar{a},\varphi}^\bullet)_0, Y_i)) \xrightarrow{\cong} \Lambda^{\mathfrak{a},\varphi}(Y_i),$$

donde el último isomorfismo (natural) sigue del Corolario 12 y el segundo homomorfismo es composición de los homomorfismos de A-módulos

$$\prod_{s\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_A((L^\bullet_{\tilde{a},\varphi})_s, Y_{s+i}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A((L^\bullet_{\tilde{a},\varphi})_0, Y_i) \longrightarrow \mathrm{H}_0(\mathrm{Hom}_A((L^\bullet_{\tilde{a},\varphi}), Y_i))$$
$$\xrightarrow{\quad\cong\quad} \mathrm{H}_0(\mathrm{Hom}_A((C^\bullet_{\tilde{a},\varphi}), Y_i)).$$

Es claro que
$$\zeta^Y = (\zeta^Y_i)_{i\in\mathbb{Z}} : \mathrm{Hom}_A(L^\bullet_{\tilde{a},\varphi}, Y^\bullet) \longrightarrow \Lambda^{\mathfrak{a},\varphi}(Y^\bullet)$$
es un morfismo natural de A-complejos.

Por otro lado, desde que cada F_i es un A-módulo proyectivo (libre),

$$\mathrm{H}_j(L^\bullet_{\tilde{a},\varphi})(F_i) \cong \mathrm{H}_j(C^\bullet_{\tilde{a},\varphi}) \otimes_A F_i) \cong \mathrm{H}^{\mathfrak{a},\varphi}_j(F_i) = 0 \text{ para todo } j \geq 1.$$

Por lo tanto, $\zeta^F_i : \mathrm{Hom}_A(L^\bullet_{\tilde{a},\varphi}, F_i) \longrightarrow \Lambda^{\mathfrak{a},\varphi}(F_i)$ es un casi-isomorfismo.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A((L^\bullet_{\tilde{a},\varphi})_0, F_i) \arrow[r] \arrow[d, "\zeta^F_i"] & \mathrm{Hom}_A((L^\bullet_{\tilde{a},\varphi})_1, F_i) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A((L^\bullet_{\tilde{a},\varphi})_n, F_i) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Lambda^{\mathfrak{a},\varphi}(F_i) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Como $\mathrm{Hom}_A(L^\bullet_{\tilde{a},\varphi}, -) : \mathit{Com}(A) \longrightarrow \mathit{Com}(A)$ y $\Lambda^{\mathfrak{a},\varphi}(-) : \mathit{Com}(A) \longrightarrow \mathit{Com}(A)$ son funtores aditivos de salida que conmutan con traslaciones y preservan exactitud de sucesiones exactas cortas de A-complejos que se escinden en cada grado , concluimos por la parte (iv) del Lema 19 que, concluimos por el Lema 19 que

$$\zeta^F : \mathrm{Hom}_A(L^\bullet_{\tilde{a}}, F^\bullet) \longrightarrow \Lambda^{\mathfrak{a},\varphi}(F^\bullet)$$

es un casi-isomorfismo. ∎

Corolario 30. *Supongamos que A es un anillo perfecto. Sea $X^\bullet \in \mathcal{D}^f_<(A)$, entonces existe un isomorfismo natural,*

$$\mathbf{L}\Lambda^{\mathfrak{a},\varphi}(X^\bullet) \cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(A), X^\bullet).$$

Prueba. Gracias al Teorema 27 existen isomorfismos naturales

$$\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(A) \cong C^\bullet_{\mathfrak{a},\varphi} \otimes^{\mathbf{L}}_A A \cong C^\bullet_{\mathfrak{a},\varphi}.$$

Luego, por el Teorema 29,

$$\mathbf{L}\Lambda^{\mathfrak{a},\varphi}(X^\bullet) \cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(A), X^\bullet).$$

∎

Proposición 25. *Sea $X^\bullet \in \mathcal{D}^f_<(A)$. Entonces existe un isomorfismo en $\mathcal{D}(A)$,*

$$\mathbf{L}\Lambda^{\mathcal{G}(\mathfrak{a},\varphi)}(X^\bullet) \cong X^\bullet \otimes^{\mathbf{L}}_A \Lambda^{\mathcal{G}(\mathfrak{a},\varphi)}(A).$$

Prueba. Desde que $X^\bullet \in \mathcal{D}^f_<(A)$, admite una resolución semi-libre $L^\bullet \xrightarrow{\sim} X^\bullet$ de la forma

$$L : \cdots \longrightarrow L_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_m \longrightarrow 0\,,$$

donde cada L_k es un A-módulo libre finitamente generado. Gracias al Corolario 12 y el hecho que cada $L_k \cong A^{n_k}$ es libre de rango finito, tenemos los siguientes isomorfismos naturales

$$\begin{aligned}
L_k \otimes_A \Lambda^{\mathcal{G}(\mathfrak{a},\varphi)}(A) &\cong A^{n_k} \otimes_A \mathrm{H}_0(\mathrm{Hom}_A(C^\bullet_{\mathfrak{a},\varphi}, A)) \\
&\cong \bigoplus_{i=1}^{n_k} \mathrm{H}_0(\mathrm{Hom}_A(C^\bullet_{\mathfrak{a},\varphi}, A)) \\
&\cong \mathrm{H}_0(\bigoplus_{i=1}^{n_k} \mathrm{Hom}_A(C^\bullet_{\mathfrak{a},\varphi}, A)) \\
&\cong \mathrm{H}_0(\mathrm{Hom}_A(C^\bullet_{\mathfrak{a},\varphi}, L_k)) \\
&\cong \Lambda^{\mathcal{G}(\mathfrak{a},\varphi)}(L_k)
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}\Lambda^{\mathcal{G}(\mathfrak{a},\varphi)}(X^\bullet) &\cong \Lambda^{\mathcal{G}(\mathfrak{a},\varphi)}(L^\bullet) \\
&\cong L^\bullet \otimes_A \Lambda^{\mathcal{G}(\mathfrak{a},\varphi)}(A) \\
&\cong X^\bullet \otimes^{\mathbf{L}}_A \Lambda^{\mathcal{G}(\mathfrak{a},\varphi)}(A),
\end{aligned}$$

lo que demuestra el resultado. ∎

5.3. Dualidad de Greenlees-May

Finalizamos nuestro trabajo presentando una versión generalizada del celebrado *Teorema de dualidad de Greenlees-May*(ver [13, Corollary 4.1.1]), en el contexto de los anillos perfectos.

