Kasvatustieteellisiä tutkimuksia, numero 142
Helsinki Studies in Education, number 142

Laura Niemi

Matematiikan parhaat osaajat perusopetuksessa ja toisella asteella

Pitkittäistutkimus matematiikan osaamisen ja asenteiden kehittymisestä vuosina 2005–2015

Esitetään Helsingin yliopiston kasvatustieteellisen tiedekunnan suostumuksella julkisesti tarkastettavaksi Helsingin yliopiston Athena-rakennuksen salissa 302, 17. syyskuuta 2022 klo 12.

Helsinki 2022

Esitarkastajat

Dosentti Jorma Joutsenlahti
Tampereen yliopisto

Tutkimusprofessori Juhani Rautopuro
Jyväskylän yliopisto

Kustos

Professori Markku S. Hannula
Helsingin yliopisto

Ohjaajat

Professori Markku S. Hannula
Helsingin yliopisto

Dosentti Anu Laine
Helsingin yliopisto

Vastaväittäjä

Professori emeritus Jouni Välijärvi
Jyväskylän yliopisto

Unigrafia

ISBN 978-951-51-8475-7 (nid.)
ISBN 978-951-51-8476-4 (pdf)

PunaMusta, Joensuu 2022

Helsingin yliopisto, Kasvatustieteellinen tiedekunta
Kasvatustieteellisiä tutkimuksia, numero 142

Laura Niemi

Matematiikan parhaat osaajat perusopetuksessa ja toisella asteella
Pitkittäistutkimus matematiikan osaamisen ja asenteiden kehittymisestä vuosina 2005–2015

Tiivistelmä

Matemaattisten alojen merkitys yhteiskunnalle on suuri, mutta aloille ei hakeudu tarpeeksi matematiikan huippuosaajia, ja erityisesti naiset ovat näillä aloilla aliedustettuina. Matematiikassa erinomaisesti menestyviä osaajia koskevaa kansallista tutkimustietoa tarvitaankin enemmän. Väitöstutkimus tarjoaa arvokasta koulutuspoliittisesti hyödynnettävää tutkimustietoa matematiikassa parhaiten menestyneiden osaajien piirteistä, tarpeista ja koulutusvalinnoista pitkällä aikavälillä. Tutkimus perustuu Opetushallituksen ja Kansallisen koulutuksen arviointikeskuksen keräämään pitkittäisaineistoon, jossa samaan ikäluokkaan kuuluvia oppilaita on seurattu kolmannelta vuosiluokalta toisen asteen loppuun vuosien 2005–2015 välisenä aikana. Aineisto käsittää matematiikan kokeilla ja taustakyselyillä kerättyä dataa oppilaiden matematiikan osaamisesta, asenteista ja erilaisista yksilöön ja ympäristöön liittyvistä taustamuuttujista.

Tutkimus käsittelee matematiikan parhaita osaajia. Käsite määrittelee matematiikassa erinomaisesti menestyvien oppilaiden joukkoa. Matematiikassa menestyminen nähdään potentiaalina, joka kehittyy sosiokognitiivisen mallin mukaan yksilön ja ympäristön välisten tekijöiden vuorovaikutuksessa. Matematiikan parhaat osaajat määritettiin tutkimuksessa yhdeksännen vuosiluokan kansallisessa kokeessa (I ja II osatutkimus) ja pitkän matematiikan ylioppilaskokeessa (III osatutkimus) menestymisen mukaan.

Tutkimus keskittyi viiteen pääkysymykseen, joihin etsittiin vastauksia kolmessa osatutkimuksessa. Tavoitteena oli selvittää, 1) millaiset oppilaat kehittyvät matematiikan parhaiksi osaajiksi ja miten heidän opintopolkunsa muodostuu, 2) millainen yhteys matematiikan parhaiden osaajien asenteilla on heidän osaamiseensa ja miten heidän asenteensa kehittyvät, 3) miten matematiikan parhaiden osaajien kotitausta selittää osaamisen kehittymistä ja koulutusvalintoja, 4) millainen yhteys opetuksen pedagogisilla ratkaisuilla on matematiikan parhaiden osaajien osaamiseen ja asenteisiin, ja 5) miten matematiikassa parhaiten menestyneet pojat ja tytöt eroavat toisistaan. Muuttujien välisiä yhteyksiä analysoitiin monimuuttujamenetelmin. Keskeisimmät menetelmät olivat regressioanalyysin eri muodot ja päätöspuuanalyysi, jotka täydensivät toisiaan tunnistaen sekä muuttujien välisiä lineaarisia että epälineaarisia yhteyksiä.

Tutkimustulosten mukaan yhdeksännen vuosiluokan parhaat osaajat menestyivät matematiikassa vaihtelevasti alakoulun aikana. Noin 40 prosenttia yhdeksännen luokan parhaista osaajista kuului parhaaseen kymmenykseen jo kolmannella luokalla ja noin 65 prosenttia parhaaseen kymmenykseen kuudennella luokalla. Parhaista osaajista lähes kaikki (92 %) hakeutuivat lukioon, ja noin 60 prosenttia yhdeksännen vuosiluokan parhaista osaajista oli parhaita osaajia myös toisen asteen lopussa.

Tulosten mukaan oppilaan aikaisempi osaaminen, myönteinen minäkäsitys ja vanhempien suorittama ylioppilastutkinto selittivät parhaiten kehittymistä matematiikan parhaaksi osaajaksi. Opetukseen liittyvät ratkaisut eivät suoranaisesti edesauttaneet oppilaan kehittymistä matematiikan parhaaksi osaajaksi. Sen sijaan opetukseen liittyvät ratkaisut olivat merkityksellisiä myönteisten asenteiden vahvistamisessa. Tulosten mukaan erityisesti tyttöjen asenteiden vahvistamiseen tulisi kiinnittää huomiota jo alakoulussa. Matematiikassa parhaiten menestyneiden tyttöjen asenteet kehittyivät yläkoulussa ja lukiossa jopa parhaiten menestyneitä poikia korkeammalle tasolle. Oppilaskeskeisyyteen liittyvät ratkaisut, joissa otetaan huomioon muun muassa oppijoiden yksilölliset tarpeet, olivat tulosten mukaan keskeisiä myönteisiä asenteita vahvistavia ratkaisuja. Olisi syytä kuitenkin tutkia tarkemmin, miten hyvin matematiikan parhaiden osaajien yksilöllisiä tarpeita pystytään tukemaan sellaisessa opiskeluryhmässä, jossa oppilaiden väliset taitotasoerot ja tukitarpeet ovat suuria.

Avainsanat: matematiikan parhaat osaajat, pitkittäistutkimus, matematiikan oppimistulokset, matematiikka-asenteet

University of Helsinki, Faculty of Educational Sciences
Helsinki Studies in Education, number 142

Laura Niemi

Mathematically high-achieving students in primary education and in upper secondary level
The longitudinal research of learning outcomes in mathematics and attitudes towards mathematics in the years 2005–2015

Abstract

The importance of mathematical sciences is clearly of significance to society, but not enough students proficient in mathematics at school apply for university places and jobs in the field of mathematics, and especially women are underrepresented there. We need more national research about students who do very well in mathematics. This thesis provides valuable information about mathematically high-achieving students' characteristic features, needs and educational choices, providing information that education policy can profit from. The study is based on the longitudinal data collected by the National Board of Education and the Finnish Education Evaluation Centre. The data consist of pupils belonging to the same age group who were followed from the 3rd grade of primary school to the end of upper secondary level between 2005 and 2015. The data were collected through exams and surveys and consist of information about students' mathematical competence, attitudes and background variables related to the individual and the social environment.

The thesis examines mathematically high-achieving students who do very well in mathematics. The success is seen as a potential that develops according to a socio-cognitive model in the interaction of factors between the individual and the social environment. The definition of high-achieving students was based on success in the national examination of mathematics in the 9th grade (Study I and Study II) and success in the matriculation examination of advanced mathematics (Study III).

The thesis focused on answering five main questions in three studies. The aims were to find out 1) what kind of students develop into high-achieving students and what kind of educational choices do they have, 2) what is the connection between mathematically high-achieving student's mathematical competence and attitudes, 3) how does high-achieving students' home background explain the development of mathematical competence and educational choices, 4) how do pedagogical teaching solutions explain the development of mathematically high-achieving student's mathematical competence and attitudes, and 5) how do mathematically high-achieving boys and girls differ from each other. The relationships between the variables were analysed using multivariate methods. The most important methods were the different forms of regression analysis and decision tree analysis. These methods improved each other, recognizing both linear and nonlinear relationships between variables.

According to the results, mathematical skills of high-achieving students in the 9^{th} grade varied during primary school. About 40 % of high-achieving students in the 9^{th} grade were in the top ten in the 3^{rd} grade and about 65 % in the top ten in the 6^{th} grade. Almost all high-achieving students (92%) applied to upper secondary general school and about 60 % of high-achieving students in the 9^{th} grade were also highest achieving at the end of upper secondary school.

The results indicated that the students' previous competence, positive self-concept and the educational level of their parents explained the development into a mathematically high-achieving student. Teaching-related solutions did not directly contribute to the students' development into a high-achieving student, but teaching-related solutions were relevant in reinforcing positive attitudes. The results indicated that special attention should already be paid to strengthening mathematically high-achieving girls' attitudes in primary school. The attitudes of mathematically high-achieving girls developed to a higher level than mathematically high-achieving boys at the lower secondary level and upper secondary level. This study suggests that solutions related to student-centredness that take into account students' individual needs were key to strengthening positive attitudes. However, more research is needed on how well the individual needs of mathematically high-achieving students can be supported when there are large differences in skill levels and the need for support between students in the same classroom.

Keywords: mathematically high-achieving students, longitudinal research, learning outcomes in mathematics, attitudes towards mathematics

Esipuhe

Olen aina pitänyt opiskelusta, ja erilaisten tavoitteiden saavuttaminen on ollut palkitsevaa. Tämän väitöskirjan kirjoittaminen on suurin tähänastisista tavoitteistani, jonka toteuttaminen on vaatinut paljon aikaa, tahtoa ja sinnikkyyttä. Jatko-opinnot ovat temmanneet minut mukaansa ja väitöstyön eteneminen vaihe vaiheelta on ollut antoisaa.

Tavoitteeni suorittaa tohtoritutkinto on pitänyt sisällään monia eri osatavoitteita ja vaiheita. Sain ensimmäisen kipinän väitöstutkimuksen tekemiseen opettajaopintojeni graduvaiheessa, kun ilmeni, että pro gradu -työssäni käytettävälle pitkittäisaineistolle oli tulossa jatkoa. Tulevan väitöstutkimuksen aihe muotoutuikin osaltaan jo graduvaiheessa. Näkökulmat liittyen matematiikassa parhaiten menestyviin oppilaisiin ja heidän tarpeidensa huomioimiseen opetuksessa kiehtoivat minua tulevana luokanopettajana ja matematiikan aineenopettajana. Pro graduni ohjaajanani toimi dosentti Anu Laine, joka on ollut sittemmin toinen väitöstyöni ohjaaja. Innostavana didaktikkona ja ohjaajana hän sai minut kiinnostumaan sekä matematiikan opetuksesta että siihen liittyvästä tutkimusalasta. Anu esitteli minut graduaihetta pohtiessani ensi kertaa myös väitöstyöni tulevalle pääohjaajalle professori Markku Hannulalle.

Muutama vuosi maisteriksi valmistumiseni jälkeen pitkittäisaineisto sai odotettua jatkoa. Halu jatkaa opintoja oli edelleen olemassa ja jatko-opinnot opettajan työn ohella alkoivat. Opetus- ja tutkimustyö ovat täydentäneet toisiaan hyvin. Olen voinut peilata tutkimustyöni aikana esille nousseita näkökohtia ja tuloksia matematiikan oppimisesta ja opetuksesta opettajan silmin peruskoulun eri luokka-asteilla ja toisaalta tarkastella opettajana saamiani kokemuksia tutkijan näkökulmasta.

Tämän tutkimusmatkani varrella on ollut tärkeitä tukijoita, jotka ovat mahdollistaneet kehittymistäni tutkijaksi ja vahvistaneet periksiantamattomuuttani tämän prosessin aikana. Aluksi haluan esittää kiitokset tutkimukseni ohjaajille professori Markku S. Hannulalle ja dosentti Anu Laineelle. Olen kiitollinen heidän kanssaan käydyistä ohjauskeskusteluista, jotka ovat auttaneet tarkastelemaan tutkimustani eri näkökulmista ja rohkaisseet saattamaan työni loppuun asti. Toinen toistaan täydentävä asiantunteva ohjaus pienistä yksityiskohdista suurempiin linjoihin on ollut tärkeää koko tutkimusprosessin aikana.

Erityiskiitoksen haluan esittää Karvin johtavalle arviointiasiantuntijalle Jari Metsämuuroselle, joka on toiminut mentorinani tämän tutkimustyön aikana. Hänen neuvonsa aineiston ja tutkimusmetodien saloihin ovat olleet korvaamattomia. Arvostan hänen tapaansa opastaa tilastollisten analyysien kiemuroihin yleistajuisesti. Hienovaraisten neuvojen avulla Jari on haastanut minut itse löytämään vastaukset pohtimiini metodikysymyksiin ja täten saamaan onnistumisen kokemuksia.

Kiitän tutkimukseni esitarkastajia dosentti Jorma Joutsenlahtea ja tutkimusprofessori Juhani Rautopuroa arvokkaista huomioista ja korjausehdotuksista väitöskirjan käsikirjoituksen viimeistelemiseksi.

Kansallisen koulutuksen arviointikeskusta Karvia kiitän mahdollisuudesta saada poikkeuksellisen laaja vuosien 2005–2015 matematiikan oppimistulosarvioinneista koottu pitkittäisaineisto käyttööni ja myönteisestä suhtautumisesta tutkimustani kohtaan.

Kiitokset kaikille niille, jotka ovat eri tavoin tukeneet minua jatko-opintojeni aikana. Kiitos vertaistuesta KT Eeva Haatajalle, joka on ollut kiinnostunut tutkimustyöni eri vaiheista ja tsempannut sen etenemisessä.

Aurinkolahden peruskoulun johtoa ja kollegoitani haluan kiittää kannustuksesta ja kiinnostuksesta tutkimustyötäni kohtaan. Kiitos erityisesti kollegalleni Johanna Aakukselle toimivasta yhteistyöstä, joka on osaltaan myötävaikuttanut siihen, että olen jaksanut tehdä väitöstutkimusta opettajan työni ohella.

Erityisen lämpimät kiitokset osoitan vanhemmilleni Tertulle ja Eerolle. Olette valaneet minulle uskoa omiin kykyihini ja kannustaneet minua jatkamaan sinnikkäästi eteenpäin. Teiltä saamani tuki ja kannustus ovat olleet minulle arvokkainta tämän tutkimustyön aikana. Haluan kiittää myös veljiäni Tuomasta ja Lauria, jotka olette aina pikkusiskonne tukena ja turvana. Kiitos myös kummipojalleni Onnille, kun olet saanut minut leikkeinesi välillä irtautumaan tutkimustyön pyörteistä.

Helsingissä heinäkuun 27. päivänä 2022

Laura Heidi Linnea Niemi

Sisältö

Väitöskirjaan sisältyvät artikkelit

I Niemi, L., Metsämuuronen, J., Hannula, M. & Laine, A. (2020). Matematiikan parhaaksi osaajaksi kehittyminen perusopetuksen aikana. *Ainedidaktiikka*, 4(1), 2–33. https://doi.org/10.23988/ad.83384

II Niemi, L., Metsämuuronen, J., Hannula, M. S. & Laine, A. (2021). Matematiikan parhaiden osaajien siirtyminen toiselle asteelle: koulutusvalinnat ja matematiikan osaamisen kehittyminen. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education*, *9*(1), 457–494. https://doi.org/10.31129/LUMAT.9.1.1511

III Niemi, L., Metsämuuronen, J., Hannula, M. S. & Laine, A. (2021). Matematiikan parhaat osaajat lukion lopussa ja heidän matematiikka-asenteissaan tapahtuneet muutokset. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education*, *9*(1), 804–843. https://doi.org/10.31129/LUMAT.9.1.1609

1 Johdanto

Suomi on kansainvälisesti tunnettu vahvana matematiikan, luonnontieteiden ja teknologian osaamismaana. Suomalaislasten ja -nuorten matematiikan taidot ovat kuitenkin viime vuosina olleet kansainvälisesti mitattuna laskussa (mm. Vettenranta ym., 2016). Erinomaisesti matematiikkaa osaavien osuus yhdeksäsluokkalaisten joukossa on laskenut 12 vuoden aikana 12 prosenttiyksikköä ja heikkojen osuus on kaksinkertaistunut (Vettenranta ym., 2016). Yksilöllinen vaihtelu on kasvanut ja erityisesti poikien osaaminen on heikentynyt niin, että tytöt ovat menestyneet poikia paremmin PISA-tutkimuksissa jo kahdesti peräkkäin (Vettenranta ym., 2016; Leino ym., 2019). Matematiikan taitojen yleisen heikentymisen lisäksi kansallisissa mittauksissa on havaittu, että myös asenteet matematiikkaa kohtaan laskevat yleisesti kouluvuosien aikana, ja tyttöjen matematiikkaan liittyvä minäkäsitys laskee selvästi poikien minäkäsitystä alhaisemmaksi jo peruskoulun aikana (mm. Tuohilampi & Hannula, 2013; Metsämuuronen, 2017). Tyttöjen minäkäsitystä pidetään keskeisenä tekijänä esimerkiksi lukion matematiikan pitkän oppimäärän valinnassa sekä teknisille aloille hakeutumisessa (Hannula & Holm, 2018). Viime aikoina onkin esitetty erityisesti huoli siitä, että matemaattisluonnontieteellisille aloille ei hakeudu tarpeeksi osaajia, vaikka alojen merkitys yhteiskunnalle on suuri, ja naiset ovat niin sanotuilla STEM- *(science, technology, engineering, mathematics)* aloilla aliedustettuina (mm. Pääkkönen, 2013).

Suomessa matemaattisesti lahjakkaita tai opinnoissaan erinomaisesti menestyneitä oppilaita koskeva tutkimus on vähäistä. Myös kansainvälisesti matemaattisen lahjakkuuden systemaattista tutkimusta tehdään vähän ja tutkijoilla ei ole yksiselitteistä tai johdonmukaista tapaa määritellä matemaattista lahjakkuutta. Tässä tutkimuksessa menestymistä matematiikassa ei ajatella synnynnäisenä ja muuttumattomana lahjakkuutena vaan matemaattisten taitojen nähdään olevan kehitettävissä (ks. mm. Leikin, 2014; 2018). Tutkimuksessa pyritään löytämään vastauksia siihen, mikä merkitys yksilöön ja ympäristöön liittyvillä tekijöillä on osaamisen ja asenteiden kehittymisessä matematiikassa parhaiten menestyneiden oppilaiden näkökulmasta.

Erinomaisten ja lahjakkaiden oppilaiden tunnistaminen ja tukeminen on yksi suomalaisen koulujärjestelmän haasteista (Tirri & Kuusisto, 2013). Koulujärjestelmässämme on ollut periaatteena pitää huolta heikommista oppilaista ja tukea niitä, joilla on oppimisvaikeuksia. Koulutuksellisen tasa-arvon nähdään olevan myös yksi tekijöistä Suomen PISAmenestyksen taustalla 2000-luvulla (Niemi, 2012). Myös opinnoissaan hyvin pärjäävät oppilaat tarvitsevat tukea osaamisensa kehittämiseen ja motivaation ylläpitämiseen (Hiltunen & Nissinen, 2018).

Tämä väitöstutkimus tarjoaa koulutuspoliittisesti merkittävää tietoa matematiikan parhaista osaajista ja siitä, miten heidän osaamisensa voidaan tunnistaa perusopetuksen aikana ja miten voidaan tukea sekä heidän osaamistaan että positiivisia asenteita matematiikan opiskelua kohtaan. Tutkimus perustuu Opetushallituksen ja Kansallisen koulutuksen arviointikeskuksen (Karvin) keräämään matematiikan oppimistuloksia käsittelevään pitkittäisaineistoon, jossa samaan ikäluokkaan kuuluvia oppilaita on seurattu perusopetuksen kolmannelta vuosiluokalta toisen asteen koulutuksen loppuun vuosien 2005–2015 aikana. Tällaisten kansallisten arviointien merkitys on tärkeä koulutusjärjestelmän kehittämistyössä, muun muassa opetussuunnitelmien laadinnan pohjana sekä arvioidessa koulutuksellisen tasa-arvon toteutumista (Jakku-Sihvonen, 2013).

Tutkimus keskittyy viiteen pääkysymykseen, joihin etsitään vastauksia kolmessa osatutkimuksessa. Tavoitteena on selvittää, 1) millaiset oppilaat kehittyvät matematiikan parhaiksi osaajiksi ja miten heidän opintopolkunsa muodostuu, 2) millainen yhteys matematiikan parhaiden osaajien asenteilla on heidän osaamiseensa ja miten heidän asenteensa kehittyvät, 3) miten matematiikan parhaiden osaajien kotitausta selittää osaamisen kehittymistä ja koulutusvalintoja, 4) millainen yhteys opetuksen pedagogisilla ratkaisuilla on matematiikan parhaiden osaajien osaamiseen ja asenteisiin, ja 5) miten matematiikassa parhaiten menestyneet pojat ja tytöt eroavat toisistaan.

2 Matematiikan parhaat osaajat

Tutkimuksessa tarkastellaan matematiikan parhaita osaajia. Parhaiksi osaajiksi nimetään oppilaita, jotka suoriutuvat erinomaisesti matematiikan osaamista mittaavissa kansallisissa kokeissa. Yleisesti erinomaiseen menestykseen saatetaan liittää käsitys lahjakkuudesta, vaikka koulumenestyksen ja lahjakkuuden välinen suhde ei ole yksiselitteinen (mm. Uusikylä, 1994). Opettajat ja vanhemmat nimeävät intuitiivisesti lapsia lahjakkaiksi, vaikka edes lahjakkuuden tutkijoilla ei ole yhtenäistä näkemystä siitä, mitä lahjakkuus on (mm. Sternberg & Davidson, 2005). Matematiikassa hyvin menestyvä oppilas ei välttämättä ole matemaattisesti lahjakas eikä toisaalta matemaattisesti lahjakas välttämättä saavuta huipputuloksia matematiikassa (mm. Brandl & Barthel, 2012; Szabo, 2015).

Matemaattisella lahjakkuudella viitataan yleisesti korkeaan kyvykkyyteen matemaattisissa taidoissa. On kuitenkin merkityksellistä, nähdäänkö korkeat matemaattiset kyvyt synnynnäisinä ja muuttumattomina ominaisuuksina vai ominaisuuksina, joita voi kehittää. Oppilaat, jotka uskovat matemaattisen osaamisensa olevan täysin synnynnäistä (*fixed mindset*), menestyvät heikommin kuin ne keskitason oppilaat, jotka tiedostavat voivansa kehittää osaamistaan (*growth mindset*) (Dweck, 2006).

Perimän nähdään olevan lähtökohta lahjakkuuden kehittämiselle. Geneettinen valmius ei ole kuitenkaan riittävä edellytys lahjakuudelle, vaan sen lisäksi tarvitaan muun muassa sinnikästä harjoittelua (mm. Roe, 1951; Bloom, 1985). Useissa lahjakkuusmalleissa kognitiivisten taitojen, affektiivisten tekijöiden ja ympäristöön liittyvien tekijöiden nähdäänkin linkittyvän vahvasti toisiinsa (Vlahovic-Stetic ym., 1999). Esimerkiksi Renzullin lahjakkuusmallissa (Renzulli & Reis, 1985) lahjakkuus koostuu kolmesta elementistä, joita ovat keskitason ylittävä kyvykkyys (*above-average ability),* sitoutuneisuus (*task commitment*) ja luovuus (*creativity*), ja näiden on esiinnyttävä keskenään vuorovaikutuksessa. Muun muassa Mönks (1992) ja Gagné (1995) ovat kritisoineet Renzullin mallia siitä, ettei se huomioi sosiaalisen ympäristön vaikutusta tai, että malli rajaa lahjakkuuden ulkopuolelle muun muassa alisuoriutujat. Mönks (1992; Mönks & Mason, 2000) pitääkin tärkeänä koulun, perheen ja opiskelutovereiden merkitystä lahjakkuuden kehittämisessä.

Matemaattista lahjakkuutta voidaan tarkastella yleisen lahjakkuuden näkökulmasta tai matemaattinen lahjakkuus voidaan nähdä omana lahjakkuuden erityisalueenaan (mm. Sternberg, 2003; Gardner, 2003).

Matemaattisen lahjakkuuden systemaattinen tutkimus on suhteellisen vähäistä (Leikin, 2009). Esimerkiksi Krutetskiin (1976) matemaattisesti lahjakkaiden oppilaiden erityispiirteisiin keskittyvä tutkimus on edelleen tässä tutkimuskentässä ainutlaatuinen. Krutetskii (1976) näkee matemaattiseen lahjakkuuden koostuvan yksilöllisestä kokoelmasta matemaattisia taitoja, jotka mahdollistavat menestymisen matematiikassa. Oppilaan sisäinen motivaatio ja opettajan rooli kiinnostuksen herättäjänä ovat keskeisiä tekijöitä matematiikan osaamisen kehittymisessä (Krutetskii, 1976). Vaikka Krutetskii (1976) näkee matemaattisten kykyjen olevan kehitettävissä, niin hänen mukaansa huippumatemaatikoksi kehittyminen edellyttää tiettyjä geneettisiä ominaisuuksia, jotka liittyvät muun muassa aivojen rakenteeseen ja toimintaan. Uudemman käsityksen mukaan matemaattinen lahjakkuus on yhdistelmä matemaattista asiantuntemusta ja luovuutta (Leikin, 2018). Matemaattisesti lahjakkaita yksilöitä kuvaa kyky moninaiseen ongelmanratkaisuun, johon liittyy joustava matemaattinen ajattelu. Lisäksi matemaattisesti lahjakkaiden yksilöiden kognitiiviset tekijät ovat poikkeukselliset. Leikin (2018) pitää matemaattista lahjakkuutta dynaamisena ominaisuutena, johon liittyy korkea matemaattinen potentiaali, joka tarvitsee tukea ja kannustusta.

Vaikka matemaattista lahjakkuutta koskeva tutkimus on lisääntynyt 2010-luvun jälkeen, matemaattisen lahjakkuuden määrittely tutkimuksissa ei ole johdonmukaista, ja tutkijoilla on ristiriitaisia näkemyksiä käsitteestä. Matemaattisen lahjakkuuden rinnalle onkin esitetty vaihtoehtoisia käsitteitä. Matemaattinen potentiaali (Leikin, 2009) on käsite, joka kuvastaa matemaattisten taitojen dynaamista näkökulmaa. Leikin (2009) näkee, että matemaattinen potentiaali voi kehittyä niin sanotuksi matemaattiseksi lahjakkuudeksi (*talent*), jos matemaattista potentiaalia omaavalle yksilölle tarjotaan haastavia oppimismahdollisuuksia huomioiden hänen yksilölliset kykynsä, persoonallisuutensa ja affektiiviset ominaisuutensa. Yhdysvaltalainen matematiikan opettajien neuvosto *(the National Council of Teachers of Mathematics*) kehitti matemaattisen lupaavuuden (*mathematical promise*) käsitteen, joka korostaa myös olosuhteiden vaikutusta osaamisen kehittymiseen (Sheffield ym., 1999). Käsitteen kuvauksen mukaan matemaattisia kykyjä voidaan kehittää, ja tämän mukaan suuremmalla määrällä yksilöitä on mahdollisuus yltää erinomaisiin matematiikan tuloksiin. Matemaattinen lupaavuus määritellään koostuvan neljästä toisiinsa vuorovaikutuksessa olevasta osatekijästä: kyvykkyys (*ability*), motivaatio (*motivation*), uskomukset (*beliefs)* ja kokemukset/mahdollisuudet (*experiences/opportunities*). Näitä kaikkia tulee kehittää, jotta oppilas voi saavuttaa mahdollisimman korkean matemaattisen suorituskyvyn (Sheffield ym., 1999).

Matemaattisen lahjakkuuden sijaan voidaan käyttää myös käsitettä matemaattinen kyvykkyys, joka voidaan jakaa koulukyvykkyyteen ja luovaan tieteelliseen matemaattiseen kyvykkyyteen (Ruokamo, 2000). Koulukyvykkyys nähdään kykynä oppia ja hallita matemaattista tietoa sekä hallita tarkoitustenmukaisia tietoja ja taitoja nopeasti ja menestyksellisesti. Sen sijaan luova matemaattinen kyvykkyys viittaa kykyyn tuottaa uusia tuloksia ja saavutuksia, joilla on yhteiskunnallista arvoa. Tästä näkökulmasta matemaattisen kyvykkyyden tasoa arvioidaan kykynä soveltaa matemaattisia taitoja. Tähän myös Sheffield (1994) tarjoaa mallin, joka rakentuu eritasoisista matematiikan osaajista: *oppimattomat – tekijät – laskijat – kuluttajat – ongelmanratkaisijat – ongelman asettajat – luojat (illiterates – doers – computers – consumers – problem solvers – problem posers – creators).* Mallin alimmalla tasolla ovat *oppimattomat*, jotka pitävät itseään heikkoina matematiikan osaajina ja eivät ole kiinnostuneita matematiikasta. *Tekijät* selviytyvät peruslaskutoimituksista mekaanisesti opitulla tavalla, mutta eivät ymmärrä, mitä laskevat. Tekijöitä seuraavat *laskijat*, jotka hallitsevat laskutoimitukset sujuvasti ja ymmärtävät, mitä laskevat. Seuraavalla tasolla *kuluttajat* osaavat soveltaa matematiikan taitoja arkielämän tilanteissa, kuten kaupassa. Monet osaamista arvioivat testit mittaavat tekijöiden, laskijoiden ja kuluttajien tasoista osaamista, mutta laskutaito ja nopeus selviytyä tehtävistä eivät ole riittävä peruste korkealle kyvykkyydelle tai matemaattiselle lahjakkuudelle (Sheffield, 1994). Ruokamon (2000) esittämä koulukyvykkyys kuvaa näitä tasoja. Sheffieldin (1994) mallissa seuraavilla tasoilla ovat *ongelmanratkaisijat* ja *ongelman asettajat*, jotka osaavat soveltaa matemaattisia taitojaan ja käyttää uusia menetelmiä erilaisissa tilanteissa. Korkeimmalla tasolla ovat *luojat*, jotka pystyvät itse luomaan ja määrittelemään matemaattisia ongelmia. Nämä tasot vastaisivat Ruokamon (2000) jaottelussa luovaa tieteellistä matemaattista kyvykkyyttä. Korkea matemaattinen kyvykkyys kattaa matemaattisen ajattelun, ymmärtämisen ja ongelmanratkaisun piirteitä, joita voidaan tarkastella myös Kilpatrickin ja kanssatutkijoiden (2001) määritelmän mukaan. Heidän mukaansa matemaattinen osaaminen (*mathematical proficiency*) koostuu viidestä tekijästä: käsitteellinen ymmärtäminen (*conceptual understanding*), proseduraalinen sujuvuus (*procedural fluency*), strateginen kompetenssi (*strategic competence*), mukautuva päättely (*adaptive reasoning*) ja yritteliäisyys (*productive disposition*). Matemaattisen osaamisen kehittyminen vaatii kaikkien näiden osa-alueiden kehittämistä.

