Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

El teorema de Bishop

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Jesús Antonio CASTILLA HUAMÁN

ASESOR

Dr. Leonardo Henry ALEJANDRO AGUILAR

Lima, Perú

2022

Referencia bibliográfica

Castilla, J. (2022). *El teorema de Bishop*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Jesús Antonio Castilla Huamán
Tipo de documento de identidad	D.N.I
Número de documento de identidad	40321206
URL de ORCID	No aplica
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Leonardo Henry Alejandro Aguilar
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	43069051
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0001-5354-4325
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Willy David Barahona Martinez
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	10078450
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Carlos Augusto Ruiz De La Cruz Melo
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	08249640
Datos de investigación	
Línea de investigación	Análisis Funcional
Grupo de investigación	No aplica
Ubicación geográfica de la investigación	País: Perú Departamento: Lima
Año o rango de años en que se realizó la investigación	abril 2022 – julio 2022
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas puras http://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS EN LA MODALIDAD VIRTUAL PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO(A) EN MATEMÁTICA
(PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2022-I)

En la UNMSM – Ciudad Universitaria – Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 16:00 horas del sábado 23 de julio del 2022, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2022-I): Mg. Willy David Barahona Martínez (PRESIDENTE), Lic. Carlos Augusto Ruiz De La Cruz Melo (MIEMBRO) y el Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la Tesis titulada: "**EL TEOREMA DE BISHOP**", presentado por el señor **Bachiller Jesús Antonio Castilla Huamán**, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la Tesis, el Presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación **sobresaliente,** con un calificativo promedio de **diecisiete (17).**

A continuación, los Miembros del Jurado Evaluador dan manifiesto que el participante **Bachiller Jesús Antonio Castilla Huamán** en vista de haber aprobado la sustentación de su Tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 16:30 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta.

Mg. Willy David Barahona Martínez
PRESIDENTE

Lic. Carlos Augusto Ruiz De La Cruz Melo
MIEMBRO

Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar
MIEMBRO ASESOR

Resumen

El objetivo central de esta tesis es estudiar los teoremas de Shilov y bishop. Como consecuencia de estos teoremas, demostramos un resultado debido a H. G Dales que, bajo condiciones más generales que las exigidas en el teorema de Bishop, establece que el conjunto de los punto pico es denso en la frontera de Shilov. El teorema de Shilov enuncia que si Y es un espacio topológico compacto y B es un subálgebra de $C(Y)$ que separa puntos de Y, entonces existe una única frontera cerrada minimal para B. Después de cinco años de la publicación del resultado de Shilov, Bishop demostró que si Y es un espacio compacto metrizable y B es un subálgebra de $C(Y)$ que separa los puntos de Y tal que con la norma del supremo es completa, entonces el conjunto de los puntos pico para B es la única frontera minimal para B.

Palabra clave: Espacio compacto metrizable,álgebra, subálgebra, frontera de shilov, punto pico.

Abstract.

The objective of this thesis is to study the Shilov and Bishop theorems. As a consequence of these theorems, we prove a result by H.G Dales give them that , under more general conditions than those required by Bishop 's Theorem , states that the set of peak points is dense on the Shilor frontier . The Shilor's theorem states that if Y is a compact topological space and B is a subalgebra of $C(Y)$ that separates points from Y. Then there exists a unique minimal closed boundary for B In five years from the publication of Shilov's result, Bishop showed that if Y is a compact metrizable space and B is a subalgebra of $C(y)$ that separates the points of Y such that the norm of the supremum is complete, then the set of peak points for B is the only frontier minimal for B.

Keywords : Metrizable compact space , algebra , subalgebra , Shilov frontier , peak point .

INTRODUCIÓN

Sea X un espacio topológico compacto y H un subconjunto del espacio $C(X)$ de las funciones continuas de X en $\mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$). Un subconjunto F de X es una frontera para H si para toda $f \in H$ existe $x_0 \in X$ tal que $|f(x_0)| = \max_{x \in X} |f(x)|$. Un ejemplo trivial de frontera es el propio conjunto X, pero otras fronteras pueden estar contenidas propiamente en X. Un ejemplo simple capaz de ilustrar estas situaciones ocurre cuando H es el conjunto de las funciones continuas complejas definidas en $\overline{\Delta} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ que son analíticas en el interior de $\overline{\Delta}$. Por el el teorema de modulo máximo, la frontera topológica de Δ es una frontera para H.
En 1954, Shilov demostró (ver [15]) un teorema sobre la existencia y unicidad de frontera minimal cerrada para álgebras de Banach conmutativas. El resultado de Shilov motivó un gran desarrollo en el estudio de las álgebras de Banach conmutativa, sobretodas las subálgebras cerradas de $C(X)$ con la norma del supremo que contine la unidad y separa los puntos de X. La demostración que presentamos para el teorema de Shilov esta basada en la demostración de este teorema presentado en [13].
Debido a la importancia de este teorema, convencionalmente se llama Frontera de Shilov de A a la frontera minimal cerrada de A, cuando existe y es única.
En 1959, Bishop probó la existencia de una solo y solo una, frontera minimal por una subálgebra A de $C(X)$ dotado de la norma del supremo que separa los puntos de X, cuando X además de ser compacto es metrizable (ver referencia [1]). Bajo esta condiciones, el teorema Bishop prueba que una frontera minimal para A es el conjunto de punto pico para A. Como consecuencia inmediata de los teoremas de Bishop y de Shilov, tenemos que el álgebra A satisface las hipotesis del teorema de Bishop,la frontera de Shilov de A es la cerradura de la frontera de Bishop de A.
En este trabajo, presentamos los teorema de Shilov y de Bishop ademas varios resultados, relacionados con ellos. Los ejemplos enriquecen e ilustran el texto, destacando la importancia de algunas hipotesis de ambos teoremas centrales.
En el primer capitulo, enunciamos sin demostración algunos teoremas de la topológia general y del análisis funcional. A continuación, exploraremos la teoria de las álgebras de Banach, presentando algunos resultados y ejemplos de álgebras de Banach.
En el segundo capítulo, despues de precisar el conjunto de pico, punto pico y frontera , demostramos el teorema de Shilov y algunos de sus corolarios, entre ellos una caracterización de los puntos fronteras de Shilov. Luego al finalizar el capítulo, retomamos algunos de los ejemplos del capítulo anterior, a fin de calcular las fronteras de Shilov de álgebras presentadas y demostramos, atravez de un ejemplo que si A es una subálgebra real de $C(X, \mathbb{C})$, entonces la frontera de Shilov de A puede no existir.
El tercer capítulo trata de la existencia de una frontera mínimal que no es necesariamente cerrada. El teorema central de este capítulo es el teorema de Bishop y dos de sus corolarios motivan otros resultados abordados en este capítulo. Uno de ellos sera presentado

por medio del teorema debido a H. G. Dales (ver referencia [2]) que, bajo condiciones algo más generales que los requeridos en el teorema de Bishop, prueba que el conjunto de puntos picos es denso en la frontera de shilov del álgebra en cuestión.

Índice general

Capítulo 1

Nociones de topología General, Análisis Funcional y Álgebra de Banach

Presentaremos, en este primer capítulo, algunas definiciones y resultados básicos de topología general, Análisis Funcional y Álgebra de Banach, para poder darnos soportes en los próximos capítulos , $\mathbb{N}$ se denotara el conjunto de los números naturales, $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales , $\mathbb{C}$ el conjunto de los números complejos. Además utilizaremos las definiciones y resultados básico de Análisis Real , Complejo y el Álgebra lineal.

El cuerpo de escalares de los espacios vectoriales con los que trabajaremos será siempre en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ en la mayoria de resultados y definiciones será indiferente trabajar con uno o el otro. Por lo tanto reservaremos el símbolo $\mathbb{K}$ para representar el cuerpo de los reales o complejos , en situciones donde ambos pueden ser el cuerpo de escalares del espacio vectorial en cuestión.

Si X es un conjunto arbitrario $Y \subset X$, representaremos el complemento de Y en X, por $X \backslash Y$. recomendamos revisar las referencia [10] y [16].

1.1. Topología General

Con anterioridad a las nociones de topología general, fijaremos algunas notaciones que usaremos en este trabajo.

Si X es un conjunto arbitrario y $\bar{d}$ es una métrica en X, el espacio métrico $(X, \bar{d})$ será denotado por X desde que $\bar{d}$ sea claro en el contexto.

Analogamente, denotaremos un espacio normado $(E, \|.\|)$ por E si no hay duda sobre la norma en cuestión.

Dado un espacio métrico X, un punto $y \in X$ e un real positivo δ, la bola abierta y la bola cerrada de centro y radio δ se denota correspondiente, por $B(y, \delta)$ y $\overline{B}(y, \delta)$. Si E es un espacio normado, se denotara la **esfera unitaria** de E por S_E.

Sea dos espacios métricos (X_1, d_1) y (X_2, d_2), una **isometría** de X_1 en X_2 es una aplicación $f : X_1 \longrightarrow X_2$ tal que $d_1(x, y) = d_2(f(x), f(y))$, para todo par $x, y \in X_1$ si f es biyectiva, entonces la inversa de f es tanbién una isometríay en este caso decimos que X_1 en X_2 son **isométricos**.
A continuación presentamos las nociones sobre Topología General que consideramos esencial para una buena comprensión de los teoremas principales de este texto.

Definición 1.1.1. *Si* X *es un conjunto arbitrario, una topología en* X *es una familia* T *formado por subconjuntos de* X *que cumplen las condiciones:*

i) $\emptyset$ *y* X *son elementos de* T*;*
ii) *La unión de alguna familia de elementos de* T *está en* T*;*
iii) *La intersección de alguna familia finitas de elementos de* T *pertenece a* T*.*

En este caso, el par (X, T) *se dice un* **espacio topologíco** *cuando no hay dudas en cuanto a la topología cosiderada, esta se omitirá y representaremos el par* (X, T) *por la letra* X*.*

Si (X, T) *es un espacio topológico, entonces llamaremos a los elementos de* T *de conjuntos* **abiertos** *e todo* $y \in X$ *, diremos que un conjunto* $U \subset X$ *es una* **vecindad** *de* y *si existe* $A \in T$ *tal que* $y \in A$ *y* $A \subset U$*. En espec´ıfico, cada vecindad de un punto* $y \in X$ *contiene* y *y todo abierto que contiene* y *es una vecindad de este punto.*

Ejemplo 1.1.1. *Si* (X, d) *es un espacio métrico, entonces* d *genera una topología en* X*. En efecto, sea* T *la coleción formado por los conjuntos* $A \subset X$ *tales que para todo punto* $a \in A$ *existe* $r_a > 0$ *que satisface* $B(a, r_a) \subset A$*. No hay dificultad en probar que* T *satisface las condiciones de* ***i)*** *a* ***iii)*** *de la definición 1.1.1 y, por lo tanto, es una topología en* X*. En este caso, hablaremos que la topología* T *provinente de la métrica* d*. Particularmente, todo espacio normado es un espacio topológico con la topología proveniente de la métrica inducida por la norma. Por estas observaciones,* $\mathbb{R}$ *y* $\mathbb{C}$ *provisto de la topología proviniente del valor absoluto son ejemplos de espacios topológicos.*

Definición 1.1.2. *Exponemos que* X *es un* **espacio metrizable***, si es un espacio topológico cuya topología provinente de alguna métrica definida en* X *.*

Durante este trabajo, a menos que se mencione lo contrario, nuestro espacios métricos y normados será considerados espacios topológicos dotados de la topología proviniente de su métrica o norma.

Definición 1.1.3. *Sea* X *un espacio topológico y* $F \subset X$*. Dicimos que* F *es un conjunto* **cerrado** *si su complemento* $X \setminus F$ *es un conjunto abierto.*
Sea $\mathcal{F}$ *el conjunto formado por los conjuntos cerrados de un espacio topológico* X*. Se puede visualizar que* $\mathcal{F}$ *verifica las condiciones abajo:*

i) $\emptyset$ *y* X *están en* $\mathcal{F}$*;*

ii) *La intersección de cualquier colección de elementos de* $\mathcal{F}$ *está en* $\mathcal{F}$;

iii) La unión de cualquier colección finita de elementos de $\mathcal{F}$ pertenece a $\mathcal{F}$.

Es posible fijar una topología en un conjunto X através de sus conjunto cerrados, para esto, basta que una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X satisfaga las condiciones listadas arriba . Si esto ocurre, la familia T formada por los complementos de los elementos de $\mathcal{F}$ será la topología deseada.

Definición 1.1.4. *Si X un espacio topológico, $Y \subset X$ y $w, x, y, z \in X$. Exponemos que w es un* **punto interior** *de Y si existe una vecindad U_w de este punto contenido en Y . El conjunto de puntos interiores de Y se llama* **interior** *de Y y contiene todos los abiertos contenidos en Y. Decimos que x es un* **punto frontera** *de Y si para cada vecindad U_x de x , tenemos que $Y \cap U_x \neq \emptyset$ y $(X \setminus Y) \cap U_x \neq \emptyset$. El conjunto de los puntos de frontera de Y se llama la* **frontera** *de Y. Decimos que y es un* **punto de acumulación** *de Y si para toda vecindad U_y de y existe $t \in U_y \cap Y$ tal que $t \neq y$. Finalmente, z es un* **punto adherente** *de Y si para toda vecindad U_z desde este punto, tenemos que $Y \setminus U_z \neq \emptyset$. El conjunto de puntos adherentes de Y se denomina* **cerrado** *de Y y está contenido en todos los cerrados que contienen Y . Denotaremos el interior de Y por $intY$, la frontera de Y por FrY y el cerrado de Y por $\overline{Y}$.*

Cuando hay más de una topología definida en el mismo conjunto X, especificaremos en cuál de ellas el cierre, el interior o la frontera de un subconjunto de X esta siendo tomando. Si para este el caso, cuando usamos las notaciones introducidas en la definición anterior, de la misma forma, no dejaremos dudas sobre la topolog´ıa considerada.

Definición 1.1.5. *Sean Y y Z dos subconjuntos de un espacio topológico X. Decimos que Y es* **denso** *en Z cuando $\overline{Y} \supset Z$.*
Si X un espacio topológico y sean Y y Z subconjuntos de X . No es dificil de verificar que Y es cerrado si y solo si, $Y = \overline{Y}$, así como Z es abierto si y solo si, $Z = intZ$. Además, $intY \cup FrY = \emptyset$ y $\overline{Y} = intY \cap FrY$.

Definición 1.1.6. *Un espacio topológico X es un* **espacio de Hausdorff** *si para dos puntos distintos x_1, $x_2 \in X$ cualquiera, existen vecindades V_{x_1} y V_{x_2} de x_1 y x_2 , respectivamente, tal que $V_{x_1} \cap V_{x_2} = \emptyset$*
Es fácil ver que en un espacio de Hausdorff todo conjunto finito es cerrado y que todo espacio métrico es un espacio de **Hausdorff**.

Definición 1.1.7. *Sean T_1 y T_2 dos topologías en el mismo conjunto X. La topología T_1 se dirá que es* **menos fina** *que T_2 , o T_2* **menos fina** *que T_1, si todo elemento de T_2 es también elemento de T_1.*

Definición 1.1.8. *Sea ζ una familia de subconjuntos de X y sea $\mathbb{I}_\zeta$ una colección formada por intersecciones finitas de elementos de ζ. El conjunto formado por las uniones arbitrarias de elementos de $\mathbb{I}_\zeta$ es una topología en X llamada* **topología generada** *por ζ. En este caso, decimos que ζ es una* **subbase** *o un* **sistema de generadores** *para esta* *topología. La topología generada por ζ es la menos fina contenida esta familia o equivalente , es la menos fina según el cual los elementos de ζ son abiertos.*

Definición 1.1.9. *Si* $(X, \mathcal{T})$ *es un espacio topológico, entonces una familia* $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ *es una* **base** *para* $\mathcal{T}$ *(o para* X *, cuando la topología fuera omitida) si todo abierto de* $\mathcal{T}$ *es una unión de elementos de* $\mathcal{B}$*. En este caso, los elementos de* $\mathcal{B}$ *se llaman* **abiertos básicos** *. Claramente, si* $\mathcal{B}$ *es una base para la topología* $\mathcal{T}$*, entonces esta es la topología generada por* $\mathcal{B}$*. Además de eso, si* $\mathcal{S}$ *es una subbase para* $\mathcal{T}$*, es colección formado por las intersecciones finitas de elementos de* $\mathcal{S}$ *es una base para* $\mathcal{T}$ *. También es popdemos ver que cada topología tiene por lo menos una base, conformado por todos sus elementos. Una consecuencia inmediata de esta definición es la siguiente caracterización:* $\mathcal{B}$ *es una base para un espacio topológico* X *si y solo si , para cada abierto* $A \subset X$ *y cada* $a \in A$*, existe* $B \in \mathcal{B}$ *tal que* $a \in B \subset A$ *. Sigue de esta caracterización que en todo espacio métrizable, la colección de bolas abiertas es una base.*

Definición 1.1.10. *Consideremos los espacios topológicos* (X,T_1) *y* (Y,T_2)*. Una aplicación* $f : X \longrightarrow Y$ *Se dice* **continuo** *si para todo conjunto abierto* A *en la topología* T_2*,* $f^{-1}(A)$ *es un conjunto abierto en la topología* T_1*. Si además de ser continua,* f *es biyectiva y su función inversa es continua, entonces decimos que f es un* **homeomorfismo***.*

El resultado siguiente sigue directamente de la definición 1.1.10.

Proposición 1.1.1. *Sean X, Y y Z espacios topológicos. Si las aplicaciones* $f : X \longrightarrow Y$ *y* $g : Y \longrightarrow Z$ *son continuas, entonces la composición* $g \circ f : X \longrightarrow Z$ *es continua.*

La siguiente proposición ofrece formas alternativas para verificar la continuidad de una función y su demostración sera omitida por ser una consecuencia inmediata de las definiciones anterior.