Teorema 31. *Supongamos que el anillo A es perfecto. Sean $X^\bullet \in \mathcal{D}(A)$ y $Y^\bullet \in \mathcal{D}^f_<(A)$. Entonces existe un isomorfismo natural*

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(X^\bullet), Y^\bullet) \cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(X, \mathbf{L}\Lambda^{\mathfrak{a},\varphi}(Y^\bullet)).$$

Prueba. Usando el Corolario 28, el Corolario 30 y el Isomorfismo de Adjunción (Proposición 39), obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(X^\bullet), Y^\bullet) &\cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(A) \otimes^{\mathbf{L}}_A X^\bullet, Y^\bullet) \\
&\cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(X^\bullet, \mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(A), Y^\bullet)) \\
&\cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(X^\bullet, \mathbf{L}\Lambda^{\mathfrak{a},\varphi}(Y^\bullet)).
\end{aligned}$$

∎

Corolario 32. *Supongamos que el anillo A es perfecto. Sean $X^\bullet, Y^\bullet \in \mathcal{D}^f_<(A)$. Entonces existe un isomorfismo natural*

$$\mathbf{L}\Lambda^{\mathfrak{a},\varphi}(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(X^\bullet, Y^\bullet)) \cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(X^\bullet, \mathbf{L}\Lambda^{\mathfrak{a},\varphi}(Y^\bullet)).$$

Prueba. Por el Corolario 28, el Corolario 30, el Isomorfismo de Adjunción (Proposición 39) y el Teorema 31 tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}\Lambda^{\mathfrak{a},\varphi}(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(X^\bullet, Y^\bullet)) &\cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(A), \mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(X^\bullet, Y^\bullet)) \\
&\cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(A) \otimes^{\mathbf{L}}_A X^\bullet, Y^\bullet) \\
&\cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{a},\varphi}(X^\bullet), Y^\bullet) \\
&\cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(X^\bullet, \mathbf{L}\Lambda^{\mathfrak{a},\varphi}(Y^\bullet)).
\end{aligned}$$

■

Conclusiones

Los resultados obtenidos son recientes y potencializarán el desarrollo de esta importante área de la matemática.
Como primer fruto de mi investigación, publicamos el siguiente artículo:

Caro Tuesta, N., Durán Quiñones, S. I., Mendoza Quispe, W. (2021). *Una teoría de cohomología local generalizada.* Pesquimat, 24(2), 13-33.
https://doi.org/10.15381/pesquimat.v24i2.21674

Dicho artículo se sustenta en el capítulo 3 de mi tesis doctoral. Además de ello, están en fase de preparación, tres artículos adicionales, relativos a los resultados principales de los capítulos 2, 4 y 5 del presente trabajo.

APÉNDICE A

Categorías Derivadas

En este apéndice recolectamos algunas nociones básicas sobre categorías derivadas, resoluciones de complejos y funtores derivados. El lector interesado en más detalles y en las demostraciones de los resultados presentados aquí, puede consultar el excelente libro *Derived Categories* de Amnon Yekutieli ([20], así como el manuscrito *Derived Category Methods in Commutative Algebra* (notas en preparación) de Lars Winther Christensen, Hans-Bjørn Foxby y Henrik Holm ([7]).

1.1. Categorías Derivadas

A lo largo de esta sección, $\mathscr{A}$ denotará una categoría abeliana. Son ejemplos de categorías abelianas,

i) $\mathscr{A} = Mod_A$, la categoría de los A-módulos sobre un anillo conmutativo A.

ii) $\mathscr{A} = Mod(\mathscr{O}_X)$, la categoría de haces de $\mathscr{O}_X$-módulos, donde $(X, \mathscr{O}_X)$ es un espacio anillado.

iii) $\mathscr{A} = QCoh(\mathscr{O}_X)$, la categoría de $\mathscr{O}_X$-módulos casi-coherentes sobre un esquema $(X, \mathscr{O}_X)$.

Un *complejo en $\mathscr{A}$* es un diagrama

$$C^\bullet : \cdots \longrightarrow C^{-1} \xrightarrow{\delta^{-1}} C^0 \xrightarrow{\delta^0} C^1 \xrightarrow{\delta^1} \cdots$$

de morfismos en $\mathscr{A}$ tal que $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Un *morfismo de complejos* $\varphi : C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ es una colección de morfismos $\{\varphi^n : C^n \longrightarrow D^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ en $\mathscr{A}$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C^{n-1} \arrow[r, "\delta^{n-1}"] \arrow[d, "\varphi^{n-1}"'] & C^n \arrow[r, "\delta^n"] \arrow[d, "\varphi^n"'] & C^{n+1} \arrow[r, "\delta^{n+1}"] \arrow[d, "\varphi^{n+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D^{n-1} \arrow[r, "\partial^{n-1}"] & D^n \arrow[r, "\partial^n"] & D^{n+1} \arrow[r, "\partial^{n+1}"] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

La *categoría $Com(\mathscr{A})$, cuyos objetos son los complejos en $\mathscr{A}$* y cuyos morfismos son los morfismos de complejos, también es una categoría abeliana.