Tässä tutkimuksessa on lähdetty liikkeelle kiinnostuksesta matemaattiseen lahjakkuuteen. Käytetty aineisto ei kuitenkaan kerro riittävästi matemaattisesta lahjakkuudesta sen menetelmällisten rajoitusten vuoksi. Tutkimuksessa matemaattisen lahjakkuuden sijaan puhutaan matemaattisesta kyvykkyydestä, jota voidaan mitata menestymisenä koulumatematiikassa. Tutkimuksessa käytetään käsitettä *matematiikan parhaat osaajat*, ja tämän myötä ollaan kiinnostuneita matemaattisen potentiaalin maksimaalisesta toteutumisesta yksilöön ja ympäristöön liittyvien tekijöiden vuorovaikutuksessa.

Matematiikassa hyvin menestyvä oppilas menestyy usein hyvin myös muissa akateemisissa taidoissa. Esimerkiksi menestymisen luku- ja kirjoitustaidoissa ja matematiikan taidoissa on osoitettu olevan yhteydessä toisiinsa (mm. Harlaar ym., 2012; Jordan ym., 2006). Kielellisten taitojen merkitys matematiikan opiskelulle on merkityksellinen. Kielelliset taidot mahdollistavat esimerkiksi laskemiseen liittyvien symbolien ja lukusanojen oppimisen ja ovat merkityksellisiä matematiikan sanallisten tehtävien ratkaisemisessa (Björn ym., 2016). Sanallisten tehtävien ymmärtäminen edellyttää hyvän lukutaidon hallintaa (Vilenius-Tuohimaa ym., 2008).

Useat tutkimukset ovat osoittaneet, että omiin kykyihinsä luottavat ja motivoituneet oppilaat menestyvät matematiikan opinnoissa parhaiten. Muun muassa motivaatio ja opiskelutyyli ovat älykkyyttä tärkeämpiä tekijöitä matematiikan osaamisen edistämisessä (Murayama ym., 2012). Opinnoissaan erinomaisesti menestyneiden oppilaiden yksilöllisiä ominaisuuksia kuvaavat muun muassa sinnikkyys ja luottamus omiin kykyihin (Salmela & Uusiautti, 2015; Kupari & Nissinen, 2015). Myös oppilaan temperamentti (mm. Keogh, 2003; Pulkkinen & Caspi, 2002; Keltikangas-Järvinen, 2006) on yhteydessä koulumenestykseen. Lisäksi oppilaat tarvitsevat kasvu- ja oppimisympäristön tukea ja kannustusta opiskeluun ja motivaation ylläpitämiseen. Kaikkien oppilaiden tulisi saada yksilöllisiä tarpeita vastaavaa opetusta. Eriyttämisen nähdään olevan toimiva keino kaikkien oppilaiden yksilöllisten tarpeiden huomioimiseen (Laine, 2010). Opettajalla on tärkeä rooli myös oppilaiden myönteisten asenteiden edistämisessä. Koulumenestys kehittyykin yksilöön ja ympäristöön liittyvien tekijöiden keskinäisessä vuorovaikutuksessa. Seuraavat luvut käsittelevät näitä tekijöitä tarkemmin matematiikka-asenteiden, kotitaustaan liittyvien tekijöiden, opetusratkaisujen ja sukupuolen näkökulmasta.

3 Matematiikassa menestymiseen yhteydessä olevia tekijöitä

Tässä tutkimuksessa matemaattiset kyvyt nähdään kehittyviksi yksilöllisten ja sosiaaliseen ympäristöön liittyvien tekijöiden vuorovaikutuksessa. Voidaan puhua sosiokognitiivisen mallin (Bandura, 1986) mukaisesta näkökulmasta, jossa yksilöön ja ympäristöön liittyvät tekijät ohjaavat yksilön käyttäytymistä. Yksilöllisistä tekijöistä affektiivisilla tekijöillä on merkittävä rooli matemaattisten taitojen kehittämisessä. Samalla sosiaaliset vaikutukset ohjaavat yksilön odotuksia, uskomuksia ja kognitiivisia kykyjä. Sosiaalinen ympäristö voi mahdollistaa, olla neutraali tai rajoittaa yksilön pyrkimyksiä (Bandura, 1986).

Seuraavaksi matematiikassa menestymiseen yhteydessä olevia tekijöitä tarkastellaan matematiikkaan liittyvien asenteiden, oppilaan kotitaustan, matematiikan opetukseen liittyvien ratkaisujen ja sukupuolen näkökulmasta.

3.1 Matematiikka-asenteet

Älyllisten kykyjen kehittämiseen vaikuttavat vahvasti yksilön kiinnostuksen kohteet, minäpystyvyys, opiskelumotivaatio ja itsesäätelytaidot (Bandura & Schunk, 1981; Zimmerman, 2000; Pajares, 2003; Tuijula, 2011). Wigfieldin ja Ecclesin (2000; Eccles, 2004) odotusarvoteorian (*expectancy-value theory*) mukaan oppimista ohjaavat ensinnäkin oppilaan menestymisen odotukset, käsitys omista kyvyistä suoriutua tehtävistä, käsitys tehtävän vaikeudesta ja toisaalta oppilaan tavoitteet ja subjektiiviset arviot tehtävistä. Odotuksiin ja arvostuksiin vaikuttavat oppilaan tulkinnat aikaisemmista suorituksistaan, oppilaan käsitykset sosiaalisen ympäristön suhtautumisesta ja odotuksista ja yleinen kulttuuri-ilmapiiri muun muassa sukupuolirooleista. Odotukset voidaan jakaa menestymisen odotuksiin (*expectancies for success*) ja kykyuskomuksiin (*competence beliefs/ability beliefs),* joista kykyuskomusten voidaan nähdä suuntautuvan tämänhetkiseen tilanteeseen ja menestymisen odotusten tulevaan. Odotuksiin suoriutua tehtävistä liittyy vahvasti oppijan käsitys omista kyvyistä (jatkossa *minäkäsitys*). Minäkäsitystä (*self-concept*) (mm. Goldman & Penner, 2016) pidetään usein rinnasteisena käsitteille *minäpystyvyys* (*self-efficacy*) (mm. Bandura, 1977; Schunk & Richardson, 2011) ja *itseluottamus* (*self-confidence*) (mm. Parsons ym., 2009), vaikka käsitteiden merkitykset eroavat toisistaan.

Esimerkiksi minäpystyvyys (*self-efficacy*) tarkoittaa yksilön arviota suoriutua tietyistä annetuista tehtävistä ja minäkäsitys (*self-concept*) viittaa laajemmin yksilön käsityksiin omista kyvyistä tietyllä akateemisella alueella (Wigfield & Karpathian, 1991; Schunk, 1991; Bong & Skaalvik, 2003). Minäkäsitys muodostuu kokemusten kautta ja saa vahvistusta sosiaalisen vuorovaikutuksen kautta. Erään näkökulman mukaan minäpystyvyys voidaan luokitella yhdeksi minäkäsityksen osatekijäksi (Bong & Skaalvik, 2003).

Odotusten lisäksi oppimista ohjaavat arvostukset opiskeltavaa asiaa kohtaan (Wigfield & Eccles, 2000). Arvostuksiin liittyy neljä tekijää: 1) tehtävän kiinnostavuus (*intrinsic interest value*), 2) tehtävän hyödyllisyys (*utility value*), 3) tehtävän hyötyarvo (*attainment value*) ja 4) tehtävän hinta (*cost*). Tehtävän kiinnostavuus kertoo siitä, kuinka paljon oppija nauttii itse tehtävästä ja sen sisällöstä sitä tehdessään. Tämän voidaan nähdä liittyvän sisäiseen motivaatioon (Ryan & Deci, 2000), jonka mukaan yksilö on todella kiinnostunut asiasta, nauttii sen tekemisestä ja ryhtyy toimimaan sen eteen itsensä vuoksi. Tehtävän hyödyllisyys kertoo, kokeeko oppilas opiskeltavan asian olevan hänelle tulevaisuudessa hyödyllinen (Wigfield & Eccles, 2000). Tämä käsite menee lähelle ulkoisen motivaation käsitettä, jonka mukaan yksilö ryhtyy toimeen jonkin lopputuloksen takia esimerkiksi saadakseen jonkin palkinnon tai välttääkseen jonkin negatiivisen seuraamuksen (Ryan & Deci, 2000). Tehtävän hyötyarvo liittyy siihen, miten tärkeää oppijalle on menestyä hyvin annetussa tehtävässä. Tehtävän hinta liittyy siihen, viekö sen tekeminen aikaa joltain kiinnostavalta asialta tai herättääkö tehtävä ahdistusta (Wigfield & Eccles, 2000).

Asenteiden suhdetta osaamiseen on usean vuosikymmenen ajan kartoitettu Fennema-Shermanin asennemittarilla, joka on alkujaan 1970-luvulla laadittu mittaamaan sukupuolten välisiä asenne-eroja matematiikkaa kohtaan erityisesti matematiikka-ahdistuksen näkökulmasta. Alkuperäisessä testistössä on yhdeksän ulottuvuutta, joista jokaista mitataan 12 väittämällä viisiportaisella Likert-asteikolla. Nykyään tästä alkuperäisestä versiosta käytetään laajalti erilaisia lyhennettyjä versioita sekä kansallisesti Karvin (Kansallisen koulutuksen arviointikeskus) oppimistulosarvioinneissa että kansainvälisesti PISA- (*Programme for International Student Assessment*) ja TIMSS- *(Trends in International Mathematics and Science Study*) tutkimuksissa. Karvin asennemittarissa asenteita kartoitetaan kolmella dimensiolla: *käsitys itsestä matematiikan osaajana*, *matematiikasta pitäminen* ja *kokemus matematiikan hyödyllisyydestä*, joista kutakin mitataan viidellä väittämällä. Osa-alueiden voidaan nähdä linkittyvän Wigfiedlin ja Ecclesin (2000) luokitteluun niin, että käsitys itsestä matematiikan osaajana liittyy odotuksiin, ja matematiikasta pitäminen ja kokemus matematiikan hyödyllisyydestä arvostuksiin.

Useat tutkimukset ovat osoittaneet, että matematiikan osaamisen ja matematiikkaan liittyvien asenteiden välillä on positiivinen korrelaatiosuhde (mm. Bandura, 1986 lähtien; Hannula & Laakso, 2011; Ma & Kishor, 1997; Roesken ym., 2011). Osaamisen ja asenteiden välisestä kausaliteetista ei kuitenkaan ole yksiselitteistä näkemystä. Ensinnäkin jo Bloomin kouluoppimisen teorian (1976) mukaan oppilaan affektiivinen lähtötaso selitti jopa neljäsosan matematiikan testipistemäärien vaihtelusta. Myös muun muassa Else-Questin ja kanssatutkijoiden (2010) sekä Winhellerin ja kanssatutkijoiden (2013) mukaan oppilaat, joiden asenteet matematiikkaa kohtaan olivat myönteisiä, suoriutuivat matematiikassa muita oppilaita paremmin. Kansallisella tasolla positiivisen asenteen matematiikkaa kohtaan on havaittu olevan yhteydessä sekä matematiikan osaamistasoon että toista astetta koskeviin valintoihin (Metsämuuronen, 2017).

Asenteiden suhdetta osaamiseen on tutkittu eriytyisesti minäkäsityksen näkökulmasta. Minäkäsityksen on havaittu selittävän osaamistasoa muita matematiikkaan liittyviä asenteita paremmin sen ohjatessa yksilön käyttäytymistä ja valintoja (Bandura, 1986; Pajares & Miller, 1994). Useat tutkimukset (mm. Bryan ym., 2011; Jiang ym., 2014; Suárez-Álvarez ym., 2014) ovat osoittaneet, että omiin kykyihinsä luottavat menestyvät matematiikan opinnoissa parhaiten. PISA2012-tutkimuksessa matematiikan minäkäsityksen ja suoritusluottamuksen on havaittu selittävän vahvimmin matematiikan osaamista kansallisella tasolla (Kupari & Nissinen, 2015). Williamsin ja Williamsin (2010) PISA-aineistoon pohjautuvan kansainvälisen vertailuanalyysin mukaan matemaattisen minäpystyvyyden vaikutus suoriutumiseen on Suomessa suhteellisen pieni muihin maihin verrattuna. Sen sijaan matematiikan osaamisen vaikutus minäpystyvyyteen on Suomessa yksi suurimmista. Kansallisen pitkittäisanalyysin mukaan alakoulun aikainen matematiikan osaaminen vaikuttaa matematiikka-asenteisiin vielä ylemmilläkin luokka-asteilla (Tuohilampi & Hannula, 2013; Hannula ym. 2014). Osaaminen vaikuttaa minäpystyvyyden kehittymiseen luokilla 3–6, ja luokilla 6–9 osaaminen ja minäpystyvyys ovat vastavuoroisessa suhteessa. Mitä parempaa opiskelijan osaaminen on 9. luokalla, sitä positiivisempi on hänen käsityksensä matematiikasta oppiaineena ja sitä todennäköisemmin hän valitsee lukio-opinnot ja pitkän matematiikan (Metsämuuronen, 2017). Hannulan ja Laakson (2011) mukaan osaamisen ja asenteiden välinen yhteys voimistuu iän karttuessa, kun käsitykset muuttuvat realistisimmiksi.

Matematiikkaan liittyvien asenteiden on havaittu heikkenevän kouluvuosien myötä (Kupari ym., 2012). Pääsääntöisesti oppilaiden asenteet koulunkäyntiä ja oppimista kohtaan ovat ensimmäisinä kouluvuosina positiivisia. Oppilailla on silloin yleisesti myönteiset asenteet niin koulunkäyntiä kuin myös eri oppiaineita kohtaan (Harter, 1999; Metsämuuronen ym., 2012, Tuohilampi ym., 2013). Tuohilammen ja Hannulan (2013) mukaan asenteiden muutos näkyy pitkittäisaineistossa kolmannelta luokalta yhdeksännelle aluksi vain matematiikasta pitämisessä, joka heikentyy olennaisesti kolmannen ja kuudennen luokan välisenä aikana. Minäpystyvyys ja hyödyllisyyden kokeminen laskevat selvästi yläkoulun aikana. Oppilaat alkavat iän myötä arvioida osaamistaan enemmän suhteessa muihin samassa ryhmässä opiskeleviin oppilaisiin (mm. Tuohilampi & Hannula, 2013). *Big fish, little pond* -efekti selittää oppilaan minäpystyvyyden kokemisessa tapahtuneita muutoksia, kun hän vertaa omaa osaamistaan ryhmän keskimääräiseen osaamiseen. Jos oppilaan taidot ovat keskivertoa paremmat, hänen käsityksensä itsestä matematiikan osaajana paranee ja vastaavasti oppilaan, joka kokee taitonsa keskitasoa heikommaksi, käsitys itsestä osaajana heikkenee (Marsh ym., 2019; Holm ym., 2020). On mahdollista, että matematiikassa hyvin suoriutuvalla oppilaalla on heikko käsitys itsestä osaajana, jos hän opiskelee ryhmässä, jossa muiden taidot ovat korkealla tasolla.

3.2 Kotitausta

Useat tutkimukset ovat osoittaneet, että oppilaan kotitausta ja kodin sosioekonominen asema selittävät voimakkaasti oppilaiden matematiikan osaamista (mm. Kupari & Nissinen, 2013; Marks ym., 2006). PISA 2012 -tutkimuksessa sosioekonominen tausta oli Suomessa koulun tasolla tärkein matematiikan osaamista selittävä tekijä (Kupari & Nissinen, 2013). Kouluissa, joissa oppilaiden vanhempien keskimääräinen vauraus, koulutustaso ja ammatilliset asemat olivat korkeimpia, myös matematiikan keskiarvo oli selvästi korkeampi (Kupari & Nissinen, 2013, s. 23). Myös kodin kielitaustalla on havaittu olevan tärkeä matematiikan oppimistuloksia selittävä tekijä kansainvälisissä tutkimuksissa (Brese & Mirazchiyski, 2010; Stanat & Christensen, 2006). Suomessa kielitaustalla, joka on muu kuin suomi tai ruotsi, on havaittu selkeä yhteys heikompiin oppimistuloksiin (mm. Räsänen & Närhi, 2013).

Kotitaustan yhteys suomalaislasten ja -nuorten osaamiseen on vahvistunut 2010-luvulla kansainvälisesti tarkasteltuna. Esimerkiksi vuoden 2009 PISA-tutkimuksessa sosioekonomisen aseman suhteen alimmasta ja ylimmästä neljänneksestä tulleiden oppilaiden osaamisero lukutaidossa vastasi noin 1,5 vuoden opintoja, ja vuonna 2015 ja 2018 ero vastasi noin kahta kouluvuotta (Välijärvi, 2021). Lisäksi sosioekonomista taustaa mittaavat muuttujat ovat vahvempia oppimistulosten vaihtelun selittäjiä kuin oppilaan sukupuoli (Rautopuro & Nissinen, 2021). Uusimmat TIMSS- ja PIRLS-tutkimukset osoittavat, että neljäsluokkalaisten lähtötasolla on yhteyttä sosioekonomiseen taustaan ja peruskoulu pystyy tasaamaan näitä eroja vain osittain (Rautopuro & Nissinen, 2021).

Sosioekonominen status määritellään eri konteksteissa eri tavoin eikä ole olemassa yhtä yleisesti hyväksyttyä tapaa mitata sosioekonomista statusta (APA, 2007, s. 5; Bradley & Corwyn, 2002). Määrittelyssä käytetään vanhempien tulo-, koulutus- ja ammattitietoja. Näistä vanhempien koulutusta pidetään yhtenä keskeisistä sosioekonomisen statuksen osatekijöistä ja sitä on käytetty kansallisissa oppimistulosarvioinneissa yksinkertaisena sosioekonomisen statuksen indikaattorina. Vanhempien ylioppilastutkinto on selittänyt kansallisissa tutkimuksissa selvästi osaamisen eroja eri oppiaineissa (mm. Ouakrim-Soivio & Kuusela, 2012; Hildén & Rautopuro, 2014; Härmälä ym., 2014; Metsämuuronen, 2013; Kuukka & Metsämuuronen, 2016). Vanhempien koulutuksella näyttää olevan keskeinen rooli matematiikan osaamisen kehittymisessä jo kolmannelta luokalta lähtien toisen asteen koulutukseen asti (Metsämuuronen, 2013; 2017).

Hiltunen ja Nissinen (2018) ovat tutkineet PISA 2015 -tutkimuksessa erinomaisesti menestyneitä suomalaisia matematiikan osaajia. Heidän mukaansa perheen korkealla sosioekonomisella statuksella on merkitsevä yhteys erinomaiseen osaamiseen. Hiltunen ja Nissinen nostavat isän korkean koulutustason merkittäväksi tekijäksi. Kansallisissa oppimistulosarvioinneissa (mm. Metsämuuronen, 2013) on havaittu oppilaiden hyötyvän molempien vanhempien suorittamasta ylioppilastutkinnosta. Hotulainen ja kanssakirjoittajat (2016) ovat tutkineet metropolialueen nuorten siirtymää perusopetuksesta toiselle asteelle, ja heidän mukaansa perheen sosioekonominen tausta ja erilaiset hyvinvointitekijät ennustavat osaamisen kehittymistä, koulumenestystä ja toisen asteen koulutusvalintaa. Välijärven (2017) mukaan sosioekonomisella taustalla on vahva yhteys myös oppilaan suoritusmotivaatioon. Oppilailla, joilla on korkeampi sosioekonominen tausta, on parempi suoritusmotivaatio kuin niillä, joilla on matalampi sosioekonominen tausta. Välijärven (2017) mukaan korkean sosioekonomisen taustan nuoret saavat enemmän tukea koulunkäyntiinsä ja tämä on yhteydessä parempiin oppimistuloksiin.

Kansallisissa oppimistulosarvioinneissa osaamisessa on ollut jonkin verran eroa suomen- ja ruotsinkielisten koulujen oppilaiden välillä suomenkielisten oppilaiden hyväksi alakoulun luokka-asteilla, mutta ero on kaventunut ylemmillä luokka-asteilla (Metsämuuronen, 2010; 2017). Kansallisen matematiikan osaamista selvittävän tutkimuksen mukaan kotikielenään muuta kuin suomea tai ruotsia puhuvien oppilaiden osaaminen oli selvästi heikompaa kuin suomen- tai ruotsinkielisten oppilaiden osaaminen kuudennella ja yhdeksännellä luokalla (Räsänen ym., 2010; Räsänen & Närhi, 2013). Yhdeksännellä luokalla niiden oppilaiden joukossa, joiden kotikieli oli muu kuin suomi, oli yli kolminkertainen määrä heikoiksi luokiteltuja oppilaita (Räsänen & Närhi, 2013). Hotulainen ja kanssakirjoittajat (2016) ovat tutkineet metropolialueen nuorten eriytyviä kehityspolkuja yläkoulun aikana ja heidän toisen asteen valintojaan. Tutkimustulosten mukaan maahanmuuttajatausta on yhteydessä heikompaan lähtötasoon, mutta ei osaamisen kehitykseen yläkoulun aikana. Lähtötasoerot maahanmuuttajataustaisten ja kantaväestöön kuuluvien oppilaiden välillä selittyvät vanhempien koulutustaustan ja suomen kielen osaamisen eroilla (Hotulainen ym., 2016).

Sosioekonomisen taustan lisäksi tutkimukset ovat osoittaneet, että kodin antaman tuen merkitys oppimiselle on keskeinen. Vanhemman antama tuki, asenteet ja vaikutteet heijastuvat lapseen. Jos vanhemmat antavat lapselle tukea ja ovat kiinnostuneita lapsen koulunkäynnistä, lapsi menestyy paremmin koulussa (Robinson & Harris, 2014; Schneider, 1993). Roznowskin ja kanssatutkijoiden (2000) tutkimuksessa lahjakkaat ja hyvin menestyneet 15–16-vuotiaat opiskelijat saivat keskinkertaisesti menestyviä opiskelijoita todennäköisemmin ohjausta vanhemmiltaan ja vanhemmat olivat kiinnostuneita lastensa koulunkäynnistä. Kodin tuen yhteyttä osaamiseen on tutkittu toisen asteen opiskelijoiden osalta kansallisessa matematiikan arvioinnissa (Metsämuuronen, 2017). Tutkimustulosten mukaan kodin tuki selittää merkitsevästi osaamista sekä lukiossa että ammatillisessa koulutuksessa. Lukiossa yhteys näkyy voimakkaammin: mitä enemmän opiskelija koki saavansa tukea opiskeluun, sitä korkeampaa hänen osaamisensa oli. Ero osaamisessa kodin tukea saaneiden ääriryhmien välillä vastasi kahden vuoden opintoja. Ammatillisessa koulutuksessa vaikutus näkyi niin, että tukea erittäin vähän saaneiden opiskelijoiden osaamisen taso oli merkitsevästi matalampaa kuin muissa ryhmissä. Merkityksellisenä tekijänä kodin tuesta lukiossa osoittautui se, pitävätkö vanhemmat matematiikkaa oppiaineena tärkeänä ja ammatillisessa koulutuksessa se, arvostavatko vanhemmat koulutusta. Toki vanhempien ylioppilastaustalla saattaa olla merkitystä kodin antaman tuen kanssa, koska heillä on paremmat lähtökohdat esimerkiksi tukea lastaan koulutehtävissä.

3.3 Opetusratkaisut

Erilaiset kehityslinjat ovat ohjanneet matematiikan opetuksen ja opetussuunnitelmien kehittymistä. Suomi on seurannut matematiikan opetuksen ideologioissa Yhdysvaltoja noin kymmenen vuoden viiveellä (Haapasalo, 2011). Matematiikan opetusta koskevan kehityksen voidaan nähdä sisältävän neljä vaihetta (Kupari, 1999), joista ensimmäinen rantautui Suomeen 1970-luvulla, kun koko koulujärjestelmä uudistui. *Uuden matematiikan* (*New Math*) myötä haluttiin vahvistaa matematiikan ymmärtämistä ja soveltamista. Peruslaskutoimitusten sijaan kouluissa alettiin opettaa jo alaluokilla formaalimpaa matematiikkaa, muun muassa joukko-oppia ja logiikan perusteita. Uusi suunta sai osakseen paljon kritiikkiä ja palattiin *takaisin perusasioihin* (*Back to Basics*). Samalla kuitenkin pidettiin merkityksellisenä ongelmakeskeistä matematiikan opetusta, jossa matematiikka liitetään oppilaiden kokemusmaailmaan ja pohditaan ratkaisuehdotuksia. Seuraava aikakausi olikin *ongelmanratkaisun* aikakausi (*Problem Solving*), jossa konstruktivistinen oppimiskäsitys oli läsnä. Neljättä matematiikan opetuksen kehitysvaihetta on nimetty Suomessa *koulukohtaisuuden ja standardien* vaiheeksi, kun opetussuunnitelmajärjestelmässä siirryttiin 1990-luvulla keskitetystä hajautettuun järjestelmään. Koulut saivat enemmän vapautta ja vastuuta laatia käytännön opetustyötä ohjaavat opetussuunnitelmansa. Samalla matematiikan opetuksen kehittämistyöryhmä tavoitteli sosiokonstruktivistisen oppimiskäsityksen pohjalle rakentuvaa lähestymistapaa, joka on voimistunut johtavaksi oppimispsykologiseksi lähtökohdaksi matematiikan opetuksen kehittämisessä (Kupari, 1999; Koskinen, 2016). Myös nykyisessä opetussuunnitelman perusteissa (Opetushallitus 2014) oppilas nähdään aktiivisena toimijana, joka oppii asettamaan tavoitteita ja ratkaisemaan ongelmia sekä itsenäisesti että muiden kanssa.

Sosiokonstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaan oppiminen on oppijalähtöistä. Matematiikan opetuksen kehittäminen onkin perustunut jo pitkään mielekkään oppimisen tavoittelemiseen, johon on pyritty usean vuosikymmenen ajan muun muassa erilaisten oppijalähtöisten työtapojen kehittelyllä (mm. Ahtee & Pehkonen, 2000; Haapasalo, 2001; Koskinen, 2016). Mielekästä oppimista tavoittelevaa opetusta voidaan tarkastella opetuksen intentioiden, opetuksen lähestymistapojen, oppimisympäristön ja opetus-oppimisprosessin ja sen ohjauksen näkökulmasta (Koskinen & Pitkäniemi, 2020). Tähän väitöstutkimukseen liittyen käsitellään tarkemmin opetuksen lähestymistapojen yhteyttä oppimistuloksiin. Koskinen ja Pitkäniemi (2020) jakavat lähestymistavat konkreettisiin, kontekstuaalisiin ja sosiaalisiin lähestymistapoihin. Nämä esiintyvät usein yhdessä ja tuottavat mielekästä oppimista.

Konkreettisuus ja opittavan asian kontekstuaalisuus tukevat ymmärtämistä (Koskinen, 2016). Konkreettisella lähestymistavalla tarkoitetaan merkitysyhteyksien luomista eri representaatioiden välillä käyttäen havainnollistavia ja toiminnallisia apuvälineitä. Kontekstuaalisuuden näkökulmasta opittavan asian tulee linkittyä todellisen maailman ilmiöihin ja olla tilannesidonnaista. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (Opetushallitus, 2014) ohjataan luomaan oppimisympäristö, jossa konkretia ja välineet ovat osana matematiikan opiskelua. Opiskelua on itsenäisesti ja yhdessä, opiskelussa hyödynnetään oppimispelejä ja käytetään tieto- ja viestintäteknologiaa. Opetussuunnitelman mukaan opetuksen tulisi myös ohjata oppilaita ymmärtämään matematiikan hyödyllisyys omassa elämässään ja laajemmin yhteiskunnassa. Innovatiivisten opetusmenetelmien käytön ja kontekstuaalisuuden on havaittu tukevan perinteisiä opetusmenetelmiä paremmin oppilaiden myönteisten asenteiden kehittymistä (mm. Ogbuehi & Fraser, 2007; Koskinen & Pitkäniemi, 2020, s. 86). Oppisisällön linkittäminen oppilaan omaan arkimaailmaan on tärkeää, jotta hän voi tulkita sitä oman käsitteellisen viitekehyksensä kautta (Koskinen & Pitkäniemi, 2020).

Sosiaalisen lähestymistavan näkökulmasta opetus-oppimisprosessi on luonteeltaan interaktiivinen. Opiskelu on keskustelevaa ja yhteistoiminnallista. Oppilaat suhtautuvat opiskeluun myönteisemmin, kun he voivat itse vaikuttaa ja päättää tekemisestään ja tuntea yhteenkuuluvuutta muiden oppilaiden kanssa (Salmela-Aro, 2018; Ryan & Deci, 2017). Yhteistoiminnallisten opetusmenetelmien on havaittu tuottavan kansallisessa oppimistulosarvioinnissa hyviä tuloksia sekä osaamisen että asenteiden suhteen (Hannula & Oksanen, 2013). Se, että oppilaat neuvoivat toisiaan, paransi osaamiseltaan keskitasoa parempien oppilaiden asenteita ja tämä vaikutti voimakkaammin poikien myönteisempään asennekehitykseen. Myös laudaturylioppilaita tutkineen Salmelan (2016) mukaan opiskelijoiden vahvuuksia ja opintomenestystä tukee parhaiten opetus, jota ilmentävät muun muassa opiskelijakeskeisyys ja oppimisen yhteisöllisyys sekä palautteen antaminen ja kannustaminen. Yhteistoiminnallisuus liitetään usein konkreettisiin ja kontekstuaalisiin lähestymistapoihin, ja näiden yhteisvaikutuksella on positiivinen yhteys matematiikan oppimistuloksiin (mm. Souvignier & Kronenberger, 2007; Slavin ym., 2009).