Proposición 1.1.2. *Sean* (X, T_1) *y* (Y,T_2) *espacios topológicos. Si* $\mathcal{B}_1$ *y* $\mathcal{B}_2$ *son bases para* T_1 *y* T_2*, respectivamente, y f es una aplicación de* X *en* Y*, entonces las condiciones abajo son equivalentes:*
i) f es continua;
ii) $f^{-1}(A) \in T_1, \forall A \in \mathcal{B}_2$ *;*
iii) $\forall x \in X$ *y todo* $A_2 \in \mathcal{B}_2$ *con* $f(x) \in A_2$*, existe* $A_1 \in \mathcal{B}_1$ *que contiene* x *tal que* $f(A_1) \subset A_2$*.*

Definición 1.1.11. *Sea* X *un conjunto y* $\{Y_j\}_{j\in J}$ *una colección de espacios topológicos.* $\forall j \in J$ *, sea* f_j *una aplicación de* X *a* Y_j*,* $\mathcal{O}_j$ *la colección formada por los abiertos de espacios* Y_j *y* $\mathcal{C}_j$ *la colección de las imágenes inversas de los elementos de* $\mathcal{O}_j$ *por la aplicación* f_j*. Si* $\mathcal{S} = \bigcup_{j\in J} \mathcal{C}_j$ *, entonces la topología generada por* $\mathcal{S}$ *es la* **topología débil** *definida por la colección* $\mathcal{F} = \{f_j\}_{j\in J}$ *en* X*, que denotamos por* $\sigma(X, \mathcal{F})$*. Esta topología recibe su nombre porque es la topología más fina en* X *que hace que todas las aplicaciones de la colección* $\{f_j\}_{j\in J}$ *continuas.*

A continuación presentamos algunos ejemplos importantes de topologías débiles que serán usado posteriormente.

Ejemplo 1.1.2. *Sea X un espacio topológico y $Y \subset X$. Si $f : X \longrightarrow Y$ es la aplicación definida, en cada $y \in Y$, por la ecuación $f(y) = y$, entonces la topología débil definida en Y por la familia unitaria $\{f\}$ es la* **topología inducida** *en Y por la topología de X. En este caso, diremos que Y con la topología inducida es un* **subespacio topológico** *de X. Los abiertos en la topología inducida son las intersecciones de los abiertos de X con Y, así como sus cerrados son las intersecciones de los cerrados de X con Y. Equivalente, podríamos definir la topología inducida por X en Y directamente por ser abiertos, diciendo apenas que esta es la topología formada por las intersecciones del abierto de X con Y.*

Ejemplo 1.1.3. *Sea $\{X_j\}_{j \in J}$ una colección de espacios topológicos, $X = \prod_{j \in J} X_j$ y para cada índice j en J, $\pi_j : X \longrightarrow X_j$ la proyección de X sobre X_j, es decir, la aplicación definido en cada $x = \{X_i\}_{i \in J} \in X$ por $\pi_j(x) = x_j$. La topología débil definida en X por la familia $\{\pi_j\}_{j \in J}$ se llama* **topología producto**. *Esta es la topología menos fina en X en el cual las proyecciones son continuas. La colección formada por los conjuntos de la forma $\prod_{j \in J} A_j$, donde cada A_j es una abierto en X_j y solamente para un número finito de índices i se tiene que el abierto A_i no es el espacio X_i, es una base para la topología producto. si X es el producto cartesiano finito de espacios topológicos, digamos $X_1, \dots, X_n$ y B es la colección de los subconjuntos de X de la forma $U_1 \dots U_n$, donde cada U_i es un abierto en X_i, entonces B es una base para la topología producto.*

Ejemplo 1.1.4. *Sea X un conjunto y F una familia de funciones $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ Consideremos en X la topología débil $\sigma(X, F)$ definida por F. El objetivo de este ejemplo es, además de representar una topología útil, determina una base para $\sigma(X, F)$. Sea B la colección de las imágenes inversas de las bolas abiertas de $\mathbb{K}$ por las funciones de F y U el conjunto formado por las intersecciones finitas de elementos de B. Como la colección de las bolas abiertas es una base para la topología de $\mathbb{K}$, U es una base para $\sigma(X, F)$. Además de eso, para todo $w \in B$, existe una bola abierta $B(y, \epsilon) \subset \mathbb{K}$ y una función $f \in F$ tal que $W = f^{-1}(B(y, \epsilon))$. Luego, $U \in U$, entonces existe un número finito de bolas abiertas $B(y_1, \epsilon_1), \dots, B(y_n, \epsilon_n) \subset \mathbb{K}$ y las funciones $f_1, \dots, f_n \in F$ tal que $U = f_1^{-1}(B(y_1, \epsilon_1)) \cap \dots \cap f_n^{-1}(B(y_n, \epsilon_n))$.*

Ahora sea V la colección de conjuntos $V \subset X$ para los cual existe una familia finita $F_V \cap F$, $x_v \in X$ y $\epsilon > 0$ tal que $V = \{x \in X : |f(x) - f(x_v)| < \epsilon$, para todo $f \in F_V\}$. Comprobarerемos que la topología generada por V es la topología $\sigma(X, F)$.
Sea T una topología generada por V en X que por la definición 1.1.8, es la topología menos fina que contiene esta colección. Por U ser una base para $\sigma(X, F)$ y $V \subset U$, tenemos que los elementos de V están en $\sigma(X, F)$ y consecuentemente, $\sigma(X, F)$ es más fina que T. Por otro lado, sea $f \in F$ y $w \in X$. Dado $\epsilon > 0$, el conjunto $V_f = f^{-1}(B(w, \epsilon)) = \{x \in X : |f(x) - f(w)| < \epsilon\}$ satisface $f(V_f) \subset B(f(w), \epsilon)$ y es un abierto en T, ya que $V_f \in V$. En otras palabras, f es continua en T. Proviene de la arbitrariedad en f que todas las funciones de F son continuas en la topología T, y por la definición 1.1.11, esto esclarece que T es más fina que $\sigma(X, F)$, corroborando que estas topologías, de hecho, coinciden.
Resumiendo, demostraremos que si X es un conjunto y F es una familia de funciones $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$, entonces la colección de subconjuntos de X la forma $V(x_0; f_1, \dots, f_n; \epsilon) = \{x \in X : |f_i(x) - f_i(x_0)| < \epsilon, i = 1, \dots, n\}$, donde $x_0 \in X$, $\{f_i\}_{i=1}^{n}$ es una subfamilia finita de F y $\epsilon > 0$, es una base para la topología debil generada por F en X.

Definición 1.1.12. *Un conjunto* $\mathbf{J}$ *es un conjunto* **dirigido** *si en el esta definida una relación binaria* $\leq$ *si verifica i, ii y iii:*

i) $\alpha_1 \leq \alpha_1,\ \forall \alpha \in \mathbf{J}$

ii) si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathrm{J}$ *son tales* $\alpha_1 \leq \alpha_2$ *y* $\alpha_2 \leq \alpha_3$ *entonces* $\alpha_1 \leq \alpha_3$*;*

iii) $\forall\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{J}$*, existe* $\eta \in \mathrm{J}$ *tal que* $\alpha_1 \leq \eta$ *y* $\alpha_2 \leq \alpha_3$

En este asunto, un subconjunto K de $\mathbf{J}$ *es* **cofinal** *en* $\mathbf{J}$*, si para todo* $\beta \in \mathbf{J}$ *existe* $\xi \in K$ *satisfactorio* $\beta \leq \xi$*.*

Sigue de las definiciones anteriores que si J *es un conjunto dirigido y* $K \subset \mathrm{J}$ *es cofinal en* J*, entonces, con el orden parcial heredado de* J*, K es un conjunto dirigido.*

Definición 1.1.13. *Dado un conjunto X, una* **sucesión generalizada** *en X y una aplicación f de un conjunto dirigido* $\mathbf{J}$ *en X. Para cada* $\lambda \in \mathbf{J}$*, indicaremos f(λ) por* x_λ *y la sucesión generalizada f por* $(x_\lambda)_{\lambda\in \mathrm{J}}$*. Cuando no hubiera dudas cuanto al conjunto de ´ındices* J*, escribiremos apenas* (x_λ) *.*
Si X es un espacio topológico, decimos que una sucesión generalizada $(x_\lambda)_{\lambda\in \mathrm{J}}$ *en X* **converge** *para un punto x en este espacio, si para cada vecindad V en x existe* $\lambda \in \mathrm{J}$ *tal que* $x_\beta \in V$ *siempre que* $\lambda \leq \beta$*. En este hecho, x es el* **límite** *de* $(x_\lambda)_{\lambda\in \mathrm{J}}$*.*
Una sucesión generalizada $(x_\lambda)_{\lambda\in \mathrm{J}}$ *en un espacio topológico X y es dicho* **convergente** *si ella converge para algún punto de X. Cuando lo creamos útil, usaremos la notación* $(x_\lambda) \longrightarrow x$ *para indicar que* $(x_\lambda)_{\lambda\in \mathrm{J}}$ *converge a x.*
A partir de las definiciones anteriores, demostramos, sin dificultad, las dos proposiciones abajo:

Proposición 1.1.3. *Si* (x_α) *es una sucesión generalizada convergente en un espacio de Hausdorff X, entonces su límite es único.*

Proposición 1.1.4. *Sea Y un subconjunto de un espacio topológico X y* (x_α) *una sucesión generalizada en Y. Si* (x_α) *converge en un punto* $x \in X$*, entonces* $x \in \overline{Y}$*. En particular, si Y es cerrado, entonces* $x \in Y$*.*

Definición 1.1.14. *Sea* $f : I \longrightarrow \mathrm{X}$ *una sucesión generalizada y para todo* $\beta \in I$*, sea* $f(\beta) = x_\beta$*. Si* $\mathbf{J}$ *es un conjunto dirigido, cuyo orden parcial se denotará por el mismo símbolo de I,* $g : \mathrm{X} \longrightarrow I$ *es una aplicación tal que* $g(\mathbf{J})$ *es cofinal en I y* $g(i) \leq g(j)$ *siempre que* $i \leq j$ *, entonces la composición* $f \circ g : \mathbf{J} \longrightarrow \mathrm{X}$ *es una* **subsucesión generalizada** *de* (x_β) *. Por ser* $\mathbf{J}$ *dirigido,* $f \circ g$ *es una sucesión generalizada. Adecuando la notación empleada para sucesiones generalizadas, podemos indicar la subsucesión generalizada* $f \circ g$ *por* $(x_{g(j)})_{j\in \mathrm{J}}$ *, pero cuando el desconocimiento de g no cause problemas, en analogía a la notación usual para subsucesiones, escribiremos* $(x_{\beta_j})_{j\in \mathrm{J}}$ *o, simplemente,* (x_{β_j})*.*

Proposición 1.1.5. *Si* X *es un espacio topológico y* (x_β) *es una sucesión generalizada en este espacio que converge para* $x \in \mathrm{X}$ *, entonces cada subsucesión generalizada de* (x_β) *también converge para x.*

Demostración. Consulte remisión [17]. □

Proposición 1.1.6. *Si X_1 y X_2 son espacios topológicos y f es un aplicación de X_1 en X_2, entonces f es continua en $x \in X_1$ si, y solamente si, $f(x_\alpha) \longrightarrow f(x)$ para toda sucesión generalizada en (x_α) tal que $x_\alpha \longrightarrow x$.*

Demostración. Consulte remisión [17], Teorema 11.8, p.75. □

Partiendo de los resultados y definiciones arriba, la siguiente proposición se prueba sin muchas dificultades.

Proposición 1.1.7. *Sea Y un espacio topológico y F una familia de funciones de un conjunto X en Y. Si X es dotado con la topología $\sigma(X, F))$ y $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ es una sucesión generalizado en X, entonces $x_\alpha \longrightarrow x$ si, y solamente si, $f(x_\alpha) \longrightarrow f(x)$ para cada $f \in F$.*

Definición 1.1.15. *Si X es un conjunto y $Y \subset X$, entonces una* **cubrimiento** *para Y es un colección $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in J}$ de subconjuntos de X tal que $Y \subset \bigcup_{\alpha\in J} Y_\alpha$. En este asunto, un subconjunto de $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in J}$ se dice que es una* **subcubrimiento** *para Y si también es una cubertura para este conjunto. Caso X sea un espacio topológico y todos los elementos de $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in J}$ sean abiertos, decimos que esta es una* **cubrimiento abierto** *para Y.*

Definición 1.1.16. *Un subconjunto K de un espacio topológico X es* **compacto** *si cada cubrimiento abierto para K admite un subcubrimiento finita para el mismo.*

Proposición 1.1.8. *Cada espacio compacto y metrizable tiene una base contable.*

Demostración. Consulte la referencia [17], Teorema 16.11, pág. 112 . □

Las demostraciones de las siguientes cuatro proposiciones no son complicadas y pueden ser visto en la remisión [12], secciones 3-5 y 3-6.

Proposición 1.1.9. *Todo subconjunto cerrado de un espacio compacto es compacto.*

Proposición 1.1.10. *Todo subconjunto compacto de un espacio de Hausdorff es cerrado.*

Proposición 1.1.11. *Sean X y Y espacios topológicos. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua, entonces la imagen de un compacto por f es compacto.*

Proposición 1.1.12. *Si X es un espacio compacto y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es continuo, entonces existen puntos a y b en X tales que $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, para todo $x \in X$. En otras palabras, f alcanza el máximo y mínimo en X.*

Definición 1.1.17. *Si X es conjunto cualquiera, una colección E de subconjuntos de X posee la* **propiedad de intersección finita**, *abreviadamente* **P.I.F.** *, si cada subconjunto finito de E tiene una intersección no vacía.*

Teorema 1.1.1. *Si X es un espacio topológico, entonces son equivalentes:*
i) X es compacto;
ii) toda colección E de subconjuntos cerrados de X con el P.I.F. tiene intersección no vacía;
iii) toda sucesión generalizada en X tiene una subsucesión generalizada convergente.

Demostración. Ver remisión [17]. □

Definición 1.1.18. *Sean A y B conjuntos cualesquiera y G una colección de aplicaciones de A en B. Si para cada par de puntos diferentes $a_1, a_2 \in A$ existe $g \in G$ que satisface $g(a_1) \neq g(a_2)$, decimos que G* **separa los puntos** *de A.*

Lema 1.1.1. *Sea* X *un espacio compacto,* Y *un espacio de Hausdorff y* G *una colección de aplicaciones continuos de* X *en* Y*. Si* G *separa los puntos de* X *, entonces la topología* $\sigma(\mathrm{X}, \mathrm{G})$ *coincide con la topología original de* G

Observación 1.1.1. *Si* G *es una familia de aplicaciones continuas de un espacio topológico* X *en un espacio topológico de Hausdorff* Y*, que separa los puntos de* X*, entonces* $\boldsymbol{X}$ *es un Espacio de Hausdorff. Para verificar este hecho, fijemos* t_1*,* $t_2 \in \mathrm{X}$ *tal que* $t_1 \neq t_2$*. Cómo* G *separa los puntos de* §*, existe* $g \in \mathrm{G}$ *tal que* $g(t_1) \neq g(t_2)$*. Por que* Y *es de Hausdorff, existen vecindades* V_1 *y* V_2 *de* $g(t_1)$ *y* $g(t_2)$*, correspondientemente, tales que* $V_1 \cap V_2 = \emptyset$*; . Entonces, por la continuidad de* g *, los conjuntos* $g^{-1}(V_1)$ *y* $g^{-1}(V_2)$ *son vecindades de* t_1 *y* t_2 *, correspondientemente, cuya intersección es vacío.*

Teorema 1.1.2. *(Tychonoff) Un producto arbitrario de espacios compactos es compacto en la topología producto.*

Demostración. Consulte la referencia [12]. □

El siguiente ejemplo se utilizará después de uno de los principales resultados de este trabajo, el el teorema de Bishop, con el objetivo de resaltar el interés de una de sus hipótesis.

Ejemplo 1.1.5. *Sea* Λ *un conjunto no numerable y para cada* λ *en este conjunto, sea* $\boldsymbol{I}_\lambda$ *el espacio topológico formado por el intervalo cerrado real* $[0, 1]$ *dotado de la topología inducida por la topología habitual de* $\mathbb{R}$*. Como todo* I_λ *es compacto, donde* $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$*, el teorema de Tychonoff nos dice que* X *con la topología del producto es compacto. Basado en la referencia [12], ejemplo 2, p.131 , tenemos que* X *no es metrizable.*

Definición 1.1.19. *Si* X *es un espacio topológico donde los conjuntos unitarios son cerrados, decimos que* X *es* **normal** *si para todo par* A_1*,* A_2 *de subconjuntos cerrados y disjuntos de* X *, existen abiertos disjuntos* $U, V \subset \mathrm{X}$ *tales que* $\mathrm{A}_1 \subset U$ *y* $\mathrm{A}_2 \subset V$*.*

Proposición 1.1.13. *Cada espacio compacto de Hausdorff es normal.*

Demostración. Ver remisión [12]. □

Teorema 1.1.3. *Sean* A_1 *y* A_2 *subconjuntos cerrados y disjuntos de un espacio normal* X*. Si* $[a, b]$ *es un intervalo real cerrado, entonces existe una función continua* $g : \mathrm{X} \longrightarrow [a, b]$ *tal que* $f \equiv a$*,* $\forall a \in \mathrm{A}_1$ *y* $f \equiv b$*,* $\forall b \in \mathrm{A}_2$*.*

Demostración. Ver remisión [12], Teorema 3.1, p.207. □

1.2. Análisis Funcional

En esta sección, indicaremos algunos resultados bien conocidos que usaremos posteriormente. Para no recargar la notación, al trabajar con más de un espacio normado, usaremos la notación $\|\cdot\|$ para todas las normas involucradas, siempre que esto no comprometa la claridad de la información.
Antes de la siguiente proposición recordaremos dos definiciones.

Definición 1.2.1. *Una sucesión* (x_n) *en un espacio normado* E *es una* **sucesión de Cauchy** *si para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $k \in \mathrm{N}$ *tal que* $\| x_n - x_m \| < \epsilon$ *siempre que* $n \geq k$ *y* $m \geq k$.
Un **espacio de Banach** *es un espacio normado* E *tal que cada sucesión de Cauchy en* E *converge a un punto de* E.
Sea f *una aplicación de un espacio topológico* X *en un espacio normado* E. *Si existe* $N > 0 \,/\, \| f(x) \| \leq N,\ \forall x \in \mathrm{X}$, *entonces decimos que* f *es* **acotada.**

Proposición 1.2.1. *Si* E *y* F *son espacios normados y* f *es un aplicación lineal de* E *en* F, *entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) f *es continua en el origen;*

ii) f *es continua;*

iii) Existe $N > 0 \,/\, \| f(x) \| \leq N \| x \|,\ \forall x \in \mathrm{E}$.