Todo morfismo $\varphi : C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ en $Com(\mathscr{A})$ induce, para cada entero n, un morfismo $\mathrm{H}^n(\varphi) : \mathrm{H}^n(C^\bullet) \longrightarrow \mathrm{H}^n(D^\bullet)$ en $\mathscr{A}$. Decimos que φ es un *casi-isomorfismo*, si $\mathrm{H}^n(\varphi)$ es un isomorfismo para todo n. Es usual denotar un casi- isomorfismo por un diagrama de la forma

$$\varphi : C^\bullet \xrightarrow{\sim} D^\bullet .$$

Una *homotopía* entre dos morfismos de complejos $\varphi, \psi : C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ es una colección de morfismos $\left\{h^n : C^n \longrightarrow D^{n-1}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ en $\mathscr{A}$ tal que

$$\varphi^n - \psi^n = \partial^{n-1} \circ h^n + h^{n+1} \circ \delta^n \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C^{n-1} \arrow[r, "\delta^{n-1}"] \arrow[d] & C^n \arrow[r, "\delta^n"] \arrow[dl, "h^n"'] \arrow[d, shift right, "\varphi^n"'] \arrow[d, shift left, "\psi^n"] & C^{n+1} \arrow[r, "\delta^{n+1}"] \arrow[d] \arrow[dl, "h^{n+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D^{n-1} \arrow[r, "\partial^{n-1}"] & D^n \arrow[r, "\partial^n"] & D^{n+1} \arrow[r, "\partial^{n+1}"] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

La *categoría homotópica de $\mathscr{A}$*, denotada por $\mathcal{K}(\mathscr{A})$, es definida como la categoría cuyos objetos son los complejos en $\mathscr{A}$ y cuyos morfismos son los morfismos de complejos módulo homotopía, i.e.,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathscr{A})}(C^\bullet, D^\bullet) := \mathrm{Hom}_{Com(\mathscr{A})}(C^\bullet, D^\bullet)/\{\varphi \sim_h 0\}.$$

Los isomorfismos en $\mathcal{K}(\mathscr{A})$ son llamados de *equivalencias homotópicas.*

Si $\varphi \sim_h \psi$, entonces $\mathrm{H}^n(\varphi) = \mathrm{H}^n(\psi)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, es clara la noción de casi isomorfismo en $\mathcal{K}(\mathscr{A})$. Esto permite ver

$$\mathrm{H}^n(-) : \mathcal{K}(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathscr{A}$$

como un funtor que transforma casi isomorfismos en isomorfismos.

La categoría homotópica $\mathcal{K}(\mathscr{A})$ es aditiva, pero no es abeliana. Sin embargo, tiene estructura de *categoría triangulada*, cuyos *triángulos distinguidos* son aquellos isomorfos a triángulos de la forma

$$C^\bullet \xrightarrow{\alpha} D^\bullet \longrightarrow \mathrm{C}(\alpha)^\bullet \longrightarrow C^\bullet[1] ,$$

donde el complejo $\mathrm{C}(\alpha)^\bullet$, llamado *cono de α*, es definido por

$$\mathrm{C}(\alpha)^n = C^{n+1} \oplus D^n \;\text{ con }\; \delta^n_{\mathrm{C}(\alpha)} = \begin{bmatrix} -\delta_C^{n+1} & 0 \\ \alpha^n & \delta^n \end{bmatrix}.$$

Definición A.1. La *categoría derivada de una categoría abeliana $\mathscr{A}$* es un par $(\mathcal{D}(\mathscr{A}), Q)$ formada por una categoría $\mathcal{D}(\mathscr{A})$ y un funtor $Q : \mathcal{K}(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathscr{A})$ que transforma casi isomorfismos en isomorfismos con la siguiente propiedad universal: dadas una categoría $\mathcal{C}$ y un funtor $F : \mathcal{K}(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathcal{C}$ que transforma casi isomorfismos en isomorfismos, existe un único funtor $G : \mathcal{D}(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathcal{C}$ tal que $G \circ Q = F$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{K}(\mathscr{A}) \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "F"'] & \mathcal{D}(\mathscr{A}) \arrow[dl, "\exists!\, G"] \\
\mathcal{C}. &
\end{tikzcd}$$

En otras palabras, la categoría derivada $\mathcal{D}(\mathscr{A})$ es la *localización* de la categoría homotópica $K(\mathscr{A})$ con respecto al sistema multiplicativo S formado por todos los casi isomorfismos de $K(\mathscr{A})$, i.e.,

$$D(\mathscr{A}) = K(\mathscr{A})[S^{-1}].$$

De manera más explícita, los objetos de $\mathcal{D}(\mathscr{A})$ son los mismos que de $K(\mathscr{A})$, osea complejos en $\mathscr{A}$, y cada morfismo $\alpha : C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ en $\mathcal{D}(\mathscr{A})$ es una clase de equivalencia de pares $C^\bullet \xleftarrow[\sim]{\psi} X^\bullet \xrightarrow{\varphi} D^\bullet$, con ψ un casi isomorfismo, donde dos pares $C^\bullet \xleftarrow[\sim]{\psi_1} X_1^\bullet \xrightarrow{\varphi_1} D^\bullet$ y $C^\bullet \xleftarrow[\sim]{\psi_2} X_2^\bullet \xrightarrow{\varphi_2} D^\bullet$ son equivalentes, si existe un diagrama conmutativo en $K(\mathscr{A})$