Mielekkään oppimisen toteuttaminen ei ole kuitenkaan ongelmatonta. Starin ja kanssatutkijoiden (2008) tutkimuksessa havaittiin, että oppilaille jäi epäselväksi oppilaskeskeisten ja yhteistoiminnallisten toimintatapojen merkitys matematiikan opiskelussa. Koskinen ja Pitkäniemi (2020) korostavatkin opettajan ohjauksen merkitystä, jotta eri lähestymistapojen vaikutukset oppimiseen voidaan saavuttaa. Esimerkiksi peleillä on positiivinen vaikutus oppilaan motivaatioon ja asenteisiin, mutta vasta hyvällä ohjauksella voidaan kohdistaa oppilaan huomio itse oppisisältöön (Koskinen & Pitkäniemi, 2020, s. 86).

Mielekäs oppiminen edellyttää myös suotuisaa oppimisympäristöä (Koskinen & Pitkäniemi, 2020). Keskeisenä tekijänä tässä on opettajan valmius huomioida oppilaat yksilöinä. Oppilaat viihtyvät luokassa paremmin, osallistuvat yhteiseen työskentelyyn ja toimivat itseohjautuvasti, kun opettaja on ottanut opetuksessaan huomioon oppilaiden yksilölliset erot (Venkat & Brown, 2009; Jorgensen & Niesche, 2008). Opetuksen eriyttämisen nähdään olevan toimiva keino kaikkien oppilaiden yksilöllisten tarpeiden huomioimiseen (Laine, 2010). Hiltusen ja Nissinen (2018) mukaan myös hyvin menestyvät oppilaat tarvitsevat tukea osaamisensa kehittämiseen ja motivaation ylläpitämiseen. Vanttajan (2002) tutkimuksessa osa laudaturylioppilaista koki opiskelun liian helpoksi eikä opetus ja oppilaan taitotaso kohdanneet. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (Opetushallitus, 2014) mukaan kaiken opetuksen pedagogisena lähtökohtana tulisi olla eriyttäminen, joka perustuu oppilaiden tarpeille ja mahdollisuuksille muun muassa edetä yksilöllisesti. Eriyttämiseen liittyvät myös mahdollisuudet vaikuttaa opiskelun suunnitteluun ja erilaisten työtapojen valintaan. Eriyttämällä tuetaan oppilaan itsetuntoa, motivaatiota ja turvataan oppimisen rauhaa (mts. 30). Mielekäs eriyttäminen taitotason mukaisesti parantaa asenteiden lisäksi myös oppilaan osaamistasoa (Metsämuuronen, 2017).

Oppimiselle suotuisa oppimisympäristö käsittää myös tunneilmaston, joka muodostuu vuorovaikutussuhteista opettajan ja oppilaiden välillä ja oppilaiden kesken (Koskinen & Pitkäniemi, 2020). Metsämuurosen (2017) mukaan koulukiusaaminen, luokan työrauhaongelmat ja heikko viihtyminen koulussa estävät osaamisen kasvua erityisesti yläkoulussa. Se, että oppilaat neuvovat toisiaan, parantaa keskitasoa parempien osaajien oppimistuloksia verrattuna keskitasoa heikompiin osaajiin.

Tutkijoilla ei ole yksimielistä näkemystä kaikille toimivien opetusratkaisujen suhteesta. Muun muassa 15-vuotiaiden PISA-tuloksia pitkittäisanalyysissa tutkinut Saarinen (2020) väittää, että opettajalähtöisten menetelmien käyttö johtaa parempiin oppimistuloksiin ja itseohjautuvuutta edellyttävät menetelmät heikompiin tuloksiin. Toisaalta monet tutkijat ovat havainneet toimiviksi erilaisten opetusmenetelmien yhdistelmät. Esimerkiksi kansallisessa matematiikan oppimistuloksia mittaavassa tutkimuksessa havaittiin, että parhaatkin oppilaat hyötyivät opettajajohtoisesta opetuksesta, mutta toisaalta myös konkreettisten havaintovälineiden käyttö edisti oppimista kuudennelle vuosiluokalle tultaessa (Metsämuuronen, 2010). Tärkeimpiä osaamista kehittäviä opetuksellisia tekijöitä olivat mahdollisuus saada luokkaan toinen opettaja, opettajan käsitys omista taidoista hallita oppilaiden käyttäytymistä, vähäinen oppilaiden osallistaminen tavoitteiden asetteluun ja arviointiin sekä se, että oppilaat neuvoivat toisiaan (Hannula & Oksanen, 2013). Myös kotitehtävien runsaammalla määrällä havaittiin olevan selkeä positiivinen yhteys matematiikan osaamiseen (Mattila & Rautopuro, 2013). Toisella asteella keskeinen osaamista selittävä tekijä oli se, kuinka usein opiskelijat kokivat opiskeltavien asioiden tulevan selviksi. Parhaita oppimistuloksia saatiin ryhmässä, jossa opettajajohtoisuuteen yhdistyi eriyttäminen taitotason mukaisesti ja saatujen tulosten järkevyyttä pohdittiin (Metsämuuronen, 2017). Itävaltalaistutkimuksessa (Lüftenegger ym., 2015) koulussa erinomaisesti menestyvät 15-vuotiaat nuoret kokivat opetustilanteissa keskitasoa heikompia osaajia enemmän autonomiaa ja kokivat saaneensa enemmän taitotasonsa mukaisia oppimistehtäviä ja osallistuneensa aktiivisemmin opiskelua koskevaan päätöksentekoon.

Opettajan toiminnalla, opetuskäytännöillä ja vuorovaikutuksella on keskeinen merkitys erityisesti oppilaiden opiskeluasenteiden kehittymiselle ja ylläpitämiselle (Salmela-Aro, 2018). Sekä Winner (2000) että Phillips ja Lindsay (2006) näkevät, että sopivilla haasteilla koulussa on suuri vaikutus erityisesti lahjakkaiden oppilaiden motivaatioon. Korkean motivaation saavuttamiseksi opiskelijat tarvitsevat vakautta, psykososiaalista tukea ja haasteita kognitiivisella tasolla (Ryan & Deci, 2000). Lisäksi mielekkäät oppimistilanteet ovat yhteydessä minäpystyvyyden vaalimiseen ja alisuoriutumisen välttämiseen (Colangelo ym., 1993; McCoach & Siegle, 2003).

3.4 Sukupuoli

Sukupuolen yhteys matematiikan osaamiseen on kansainvälisesti tarkasteltuna monimutkainen ilmiö. Sukupuolten väliset erot eri maiden välillä vaihtelevat muun muassa kulttuuristen erojen vuoksi. OECD-maissa pojat menestyvät matematiikassa keskimäärin hieman tyttöjä paremmin, ja pojat ovat yliedustettuja matematiikassa parhaiten menestyneiden oppilaiden joukossa (mm. Hyde & Mertz, 2009). Muun muassa sukupuolten välisen epätasa-arvoisuuden joissakin maissa on esitetty olevan yksi syy sille, että pojat ovat yliedustettuja erinomaisesti matematiikkaa osaavien oppilaiden joukossa (Hyde & Mertz, 2009; Guiso ym., 2008). Sukupuolten välisistä osaamiseroista riippumatta tytöt näyttävät hakeutuvan matemaattisille aloille yleisesti poikia harvemmin (Beede ym., 2011).

Kansainvälisten vertailujen mukaan suomalaispoikien matematiikan osaaminen on heikentynyt voimakkaasti 2010-luvulla niin, että suomalaistytöt ovat menestyneet matematiikassa hieman poikia paremmin (mm. Vettenranta ym., 2016; Leino ym., 2019). Keskimäärin sukupuolierot ovat kuitenkin varsin pieniä, mutta sukupuolten välinen ero näkyy tarkastellessa eri osaajaryhmiä. Suomessa sukupuolten välinen ero osaamisessa on suurinta heikommin menestyneiden oppilaiden joukossa, ja poikien osaamisessa on enemmän vaihtelua (Vettenranta ym., 2016). Myös erinomaisella suoritustasolla poikien osuus on hieman tyttöjen osuutta suurempi (Vettenranta ym., 2020).

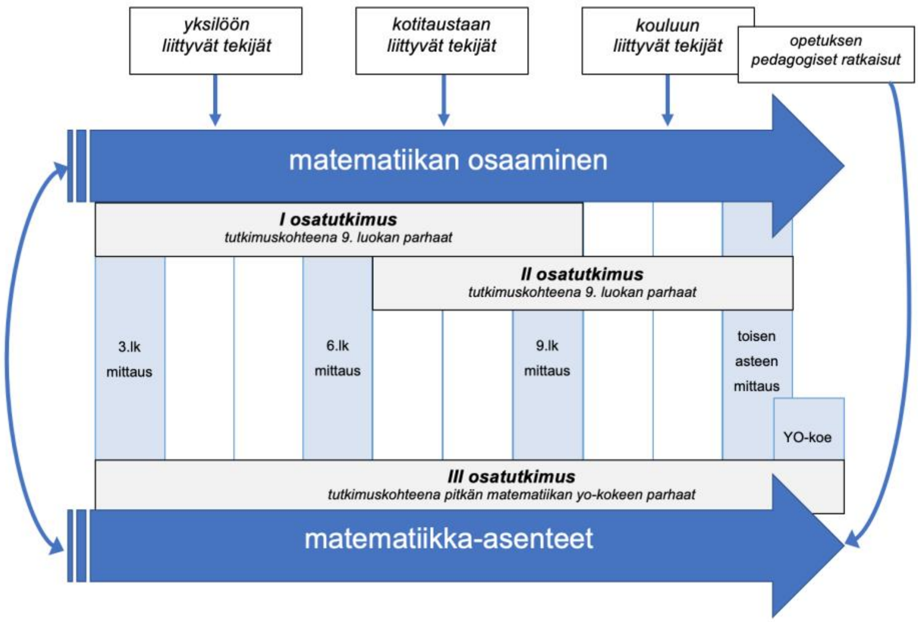
Vaikka sukupuolten väliset osaamiserot ovat Suomessa varsin pienet, naiset ovat aliedustettuja matemaattisluonnontieteellisillä aloilla (Pääkkönen, 2013). Matematiikkaan liittyykin vahvoja sukupuolittuneita stereotypioita, jotka määrittävät tyttöjen ja poikien käsityksiä itsestään matematiikan oppijoina jo varhain. Jo koulun alussa tytöt arvioivat olevansa poikia heikompia matematiikassa, vaikka tyttöjen ja poikien matematiikan taidoissa ei olekaan eroa (Cvencek ym., 2011; Lindberg ym., 2013). Oppermannin ja kanssatutkijoiden (2021) mukaan sukupuoli vaikuttaa matematiikan opiskeluintoon jo peruskoulun toisella ja kolmannella luokalla. Tutkimuksessa (Oppermann ym., 2021) löydettiin kolme erilaista ryhmää, joissa poikia oli eniten ryhmissä, joissa matematiikka koettiin innostavana ja tyttöjä enemmän ryhmässä, jossa oppilaiden suhtautuminen opiskeluun oli korkea kaikissa oppiaineissa. Tyttöjen käsitykset omasta matematiikan osaamisesta heikkenevät poikia voimakkaammin kouluvuosien edetessä ja sukupuolten välinen ero kasvaa (Lindberg ym., 2013; Tuohilampi & Hannula, 2013; Metsämuuronen, 2017). Sukupuolierot matematiikkaan liittyvässä itseluottamuksessa olivat Suomessa suuremmat kuin monessa muussa PISA-tutkimusmaassa (Williams & Williams, 2010). Tyttöjen heikompi minäkuva näkyy esimerkiksi lukion matematiikan pitkän ja lyhyen oppimäärän valinnassa sekä teknisille aloille hakeutumisessa (Hannula & Holm, 2018). Lisäksi lukiokoulutuksen päättövaiheessa naisopiskelijat kokevat miesopiskelijoita enemmän negatiivisia tunnetiloja kaikissa taitotasoryhmissä (Metsämuuronen & Tuohilampi, 2017). Tyttöjen kiinnostuksen matematiikkaan ja luonnontieteisiin on nähty viime vuosina kuitenkin lisääntyvän. Korkeakoulujen matematiikkaa painottava todistusvalinta on saanut enemmän naisia suorittamaan pitkän matematiikan ylioppilaskokeen. Vuonna 2020 jo yli puolet pitkän matematiikan hyväksytysti suorittaneista opiskelijoista oli naisia (Ylioppilastutkintolautakunta, 2021).

Sukupuolierojen syitä on selvitetty eri tutkimuksissa erilaisilla yksilöön ja sosiaaliseen ympäristöön liittyvillä tekijöillä. Yksilötason tekijöistä on havaittu muun muassa eroja eri strategioiden käyttämisessä matemaattisten ongelmien ratkaisemisessa. Pojat käyttävät tyttöjä enemmän abstrakteja ratkaisumenetelmiä ja avaruudellista päättelykykyä, kun taas tytöt tukeutuvat poikia enemmän verbaalisiin taitoihin ja konkreettisiin ratkaisumenetelmiin (Geary ym., 2000; Fennema ym., 1998). Yksilötason tekijöistä eroja on löydetty myös sosiaalisten taitojen yhteydestä yleiseen opintomenestykseen. Tyttöjen parempaa opintomenestystä on selitetty poikia paremmilla sosiaalisilla taidoilla (DiPrete & Jennings, 2012). Lisäksi tytöt ovat poikia motivoituneempia koulunkäyntiä kohtaan, he osaavat arvioida omia kykyjään poikia todenmukaisemmin (Dweck ym., 1980; Niemivirta, 2004), ja heillä on poikia paremmat itsesäätelytaidot (Duckworth & Seligman, 2006). Myös hyötyuskomusten on esitetty olevan yhteydessä yleisesti parempaan koulumenestykseen, kun oppilaat tekevät sinnikkäämmin koulutehtäviä ja suoriutuvat niistä paremmin uskoen tehtävien hyödyllisyyteen (Vansteenkiste ym., 2004). Poikien on nähty painottavan tyttöjä enemmän matematiikan hyödyllisyyttä (Fennema, 1989).

Sosiaaliseen ympäristöön liittyvistä tekijöistä erityisesti vanhempien ja opettajien sukupuolistereotyyppisen ajattelun on havaittu olevan yhteydessä oppilaiden minäkuvaan ja sen myötä opintomenestykseen (mm. Jacobs, 1991; Retelsdorf ym, 2015; Tiedemann, 2002). Myös opetukseen liittyvät ratkaisut voivat tukea enemmän tyttöjen tai enemmän poikien oppimista. Esimerkiksi Kleinin ja kanssatutkijoiden (2010) tutkimuksessa matematiikan opetus sisälsi enemmän verbaalista ohjausta, joka tukee paremmin tyttöjen oppimista. Lisäksi opettajan uskomukset tytöistä ja pojista matematiikan osaajina ohjaavat opettajan toimintatapoja ohjata ja kannustaa tyttöjä ja poikia matematiikan opiskeluun. Soron (2002) väitöstutkimuksen mukaan opettajat näkevät yleisesti tyttöjen menestymisen perustuvan ahkeruuteen ja poikien lahjakkuuteen.

4 Tutkimuksen tavoitteet

Väitöstutkimuksen tavoitteena on muodostaa kokonaiskuva matematiikassa parhaiten menestyneiden oppilaiden matemaattisesta osaamisesta ja asenteiden kehittymisestä perusopetuksen kolmannelta vuosiluokalta toisen asteen loppuun. Osatutkimusten kautta muodostuu kokonaiskuva oppilaiden kymmenvuotisen opiskelun ajalta (kuvio 1). *Yksilöön* (mm. aikaisempi osaaminen, sukupuoli), oppilaan *kotitaustaan* (mm. vanhempien koulutus, kodin tuki opiskelulle) ja *kouluun liittyvät tekijät* (mm. opetuksen pedagogiset ratkaisut) linkittyvät kaikkiin osatutkimuksiin ja toimivat käsitteellisinä taustamuuttujina etsittäessä osaamista ja asenteita selittäviä tekijöitä.



Kuvio 1. Tutkimusasetelma matematiikan parhaiden osaajien osaamisen ja asenteiden kehittymisestä kolmannelta luokalta toisen asteen loppuun

Tutkimus keskittyy viiden (I–V) keskeisen pääkysymyksen ympärille. Pääkysymyksiin vastataan kolmessa osatutkimuksessa seuraavasti.

I Millaiset oppilaat kehittyvät matematiikan parhaiksi osaajiksi ja miten heidän opintopolkunsa muodostuu?

Ensimmäiseen pääkysymykseen vastataan ensimmäisessä ja toisessa osatutkimuksessa. Ensimmäisessä osatutkimuksessa selvitetään, miten yhdeksännen vuosiluokan matematiikan kokeessa parhaiten menestyneiden oppilaiden matematiikan osaaminen kehittyy perusopetuksen aikana. Lisäksi ensimmäisessä osatutkimuksessa selvitetään, millaiset kolmannen vuosiluokan matematiikassa heikosti menestyvät oppilaat kehittyvät yhdeksännen vuosiluokan parhaiksi osaajiksi.

Kolmannessa osatutkimuksessa etsitään vastauksia siihen, miten yhdeksännen vuosiluokan matematiikan parhaiden osaajien matematiikan osaamistaso muuttuu toisen asteen opintojen aikana, ja miten suuri osa yhdeksännen vuosiluokan matematiikan parhaista osaajista on parhaita osaajia myös toisen asteen lopussa.

II Millainen yhteys matematiikan parhaiden osaajien asenteilla on heidän osaamiseensa ja miten heidän asenteensa kehittyvät?

Toiseen pääkysymykseen etsitään vastauksia kaikissa kolmessa osatutkimuksessa. Ensimmäisessä ja toisessa osatutkimuksessa etsitään selittäviä tekijöitä osaamisessa tapahtuneille muutoksille, ja asennetekijät ovat tässä yhtenä osa-alueena. Ensimmäisessä osatutkimuksessa tutkitaan, millainen merkitys asennetekijöillä on matematiikan parhaiden osaajien tunnistamiseen muusta tutkimusjoukosta. Toisessa osatutkimuksessa selvitetään, miten yhdeksännen vuosiluokan matematiikan parhaiden osaajien matematiikan osaamistaso muuttuu toisen asteen opintojen aikana, ja miten asennetekijät selittävät joidenkin oppilaiden putoamista parhaiden osaajien joukosta toisen asteen lopussa.

Kolmas osatutkimus keskittyy tarkemmin asennetekijöihin. Osatutkimuksessa selvitetään, miten matematiikan parhaiden osaajien matematiikkaan liittyvät asenteet muuttuvat perusopetuksesta lukion loppuun, ja millaisia eroja tässä kehityksessä on tyttöjen ja poikien välillä.

III Miten kotitausta selittää matematiikan parhaiden osaajien osaamisen kehittymistä ja koulutusvalintoja?

Kolmanteen pääkysymykseen etsitään vastauksia ensimmäisessä ja toisessa osatutkimuksessa. Ensimmäisessä ja toisessa osatutkimuksessa etsitään selittäviä tekijöitä osaamisessa tapahtuneille muutoksille, ja kotitaustaan liittyvät tekijät ovat tässä yhtenä osa-alueena. Ensimmäisessä osatutkimuksessa selvitetään, millainen merkitys kotitaustaan liittyvillä tekijöillä on matematiikan parhaiden osaajien tunnistamiseen muusta tutkimusjoukosta. Toisessa osatutkimuksessa selvitetään, millainen merkitys kotitaustaan liittyvillä tekijöillä on yhdeksännen vuosiluokan matematiikan parhaiden osaajien toisen asteen koulutusvalintaan. Lisäksi tutkitaan, miten heidän matematiikan osaamistasonsa muuttuu toisen asteen opintojen aikana, ja miten kotitaustaan liittyvät tekijät selittävät joidenkin oppilaiden putoamista parhaiden osaajien joukosta toisen asteen lopussa.

IV Millainen yhteys opetuksen pedagogisilla ratkaisuilla on matematiikan parhaiden osaajien osaamiseen ja asenteisiin?

Neljänteen pääkysymykseen etsitään vastauksia kaikissa kolmessa osatutkimuksessa. Ensimmäisessä ja toisessa osatutkimuksessa etsitään selittäviä tekijöitä osaamisessa tapahtuneille muutoksille, ja opetuksen pedagogiset ratkaisut ovat tässä yhtenä osa-alueena. Ensimmäisessä osatutkimuksessa selvitetään, millainen merkitys opetuksen pedagogisilla ratkaisuilla on matematiikan parhaiden osaajien tunnistamiseen muusta tutkimusjoukosta. Toisessa osatutkimuksessa selvitetään, miten yhdeksännen vuosiluokan matematiikan parhaiden osaajien osaamistaso muuttuu toisen asteen opintojen aikana, ja millainen merkitys opetuksen pedagogisilla ratkaisuilla on joidenkin oppilaiden putoamiseen parhaiden osaajien joukosta toisen asteen lopussa.

Kolmannessa osatutkimuksessa tutkitaan, millaiset yläkoulun ja lukion aikaiset pedagogiset ratkaisut ovat yhteydessä matematiikassa parhaiten osaajien asenteissa tapahtuneisiin muutoksiin yhdeksänneltä luokalta lukion loppuun.

V Miten matematiikassa parhaiten menestyneet pojat ja tytöt eroavat toisistaan?

Viidenteen pääkysymykseen etsitään vastauksia ensimmäisessä ja kolmannessa osatutkimuksessa. Ensimmäisessä osatutkimuksessa etsitään selittäviä tekijöitä osaamisessa tapahtuneille muutoksille, ja sukupuoli on tässä yhtenä osa-alueena. Ensimmäisessä osatutkimuksessa selvitetään, miten parhaat osaajat eroavat muusta tutkimusjoukosta sukupuolen suhteen.

Kolmannessa osatutkimuksessa tutkitaan, miten matematiikan parhaiden osaajien matematiikkaan liittyvät asenteet muuttuvat perusopetuksesta lukion loppuun, ja millaisia eroja tässä kehityksessä on tyttöjen ja poikien välillä.

5 Tutkimusasetelma ja menetelmälliset ratkaisut

Tutkimuksen tavoitteena on arvioida oppilaiden matemaattisen potentiaalin toteutumista osana suomalaista koulutusjärjestelmää. Tutkimus perustuu laajaan Opetushallituksen ja Karvin keräämään pitkittäisaineistoon, jonka avulla pyritään selvittämään samaan ikäluokkaan kuuluvien oppilaiden matematiikan osaamisen ja asenteiden kehittymistä ja kehitykseen yhteydessä olevia tekijöitä. Aineiston avulla pystytään kontrolloimaan monien muuttujien vaikutuksia. Tällainen oppimistuloksiin keskittyvä *survey*-tutkimus on laajuudessaan kansallisesti ainutlaatuinen. Tässä luvussa käsitellään ensin tutkimuksessa käytettävää tutkimusaineistoa ja siihen liittyviä mittareita. Toiseksi perehdytään tutkimuskohteeseen ja sen piirteisiin. Kolmanneksi käsitellään tutkimuksen keskeisimmät analyysimenetelmät.

5.1 Tutkimusaineisto

Opetuksen järjestäjän velvollisuus on perusopetuslain 21§:n mukaan arvioida antamaansa koulutusta ja sen vaikuttavuutta sekä osallistua ulkopuoliseen toimintansa arviointiin (Perusopetuslaki 628/1998). Vuodesta 1998 eräänä ulkopuolisen arvioinnin muotoina ovat olleet säännölliset oppimistulosarvioinnit. Kansallinen oppimistulosarviointi perustuu summatiiviseen oppimistulosten arviointijärjestelmään, jossa arvioinnin kohteena on koulutuksen aikana kertyneen osaamisen arviointi. Arviointitiedon avulla on tarkoitus kehittää koulutusjärjestelmää, opetussuunnitelmien ja tutkintojen perusteita sekä koulutuksen tasa-arvoa (Jakku-Sihvonen, 2013).

Tutkimuksessa käytettävä aineisto on Opetushallituksen ja Kansallisen koulutuksen arviointikeskuksen (Karvin) oppimistulosarvioinneista koottu pitkittäisaineisto, jossa samaan ikäluokkaan kuuluvien oppilaiden matematiikan osaamisesta, asenteista ja taustatekijöistä on kerätty tietoa vuosien 2005–2015 aikana oppilaiden ollessa kolmannella, kuudennella ja yhdeksännellä vuosiluokalla sekä toisen asteen päättyessä. Aineisto on kansallisesti edustava ja siinä on huomioitu muun muassa maantieteellinen jakauma. Aineistoa täydentää oppilaiden arvosanatiedot suoritetusta matematiikan ylioppilaskokeesta.

Matematiikan kansallisten oppimistulosarviointien perusteena ovat opetussuunnitelmien tai tutkintojen perusteissa asetetut opetuksen tavoitteet, sisältöalueet ja kriteerit (tässä tutkimuksessa Opetushallitus, 2003; 2004; 2009). Oppimistulosten arviointia varten tietoa kerätään opiskelijoilta, opettajilta ja rehtoreilta. Opiskelijoille laaditaan arviointikokeet, joiden yhteydessä esitetään myös opiskeluasenteisiin liittyviä kysymyksiä. Opettajilta kerätään opetukseen ja opetussuunnitelmiin liittyviä tietoja ja rehtoreilta tietoja opetusjärjestelyistä.

Jotta eri vuosien kokeiden ja eri koeversioiden tuloksia voidaan vertailla, kokeiden pistemäärät on vertaistettu eli saatettu yhteismitallisiksi. Tämä on tehty Karvin toimesta ennen tutkimusaineiston käyttöönottoa. Vertaistamisessa on käytetty osiovasteteoriaan (*Item Response Theory*) perustuvaa IRT-mallinnusta (Rasch, 1960; Lord & Novick, 1968). IRT-mallinnuksessa oppilaan osaamisen taso ja tehtävän vaikeustaso saatetaan vastaamaan toisiaan. Eri koeversioissa olevien osioiden vaikeustasoa voidaan arvioida linkkitehtävien avulla. Linkkitehtävät ovat eri koeversioissa olevia keskenään identtisiä tehtäviä, joiden avulla selvitetään, kuinka paljon osaamista tarvitaan kunkin pistemäärän saavuttamiseen koko kokeessa ja osamittareissa. Tässä tutkimusaineistossa vertaistamiseen on valittu perustasoksi yhdeksännen vuosiluokan koe ja opiskelijoiden suoritusta verrataan keskitasoisesti menestyneen oppilaan suoritukseen (ks. tarkemmin mm. Metsämuuronen, 2017, 213–214).

5.1.1 Matematiikan osaaminen

Tutkimuksessa matematiikan osaamista kartoitettiin pääsääntöisesti kansallisten matematiikan kokeiden mukaan, mutta kolmannessa osatutkimuksessa osaamisen määrittämiseen käytettiin tietoa oppilaiden menestymisestä matematiikan pitkän oppimäärään ylioppilaskokeessa. On esitettävä muutama huomio kansallisten kokeiden ja pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden eroista osaamista ja sen muutosta mitatessa.

Matematiikan kansallisten kokeiden sisältöalueet on valittu perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (Opetushallitus, 2004), lukion opetussuunnitelman perusteiden (Opetushallitus, 2003) ja ammatillisen koulutuksen tutkintoperusteiden (mm. Opetushallitus, 2009) mukaisesti. Kansallisten kokeiden tehtävät, arvosteluperusteet ja pisteytysohjeet laaditaan yleisesti asiantuntijaryhmissä. Lisäksi tehtäväsarjojen laadun arvioinnissa käytetään asiantuntijoita ja esitestausta. Tehtäväsarjoissa on vaikeustasoltaan helppoja, keskivaikeita ja vaikeita osioita. Tehtävät on luokiteltu sisältöalueen, vaikeustason ja vaadittavan osaamisen syvyyden suhteen eri luokkiin (Jakku-Sihvonen, 2013; Metsämuuronen, 2009). Taulukossa 1 esitetään matematiikan osa-alueita vastaavien osioiden määrät, maksimipistemäärät ja reliabiliteetit tutkimuksessa käytettyjen eri vuosiluokkien kokeissa.

Taulukko 1. Matematiikan osa-alueet eri vuosiluokkien kokeissa

	Luokka-aste	Osioiden määrä	Maksimi-pistemäärä	Reliabiliteetti (α)
Kokonaisosaaminen	3.lk	38	44	0,86
	6. lk	39	52	0,85
	9. lk	68[1]	84[1]	0,94
	lukio	28	52	0,87
	ammatillinen	30	46	0,84
Luvut, laskutoimitukset ja algebra	3. lk	22	24	0,81
	6. lk	21	28	0,78
	9. lk	36	40	0,88
	lukio	3	3	0,27
	ammatillinen	3	3	0,26
Geometria	3. lk	10	14	0,67
	6. lk	10	14	0,66
	9. lk	16	22	0,83
	lukio	7	14	0,73
	ammatillinen	7	14	0,65
Tietojen käsittely, tilastot ja todennäköisyys	3. lk	6	6	0,55
	6. lk	8	10	0,47
	9. lk	7	9	0,61
	lukio	2	2	0,34
	ammatillinen	5	5	0,56
Algebra	lukio	6	8	0,71
	ammatillinen	6	8	0,71
Funktiot	lukio	11	31	0,82
	ammatillinen	12	22	0,66

[1] Sisältää viisi Funktiot-osa-alueen laskua

Tässä tutkimuksessa reliabiliteetin mittana käytettiin *Cronbachin alfaa*. Se on kasvatustieteessä paljon käytetty reliabiliteetin mitta, jonka käyttöä on myös kritisoitu (mm. Sijtsma, 2009; McNeish, 2018). *Cronbachin alfa* antaa aliarvion todellisesta reliabiliteetista. Myös osioiden määrä vaikuttaa helposti *Cronbachin alfan* arvoon. Tässä tutkimuksessa osioiden määrät vaihtelivat paljon, mutta reliabiliteettiarvot olivat riittävän korkeita luotettavien johtopäätösten tekemiseen.