Demostración. Ver remisión [5], Proposiciones 1 y 2, p.36.

□

Si E *es un espacio normado sobre* K *y* $f : \mathrm{E} \to \mathrm{K}$ *es lineal, entonces decimos que* f *es un* **funcional lineal**.

Definición 1.2.2. *Sea* f *un funcional lineal continuo definido en* E. *Definimos una norma de* f, *que denotaremos por* $\| f \|$, *por la igualdad*

$$\| f \| = inf\{N > 0 : \| f(x) \| \leq N \| x \|,\ para\ todo\ x \in \mathrm{E}\}.$$

La Proposición 1.2.1 garantiza la existencia de este infimo. A continuación, definiremos un espacio vectorial donde, de hecho, esta es una norma, justificando la nomenclatura.

Definición 1.2.3. *Sea* E *un espacio normado sobre* K *y* E' *el conjunto de funcionales lineales continuos definidos en* E. *Considere en* E' *la suma y el producto escalar definidos punto a punto, es decir, para cada par* $g_1, g_2 \in \mathrm{E}'$ *y cada* $\alpha \in \mathrm{K}$, $(g_1+g_2)(x) = g_1(x)+g_2(x)$ *y* $(\alpha g)(x) = \alpha g(x)$, *para todo* $x \in \mathrm{E}$. *Con las operaciones asi definida y la norma de la definición anterior, afirmamos que* E' *es un espacio de Banach, al que llamaremos* **dual** *de* E. *La prueba de esta afirmación se puede ver en la remisión [5]. Se puede comprobar que* $\| g \|$ *también es igual al supremo del conjunto* $\{|g(x)| : x \in S_{\mathrm{E}}\}$.

Cuando consideramos un espacio normado E *con la topología* $\sigma(\mathrm{E}, \mathrm{E}')$, *diremos solamente que* E *está dotada de la topología débil, omitiendo la familia de funcionales que genera esta topología.*

Definición 1.2.4. *Si* (y_m) *una sucesión en un espacio de Banach* E. *Decimos que la serie* $\sum_{m=1}^{\infty} y_m$ *es* **absolutamente convergente**, *si la serie de números reales* $\sum_{m=1}^{\infty} \| y_m \|$ *converge.*

El siguiente teorema caracteriza los espacios de Banach a través de la serie absolutamente convergente.

Teorema 1.2.1. *Si* E *es un espacio normado, entonces* E *es un espacio de Banach si, y solamente si, toda serie absolutamente convergente en* E *converge .*

Demostración. Ver remisión [16], Teorema 4.3, pág. 67 . □

Definición 1.2.5. *Sea E un espacio normado sobre* K *y, para cada* y *en E, sea* $\delta_{\mathrm{y}} : E' \longrightarrow \mathrm{K}$ *definido por* $\delta_{\mathrm{y}}(g) = g(\mathrm{y})$. *La topología débil determinada por la colección* $\{\delta_{\mathrm{y}}\}_{\mathrm{y}\in E}$ *en* E' *se denomina* **topología de débil estrella** *y se denota por* $\sigma(E', E)$.

1.3. Álgebras y subálgebras

Definición 1.3.1. *Un espacio vectorial A sobre* K *es una álgebra si en eso esta definido la operación de* $A \times A$ *en* A, *llamada multiplicación tal que:*

i) $x_1(x_2x_3) = (x_1x_2)x_3$;

ii) $x_1(x_2 + x_3) = x_1x_2 + x_1x_3$ *y* $(x_2 + x_3)x_1 = x_2x_1 + x_3x_1$;

iii) $\alpha(x_1x_2) = (\alpha x_1)x_2 = x_1(\alpha x_2)$, *para* $x_1, x_2, x_3 \in A$ *y* $\alpha \in \mathrm{K}$.

Un subespacio vectorial B del álgebra A es una **subálgebra** *de A si* $x_1x_2 \in B$, *para cada* $x_1, x_2 \in B$. *Decimos que A es un* **álgebra conmutativa** *si* $x_1x_2 = x_2x_1$, $\forall x_1, x_2 \in A$, *y que A es un* **álgebra con unidad** *si existe un elemento* $\mathbf{1} \in A$ *tal que* $\mathbf{1}x_1 = x_1\mathbf{1} = x_1$, $\forall x_1 \in A$. *En general, denotamos la unidad de un álgebra, cuando exista, por* **1.**

Definición 1.3.2. *Sea* H *un subconjunto de un álgebra A y* H_0 *el conjunto formado por puntos* $x \in \mathrm{A}$ *para el cual existe un número finito de elementos* $h_1, h_2, ..., h_n \in \mathrm{H}$ *satisfaciendo* $x = h_1h_2...h_n$. *No hay dificultad para probar que el conjunto* $H \subset A$ *de combinaciones lineales finitas de los elementos de* H_0 *es una subálgebra de A que contiene* H *y que está contenido en cualquier álgebra que contiene este conjunto. En este asunto, decimos que H es un* **álgebra generada** *por* H.

Definición 1.3.3. *Un espacio normado* $(A, \|\cdot\|)$ *sobre* K *es un* **álgebra normada** *si A para un álgebra sobre el mismo campo de escalares* K *y* $\| x_1x_2 \| \leq \| x_1 \| \| x_2 \|$, *para todo* $x_1, x_2 \in A$. *Si ademas,* $(A, \|\cdot\|)$ *es un espacio de Banach, decimos que A es un* **Álgebra de Banach**. *Asi como en la definición de un espacio topológico, odmitiremos la norma en la notación de álgebra normada desde que no genera duda en cuanto a la norma considerada.*

Definición 1.3.4. *Sean* A_1 *y* A_2 *álgebras sobre el mismo cuerpo* K. *Decimos que un aplicación* $\psi : A_1 \longrightarrow A_2$ *es un* **homomorfismo** *si esta preserva la estructura algebraica de* A_1, *es decir, si* ψ *es lineal y multiplicativo* ($\psi(x_1x_2) = \psi(x_1)\psi(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in A_1$). *Un* **isomorfismo** *es un homomorfismo biyectivo. Si existe un isomorfismo* ψ *de un álgebra* A_1 *en otro* A_2, *entonces el inverso* ψ^{-1} *de* A_2 *en* A_1 *es también un isomorfismo y en este caso, decimos que* A_1 *y* A_2 *son* **isomorfos**.

Retornando la definición 1.3.1, se puede comprobar que la unidad de un álgebra normada $\mathcal{A}$ *es única. Además, si* $\mathcal{A} \neq 0$ *y* $\mathbf{1}$ *es su unidad, entonces, a modo que* $\| \mathbf{1} \| \leq \| \mathbf{1} \| \| \mathbf{1} \| = \| \mathbf{1} \|^2$, *tenemos* $\| \mathbf{1} \| \geq 1$ *. En la remisión [8], como consecuencia del Teorema 1.3.1, tenemos que es posible precisar una norma* $\| \cdot \|_u$ *en* $\mathcal{A}$ *análogo al originario y tal que* $\| \mathbf{1} \|_u = 1$. *Por tanto, en nuestras álgebras normadas con unidad, cuando no especificamos con qué norma trabajaremos, la norma unitaria siempre será igual a 1.*

Los resultados obtenidos en álgebras normadas con unidad, no siempre permanecen válido en las álgebras sin unidades, e incluso cuando esto ocurre, normalmente las demostraciones se tornan más complicadas. Veamos cómo sumergir isométricamente un álgebra normada cualquier otro con unidad: sea $\mathcal{A}$ *un álgebra normada sobre* $\mathbb{K}$ *y considére el producto cartesiano* $\mathcal{A}[e] = \mathcal{A} \times \mathbb{K}$ *las operaciones suma, producto por escalar y producto definido, respectivamente, de la siguiente manera:*

i) $(x_1, \alpha) + (x_2, \beta) = (x_1 + x_2, \alpha + \beta)$;

ii) $\beta(x, \alpha) = (\beta x, \beta\alpha)$;

iii) $(x_1, \alpha)(x_2, \beta) = (x_1x_2 + \alpha x_2 + \beta x_1, x_1x_2)$, *cualquiera que sea* $x_1, x_2 \in \mathcal{A}$ *y* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Se verifca que $\mathcal{A}[e]$ *con estas operaciones es un álgebra sobre* $\mathbb{K}$ *y que el elemento* $e = (0, 1) \in \mathcal{A}[e]$ *es la unidad de esta álgebra, son inmediatas. Es claro con la norma* $\| (x_1, \alpha) \| = \| x_1 \| + |\alpha|$, $\mathcal{A}[e]$ *se convierte en un álgebra normada y defininiendo* $\psi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}[e]$ *en cada* $x \in \mathcal{A}$ *por* $\psi(x_1) = (x_1, 0)$, *es fácil verificar que* ψ *es un isomorfismo isométrico entre* $\mathcal{A}$ *y la subálgebra* $\psi(\mathcal{A})$ *de* $\mathcal{A}[e]$. *Además, si* $\mathcal{A}$ *es un álgebra de Banach, entonces* $\mathcal{A}[e]$ *también lo es.*
De este momento en adelante, nuestras álgebras serán siempre conmutativas y con unidad. Veamos algunos ejemplos de álgebras:

Ejemplo 1.3.1. *El cuerpo de los números complejos* $\mathbb{C}$ *con las operaciones usuales y dotados con el valor absoluto es un álgebra de Banach sobre* $\mathbb{C}$ *conmutativo y con unidad, asi como el cuerpo de los reales es un álgebra de Banach sobre* $\mathbb{R}$ *conmutativo y con unidad.*

Ejemplo 1.3.2. *Sea* X *un conjunto y* E *un álgebra de Banach en* $\mathbb{K}$. *Si* $\mathcal{B}(X, E)$ *es el conjunto de todos las aplicaciones acotadas de* X *en* E, *por lo que es fácil de verificar que con las operaciones suma, producto por escalar y producto definido punto a punto,* $\mathcal{B}(X, E)$ *es un álgebra sobre* $\mathbb{K}$. *El álgebra* $\mathcal{B}(X, E)$ *es conmutativa ya que* E *es conmutativa y si* $\mathbf{1}$ *es la unidad de* E, *la aplicación* $g_1 \equiv \mathbf{1}$ *será la unidad de* $\mathcal{B}(X, E)$. *Se puede probar que la aplicación*

$$\| \cdot \|_\infty : \mathcal{B}(X, E) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$g \longrightarrow \| g \|_\infty = sup\{\| g(x) \| : x \in X\}$$

es una norma en $B(X, E)$, la **norma del supremo**, *y con ella, $B(X, E)$ es un álgebra normado. Probamos que $B(X, E)$ es completo. Sea (g_n) una sucesión de Cauchy en $B(X, E)$. En este caso, todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq n_0$ tenemos*

$$\| g_m(x) - g_n(x) \| \leq \| g_n - g_m \|_\infty < \epsilon, \ \forall x \in X.$$

Luego, para todo $x \in X$, la sucesión $(g_n(x))$ es una sucesión de Cauchy en E, que es un espacio de Banach. Por lo tanto, $(g_n(x))$ es convergente para cada $x \in X$ y, así, la aplicación está bien definida

$$\begin{aligned} g : X &\longrightarrow E \\ x &\longrightarrow \lim_{n\to\infty} g_n(x) \end{aligned}$$

.

Como (g_n) es una sucesión de Cauchy, existe $t \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n, m \geq t$ tenemos que $\| g_n(x) - g_m(x) \| < 1$, $\forall x \in X$. Haciendo m tender al infinito, tenemos $\| g_t(x) - g(x) \| \leq 1$, para todo $x \in X$. Con esto, $\| g(x) \| \leq \| g_t(x) \| + 1 \leq \| g_t \|_\infty + 1 < +\infty$, para todo $x \in X$, lo que implica $g \in B(X, E)$.
Ahora, comprobemos que $\{g_n\}$ converge a g en la norma del supremo. Dado $\epsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq p$, $\| g_n(x) - g_m(x) \| < \epsilon/2$, para todo $x \in X$. Una vez mas, haciendo que m tienda a infinito, obtenemos, para cada $n \geq p$ fijo, $\| g_n(x) - g(x) \| \leq \epsilon/2$, para todo $x \in X$. En consecuencia, $\sup_{x\in X} \| g_n(x) - g(x) \| = \| g_n - g \|_\infty \leq \epsilon/2 < \epsilon$, para todo $n \geq p$.

En otras palabras, (g_n) converge a g en la norma del supremo. Por lo tanto, $B(X, E)$ con la norma del supremo es un álgebra de Banach sobre $\mathbb{K}$.

Ejemplo 1.3.3. *Sea X un espacio topológico. Si E y $B(X, E)$ son como en el ejemplo anterior , entonces el subconjunto de $B(X, E)$ conformada por las funciones continuas , que identificaremos por $B_c(X, E)$, es una subálgebra cerrada de $B(X, E)$. Partiendo de esto, tendrá lugar inmediatamente del hecho de que $B(X, E)$ es un espacio completo, que $B_c(X, E)$ con la topología inducida por la topología de $B(X, E)$ es un álgebra de Banach. Además, de forma análogo al ejemplo previo, $B_c(X, E)$ es conmutativo y posee unidad.*

Demostraremos apenas que $B_c(X, E)$ es un subconjunto cerrado de $B(X, E)$, una vez que la verificación de las otras afirmaciones anteriores es simple.

Sea (f_n) una sucesión en $B_c(X, E)$ que converge a una aplicación f en $B(X, E)$. Dado $w \in X$ y $\epsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\| f_n(x) - f \|_\infty < \epsilon/3$, para todo $n \geq k$. Además, como f_k es continua , existe una vecindad W de w tal que $f_k(W) \subset B(f_k(w), \epsilon/3)$. Luego, para todo $x \in W$,

$$\| f(x) - f(w) \| \leq \| f(x) - f_k(x) \| + \| f_k(x) - f_k(w) \| + \| f_k(w) - f(w) \|$$

$$\leq \| f - f_k \|_\infty + \| f_k(x) - f_k(w) \| + \leq \| f_k - f \|_\infty$$

$$< \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon$$

.

Con esto, $f \in B_c(X, E)$, de donde se sigue que $B_c(X, E)$ es cerrado.

Ejemplo 1.3.4. *Sea X un espacio topológico y C el conjunto de funciones constantes de X en $\mathbb{K}$. Es fácil comprobar que C con operaciones definidas punto a punto y con la norma del suprema es una subálgebra cerrada de $B_c(X, \mathbb{K})$ que contiene la unidad. Así, C con la norma del supremo es un álgebra de Banach sobre $\mathbb{K}$, conmutativa y con unidad.*

Ejemplo 1.3.5. *Si X es un espacio compacto y E es un álgebra de Banach sobre $\mathbb{K}$, entonces el conjunto $C(X, E)$ de las aplicaciones continuas de X en E, con las operaciones definido punto a punto y con la norma del supremo, es un álgebra de Banach sobre $\mathbb{K}$, conmutativa y con unidad.*
De hecho, por la Proposición 1.1.12, toda $f \in C(X, E)$ está acotada y, con esto, estamos en un caso particular del ejemplo 1.3.3 donde $B_c(X, E) = C(X, E)$.

A partir desde este punto, si X e Y son espacios topológicos, denotaremos por $C(X, Y)$ o el conjuto de todas las aplicaciones continuas de X a Y. Por ejemplo 1.3.5, cuando X es compacto y Y es un álgebra de Banach, $C(X, Y) = B_c(X, Y)$. En este caso, al menos que se indique lo contrario, consideraremos a $C(X, Y)$ dotado de la norma del supremo, y si $Y = \mathbb{K}$, escribiremos apenas $C(X)$. Entretanto, en situaciones válidas solo para $Y = \mathbb{R}$, o simplemente para $Y = \mathbb{C}$, nuestras notaciones serán $C(X, \mathbb{R})$ y $C(X, \mathbb{C})$, respectivamente.

Según esta notación, si X es compacto, el álgebra de de Banach C del ejemplo 1.3.4 es una subálgebra de $C(X)$.