$$\begin{tikzcd}
& X_1^\bullet \arrow[dl, "\sim"', "\psi_1"] \arrow[dr, "\varphi_1"] & \\
C^\bullet & X_3^\bullet \arrow[l, "\psi_3", "\sim"'] \arrow[r, "\varphi_3"] \arrow[u] \arrow[d] & D^\bullet \\
& X_2^\bullet . \arrow[ul, "\psi_2", "\sim"'] \arrow[ur, "\varphi_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Es usual escribir el morfismo α en forma de fracción $\alpha = \dfrac{\varphi}{\psi}$. Ahora sean dados dos morfismos $\alpha = \dfrac{\varphi}{\psi} : C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ y $\beta = \dfrac{\gamma}{\sigma} : D^\bullet \longrightarrow E^\bullet$ en $\mathcal{D}(\mathscr{A})$, entonces existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& & Z^\bullet \arrow[dl, "\theta"', "\sim"] \arrow[dr, "\lambda"] & & \\
& X^\bullet \arrow[dl, "\psi"', "\sim"] \arrow[dr, "\varphi"] & & Y^\bullet \arrow[dl, "\sigma"', "\sim"] \arrow[dr, "\gamma"] & \\
C^\bullet & & D^\bullet & & E^\bullet ,
\end{tikzcd}$$

que permite definir la composición

$$\beta \circ \alpha := \frac{\gamma \circ \lambda}{\psi \circ \theta} : C^\bullet \longrightarrow E^\bullet.$$

Por otro lado, el funtor $Q : \mathcal{K}(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathscr{A})$ es la identidad sobre objetos, i.e., $Q(C^\bullet) = C^\bullet$ para todo complejo $C^\bullet$ y para cada morfismo $\varphi C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ en $\mathcal{K}(\mathscr{A})$, el morfismo $Q(\varphi) : C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ em $\mathcal{D}(\mathscr{A})$ es dado por

$$Q(\varphi) = \frac{\varphi}{\mathrm{id}_{C^\bullet}}.$$

Note que, para cada $n \in \mathbb{Z}$, el n-ésimo funtor de cohomología $\mathrm{H}^n(-) : \mathcal{K}(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathscr{A}$ transforma casi-isomorfismos en isomorfismos. Por lo tanto, existe un único funtor

$\widetilde{\mathrm{H}^n}(-) : \mathcal{D}(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathscr{A}$ tal que $\widetilde{\mathrm{H}^n}(-) \circ Q = \mathrm{H}^n(-)$. En consecuencia, un morfismo $\alpha = \dfrac{\varphi}{\psi}$ en $\mathcal{D}(\mathscr{A})$ es un isomorfismo, si y solo si, φ es un isomorfismo en $\mathcal{K}(\mathscr{A})$.

Es importante observar que como $\mathcal{K}(\mathscr{A})$ es una categoría triangulada, existe una única estructura de categoría triangulada sobre $D(\mathscr{A})$ tal que Q es un funtor triangulado.

1.2. Resoluciones de complejos

En esta sección, A denotará un anillo conmutativo con elemento unitário y $\mathcal{K}(A)$ la categoría homotópica $\mathcal{K}(Com(Mod_A))$. Además, nos referiremos a los complejos de A-módulos como simplemente complejos.

Recordemos que para dos complejos $X^\bullet$ e $Y^\bullet$, el *complejo homomorfismo* $\mathrm{Hom}_A(X^\bullet, Y^\bullet)$ es definido por

$$\mathrm{Hom}_A^n(X^\bullet, Y^\bullet) := \prod_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_A(X^n, Y^{i+n})$$

con diferencial $\delta^n : \mathrm{Hom}_A^n(X^\bullet, Y^\bullet) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A^{n+1}(X^\bullet, Y^\bullet)$ especificado por

$$\delta^n(f) = (\delta_Y^{i+n} \circ f_i + (-1)^n f_{i+1} \circ \delta_X^i)_{i\in\mathbb{Z}}.$$

Definición A.2. Un complejo $P^\bullet$ es llamado *semi-proyectivo* si el funtor $\mathrm{Hom}_A(P^\bullet, -)$ preserva casi-isomorfismos sobreyectivos.

Una *resolución semi-proyectiva* de un complejo $X^\bullet$ es un complejo semi-proyectivo $P^\bullet$ junto con un casi-isomorfismo $P^\bullet \xrightarrow{\sim} X^\bullet$.

Proposición 26. *Todo complejo $X^\bullet$ posee una resolución proyectiva $\pi : P^\bullet \xrightarrow{\sim} X^\bullet$, donde π puede ser escogido sobreyectivo.*

El siguiente resultado proporciona caracterizaciones útiles del concepto de semi-proyectividad.

Proposición 27. *Dado un complejo $P^\bullet$, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(i) $P^\bullet$ *es semi-proyectivo.*

(ii) $\mathrm{Hom}_A(P^\bullet, -)$ *preserva sucesiones exactas y casi-isomorfismos.*

(iii) Dados un morfismo de complejos $\alpha : P^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ y un casi-isomorfismo sobreyectivo $\beta : X^\bullet \xrightarrow{\sim} Y^\bullet$ existe un morfismo $\gamma : P^\bullet \longrightarrow X^\bullet$ tal que $\alpha = \beta \circ \gamma$.

(iv) $P^\bullet$ *es un complejo de A-módulos proyectivos y* $\mathrm{Hom}_A(P^\bullet, -)$ *preserva casi-isomorfismos.*

A menos de homotopía, morfismos de complejos semi-proyectivos se factorizan a través de casi-isomorfismos.