Kansallisella kokeella voidaan arvioida erinomaisesti opiskelijoiden osaamisessa tapahtuneita muutoksia pitkällä aikavälillä. Pitkän matematiikan ylioppilaskokeen tehtävät sen sijaan perustuvat lukion pitkän oppimäärän mukaisiin kursseihin (Opetushallitus, 2003; 2015) ja niiden tavoitteisiin ja sisältöalueisiin. Ylioppilaskoe antaa erinomaisen arvion lukion päättövaiheen osaamisesta. Ylioppilaskokeessa menestymistä käytetään matematiikan parhaiden osaajien määrittämiseen lukion lopussa, mutta osaamisen muutosta tarkastellaan kansallisissa kokeissa menestymisen mukaan.

5.1.2 Matematiikka-asenteet

Asenteiden kartoittaminen on ollut osana kansallista oppimistulosarviointia vuodesta 1998 alkaen, ja nykyisin käytössä oleva mittari on ollut käytössä vuodesta 2001 lähtien (Metsämuuronen, 2009, s. 20). Asenteiden kartoittamisessa käytetään lyhennettyä ja kansallisiin tarpeisiin muokattua versiota Fenneman ja Shermanin (1976) matematiikka-asennemittarista. Lyhennetyssä asennemittarissa on kolme osa-aluetta: *matematiikasta pitäminen*, *käsitys itsestä matematiikan osaajana* ja *kokemus matematiikan hyödyllisyydestä;* joista kutakin mitataan viidellä väittämällä.

Kolmannella vuosiluokalla käytettiin lyhennettyä versiota standardimittarista ja sanamuotoja muokattiin konkreettisimmiksi. Mukana ei ollut oppiaineen hyödylliseksi kokemisen osa-aluetta, koska kysymykset liittyivät pitkälti jatko-opintoihin ja työelämään. Lisäksi asteikko oli neliportainen muuten viisiportaisena käytetyn Likert-asteikon sijaan. Kuudennella ja yhdeksännellä luokalla sekä toisella asteella käytetyt mittarit olivat keskenään samanlaiset, mutta yhdeksännellä vuosiluokalla ja toisella asteella kerättiin tietoa myös oppilaiden matematiikka-ahdistuksesta. Lisäksi toisella asteella kartoitettiin oppilaiden tunnetiloja (innostus, kiinnostus, tylsyys, pitäminen, turhautuminen, viha, ahdistus, avuttomuus, tyytyväisyys) matematiikan opiskelussa. Tunnetiloista on muodostettu kaksi faktoria: positiiviset ja negatiiviset tunnetilat (Metsämuuronen & Tuohilampi, 2017). Tässä väitöstutkimuksessa keskitytään matematiikan minäkäsityksen, matematiikasta pitämisen ja matematiikan hyödyllisyyden kokemisen osa-alueisiin, koska näistä kolmesta löytyy tietoa kaikilta tutkituilta kouluasteilta.

Asenteita on kartoitettu eri väittämin taulukossa 2 näkyvien osa-alueiden mukaan. Taulukossa esitetään myös osa-alueita vastaavien osioiden määrät, maksimipistemäärät ja reliabiliteetit eri vuosiluokkien mukaan.

Taulukko 2. Asennemittareiden osa-alueet eri vuosiluokilla

	Luokka-aste	Osioiden määrä	Maksimi-pistemäärä	Reliabiliteetti (α)
Kokonaisasenne[1]	3.lk	8	32	0,86
	6. lk	10	50	0,88
	9. lk	10	50	0,91
	lukio	15	60	0,92
	ammatillinen	15	60	0,91
Käsitys itsestä matematiikan osaajana (OSAA)	3. lk	4	16	0,79
	6. lk	5	25	0,82
	9. lk	5	25	0,88
	lukio	5	20	0,86
	ammatillinen	5	20	0,87
Matematiikasta pitäminen (PITÄÄ)	3. lk	4	16	0,88
	6. lk	5	25	0,89
	9. lk	5	25	0,90
	lukio	5	20	0,92
	ammatillinen	5	20	0,91
Matematiikan koettu hyödyllisyys (HYÖTY)	9. lk	5	25	0,53
	lukio	5	20	0,83
	ammatillinen	5	20	0,83

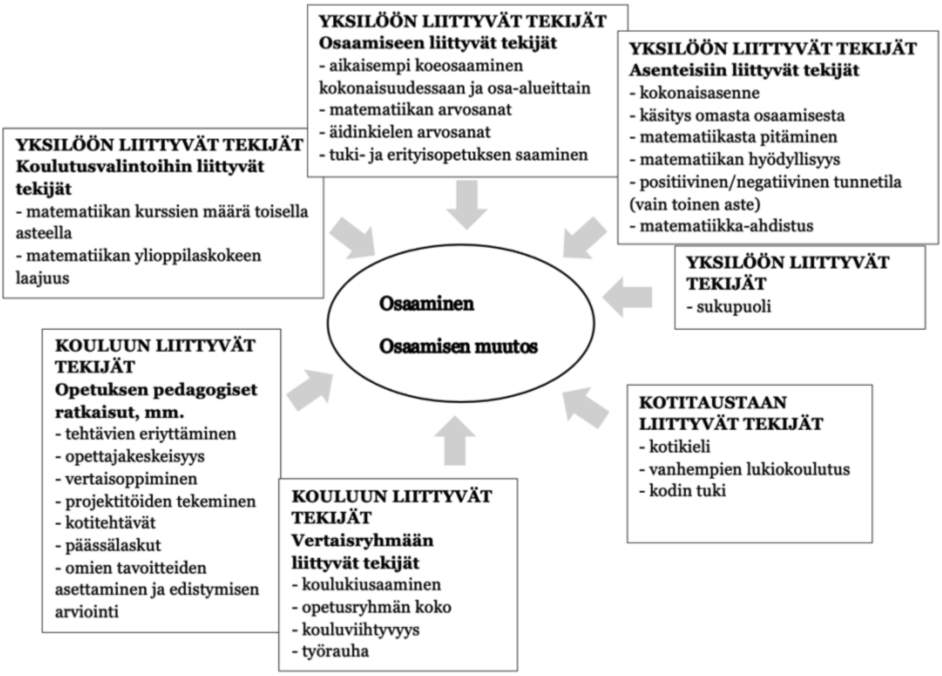
[1] Kokonaisasenteessa 3. ja 6. luokalla mukana OSAA- ja PITÄÄ-osa-alueet

Reliabiliteettiarvot kertovat, että asennemittarit mittaavat luotettavasti haluttua ilmiötä. Vaikka osassa mittareista osioita on vain neljä tai viisi, *Cronbachin alfan* arvo on korkea. Tämä lisää arviota mittareiden luotettavuudesta.

5.1.3 Taustamuuttujat

Matemaattista osaamista ja asenteita ja niissä tapahtuneita muutoksia pyrittiin selittämään erilaisilla taustatekijöillä, joita on selvitetty oppilaille suunnattujen kyselyiden avulla osaamista kartoittavien kokeiden yhteydessä. Kuviossa 2 on malli, jossa esitetään taustamuuttujat, joiden yhteyttä osaamiseen ja osaamisen muutokseen selvitettiin tässä tutkimuksessa. Malli on luotu mukaillen Metsämuurosen (2009, s. 41) mallia, jossa oppimiseen, oppimistuloksiin ja oppimistulosten muutokseen vaikuttavia tekijöitä tarkastellaan kaikkiaan kahdeksasta eri näkökulmasta.

Mallissa ovat mukana yksilöön liittyvät tekijät, oppilaan kotitaustaan liittyvät tekijät ja kouluun liittyvät tekijät. Yksilöön liittyvät tekijät jakautuvat osaamiseen, asenteisiin ja koulutusvalintoihin liittyviin tekijöihin sekä sukupuoleen. Kotitaustaan liittyvät tekijät käsittävät kotikielen, vanhempien lukiokoulutuksen ja kodin antaman tuen matematiikan opiskeluun. Kouluun liittyviin tekijöihin kuuluvat opetuksen pedagogiset ratkaisut ja koulun vertaisryhmään liittyvät tekijät.



Kuvio 2. Taustamuuttujien käsitteellinen malli

Ensimmäisessä ja toisessa osatutkimuksessa osaamista ja sen muutosta selittäviä tekijöitä etsittiin edellä esitetyn mallin mukaan yksilöön, kouluun ja kotitaustaan liittyvien tekijöiden näkökulmasta. Kolmannessa osatutkimuksessa selvitettiin matematiikka-asenteisiin yhteydessä olevia tekijöitä, ja tarkastelu rajattiin koskemaan vain opetuksen pedagogisia ratkaisuja. Opetuksen pedagogisia ratkaisuihin liittyvät tiedot on kysytty opiskelijoilta yhdeksännellä vuosiluokalla ja toisen asteen lopussa. Opiskelijat ovat arvioineet pedagogisten ratkaisujen toistuvuuden toteutumista viisiportaisella Likert-asteikolla (1= *ei lainkaan*, 2= *harvoin*, 3= *joskus*, 4 = *usein*, 5= *lähes aina*). Opetukseen liittyvien tietojen kerääminen opiskelijoita ei ole kuitenkaan ongelmatonta. Tuloksia tarkasteltaessa tulee ottaa huomioon, että oppilaiden arviot ovat subjektiivisia.

Tutkimuksessa opetuksen pedagogisia ratkaisuja haluttiin ryhmitellä paremmin ymmärrettäviksi kokonaisuuksiksi. Yksittäisistä muuttujista muodostettiin eksploratiivisen faktorianalyysin avulla ryhmiä, jotta tunnistettaisiin yksittäisiä opetusmenetelmiä laajempia pedagogisia lähestymistapoja. Faktorianalyysi tehtiin tutkimusaineistolle, joka käsitti yhteensä 3896 opiskelijaa. Yhdeksännen luokan opetuksen pedagogisten ratkaisujen faktorianalyysi tehtiin 3455 opiskelijan vastausten perusteella ja toisen asteen lopun pedagogisten ratkaisujen faktorianalyysi 1934 opiskelijan vastausten perusteella. Kun analyysin avulla löydettiin sopivat faktorit, ne nimettiin ja niiden perusteella muodostettiin summamuuttujat, joita käytettiin myöhemmin tulosten analyyseissa. Tulosten analyyseissa käytettiin sekä näitä jäsennettyjä kokonaisuuksia että alkuperäisiä yksittäisiä muuttujia.

Yläkoulun 12 tekijää muodostivat kolme faktoria, jotka nimettiin seuraavasti: *Oppilaskeskeisyys*, *Monipuoliset opetusmenetelmät* ja *Opettajajohtoisuus*. Lukion 16 tekijästä muodostui neljä faktoria: *Matematiikan yhteys käytäntöön*, *Oppijoiden tarpeiden huomioiminen*, *Monipuoliset opetusmenetelmät* ja *Oppilaskeskeisyys*. Faktoreiden mukaan muodostettiin summamuuttujat, joiden reliabiliteetit näkyvät taulukoissa 3 ja 4.

Taulukko 3. Summamuuttujat yläkoulun opetuksen pedagogisista ratkaisuista ja niiden reliabiliteetit

	Muuttujien määrä	Reliabiliteetti (α)
1 Oppilaskeskeisyys	4	0,69
2 Monipuoliset opetusmenetelmät	5	0,63
3 Opettajajohtoisuus	3	0,47

Taulukko 4. Summamuuttujat lukion opetuksen pedagogisista ratkaisuista ja niiden reliabiliteetit

	Muuttujien määrä	Reliabiliteetti (α)
1 Matematiikan yhteys käytäntöön	2	0,73
2 Oppijoiden tarpeiden huomioiminen	6	0,65
3 Monipuoliset opetusmenetelmät	4	0,71
4 Oppilaskeskeisyys	4	0,67

Koska yläkoulun opettajajohtoisuuteen liittyvän summamuuttujan reliabiliteettiarvo jäi yleisesti hyväksyttävissä olevien raja-arvojen mukaan heikoksi (alle 0,60), jätettiin kyseinen summamuuttuja analyyseista pois ja tuloksia analysoitiin yksittäisten muuttujien osalta.

5.2 Tutkimuskohde

Tutkimus on pitkittäinen, jossa samaan ikäluokkaan kuuluvat oppilaat osallistuivat neljään mittauskertaan eri nivelvaiheissa: kolmannen vuosiluokan alussa, kuudennen vuosiluokan alussa, yhdeksännen vuosiluokan lopussa ja kolmantena vuonna toisen asteen koulutuksessa. Kyseessä on puolikokeellinen tutkimusasetelma, jossa tutkittavat henkilöt muodostavat itselleen henkilökohtaisen "kontrolliryhmän" (Metsämuuronen, 2010, s. 75). Kontrolliryhmällä tarkoitetaan tavallisessa koeasetelmatapauksessa ryhmää, johon tutkittavaa koeryhmää verrataan, kun koeryhmään kohdistetaan jokin interventio. Tässä tutkimuksessa interventiot olivat mittauskertojen välillä tapahtunutta perusopetuksen, ammatillisen koulutuksen ja lukion opetussuunnitelmien perusteiden (Opetushallitus, 2003; 2004; 2009) mukaista opetusta.

Pitkittäisaineistossa on puuttuvaa tietoa opiskelijoista, joilta ei ole saatu kerättyä tietoa kaikilta neljältä eri mittauskerralta. Ensimmäisessä osatutkimuksessa käytettiin aineistoa, jossa olivat mukana todelliset havainnot eri mittauskerroilta. Toisessa ja kolmannessa osatutkimuksessa käytettiin aineistoa, jossa puuttuvat havainnot oli mallitettu muiden mittaustulosten avulla Metsämuurosen toimesta (ks. tarkemmin osatutkimus II, s. 474–475).

Tutkimuksessa tarkastellaan matematiikassa parhaiten menestyneitä oppilaita. Osaamistaso määritettiin kansallisessa matematiikan kokeessa menestymisen mukaan ja kolmannessa osatutkimuksessa pitkän matematiikan ylioppilaskokeessa menestymisen mukaan. Tutkimuskohde rajattiin erilaisin kriteerein.

Ensimmäisessä ja toisessa osatutkimuksessa tutkimuskohteena olivat yhdeksännen vuosiluokan kansallisessa matematiikan kokeessa parhaiten menestyneet oppilaat. Ensimmäisessä osatutkimuksessa oppilaiden osaamisen erot luokiteltiin jakamalla oppilaiden kokeesta saadut kokonaispistemäärät desiileihin, joista tarkasteltiin kahta ylintä desiiliä. Oppilaat, jotka sijoittuivat saamansa kokonaispistemäärän mukaan ylimpään kymmenykseen, nimettiin parhaiksi osaajiksi (n = 256) ja oppilaat, jotka sijoittuivat toiseksi ylimpään kymmenykseen, nimettiin hyviksi osaajiksi (n = 226). Desiilijakoa käytettiin myös kolmannen ja kuudennen vuosiluokan koeosaamisen jaottelussa.

Toisessa osatutkimuksessa parhaat osaajat määritettiin yhdeksännen vuosiluokan kokeessa menestymisen perusteella niin, että heidän saamansa kokonaispistemäärä oli vähintään 1,5 hajontayksikköä kokeen keskiarvoa korkeampi. Vertailuryhmänä oli hyvät osaajat (kokonaispistemäärä 1,0–1,5 hajontayksikköä kokeen keskiarvoa parempi) ja keskitason osaajat (kokonaispistemäärä enintään 1,0 hajontayksikköä kokeen keskiarvoa parempi). Heikommat osaajat jätettiin tässä tutkimuksessa pois tarkastelusta. Parhaita osaajia oli yhteensä 292. Osaamisen kehittymistä verrattiin menestymiseen toisen asteen lopussa pidetyssä kokeessa, jossa osaamisen taso rajattiin myös hajontayksiköiden mukaan. Tutkimusaineisto oli ensimmäisen osatutkimuksen aineistoa laajempi, koska tässä tutkimuksessa käytettiin uudelleen mallitettua aineistoa, jossa pitkittäisaineistosta puuttuvia havaintoja oli täydennetty (ks. tarkemmin osatutkimus II).

Kolmannessa osatutkimuksessa matematiikan parhaat osaajat määritettiin pitkän matematiikan ylioppilaskokeessa menestymisen mukaan. Parhaita osaajia (n = 146) olivat ne oppilaat, jotka saivat ylioppilaskokeesta arvosanan eximia cum laude approbatur (jatkossa eximia) tai laudatur. Vertailuryhmänä oli hyvät osaajat, jotka saivat pitkän matematiikan ylioppilaskokeesta muun arvosanan kuin eximia tai laudatur.

Taulukossa 5 esitetään matematiikan parhaiden osaajien koepisteet yhdeksännen vuosiluokan kokeessa.

Taulukko 5. Matematiikan parhaiden osaajien koepisteet 9. luokan kokeessa

koepisteet 9. luokalla	I osatutkimuksen parhaat osaajat (n = 256)	II osatutkimuksen parhaat osaajat (n = 292)	III osatutkimuksen parhaat osaajat (n = 146)
keskiarvo	712,5	722,7	689,3
minimi	654,2	673,3	538,3
maksimi	1029,5	1029,5	1029,5
keskihajonta	55,3	49,8	79,1

Parhaiden osaajien menestyminen yhdeksännen vuosiluokan kokeessa oli samankaltaista, vaikka parhaat osaajat määriteltiin eri kriteerein osatutkimuksissa. Ensimmäisen ja toisen osatutkimuksen parhaat osaajat määritettiin samassa kansallisessa kokeessa menestymisen mukaan, joten kyseessä oli lähes sama tutkimusjoukko. Kolmannessa osatutkimuksessa tutkimusjoukko rajattiin ylioppilaskoemenestymisen mukaan, minkä vuoksi tämän tutkimusjoukon yhdeksännen luokan osaamisessa oli enemmän vaihtelua kuin ensimmäisen ja toisen osatutkimuksen tutkimusjoukon osaamisessa yhdeksännellä luokalla.

5.3 Aineiston analyysi

Tulosten kuvailussa käytettiin perustunnuslukuja kuten frekvenssi- ja prosenttijakaumia sekä keskiarvo- ja keskihajontalukuja. Ryhmien välisiä eroja analysoitiin parametrisin testein kuten t-testin ja varianssianalyysin eri muodoilla. T-testiä käytettiin kahden keskiarvon vertailuun ja varianssianalyysin käytössä vertailua laajennettiin useamman keskiarvon vertailuun, jossa käytettiin yhtä tai useampaa ryhmittelevää muuttujaa selitettävälle muuttujalle. Efektikoon mittana käytettiin Cohenin *f*- ja *d*-arvoja, jotka ilmaisevat keskiarvojen välisen suuruuden (efektikoko on suuri, kun Cohenin $f > 0{,}40$ ja kun Cohenin $d > 0{,}80$) (Cohen, 1988; Metsämuuronen, 2011).

Osaamista ja asenteita sekä niiden muutosta selittäviä tekijöitä analysoitiin monimuuttujamenetelmin. Analysoinnissa käytettiin regressioanalyysin eri muotoja ja päätöspuuanalyysia (*decision tree analysis*, DTA). DTA-analyysi ja regressioanalyysi täydensivät toisiaan. DTA-analyysin avulla löydettiin tekijöitä, joita regressioanalyysi ei löytänyt, sillä DTA-analyysi tunnistaa myös muuttujien väliset epälineaariset ja -hierarkkiset yhteydet.

Regressioanalyysin avulla oli tarkoitus löytää monien muuttujien joukosta ne muuttujat, jotka yhdessä selittävät parhaiten osaamisen ja asenteiden vaihtelua. Analyyseissa käytettiin askeltavaa menettelyä (*stepwise selection*), jota Tabachnick ja Fidell (2007) kutsuvat tilastolliseksi menettelyksi, koska selittävät muuttujat valitaan malliin pelkästään tilastollisin perustein. Askeltavassa menettelyssä yhtälöön lisätään riippumattomia muuttujia yksi kerrallaan ja niitä voidaan myös poistaa, kun uusia paremmin selittäviä muuttujia tulee tilalle. Lopulliseen malliin jää selitysvoimaltaan tilastollisesti merkitsevät muuttujat (Pedhazur, 1982; Metsämuuronen, 2003; Tabachnick & Fidell, 2007). Regressioanalyysin oletuksena on, että selittävät muuttujat eivät korreloi liian voimakkaasti toistensa kanssa. Selittävien muuttujien välistä voimakasta korrelointia, multikollineaarisuutta tutkittiin analyysin tekemisen yhteydessä. Regressioanalyysin tulokset esitettiin niin, että muuttujat ovat analyysin esittämässä järjestyksessä. Mallissa ensimmäisenä esitetty muuttuja selittää selitettävän muuttujan vaihtelua parhaiten ja seuraavat muuttujat lisäävät mallin selitysastetta. (Metsämuuronen, 2009.)

Ensimmäisessä osatutkimuksessa osaamisen tasoa selittävien tekijöiden etsimisessä käytettiin logistista regressioanalyysia, ja toisessa ja kolmannessa osatutkimuksessa lineaarista regressioanalyysia. Kun lineaarisessa regressioanalyysissa selitettävä muuttuja on jatkuva, logistisessa regressioanalyysissa selitettävä muuttuja on binäärinen eli se voi saada vain kaksi arvoa. Ensimmäisessä osatutkimuksessa oppilaan kuuluminen parhaiden osaajien joukkoon 9. luokan koesuoriutumisen perusteella oli selitettävänä binäärisenä muuttujana. Dikotomisointi suoritettiin siten, että selitettävä muuttuja sai arvon 1, jos oppilaan kokonaispistemäärä 9. luokan kokeessa oli vähintään 654 pistettä (koko otoksessa (N = 2051) $\bar{x} = 529{,}2$; *min.* = 131,0; *max.* = 1029,5; *sd* = 106,9). Muulloin muuttuja sai arvon 0.

Logistisessa regressioanalyysissa regressiokertoimet β ja vakio A sekä niiden keskivirheet (*s.e.*) estimoidaan suurimman uskottavuuden (*maximum-likehood*) menetelmällä, jossa pyritään löytämään mahdollisimman uskottavasti havaittujen arvojen lähellä olevat arvot. Mallissa olevien tekijöiden merkitsevyydet testataan Waldin χ^2 -testisuureella, joka noudattaa χ^2 -jakaumaa nollahypoteesin jäädessä voimaan. Waldin testisuureen käyttämiseen liittyy kuitenkin riski muuttujien hylkäämisestä. Jos regressiokerroin saa suuren arvon, keskivirhe kasvaa suureksi. Keskivirheen kasvaessa Waldin testisuure jää pieneksi, mikä johtaa helposti muuttujan hylkäämiseen. (Metsämuuronen, 2011, s. 746–747; Hosmer ym., 2013.) Tässä tutkimuksessa riski muuttujien hylkäämisestä jäi kuitenkin pieneksi.

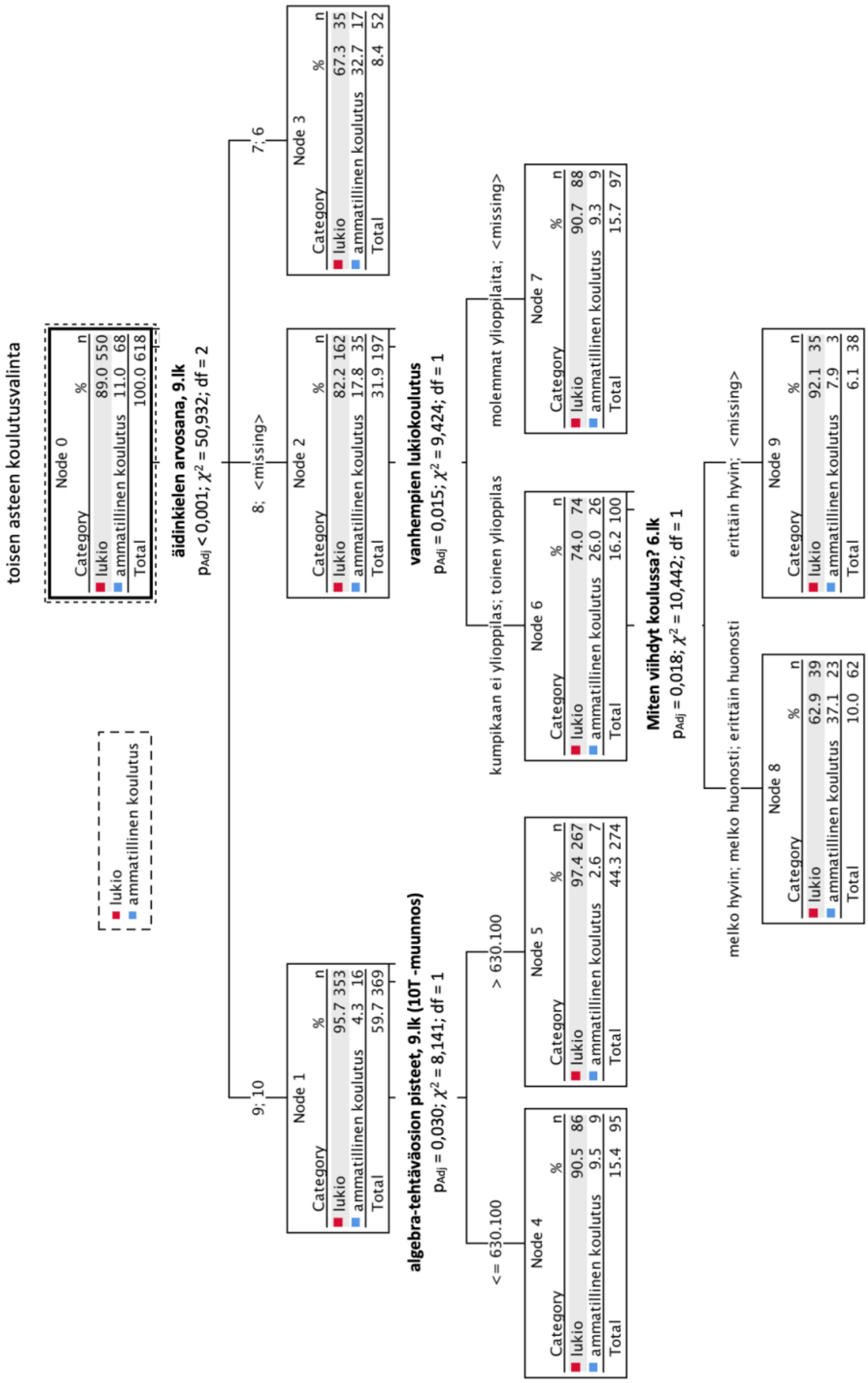
Lineaarisissa regressiomalleissa β-kerrointen hyvyyttä testattiin t-testillä, jossa regressiokerroin jaetaan sen varianssilla. Jos selittävän muuttujan β-kertoimen t-arvo on noin 2 tai korkeampi ja t-arvoa vastaava merkitsevyys on 0,05 tai pienempi, muuttuja osoittautuu luotettavaksi selittäjäksi.

Lineaaristen regressioanalyysien tuottamien mallien vaikuttavuutta kuvattiin selitysosuudella R^2, joka mittaa mallin kykyä kuvata selitettävän muuttujan vaihtelua (esim. Nummenmaa ym., 2016, s. 251). Yhden selitettävän muuttujan tapauksessa kyseessä on korrelaatiokertoimen neliö, jossa käytetään Pearsonin tulomomenttikerrointa *r*. Kun kyseessä on useamman muuttujan regressiomalli, on kyseessä yhteiskorrelaatiokertoimen neliö R^2, joka kertoo, kuinka paljon muuttujien joukko kokonaisuutena selittää selitettävän muuttujan vaihtelua. Selitysosuutta voidaan korjata muuttujien määrän ja otoskoon tuomalla lisäinformaatiolla. Tällöin puhutaan korjatusta selitysosuudesta R^2_{Adj} (*adjusted* R^2) (Metsämuuronen, 2003, s. 577; 2011, s. 720).

Logistisessa regressiomallissa ei ole vastaavaa yhteiskorrelaatiokerrointa kuten lineaarisessa regressiomallissa. Tässä tutkimuksessa hyvyyden mittana käytettiin Nagelkerkenin mittaa, jolla voidaan arvioida mallin selittämän varianssin osuutta (Metsämuuronen, 2011, s. 752). Nagelkerkenin mitta on kehitetty Coxin ja Snellin testisuureesta niin, että sen teoreettinen maksimiarvo on 1 (Nagelkerke, 1991). On syytä huomioida, että Nagelkerkenin R^2 -arvo ei anna täsmällistä mallin selitysastetta kuten yhteiskorrelaatiokertoimen neliö lineaarisessa regressiomallissa, mutta riittävän luotettavan arvion siitä, minkä osuuden havaitusta malli pystyy selittämään.

Regressioanalyysien tulokset koottiin taulukoihin, joissa esitetään malliin vaikuttavien muuttujien regressiokertoimet (β), keskivirheet, vetosuhteet (*Exp(B))* ja tilastolliset merkitsevyysarvot (*p*-arvo). Väitöstutkimukseen sisältyvissä artikkeleissa vetosuhteesta on käytetty myös käsitettä riskitaso. Vetosuhteen (*odds ratio*), *Exp(B)* arvo on kerroin, joka osoittaa riskitason kuulua tutkittavaan ryhmään selittävän muuttujan kasvaessa yhden yksikön verran. Vetosuhteen avulla kuvataan, kuinka etäällä kaksi todennäköisyyttä tai suhteellista osuutta ovat, mutta vetosuhde ei kerro suoraan todennäköisyyksien välistä suhdetta (Rita, 2004, s. 208). Regressiokerroin (β) kertoo, kuinka voimakas yhteys selittävällä muuttujalla on selitettävään muuttujaan. Positiivinen kerroin merkitsee kasvavaa riskiä ja negatiivinen arvo riskin vähenemistä (Jokivuori & Hietala, 2007, s. 70–72).