Ejemplo 1.3.6. *Sea U el subconjunto de $C([0, 1], \mathbb{C})$ formado por las funciones g tales que $g(x) = \overline{g(1 - x)}$, para todo $x \in [0, 1]$. Es fácil ver que U con las operaciones definidas punto a punto y dotado de la norma del supremo, es una subálgebra real de $C([0, 1], \mathbb{C})$ que contiene la unidad de esta álgebra, la función constante es igual a 1. Verificaremos que con la norma del supremo, U es completa: sea $\{g_n\}$ una sucesión de Cauchy en U. Por ejemplo 1.3.5, $C([0, 1], \mathbb{C})$ es completo y, consecuentemente, $\{g_n\}$ converge a una función $g \in C([0, 1], \mathbb{C})$. Basta probar que $g \in U$ para concluir lo que queremos.*

Si $y \in [0, 1]$, entonces

$$g(y) = \lim_{y\to\infty} g_n(y) = \lim_{y\to\infty} \overline{g_n(1 - y)} = \overline{\lim_{y\to\infty} g_n(1 - y)} = \overline{g(1 - y)},$$

ya que la función que asocia a cada número complejo con su conjugado es continua. Luego, $g \in U$ y apartir de esto, U con las operaciones punto a punto y con la norma del supremo es un álgebra de Banach conmutativa y con unidad sobre $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.3.7. *Sea $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ dotado de topología heredada de $\mathbb{C}$ y $A(\Delta)$ el subconjunto de $C(\overline{\Delta}, \mathbb{C})$ conformado por las funciones analíticas en Δ. Como es un espacio compacto, por ejemplo 1.3.5, $C(\overline{\Delta}, \mathbb{C})$ con las operaciones definido punto a punto y provisto de la norma del supremo, es un álgebra de Banach sobre $\mathbb{C}$, conmutativa y con unidad.*

Veamos que con las operaciones y la norma heredada de $C(\overline{\Delta}, \mathbb{C})$ *,* $A(\Delta)$ *también es un álgebra de Banach conmutativa y unitaria sobre* $\mathbb{C}$*.*

Por el hecho de la suma, del producto escalar y el producto de funciones analíticas son funciones analíticas, tenemos que $A(\Delta)$ *es, de hecho, un álgebra normada y conmutativa sobre* $\mathbb{C}$*. Además, como la función constante e igual a 1 está en* $A(\Delta)$*, esta álgebra posee unidad . Para concluir que* $A(\Delta)$ *es un conjunto completo, basta verifique , como en el ejemplo 1.3.3, que* $A(\Delta)$ *es una subálgebra cerrada de* $C(\overline{\Delta}, \mathbb{C})$*, una vez que esta última está completo. Pero esto no exigirá algún trabajo, por que sabemos que cada función compleja definido en un subconjunto abierto de* $\mathbb{C}$ *que es un límite uniforme de una suseción de funciones analíticas definidas en el mismo abierto, es analítica. Esto concluye el ejemplo.*

Ejemplo 1.3.8. *Sea* $A(\Delta)$ *como en el ejemplo 1.3.7,* $Fr\Delta$ *con la topología heredada de* $\mathbb{C}$ *y* $\mathcal{H}$ *el subconjunto de* $C(Fr\Delta, \mathbb{C})$ *formado por las funciones* f *para el cual existe* $\tilde{f} \in A(\Delta)$ *tal que* $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(1)$ *y* $\tilde{f}(z) = f(z)$ *, para todo* $z \in Fr\Delta$ *.*

No hay dificultad en comprobar que $\mathcal{H}$ *con la norma del suprema es un álgebra normada sobre* $\mathbb{C}$*, conmutativa y con unidad.*

Para verificar que $\mathcal{H}$ *es un álgebra de Banach, sea* (f_n) *una sucesión de Cauchy en esta álgebra y, para cada* $n \in \mathbb{N}$*, sea* $\tilde{f}_n$ *una función en* $A(\Delta)$ *cuya restricción a* $Fr\Delta$ *coincide con* (f_n) *y tal que* $\tilde{f}_n(0) = \tilde{f}_n(1)$*. Como para cada par* $n, m \in \mathbb{N}$*, la restricción sobre* $\tilde{f}(n) - \tilde{f}(m)$ *para* $Fr\Delta$ *coincide con* $f_n - f_m$*, por el Teorema del Módulo Máximo,* $\| \tilde{f}_n - \tilde{f}_m \|_\infty = \| f_n - f_m \|_\infty$*.*

Acontinuación, $(\tilde{f}_n)$ *es una sucesión de Cauchy en* $A(\Delta)$*, que por ejemplo 1.3.7, es un álgebra de Banach. Consecuentemente,* $(\tilde{f}_n)$ *converge a una función* $\tilde{f} \in A(\Delta)$ *en la norma del supremo. Particularmente, todo* $\epsilon > 0$ *,* $\exists\, k \in \mathbb{N}$ */* $|\tilde{f}_n(z) - \hat{f}_n(z)| < \epsilon$*,* $\forall z \in Fr\Delta$ *, siempre que* $n \geq k$ *. Además, del hecho de que* $\tilde{f}_n(0) = f_n(1)$ *para todo natural n, se sigue que* $\tilde{f}(0) = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n(0) = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n(1) = \tilde{f}(1)$*. Con esto tenemos la restricción de* $\tilde{f}$ *a* $Fr\Delta$ *pertenece a* $\mathcal{H}$ *y es el límite de la sucesión* $(\hat{f}_n)$ *en la norma del supremo, demostrando que* $\mathcal{H}$ *es un álgebra de Banach.*

En el proximo ejemplo y siempre que juzguemos convenioentemente, haremos una identificación a travéz de cada número complejo $w = a+bi$ *con el par* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$*. Cuando esta identificación fuera hecha, consideraremos* $\mathbb{R}^2$ *dotado con la norma euclidiana. A partir de este punto, para simplificar la notación, dada* $A \subset \mathbb{R}^2$ *,* $k \in \mathbb{N}$ *y una función* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^2$*, lo denotaremos por* f_x *y* f_y *, respectivamente, las derivadas parciales de f con respecto a la primera y la segunda variables. Además, usaremos la notación de norma del supremo a aplicaciones determinada en conjuntos distintos. En cada caso, esta notación denota al supremo del conjunto conformado por los módulos (o por las normas) de los valores asumidos por la aplicación en cuestión, o pasemos el dominio de la misma. Para el siguiente ejemplo, necesitaremos el siguiente teorema:*

Teorema 1.3.1. *Sea* (h_n) *una sucesión de funciones diferenciadas definidas en un intervalo cerrado* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *y tomando valores en* $\mathbb{R}$*. Si hay* $x_0 \in [a, b]$ *tal que* $(h_n(x_0))$

converge y si $(h_n^{'})$ *converge uniformemente en* $[a, b]$, *entonces* (h_n) *converge uniformemente en* $[a, b]$ *para una función diferenciable* $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $\lim_{n\to\infty} h_n^{'}(t) = h^{'}(t)$, *para* $t \in [a, b]$.

Demostración. Consulte la referencia [14], Teorema. 7.17, p. 140. □

Ejemplo 1.3.9. *Sea* Δ *como en el ejemplo 1.3.7 y* $C^1(\Delta)$ *el conjunto de funciones de* $C(\overline{\Delta}, \mathbb{R})$ *que cuando se vista como funciones de* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$ *en* $\mathbb{R}^2$, *posee derivadas parciales de primer orden continuas y acotadas dentro de su dominio. Probaremos que con las operaciones definidas punto a punto y dotadas de la norma* $\| f \| = \| f_x \|_\infty + \| f_y \|_\infty + \| f \|_\infty$, $C^1(\Delta)$ *es un álgebra de Banach sobre* $\mathbb{C}$, *conmutativa y con unidad. Por la observación hecha antes de este ejemplo, el suprema* $\| f_x \|_\infty$ *y* $\| f_y \|_\infty$ *son tomados los conjuntos donde estas funciones* f_x *y* f_y *están definidas, es decir , en* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$ *(o, equivalentemente, en* Δ*).*

Inicialmente, necesitaríamos verificar que la suma, el producto por escalar y el producto de los elementos de $C^1(\Delta)$ *pertenecen a* $C^1(\Delta)$ *, pero la suma y el producto por escalar claramente satisfacen esta propiedad y por lo tanto solo verificaremos el producto. Sean* $f, g \in C^1(\Delta)$ *, tales que* $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ *y* $g(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y))$, *donde* $(x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$. *Como* $fg = (f_1g_1 - f_2g_2, f_1g_2 + f_2g_1)$ *y cada una de las funciones de coordenadas de f y g tiene derivadas parciales de primer orden continua y acotada en* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} < 1\}$ *, fg también lo será. Junto a este hecho de que , por el ejemplo 1.3.5 ,* $fg \in C(\overline{\Delta})$ *, concluimos que* $C^1(\Delta)$ *es cerrado para el producto. En consecuencia,* $C^1(\Delta)$ *es un álgebra sobre* $\mathbb{C}$. *Además, por la definición del producto ,* $C^1(\Delta)$ *es conmutativo y tiene unidad , la función constante es igual a 1 .*

En analogía con el ejemplo 1.3.2, es fácil verificar que la norma arriba definida y del hecho de la norma en $C^1(\Delta)$ *.*

Ahora, veremos que con esta norma, $C^1(\Delta)$ *es un álgebra de Banach. Sea* (f_n) *una sucesión de Cauchy en* $C^1(\Delta)$. *Si denotamos por* $\hat{f}_n$ *la restricción de cada* f_n *al conjunto* Δ, *tenemos que* $\| \tilde{f}_n \|_\infty \leq \| f_n \|_\infty$, $(\tilde{f}_n)_x = (f_n)_x$ *y que* $(\hat{f}_n)_y = (f_n)_y$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *ya que las derivadas parciales de estas funciones están definidas solo en* Δ. *Cómo* (f_n) *es una sucesión de Cauchy, para cada* $\epsilon > 0$, *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\| (f_n)_x - (f_m)_x \|_\infty + \| (f_n)_y - (f_m)_y \|_\infty + \| f_n - f_m \|_\infty = \| f_n - f_m \| < \epsilon,$$

para $n, m > n_0$. *Entonces* $\| f_n - f_m \| < \epsilon$, $\| \tilde{f}_n - \tilde{f}_m \| < \epsilon$, $\| (\tilde{f}_n)_x - (\hat{f}_m)_x \|_\infty < \epsilon$ *y* $\| (\tilde{f}_n)_y - (\hat{f}_m)_y \|_\infty < \epsilon$ *cuando* $n, m > n_0$. *Del ejemplo 1.3.3, existe funciones* $C(\Delta, \mathbb{C})$ *y* $\tilde{f}$, $\alpha, \beta \in B_c(\Delta.\mathbb{C})$ *tales que las sucesiones* (f_n), $(\tilde{f}_n)$, $((f_n)_x)$ *y* $((f_n)_y)$ *convergen a la norma del supremo, correspondientemente, para* f, $\tilde{f}$, α *y* β. *Podemos ver que la restricción de f a* Δ *es la función* $\tilde{f}$, *una vez fijado* $x \in \Delta$, $\hat{f}_n(x) = f_n(x)$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$, *y por tanto, las sucesiones* $(\tilde{f}_n(x))$ *y* $(f_n(x))$ *convergen al mismo límite, lo que implica* $\tilde{f}(x) = f(x)$ *.*

Con el propósito de probar que f posee derivadas parciales en Δ, *que* $f_x = \alpha$ *y que* $f_y = \beta$, *establecemos* $z_0 = (x_0, y_0) \in \Delta$ *. Se sigue del hecho de que* Δ *es abierto, la existencia de* $r > 0$ *tal que* $B(z_0, r) \subset \Delta$ *. Así, si* I_{x_0} *es el intervalo real cerrado* $[x_0 - r/2, x_0 + r/2]$

, *entonces* $I_{x_0} \times \{y_0\} \subset \Delta$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, *sea* $\varphi_n, \psi_n : I_{x_0} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $\hat{f}_n(t, y_0) = (\varphi_n(t), \psi_n(t))$, *para* $t \in I_{x_0}$. *Como* $(\hat{f}_n)_x$ *existe en todos los puntos de* $I_{x_0} \times \{y_0\}$, *tenemos que* φ_n *y* ψ_n *son diferenciable en* I_{x_0} *y que* $(\tilde{f}_n)_x(t, y_0) = (\varphi_n'(t), \psi_n'(t))$. *Recordando que* $(\hat{f}_n)_x$ *converge por* α *en la norma del supremo, fijado* $\epsilon > 0$, *existe* $m_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\sup_{x \in I_{x_0}} |(\tilde{f}_n)_x(t, y_0) - \alpha(t, y_0)| \leq \| (\tilde{f}_n)_x - \alpha \|_\infty < \epsilon,$$

siempre que $n \geq m_0$. *En el caso, si* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, *entonces*

$$\sup_{x \in I_{x_0}} |\varphi_n'(t) - \alpha_1(t, y_0)| \leq \sup_{x \in I_{x_0}} |(\tilde{f}_n)_x(t, y_0) - \alpha(t, y_0)| < \epsilon$$

y

$$\sup_{x \in I_{x_0}} |\varphi_n'(t) - \alpha_2(t, y_0)| \leq \sup_{x \in I_{x_0}} |(\tilde{f}_n)_x(t, y_0) - \alpha(t, y_0)| < \epsilon,$$

para todo $n \geq m_0$. *En consecuencia,* $(\varphi_n'(t))$ *y* $(\psi_n'(t))$ *convergen uniformemente para las restricciones de* α_1 *y* α_2 *al conjunto* $I_{x_0} \times \{y_0\}$, *que denotaremos por* $\tilde{\alpha}_1$ *y* $\tilde{\alpha}_2$. *Por* y_0 *es fijo, podemos considerar* $\tilde{\alpha}_1$ *y* $\tilde{\alpha}_2$ *definidos en* I_{x_0}. *Por el Teorema 1.3.1,* (φ_n) *y* (ψ_n) *convergen uniformemente en* I_{x_0}, *respectivamente, para funciones diferenciables* $\varphi, \psi : I_{x_0} \longrightarrow \mathbb{R}$. *Además,* $\lim_{n\to\infty} \varphi_n'(t) = \varphi'(t)$ *y* $\lim_{n\to\infty} \psi_n'(t) = \psi'(t)$, *para todo* $t \in I_{x_0}$.

Como para cada $t \in I_{x_0}$

$$\tilde{f}(t, y_0) = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}(t, y_0) = \lim_{n\to\infty} (\varphi_n(t), \psi_n(t)) = (\varphi(t), \psi(t)),$$

$\tilde{f}$ *posee derivada parcial con relación a la primera variable en todos los puntos t en el interior de* I_{x_0} *y en estos puntos,*

$$f_x(t, y_0) = \tilde{f}_x(t, y_0) = (\varphi'(t), \psi'(t)) = (\tilde{\alpha}_1(t), \tilde{\alpha}_2(t)) = (\alpha_1(t, y_0), \alpha_2(t, y_0)) = \alpha(t, y_0).$$

En particular, la derivada parcial de f con relación a la primera variable existe en el punto z_0 *y* $f_x(z_0) = f_x(x_0, y_0) = \alpha(x_0, y_0) = \alpha(z_0)$. *La prueba de que la derivada parcial de f con relación a la segunda variable existe en el punto* z_0 *y que* $f_y(z_0) = f_y(x_0, y_0) = \beta(x_0, y_0) = \beta(z_0)$ *es completamente análoga.*

La arbitrariedad de z_0 *nos permite concluir que f tiene derivadas parciales en cada punto de* Δ *y que* $f_x \equiv \alpha$, *así como* $f_y \equiv \beta$. *Recordando que* α *y* β *son funciones continua y acotada en* Δ , *tenemos que* $f \in C^1(\Delta)$. *Finalmente, veamos que* (f_n) *converge a f , en la norma definida en* $C^1(\Delta)$: *dado* $\eta > 0$, *existen* $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \in \mathbb{N}$ *tales que* $\| f_n - f \|_\infty < \eta/3$, $\| (\tilde{f}_m)_x - \alpha \|_\infty < \eta/3$ *y* $\| (\hat{f}_k)_y - \beta \|_\infty < \eta/3$, *siempre que,* $n \geq n_1$, $m \geq n_2$ *y* $k \geq n_3$. *Por lo tanto ,*

$$\begin{aligned} \| f_n - f \| &= \| (f_n)_x - f_x \|_\infty + \| (f_n)_y - f_y \|_\infty + \| f_n - f \|_\infty \\ &= \| (\tilde{f}_n)_x - \alpha \|_\infty + = \| (\tilde{f}_n)_y - \beta \|_\infty + \| f_n - f \|_\infty \\ &< \eta/3 + \eta/3 + \eta/3 = \eta , \end{aligned}$$

para $n \geq \max\{n_1, n_2, n\}$, prueba lo que queríamos. Con esto concluimos que $C^1(\Delta)$ dotado con la norma definida al comienzo de este ejemplo, es un álgebra de Banach sobre $\mathbb{C}$, conmutativa y con unidad.

Definición 1.3.5. *Si A es un álgebra de Banach, entonces un elemento $a \in A$ es* **invertible** *si existe $b \in A$ tal que $ab = ba =$ **1**. En este caso, decimos que b es el* **inverso** *de a.*

Definición 1.3.6. *Si A es un álgebra de Banach sobre $\mathbb{K}$, denotaremos por $\mathrm{M}(A)$ el conjunto de homomorfismos no nulo continuos de A en $\mathbb{K}$.*

Toda álgebra A de Banach es, en particular, un espacio normado. Luego podemos considerar el dual A' de esta álgebra vista como un espacio normado. Siendo A es un álgebra de Banach sobre $\mathbb{K}$, la siguiente proposición nos dice que el conjunto de homomorfismos no nulos de A en $\mathbb{K}$ está en la esfera de A', o, usando nuestra notación, $\mathrm{M}(A) \subset S_{A'}$. Como consecuencia de estos, tenemos que, en un álgebra de Banach A sobre $\mathbb{K}$, todo homomorfismo no nulo de A en $\mathbb{K}$ es continuo.

Proposición 1.3.1. *Si A es un álgebra de Banach sobre $\mathbb{K}$, entonces para todo homomorfismo no nulo ψ de A en $\mathbb{K}$, tenemos que $\| \psi \| = 1$.*

Demostración. Consulte la referencia [8], Teorema 3.1.2, pág. 68. □

Definición 1.3.7. *Sea A un álgebra de Banach sobre $\mathbb{C}$. La topología débil estrella de A' induce en $\mathrm{M}(A)$ una topología, que se denomina* **topología de Gelfand**. *Así, una sucesión generalizada (ψ_α) en $\mathrm{M}(A)$ converge a $\psi \in \mathrm{M}(A)$ si y sólo si, $(\psi_\alpha(f))$ converge a $(\psi(f))$ para todo $f \in A$.*

Teorema 1.3.2. *Si A es un álgebra de Banach sobre $\mathbb{K}$, entonces $\mathrm{M}(A)$ provisto con la topología de Gelfand es un espacio compacto de Hausdorff.*

Demostración. Consulte la referencia [8], Teorema 3.2.2, p. 71. □

Definición 1.3.8. *Sea A un álgebra de Banach sobre $\mathbb{K}$. Para cada $f \in A$, consideremos una función*

$$\hat{f} : \mathrm{M}(A) \longrightarrow \mathbb{K}.$$

$$\varphi \longrightarrow \varphi(f)$$

Decimos que $\hat{f}$ es la **transformada de Gelfand** *de f. El conjunto $\hat{A} = \{\hat{f} : f \in A\}$ se llama la* **representación de Gelfand** *de A y la aplicación*

$$\hat{\ } : A \longrightarrow \hat{A}$$

$$f \longrightarrow \hat{f}$$

es la **transformación de Gelfand***.*

Teorema 1.3.3. *(Teorema de representación de Gelfand) Si* A *es un álgebra de Banach sobre* $\mathbb{K}$*, entonces la transformación de Gelfand es un homomorfismo de* A *sobre subálgebra* $\hat{\mathrm{A}}$ *de* $C(\mathrm{M}(\mathrm{A}))$ *. Además,* $\hat{\mathrm{A}}$ *separa los puntos de* $\mathrm{M}(\mathrm{A})$ *y contiene las funciones constantes. También tenemos que la transformada de Gelfand de un elemento arbitraria* $f \in \mathrm{A}$ *satisface* $\|\hat{f}\|_{\mathrm{M(A)}} \leq \| f \|$ *, donde*

$$\|\hat{f}\|_{\mathrm{M(A)}} = \sup_{\varphi \in \mathrm{M(A)}} |\hat{f}(\varphi)|$$

.