Proposición 28. *Sean $P^\bullet$ un complejo semi-proyectivo, $\alpha : P^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ un morfismo de complejos y $\beta : X^\bullet \xrightarrow{\sim} Y^\bullet$ un casi-isomorfismo. Entonces existe un único $\mathcal{K}(A)$-morfismo $\gamma : P^\bullet \longrightarrow X^\bullet$ tal que $\alpha = \beta \circ \gamma$ en $\mathcal{K}(A)$.*

Proposición 29. *Sea $\beta : Q^\bullet \longrightarrow P^\bullet$ un morfismo de complejos.*

(i) Si $P^\bullet$ es semi-proyectivo y β es un casi-isomorfismo, entonces existe un casi-isomorfismo $P^\bullet \xrightarrow{\sim} Q^\bullet$.

(ii) Si $P^\bullet$ y $Q^\bullet$ son semi-proyectivos, entonces β es un casi-isomorfismo, si y solo si, β es un isomorfismo en $\mathcal{K}(A)$, osea, una equivalencia homotópica.

De manera dual tenemos la siguiente noción.

Definición A.3. Un complejo $I^\bullet$ es llamado *semi-inyectivo* si el funtor $\mathrm{Hom}_A(-, I^\bullet)$ preserva casi-isomorfismos sobreyectivos.

Una *resolución semi-inyectiva* de un complejo $X^\bullet$ es un complejo semi-inyectivo $I^\bullet$ junto con un casi-isomorfismo $X^\bullet \xrightarrow{\sim} I^\bullet$.

Proposición 30. *Todo complejo $X^\bullet$ posee una resolución inyectiva $\iota : X^\bullet \xrightarrow{\sim} I^\bullet$, donde ι puede ser escogido inyectivo.*

El siguiente resultado proporciona caracterizaciones útiles del concepto de semi-inyectividad.

Proposición 31. *Dado un complejo $I^\bullet$, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(i) $I^\bullet$ es semi-inyectivo.

(ii) $\mathrm{Hom}_A(-, I^\bullet)$ preserva sucesiones exactas y casi-isomorfismos.

(iii) Dados un morfismo de complejos $\alpha : X^\bullet \longrightarrow I^\bullet$ y un casi-isomorfismo inyectivo $\beta : X^\bullet \xrightarrow{\sim} Y^\bullet$ existe un morfismo $\gamma : Y^\bullet \longrightarrow I^\bullet$ tal que $\alpha = \gamma \circ \beta$.

(iv) $I^\bullet$ es un complejo de A-módulos inyectivos y $\mathrm{Hom}_A(-, I^\bullet)$ preserva casi-isomorfismos.

A menos de homotopía, morfismos de complejos semi-inyectivos se factorizan a través de casi-isomorfismos. Más precisamente

Proposición 32. *Sean $I^\bullet$ un complejo semi-inyectivo, $\alpha : X^\bullet \longrightarrow I^\bullet$ un morfismo de complejos y $\beta : X^\bullet \xrightarrow{\sim} Y^\bullet$ un casi-isomorfismo. Entonces existe un único $\mathcal{K}(A)$-morfismo $\gamma : Y^\bullet \longrightarrow I^\bullet$ tal que $\alpha = \gamma \circ \beta$ en $\mathcal{K}(A)$.*

Proposición 33. *Sea $\beta : I^\bullet \longrightarrow E^\bullet$ un morfismo de complejos.*

(i) Si $I^\bullet$ es semi-inyectivo y β es un casi-isomorfismo, entonces existe un casi-isomorfismo $E^\bullet \xrightarrow{\sim} I^\bullet$.

(ii) Si $I^\bullet$ y $E^\bullet$ son semi-inyectivos, entonces β es un casi-isomorfismo, si y solo si, β es un isomorfismo en $\mathcal{K}(A)$, osea, una equivalencia homotópica.

Proposición 34. *Si $P^\bullet$ es un complejo semi-proyectivo e $I^\bullet$ es un complejo semi-inyectivo, entonces $\mathrm{Hom}_A(P^\bullet, I^\bullet)$ es semi-inyectivo.*

Ahora recordemos que dados dos complejos $X^\bullet, Y^\bullet$, el *complejo tensor* $X^\bullet \otimes_A Y^\bullet$ es definido por

$$(X^\bullet \otimes_A Y^\bullet)^n := \bigoplus_{i+j=n} X^i \otimes_A Y^j$$

con diferencial $\delta^n : (X^\bullet \otimes_A Y^\bullet)^n \longrightarrow (X^\bullet \otimes_A Y^\bullet)^{n+1}$ dado por

$$\delta^n(x \otimes y) = \delta^i_X(x) \otimes y + (-1)^i x \otimes \delta^j_Y(y) \ \ (x \in X^i, y \in Y^j).$$

Definición A.4. Un complejo $F^\bullet$ es llamado *semi-plano* si el funtor $- \otimes_A F^\bullet$ preserva casi-isomorfismos inyectivos.

Por ejemplo, todo complejo acotado de A-módulos planos es semi-plano. Además, todo complejo semi-proyectivo es semi-plano.

Proposición 35. *Dado un complejo $F^\bullet$, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(i) $F^\bullet$ es semi-plano.

(ii) $- \otimes_A F^\bullet$ preserva sucesiones exactas y casi-isomorfismos.

(iii) $F^\bullet$ es un complejo de A-módulos planos y $- \otimes_A F^\bullet$ preserva casi-isomorfismos.

Proposición 36. *Sea $\alpha : F^\bullet \longrightarrow G^\bullet$ un casi-isomorfismo de complejos semi-planos. Entonces*

(i) Para todo complejo $X^\bullet$, el morfismo inducido $X^\bullet \otimes_A \alpha$ es un casi-isomorfismo.

(ii) Para todo complejo $Y^\bullet$, el morfismo inducido $\alpha \otimes_A Y^\bullet$ es un casi-isomorfismo.