Toinen keskeinen tutkimusmenetelmä osaamista ja asenteita selittävien tekijöiden analysoinnissa oli päätöspuuanalyysi (*Decision Tree -analyysi*, DTA vrt. AnswerTree -analyysi ATA (mm. Biggs ym., 1991; Breiman ym., 1984; Kass, 1980; Loh & Shih, 1997)). Menetelmä löytää oleelliset muuttujat, jotka erottelevat ja luokittelevat selitettävää muuttujaa uskottavasti. Päätöksentekopuussa (ks. kuvio 3) kuvataan tilastollisesti merkitseviksi selittäjiksi analysoitujen muuttujien kriittiset raja-arvot, jotka toimivat selitettävän muuttujan luokittelun perustana. Raja-arvot myös määrittävät, kuinka moni havainto luokittuu kuhunkin ryhmään. Kukin haarautumiskohta puussa on nimeltään noodi (*Node*). Ensimmäinen noodi on juurinoodi (*Root node*). Analyysilla on tarkoitus etsiä jakokohta (*Split*), jonka suhteen havaintojen ryhmittely on uskottavinta ja luotettavinta. (Metsämuuronen, 2011, s. 886–887.) Päätöspuukaavion tulokset esitetään tutkimuksessa pääsääntöisesti taulukkoon koottuina.



Kuvio 3. Esimerkkikuvio päätöspuukaaviosta (II Osatutkimus: kuvio 3. Toisen asteen koulutusvalintaa selittävien tekijöiden kokonaismalli DTA-analyysilla)

Analyysissa käytettiin *khiin neliö* -testiin perustuvaa CHAID-algoritmia (*Chi-squared Automatic Interaction Detector*), joka etsii tilastollisesti samankaltaisia arvoja selittävän ja selitettävän muuttujan välillä. CHAID-algoritmissa on viisi vaihetta. Ensimmäisessä vaiheessa algoritmi vertaa pareittain toisiinsa jokaisen selittävän muuttujan ryhmää ja selitettävää muuttujaa. Algoritmi etsii ja luokittelee ryhmiä, joiden välinen ero on mahdollisimman suuri vertaamalla testien *p*-arvoja. Jos selittävä muuttuja on jatkuva, *p*-arvoja etsitään *F*-testin avulla. Jos muuttuja on järjestysasteikollinen, *p*-arvoa etsitään *likelihood-ratio* -testillä. Mikäli muuttuja on luokitteluasteikollinen, *p*-arvoa etsitään *khiin neliö* -testillä tai *likelihood-ratio* -testillä. Toisessa vaiheessa algoritmi vertailee *p*-arvon etukäteen määritettävään kriittiseen arvoon ($p = 0{,}05$) sitä suurinta *p*-arvoa, joka saatiin selittävän muuttujan eri kategorioita vertailtaessa. Jos saatu *p*-arvo on suurempi kuin kriittinen *p*-arvo, kategoriat voidaan yhdistää yhdeksi ryhmäksi ja algoritmi aloitetaan alusta uuden kategoriaparin kanssa. Jos saatu *p*-arvo on pienempi kuin kriittinen arvo, yhdistämistä ei tehdä vaan siirrytään kolmanteen vaiheeseen. Kolmannessa vaiheessa eri muuttujaryhmistä saadut *p*-arvot korjataan *Bonferroni*-korjauksella. Neljännessä vaiheessa valitaan se selitettävä muuttuja, jonka korjattu *p*-arvo oli pienin eli tilastollisesti merkitsevä ja verrataan tätä kriittiseen *p*-arvoon. Jos saatu *p*-arvo on pienempi tai yhtä suuri kuin kriittinen arvo, jaetaan noodi tämän selittävän muuttujan tilastollisesti merkitseviksi erottelijoiksi osoittautuneisiin luokkiin. Jos saatu *p*-arvo on suurempi kuin kriittinen *p*-arvo, jakoa ei suoriteta, vaan ollaan viimeisessä noodissa. Viidennessä vaiheessa analyysia jatketaan uudesta tilanteesta, jossa paras erottelija ja sen jakokohta on löydetty. Analyysia jatketaan uusilla muuttujilla, kunnes vastaan tulee jokin lopettamissäännöistä: 1) kaikilla noodissa olevilla havainnoilla selittävän muuttujan arvot ovat samoja, 2) kaikilla noodissa olevilla havainnoilla on sama selitettävän muuttujan arvo, 3) etukäteen määrätty puumallin laajuus on saavutettu, 4) juurinoodissa mukana olevien havaintojen etukäteen määrätty vähimmäismäärä saavutetaan tai 5) jakokohta noodissa ei tuota noodiin niin paljon havaintoja kuin etukäteen on määrätty. (Kass, 1980; Metsämuuronen, 2003, s. 738–739; 2013, s. 56–57; 2011, s. 888–890.)

Päätöspuuanalyysi on tehokas menetelmä erilaisten luokitteluiden ja ennustemallien tekemiseen. Menetelmä perustuu ei-parametriselle lähestymistavalle ilman jakaumaoletusta. Menetelmällä ei ole varsinaisia tilastollisia rajoituksia, mutta tulosten tulkinnassa tulee olla kriittinen. Päätöspuuanalyysin yksi ominaispiirre on sen hierarkkisuus. Vaikka selittävistä muuttujista kaksi olisi lähes yhtä merkitseviä, analyysi näyttää vain merkitsevämmän eikä toinen merkitsevä muuttuja tule välttämättä näkyviin. Lisäksi pieni muutos datassa voi johtaa suureen muutokseen päätöspuun rakenteessa (Song & Lu, 2015; Loh, 2014). Tässä tutkimuksessa analyysit on tehty pienissä osissa osa-alueittain näiden riskien välttämiseksi.

6 Osatutkimukset

Väitöstutkimus koostuu kolmesta osatutkimuksesta, joiden näkökulmat, tutkimuskysymykset, aineisto ja keskeiset tutkimusmenetelmät esitetään taulukossa 6. Osatutkimukset yhdessä muodostavat kokonaiskuvan matematiikassa parhaiten menestyneiden oppilaiden osaamisen kehittymisestä perusopetuksesta toisen asteen loppuun ja siitä, miten erilaiset tekijät selittävät osaamisen kehittymistä, koulutusvalintoja ja matematiikkaan liittyvien asenteiden kehittymistä.

Taulukko 6. Osatutkimusten näkökulmat, tutkimuskysymykset, aineisto ja keskeiset analyysimenetelmät

	Tutkimuskysymykset	**Aineisto**	**Keskeiset analyysimenetelmät**
Osatutkimus I: Matematiikan parhaaksi osaajaksi kehittyminen perusopetuksen aikana	1. Miten yhdeksännen vuosiluokan matematiikan kokeessa parhaiten menestyneiden oppilaiden matematiikan osaaminen kehittyy perusopetuksen aikana? 2. Mitkä tekijät erottavat matematiikan parhaat osaajat muusta tutkimusjoukosta? 3. Millaiset kolmannen vuosiluokan matematiikassa heikosti menestyvät oppilaat kehittyvät yhdeksännen vuosiluokan parhaiksi osaajiksi?	N = 2051 (koko aineisto), n = 256 (parhaat osaajat 9. luokan kansallisen kokeen mukaan)	tilastolliset perustunnusluvut t-testi, varianssianalyysi, logistinen regressioanalyysi tilastolliset perustunnusluvut
Osatutkimus II: Matematiikan parhaiden osaajien siirtyminen toiselle asteelle: koulutusvalinnat ja matematiikan osaamisen kehittyminen	1. Mitkä tekijät selittävät yhdeksännen vuosiluokan matematiikan parhaiden osaajien hakeutumista ammatilliseen koulutukseen ja lukioon? 2. Miten yhdeksännen vuosiluokan matematiikan parhaiden osaajien matematiikan osaamistaso muuttuu toisen asteen opintojen aikana?	N = 3896 (koko aineisto), n = 292 (parhaat osaajat 9. luokan kansallisen kokeen mukaan)	päätöspuuanalyysi (DTA) ja lineaarinen regressioanalyysi

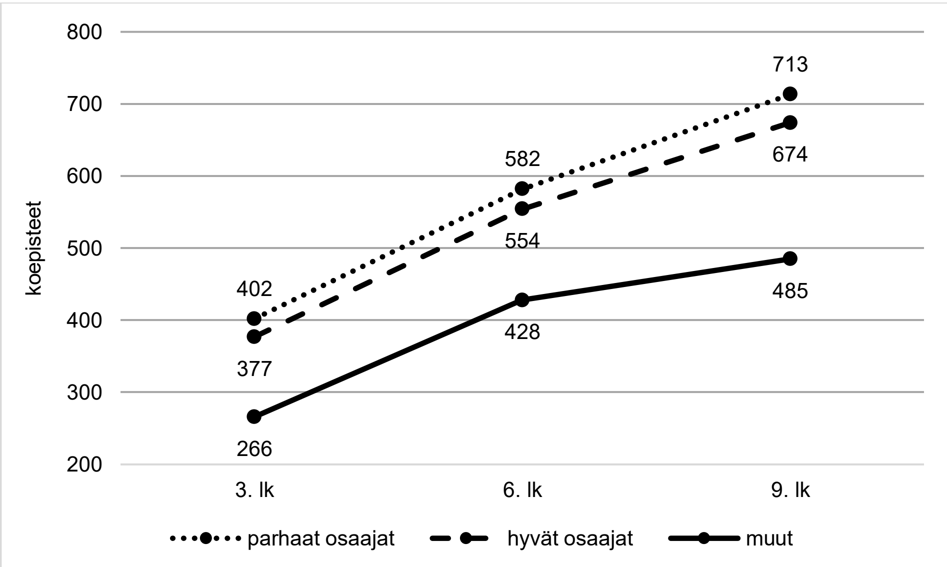
	a) Miten suuri osa yhdeksännen vuosiluokan matematiikan parhaista osaajista on parhaita osaajia myös toisen asteen lopussa? b) Mitkä tekijät selittävät joidenkin yhdeksännen vuosiluokan parhaiden osaajien putoamista parhaiden osaajien joukosta toisen asteen lopussa?		tilastolliset perustunnusluvut päätöspuuanalyysi ja lineaarinen regressioanalyysi
Osatutkimus III: Matematiikan parhaat osaajat lukion lopussa ja heidän matematiikka-asenteissaan tapahtuneet muutokset	1. Miten matematiikan parhaiden osaajien matematiikkaan liittyvät asenteet muuttuvat perusopetuksesta lukion loppuun ja millaisia eroja tässä kehityksessä on tyttöjen ja poikien välillä? 2. Millaiset opiskelijoiden raportoimat yläkoulun ja lukion aikaiset pedagogiset ratkaisut ovat yhteydessä matematiikassa parhaiten menestyneiden tyttöjen ja poikien asenteissa tapahtuneisiin muutoksiin yhdeksänneltä luokalta lukion loppuun?	N = 3896 (koko aineisto), n = 146 (parhaat osaajat pitkän matematiikan ylioppilaskokeen mukaan)	tilastolliset perustunnusluvut, t-testi eksploratiivinen faktorianalyysi, päätöspuuanalyysi (DTA) ja lineaarinen regressioanalyysi

6.1 Osatutkimus I: Matematiikan parhaaksi osaajaksi kehittyminen perusopetuksen aikana

Ensimmäisessä osatutkimuksessa tarkasteltiin matematiikassa parhaiten menestyneiden oppilaiden osaamisen kehittymistä kolmannelta vuosiluokalta yhdeksännelle. Tavoitteena oli selvittää, miten yhdeksännen vuosiluokan kansallisessa matematiikan kokeessa parhaiten menestyneiden oppilaiden (n = 256) osaaminen kehittyi perusopetuksen aikana, ja millaiset oppilaat kehittyivät matematiikan parhaiksi osaajiksi yhdeksännelle vuosiluokalle tultaessa.

Tulosten mukaan matematiikan parhaiden osaajien lähtötaso kolmannen vuosiluokan alussa oli vaihtelevaa. Osa parhaista osaajista oli kuitenkin erotettavissa muista jo kolmannella vuosiluokalla ja ero selkeni kuudennella vuosiluokalla. Noin 40 prosenttia yhdeksännen vuosiluokan parhaista osaajista kuului parhaiten menestyneiden joukkoon jo kolmannen luokan kokeessa ja lähes 65 prosenttia kuudennen luokan kokeessa. Tutkimuksessa havaittiin, että tutkimusjoukosta löytyi myös oppilaita (5,7 % koko otoksesta; 20,1 % tutkimuskohteesta), joiden osaaminen kasvoi keskitasoa tai sitä heikommasta osaamistasosta parhaiden osaajien tasolle.

Parhaiden osaajien osaaminen kasvoi kolmannelta vuosiluokalta yhdeksännelle keskimäärin 310 pistettä (+77,2 %) (ks. kuvio 4). Poikien osaaminen kasvoi tyttöjen osaamista hieman enemmän. Muulla tutkimusjoukolla osaaminen kasvoi keskimäärin 219 pistettä (+82,3 %). Parhaiden osaajien lähtötaso oli keskimäärin 136 pistettä muun tutkimusjoukon lähtötasoa korkeampi. Kun parhaiden osaajien osaaminen kasvoi tasaisesti koko perusopetuksen ajan, muulla tutkimusjoukolla osaaminen kasvoi eniten (60,9 %) kolmannen ja kuudennen vuosiluokan välillä ja hidastui yläkoulun aikana.



Kuvio 4. Matematiikan osaamisen muutokset eri osaajaryhmissä perusopetuksen aikana

Tutkimuksessa selvitettiin, mikä erottaa parhaat osaajat muista. Muun muassa logistisen regressioanalyysin avulla etsittiin tekijöitä, jotka selittävät kuuluuko oppilas parhaiden osaajien joukkoon yhdeksännellä vuosiluokalla. Selittäviä tekijöitä etsittiin demografisista tekijöistä, aikaisemmasta osaamisesta, asenteista ja opetuksellisista tekijöistä.

Oppilaan aikaisempi osaaminen oli merkittävä tekijä sille, kuuluiko oppilas yhdeksännellä luokalla parhaiden osaajien joukkoon. Regressiomallin mukaan menestyminen kolmannen ja kuudennen vuosiluokan kansallisessa kokeessa selitti noin 56 prosenttia siitä, kuuluiko oppilas yhdeksännellä luokalla parhaisiin osaajiin. Muuttujien vetosuhteet mallissa olivat kuitenkin melko alhaiset eli koeosaamisen perusteella oli vaikea ennustaa mahdollisuutta kuulua parhaiden osaajien joukkoon yhdeksännellä vuosiluokalla. Matematiikan osaaminen opettajien antamien sanallisten arvioiden ja arvosanatietojen mukaan selitti noin 33 prosenttia osaamisen vaihtelusta yhdeksännellä luokalla. Tämän mallin mukaan oppilaalla, jonka matematiikan osaaminen oli kolmannella luokalla kuvauksen tasoista tai sitä parempaa, oli 7-kertainen mahdollisuus kuulua parhaiden osaajien joukkoon yhdeksännellä luokalla, ja kuudennen vuosiluokan sanallisen arvion perusteella vastaava mahdollisuus oli 8-kertainen. Jos oppilaan matematiikan arvosana oli kuudennella luokalla 8, 9 tai 10, mahdollisuus kuulua parhaiden osaajien joukkoon yhdeksännellä luokalla oli 13-kertainen. Myös äidinkielen osaaminen 3. ja 6. luokan arvosanatietojen mukaan selitti noin 13 prosenttia osaamisen vaihtelusta yhdeksännellä luokalla.

Asenteiden selitysosuus yhdeksännen vuosiluokan osaamisen vaihtelusta oli noin 25 prosenttia. Asenteista ainut muuttuja, joka vaikutti malliin tilastollisesti merkitsevästi sekä kolmannen että kuudennen vuosiluokan osalta, oli minäkäsitys. Erityisesti kuudennen vuosiluokan muuttujan vaikutus malliin oli suuri ja mahdollisuus kuulua parhaiden osaajien joukkoon oli lähes 5-kertainen.

Vanhempien koulutustasolla havaittiin olevan tilastollisesti erittäin merkitsevä yhteys (χ^2 (4) = 81,51; p = < 0,001; *Cramerin V* = 0,15) siihen, mihin osaamisryhmään oppilas kuului yhdeksännellä vuosiluokalla. Noin puolella (47,3 %) parhaista osaajista molemmat vanhemmat olivat ylioppilaita ja kolmanneksella (33,3 %) toinen vanhemmista oli ylioppilas.

Opetuksellisten tekijöiden osuudet osaajaryhmää ennustettaessa olivat pienet. Joustava ryhmittely ja omien tavoitteiden asettaminen ja edistymisen arviointi eivät tulosten mukaan edesauttaneet kuulumista parhaiden osaajien ryhmään.

Tutkimuksessa havaittiin, että myös keskitasoa heikommasta lähtötasosta oli mahdollista kehittyä perusopetuksen aikana erinomaiselle osaamistasolle. Suurin osaamisen kasvu tapahtui kolmannelta luokalta kuudennelle, kun heikommat osaajat ylsivät samalle tasolle muiden parhaiden osaajien kanssa. Tutkimuksessa ei löydetty selkeitä selittäviä tekijöitä ilmiölle. Kyseessä saattoi olla satunnainen epäonnistuminen kokeessa, oppilaiden heikko lukutaito alkuopetuksen päättyessä, opettajan vaihtuminen tai kielitaustan yhteys osaamiseen. Keskitasoa heikompien osaajien joukossa oli suhteellisesti enemmän ruotsinkielisiä oppilaita.

Tutkimuksessa havaittiin tasa-arvoisen koulutuksen järjestämiseen liittyviä haasteita, kun sukupuolen, vanhempien koulutuksen ja alueellisen sijainnin osalta oli havaittavissa eriytymistä. Poikien osuus parhaiden osaajien joukossa oli suurempi, vanhempien toisen asteen koulutustasolla oli tilastollisesti merkitsevä yhteys oppilaan osaamistasoon ja alueellisesti

Itä- ja Etelä-Suomen lääneissä oli kansallisen kokeen osallistujamäärään nähden enemmän parhaiten menestyneitä oppilaita.

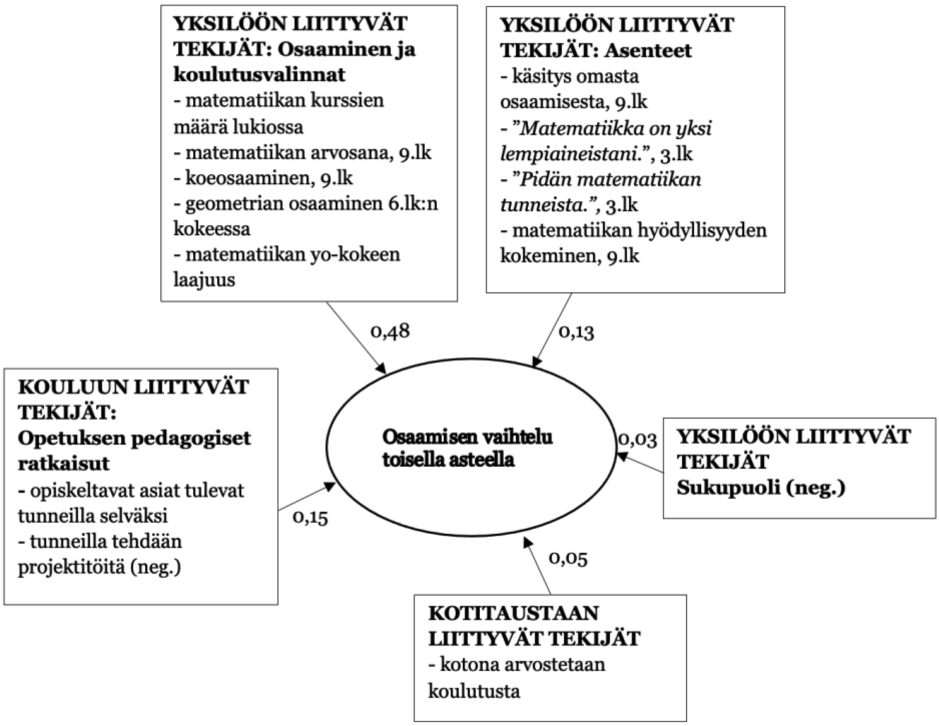
6.2 Osatutkimus II: Matematiikan parhaiden osaajien siirtyminen toiselle asteelle: koulutusvalinnat ja matematiikan osaamisen kehittyminen

Toisessa osatutkimuksessa selvitettiin yksilöön, kouluun ja kotitaustaan liittyvien tekijöiden yhteyttä yhdeksännen vuosiluokan matematiikan parhaiden osaajien (n = 292) toisen asteen koulutusvalintaan ja matematiikan osaamisen kehittymiseen toisen asteen opintojen aikana. Tutkimuksessa oli tavoitteena selvittää, kuinka suuri osa yhdeksännen vuosiluokan osaajista oli parhaita osaajia myös toisen asteen lopussa, ja mitkä tekijät selittivät joidenkin parhaiden osaajien putoamista parhaiden osaajien joukosta toisen asteen lopussa.

Tutkimuksessa käytettiin käsitteellistä muuttujamallia, jossa selittäviä tekijöitä etsittiin yksilöön, kouluun ja kotitaustaan liittyvistä tekijöistä (ks. kuvio 2). Tulosten analysoinnissa hyödynnettiin DTA-analyysia ja lineaarista askeltavaa regressioanalyysia. Selittäviä tekijöitä etsittiin käsitteellisen muuttujamallin osioiden mukaisesti ja koottiin sitten osamalleista löytyneistä tekijöistä kokonaismalli.

Tulosten mukaan selvä enemmistö parhaista osaajista (91,4 %) ja hyvistä osaajista (86,9 %) opiskeli lukiossa. Ammatillisessa koulutuksessa opiskeli noin joka kymmenes (parhaista osaajista 8,6 % ja hyvistä osaajista 12,9 %). Lukioon hakeutumista selitti osaamiseen liittyvistä tekijöistä parhaiten äidinkielen arvosana yhdeksännellä luokalla ja vanhempien suorittama ylioppilastutkinto.

Yhdeksännellä luokalla matematiikassa parhaiten menestyneiden oppilaiden osaamistaso vaihteli toisen asteen lopussa. Noin 60 prosenttia yhdeksännen luokan parhaista osaajista menestyi matematiikassa parhaiten myös toisen asteen lopussa. Noin neljänneksellä osaamistaso laski hyvien osaajien tasolle ja noin 15 prosentilla keskitason osaajien tasolle. Osaamisessa tapahtunutta muutosta erottelivat parhaiten osaamiseen ja koulutusvalintoihin liittyvät tekijät (ks. kuvio 5 ja taulukko 7). Ensisijaisesti osaamisen muutosta selitti *matematiikan kurssimäärä lukiossa*. Myös *yhdeksännen luokan matematiikan arvosana* ja *kansallisessa kokeessa menestyminen yhdeksännellä luokalla* ennustivat osaamisessa tapahtunutta muutosta. Toiseksi osaamisen vaihtelua selittivät *opetuksen pedagogiset ratkaisut*, joista malliin jäivät toisen asteen opetusta koskevat muuttujat. Tulosten mukaan osaaminen pysyi vakaampana, jos opiskelevat asiat tulivat selviksi ja projektitöiden tekeminen näytti heikentävän osaamista toisella asteella. Kolmanneksi eniten osaamisen vaihtelua selittivät *asenteet*, joista ensisijaisena selittäjänä oli oppilaan käsitys omasta osaamisesta yhdeksännellä luokalla. *Kotitaustaan liittyvät tekijät* ja *sukupuoli* selittivät osaamisen vaihtelua vähiten. Toisaalta se, kuinka paljon oppilaan kotona arvostetaan koulutusta, nousi yhdeksi selittäväksi tekijäksi osaamisen muutokselle toisen asteen aikana.



Kuvio 5. Matematiikan osaamisen vaihtelua toisella asteella selittävät osamallit ja niiden selitysosuudet (R^2)

Taulukko 7. Matematiikan osaamisen vaihtelua toisella asteella selittävän kokonaismallin tulokset

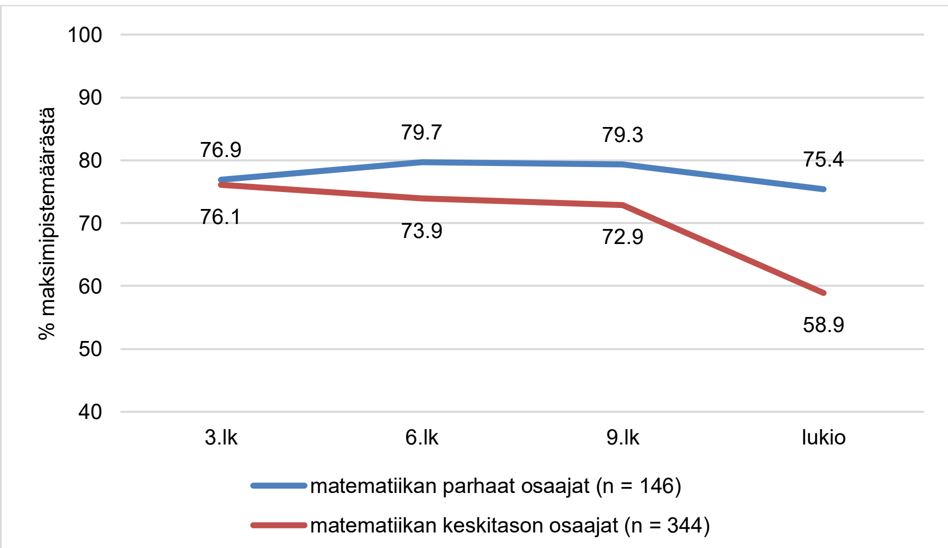
	Parhaiden osaajien osaamisen vaihtelu toisella asteella			
	B	***SE***	***beta***	***p***
Kokonaismalli				
Vakio	258,606	68,437		< 0,001
Matematiikan yo-kokeen laajuus	25,024	9,095	0,233	< 0,01
Kokonaisosaaminen, 9.lk	0,280	0,084	0,221	0,001
Opiskeltavat asiat tulevat tunneilla selväksi, toinen aste	20,033	5,556	0,230	< 0,001
Kotona arvostetaan koulutusta	17,009	5,388	0,197	< 0,01
Geometrian osaaminen, 6. lk	29,226	11,872	0,160	< 0,05
Matematiikan kurssien määrä, toinen aste	6,189	2,601	0,202	< 0,05

6.3 Osatutkimus III: Matematiikan parhaat osaajat lukion lopussa ja heidän matematiikka-asenteissaan tapahtuneet muutokset

Kolmannessa osatutkimuksessa tarkasteltiin pitkän matematiikan ylioppilaskokeessa parhaiten menestyneitä lukiolaisia (n = 146) ja selvitettiin, miten heidän matematiikkaan liittyvät asenteet muuttuivat yhdeksänneltä luokalta lukion loppuun, ja millaiset opetuksen pedagogiset ratkaisut selittivät asenteissa tapahtuneita muutoksia. Tarkastelun kohteena olivat myös tyttöjen ja poikien väliset asenne-erot. Parhaat osaajat saivat pitkän matematiikan ylioppilaskokeesta arvosanan eximia tai laudatur. Vertailuryhmäksi tutkimuksessa nimettiin keskitason osaajat (n = 344), jotka saivat pitkän matematiikan ylioppilaskokeesta muun arvosanan kuin eximia tai laudatur.

Asenteita on kartoitettu aineiston keruuvaiheessa kolmesta näkökulmasta: matematiikasta pitäminen, käsitys itsestä matematiikan osaajana ja matematiikan hyödyllisyyden kokeminen. Näitä kolmea asenneosa-aluetta tarkasteltiin kokonaisasennetta kuvaavina summamuuttujina luokka-asteittain ja eri vuosiluokkien asenteita vertailtaessa käytettiin prosenttiosuuksia käytettyjen asteikkojen maksimipistemääristä.

Tulosten mukaan parhaiden osaajien asenteet olivat yleisesti keskitason osaajien asenteita positiivisempia lukion lopussa (kuvio 6).



Kuvio 6. Matematiikan parhaiden ja keskitason osaajien kokonaisasenteessa tapahtuneet muutokset perusopetuksesta lukion loppuun

Kokonaisuudessaan asenteiden lähtötaso oli kolmannen luokan alussa molemmissa ryhmissä lähes sama, mutta parhaiden osaajien asennoituminen pysyi melko vakaana koko perusopetuksen ja lukion ajan samalla, kun keskitason osaajilla se alkoi heikentyä jo perusopetuksen aikana ja oli lähes 20 prosenttiyksikköä parhaiden osaajien asennoitumista heikompi lukion lopussa.

Tulosten mukaan matematiikassa parhaiten menestyneiden tyttöjen asennekehityksessä ilmeni yleisestä asenteiden kehityssuunnasta poikkeavia kehityssuuntia. Matematiikassa parhaiten menestyneillä tytöillä käsitys itsestä matematiikan osaajana oli lähtötasoltaan selvästi poikien käsitystä heikommalla tasolla, mutta ero kaventui erityisesti yläkoulun aikana eikä sukupuolten välistä eroa ollut juurikaan havaittavissa lukion lopussa. Keskitason osaajilla ero poikiin pysyi yhtä suurena lukion loppuun asti.

Matematiikasta pitämisen näkökulmasta matematiikassa parhaiten menestyneet tytöt pitivät matematiikasta poikia enemmän kuudennen luokan jälkeen ja pitäminen kasvoi voimakkaasti yläkoulun ja lukion aikana eivätkä pojat saavuttaneet tyttöjen tasoa lukion lopussa.

Parhaiden tyttöjen kokemus matematiikan hyödyllisyydestä pysyi koko ajan muita korkeammalla tasolla, mutta heikentyi samansuuntaisesti parhaiden poikien kanssa. Parhaiden tyttöjen ja poikien asenteessa ei ollut juurikaan eroa. Osaamiseltaan keskitasoa olevien tyttöjen kokemus matematiikan hyödyllisyydestä oli muita hieman alhaisempi kuudennella luokalla, mutta kehittyi yläkoulun aikana osaamiseltaan parhaiden tyttöjen tasolle. Lukion aikana koettu hyödyllisyys kuitenkin heikkeni lähes 20 prosenttiyksikköä.