Demostración. Consulte la referencia [8], Teorema 3.3.1, p. 74 . □

Capítulo 2

El Teorema de Shilov

En este capítulo, después de definir el conjunto máximal, conjunto pico, punto pico y frontera, presentaremos el Teorema de Shilov que garantiza la existencia y unicidad de la frontera mínimal cerrada para una clase de álgebra. Ejemplos de fronteras de Shilov concluira el cap´ıtulo.

2.1. Conjunto máximal y conjunto frontera

Para las dos definiciones siguientes, consideremos H como un subconjunto de C(X), donde X es un espacio compacto.

Definición 2.1.1. *Para cada $f \in \mathrm{H}$,, el conjunto no vacío $\{x \in X : |f(x)| = \| f \|_\infty\}$ es llamado* **conjunto máximal** *de f y denotado por $S(f)$. Un conjunto $F \subset X$ es una* **frontera** *para H si $S(f) \cap F \neq \emptyset$, para todo $f \in \mathrm{H}$. Si una frontera (cerrada) F para H no contiene propiamente ningúna frontera(cerrada) para esta familia, decimos que F es una* **frontera mínimal (cerrada)** *para H .*

En otras palabras, un conjunto $F \subset X$ es una frontera para H si para cada $f \in \mathrm{H}$ existe $\omega \in F$ tal que $|f(\omega)| = \| f \|_\infty$.

Por definición, S(f) es un subconjunto cerrado de X, para todo $f \in \mathrm{H}$, y de la definición de frontera junto con la Proposición 1.1.12, se sigue que X es siempre una frontera para H .

Definición 2.1.2. *Un subconjunto P de X es un* **conjunto pico** *para H si existe una función no nula $f \in \mathrm{H}$ tal que $f(x) = \| f \|_\infty$ para todo $x \in P$ y $|f(y)| < \| f \|_\infty$ para todo $y \in X \setminus P$. Decimos que $p \in X$ es un* **punto pico** *para H si el comjunto unitario $\{p\}$ es un conjunto pico para H.*

De acuerdo con las definiciones anteriores, cada conjunto de picos es el conjunto máximal de algunas funciónes en H. Además, no es difícil observar que si H es una subálgebra de C(X), entonces P es un conjunto pico para H si, solamente si existe una función f $\in \mathrm{H}$ tal que $f \equiv 1$ en P y el valor absoluto de f es estrictamente menor que 1 en $X \setminus P$. En una de las direcciones la conclusión es inmediata. En la otro, suponiendo P un *conjunto de picos, basta tomar una función $g \in H$ que satisfaga la definición del conjunto de picos y $f = \frac{g}{\|g\|_\infty}$ será una función deseada. En particular, esta observación se aplica a los puntos pico.*

Cuando sea posible y juzgaremos útil, usaremos las definiciones equivalentes de conjunto de pico y punto pico obtenidos en el párrafo anterior.

Proposición 2.1.1. *Si X un espacio compacto y A una subálgebra de $C(X)$ que contiene la unidad de $C(X)$, es decir, la función constante igual a 1 definida en X. Si $f \in A$ no nulo, entonces el conjunto máximal de f contiene al conjunto pico para A.*

Demostración. Sea $x_0 \in X$ tal que $|f(x_0)| = \| f \|_\infty$. Como f no es nulo, $\| f \|_\infty > 0$ y, en consecuencia, $f(x_0) \neq 0$. Esto nos permite definir la función $g = 2^{-1}\ (f/f(x_0) + 1)$, que pertenece a A, ya que la función constante es igual a 1 está en esta álgebra.

Para concluir que $\| g \|_\infty = 1$ basta observar que $g(x_0) = 1$ y que $|g(x)| \leq 2^{-1}(|f(x)/f(x_0)|+ 1) \leq 1$ para todo $x \in X$, ya que $| f(x_0)| = \|f\|_\infty$. A fin de verificar que $S(g) \subset S(f)$ y que $g \equiv 1$ en $S(g)$, tomamos un elemento w en $S(g)$.
En este caso ,

$$|f(w)/f(x_0) + 1| = 2|g(w)| = 2 \tag{1}$$

Además, por $x_0 \in S(f)$, $|f(w)/f(x_0) + 1| \leq |f(w)/f(x_0)| + 1 \leq 2$. Junto a (1) , esto significa $| f(w)/f(x_0) |= 1$. Si ϑ es el argumento principal de $f(w)/f(x_0)$, por (1) , $((cos\vartheta + 1)^2 + (sen\vartheta)^2)^{1/2} = 2$, es decir, $(2^{-1}(1 + cos\vartheta))^{1/2} = 1$. Equivalentemente, $|cos(\vartheta/2)|= 1$, de donde se sigue que $\vartheta = 0$. Con esto, $f(w)/f(x_0) = 1$, y recordando que $|f(x_0)| = \| f \|_\infty$, tenemos que $w \in S(f)$. De la arbitrariedad de w , obtenemos que $S(g) \subset S(f)$.

Por otra parte, como $f(w)/f(x_0) = 1$ para todo $w \in S(g)$, la definición de g implica $g(w) = 2^{-1}(f(w)/f(x_0) + 1) = 1$, para todo $w \in S(g)$. En otras palabras, S(g) es un conjunto de pico para A que está contenido en S(f) .

□

Teorema 2.1.1. *Si X es un espacio compacto y $F \subset C(X)$, entonces existe una frontera cerrado minimal para F.*

Demostración. Sea E la colección de todos las fronteras cerradas para F. Como $X \in E$, $E \neq 0$. Consideremos en E el orden parcial $\leq$ definido por

$$E_1 \leq E_2 \text{ si, solamente si , } E_2 \subset E_1, \text{ para } E_1 , E_2 \in E.$$

Para garantizar la existencia de un elemento maximal en E, tomamos una familia completamente ordenada $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset E$. Fijando $f \in F$, si $\{E_{\lambda_j}\}_{j=1}^n$ es una subfamilia finita de $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, entonces hay $q \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $\bigcap_{j=1}^{n} E_{\lambda_j} = E_{\lambda_q}$ y por lo tanto,

$$\bigcap_{j=1}^{n}(S(f) \cap E_{\lambda_j}) = S(f) \cap (\bigcap_{j=1}^{n} E_{\lambda_j}) = S(f) \cap E_{\lambda_q}$$

Como E_{λ_q} es una frontera para F , $S(f) \cap E_{\lambda_q} \neq \phi$. Luego, la familia $\{ S(f) \cap E_\lambda \}_{\lambda\in\Lambda}$ posee la propiedad de intersección finita es y está formada por subconjuntos cerrados de X , una vez que E_λ es cerrado para todos los $\lambda \in \Lambda$. Recordando que X es compacto, se sigue del Teorema 1.1 que

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(S(f) \cap E_\lambda) \neq \phi,$$

o sea,

$$S(f) \cap (\bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda) \neq \phi,$$

La arbitrariedad de la eleccion de f nos permite concluir que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ es una frontera para F . Además, este conjunto es cerrado por ser una intersección de conjuntos cerrados. Luego , $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ pertenece a E y es una cota superior para $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Bajo estas condiciones, el Lema de Zorn nos dice que E tiene un elemento maximal Γ. Sigue del orden definido en E, la maximalidad de Γ y de la propia definición de E, que Γ es una frontera cerrada mínimal para F. □

Teorema 2.1.2. **(Teorema Shilov)** *Si* X *es un espacio compacto y* A *es una subálgebra de* $C(X)$ *que separa los puntos de* X *, entonces existe un única frontera cerrada minimal para* A *.*

Demostración. Por el Teorema 2.1.1, existe una frontera minimal cerrada Γ para A. Provaremos que Γ contenido en todas las fronteras cerradas para A , lo que tendrá como consecuencia inmediata la unicidad de Γ.

Como la demostración arriba, sea E la coleción de todas las fronteras cerradas para A , sea $F \in E$ supongamos , por el absurdo , que existe $w_0 \in \Gamma\backslash F$. Recordando que F es un conjunto cerrado, tenemos que existe una vecindad de w_0 que no intercepta a F. Por el Lema 1.1, existe una vecindad abierta V de w_0 en la topología $\sigma(X, A)$ con la siguiente propiedad , existe $f_1, f_2, ..., f_n \in A$ es un número real positivo r tal que

$$V = \{x \in X : |f_i(x) - f_i(w_0)| < r \ , \ i = 1, ...n\} \text{ y } V \cap F = \emptyset$$

En este caso, observamos que existe j $\in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $f \neq 0$, porque si $f_i = 0$ para i = 1, 2, . . . , n , entonces $V = X$, y tendríamos que $V \cap F = F \neq \emptyset$. Es fácil ver que podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $f_j \neq 0$, para todo j $\in \{1, 2, ..., n\}$.

Además, para Γ es una frontera cerrada mínimal y por $\Gamma\backslash V$ es un subconjunto propio cerrado de Γ, tenemos que $\Gamma\backslash V$ no es una frontera para A. En este caso, si $\Gamma\backslash V \neq \emptyset$, entonces existe g $\in$ A tal que

$$\| g \|_\infty > \max_{w\in\Gamma\setminus V} |g(w)| \geq 0.$$

No es difícil ver que este máximo existe, ya que $\Gamma\setminus V$ es compacto. Por tanto si M $= \max_{w\in\Gamma\setminus V} |g(w)|$ entonces $\frac{M}{\|g\|_\infty} < 1$. Tomando k $\in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande , a fin de que

$$\left(\frac{M}{\| g \|_\infty}\right)^k < r \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \max_{w\in X} |f_i(w) - f_i(w_0)|\right)^{-1},$$

y definiendo $h = g^k$, tenemos , para $t \in \Gamma\setminus V$, que

$$|h(t)| = |g^k(t)| = |(g(t))^k| \leq M^k < \eta \| g \|_\infty^k \text{ , donde}$$

$$\eta = r \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \max_{w\in X} |f_i(w) - f_i(w_0)|\right)^{-1}$$

Como existe $t_g \in X$ tal que $|g(t_g)| = \| g \|_\infty$ y cómo $|h(t_g)| = |g(t_g)|^k$, por la desigualdad arriba ,

$$|h(t)| < \eta |h(t_g)|, \text{ para todo } t \in \Gamma\setminus V.$$

Como consecuencia ,

$$|h(t)| < \eta \| h \|_\infty, \text{ para todo } t \in \Gamma\setminus V.$$

Podemos reescribir esta desigualdad definiendo η , para concluir que

$$|h(t)| \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \max_{w\in X} |f_i(w) - f_i(w_0)|\right) < r \| h \|_\infty,$$

para cada $t \in \Gamma\setminus V$. En particular ,

$$|f_i(t)h(t) - f_i(w_0)h(t)| < r \| h \|_\infty, \text{ para todo } t \in \Gamma\setminus V \text{ y i} = 1, 2, \ldots, \text{n. (1)}$$

Por otro lado, para t$\in V$, si $|h(t)| = 0$, entonces

$$|f_i(t)h(t) - f_i(w_0)h(t)| \leq r|h(t)| < r \| h \|_\infty, \text{ para i} = 1, 2, \ldots, \text{n.}$$

Si $|h(t)| = 0$,

$$|f_i(t)h(t) - f_i(w_0)h(t)| < r|h(t)| \leq r \| h \|_\infty, \text{ para i} = 1, 2, \ldots, \text{n.}$$

Entonces, para todo t$\in$V,

$$|f_i(t)h(t) - f_i(w_0)h(t)|| < r \parallel h \parallel_\infty, \text{ para i } = 1, 2, \ldots, n. \ (2)$$

De (1) y (2) se sigue que

$$|f_i(t)h(t) - f(w_0)h(t)|| < r \parallel h \parallel_\infty, \text{ para todo } t \in \Gamma \text{ y para i } = 1, 2, \ldots, n. \ (3)$$

El hecho de que Γ sea frontera para A junto con el hecho de que $f_ih - f_i(w_0)h$ pertenece a A para i = 1, 2, . . . , n , garantizan la existencia de $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \Gamma$ tal que

$$|f_i(w_i)h(w_i) - f_i(w_0)h(w_i)| = \parallel f_ih - f_i(w_0)h \parallel_\infty, \text{ para i } = 1, 2, \ldots, n.$$

Entonces, por (3),

$$\parallel f_ih - f_i(w_0) \parallel < r \parallel h \parallel_\infty, \text{ para i } = 1, 2, \ldots, n. \ (4)$$

Recordando que F es una frontera para A , tenemos que existe $t_h \in F$ tal que $|h(t_h)| = \parallel h \parallel_\infty$. De esta manera, (4) implica

$$|f_i(t_h)h(t_h) - f_i(w_0)h(t_h)| < r|h(t_h)|, \text{ para i } = 1, 2, \ldots, n,$$

o equivalente ,

$$|f_i(t_h) - f_i(w_0)| < r, \text{ para i } = 1, 2, \ldots, n.$$

En otras palabras, $t_h \in V \cap F$, lo cual es una contradicción, ya que $V \cap F = \emptyset$; . Para concluir la demostración , supongamos $\Gamma \backslash V = \emptyset$, es decir , $r \subset V$. Cómo f_i 0 para i=1, . . . , n , fijando j en $\{1, \ldots, n\}$ arbitrariamente, para cada $w \in \Gamma$,tenemos que

$$|f_i(w)f_j(w) - f_i(w_0)f_j(w)| < r \parallel f_j \parallel_\infty, \text{ para i } = 1, 2, \ldots, n.$$

Con esto ,

$$\parallel f_if_j - f_i(w_0)f_j \parallel_\infty < r \parallel f_j \parallel_\infty, \text{ para i } = 1, 2, \ldots, n,$$

Tomando $t_j \in F$ tal que $|f_j(t_j)| = \parallel f_j \parallel_\infty$, tenemos que

$$|f_i(t_j)f_j(t_j) - f_i(w_0)f_j(t_j)| < r|f_j(t_j)|, \text{ para i } = 1, 2, \ldots, n,$$

o sea ,

$$f_i(t_j) - f_i(w_0)| < r, \text{ para i } = 1, 2, \ldots, n.$$

En consecuencia , $t_j \in V \cap F$, lo que contradice el hecho de que $V \cap F = \emptyset$; . Esto concluye la demostración .

□

Observe que en las hipótesis del teorema no se requería que el álgebra $\mathcal{A}$ tuviera unidad o que estaba provisto de una norma.

Vale la pena agregar que en la demostración del Teorema de Shilov, mostramos que la frontera cerrado mínimal está contenido en todas las fronteras cerradas para $\mathcal{A}$. Además , por ser una frontera cerrada para $\mathcal{A}$, la frontera cerrado mínimal contiene la intersección de todas las fronteras cerrados para esta álgebra. Luego, una consecuencia inmediata del Teorema de Shilov es que la frontera minimal cerrado de una subálgebra $\mathcal{A}$ de $C(\mathcal{X})$ que separa los puntos del espacio compacto $\mathcal{X}$, es la intersección de todos las fronteras cerradas para $\mathcal{A}$.

El corolario abajo nos proporciona una conclusión interesante relativa a una familia de funciones $\mathcal{F} \subset C(\mathcal{X})$, donde $\mathcal{X}$ es un espacio compacto, sin exigir que $\mathcal{F}$ satisfaga todos las Hipótesis del Teorema de Shilov.

Colorario 2.1.1. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio compacto y $\mathcal{F} \subset C(\mathcal{X})$. Si $\mathcal{F}$ tiene una única frontera cerrado mínimal Γ, entonces Γ es la intersección de todas las fronteras cerrados para $\mathcal{F}$.*

Demostración. Sea Γ como en el enunciado y supongamos la existencia de una frontera E cerrada para $\mathcal{F}$ tal que $\Gamma \setminus E \neq \emptyset$. Como $\mathcal{X}$ es compacto, E es compacto, y así, siendo $\mathcal{F}' \subset C(E)$ la familia de restricciones de las funciones de $\mathcal{F}$ en E , el Teorema 2.1 nos dice que $\mathcal{F}'$ posee frontera cerrada minimal $\Gamma' \subset E$.

Por otro lado, si $f \in \mathcal{F}$, por E es una frontera para $\mathcal{F}$, existe $t \in E$ tal que $|f(t)| = \| f \|_\infty$. Consecuentemente , la restricción f_E de f al conjunto E , satisface $\max |f_E(x)| = \| f \|_\infty$. A partir de esto y del hecho de que Γ' es una frontera para $\mathcal{F}'$, obtenemos $t \in \Gamma$ tal que $|f(t)| = |f_E(t)| = \max_{x\in E} |f_E(x)| = \| f \|_\infty$. Por lo tanto, Γ es frontera cerrado para $\mathcal{F}$, además de no contener propiamente a ningún otro, una vez que es una frontera cerrada mínimal para $\mathcal{F}'$. Recordando que $\Gamma \setminus E \neq \emptyset$, tenemos que Γ' es una frontera cerrada mínimal para $\mathcal{F}$ distinto de Γ, contradiciendo la unicidad de esta frontera. □

Definición 2.1.3. *Si $\mathcal{X}$ un espacio compacto y $\mathcal{H}$ un subconjunto de $C(\mathcal{X})$. Si $\mathcal{H}$ posee una única frontera minimal cerrada, entonces llamaremos a esta frontera minimal cerrada la* **frontera de Shilov** *de $\mathcal{H}$ y lo denotaremos por $\partial\mathcal{H}$.*

Observación 2.1.1. *Por el Corolario 2.1.1, la frontera de Shilov de $\mathcal{H}$, cuando existe, es la intersección de todas las fronteras cerrados para $\mathcal{H}$.*

El siguiente resultado establece una caracterización desde puntos de fronteras de Shilov.

Colorario 2.1.2. *Si $\mathcal{X}$ un espacio compacto y $\mathcal{H}$ un subconjunto de $C(\mathcal{X})$ que posee frontera de Shilov. Entonces $t \in \partial\mathcal{H}$ si, solamente si , para todo entorno V de t , existe $f \in \mathcal{H}$ tal que $|f(x)| < \| f \|_\infty$, para todo $x \in \mathcal{X} \setminus V$. En particular, si $\mathcal{H}$ es un subálgebra de $C(\mathcal{X})$ que contiene la función constante igual a 1 definida en $\mathcal{X}$, entonces toda vecindad de un punto cualquier de $\mathcal{H}$ contiene un conjunto pico para $\mathcal{H}$.*

Demostración. Sea $t \in X$ y supongamos que existe un entorno V de t tal que para todo $f \in H$, existe $x_f \in X \setminus V$ que satisface $|f(x_f)| \geq \| f \|_\infty$, es decir, tal que $|f(x_f)| = \| f \|_\infty$. Esto significar´ıa que $X \setminus V$ es una frontera para H y, en consecuencia, que $X \setminus V$ es una frontera cerrado para H. Luego, por la observación 2.1.1, tendríamos que $\partial H \subset X \setminus V$. Por por otro lado , como V es la vecindad de t , $t \notin X \setminus V$, lo que implicaría $t \notin \partial H$. demostramos así, por contraposición, que si $t \notin X \setminus V$, entonces para toda vecindad V de t existe $f \in H$ tal que $|f(x)| < \| f \|_\infty$, para todo $x \in X \setminus V$.