1.3. Funtores Derivados

En esta sección, $\mathscr{A}$ denotará una categoría abeliana, $\mathscr{E}$ una categoría triangulada y $F : \mathcal{K}(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathscr{E}$ un funtor triangulado.

Definición A.5. Un *funtor derivado a la derecha* de F es un par $(\mathbf{R}F, \eta)$ formado por un funtor triangulado $\mathbf{R}F : \mathcal{D}(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathscr{E}$ y un morfismo de funtores triangulados $\eta : F \longrightarrow \mathbf{R}F \circ Q$ con la siguiente propiedad universal: dados un funtor triangulado $G : \mathcal{D}(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathscr{E}$ y un morfismo de funtores triangulados $\xi : F \longrightarrow G \circ Q$, existe un único morfismo de funtores triangulados $\theta : \mathbf{R}F \longrightarrow G$ tal que $\xi = \theta \circ \eta$.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "\xi"'] & & \mathbf{R}F \circ Q \arrow[dl, "\theta"] \\ & G \circ Q. & \end{tikzcd}$$

Es claro que si un funtor derivado a la derecha $(\mathbf{R}F, \eta)$ existe, entonces es único, a menos de isomorfismo único de funtores triangulados. El próximo resultado proporciona condiciones suficientes para la existencia del funtor derivado a la derecha.

Proposición 37. *Supongamos que existe una subcategoría triangulada plena $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{K}(\mathscr{A})$ con las siguientes dos propiedades:*

(i) Si $\psi : I^\bullet \xrightarrow{\sim} E^\bullet$ es un casi-isomorfismo en $\mathcal{J}$ entonces $F(\psi) : F(I^\bullet) \xrightarrow{\cong} F(E^\bullet)$ es un isomorfismo en $\mathscr{E}$.

(ii) Para todo $C^\bullet \in \mathcal{K}(\mathscr{A})$ existe un casi-isomorfismo $C^\bullet \xrightarrow{\sim} I^\bullet$ para algún $I^\bullet \in \mathcal{J}$.

Entonces existe $\mathbf{R}F : \mathcal{D}(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathscr{E}$.

Corolario 33. *Sea A un anillo conmutativo con elemento unitario, entonces todo funtor triangulado $F : \mathcal{K}(A) \longrightarrow \mathscr{E}$ posee un funtor derivado a la derecha $\mathbf{R}F : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathscr{E}$*

Prueba. Basta tomar $\mathcal{J} = \mathcal{K}(A)_{s-iny}$, la subcategoría triangulada plena de $\mathcal{K}(A)$ cuyos objetos son los complejos semi-inyectivos, usar la Proposición 30 y la parte (ii) de la Proposición 33 y luego aplicar la Proposición 37. ■

De manera más explícita, para cada $C^\bullet \in \mathcal{D}(A)$,

$$\mathbf{R}F(C^\bullet) = F(I_C^\bullet),$$

donde $X^\bullet \xrightarrow{\sim} I_X^\bullet$ es una resolución semi-inyectiva de $X^\bullet$. Además, si $\alpha = \dfrac{\varphi}{\psi} : C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ es un morfismo en $\mathcal{D}(A)$, entonces por la Proposición 32, existen un único morfismo $\gamma : I_X^\bullet \longrightarrow I_D^\bullet$ y un único casi-isomorfismo $\gamma : I_X^\bullet \xrightarrow[\sim]{\sigma} I_C^\bullet$ en $\mathcal{K}(A)$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} C^\bullet \arrow[d, "\sim"'] & X^\bullet \arrow[l, "\psi"', "\sim"] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\sim"'] & D^\bullet \arrow[d, "\sim"] \\ I_C^\bullet & I_X^\bullet \arrow[l, "\sigma"', "\sim"] \arrow[r, "\gamma"] & I_D^\bullet. \end{tikzcd}$$

Entonces

$$\mathbf{R}F(\alpha) = \frac{F(\gamma)}{F(\sigma)} : F(C^\bullet) \longrightarrow F(D^\bullet).$$

Ahora sea $C^\bullet \in \mathcal{K}(A)$. No es difícil verificar que el funtor

$$\mathrm{Hom}_A(C^\bullet, -) : \mathcal{K}(A) \longrightarrow \mathcal{K}(A)$$

es triangulado. Por lo tanto,

$$F = Q \circ \mathrm{Hom}_A(C^\bullet, -) : \mathcal{K}(A) \longrightarrow \mathcal{D}(A)$$

también es un funtor triangulado. En consecuencia, existe el funtor derivado a la derecha $\mathbf{R}F$ de F, que habitualmente es denotado por $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(C^\bullet, -)$.

Definición A.6. Dado un complejo $C^\bullet$, el funtor

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(C^\bullet, -) : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{D}(A)$$

es llamado *funtor homomorfismo derivado*.
Los funtores *HiperExt* son definidos tomando homología,i.e.,

$$\mathrm{Ext}^i(C^\bullet, D^\bullet) := \mathrm{H}^i\mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(C^\bullet, D^\bullet).$$

Por lo visto arriba,

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(C^\bullet, D^\bullet) \cong \mathrm{Hom}_A(C^\bullet, I_D^\bullet),$$

donde $D^\bullet \xrightarrow{\sim} I_D^\bullet$ es una resolución semi-inyectiva de $D^\bullet$. Es posible probar el funtor homomorfismo derivado tiene la *propiedad balanceada*, en el sentido que

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(C^\bullet, D^\bullet) \cong \mathrm{Hom}_A(P_C^\bullet, D^\bullet),$$

donde $P_C^\bullet \xrightarrow{\sim} C^\bullet$ es una resolución semi-proyectiva de $C^\bullet$.