Tutkimuksessa selvitettiin opetuksen pedagogisten ratkaisujen yhteyttä asenteissa tapahtuneisiin muutoksiin. Opetuksen pedagogisia ratkaisuja on kysytty aineiston keruuvaiheessa opiskelijoilta yhdeksännellä vuosiluokalla ja toisen asteen lopussa. Tässä tutkimuksessa haluttiin tunnistaa yksittäisiä opetusmenetelmiä laajempia pedagogisia lähestymistapoja. Oppilaille tehdyn kyselyn opetuksen pedagogiset ratkaisut ryhmiteltiin eksploratiivisen faktorianalyysin avulla erikseen yläkoulun ja lukion osalta. Tulosten analysoinnissa käytettiin päätöspuuanalyysia (DTA) ja lineaarista regressioanalyysia, jotka täydensivät toisiaan, kun regressioanalyysin avulla löydettiin muuttujien välisiä lineaarisia yhteyksiä ja DTA-analyysi tunnisti myös muuttujien välisiä epälineaarisia yhteyksiä.

Opetuksen pedagogisten ratkaisujen vaikutukset asenteissa tapahtuneisiin muutoksiin olivat erilaisia yläkoulun ja lukion osalta. Yläkoulun aikaiset tekijät vaikuttivat oppilaiden asenteisiin yhdeksännen luokan lopussa eli muutoksen lähtötasoon, ja lukion aikaiset tekijät oppilaiden asenteisiin lukion lopussa. Lisäksi tyttöjen ja poikien asenteiden kehittymistä selittivät erilaiset opetuksen pedagogiset ratkaisut. Molemmilla yleisesti myönteisiä asenteita vahvistivat oppilaskeskeisyyteen, yhteistoiminnallisuuteen ja oppijoiden tarpeiden huomioimiseen liittyvät tekijät.

Matematiikassa parhaiten menestyneiden tyttöjen minäkäsitystä vahvisti parhaiten palautteen saaminen omasta osaamisesta ja kotitehtävien säännöllinen tekeminen. Pojilla minäkäsitystä vahvisti se, että he pääsivät selittämään muille, miten ovat tehtävänsä ratkaisseet ja se, että opiskeltiin pareittain tai ryhmissä. Parhaiden tyttöjen ja poikien matematiikasta pitämisessä tapahtuneita muutoksia selittivät osin samat tekijät. Tytöillä monipuolisten opetusmenetelmien toistuvuus heikensi matematiikasta pitämistä, mutta yläkoulussa se oli yhteydessä parempaan asennoitumisen lähtötasoon. Lukiossa erityisesti projektitöiden tekeminen näytti heikentäneen tyttöjen matematiikasta pitämistä eikä pojillakaan monipuolisten opetusmenetelmien käyttö lukiossa näyttänyt lisäävän matematiikasta pitämistä. Pojilla matematiikasta pitämistä lisäsi oppilaskeskeisyyteen ja oppijoiden tarpeiden huomioimiseen liittyvät tekijät. Matematiikan hyödyllisyyden kokemusta lisäsivät tytöillä opetuksen pedagogiset ratkaisut, joissa matematiikan taitoja sovellettiin arkielämän tilanteisiin ja ratkaisut, joissa käytettiin yhteistoiminnallisuutta. Pojilla ei löytynyt selkeitä selittäviä tekijöitä.

6.4 Koonti osatutkimusten keskeisistä tuloksista

Kolmen osatutkimuksen keskeiset tulokset esitetään taulukossa 8. Seuraavassa luvussa osatutkimusten tuloksia pohditaan kokonaisuutena suhteessa tutkimuksen viiteen pääkysymykseen.

Taulukko 8. Osatutkimusten keskeiset tulokset

	Keskeiset tulokset
Osatutkimus I: Matematiikan parhaaksi osaajaksi kehittyminen perusopetuksen aikana	- 9. luokan parhaat osaajat olivat erotettavissa osin muusta tutkimusjoukosta 3. luokalla ja ero oli selkeä 6. luokalla. - Oppilaan aikaisempi osaaminen, käsitys omasta osaamisesta ja vanhempien koulutustaso selittivät parempaa osaamista. - Parhaaksi osaajaksi voi yltää myös keskitasoa heikommasta lähtötasosta.
Osatutkimus II: Matematiikan parhaiden osaajien siirtyminen toiselle asteelle: koulutusvalinnat ja matematiikan osaamisen kehittyminen	- Suurin osa 9. luokan parhaista osaajista oli parhaita osaajia myös toisen asteen päättyessä. - Parhaiden osaajien lukioon hakeutumista selitti parhaiten menestyminen äidinkielessä 9. luokalla ja vanhempien ylioppilastutkinto. - Parhaiden osaajien osaamisen taso heikkeni toisella asteella todennäköisemmin, jos oppilas ei mennyt lukioon tai suorittanut lukiossa vähintään 11 matematiikan kurssia. - Myönteiset asenteet matematiikkaa kohtaan ja vahva matematiikan osaamisen pohja perusopetuksessa luovat edellytyksiä menestyä erinomaisesti toisella asteella.
Osatutkimus III: Matematiikan parhaat osaajat lukion lopussa ja heidän matematiikka-asenteissaan tapahtuneet muutokset	- Parhailla osaajilla matematiikasta pitäminen kasvoi lukion aikana, mutta minäkäsitys ja kokemus matematiikan hyödyllisyydestä heikentyivät. - Parhaiden tyttöjen asennemuutokset olivat yleisestä muutossuunnasta poikkeavia: minäkäsitys kasvoi yläkoulun ja lukion aikana lähes poikien tasolle, ja tytöt pitivät matematiikasta lukion lopussa poikia enemmän. - Tyttöjen ja poikien asenteiden kehittymistä selittivät erilaiset opetuksen pedagogiset ratkaisut. - Myönteisiä asenteita vahvistivat yleisesti oppilaskeskeisyyteen, yhteistoiminnallisuuteen ja oppijoiden tarpeiden huomioimiseen liittyvät pedagogiset ratkaisut.

7 Yhteenveto ja pohdinta

Tutkimus keskittyi vastaamaan viiteen pääkysymykseen.

I Millaiset oppilaat kehittyvät matematiikan parhaiksi osaajiksi ja miten heidän opintopolkunsa muodostuu?

II Millainen yhteys matematiikan parhaiden osaajien asenteilla on heidän osaamiseensa ja miten heidän asenteensa kehittyvät?

III Miten kotitausta selittää matematiikan parhaiden osaajien osaamisen kehittymistä ja koulutusvalintoja?

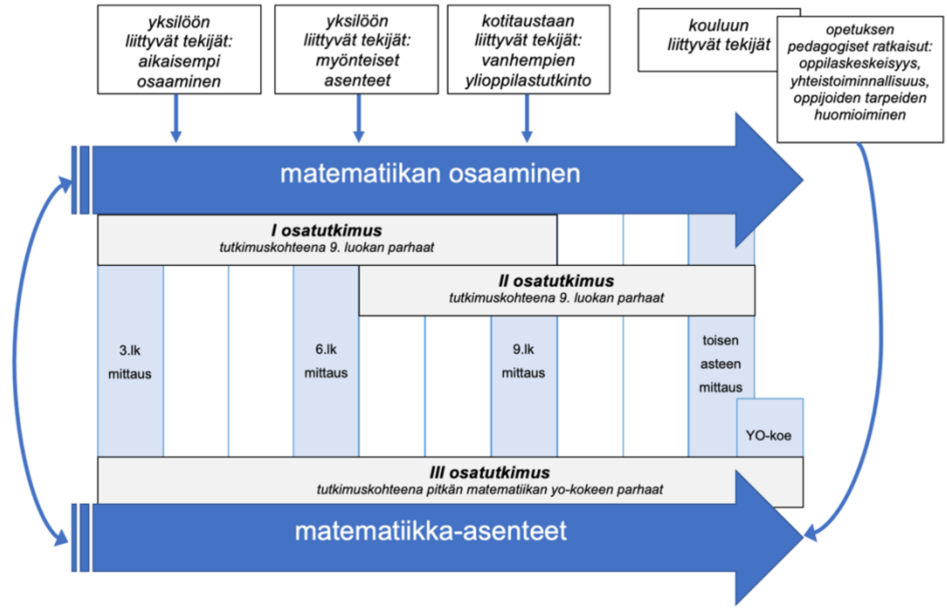
IV Millainen yhteys opetuksen pedagogisilla ratkaisuilla on matematiikan parhaiden osaajien osaamiseen ja asenteisiin?

V Miten matematiikassa parhaiten menestyneet pojat ja tytöt eroavat toisistaan?

Pääkysymyksiin vastataan seuraavissa alaluvuissa. Keskeiset tutkimustulokset esitetään ensin kokonaisuutena tutkimusasetelmaan peilaten, minkä jälkeen keskeisiä tuloksia esitellään vastaten jokaiseen pääkysymykseen.

7.1 Keskeiset tutkimustulokset

Kuviossa 7 esitetään aiemmin esitetyn tutkimusasetelman muodossa matematiikan parhaiden osaajien osaamiseen ja asenteisiin yhteydessä olevat keskeiset tekijät.



Kuvio 7. Keskeiset tutkimustulokset matematiikan parhaiden osaajien kehityksestä tutkimusasetelman muodossa

Matematiikan parhaaksi osaajaksi kehittymistä määrittävät aikaisempi matematiikan osaaminen, myönteiset asenteet matematiikkaa kohtaan ja vanhempien suorittama ylioppilastutkinto. Monet yhdeksännen luokan parhaista osaajista erottuivat osaamiseltaan muusta tutkimusjoukosta jo alakoulun aikana ja heistä lähes 92 prosenttia hakeutui toisella asteella lukioon ja lähes 66 prosenttia kirjoitti pitkän matematiikan. Myönteisiä matematiikka-asenteita vahvistivat oppilaskeskeisyyteen, yhteistoiminnallisuuteen ja oppijoiden tarpeiden huomioimiseen liittyvät opetusratkaisut. Tuloksia tarkastellessa on hyvä ottaa huomioon, että osittain eri tekijät selittävät osaamista ja asenteita sekä niissä tapahtuneita muutoksia. Esimerkiksi opetusratkaisuilla on yhteys matematiikka-asenteisiin, muttei suoranaisesti osaamiseen ja sen kehittymiseen.

7.2 Matematiikan parhaaksi osaajaksi kehittyminen ja opintopolun muodostuminen

Oppilaan aikaisempi matematiikan osaaminen selitti parhaiten, kuuluiko oppilas yhdeksännellä luokalla parhaiden osaajien joukkoon, mutta osaamistason ennustaminen aikaisemman osaamisen perusteella ei ollut kuitenkaan yksiselitteistä. Tutkimus osoitti, että oppilaan oli mahdollista kehittyä matematiikan parhaaksi osaajaksi jopa keskitasoa tai sitä heikommasta lähtötasosta. Noin 40 prosenttia yhdeksännen vuosiluokan parhaista osaajista kuului parhaaseen kymmenykseen kolmannella luokalla. Taitotaso näyttäisi vakiintuvan kolmannen ja kuudennen vuosiluokan välillä, kun 65 prosenttia yhdeksännen vuosiluokan parhaista osaajista kuului kuudennella vuosiluokalla osaamiseltaan ylimpään kymmenykseen. Lisäksi noin 60 prosenttia yhdeksännen vuosiluokan parhaista osaajista oli kansallisella kokeella mitattuna parhaita osaajia myös toisen asteen lopussa ja 92 % prosenttia yhdeksännen vuosiluokan parhaista osaajista opiskeli lukiossa.

Tulosten mukaan äidinkielen osaaminen kolmannella ja kuudennella luokalla selitti osaltaan kuulumista parhaiden osaajien joukkoon yhdeksännellä luokalla. Kolmannen luokan osaaminen oli mallissa kuudennen luokan osaamista vahvempi muuttuja. Lisäksi äidinkielen osaaminen oli vahva selittäjä sille, hakeutuiko matematiikassa erinomaisesti menestynyt oppilas lukioon. Matematiikan ja äidinkielen vahva osaaminen linkittyvät toisiinsa ja onkin tärkeää, että oppilaita tuetaan ja kannustetaan myös äidinkielen opiskelussa. Jos kielellinen kehitys on jäänyt jälkeen, on todennäköistä, ettei myöskään matemaattinen potentiaali kehity. Useat tutkimukset ovat osoittaneet yhteyden luku- ja kirjoitustaitojen ja matematiikan taitojen välillä (mm. Harlaar ym., 2012; Jordan ym., 2006), ja yhteys näyttäisi olevan vahva erityisesti peruskoulun ensimmäisillä luokilla: oppilaat, joilla on hyvät luku- ja kirjoitustaidot, pärjäävät hyvin myös matematiikassa (Koponen ym., 2007).

Matematiikan parhaiden osaajien vaihteleva osaamistaso kolmannen luokan kokeessa voi selittyä monestakin eri syystä. Ensinnäkin mittaus toteutettiin kolmannen luokan alussa eli sen oli tarkoitus mitata alkuopetuksen aikana kertynyttä osaamista. Seuraava mittaus oli kuudennen luokan alussa eli osaamista siihen mennessä oli kertynyt kolmannen, neljännen ja viidennen luokan ajalta. Alkuopetuksessa matematiikan opiskelu pohjautuu vahvasti peruslaskutoimitusten harjoitteluun. Kolmannella luokalla luokanopettaja saattaa vaihtua ja matematiikan opiskelussa siirrytään enemmän peruslaskutoimitusten soveltamiseen. Oppilaiden vaihtelevaa tasoa voi osalla selittää myös heikko lukutaito alkuopetuksen päättyessä. Suoriutuminen kolmannen luokan kokeessa voi selittyä myös satunnaisella epäonnistumisella.

Aikaisempaa osaamista mittaavista muuttujista arvosanatiedot matematiikan osaamisesta 3. ja 6. luokalla ennustivat parhaiten kuulumista 9. luokan parhaisiin osaajiin, ja arvosanat ennustivat osaamista paremmin kuin aikaisempi menestyminen kansallisessa kokeessa. Opinnoissa menestyminen selitti tulosten mukaan myös hakeutumista lukioon. On käyty keskustelua siitä, että opettajan arviointi ei ole yhdenmukaista ja arvosanat suhteutetaan muiden oppilaiden osaamistasoon valtakunnallisten kriteereiden sijaan (mm. Ouakrim-Soivio, 2013). Tässä tutkimuksessa opettajan arviot parhaista osaajista ennustivat paremmin tulevaa menestymistä kuin yksittäinen kansallinen koe, johon voi liittyä esimerkiksi satunnainen epäonnistuminen.

7.3 Matematiikan osaamisen ja asenteiden välinen yhteys

Tutkimuksessa havaittiin, että ylioppilaskokeessa parhaiten menestyneiden oppilaiden asenteiden taso ei juurikaan erottunut keskitason osaajien asenteista kolmannen luokan alussa, mutta erot kasvoivat kuudennen luokan alkuun mennessä. Keskitason osaajien asenteet laskivat kaikilla osa-alueilla huomattavasti parhaiden osaajien asenteita heikommiksi lukion loppuun mennessä. Parhailla osaajilla heikkenemistä tapahtui minäkäsityksen ja matematiikan hyödyllisyyden kokemisen osalta. Minäkäsitys heikkeni kuitenkin suhteellisen vähän ja se jopa vahvistui alakoulun aikana ja parhailla tytöillä vielä yläkoulun aikana. Matematiikasta pitäminen heikentyi parhailla osaajilla jonkin verran alakoulussa, mutta vahvistui yläkoulun ja lukion aikana.

Matematiikkaan liittyvien asenteiden on yleisesti havaittu heikkenevän kouluvuosien aikana (Kupari ym., 2012). Tätä selitetään muun muassa sillä, että oppilaat alkavat iän myötä arvioida osaamistaan enemmän suhteessa muihin samassa ryhmässä opiskeleviin oppilaisiin (mm. Tuohilampi & Hannula, 2013). Näin voidaan nähdä tapahtuneen myös tämän tutkimuksen aineistoon kuuluvilla oppilailla ja matematiikassa parhaiten menestyneillä osaajilla, kun minäkäsitys heikkeni eniten vasta toisen asteen opintojen aikana. *Big fish, little pond* -efektin mukaan oppilaan käsitys itsestä matematiikan osaajana paranee, jos oppilaan taidot ovat keskivertoa paremmat ja vastaavasti käsitys itsestä osaajana heikkenee, jos hän kokee taitonsa keskitasoa heikommaksi (Marsh ym., 2019; Holm ym., 2020). Parhaat osaajat kokevat olevansa parhaita yläkoulussa, kun vertailuryhmänä on koko ikäryhmään kuuluvat oppilaat. Opetusryhmä, johon oppilas kuuluu, on hyvin heterogeeninen. Vertailuryhmä kuitenkin muuttuu parhaiden osaajien siirtyessä toiselle asteelle. Lukioon hakeutuu koko ikäryhmästä vähän yli puolet ja pitkän matematiikan opinnoissa vertailuryhmä muuttuu yhä homogeenisemmäksi. Oppilas ei välttämättä koekaan olevansa enää ryhmän paras, kun ryhmän muutkin opiskelijat ovat hänen kanssaan samalla osaamistasolla. Toki minäkäsityksen heikkenemistä selittää varmasti myös se, että vaatimustaso lukio-opinnoissa kasvaa ja myös parhaat osaajat joutuvat tekemään enemmän töitä osaamisensa eteen.

Tulosten mukaan myönteiset asenteet matematiikkaa kohtaan olivat vahvasti yhteydessä matematiikassa parhaiten menestyneiden oppilaiden osaamiseen ja vahvistivat sen kehittymistä. Minäkäsitys selitti matematiikkaan liittyvistä asenteista parhaiten kuulumista matematiikan parhaiden osaajien joukkoon yhdeksännellä luokalla. Kolmannen luokan minäkäsityksellä ei ollut malliin tilastollisesti merkitsevää vaikutusta, mutta kuudennen ja yhdeksännen luokan vaikutukset malleihin olivat suurimmat. Oppilaan myönteinen käsitys itsestä matematiikan osaajana yhdeksännellä vuosiluokalla vahvisti myös sitä, että oppilas kuului parhaiden osaajien joukkoon toisen asteen lopussa. Tulokset vahvistavat aikaisempien tutkimusten (mm. Bryan ym., 2011; Jiang ym., 2014; Suárez-Álvarez ym., 2014) tuloksia, joiden mukaan omiin kykyihinsä luottavat menestyvät matematiikan opinnoissa parhaiten.

7.4 Kotitaustan yhteys matematiikan osaamiseen ja koulutusvalintoihin

Vaikka sosioekonomisen taustan yhteys oppimistuloksiin ei ole Suomessa kansainvälisesti tarkasteltuna kovin voimakas, on eriarvoistuminen kotitaustan suhteen oppimistulosmittauksissa kasvanut (mm. Leino ym., 2019; Välijärvi, 2021). Myös tässä tutkimuksessa vanhempien koulutustausta ylioppilastutkinnolla arvioituna oli parempaa matematiikan osaamista ja lukiovalintaa selittävä tekijä. Yhdeksännen vuosiluokan parhaista osaajista noin 80 prosentilla ainakin toinen vanhemmista oli ylioppilas, kun muusta tutkimusjoukosta (osaamisen desiilit 1-8) vastaavasti 58 prosentilla ainakin toinen vanhemmista oli ylioppilas. Vanhempien lukiokoulutus selitti myös parhaiden osaajien hakeutumista lukioon. Lukioon hakeutuneista matematiikan parhaista osaajista lähes puolella (47,5 %) molemmat vanhemmat olivat ylioppilaita.

Koulutuksen voidaan nähdä periytyvän, kun akateemisten vanhempien lapset valitsevat todennäköisemmin akateemisen uran (mm. Myrskylä, 2009; Suominen, 2013) ja koulutetuilla vanhemmilla on paremmat lähtökohdat tukea lapsen koulunkäyntiä. Kodin tuen merkitys näkyi mallissa, jossa etsittiin selittäviä tekijöitä parhaiden osaajien osaamisen vaihteluun toisella asteella. Mallin mukaan se, että kotona arvostetaan koulutusta, vahvisti parhaiden osaajien osaamista toisella asteella. Kotitaustan vaikutus ei tutkimuksessa kuitenkaan noussut yhtä merkittäväksi selittäjäksi kuin esimerkiksi oppilaan aikaisempi osaaminen tai minäkäsitys. Onkin tärkeää, että kouluissa tuetaan ja kannustetaan oppilaita, jotka eivät välttämättä saa kotoa tarvitsemaansa tukea opiskelulleen.

7.5 Opetuksen pedagogisten ratkaisujen yhteys matematiikan osaamiseen ja asenteisiin

Tutkimuksessa opetukseen liittyvien tekijöiden selitysosuudet osaajaryhmää ennustettaessa olivat pienet, mutta tulosten mukaan joustavaan ryhmittelyyn ja oppilaiden itsearviointiin liittyvät toimintatavat peruskoulussa eivät ainakaan edesauttaneet parhaisiin osaajiin kuulumista. Parhaisiin osaajiin kuulumista vahvisti mallissa parhaiten yhteinen opetus opettajan johdolla. Niiden oppilaiden osalta, joiden osaaminen kasvoi keskitasoa tai sitä heikommasta lähtötasosta parhaiden osaajien tasolle yhdeksännelle vuosiluokalle tultaessa, tapahtui jotain merkityksellistä kolmannen ja kuudennen vuosiluokan aikana, kun nämä oppilaat saavuttivat osaamisessa muiden parhaiden osaajien tason, ja myös yleisesti matematiikan parhaiden osaajien asenteet vahvistuivat kolmannelta kuudennelle. Tutkimuksen kautta ei saatu vastauksia, millaiset tekijät tähän vaikuttivat. Toisella asteella selkeä osaamista vahvistava tekijä oli se, että opiskeltavat asiat tulevat tunneilla selviksi. Projektityöt eivät edesauttaneet osaamisessa tapahtunutta kasvua.

Tutkimus tuotti merkityksellistä tietoa myös siitä, millaiset opetusratkaisut opiskelijoiden arvioimina vahvistivat matematiikassa parhaiten menestyneiden osaajien asenteita matematiikan opiskelua kohtaan yhdeksänneltä luokalta lukion loppuun. Tytöillä ja pojilla asenteita vahvistivat osin erilaiset opetusratkaisut. Molemmilla yleisesti myönteisiä asenteita vahvistivat oppilaskeskeisyyteen, yhteistoiminnallisuuteen ja oppijoiden tarpeiden huomioimiseen liittyvät tekijät. Sellaisten monipuolisten opetusmenetelmien käyttö, joissa yhdistyvät muun muassa projektitöiden tekeminen tai konkreettisten välineiden käyttö, eivät näytä edistävän myönteisten asenteiden kehittymistä yläkoulun tai lukion aikana. Tyttöjen myönteistä asennoitumista vahvisti itsenäiseen työskentelyyn liittyvät ratkaisut ja pojilla enemmän pari- ja ryhmätyöskentelyyn sopivat ratkaisut. Voidaan siis todeta, ettei matematiikan parhaiden osaajien tukemiseen löydy yksiselitteistä opetuksellista ratkaisua.

7.6 Matematiikassa parhaiten menestyneiden poikien ja tyttöjen väliset erot

Pojat ovat yleisesti menestyneet tyttöjä paremmin matematiikassa, mutta 2010-luvulta lähtien tytöt ovat menestyneet matematiikassa poikia paremmin (Vettenranta ym., 2016; Leino ym., 2019). Tässä tutkimuksessa poikien osuus parhaiden osaajien joukossa oli tyttöjä suurempi ja myös kaikkein parhaiten menestyneet oppilaat olivat poikia. Sukupuoli ei kuitenkaan ollut tutkimuksessa osaamista selittävä tekijä eikä keskimäärin parhaiden tyttöjen ja poikien osaamisessa ollut eroa. Kuten muissakin tutkimuksissa, poikien osaamisen vaihtelu oli tyttöjä suurempaa. Yhteiskunnallisesti tarkasteltuna matematiikan osaajien tarve on suuri ja erityisesti naiset ovat aliedustettuina teknillistieteellisillä aloilla (mm. Beede ym., 2011; Pääkkönen, 2013). Tyttöjen ja poikien osaamisessa ei ole juurikaan eroa, mutta tytöt valitsevat matemaattisia aineita poikia harvemmin ja heidän asenteensa matematiikan opiskelua kohtaan ovat poikia alhaisemmat (mm. Cvencek ym., 2011; Lindberg ym., 2013; Tuohilampi & Hannula, 2013). Tutkimus tuottikin kiinnostavia tuloksia tyttöjen asenteiden kehittymisestä perusopetuksen ja lukion aikana ja jatkotutkimushaasteita siitä, miten tyttöjen matemaattinen potentiaali voidaan tunnistaa ja heitä voidaan paremmin tukea ja ohjata matemaattisten alojen opiskeluun.

Ensinnäkin matematiikan parhaisiin osaajiin kuuluvien tyttöjen minäkäsitys ja matematiikasta pitäminen oli tulosten mukaan kolmannen luokan alussa parhaita poikia ja kaikkia keskitason osaajia alemmalla tasolla. Parhaiden tyttöjen ja poikien osaamisessa ei ollut tilastollisesti merkitsevää eroa. Alhaisen minäkäsityksen ja matematiikasta pitämisen sijaan parhaiden tyttöjen kokemus matematiikan hyödyllisyydestä pysyi kuitenkin parhaita poikia ja keskitason osaajia korkeammalla tasolla koko perusopetuksen ja lukion ajan. Tytöissä on osaamisen suhteen paljon piilotettua potentiaalia, mutta jokin ei näytä kohtaavan heitä matematiikan opiskelussa vielä alakoulun aikana. Parhaiden tyttöjen minäkäsitys vahvistui kolmannen luokan jälkeen ja matematiikasta pitäminen yläkoulun aikana. Tarvitaan lisätutkimustietoa siitä, mitä alaluokkien aikana tapahtuu, kun matematiikassa parhaiten menestyvät tytöt eivät pidä matematiikkaa mieluisana oppiaineena eikä käsitys itsestä osaajana ole kovin vahva. Matematiikassa keskitytään alaluokilla peruslaskutoimitusten harjoitteluun ja vasta ylemmillä asteilla vaaditaan soveltavaa taitoa ja abstraktimpaa ajattelua. Tämän tutkimuksen mukaan opiskelun mielekkyys ja käsitys itsestä osaajana näyttäisi kasvavan, kun tytöt alkavat saada tuloksia osaamisestaan. Tulokset yläkoulun ja lukion ajalta osoittavat, että tyttöjen minäkäsitys vahvistuu, kun he saavat osaamisestaan palautetta muun muassa kokeiden ja itsearvioinnin kautta. Tyttöjen potentiaali tulisi tunnistaa jo alkuopetuksen aikana ja tarjota heille mielekkäitä haasteita matematiikan opiskeluun ja vahvistaa minäkäsitystä tekemällä heidän osaamistaan näkyväksi.

7.7 Tutkimuksen luotettavuus

Tutkimuksessa käytettyjen mittareiden luotettavuus on jo osaltaan tutkittua (esim. Metsämuuronen, 2009). Aineistoa on kuitenkin jonkin verran käsitelty ja rajattu tämän tutkimuksen tarkoituksiin, joten on tärkeää ottaa huomioon tiettyjä tutkimuksen luotettavuutta vahvistavia ja rajoittavia tekijöitä.

Tutkimuksen luotettavuus voidaan jakaa validiteettiin eli tutkimuksen pätevyyteen ja reliabiliteettiin eli tutkimuksen pysyvyyteen (Hirsjärvi ym., 2008). Validiutta tarkastellaan sekä ulkoisen että sisäisen validiuden näkökulmasta.

Ulkoisen validiuden näkökulmasta arvioidaan, ovatko tulokset yleistettävissä eli onko otanta onnistunut. Kansallisesti näin kattava ja ajallisesti pitkä samaa ikäluokkaa koskeva aineisto on poikkeuksellinen. Aineisto on muun muassa kansallisesti edustava, vaikka aineistosta on vuosien varrella pudonnut oppilaita pois. Kato ei kuitenkaan vääristänyt tämän tutkimuksen tuloksia, koska kato koski pääosin matematiikassa heikosti menestyneitä oppilaita. Lisäksi tutkimuksessa käytettiin osin uudelleen mallitettua aineistoa, jossa puuttuvat havainnot oli ennustettu muiden mittauskertojen avulla (ks. tarkemmin osatutkimus II). Aineiston keruuseen on käytetty järjestäjäkohtaista otantaa. Metsämuuronen (2009, s. 13) on määritellyt järjestäjäkohtaisen otannan kolmivaiheiseksi. Ensin valitaan ositetusti opetuksen järjestäjä ja sen perusteella toisessa vaiheessa satunnainen otos järjestäjän kouluista. Kolmannessa vaiheessa kouluista valitaan oppilaat systemaattisella poiminnalla joko luokittain tai aakkosellisen listan perusteella. Jokainen yksittäinen aineisto edustaa demografisesti hyvin tutkittavaa ikäluokkaa. Tuloksia käsiteltäessä tulee kuitenkin ottaa huomioon, että ne koskevat pääsääntöisesti rajattua tutkimusjoukkoa eli matematiikassa parhaiten menestyneitä oppilaita.

Tutkimuksessa matematiikan parhaat osaajat määritettiin ensimmäisessä ja toisessa osatutkimuksessa yhdeksännen vuosiluokan kansallisessa kokeessa menestymisen mukaan ja kolmannessa osatutkimuksessa pitkän matematiikan ylioppilaskokeessa menestymisen mukaan. Voidaan pohtia, onko yksittäisen kokeen perusteella tehty arvio osaamisen tasosta luotettava. Ensimmäisessä osatutkimuksessa käytettiin desiilijakoa parhaiden osaajien määrittämiseen ja toisessa osatutkimuksessa 1,5 keskihajontayksikön rajausta. 1,5 keskihajontayksikön rajausta on käytetty muissa tutkimuksissa heikkojen osaajien määrittämiseen (mm. Räsänen ym, 2010). Desiili- ja keskihajontarajauksella saatiin rajattua suhteellisen sama joukko osaajia. Ylimpään desiiliin kuuluvien oppilaiden keskimääräinen yhdeksännen luokan kokeesta saatu pistemäärä oli noin 1,7 keskihajontayksikön päässä koko otoksen keskiarvosta. Osaamisen tasoa voidaan tarkastella myös matematiikasta saatujen arvosanojen perusteella. Esimerkiksi yhdeksännen vuosiluokan arvosanatietojen mukaan lähes kaikki parhaista osaajista muutamaa poikkeusta lukuun ottamatta olivat saaneet matematiikasta arvosanan 10 (erinomainen) tai 9 (kiitettävä). Rajauksella on onnistuttu löytämään oppilaat, jotka ovat menestyneet myös arvosanatiedon perusteella parhaiten matematiikassa. Toisaalta tulee ottaa huomioon, että myös muissa osaajaryhmissä oli oppilaita, jotka olivat saaneet matematiikasta arvosanan 9 tai 10. Arvosanat eivät näyttäisi tässä tapauksessa olevan yksinään luotettava osaamisen mittari.