Reciprocamente, sea $t \in X$ tal que para toda vecindad U de t exista $f \in H$ satisfaciendo $|f(x)| < \| f \|_\infty$, para todo $x \in X \setminus U$. Fijando una frontera cerrado F para H , si V es un entorno de t , entonces existe $f \in H$ tal que $|f(x)| < \| f \|_\infty$, para todo $x \in X \setminus V$. Luego, f no alcanza su módulo máximo fuera de V , por tanto $F \cap V \neq \emptyset$, ya que F es una frontera para H . As´ı $t \in \overline{F} = F$. Sigue de la arbitrariedad de F que t pertenece a todas las fronteras cerrados para H . De la Observación 2.1.1 , obtenemos que $t \in \partial H$.

Ahora suponga que H es una subálgebra de $C(X)$ que contiene la función constante igual a 1. En este caso, si $t \in \partial H$ y V es una vecindad de t propiamente contenido en X, entonces existe $f \in H$ cuyo módulo no alcanza el valor $\| f \|_\infty$ fuera de V , es decir, $f \neq 0$ y $S(f) \subset V$. Por la Proposición 2.1.1 , esto significa que V contiene un conjunto pico para H. Si $V = X$, el conjunto X , por ser el conjunto máximal de la función constante igual a uno , es un conjunto pico para H contenido en V .

□

Colorario 2.1.3. *Si X un espacio compacto y H un subconjunto de $C(X)$ que separa los puntos X. Si $H = C(X)$, entonces $\partial H = X$.*

Demostración. Sea $t \in X$ y sea V una vecindad abierta de t. Cómo H separa el puntos de X y $\mathbb{K}$ es Hausdorff. Por la Observacion 1.1.1 , tenemos que X es un espacio de Hausdorff. Por la Proposición 1.1.13, sigue de eso y de la hipótesis de X ser compacto, que X es normal , y así , através del Lema de Urysohn , podemos tomar una función $g \in H$ tal que $g(t) = 1$ y $g(s) = 0$, para todo $s \in X \setminus V$. Por otro lado, el hecho de que $H = C(X)$ garantiza la existencia de una función $f \in H$ tal que $\| f - g \|_\infty < 1/2$. Entonces, para todo $s \in X \setminus V$, $|f(s)| = |f(s) - g(s)| \leq \| f - g \|_\infty < 1/2$, mientras que $|f(t)| > 1/2$, una vez que $|f(t) - g(t)| \leq \| f - g \|_\infty < 1/2$ implica $-|f(t)| < -|g(t)| + 1/2 = -1/2$. Por lo tanto, $\| f \|_\infty \geq 1/2$. En otras palabras, para una vecindad V de t arbitraria, encontramos una funcion $f \in H$ tal que $|f(s)| < \| f \|_\infty$, para todo $s \in X \setminus V$. Por el Corolario 2.2.2, esto significa que $t \in \partial H$. □

A continuación, aplicaremos estos conceptos y resultados a algunos de los ejemplos de la sección 1.1.3, determinando, cuando sea posible, la frontera de Shilov de estos ejemplos.

Ejemplo 2.1.1. *Sea un espacio compacto de Hausdorff X , veamos que la frontera de Shilov de $C(X)$ es X . De hecho, por la Proposición 1.1.13, X es normal y, en consecuentemente, dados dos puntos distintos $x, y \in X$, mediante el Lema de Urysohn encontramos una función $f \in C(X)$ tal que $f(x) = 0$* $1 = f(y)$. *Entonces, $\partial C(X) = X$, por el Corolario 2.2.3.*

Ejemplo 2.1.2. *Sea $A(\Delta)$ el álgebra de Banach definida en el ejemplo 1.3.7. Como la función identidad está en $A(\Delta)$, es fácil ver que este álgebra separa los puntos de Δ y se* encuadra en las hipotesis del Teorema de Shilov. Con esto, $\mathrm{A}(\Delta)$ tiene una única frontera cerrado m´ınimal. Para probar que $Fr\Delta = \partial \mathrm{A}(\Delta)$, fijamos $p = exp(i\varphi)$, con $\varphi \in [0, 2\pi)$, y sea $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}$ definido por $f(z) = (p + z)2^{-1}$. Claramente f está en $\mathrm{A}(\Delta)$ y , para $z = exp(i\vartheta)$ tal que $\vartheta \in [0, 2) \setminus \{\varphi\}$, tenemos que $|f(z)| < 1$, porque esta desigualdad equivale a la desigualdad $(4^{-1}(cos\varphi + cos\vartheta)^2 + 4^{-1}(sen\varphi + sen\vartheta)^2)^{1/2} < 1$, que ocurre si, solamente si , $|cos((\varphi - \vartheta)/2)| < 1$.

Además, $|f(p)| = 1$ y , por f no ser constante, el Teorema del Módulo Máximo nos dice que f no alcanza su módulo máximo en Δ. Luego, p es un punto pico para $\mathrm{A}(\Delta)$. La arbitrariedad de p, obtenemos que todos los puntos en la frontera del disco unitario son puntos pico, y , consecuentemente, que este conjunto está contenido en cualquier frontera para $\mathrm{A}(\Delta)$. En particular, $Fr\Delta \subset \partial \mathrm{A}$.

Finalmente , $\partial \mathrm{A} \subset Fr\Delta$ una vez que, por el Teorema del Módulo Máximo, $Fr\Delta$ es un frontera para A, además de ser cerrada.

Ejemplo 2.1.3. *Sea H el álgebra de Banach definida en el ejemplo 1.3.8. A fin de determinar la frontera de Shilov de H , iniciaremos garantizando su existencia , es decir , mostrando que H posee una única frontera cerrado mínimal. Para ello, verificamos que H separa los puntos $Fr\Delta$.*

Sea $\tilde{f} \in \mathrm{A}(\Delta)$ definida por $\tilde{f}(z) = z(z - 1)$. Si f es la restricción de $\tilde{f}$ a $Fr\Delta$, es claro que $f \in \mathrm{H}$. Consideremos un par de complejos distintos $z_1, z_2 \in Fr\Delta$. suponiendo que $z_2 \neq 1$ y $f(z_1) = f(z_2)$, tenemos que $f(z_2) \neq 0$, una vez que f se cancela en el punto $z = 1$. Definición de $g : Fr\Delta \longrightarrow \mathbb{C}$ por $g(z) = f(z)(z - z_1)$, es fácil ver que $g \in \mathrm{H}$, además de satisfacer $g(z_1) = 0 \neq f(z_2)(z_2 - z_1) = g(z_2)$, probando que H separa los puntos de $Fr\Delta$. Bajo estas condiciones, el Teorema de Shilov dice que H posee una única frontera cerrada mínimal.
Afirmamos que $\partial \mathrm{H} = Fr\Delta$. Del hecho, sea f como se definió anteriormente y fijamos $z_0 = exp(i\vartheta_0) \in Fr\Delta$, con $\vartheta_0 \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi\}$.

Si $h : Fr\Delta \longrightarrow \mathbb{C}$ es la restricción de la función entera definido por la ecuación $h(z) = (z + z_0)2^{-1}$, entonces por cada $\vartheta \in [0, 2\pi] \setminus \{\vartheta_0\}$, tenemos qué

$$|h(exp(i\vartheta))| = [4^{-1}(2 + 2cos\vartheta cos\vartheta_0 + 2sen\vartheta sen\vartheta_0)]^{1/2} = |cos(\tfrac{\vartheta - \vartheta_0}{2})| < 1 \text{ , (1) entonces}$$

por $|cos(\frac{\vartheta - \vartheta_0}{2})| = 1$ si, solamente si , $(\vartheta - \vartheta_0)2^{-1} = k\pi$ para algún entero k , o que no ocurre ya que $\vartheta[0, 2\pi] \setminus \{\vartheta_0\}$ y $\vartheta_0 \in (0, 2\pi)$.

Por otra parte, si V es una vecindad de z_0 en $Fr\Delta$, entonces existe $r > 0$ tal que $(\vartheta_0 - r, \vartheta_0 + r) \subset (0, 2\pi)$ y $exp(i\vartheta) \in V$, para todos los $\vartheta \in (\vartheta_0 - r, \vartheta_0 + r)$. Por la compacidad del conjunto $\Theta_0 = [0, 2\pi] \setminus (\vartheta_0 - r, \vartheta_0 + r)$, existe $\alpha \in \Theta_0$ tal que $|h(exp(i\vartheta))| = \max_{\vartheta \in \Theta_0} |h(exp(i\vartheta))|$. Junto con (1) y el hecho de que $|f(z_0)| = |z_0 - 1| > 0$, esto garantiza la existencia de $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\max_{\vartheta \in \Theta_0} |h^n(exp(i\vartheta))| = |h^n(exp(i\vartheta))| < |f(z_0)/2|. \text{ (2)}$$

No es difícil ver que el producto $h^n f/2 \in \mathrm{H}$ y observando que $|f(z)/2| \leq 1$ para todo $z \in Fr\Delta$, de la desigualdad en (2) obtenemos que

$$|(h^n f/2)(exp(i\vartheta))| = |h^n(exp(i\vartheta))||f(exp(i\vartheta))/2| < |f(z_0)/2| = |h^n(z_0)f(z_0)/2|,$$

para todos $\vartheta \in \Theta_0$ *. Por lo tanto,* $h^n f/2$ *no alcanza el módulo máximo en los puntos* $z \in Fr\Delta$ *cuyos argumentos principales están fuera del intervalo* $(\vartheta_0 - r, \vartheta_0 + r)$ *. Recordando que* $exp(i\vartheta) \in V$ *siempre que* $\vartheta \in (\vartheta_0 - r, \vartheta_0 + r)$ *, concluimos que* $h^n f/2$ *es una función de* H *que no alcanza módulo máximo fuera de* V *. Por el Corolario 2.2, esto significa que* $z_0 \in \partial$H *como* ∂H *y un conjunto cerrado, se sigue de la arbitrariedad de* $z_0 \in (Fr\Delta)\setminus\{-1, 1\}$ *que* ∂H $= Fr\Delta$.

En el proximo ejemplo veremos un álgebra de Banach que no posee frontera cerrado mínimal única. Además, este ejemplo prueba que no podemos alterar la hipótesis del Teorema de Shilov sustituinedo la hipótesis de A *sea una subálgebra compleja de* $C(X, \mathbb{C})$ *por la hipótesis de que* A *es un álgebra real contenida en* $C(X, \mathbb{C})$.

Ejemplo 2.1.4. *Sea* U *el álgebra de Banach definida en el ejemplo 1.3.6 y sea* $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ *la función definida por* $f(t) = i(1/2 - t)$. *Como para todo* $t \in [0, 1]$,

$$\overline{f(1-t)} = \overline{i(t-1/2)} = i(1/2 - t) = f(t),$$

tenemos que $f \in$ U *, además de ser una función inyectiva. Así,* U *separa los puntos de [0, 1], pero* U *no es una subálgebra de* $C([0, 1], \mathbb{C})$, *una vez que su cuerpo de escalares es* $\mathbb{R}$. *Por lo tanto, apenas solo una de las hipótesis del Teorema de Shilov no se cumple. Apesar de esto, El teorema 2.1 garantiza la existencia de una frontera cerrada m´ınimal para* U.

Para verificar que U *tiene más de una frontera cerrada mínimal, fijemos* $g \in$ U *arbitrariamente. Por la Proposición 1.1.12, existe* $s \in [0, 1]$ *tal que* $|g(s)| = \| g \|_\infty$ *, y recordando la definición de* U *, tenemos que*

$$|\overline{g(1-s)}| = |g(s)| = \| g \|_\infty .$$

Suponiendo s $1/2$, *si* $s \in [0, 1/2)$ *, entonces* $1 - s \in (1/2, 1]$ *y , analogamente, si* $s \in (1/2, 1]$, *entonces* $1 - s \in [0, 1/2)$. *De cualquier forma, toda función* $g \in$ U *logra máximo en módulo en los intervalos cerrados* $[0, 1/2]$ *y* $[1/2, 1]$ *, de donde se siguen estos intervalos son fronteras cerradas para* U *. Por lo tanto, por el Corolario 2.1, si* U *tuviera frontera cerrada mínimal única* Γ_u, *ella estaría en la intersección de estos intervalos, es decir,* Γ_u *ser´ıa el conjunto unitario* $\{1/2\}$ *. Pero* $\{1/2\}$ *ni siquiera es una frontera para* U, *ya que la función* f *definido al inicio de este ejemplo alcanza un máximo solo en los puntos* 0 *y* 1 *.*

Nuestro último ejemplo muestra que si X *es un espacio compacto de Hausdorff y* A *es un subálgebra de* $C(X)$ *que no separa los puntos de* X, *entonces es posible que* A *posee más de una frontera cerrada mínimal.*

Ejemplo 2.1.5. *Si X un espacio compacto de Hausdorff y C el conjunto de funciones constantes de X en $\mathbb{K}$. Por el ejemplo 1.3.1, C es una subálgebra de $C(X)$. Es inmediato que C no separa los puntos de X y que todos sus subconjuntos son fronteras para C. En particular, cualquier subconjunto unitario de X es una frontera cerrado minimal. Por tanto, basta que X posea por lo menos dos puntos para que C tenga más de una frontera cerrado mínimal.*

Antes de terminar este capítulo, haremos algunos comentarios.

Si A es un álgebra de Banach, por el Teorema 1.3.2, $M(A)$ equipado con la topología de Gelfand es un espacio compacto de Hausdorff.

Por otro lado, el Teorema de la Representación de Gelfand nos dice que la representación de Gelfand $\hat{A}$ de A es una subálgebra de $C(M(A))$ que separa los puntos de $M(A)$, además de contener las constantes.

En el trabajo original de Shilov, una frontera para un álgebra de Banach A es, por definición, un subconjunto F de $M(A)$ que es una frontera para $\hat{A} \subset C(M(A))$ en el sentido de la definición 2.1.1. En este contexto tenemos que si X es compacto y A es un álgebra de Banach que es una subálgebra (algebraica y topológica) de $C(X)$ que contiene la unidad y separa los puntos de X, tenemos que la transformación de Gelfand es una isometría y, en este caso, E es una frontera para A si, solamente si, el conjunto $\{\delta_x : x \in E\} \subset M(A)$ es una frontera para $\hat{A}$. Para más detalles, consulte [3].

Capítulo 3

El Teorema de Bishop

A través del Teorema de Shilov estudiamos condiciones suficientes para la existencia y unicidad de frontera cerrada minimal para una clase de álgebras normadas. Basado en esto, es natural preguntarse si, se observa ciertas condiciones, es posible garantizar la existencia y unicidad desde la frontera minimal, no necesariamente cerrado. El Teorema de Bishop responde esta pregunta positivamente, probando que si X es un espacio compacto metrizable y A es una subálgebra de $C(X)$ que separa los puntos de X y que, con la norma del supremo está completo, entonces el conjunto de punto pico para A es una única frontera minimal para esta álgebra. En este caso, como consecuencia de los Teoremas de Shilov y de Bishop, tendremos que la frontera de Shilov es cerrada del conjunto de punto pico para A .

Motivados por este resultado, presentaremos un teorema debido a H. G. Dales (consulte la referencia [2]) que, bajo condiciones un poco más generales que las exigidas en el Teorema de Bishop, prueba que el conjunto de punto pico todavia es denso en la frontera de Shilov del álgebra en cuestión. La demostración que daremos de este teorema se debe a T. G. Honary (ver referencia [4]) .

Todavía sobre el teorema de Bishop, destacamos unos de sus corolarios que establece que todo conjunto pico para el álgebra que satisfaga las hipótesis del referido teorema posee punto pico. Representamos tambien un ejemplo, debido a Jarosz, de un álgebra que tiene conjunto pico sin punto pico (consulte referencia [6]).

3.1. El Teorema de Bishop

Teorema 3.1.1. (Teorema de Bishop) *Sea A una subálgebra de $C(X)$, donde X es un espacio compacto. Si X es metrizable y si A con la norma del supremo es un álgebra de Banach que separa los puntos de X, entonces el conjunto P de los punto pico para esta álgebra es una frontera mínimal para A . En particular, esta frontera mínimal es única.*

Demostración. Si X fuera un conjunto unitario, entonces, trivialmente, P será el conjunto X y la frontera mínimal única para A que buscamos.

Suponiendo la existencia de por lo menos dos puntos distintos en X y basados en la hipótesis de $\mathcal{A}$ para separar los puntos de este conjunto, podemos fijar una función $g_0 \in \mathcal{A}$ que no sea constante. Como X es compacto y g_0 es continua, podemos tomar $x_1, x_2 \in X$ tales que $|g_0(x_1)| = \| g_0 \|_\infty$ y $g_0(x_1) \neq g_0(x_2)$. Así, $g_0(x_1) \neq 0$ y con eso, dividiendo g_0 por $g_0(x_1)$ si es necesario, podemos asumir $g_0(x_1) = 1$ y $g_0(x_2) \neq 1$. De esta forma, definiendo $g = g_0 + g_0^2$, tenemos que $g(x_1) = |g(x_1)| = 2 > |g(x_2)|$, osea, $g \in \mathcal{A}$ y $|g|$ no es constante . Además, observando que

$$|g(x)| \leq |g_0(x)| + |g_0(x)|^2 \leq \| g_0 \|_\infty + \| g_0 \|_\infty^2 = 2 = g(x_1), \text{ para todo } x \in X ,$$

es fácil ver que $S(g) \subset S(g_0)$, una vez que si $y \in X \setminus S(g_0)$, entonces $|g_0(y)| < 1$ lo que implica $|g(y)| \leq |g_0(y)| + |g_0(y)|^2 < 2 = \| g \|_\infty$, es decir, $y \in X \setminus S(g)$.