Definición A.7. Un *funtor derivado a la izquierda* de F es un par $(\mathbf{L}F, \eta)$ formado por un funtor triangulado $\mathbf{L}F : \mathcal{D}(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathscr{E}$ y un morfismo de funtores triangulados $\eta : \mathbf{L}F \circ Q \longrightarrow F$ con la siguiente propiedad universal: dados un funtor triangulado $G : \mathcal{D}(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathscr{E}$ y un morfismo de funtores triangulados $\zeta : G \circ Q \longrightarrow F$, existe un único morfismo de funtores triangulados $\lambda : G \longrightarrow \mathbf{L}F$ tal que $\zeta = \eta \circ \lambda$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{L}F \circ Q \arrow[rr, "\eta"] & & F \\
& G \circ Q. \arrow[ul, "\lambda"] \arrow[ur, "\zeta"'] &
\end{tikzcd}$$

Es claro que si un funtor derivado a la izquierda $(\mathbf{L}F, \eta)$ existe, entonces es único, a menos de isomorfismo único de funtores triangulados. El próximo resultado proporciona condiciones suficientes para la existencia del funtor derivado a la izquierda.

Proposición 38. *Supongamos que existe una subcategoría triangulada plena $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{K}(\mathscr{A})$ con las siguientes dos propiedades:*

(i) Si $\psi : P^\bullet \xrightarrow{\sim} Q^\bullet$ es un casi-isomorfismo en $\mathcal{J}$ entonces $F(\psi) : F(P^\bullet) \xrightarrow{\cong} F(Q^\bullet)$ es un isomorfismo en $\mathscr{E}$.

(ii) Para todo $C^\bullet \in \mathcal{K}(\mathscr{A})$ existe un casi-isomorfismo $P^\bullet \xrightarrow{\sim} C^\bullet$ para algún $P^\bullet \in \mathcal{J}$.

Entonces existe $\mathbf{L}F : \mathcal{D}(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathscr{E}$.

Corolario 34. *Sea A un anillo conmutativo con elemento unitario, entonces todo funtor triangulado $F : \mathcal{K}(A) \longrightarrow \mathscr{E}$ posee un funtor derivado a la izquierda $\mathbf{L}F : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathscr{E}$*

Prueba. Basta tomar $\mathcal{J} = \mathcal{K}(A)_{s-proy}$, la subcategoría triangulada plena de $\mathcal{K}(A)$, usar la Proposición 26 y la parte (ii) de la Proposición 29, y aplicar la Proposición 38. ■

De manera más explícita, para cada $C^\bullet \in \mathcal{D}(A)$,

$$\mathbf{L}F(C^\bullet) = F(P_C^\bullet),$$

donde $P_C^\bullet \xrightarrow{\sim} C^\bullet$ es una resolución semi-proyectiva de $C^\bullet$. Además, si $\alpha = \dfrac{\varphi}{\psi} : C^\bullet \longrightarrow D^\bullet$ es un morfismo en $\mathcal{D}(A)$, entonces por la Proposición 28, existen un único morfismo $\gamma : P_X^\bullet \longrightarrow P_D^\bullet$ y un único casi-isomorfismo $\gamma : P_X^\bullet \xrightarrow[\sim]{\sigma} P_C^\bullet$ en $\mathcal{K}(A)$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
C^\bullet & X^\bullet \arrow[l, "\psi"', "\sim"] \arrow[r, "\varphi"] & D^\bullet \\
P_C^\bullet \arrow[u, "\sim"] & P_X^\bullet \arrow[l, "\sigma", "\sim"'] \arrow[r, "\gamma"] \arrow[u, "\sim"] & P_D^\bullet. \arrow[u, "\sim"]
\end{tikzcd}$$

Entonces

$$\mathbf{L}F(\alpha) = \frac{F(\gamma)}{F(\sigma)} : F(C^\bullet) \longrightarrow F(D^\bullet).$$

Dado un complejo $D^\bullet$ el funtor

$$- \otimes_A D^\bullet : \mathcal{K}(A) \longrightarrow \mathcal{K}(A)$$

es triangulado. Por lo tanto,

$$F = Q \circ (- \otimes_A D^\bullet) : \mathcal{K}(A) \longrightarrow \mathcal{D}(A)$$

también es un funtor triangulado. En consecuencia, existe el funtor derivado a la izquierda $\mathbf{L}F$ de F, que es usualmente denotado por $- \otimes_A^{\mathbf{L}} D^\bullet$.

Definición A.8. Dado un complejo $D^\bullet$, el funtor

$$- \otimes_A^{\mathbf{L}} D^\bullet : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{D}(A)$$

es llamado *funtor tensor derivado.* Los funtores *HiperTor* son definidos tomando homología,i.e.,

$$\mathrm{Tor}_i(C^\bullet, D^\bullet) := \mathrm{H}^{-i}(C^\bullet \otimes_A^{\mathbf{L}} D^\bullet).$$

Por lo visto arriba,

$$C^\bullet \otimes_A^{\mathbf{L}} D^\bullet \cong P_C^\bullet \otimes_A D^\bullet,$$

donde $P_C^\bullet \xrightarrow{\sim} C^\bullet$ es una resolución semi-proyectiva de $C^\bullet$. Es posible probar el funtor tensor derivado también tiene la *propiedad balanceada*, en el sentido que

$$C^\bullet \otimes_A^{\mathbf{L}} D^\bullet \cong C^\bullet \otimes_A P_D^\bullet,$$

donde $P_D^\bullet \xrightarrow{\sim} D^\bullet$ es una resolución semi-proyectiva de $D^\bullet$. Más aún, es posible usar, de manera más general, resoluciones semi-planas.