Kolmannessa osatutkimuksessa osaaminen haluttiin määrittää pitkän matematiikan ylioppilaskokeessa menestymisen mukaan, vaikka noin 86 prosenttia ylioppilaskokeen parhaista osaajista menestyi erinomaisesti (ylin osaamista kuvaava desiili) myös toisen asteen lopussa pidetyssä kansallisessa kokeessa. Ensinnäkin kansallisessa kokeessa ja pitkän matematiikan ylioppilaskokeessa mitataan hieman erilaista osaamista. Lukion lopussa pidetyn kansallisen kokeen pohjana käytettiin opiskelijoiden yhdeksännellä luokalla suorittamaa koetta. Tehtävistä lähes 80 prosenttia oli suoraan yhdeksännen luokan kokeesta, osa kuudennen luokan kokeesta ja osa kolmannen luokan kokeesta. Lisäksi kokeeseen valittiin kaksi lyhyen ja kaksi pitkän matematiikan ylioppilaskoetehtävää (Metsämuuronen, 2017, s. 27). Toisin sanoen kansallisessa kokeessa mitattava osaaminen perustui pitkälti perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (Opetushallitus, 2004) määritettyjen matematiikan sisältöalueiden hallintaan. Kansallisella kokeella voidaan arvioida erinomaisesti opiskelijoiden osaamisessa tapahtuneita muutoksia pitkällä aikavälillä. Ylioppilaskokeen tehtävät sen sijaan perustuvat lukion pitkän oppimäärän mukaisiin kursseihin (Opetushallitus, 2003; 2015) ja niiden tavoitteisiin ja sisältöalueisiin. Ylioppilaskoe antaa erinomaisen arvion lukion päättövaiheen osaamisesta. Ylioppilaskoetta ei ole kuitenkaan vertaistettu eikä sen yksittäisen kokeen perusteella voida arvioida, kuinka paljon osaaminen on muuttunut yläkoulun jälkeen. Ylioppilastutkinnolla on kuitenkin suuri painoarvo jatko-opintojen kannalta, ja opiskelijat panostavat siihen kansallista koetta enemmän. Ylioppilastutkinto antaa todenmukaisemman kuvan opiskelijoiden osaamisen tasosta toisen asteen lopussa kuin kansallinen koe, jossa esimerkiksi alisuoriutuminen on mahdollista monesta eri syystä. Toiseksi kansallisen kokeen ajankohta ei ollut suotuisa opiskelijoiden osaamisen kartoittamiseen. Toisen asteen aineistossa oli suuri kato verrattuna yhdeksännen luokan aineistoon. Kansallinen koe pidettiin tammikuussa ennen kuin opiskelijat siirtyivät valmistautumaan ylioppilaskokeisiin, ja kouluille jäi vähän aikaa kansallisen kokeen valmisteluille eikä kaikkia opiskelijoita saatu mukaan kokeeseen (Metsämuuronen, 2017, s. 49).

Tässä tutkimuksessa matematiikan parhaista osaajista ei ole perusteltua käyttää käsitettä matemaattisesti lahjakkaat oppilaat. Korkea kyvykkyys kansallisissa kokeissa ei ole riittävä edellytys matemaattiselle lahjakkuudelle (vrt. Sheffield, 1994; Ruokamo, 2000). Sheffieldin (1994) luokittelussa tutkimuksen parhaat osaajat voidaan määritellä sijoittuvan ongelmanratkaisijan tasolle, mutta aineiston avulla ei saada tietoa kyvystä toimia ongelmanasettajana tai uuden matematiikan luojana. Matematiikan parhaiden osaajien voidaan aineiston perusteella päätellä hallitsevan monipuolisesti matemaattiseen osaamiseen kuuluvia tekijöitä esimerkiksi kykyä soveltaa matematiikkaa ja käyttää ongelmanratkaisutaitoja (vrt. Kilpatrick ym., 2001). Kansallisten arviointien matematiikan tehtävät laaditaan asiantuntijaryhmissä ja tehtäväsarjojen arvioinnissa käytetään esitestausta. Sen lisäksi, että tehtäväsarjat sisältävät vaikeustasoltaan helppoja, keskivaikeita ja vaikeita osioita, tehtävät on luokiteltu sisältöalueen, vaikeustason ja vaadittavan osaamisen syvyyden suhteen eri luokkiin (Jakku-Sihvonen, 2013; Metsämuuronen, 2009). On kuitenkin syytä ottaa huomioon, että aineiston parhaista osaajista osa olisi varmastikin rajattavissa myös matemaattisesti lahjakkaiksi, mutta tämä vaatisi lisäselvityksiä muun muassa luovuuden ja ongelmanratkaisutaitojen soveltamisen näkökulmasta. Toisaalta myös matemaattisen lahjakkuuden käsite vaatisi johdonmukaisempaa määrittelyä. Lisäksi koko aineistossa saattaa olla niin sanotusti matemaattisesti lahjakkaita oppilaita, jotka alisuoriutuivat kokeissa ja heitä ei tunnisteta koulumenestyksen perusteella.

Sisäisen validiuden näkökulmasta arvioidaan, ovatko tutkimuksen mittarit muodostettu oikein ja mitataanko niillä sitä, mitä on tarkoituskin mitata. Ensinnäkin tutkimuksessa käytetty aineisto koostuu neljällä eri mittauskerralla kerätyistä tiedoista. Tutkimusasetelma on pitkittäinen ja se asettaa omia haasteita muun muassa tulosten vertaistamiseen liittyen. Aineistojen yhdistämiseen ja vertaistamiseen liittyvät luotettavuustarkastelut on tehty ennen aineiston saamista tämän tutkimuksen käyttöön ja Metsämuuronen on käsittelyt niitä tarkemmin raporteissaan (mm. Metsämuuronen, 2009; 2013).

On kuitenkin otettava huomioon muutama näkökohta osaamis- ja asennemittareiden ominaisuuksista ja luotettavuudesta. Ensinnäkin osaamista mittaavat kokeiden tehtävät erottelevat hyvin oppilaiden osaamista. Osaamista mittaavat kokeet on laadittu asiantuntijaryhmissä ja kokeissa on pyritty mittaamaan opetussuunnitelman perusteiden (Opetushallitus, 2003; 2004; 2009) keskeisiä sisältöalueita ja tavoitteita. Kokeisiin on laadittu tehtäviä laajasti eri sisältöalueilta sekä vaikeustasoltaan ja vaadittavan osaamisen suhteen erilaisista luokista. Lisäksi sekä matematiikan osaamista että asenteita kartoittavat mittarit on esitestattu (Metsämuuronen, 2009).

Asenteiden kartoittaminen pohjautuu laajalti käytettyyn Fennema-Shermanin (1976) asennetestistöön. Alkuperäinen mittaristo on saanut kritiikkiä sen validiudesta mitata haluttuja asioita (mm. O’Neal ym., 1988).

Lisäksi useat tutkimukset (mm. Yoshino, 2012; Kadijevich, 2008; Else-Quest ym., 2010) ovat osoittaneet, että kansainvälinen vertailu ei ole luotettavaa, kun maiden väliset erot asennetesteissä ovat huomattavia. Metsämuurosen (2012) mukaan osa asenneväittämistä on liian vaikeita vastattavaksi heikoimman suoritustason oppilaille ja asenteiden kartoittamiseen liittyy kulttuurisia eroja. Tässä aineistossa huomio ei kuitenkaan ole relevantti, kun tutkitaan parhaita osaajia. Oppilaiden kyky vastata asenneväittämiin voi vaihdella suurestikin osaamisen ja yksilöllisten näkemysten mukaan. Fennema-Shermanin testillä voidaan kuitenkin seurata asenteiden pitkäaikaista kehitystä. Karvi käyttää Fennema-Shermanin lyhennetystä versiosta omaa kansallista versiotaan, jossa muun muassa sanamuotoja on muutettu konkreettisimmiksi.

Tutkimuksen reliaabelius kertoo, miten luotettavasti tutkimus kykenee antamaan ei-sattumanvaraisia tuloksia eli miten hyvin mittaustulokset ovat toistettavissa (Hirsjärvi ym., 2008). Seuranta-arvioinnin luotettavuuteen liittyy arvio sattumanvaraisuuden mahdollisuudesta tuloksia tulkittaessa. Mittareiden reliabiliteetit *Cronbachin alfa* -kertoimilla arvioituina ovat kokonaisuutena riittävän luotettavia uskottavien johtopäätösten tekemiseen. Vaikka *Cronbachin alfa* on harhainen ja määrittää vain reliabiliteetin alarajan rajoitetuissa ja yksiulotteisissa mittausmalleissa (ks. mm. Tarkkonen, 1987; Tarkkonen & Vehkalahti, 2005) sitä käytetään eniten (Hogan ym., 2000). Sen käyttö on perusteltua tässä tutkimuksessa, kun muutkin samaa aineistoa koskevat reliabiliteettiarviot perustuvat *Cronbachin alfan* mittaamiseen. Jos reliabiliteetille haluttaisiin määrittää tarkempi arvio, voitaisiin käyttää esimerkiksi deflaatio-korjattua reliabiliteettikerrointa (ks. esim. Metsämuuronen, 2022). Osaamis- ja asennemittareiden tekniset ominaisuudet on esitetty luvuissa 5.1.1 ja 5.1.2. On kuitenkin syytä huomioida, että yksittäiset kokeet eivät välttämättä anna todenmukaista kuvaa oppilaan yksilöllisestä osaamisesta eri vuosiluokilla. Esimerkiksi kehittymistä yhdeksännen vuosiluokan parhaaksi osaajaksi keskitasoa tai sitä heikommasta kolmannen luokan lähtötasosta voi selittää satunnainen epäonnistuminen kolmannen luokan kokeessa. Opettajat arvioivat kokeet ensin, mutta kansallisen tason sensorointi lisäsi arvioinnin luotettavuutta. Kokeiden sensorointi toteutettiin Opetushallituksen ja Karvin toimesta (ks. mm. Metsämuuronen, 2013, s. 39).

Tutkimuksessa käytetyt tiedot oppilaiden taustatekijöistä perustuivat oppilailta saatuihin tietoihin, mikä tulee ottaa huomioon tulosten johtopäätöksiä tarkasteltaessa. Esimerkiksi oppilaiden arviot opetukseen liittyvistä pedagogisista ratkaisuista saattavat vaihdella saman opetusryhmän sisällä. Tässä tutkimusaineistossa ei pystytty erottelemaan samassa opetusryhmässä opiskelleita oppilaita ja analysoimaan, ovatko heidän arvionsa opetusratkaisujen yleisyydestä yhteneväiset. Hannulan ja

Oksasen (2013) tekemän analyysin mukaan kuitenkin tiedetään, että opettajan ja oppilaiden näkemykset opetusratkaisuista saattavat erota jonkin verran toisistaan. Vaikka opettajan ja oppilaiden ilmoittamien opetusmenetelmien yleisyyttä kuvaavien arvioiden välillä oli positiivinen korrelaatio, jäi se useamman väittämän kohdalla heikoksi. Opettajalla ja oppilailla oli yhteneväisimmät arviot pari- ja ryhmätyöskentelyyn, projektitöiden tekemiseen ja tietokoneiden käyttämiseen liittyen. Voidaan pohtia, miten hyvin oppilaat osaavat arvioida opetusratkaisuja, kun kaikki opettajan pedagogiset perustelut niiden käyttöön eivät välttämättä hahmotu oppilaille. Kotitaustan yhteyttä oppimistuloksiin selvitettiin vanhempien ylioppilastutkinnon perusteella. Laajempi näkemys oppilaan sosioekonomisesta taustasta tarjoaisi luotettavampaa tietoa kotitaustan yhteydestä oppimistuloksiin.

Metodologinen triangulaatio vahvistaa tulosten tulkinnan luotettavuutta. Esimerkiksi osaamisen ja asenteiden muutosta selittäviä tekijöitä etsittiin sekä perinteisen regressioanalyysin että päätöspuuanalyysin avulla. Eri menetelmät vahvistivat toisiaan ja muuttujien välillä löydettiin lineaaristen yhteyksien lisäksi myös epälineaarisia yhteyksiä.

7.8 Johtopäätöksiä

Matemaattisesti lahjakkaita tai matematiikassa erinomaisesti menestyneitä oppilaita koskeva tutkimustieto on kansallisesti vähäistä. Yleisesti on tutkittu tekijöitä, jotka ovat yhteydessä koulumenestykseen, mutta systemaattinen tutkimus, jossa tutkimuskohteena on opinnoissaan parhaiten menestyvä osaajaryhmä, on vähäistä. Tämä tutkimus laajentaa osaltaan tätä tutkimuskenttää ja tarjoaa arvokasta koulutuspolitiikassa ja koulutuksen kentällä hyödynnettävää tutkimustietoa. Tietoa saadaan matematiikan parhaiden osaajien piirteistä ja heidän matematiikan opetukseen liittyvistä tarpeistaan pitkällä aikavälillä. Tutkimus avaa käsityksiä matemaattisen lahjakkuuden ja erinomaisen osaamisen problematiikasta ja luo sosiokognitiivisen näkökulman matematiikassa erinomaisesti menestyvien oppilaiden tutkimukseen.

Yhteiskunnassa tarvitaan matematiikan vahvoja osaajia. Teknologiateollisuuden merkitys on yhteiskunnallisesti suuri, mutta matematiikan huippuosaajat eivät hakeudu alalle. Osaajapulan on nähty jopa rajoittavan yritysten kasvumahdollisuuksia. Niin sanotuilla STEM-aloilla on pula osaajista eikä teknillistieteellisille aloille hakeuduta riittävästi opiskelemaan. Myös sukupuolen mukainen segregaatio on näillä aloilla voimakasta. Tämä tutkimus tarjoaa näkökulmia matematiikan parhaiden osaajien tunnistamiseen perusopetuksessa ja siihen, millaiset tekijät vahvistavat heidän osaamistaan, asenteitaan ja koulutusvalintojaan.

Tutkimus osoitti, että 40 prosenttia yhdeksännen luokan matematiikan parhaista osaajista kuului parhaaseen kymmenykseen jo kolmannella vuosiluokalla ja lähes 70 prosenttia kuudennella vuosiluokalla. Parhaiden osaajien tunnistaminen ei kuitenkaan ole yksiselitteistä. Parhaita osaajia ei pystytä luotettavasti tunnistamaan yksittäisen kokeen perusteella. Oppilaan oli mahdollista yltää matematiikan parhaaksi osaajaksi, vaikka hän menestyi kolmannen luokan kokeessa keskitason mukaisesti tai sitä heikommin. Taitotaso näytti kuitenkin vakiintuvan kuudennelle luokalle tultaessa. Voidaan päätellä, että alaluokilla monella oppilaalla saattaa olla piilotettua matemaattista potentiaalia, joka ei näy yksittäisessä kokeessa. Kaikkia oppilaita tulisikin kohdella potentiaalisina menestyjinä. Kehittyminen parhaaksi osaajaksi vaatii sopivat olosuhteet yksilöllisten ja ympäristöön liittyvien tekijöiden keskinäisessä vuorovaikutuksessa.

Opettajien antamat arviot oppilaiden osaamisesta kolmannella ja kuudennella luokalla selittivät kansallista koetta paremmin myöhempää osaamista tässä tutkimusjoukossa. Vaikka on käyty keskustelua siitä, että opettajien antamat arvosanat eivät ole johdonmukaisia oppilaan osaamisen kanssa (mm. Ouakrim-Soivio 2013), niin tässä tutkimuksessa alakoulun opettajan arvio oppilaan matematiikan osaamisesta näyttäisi kuitenkin olevan yksittäistä testiä luotettavampi muutosta ennustava mittari. Useimmiten alakoulussa matematiikkaa opettaa luokanopettaja, jolla on oppilaantuntemuksen kautta näkemys oppilaiden osaamisesta usein jopa useamman vuosiluokan ajalta.

Tässä tutkimuksessa selvitettiin yksilöön ja ympäristöön liittyvien tekijöiden yhteyttä osaamisen ja asenteiden kehittymiseen ja havaittiin, että yksilötekijöiden osuus oli suuri. Aikaisemman osaamisen ja myönteisten asenteiden, erityisesti minäkäsityksen yhteys osaamiseen vahvistaa aikaisempia tutkimustuloksia, mutta sukupuolten väliset erot asenteiden suhteen tuottivat arvokasta uutta tietoa. Ensinnäkin opinnoissaan parhaiten menestyneiden tyttöjen asenteiden kehitys poikkesi tutkimuksissa aikaisemmin havaituista asenteiden kehityspoluista. Kun yleisesti oppilaiden ja erityisesti tyttöjen minäkäsitys ja matematiikasta pitäminen keskimäärin heikkenevät kouluvuosien myötä, niin tämän tutkimuksen mukaan parhaiten menestyneiden tyttöjen minäkäsitys ja pitäminen vahvistuvat kouluvuosien myötä.

Matematiikassa parhaiten menestyneiden tyttöjen käsitys itsestä matematiikan osaajana kehittyi eri tavalla yläkoulussa kuin lukiossa. Yläkoulussa tyttöjen minäkäsitys vahvistui, kun heidän taitonsa olivat opiskeluryhmässä keskivertoa paremmat. Lukiossa pitkän matematiikan opiskeluryhmässä, jossa oppilaiden taitotaso oli korkea, tyttöjen käsitys itsestä heikkeni. Tulokset vahvistavat osaltaan käsitystä *Big fish, little pond* -efektin (Marsh ym., 2019; Holm ym., 2020) vaikutuksesta. Näyttää siltä, että taitotasoltaan heterogeeninen ryhmä vahvistaa ainakin matematiikassa parhaiten menestyneiden tyttöjen minäkäsitystä. Lukiossa erityisesti pitkän matematiikan opiskeluryhmän homogeeninen taitotaso on minäkäsityksen suhteen ongelmallinen, mikä on tärkeä tiedostaa, kun pyritään kannustamaa tyttöjä jatkamaan matemaattisia opintoja toisen asteen jälkeen.

Tutkimus osoitti, että tyttöjen ja poikien asenteiden kehittymiseen yläkoulun ja lukion aikana vaikuttivat osittain erilaiset opetukseen liittyvät ratkaisut. Esimerkiksi tyttöjen minäkäsitystä vahvisti poikia enemmän itsenäiseen työskentelyyn liittyvät ratkaisut, joissa saa palautetta omasta osaamisesta, ja pojilla minäkäsitys vahvistui tyttöjä enemmän, kun he saivat näyttää osaamistaan muille. Molemmissa ryhmissä oli merkityksellistä oppijoiden yksilöllisten tarpeiden huomioiminen. Koska asenteiden yhteys osaamiseen on voimakas, on tärkeä ymmärtää, miten myönteisiä asenteita voidaan tukea ja vahvistaa. Jatkossa olisi tärkeä selvittää, miten erityisesti tyttöjen kiinnostusta matematiikkaa kohtaan voitaisiin vahvistaa jo alkuopetuksen aikana, koska näyttää siltä, että osa heistä ei saa mielekkäitä oppimiskokemuksia matematiikasta alaluokkien aikana. Ensinnäkin opettajien olisi tärkeä tiedostaa omat uskomuksensa tytöistä ja pojista matematiikan oppijoina. Monet opettajat näkevät yleisesti tyttöjen menestymisen perustuvan ahkeruuteen ja poikien lahjakkuuteen (Soro, 2002). Tällaiset uskomukset ohjaavat myös oppilaiden käsityksiä menestymisen syistä. Tytöt ja pojat tulisi nähdä potentiaalisina matematiikan osaajina sukupuolesta riippumatta. Tutkimustulosten mukaan tytöt näyttävät kuitenkin tarvitsevan poikia enemmän opettajan tukea ja kannustusta minäkäsityksen vahvistamiseen.

Tukitoimet koulussa kohdistuvat pääosin opinnoissaan keskitasoa heikommin menestyneisiin oppilaisiin. Koulutuksellista tasa-arvoa tarkastellaan useimmiten heikoista lähtökohdista tulevien oppilaiden näkökulmasta. Mahdollisuuksien tasa-arvo on yhtenäisen peruskoulun kantava ajatus, kun kaikille pyritään takaamaan yhdenvertaiset oikeudet ja tasavertaiset koulutusmahdollisuudet (mm. Rinne, 2011; Kalalahti & Varjo, 2012; Ouakrim-Soivio ym., 2018). Inkluusioperiaate on vahvistanut erityistarpeita vaativien lasten tukemista yleisopetuksen luokassa. Kuitenkaan samalla opetukseen liittyvät resurssit kaikkien oppilaiden tasa-arvoiseen tukemiseen eivät näytä olevan opettajien kokemusten mukaan riittävät (esim. Alajoki, 2021; Saloviita, 2020; Moberg, 2001; Savolainen ym., 2012). Jos inkluusioluokassa on paljon erityistä tukea tarvitsevia oppilaita, myös muiden luokassa opiskelevien oppilaiden matematiikka-ahdistuksen on havaittu voimistuvan (Holm, 2021). Ollaan helposti tilanteessa, jossa eniten tukea tarvitsevat oppilaat eivät saa tarvitsemaansa tukea eikä myöskään opiskelusta motivoituneille ja opinnoissa erinomaisesti pärjääville oppilaille pystytä tarjoamaan heidän taitotasolleen sopivia haasteita.

Tuen priorisointia opinnoissaan heikommin menestyneille oppilaille perustellaan usein muun muassa sillä, että opinnoissaan paremmin menestyvät oppilaat ovat itseohjautuvia ja kykenevät oppimaan asioita myös koulun ulkopuolella. Yhtenä eritasoiset oppilaat huomioivana opetukseen liittyvänä ratkaisuna puhutaan oppilaiden ryhmittelystä heidän osaamisensa mukaan. Vaikka tasoryhmistä luovuttiin virallisesti 1980-luvulla, viime aikojen kouluvalintakeskustelu on nostanut osaamisperustaisen ryhmittelyn ajankohtaiseksi (mm. Bernelius, 2013; Kosunen, 2016; Seppänen ym., 2015). Yhtenä pedagogisena opetusratkaisuna käytetään niin sanottua joustavaa ryhmittelyä, jossa oppilaita ryhmitellään tilapäisesti taitotason mukaan. Tämän tutkimuksen mukaan joustavaan ryhmittelyyn liittyvät ratkaisut eivät kuitenkaan edesauta oppilaan kehittymistä parhaaksi osaajaksi. Voidaan ajatella, että parhaat osaajat eivät tarvitse erityisiä opetusratkaisuja yksinomaan osaamisensa kehittämiseen. On merkityksellistä kiinnittää huomiota siihen, miten parhaiden osaajien motivaatiota matematiikan opiskeluun pidetään yllä ja vahvistetaan. Opettajan toiminnalla ja opettajalta saadulla tuella on osoitettu olevan yhteys oppilaan motivaatioon (Lukin, 2013). Tämän tutkimuksen tulosten mukaan matematiikan parhaiden osaajien minäkäsitys oli vahvempi yläkoulun aikana, kun opiskeluryhmän sisällä oli matematiikan taidoiltaan eritasoisia osaajia. Tulosten mukaan myönteisiä asenteita vahvistivat kuitenkin oppilaskeskeiset ratkaisut, kuten mahdollisuus keskustella tehtävien ratkaisuista opiskelutovereiden kanssa ja opetusratkaisut, joissa huomioidaan oppijoiden yksilölliset tarpeet. Parhaatkin osaajat tarvitsevat mielekkäitä opetusratkaisuja ja taitotasolleen sopivia haasteita, jotta heidän mielenkiintonsa matematiikan opiskelua kohtaan säilyy, ja jotta he hakeutuisivat matematiikan opintoihin toisella asteella ja sen jälkeen. Aikaisempien tutkimustulosten valossa tulee kuitenkin esittää vakava koulutuspoliittinen huoli siitä, ettei tämä toteudu, jos luokassa on paljon erityistä tukea tarvitsevia oppilaita eivätkä resurssit heidän tukemiseensa ole riittävät. Tätä asiaa tulisikin tutkia enemmän. Lisäksi koulutuksen kehittäjien ja päättäjien pitäisi kehittää ratkaisuja, joiden myötä pystytään takaamaan opetuksellinen tasa-arvo myös parhaiden osaajien näkökulmasta.

Lähteet

Ahtee, M. & Pehkonen, E. (2000). *Johdatus matemaattisten aineiden didaktiikkaan*. Edita.

Alajoki, J. (2021) *”Miks tää systeemi ei toimi?” Etnografia inkluusiota kohti kulkevasta yläkoulusta*. Tampereen yliopiston väitöskirjat 504.

APA (2007). *Report of the APA Task Force on Socioeconomic Status*. American Psychological Association. https://www.apa.org/pi/ses/resources/publications/task-force-2006.pdf

Bandura, A. (1986). *Social foundations of thought and action: A social cognitive theory*. Prentice Hall.

Bandura, A. (1977). *Social learning theory*. Prentice Hall.

Bandura, A. & Schunk, D. H. (1981). Cultivating competence, self-efficacy and intrinsic interest through proximal self-motivation. *Journal of Personality and Social Psychology*, *41*(3), 586–598. https://doi.org/10.1037/0022-3514.41.3.586

Beede, D., Julian, T., Langdon, D., McKittrick, G., Khan, B. & Doms, M. (2011). Women in STEM: A gender gap to innovation. *Economics and Statistics Administration Issue Brief No. 4–11*. https://doi.org/10.2139/ssrn.1964782

Bernelius, V. (2013). *Eriytyvät kaupunkikoulut: Helsingin peruskoulujen oppilaspohjan erot, perheiden kouluvalinnat ja oppimistuloksiin liittyvät aluevaikutukset osana kaupungin eriytymiskehitystä*. Tutkimuksia 2013:1. Helsingin kaupungin tietokeskus.

Biggs, D., de Ville, B. & Suen, E. (1991). A method of choosing multiway partitions for classification and decision trees. *Journal of Applied Statistics*, 18, 49–62. https://doi.org/10.1080/02664769100000005

Björn, P. M., Aunola, K. & Nurmi, J.-E. (2016). Primary school text comprehension predicts mathematical word problem-solving skills in secondary school. *Educational Psychology*, 36(2), 362–377. https://doi.org/10.1080/01443410.2014.992392

Bloom, B. (1985). *Developing talent in young people*. Batlantine.

Bloom, B. S. (1976). *Human characteristics and school learning*. Kingsport Press.

Bong, M. & Skaalvik, E. M. (2003). Academic self-concept and self-efficacy: How different are they really? *Educational Psychology Review*, 15(1), 1–40. https://doi.org/10.1023/A:1021302408382

Bradley, R. H. & Corwyn. R. F. (2002). Socioeconomic Status and Child Development. *Annual Review of Psychology, 53*, 371–399. https://doi.org/10.1146/annurev.psych.53.100901.135233

Brandl, M. & Barthel, C. (2012). A comparative profile of high attaining and gifted students in mathematics. *ICME-12 Pre-Proceedings*, 1429–1438.

Breiman, L., Friedman, J. H., Olshen, R. A. & Stone, C. J. (1984). *Classification and regression trees*. Routledge.

Brese, F. & Mirazchiyski, P. (2010). *Measuring students' family background in large-scale education studies*. Paper for the 4th IEA International Research Conference, July 1–3, Gothenburg, Sweden. https://www.iea.nl/irc-2010.html.

Bryan, R. R., Glynn, S. M. & Kittleson, J. M. (2011). Motivation, achievement, and advanced placement intent of high school students learning science. *Science Education, 95*(6), 1049– 1065. https://doi.org/10.1002/sce.20462

Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences*. Erlbaum.

Colangelo, N., Kerr, B., Cristiansen, P. & Maxey, J. (1993). A comparison of gifted underachievers and gifted high achievers. *Gifted Child Quarterly, 37*(4), 155–160. https://doi.org/10.1177/001698629303700404

Cvencek, D., Meltzoff, A. N. & Greenwald, A. G. (2011). Math-gender stereotypes in elementary school children. *Child Development*, 82(3), 766–779. https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2010.01529.x

DiPrete, T. A. & Jennings, J. L. (2012). Social and behavioral skills and the gender gap in early educational achievement. *Social Science Research*, 41(1), 1–15. https://doi.org/10.1016/j.ssresearch.2011.09.001

Duckworth, A. L. & Seligman, M. E. (2006). Self-discipline gives girls the edge: Gender in self-discipline, grades, and achievement test scores. *Journal of Educational Psychology*, 98(1), 198–208. https://doi.org/10.1037/0022-0663.98.1.198

Dweck, C. (2006). *Mindset: The new psychology of success*. Random House.

Dweck, C. S., Goetz, T. E. & Strauss, N. L. (1980). Sex differences in learnt helplessness: IV An experimental and naturalistic study of failure generalization and its mediators. *Journal of Personality and Social Psychology*, 38(3), 441–452. https://doi.org/10.1037/0022-3514.38.3.441

Eccles, J. S. (2004). Schools, academic motivation and stage-environment fit. Teoksessa R. M. Lerner & L. Steinberg (toim.) *Handbook of adolescent psychology*. John Wiley & Sons Inc, 125–153.