Sea $\mathcal{U}$ la familia formada por las colecciones Γ de subconjuntos de X que posedoras de las siguientes propiedades, sus elementos son conjuntos máximales de funciones de $\mathcal{A}$, $S(g) \in \Gamma$ y Γ goza de P.I.F. . Es claro que $\mathcal{U} \neq \emptyset$, ya que $S(g) \in \mathcal{U}$.

Consideremos en $\mathcal{U}$ el orden parcial $\leq$ definido por la inclusión, es decir, dado $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{U}$, $\Gamma_1 \leq \Gamma_2$ si $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$. Apuntando a la aplicación del Lema de Zorn, sea $\{\Gamma_\alpha\}$ un subconjunto completamente ordenado de $\mathcal{U}$. Cómo $\bigcup_\alpha \Gamma_\alpha$ posee $S(g)$ y el P.I.F. , tenemos qué $\bigcup_\alpha \Gamma_\alpha \in \mathcal{U}$ y es una cota superior para $\{\Gamma_\alpha\}$. Bajo estas condiciones, el Lema de Zorn nos dice que $\mathcal{U}$ posee un elemento máximal Γ_0 . Teniendo en cuenta que considerando que por cada $\gamma \in \Gamma_0$ existe g_γ tal que $\gamma = S(g_\gamma)$, todos los elementos de Γ_0 es cerrado. Uniendo a los hechos de X es compacto y Γ_0 posee el P.I.F. , por el Teorema 1.1.1, tenemos qué

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma_0} \gamma \neq \phi \tag{1}$$

Por otro lado, la Proposición 1.1.8 garantiza la existencia de una base numerable $\{E_n\}$ para la topología de X . Asi para cada $\gamma \in \Gamma_0$, existe una subcolección enumerable $\{E_{\gamma_i}\}$ de esta base tal que $\gamma^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_{\gamma_i}$. Luego ,

$$\Big(\bigcap_{\gamma \in \Gamma_0}\Big)^c = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_0} \gamma^c = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_0} \bigcup_{i=1}^{\infty} E_{\gamma_i}$$

Como $\{E_{\gamma_i} : \gamma \in \Gamma_0 \text{ y } i \in \mathbb{N}\}$ es una colección enumerable, podemos renombrar sus elementos, digamos por E_{n_j}, para obtener la igualdad abajo

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma_0} \gamma^c = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{n_j}$$

En este caso, para cada $j \in \mathbb{N}$, existen $\gamma \in \Gamma_0$ y $i \in \mathbb{N}$ tales que

$$E_{n_j} = E_{\gamma_i} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_{\gamma_i} = \gamma^c$$

En otras palabras, por cada $j \in \mathbb{N}$, existe $\gamma_j \in \Gamma_0$ tal que $E_{n_j} \subset \gamma_j^c$ Sigue de que

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma_0}\gamma^c = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{n_j} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}\gamma_j^c \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma_0}\gamma^c$$

Luego,

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma_0}\gamma^c = \bigcup_{j=1}^{\infty}\gamma_j^c,$$

o equivalente,

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma_0}\gamma = \bigcap_{j=1}^{\infty}\gamma_j, \text{ donde } \gamma_j \in \Gamma_0, \text{ para todos los } j \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Por (1), esto significa que $\bigcap_{j=1}^{\infty}\gamma_j$ y no vacío. Fijamos un elemento x_0 en esta intersección y, para cada $j \in \mathbb{N}$, sea g_{γ_j} una función sobre A tal que $S(g_{\gamma_j}) = \gamma_j$, a través del cual definiremos $g_j = \frac{g_{\gamma_j}}{g_{\gamma_j}(x_0)}$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $g_{\gamma_j}(x_0) \neq 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. En efecto, si existe una m natural tal que $g_{\gamma_m}(x_0) = 0$, como $x_0 \in \gamma_m = S(g_m)$, tenemos que $g_{\gamma_m} = 0$, y por lo tanto , que $\gamma_m = X$. Siendo así ,

$$\bigcap_{j=1}^{\infty}\gamma_j = \bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{\infty}\gamma_j,$$

De esta forma podemos excluir γ_m de la colección $\{\gamma_j\}_{j=1}^{\infty}$ sin cambiar la conclusion obtenida en (2). Además, existe un k natural para el cual $g_{\gamma_k}(x_0) \neq 0$, una vez que si $g_{\gamma_j}(x_0) = 0$ para todo j , entonces , por los mismos argumentos usados justo arriba ,$\gamma_j = X$ para todo j .

Como consecuencia,

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma_0}\gamma = \bigcap_{j=1}^{\infty}\gamma_j = X,$$

lo que implica $S(g) = X$, ya que $S(g) \in \Gamma_0$. Sin embargo, esto contradice el hecho de que $|g|$ no se constante .

A partir de su definición,

$$g_j(x_0) = 1 \text{ y } |g_j(x)| = \frac{|g_{\gamma_j}(x)|}{|g_{\gamma_j}(x_0)|} = \frac{|g_{\gamma_j}(x)|}{\|g_{\gamma_j}\|_\infty} \leq 1,$$

para todo $x \in X$, cualquiera que sea el natural j . Es decir, $\| g_j \|_\infty = g_j(x_0) = 1$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Junto a este hecho de que A , provisto de la norma del supremo , es un espacio de Banach, por el Teorema 1.2.1, tenemos que la serie $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{g_i}{2^i}$ converge a una función $f \in$ A que, por definición, satisface

$$f(x^0) = 1 \text{ y } |f(x)| \leq \sum_{i=1}^{\infty}\frac{g_i(x)}{2^i} \leq \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i} = 1 ,$$

para todo $x \in X$, es decir, $\| f \|_\infty = f(x_0) = 1$. En particular $x_0 \in S(f)$. También tenemos que si $w \notin \bigcap_{i=1}^{\infty}$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $w \notin \gamma_m = S(g_{\gamma_m})$, o equivalentemente, $|g_{\gamma_m}(w)| < \| g_{\gamma_m} \|_\infty = |g_{\gamma_m}(x_0)|$. Así ,

$$|g_m(w)| = \frac{|g_{\gamma_m}(w)|}{|g_{\gamma_m}(x_0)|} < 1 = g_m(x_0) ,$$

y con esto,

$$|g(w)| \leq \sum_{i=1}^{m-1} \frac{|g_i(w)|}{2^i} + \frac{|g_m(w)|}{2^m} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{|g_i(w)|}{2^i}$$

$$< \sum_{i=1}^{m-1} \frac{g_i(x_0))}{2^i} + \frac{g_m(x_0))}{2^m} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{g_i(x_0))}{2^i} = 1 = \| f \|_\infty$$

En otras palabras, $w \notin S(f)$, demostrando que $S(f) \subset \bigcap_{j=1}^{\infty} \gamma_j$. De acuerdo con (2), podemos reescriba esta inclusión como sigue: $S(g) \subset \bigcap_{\gamma \in \Gamma_0} \gamma$. (3)

A fin de probar que $S(f)$ es un conjunto unitario, supongamos la existencia de por lo menos dos elementos distintos en $S(f)$. Por hipótesis, esto implica la existencia de una función $h_0 \in A$ que en $S(f)$ no es constante . Recordando que este es un conjunto compacto y que h_0 es continua , sean $a, b \in S(f)$ tales que $|h_0(a)| = \max_{x \in S(f)} |h_0(x)|$ y $h_0(a) \neq h_0(b)$. En este caso , $h_0(a) \neq 0$, lo que nos permite suponer, dividiendo h_0 por $h_0(a)$ si es necesario, que $h_0(a) = 1$ y $h_0(b) \quad 1$. Entonces, haciendo $h = h_0 + h_0^2$, la funcion $|h|$ no es cons tante en $S(f)$, ya que $h(a) = 2$ y $|h(b)| < 2$. Por lo tanto, el conjunto no vacío $E = \{ x \in S(f) : |h(x)| = \max_{y \in S(f)} |h(y)| \}$ es un subconjunto propio de S(f) . (4)

Sea $x_1 \in E, f_1 = \frac{f}{f(x_1)}$ y $h_1 = \frac{h}{h(x_1)}$. Como x_1 está en $S(f)$ y $|h|$ no ser constante en este conjunto, f_1 y h_1 están bien definidas, además de $f_1(x_1) = \| f_1 \|_\infty = 1$ y $S(f_1) = S(f)$, ya que $|f(x_1)| = \| f \|_\infty = 1$. Sumando estos, tenemos los hechos de $|h_1(x)| \leq 1$ para $x \in S(f)$ y $|h_1(x)| < 1$ siempre que $x \in S(f) \setminus E,$ viendo estas últimas definiciones de E , x_1 y h_1. Además, $h_1(x_1) = 1$ implica $\| h_1 \|_\infty \geq 1$. En este momento , dividiremos la demostración en dos casos : $\| h_1 \|_\infty > 1$ y $\| h_1 \|_\infty = 1$.

Suponiendo $\| h_1 \|_\infty \geq 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$V_n = \left\{ x \in X : 1 + \frac{\|h_1\|_\infty - 1}{2^n} \leq |h_1(x)| \leq 1 + \frac{\|h_1\|_\infty - 1}{2^{n-1}} \right\} .$$

Analizando su definición, vemos que V_n es la intersección entre las imágenes inversas de los intervalos $(-\infty, 1 + (\| h_1 \|_\infty - 1)2^{1-n}]$ y $[1 + (\| h_1 \|_\infty - 1)2^{-n}, +\infty)$ por la función continua $|h_1|$. En consecuencia, todo V_n es cerrado. Más que esto, porque X es compacto,V_n es compacto, para todo $n \in \mathbb{N}$. Verifiquemos ahora que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = \{x \in X : |h_1(x)| > 1\} . \ (5)$$

Si $w \in X$ es tal que $|h_1(w)| > 1$, entonces $0 < |h_1(w)| - 1 \leq \| h_1 \|_\infty - 1$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-n} < (|h_1(w)| - 1)(\| h_1 \|_\infty - 1)^{-1} < 1$. Sea n_w el menor natural positivo que satisface esta condición. Si $n_w = 1$, entonces $w \in V_1$. Caso $n_w > 1$, tendremos $2^{1-n_w}(|h_1(w)| - 1)(\| h_1 \|_\infty - 1)^{-1}$, es decir, $w \in V_{n_w}$. Reciprocamente, tomamos $w \in V_k$, tenemos $|h_1(w)| \geq 1 + (\| h_1 \|_\infty - 1)2^{-k} > 1$, por que estamos suponiendo $\| h_1 \|_\infty > 1$. La arbitrariedad de $k \in \mathbb{N}$ concluye la verificación de (5) .

Por la igualdad en (5), $S(f) \cap V_n = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, una vez que $|h_1(x)| \leq 1$ siempre que $x \in S(f)$ y , como $S(f_1) = S(f)$, tenemos que $S(f_1) \cap V_n = \emptyset$; para todo $n \in \mathbb{N}$. Recordando que $\| f_1 \|_\infty = 1$, se sigue que $|f_1(x)| < 1$ para todos $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$. Luego, si para todo $n \in \mathbb{N}$, x_n es un elemento de V_n tal que $|f_1(x_n)| = \max_{y \in V_n} |f_1(y)|$, cuya existencia está asegurada por la compacidad de V_n, entonces $|f_1(x_n)| < 1$ para todos $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea q_n un entero positivo tal que $|f_1(x_n)|^{q_n} \leq 2^{-1}$. Fijando $k \in \mathbb{N}$ arbitrariamente , como todo $x \in V_k$ satisface $|f_1(x)| \leq |f_1(x_k)|$, tenemos que $|f_1(x)|^{q_k} \leq 2^{-1}$, para todo $x \in V_k$. (6)

Por otra parte , los hechos de $\| f_1^{q_n} \|_\infty \leq \| f_1 \|_\infty^{q_n} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y de A ser completa en la norma del supremo implica la convergencia de la serie

$$h_1 + 4(\| h_1 \|_\infty - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_1^{q_n}}{2^n}$$

para una función $v \in$ A, en esta norma . Por las definiciones de h_1 y f_1,

$$v(x_1) = 1 + 4(\| h_1 \|_\infty - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + 4(\| h_1 \|_\infty - 1),$$

y , si $x \in V_k$, donde $k \in \mathbb{N}$ esta arbitrariamente fijado , entonces la conclusión obtenida en (6) junto a la definición de V_k nos dicen que

$$|v(x)| \leq 1 + \frac{\|h_1\|_\infty - 1}{2^{k-1}} + 4(\| h_1 \|_\infty - 1) \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \frac{4(\|h_1\|_\infty - 1)}{2^{k+1}}$$

$$= 1 + \frac{4(\|h_1\|_\infty - 1)}{2^k} + 4(\| h_1 \|_\infty - 1) \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

$$= 1 + 4(\| h_1 \|_\infty - 1)$$

Si $x \in X \setminus \bigcup V_n$, por (5) , $|v(x)| \leq 1 + 4(\| h_1 \|_\infty - 1)$. Luego, $x_1 \in S(v)$ y $\| v \|_\infty = 1 + 4(\| h_1 \|_\infty - 1)$. Luego, por $|h_1(x)| < 1$ siempre que $x \in S(f) \setminus E$, $|v(x)| < \| v \|_\infty$ para todo x en este conjunto, siguiendo de esto que

$$(S(f) \setminus E) \cap S(v) = \emptyset \ . \ (7)$$

Los hechos de $x_1 \in E \subset S(f)$ y $x_1 \in S(v)$, junto con la inclusión en (3) implican $x_1 \in S(v) \cap \gamma$, para todo conjunto $\gamma \in \Gamma_0$. En consecuencia, la colección $\Gamma_0 \cup \{S(v)\}$ posee P.I.F. y contiene el elemento $S(g)$, ya que Γ_0 goza de estas propiedades. Por lo tanto $\Gamma_0 \cup \{S(v)\}$ es un elemento de U que contiene Γ_0. Por la maximalidad con la relación de orden definido en U, Γ_0 es igual a $\Gamma_0 \cup \{S(v)\}$, es decir, $S(v) \in \Gamma_0$. recordando, de nuevo, la obtenido en (3), esto significa que $S(f) \subset \bigcap_{\gamma\in\Gamma_0} \gamma \subset S(v)$. Basado en esto y en (7) , $S(f)\setminus E = (S(f)\setminus E) \cap S(v) = \emptyset$. Pero, por $E \subset S(f)$, esto implicaría $E = S(f)$, contradiciendo (4) . Con esto, mostraremos que si es una función h_1, definida a partir de la suposición de $S(f)$ no es unitario, satisface $\| h_1 \|_\infty > 1$, tenemos un absurdo. Aproximandonos a la conclusión de esta demostración, supongamos $\| h_1 \|_\infty = 1$. En este caso, $S(h_1) \cap S(f) = E$, ya que $x \in S(h_1) \cap S(f)$ si, solamente si , $x \in S(f)$ y $|h(x)\, h(x_1)^{-1}| = |h_1(x)| = \|h_1\|_\infty = 1$, que es equivalente a $x \in E$, porque x_1 es un elemento de E. A partir de esto y de (3),

$$S(h_1) \cap (\bigcap_{\gamma\in\Gamma_0} \gamma) \supset S(h_1) \cap S(f) = E \neq \emptyset$$

De esta forma, la colección $\Gamma_0 \cup S(h_1)$ posee el P.I.F. y contiene el elemento S(g) , ya que Γ_0 posee ambos. Usando la maximalidad de Γ_0 y los mismos argumentos utilizados en la conclusión del caso anterior, obtenemos que $S(h_1) \in \Gamma_0$. Entonces, $S(f) \subset \bigcap_{\gamma\in\Gamma_0} \gamma \subset S(h_1)$, de donde sigue que $S(h_1) \cap S(f) = S(f)$ y como $E = S(h_1) \cap S(f)$, esto contradice (4).

Por lo tanto, $S(f)$ tiene un solo elemento, el punto x_0. Sigue de esto que $x_0 \in$ P , que junto a (3) implica $x_0 \in S(g)$, pues $S(g) \in \Gamma_0$. Luego, P $\cap S(g) \neq \emptyset$, y uniendo a este dato de $S(g) \subset S(g_0)$ obtenemos que $S(g_0) \cap$ P $\neq \emptyset$. La existencia de una función no es constante en A y la arbitrariedad de la eleción g_0 nos permite concluir que P $= \emptyset$ y que $S(p) \cap$ P $= \emptyset$, para toda función no constante $p \in$ A . Si $u \in$ A es constante, entonces $S(u) \cap$ P $= X \cap$ P $=$ P $\neq \emptyset$, probando finalmente que P es una frontera para A. □

Definición 3.1.1. *Si X es un espacio compacto y A $\subset C(X)$, el conjunto de puntos pico para A obtiene el nombre de* **frontera de Bishop** *de A y se denota por ρA.*

El teorema de Bishop dice que si A es un álgebra de Banach que satisface ciertas hipótesis, entonces ρA no es vacío y es una única frontera minimal de A.

Colorario 3.1.1. *Si A satisface la hipotesis del Teorema de Bishop, entonces todo conjunto pico por A tiene punto pico.*

Demostración. Si E es un conjunto pico para A, entonces E es el conjunto máximal de alguna función de A. Además, debido a que todas las hipotesis del Teorema de Bishop sera satisfecho, ρA es una frontera para A En consecuencia, ρA intercepta todos conjuntos máximales de funciones de A . En particular , ρA $\cap$ E $\neq \emptyset$. En otras palabras , E posee un punto pico. □

Colorario 3.1.2. *Si A satisface la hipotesis del Teorema de Bishop, entonces $\overline{\rho \mathrm{A}} = \partial$A.*

Demostración. Por el Teorema de Shilov , ∂A $\subset \overline{\rho \mathrm{A}}$ y por el Teorema de Bishop ρA $\subset \partial$A . A partir de esta inclusion y del hecho de que $\overline{\rho \mathrm{A}}$ es un conjunto cerrado, es inmediato que $\overline{\rho \mathrm{A}} = \partial$A. □

Este corolario, en otras palabras, nos dice que si las condiciones del Teorema de Bishop están satisfechos con un espacio compacto X y un álgebra de Banach A , entonces la frontera de Shilov de esta álgebra existirá y será la clausura del conjunto de sus puntos pico, que en este caso es la frontera de Bishop de A.