Vamos a resumir en la siguiente Proposición, los más importantes isomorfismos que fueron usados en el Capítulo 5.

Proposición 39. *Para A-complejos $C^\bullet$, $D^\bullet$ y $E^\bullet$,*

(i) Existe un isomorfismo en $\mathcal{D}(A)$

$$C^\bullet \otimes_A^{\mathbf{L}} D^\bullet \cong D^\bullet \otimes_A^{\mathbf{L}} C^\bullet,$$

que es natural en $C^\bullet$ y $D^\bullet$.

(ii) Existe un isomorfismo en $\mathcal{D}(A)$

$$(C^\bullet \otimes_A^{\mathbf{L}} D^\bullet) \otimes_A^{\mathbf{L}} E^\bullet \cong C^\bullet \otimes_A^{\mathbf{L}} (D^\bullet \otimes_A^{\mathbf{L}} E^\bullet),$$

que es natural en $C^\bullet$, $D^\bullet$ y $E^\bullet$.

(iii) Existe un isomorfismo en $\mathcal{D}(A)$

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(C^\bullet \otimes_A^{\mathbf{L}} D^\bullet, E^\bullet) \cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(C^\bullet, \mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(D^\bullet, E^\bullet)),$$

que es natural en $C^\bullet$, $D^\bullet$ y $E^\bullet$.

El último isomorfismo natural es conocido como *isomorfismo de adjunción derivado* Hom-Tensor.

Bibliografía

[1] L. A. Alba-Sarria, R. Callejas-Bedregal y N. Caro-Tuesta. *“A local cohomology theory defined by a system of ideals”*. Preprint, 2020.

[2] L. A. Alba-Sarria, R. Callejas-Bedregal y N. Caro-Tuesta. *“Artinnianess of local cohomology modules defined by a system of ideals”*. Preprint, 2020.

[3] L. A. Alba-Sarria, R. Callejas-Bedregal y N. Caro-Tuesta. *“Hausdorff completion and local homology theory”*. Preprint, 2021.

[4] H. Bass. “*Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings*”. En: *Transactions of the American Mathematical Society*, 95.3 (1960), págs. 466-488. DOI: 10.1090/S0002-9947-1960-0157984-8.

[5] Richard G. Belshoff, E. Edgar Enochs y Juan Ramon García Rozas. “*Generalized Matlis Duality*”. En: *Proc. Amer. Math. Soc.*, 128 (2000), págs. 1307-1312. DOI: 10.1090/S0002-9939-99-05130-8.

[6] T. Y. Brodmann y R. Sharp. *Local Cohomology: An Algebraic Introduction with Geometric Applications*. Vol. 136. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2013. ISBN: 978-0521606455.

[7] L.W. Christensen, H.B. Foxby y H. Holm. *Derived Categories Methods in Commutative Algebra*. 2020. URL: https://www.math.ttu.edu/~lchriste/download/dcmca.pdf.

[8] K. Divanni-Aazar, R. Naghipour y M. Tousi. “*The Lichtenbaum-Hartshorne theorem for generalized local cohomology and connectedness*”. En: *Comm. in Algebra.* 30.8 (2002), págs. 3687-3702. DOI: 10.1081/AGB-120005813.

[9] J.P.C. Greenlees y P. May. “*Derived functors of I-adic completion and local homology*”. En: *Journal of Algebra* 149 (1992), págs. 438-453. ISSN: 0024-6115. DOI: 10.1016/0021-8693(92)90026-I.

[10] A. Grothendieck. *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie - 1962 - Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux - (SGA 2)*. Société Mathématique de France, 2005. ISBN: 9780387245270.

[11] R. Hartshorne. *A seminar given by A. Grothendieck, Harvard University, Fall, 1961*. Lecture notes in mathematics. Berlin, New York: Springer Verlag, 1966. ISBN: 9780387245270.

[12] C.U. Jensen. *Les foncteurs Dérivés de* $\varprojlim$ *et leurs Applications en Théorie des Modules*. Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag, 1972. ISBN: 9780387245270.

[13] J. Lipman. “*Lectures on local cohomology and duality*”. En: *Local cohomology and its applications (Guanajuato, 1999) Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 226 Decker* (2002), págs. 39-89. URL: https://www.math.purdue.edu/~jlipman/papers/Mexico.pdf.

[14] L. Melkersson y P. Schenzel. “*The co-localization of an Artinian module*”. En: *Proc. Edinb. Math. Soc.,* 38.1 (1995), págs. 121-131. DOI: 10.1017/S0013091500006258.

[15] A. Ooishi. “*Matlis duality and the width of a module*”. En: *Hiroshima Math J.* 3 (1976), págs. 573-587. DOI: 10.32917/hmj/1206136213.

[16] Joseph J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra.* Universitext. New York: Springer-Verlag, 2009. ISBN: 9780387245270.

[17] Peter. Schenzel. “*On formal local cohomology and connectedness*”. En: *Journal of Algebra* 315.2 (2007), págs. 894-923. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2007.06.015.

[18] R. Y. Sharp. “*A method for the study of Artinian modules, with an application to asymptotic behavior*”. En: *Math. Sci. Res. Inst. Publ.* 3 (1989), págs. 443-465. DOI: 10.1007/978-1-4612-3660-3_25.

[19] R. Takahashi, Y. Yoshino y T. Yoshizawa. “*Local cohomology based on non-closed support defined by a pair of ideals*”. En: *J. Pure Appl. Algebra* 4 (2009), págs. 582-600. DOI: 10.1016/j.jpaa.2008.09.008.

[20] Amnon Yekutieli. *Derived Categories.* Vol. 183. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge: Cambridge University Press, 2020. ISBN: 978-1108419338.