El siguiente teorema se debe a H. G. Dales y prueba que si, en el corolario arriba, no debilitamos una de las hipótesis, requiriendo sólo que A sea un álgebra de Banach con norma cualquiera, entonces la frontera de Shilov de esta álgebra seguirá siendo la clausura de la frontera de Bishop de A en la norma del supremo. Esta conclusión es similar al corolario anterior, con la diferencia de que no sabemos si A es una frontera para esta álgebra, una vez que, en este caso, A. no es necesariamente un espacio completo con la norma del supremo.

Proposición 3.1.1. *Sea* X *es un espacio compacto y* A *es una subálgebra de* $C(X)$ *equipada de una norma cualquiera* $\| \, . \, \|$ *y que contiene la unidad de* $C(X)$*, entonces* $\| f \|_\infty \leq \| f \|_\infty$ *, para todo* $f \in A$ *.*

Demostración. El caso $A = \{0\}$ es trivial. Suponiendo $A = \{0\}$, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq 0$ para alguna $x \in X$.

Por otro lado , para cada $x \in X$, recuerde que la función $\hat{x} : A \longrightarrow$ K definido por la ecuación $\hat{x}(f) = f(x)$, pertenece a $M(A)$ siempre que $\hat{x}$ no sea nulo. Por la observación hecha al principio de la demostración, existe $\hat{x} \neq \emptyset$ para alguna $x \in X$. Además, por la proposición 1.3.1, $\| \varphi \| = 1$ para todo φ en $M(A)$, donde la norma considerada es el supremo en esfera de $(A, \| \, . \, \|)$. Entonces, si $f \in A$, entonces

$$\| f \|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)| = \max_{x \in X} |\hat{x} f(x)| \leq \sup_{\varphi \in M(A)} |\varphi(f)| \leq \sup_{\varphi \in M(A)} \| \varphi \| \| f \| = \| f \| .$$

□

Teorema 3.1.2. *Si* X *un espacio topológico compacto metrizable y* A *una subálgebra de* $C(X)$ *que separa los puntos de* X *. Si* A *contiene la unidad de* $C(X)$ *y con una norma cualquiera* $\| \, . \, \|$ *es un álgebra de Banach , entonces el conjunto de sus puntos picos es denso en* ∂A *.*

Demostración. Comenzaremos probando que todo conjunto pico para A contiene adecuadamente en X contiene un punto pico para A . Si la norma de A fuera la del supremo, esta conclusión seguiría inmediatamente del Corolario 3.1.1.

Sea P un conjunto pico para A contenido propiamente en X, $g \in A$ tal que $g \equiv 1$ en P y $|g| < 1$ en $X \setminus P$ y U un abierto contenido P tal que $X \setminus U \quad \emptyset$. Tal U del hecho existe, pues tomando $x_0 \in X \setminus P$, el conjunto $X \setminus \{x_0\}$ es un ejemplo de abierto contenido en P que es diferente de X. Si A es cerrado de A en la norma del supremo, entonces A es una subálgebra de $C(X)$ que con la norma del suprema es un álgebra de Banach.

Consideremos A con la norma del supremo. Como $A \subset A$, P también es un conjunto pico para A y observando que A satisface la hipotesis del teorema de Bishop, el corolario 3.1.1 garantiza la existencia de un punto pico $p_1 \subset P$ para A. Luego existe $f_1 \in A$ tal que $f_1(p_1) = 1$ y $|f_1(x)| < 1$ siempre que $x \neq p_1$. Como X es metrizable, podemos considerar una métrica d en X que da origen a su topología y recordando que P es un subconjunto del abierto U , sea B_1 la bola abierta, en métrica d, centrada en p_1 y de radio $r_1 < 1$, tal que $B_1 \subset U$. Como $X \setminus U \neq \emptyset$, también tenemos que $X \setminus B_1 \neq \emptyset$. En base a esto y en la compacidad de $X \setminus B_1$, que a su vez y consecuencia de la compacidad de X , sea $\theta_1 = max_{x \in X \setminus B_1} |f_1(x)|$. Por la elección f_1, $\theta_1 < 1$, lo que nos permite tomar $\epsilon_1 > 0$ tal que $1 - \theta_1 > 2\epsilon_1$. Por $f_1 \in \overline{A}$, existe $g_1 \in A$ tal que $\| f_1 - g_1 \|_\infty < \epsilon_1$. A partir de esto,

$$1 - |g_1(p_1)| = |f_1(p_1)| - |g_1(p_1)| \leq |f_1(p_1) - g_1(p_1)| \leq \| f_1 - g_1 \|_\infty < \epsilon_1 \qquad (1).$$

y , para cada $x \in X$,$|g_1(x)| - |f_1(x)| \leq |g_1(x) - f_1(x)| \leq \| f_1 - g_1 \|_\infty < \epsilon_1$. Esto significa, por la definición de β_1, que

$$|g_1(q)| < \epsilon_1 + \beta_1, \text{ por cada } q \in X \setminus B_1. \qquad (2).$$

Por (1) , $|g_1(p_1)| > 1 - \epsilon_1 > \beta_1 > 0$, lo que implica $\| g_1 \|_\infty > 0$. Entonces, por la proposición 3.1.1, tenemos que $\| g_1 \| > 0$. Basado en esto, sea $\eta_1 = (2^2 \| g_1 \|)^{-1}$. Por (2), por $B_1 \subset P$ y por el hecho de $|g| < 1$ en $X \setminus P$, tenemos , para $q \in X \setminus B_1$, que

$$|g(q)| + \eta_1 |g_1(q)| < 1 + (\eta_1 + \beta_1). \qquad (3).$$

Además, sigue de p_1 pertenece a P y de (1) , que

$$|g(p_1)| + 1|g_1(p_1)| = 1 + \eta_1 |g_1(p_1)| > 1 + \eta_1(1 - \epsilon_1). \qquad (4).$$

junto a (3) y (4) con la definición de ϵ_1, si $q \in X \setminus B_1$, entonces

$$|g(p_1)| + \eta_1 |g_1(p_1)| - |g(q)| - \eta_1 |g_1(q)| > \eta_1(1 - 2\epsilon_1 - \beta_1) > 0 \qquad (5).$$

Ahora, sea $\psi_1 = \text{Arg } g(p_1) = 0$, $\vartheta_1 = \text{Arg } g_1(p_1)$ y $\varphi_1 = \psi_1 - \vartheta_1 = \text{Arg} g_1(p_1)$. Definiendo $G_1 = g + \eta_1 e^{i\varphi_1} g_1$, claramente $G_1 \in A$ y , para cada $q \in X \setminus B_1$, proviene de (5) que

$$|G_1(q)| \leq |g(q)| + \eta_1 |g_1(q)| < |g(p_1)| + \eta_1 |g_1(p_1)|.$$

En este caso, como

$$\begin{aligned} |G_1(p_1)| &= \left| |g(p_1)| e^{i\psi_1} + \eta_1 e^{i\varphi_1} |g_1(p_1)| e^{i\vartheta_1} \right| \\ &= \left| |g(p_1)| e^{i\psi_1} + \eta_1 |g_1(p_1)| e^{i\psi_1} \right| \\ &= |g(p_1)| + \eta_1 |g_1(p_1)|, \end{aligned}$$

tenemos que $|G_1(q)| < |G_1(p_1)|$, para todo $q \in X \setminus B_1$. Por lo tanto, G_1 no alcanza módulo máximo fuera de B_1 y $\| G_1 \|_\infty > \max_{q \in X \setminus B_1} |G_1(q)|$, o equivalente , $S(G_1) \subset B_1$ y $M_1 = \| G_1 \|_\infty \max_{q \in X \setminus B_1} |G_1(q)|$ es positivo.

Nuestro proximo paso es repetir, de forma análoga, lo que hicimos anteriormente.

Por la Proposición 2.1.1, el conjunto $S(G_1)$ contiene un conjunto pico para A. Así , por el Corolario 3.1.1,$S(G_1)$ contiene un punto pico p_2 para A, que en particular, pertenece a B_1. Luego, existe $f_2 \in A$ tal que $f_2(p_2) = 1$ y $|f_2| < 1$ en $X \setminus \{p_2\}$. Sea B_2 la bola abierta , en métrica d , centrada en p_2 y de radio $r_2 < 2^{-1}$ tal que $B_2 \subset B_1$, y sea $\beta_2 = \max_{q \in X \setminus B_2} |f_2(q)|$. Como $\beta_2 < 1$, podemos tomar $\epsilon_2 > 0$ tal que $2\epsilon_2 < 1 - \beta_2$ y , por $f_2 \in A$, existe $g_2 \in A$ tal que $\| f_2 - g_2 \|_\infty < \epsilon_2$. Como consecuencia ,

$$1 - |g_2(p_2)| = |f_2(p_2)| - |g_2(p_2)| \leq \| f_2 - g_2 \| < \epsilon_2 \qquad (6)$$

y , para todo $x \in X$, $|g_2(x)| - |f_2(x)| < \epsilon_2$. Así, por la definición de β_2 , si $q \in X \setminus B_2$,entonces $|g_2(q)| < \epsilon_2+\beta_2$. (7)

Por otro lado, sea $\delta_2 = min\delta_1, M_1$ y $\eta_2 = \delta_2(2^2 \parallel g_2 \parallel)^{-1}$. Observe que η_2 esta bien definida, ya que , por (6) , $\parallel g_2 \parallel_\infty > 0$, y por la Proposición 3.1.1 , esto significa que $\parallel g_2 \parallel > 0$. También por (6),

$$|G_1(p_2)| + \eta_2|g_2(p_2)| > |G_1(p_2)| + \eta_2(1 - \epsilon_2)$$

y uniendo (7) al hecho de que $p_2 \in S(G_1)$, para todo $q \in X \setminus B_2$, tenemos

$$|G_1(q)| + \eta_2|g_2(q)| > |G_1(p_2)| + \eta_2(\epsilon_2 + \beta_2).$$

Para $q \in X \setminus B_2$, de estas dos desigualdades se sigue que ,

$$|G_1(p_2)| + \eta_2|g_2(p_2)| - |G_1(q)| - \eta_2|g_2(q)| > \eta_2(1 - 2\epsilon_2 + \beta_2) > 0. \quad (8)$$

Definiendo $\psi_2 = \text{Arg } G_1(p_2)$,$\vartheta_2 = \text{Arg } g_2(p_2)$ y $\varphi_2 = \psi_2 - \vartheta_2$, sea $G_2 = G_1 + \eta_2 e^{i\varphi_2} g_2$.
Y claro que $G_2 \in A$ y por su definición,

$$|G_2(p_2)| = \left||G_1(p_2)|e^{i\psi_2} + \eta_2 e^{i\varphi_2}|g_2(p_2)|e^{i\vartheta_2}\right| = |G_1(p_2)| + \eta_2|g_2(p_2)|,$$

junto a (8) nos dice que $|G_2(q)| \leq |G_1(q)| + \eta_2|g_2(q)| < |G_2(p_2)|$, para todos $q \in X \setminus B_2$. Es decir, G_2 no alcanza el módulo máximo fuera de B_2 y $\parallel G_2 \parallel_\infty > \max_{q \in X \setminus B_2} |G_2(q)|$.
En otras palabras, $S(G_2) \subset B_2$ y $M_2 = \parallel G_2 \parallel_\infty - \max_{q \in X \setminus B_2} |G_2(q)| > 0$.
Análogamente, podemos repetir este proceso paran términos,en la n- enesima etapa, bolas abiertas $B_1, B_2, ..., B_n$ de radios $r_1, r_2, ..., r_n$, respectivamente , tal que $r_k < k^{-1}$ para k = 1, 2, . . . , n y $U \supset B_1 \supset B_2 ... B_n$. Además, siendo $G_0 = g$, $B_0 = U$ y $\delta_0 = M_0 = 1/2$, para cada $k \in \{1, 2, ..., n\}$, tendremos una función $G_k \in A$ tal que $S(G_k) \subset B_k$, definida por $G_k = G_{k-1} + \eta_k e^{i\varphi_k} g_k$, donde $g_k \in A$, $\parallel g_k \parallel > 0$,$\eta_k = \delta_k(2^k \parallel g_k \parallel)^{-1}$, $\delta_k = min\{\delta_{k-1}, M_{k-1}\}$ y $M_k = \parallel G_k \parallel_\infty - \max_{q \in X \setminus B_k} |G_k(q)| > 0$.

La posibilidad de repetir lo que hicimos tantas veces como queramos, asegura que sentido definiendo inductivamente la función h por la igualdad

$$h = \lim_{n\to\infty} G_n = g + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n e^{i\varphi_n} g_n.$$

Para comprobar que h está bien definida y pertenece a A, fijemos $n \in \mathbb{N}$. Por definiciones de η_n y δ_n ,

$$\parallel \eta_n e^{i\varphi_n} g_n \parallel \leq \eta_n \parallel g_n \parallel = \frac{\delta_n}{2^n \|g_n\|} \parallel g_n \parallel \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Junto a esta con la hipótesis de A es un álgebra de Banach con esta norma, tenemos h está bien definida y pertenece a A. Además, en base al hecho de que $S(G_n) \subset B_n$ para todo n, sea $\{q_n\}$ una sucesión en X tal que $q_n \in B_n$ y $|G_n(q_n)| = \parallel G_n \parallel_\infty$, para cada $n \in \mathbb{N}$. En este caso, si $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$
\begin{aligned}
|h(q_k)| &= \left| G_k(q_k) + \sum_{n=k+1}^{\infty} \eta_n e^{i\varphi_n} g_n(q_k) \right| \\
&\geq |G_k(q_k)| - \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \eta_n e^{i\varphi_n} g_n(q_k) \right| \\
&\geq \| G_k \|_\infty - \sum_{n=k+1}^{\infty} \eta_n |g_n(q_k)|,
\end{aligned}
$$

y la Proposición 3.1.1 junto con la definición de cada δ_n , nos garantiza que para todo $x \in X$,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=k+1}^{\infty} \eta_n |g_n(x)| &\leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \eta_n \| g_n \|_\infty, \\
&\leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \eta_n \| g_n \|, \\
&\leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\delta_n}{2^n} \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\delta_{k+1}}{2^n} < \frac{\delta_{k+1}}{2} \qquad (9),
\end{aligned}
$$

En particular, $|h(q_k)| > \| G_k \|_\infty \frac{\delta_{k+1}}{2}$. Entonces, por (9) y por las definiciones de δ_k y M_k , por cada $q \in X \setminus B_k$,

$$
\begin{aligned}
|h(q)| &\leq |G_k(q)| + \sum_{n=k+1}^{\infty} \eta_n |g_n(q)| \\
&\leq \max_{x \in X \setminus B_k} |G_k(x)| + \sum_{n=k+1}^{\infty} \eta_n |g_n(q)| \\
&= \| G_k \|_\infty - M_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} \eta_n |g_n(q)| \\
&\leq \| G_k \|_\infty - M_k + \frac{\delta_{k+1}}{2} \\
&\leq \| G_k \|_\infty - \frac{\delta_{k+1}}{2} < |h(q_k)|,
\end{aligned}
$$

es decir, $S(h) \subset B_k$, ya que $q_k \in B_k$. De la arbitrariedad de k se sigue que $S(h) \subset \cap_{n=1}^{\infty} B_n$.

Como $S(h) \neq \emptyset$; (dado que h es continua y X es compacto) y r_n tiende a cero a medida que n crece, tenemos que S(h) es un conjunto unitario, es decir, $S(h) = \{p\}$ para algun $p \in X$. As´ı ,segun el hecho de que $p \in B_1 \subset U$, se sigue que p es un punto pico para A que pertenece a U . Recordando al inicio de la prueba, observamos que el conjunto pico P era fijado arbitrariamente, as´ı como el abierto U que lo contiene. Por tanto,acabamos de probar que todo conjunto pico para A contenido propiamente en X contiene un punto pico para A

Finalizando la prueba, observamos que las hipótesis de este teorema nos permiten, a través de del teorema de Shilov, garantizan la existencia de la frontera de Shilov de A. Luego, si $x \in \partial A$ y U_x es una vecindad de x / $X \setminus U_x \neq \emptyset$, entonces , por el Corolario 2.2.2 , existe $u \in A$ tal que $S(u) \subset U_x$. De la Proposición 2.1.1, obtenemos un conjunto pico P_x para A contenido en $S(u)$, que en particular , es un subconjunto propio de X.

Como resultado de lo que fue demostrado anteriormente, tenemos que P_x tiene un punto pico, lo que concluye la demostración.

$\square$

Bibliografía

[1] E. Bishop, A minimal boundary for function algebras, Pacific J. Math. 9 (1959), 629–642.

[2] H. G. Dales , Boundaries and peak points of Banach function algebras , Proc. London Math. Soc. 21 (1971) , 121-136 .

[3] T. W. Gamelin , Uniform Algebras , Prentice-Hall , Inc. , Englewood Cliffs , N. J. , 1969 .

[4] T. G. Honary , The density of peak points in the Shilov boundary of a Banach function algebra , Proc. Amer. Math. Soc. 103 (1988) , 480-482 .

[5] J. Horv ath , Topological Vector Spaces and Distributions , Vol. I , Addison-Wesley , Reading Massachusetts , 1966.

[6] K. Jarosz , Peak set without peak points , Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997) , 1377-1379 .

[7] S. Lang , Complex Analysis , Third Edition , Springer-Verlag , New York , 1993 .

[8] R. Larsen , Banach Algebras an Introduction , Marcel Dekker , New York , 1973 .

[9] R. Larsen , Functional Analysis an Introduction , Marcel Dekker , New York , 1973 .

[10] E. L. Lima, Espa¸cos M etricos, Projeto Euclides, IMPA, 2005.

[11] J . R . Munkres , Topology , Second Edition , Prentice Hall , N . J . , 2000 .

[12] J. R. Munkres , Topology A First Course , Prentice Hall , New Jersey , 1975 .

[13] C. E. Rickart , General Theory of Banach Algebras , Van Nostrand , New York , 1960 .

[14] W. Rudin , Principles of Mathematical Analysis , Second Edition , MacGraw-Hill , New York , 1964 .

[15] G. E. Shilov, On the decomposition of a commutative normed ring into a direct sum of ideals, Mat. Sb. 32 (1954) , 353–364 (Russian); Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 1 (1955), 37–48 (English).

[16] A. E. Taylor and D. C. Lay , Introduction to Functional Analysis , John Wiley and Sons Inc , California , 1979 .

[17] S. Willard , General Topology , Addison-Wesley , Alberta , 1970 .