Else-Quest, N. M., Hyde, J. S. & Linn, M. C. (2010). Cross-national patterns of gender differences in mathematics: A meta-analysis. *Psychological Bulletin*, 136(1), 103–127. http://dx.doi.org/10.1037/a0018053

Fennema, E. (1989). The Study of Affect and Mathematics: A Proposed Generic Model for Research. Teoksessa D. B. McLeod & V. M. Adams (toim.) *Affect and Mathematical Problem Solving*, 205–219. Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3614-6_14

Fennema, E. & Sherman, J. (1976). Fennema-Sherman Mathematics Attitudes Scales: Instruments designed to measure attitudes toward the learning of mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education,* 7(5), 324–326. https://doi.org/10.2307/748467

Fennema, E., Carpenter, T. P., Jacobs, V. R., Franke, M. L. & Levi, L. W. (1998). A longitudinal study of gender differences in young children's mathematical thinking. *Educational Researcher*, 27(5), 6–11. https://doi.org/10.3102/0013189X027005006

Gagné, F. (1995). From giftedness to talent: a developmental model and its impact on the language of the field. *Roeper Review, 18*(2), 103–111. https://doi.org/10.1080/02783199509553709

Gardner, H. (2003). *Multiple Intelligences after Twenty Years*. Paper presented at the American Educational Research Accociation, Chigago, IL. https://www.academia.edu/29311105/Multiple_Intelligences_After_Tw enty_Years

Geary, D. C., Saults, S. J., Liu, F. & Hoard, M. K. (2000). Sex differences in spatial cognition, computational fluency, and arithmetical reasoning. *Journal of Experimental Child Psychology*, 77(4), 337–353. https://doi.org/10.1006/jecp.2000.2594

Goldman, A. D. & Penner, A. M. (2016). Exploring international gender differences in mathematics self-concept. *International Journal of Adolescence and Youth*, 21(4), 403–418. https://doi.org/10.1080/02673843.2013.847850

Guiso, L., Monte, F., Sapienza, P. & Zingales, L. (2008). Culture, gender, and math. *Science*, 320, 1164–1165. https://doi.org/10.1126/science.1154094

Haapasalo, L. (2001), *Oppiminen, Tieto ja Ongelmanratkaisu*. (4. painos). Medusa-Software.

Haapasalo, L. (2011). *Oppiminen, tieto & ongelmanratkaisu*. Medusa-Software.

Hannula, M. S. & Holm, M. E. (2018). Oppilaan matematiikkakuva oppimistuloksena ja oppimisen taustatekijänä. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen. Niilo* Mäki Instituutti, 132–155.

Hannula, M. S. & Laakso, J. (2011). The structure of mathematics related beliefs, attitudes and motivation among Finnish grade 4 and grade 8 students. Teoksessa B. Ubuz (toim.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1*. Ankara, Turkki: PME. 9–16.

Hannula, M. S., Bofah, E., Tuohilampi, L. & Metsämuuronen, J. (2014). A longitudinal analysis of the relationship between mathematics-related affect and achievement in Finland. Teoksessa S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicol & D. Allan (toim.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 28 and PME-NA 36*, Vol. 3. Vancouver, Canada: PME, 249–256.

Hannula, M. S. & Oksanen, S. (2013). Opettajamuuttujien yhteys osaamisen muutokseen. Teoksessa J. Metsämuuronen (toim.) *Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkittäisarviointi vuosina 2005–2012.* Koulutuksen seurantaraportit 2013:4. Opetushallitus. Juvenes Print – Suomen yliopistopaino Oy, 253–294.

Harlaar, N., Kovas, Y., Dale, P. L., Petrill, S. & Plomin, R. (2012). Mathematics is differentially related to reading comprehension and word decoding: Evidence from a genetically sensitive design. *Journal of Educational Psychology*, 104(3), 622–635. https://doi.org/10.1037/a0027646

Härmälä, M., Huhtanen, M. & Puukko, M. (2014). *Englannin kielen A-oppimäärän oppimistulokset perusopetuksen päättövaiheessa 2013.* Kansallinen koulutuksen arviointikeskus. Julkaisut 2014:2. Juvenes Print – Suomen Yliopistopaino Oy.

Harter, S. (1999). *The Construction of the Self. A Developmental Perspective.* The Guildford Press.

Hildén, R. & Rautopuro, J. (2014). *Ruotsin kielen A-oppimäärän oppimistulokset perusopetuksen päättövaiheessa 2013.* Kansallinen koulutuksen arviointikeskus. Julkaisut 2014:1. Juvenes Print – Suomen Yliopistopaino Oy.

Hiltunen, J. & Nissinen, K. (2018). Erinomaiset matematiikan osaajat. Teoksessa J. Rautopuro & K. Juuti (toim.), *PISA pintaa syvemmältä : PISA 2015 Suomen pääraportti.* Kasvatusalan tutkimuksia, 77. Suomen kasvatustieteellinen seura, 213–234.

Hirsjärvi, S., Remes, P. & Sajavaara, P. (2008). *Tutki ja kirjoita*. Tammi.

Hogan, T.P., Benjamin, A. & Brezinski, K. L. (2000). Reliability methods: Fequency of use of various types. *Educational and Psychological Measurement*, 60, 523–531. https://doi.org/10.1177/00131640021970691

Holm, M. (2021). *Executive functions and achievement emotions among adolescents: mathematics difficulties, low mathematics performance, and special education support in mathematics*. Helsinki Studies in Education, number 106. University of Helsinki, Faculty of Educational Sciences.

Holm, M., Korhonen, J., Laine, A., Björn, P. M. & Hannula, M. S. (2020). Big-fish-little-pond effect on achievement emotions in relation to mathematics performance and gender. *International Journal of Educational Research*, 104. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2020.101692

Hosmer, D. W., Lemenshow, S. & Sturdivant, R. X. (2013). *Applied Logistic Regression. 3rd ed.* Wiley.

Hotulainen, R., Rimpelä, A., Hautamäki, J., Karvonen, S., Kinnunen, J. M., Kupiainen, S., Lindfors, P., Minkkinen, J., Pere, L., Thuneberg, H., Vainikainen, M-P. & Wallenius, T. (2016). *Osaaminen ja hyvinvointi yläkoulusta toiselle asteelle. Tutkimus metropolialueen nuorista*. Tutkimuksia 398. Helsingin yliopisto. http://urn.fi/URN:ISBN:978-952-03-0347-1

Hyde, J. S. & Mertz, J. E. (2009). Gender, culture, and mathematics performance. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 106(22), 8801–8807. https://doi.org/10.1073/pnas.0901265106

Jacobs, J. E. (1991). Influence of gender stereotypes on parent and child mathematics attitudes. *Journal of Educational Psychology*, 83(4), 518–527. https://doi.org/10.1037/0022-0663.83.4.518

Jakku-Sihvonen, R. (2013). Oppimistulosten arviointijärjestelmästä ja niiden kehittämishaasteista. Teoksessa A. Räisänen (toim.), *Oppimisen arvioinnin kontekstit ja käytännöt*. Raportit ja selvitykset 2013: 3. Opetushallitus, 13–36.

Jiang, Y., Song, J., Lee, M. & Bong, M. (2014). Self-efficacy and achievement goals as motivational links between perceived contexts and achievement. *Educational Psychology, 34*(1), 92–117. https://doi.org/10.1080/01443410.2013.863831

Jokivuori, P. & Hietala R. (2007). *Määrällisiä tarinoita. Monimuuttujamenetelmien käyttö ja tulkinta*. WSOY.

Jordan, N. C., Kaplan, D., Nabors Olah, L. N. & Locuniak, M. N. (2006). Number sense growth in kindergarten: A longitudinal investigation of children at risk for mathematics difficulties. *Child Development*, 77(1), 153–175. https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2006.00862.x

Jorgensen, R. & Niesche, R. (2008). Equity, mathematics and classroom practice: Developing rich mathematical experiences for disadvantaged students. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 13(4), 21–27.

Kadijevich, D. (2008). TIMSS 2003: Relating Dimensions of Mathematics Attitude to Mathematics Achievement. Zbornik Instituta za pedagoska istrazivanja, 40(2), 327-346. http://dx.doi.org/10.2298/ZIPI0802327K

Kalalahti, M. & Varjo, J. (2012). Tasa-arvo ja oikeudenmukaisuus perusopetukseen sijoittumisessa ja valikoitumisessa. *Kasvatus & Aika* 6(1), 39–55.

Kass, G. (1980). An exploratory technique for investigating large quantities of categorical data. *Applied Statistics*, 29(2), 119–127. https://doi.org/10.2307/2986296

Keltikangas-Järvinen, L. (2006). *Temperamentti ja koulumenestys*. WSOY.

Keogh, B. K. (2003). *Temperament in the classroom: Understanding individual differences*. Paul H Brookes Publishing.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (ed.) (2001). *Adding it up. Helping children learn mathematics*. National Academy Press.

Klein, P. S., Adi-Japha, E. & Hakak-Benizri, S. (2010). Mathematical thinking of kindergarten boys and girls: Similar achievement, different contributing processes. *Educational Studies in Mathematics*, 73(3), 233–246. https://www.jstor.org/stable/40603169

Koponen, T., Aunola, K., Ahonen, T. & Nurmi, J.-E. (2007). Cognitive predictors of singledigit and procedural calculation skills and their covariation with reading skill. *Journal of Experimental Child Psychology,* 97(3), 220–241. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2007.03.001

Koskinen, R. (2016). *Mielekäs oppiminen matematiikan opetuksen lähtökohtana. Systemaattinen analyysi Journal for Research in Mathematics Education aikakauslehden artikkelien pohjalta*. Helsingin yliopisto. http://urn.fi/URN:ISBN:978-951-51-1136-4

Koskinen, R. & Pitkäniemi, H. (2020). Matematiikan opetus mielekkään oppimisen edistämisessä: Integratiivista mallia kohti. *Ainedidaktiikka*, *4*(1), 79–98. https://doi.org/10.23988/ad.82548

Kosunen, S. (2016). *Families and the social space of school choice in urban Finland*. Studies in educational sciences 267. University of Helsinki.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. University of Chicago Press.

Kupari, P. (1999). *Laskutaitoharjoittelusta ongelmanratkaisuun. Matematiikan opettajien matematiikkauskomukset opetuksen muovaajina*. Jyväskylän yliopisto. Koulutuksen tutkimuslaitos. Tutkimuksia 7.

Kupari, P. & Nissinen, K. (2013). *Background factors behind mathematics achievement in Finnish education context: explanatory models based on TIMSS 1999 and TIMSS 2011 data.* Paper presented in the 5th IEA international research Conference. June 26–28. Singapore. www.iea.nl/irc-2013.html.

Kupari, P. & Nissinen, K. (2015). Matematiikan osaamisen taustatekijät. Teoksessa J. Välijärvi & P. Kupari (toim.), *Millä eväillä osaaminen uuteen nousuun? PISA 2012 tutkimustuloksia*. Opetus- ja kulttuuriministeirön julkaisuja 2015: 6, 10–27. http://julkaisut.valtioneuvosto.fi/bitstream/handle/10024/75126/okm6.pdf

Kupari, P., Sulkunen, S., Vettenranta, J. & Nissinen, K. (2012). *Enemmän iloa oppimiseen. Neljännen luokan oppilaiden lukutaito sekä matematiikan ja luonnontieteiden osaaminen. Kansainväliset PIRLS- ja TIMSS-tutkimukset Suomessa*. Jyväskylän yliopisto. http://urn.fi/URN:ISBN:978-951-39-5011-8

Kuukka, K. & Metsämuuronen, J. (2016). *Perusopetuksen päättövaiheen suomi toisena kielenä (S2) -oppimäärän oppimistulosten arviointi 2015*. Julkaisut 2016:13. Kansallinen koulutuksen arviointikeskus. https://karvi.fi/app/uploads/2016/05/KARVI_1316.pdf

Laine, S. (2010). *Lahjakkuuden ja erityisvahvuuksien tukeminen*. Opetushallitus. https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/181728_1a_lahjakkuuden_ja_erityisvahvuuksien_tunnistaminen-1_0.pdf

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. Teoksessa R. Leikin, A. Berman & B. Koichu (toim.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students*. Sense Publisher, 129–145.

Leikin, R. (2014). Giftedness and high ability in mathematics. Teoksessa S. Lerman (toim.), *Encyclopedia of mathematics education*. Springer Netherlands, 247–251. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_65

Leikin R. (2018) Giftedness and High Ability in Mathematics. Teoksessa S. Lerman (toim.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_65-4

Leino, K., Ahonen, A., Hienonen, N., Hiltunen, J., Lintuvuori, M., Lähteinen, S., Lämsä, J., Nissinen, K., Nissinen, V., Puhakka, E., Pulkkinen, J., Rautopuro, J., Sirén, M., Vainikainen, M-P. & Vettenranta J. (2019.) *PISA18 ensituloksia. Suomi parhaiden joukossa*. Opetus- ja kulttuuriministeriön julkaisuja 2019:40. http://urn.fi/URN:ISBN:978-952-263-678-2

Lindberg, S., Linkersdörfer, J., Ehm, J.-H., Hasselhorn, M. & Lonnemann, J. (2013). Gender differences in children's math self-concept in the first years of elementary school. *Journal of Education and Learning,* 2(3), 1–8. https://doi.org/10.5539/jel.v2n3p1

Loh, W. Y. (2014). Fifty Years of Classification and Regression Trees. *International Statistical Review*, 82, 3, 329–348. https://doi.org/10.1111/insr.12016

Loh, W. Y. & Shih, Y. S. (1997). Split selection methods for classification trees. *Statistica Sinica*, 7, 815–840. http://www3.stat.sinica.edu.tw/statistica/oldpdf/A7n41.pdf

Lord, F. M. & Novick M. R. (1968). *Statistical theories of Mental test Scores*. Addison-Wesley.

Lukin, T. (2013). *Motivaatio matematiikan opiskelussa – seurantatutkimus motivaatiotekijöistä ja niiden välisistä yhteyksistä yläkoulun aikana*. Publications of the University of Eastern Finland. Dissertation in Education, Humanities, and Theology; 47.

Lüftenegger, M., Kollmayer, M., Bergsmann, E., Jöstl, G., Spiel, C. & Schober, B. (2015). Mathematically gifted students and high achievement: the role of motivation and classroom structure, *High Ability Studies, 26*(2), 227–243. https://doi.org/10.1080/13598139.2015.1095075

Ma, X. & Kishor, N. (1997). Assessing the relationship between attitude toward mathematics and achievement in mathematics: A meta-analysis. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(1), 26–47. https://doi.org/10.2307/749662

Marks, G. N., Cresswell, J. & Ainley, J. (2006). Explaining Socioeconomic inequalities in student achievement. The role of home and school factors. *Educational Research and Evaluation*, 12(2), 105–128. https://doi.org/10.1080/13803610600587040

Marsh, H. W., Parker, P. D. & Pekrun, R. (2019). Three paradoxical effects on academic self-concept across countries, schools and students: Frame-of-reference as a unifying theoretical explanation. *European Psychologist*, 24(3), 231–242. https://doi.org/10.1027/1016-9040/a000332

Mattila, L. & Rautopuro, J. (2013). Koulukohtaisia tuloksia. Teoksessa J. Rautopuro (toim.), *Hyödyllinen pakkolasku. Matematiikan oppimistulokset perusopetuksen päättövaiheessa 2012*. Koulutuksen seurantaraportit 2013:3. Opetushallitus. Juvenes Print – Suomen Yliopistopaino Oy, 55–64.

McCoach, D. B. & Siegle, D. (2003). Factors that differentiate underachieving gifted students from high-achieving gifted students. *Gifted Child Quarterly, 47*(2), 144–154. https://doi.org/10.1177/001698620304700205

McNeish, D. (2018). Thanks coefficient alpha, we'll take it from here. *Psychological Methods*, 23(3), 412–433. https://doi.org/10.1037/met0000144

Metsämuuronen, J. (2003). *Tutkimuksen tekemisen perusteet ihmistieteissä*. International Methelp Ky.

Metsämuuronen, J. (2009). *Metodit arvioinnin apuna. Perusopetuksen oppimistulos- arviointien ja -seurantojen menetelmäratkaisut Opetushallituksessa*. Oppimistulosten arviointi 1/2009. Opetushallitus.

Metsämuuronen, J. (2010). Osaamisen ja asenteiden muutos perusopetuksen 3.–5. luokilla. Teoksessa E. K. Niemi & J. Metsämuuronen (toim.), *Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008*. Koulutuksen seurantaraportti 2010:2. Opetushallitus. Edita Prima Oy, 93–136.

Metsämuuronen, J. (2011). *Tutkimuksen tekemisen perusteet ihmistieteissä: tutkijalaitos*. E-kirjan 1. painos. International Methelp.

Metsämuuronen, J. (2012). Challenges of the Fennema-Sherman Test in the International Comparisons. *International Journal of Psychological Studies*, 4(3). http://doi.org/10.5539/ijps.v4n3p1

Metsämuuronen, J. (2013). *Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkittäisarviointi vuosina 2005–2012*. Koulutuksen seurantaraportit 2013:4. Opetushallitus.

Metsämuuronen, J. (2017). *Oppia ikä kaikki – Matemaattinen osaaminen toisen asteen koulutuksen lopussa 2015*. Kansallinen koulutuksen arviointikeskus. Julkaisut 1:2017. Juvenes Print – Suomen Yliopistopaino Oy.

Metsämuuronen, J. (2022). The effect of various simultaneous sources of mechanical error in the estimators of correlation causing deflation in reliability: seeking the best options of correlation for deflation-corrected reliability. *Behaviormetrika* 49, 91–130. https://doi.org/10.1007/s41237-022-00158-y

Metsämuuronen, J. & Tuohilampi, J. (2017). *Matemaattinen osaaminen lukiokoulutuksen lopulla 2015*. Kansallinen koulutuksen arviointikeskus. Julkaisut 3:2017. Juvenes Print – Suomen Yliopistopaino Oy.

Metsämuuronen, J., Svedlin, R. & Ilic, J. (2012). Change in Pupils' and Students' Attitudes toward School as a Function of Age – A Finnish Perspective. *Journal of Educational and developmental Psychology, 2*(2), 134–151. https://doi.org/10.5539/jedp.v2n2p134

Moberg, S. (2001). Opettajien näkemykset inklusiivisesta opetuksesta. Teoksessa P. Murto, A. Naukkarinen & T. Saloviita (toim.) *Inkluusion haaste koululle – Oikeus yhdessä oppimiseen*. PS-kustannus, 82–95.

Murayama, K., Pekrun, R., Lichtenfeld, S. & vom Hofe, R. (2012). Predicting Long-Term Growth in Students' Mathematics Achievement: The Unique Contributions of Motivation and Cognitive Strategies. *Child Development*, 84(4), 1475–1490. https://doi.org/10.1111/cdev.12036

Myrskylä, P. (2009). *Koulutus periytyy edelleen*. Hyvinvointikatsaus 1/2009. https://www.stat.fi/artikkelit/2009/art_2009-03-16_002.html?s=0

Mönks, F. J. (1992). Development of gifted children: the issue of identification and programming. Teoksessa F.J. Mönks & W. A. M. Peters (toim.), *Talent for the Future, Proceedings of the Ninth World Conference on Gifted and Talented Children*. VanGorcum, 191–202.

Mönks, F. J. & Mason, E. M. (2000). Developmental psychology and giftedness: theories and research. Teoksessa K. A. Heller, F. J. Mönks, R. J. Sternberg & R. F. Subotnik (toim.), *International Handbook of Giftedness and Talent, 2nd Edition*. Elsevier Science, 141–155. https://doi.org/10.1016/B978-008043796-5/50010-3

Nagelkerke, N. J. D. (1991). A note on a general definition of the coefficient of determination. *Biometrika*, Volume 78(3), 691–692. https://doi.org/10.2307/2337038

Niemi, H. (2012). The societal factors contributing to education and schooling in Finland. Teoksessa H. Niemi, A. Toom, & A. Kallioniemi (toim.), *Miracle of education*. Sense Publishers, 19–38.

Niemivirta, M. (2004). Tyttöjen ja poikien väliset erot oppimismotivaatiossa. Teoksessa E. Vitikka (toim.), *Koulu – sukupuoli – oppimistulokset*. Opetushallitus, 42–53.

Nummenmaa, L., Holopainen, M. & Pulkkinen, P. (2016). *Tilastollisten menetelmien perusteet*. Sanoma Pro Oy.

O'Neal, M. R., Ernest, P. S., McLean, J. E. & Templeton, S. M. (1988). *Factorial validity of the Fennema-Sherman Attitude Scales*. Paper presented at the annual meeting of the Mid-South Educational Research Association, Louisville, KY. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED303493.pdf

Ogbuehi, P. & Fraser, B. (2007). Learning environment, attitudes and conceptual development associated with innovative strategies in middle-school mathematics. *Learning environments research*, 10(2), 101–114. https://doi.org/10.1007/s10984-007-9026-z

Opetushallitus. (2003). *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003. Nuorille tarkoitetun lukiokoulutuksen opetussuunnitelman perusteet*. Määräys 33/011/2003. Opetushallitus. Vammalan kirjapaino Oy.

Opetushallitus. (2004). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004*. Opetushallitus. Vammalan kirjapaino Oy.

Opetushallitus. (2009). *Ammatillisen perustutkinnon perusteet. Lapsi- ja perhetyön koulutusohjelma/osaamisala*. Määräys 18/011/2009. Opetushallitus. Oy Fram Ab.

Opetushallitus. (2014). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014*. Määräykset ja ohjeet 2014: 96. Opetushallitus. Juvenes Print – Suomen Yliopistopaino Oy.

Opetushallitus. (2015). *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015*. Määräykset ja ohjeet 2015: 48. Next Print Oy.

Oppermann, E., Vinni-Laakso, J., Juuti, K., Loukomies, A. & Salmela-Aro, K. (2021). Elementary school students' motivational profiles across Finnish language, mathematics and science: Longitudinal trajectories, gender differences and STEM aspirations. *Contemporary Educational* Psychology, 64(13), 101927. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2020.101927

Ouakrim-Soivio, N. (2013). *Toimivatko päättöarvioinnin kriteerit? Oppilaiden saamat arvosanat ja Opetushallituksen oppimistulosten seuranta-arviointi koulujen välisten osaamiserojen mittareina*. Raportit ja selvitykset 2013: 9. https://helda.helsinki.fi/bitstream/handle/10138/41026/ouakrim-soivio_vaitoskirja.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Ouakrim-Soivio, N. & Kuusela, J. (2012). *Historian ja yhteiskuntaopin oppimistulokset perusopetuksen päättövaiheessa 2011*. Koulutuksen seurantaraportit 2012:3. Opetushallitus. Juvenes Print – Tampereen yliopistopaino Oy.

Ouakrim-Soivio, N., Pulkkinen, J., Rautopuro, J. & Hilden, R. (2018). Toteutuuko perusopetuksen tasa-arvo? Katsaus oppimistulosten arviointeihin. *Kasvatus,* 49(5), 415–430.

Pajares, F. (2003). Self-efficacy beliefs, motivation, and achievement in writing: a review of the literature. *Reading & Writing Quarterly, 19*(2), 139–158. https://doi.org/10.1080/10573560308222

Pajares, F. & Miller, M. D. (1994). Role of self-efficacy and self-concept beliefs in mathematical problem solving: A path analysis. *Journal of Educational Psychology*, 86(2), 193–203. https://doi.org/10.1037/0022-0663.86.2.193

Parsons, S., Croft, T. & Harrison, M. (2009). Does students' confidence in their ability in mathematics matter? *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*, 28(2), 53–68, https://doi.org/10.1093/teamat/hrp010

Pedhazur, E. (1982). *Multiple Regression Analysis in Behavioral Research*. Holt, Rinehart and Winston.

Perusopetuslaki 1998/628. Saatavilla: https://www.finlex.fi/fi/laki/ajantasa/1998/19980628

Phillips, N. & Lindsay, G. (2006). Motivation in gifted students. *High Ability Studies, 17*(1), 57– 73. https://doi.org/10.1080/13598130600947119

Pulkkinen, L. & Caspi, A. (2002). *Paths to successful development: Personality in the life course*. Cambridge University Press.

Pääkkönen, J. (2013). Sukupuolten väliset erot matematiikan ja luonnontieteiden osaamisessa lukiossa. *Yhteiskuntapolitiikka* 78:4, 447–456. https://core.ac.uk/download/pdf/18618614.pdf

Rasch, G. (1960*). Probabilistic models for some intelligence and attainment tests*. Danmarks Pædagogishe Institut. Studies in Mathematic Psychology I. Nielsen & Lydiche.

Rautopuro, J. & Nissinen, K. (2021). *Näkökulmia perusopetuksen tasa-arvoon*. Selvitystä varten annettu lausunto. https://api.hankeikkuna.fi/asiakirjat/e57d8e02-1729-464d-8610-6178679904f8/79558e04-1ee4-4d84-bb63-90e6b7466c10/KIRJE_20210128093639.PDF

Renzulli, J. S. & Reis, S. M. (1985). *The Schoolwide enrichment model: A comprehensive plan for educational excellence*. Creative Learning Press.

Retelsdorf, J., Schwartz, K. & Asbrock, F. (2015). "Michael can't read!" Teachers' gender stereotypes and boys' reading self-concept. *Journal of*

Educational Psychology, 107(1), 186–194. https://doi.org/10.1037/a0037107

Rinne, R. (2011). Demokratia, koulutuksen kasautuvuus ja aikuiskoulutuspolitiikka. Teoksessa R. Rinne & A. Jauhiainen (toim.) *Aikuiskasvatus ja demokratian haaste*. Kansanvalistusseura ja Aikuiskasvatuksen Tutkimusseura, 12–45.

Rita, H. (2004). Vetosuhde (*odds ratio*) ei ole todennäköisyyksien suhde. *Metsätieteen aikakauskirja,* 2, 207–212. https://doi.org/10.14214/ma.6249

Robinson, K. & Harris, A. (2014). *The broken compass: parental involvement with children's education*. Harvard University Press.

Roe, A. (1951). A psychological study of physical scientists. *Genetic Psychology Monograph*, 43(2), 121–235.

Roesken, B., Hannula, M. & Pehkonen, E. (2011). Dimensions of students' view of themselves as learners of mathematics. *ZDM – The International Journal of Mathematics Education*, 43(4), 497–506. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0315-8

Roznowski, M., Hong, S. & Reith, J. (2000). A further look at youth intellectual giftedness and its correlates: Values, interests, performance and behavior. *Intelligence*, 28(2), 87–113. https://doi.org/10.1016/S0160-2896(99)00032-X

Ruokamo, H. (2000). *Matemaattinen lahjakkuus ja matemaattisten sanallisten ongelmanratkaisutaitojen kehittäminen teknologiaperustaisessa oppimisympäristössä*. Tutkimuksia 212. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. Yliopistopaino.

Ryan, R. M. & Deci, E. L. (2000). Self-determination theory and the facilitation of intrinsic motivation, social development, and well-being. *American Psychologist*, 55(1), 68–78. https://doi.org/10.1037/0003-066X.55.1.68

Ryan, R. M. & Deci, E. L. (2017). *Self-determination theory: Basic psychological needs in motivation, development and wellness*. The Guilford Press.

Räsänen, P. & Närhi, V. (2013). Heikkojen oppijoiden koulupolku. Teoksessa J. Metsämuuronen (toim.), *Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkittäisarviointi vuosina 2005–2012*. Koulutuksen seurantaraportit 2013:4. Opetushallitus. Juvenes Print – Suomen Yliopistopaino Oy, 173–230.

Räsänen, P., Närhi, V. & Aunio, P. (2010). Matematiikassa heikosti suoriutuvat oppilaat perusopetuksen 6. luokan alussa. Teoksessa E. K. Niemi & J. Metsämuuronen (toim.), *Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008*. Koulutuksen seurantaraportti 2010:2. Opetushallitus. Edita Prima Oy, 165–204.

Saarinen, A. (2020). *Equality in Cognitive Learning Outcomes: the Roles of Educational Practices*. Helsinki Studies in Education, number 97.

Salmela-Aro, K. (2018). Motivaatio ja oppiminen kulkevat käsi kädessä. Teoksessa K. Salmela-Aro (toim.), *Motivaatio ja oppiminen*. PS-kustannus, 9–22.

Salmela, M. (2016). *Tie ylioppilastutkinnon huippuarvosanoihin laudaturylioppilaiden kertomana*. Lapin yliopisto.

Salmela, M. & Uusiautti, S. (2015). A positive psychological viewpoint for success at school 10 characteristic strengths of the Finnish high-achieving students. *High Ability Studies*, 26(1), 117–137. https://doi.org/10.1080/13598139.2015.1019607

Saloviita, T. (2020) Attitudes of Teacher Towards Inclusive Education in Finland. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 64(2), 270–282. https://doi.org/10.1080/00313831.2018.1541819

Savolainen, H., Engelbrecht, P., Nel, M. & Malinen, O. (2012). Understanding teachers' attitudes and self-efficacy in inclusive education: implications for pre-service and in-service teacher education. *European Journal of Special Needs Education*, 27(1), 51–68. https://doi.org/10.1080/08856257.2011.613603

Schneider, B. (1993). *Children's Social Competence in Context: The Contributions of family, school and culture*. University of Ottawa. Pergamon Press.

Schunk, D. & Richardson, K. (2011). Motivation and Self-Efficacy in Mathematics Education. Teoksessa D. J. Brahier & W. R. Speer (toim.), *Motivation and disposition: Pathways to learning mathematics*. The National Council of Teachers of Mathematics.

Schunk, D. H. (1991). Self-efficacy and academic motivation. *Educational Psychologist*, 26, 207–231. http://libres.uncg.edu/ir/uncg/f/d_schunk_self_1991.pdf

Seppänen, P., Kalalahti, M., Rinne, R. & Simola, H. (toim.) (2015). *Lohkoutuva peruskoulu. Perheiden kouluvalinnat, yhteiskuntaluokat ja koulutuspolitiikka*. Kasvatusalan tutkimuksia 68. Suomen kasvatustieteellinen seura.

Sheffield, L. J. (1994). *The Development of Gifted and Talented Mathematics Students and the National Council of Teachers Mathematics Standards*. Northern Kentucky University. https://www.academia.edu/51305601/The_Development_of_Gifted_and_Talented_Mathematics_Students_and_the_National_Council_of_Teachers_of_Mathematics_Standards

Sheffield, L. J., Bennett, J., Berriozabal, M., DeArmond, M. & Wertheimer, R. (1999). Report of the NCTM task force on the mathematically promising.

Teoksessa L. J. Sheffield (toim.), *Developing mathematically promising students*. NCTM, 309–316.

Sijtsma, K. (2009). On the Use, the Misuse, and the Very Limited Usefulness of Cronbach's Alpha. *Psychometrika,* 74(1), 107–120. https://doi.org/10.1007/s11336-008-9101.0

Slavin, R. E., Lake, C. & Groff, C. (2009). Effective programs in middle and high school mathematics: A best-evidence synthesis. *Review of Educational Research*, 79(2), 839–911. https://doi.org/10.3102/0034654308330968

Song, Y. & Lu, Y. (2015). Decision tree methods: applications for classification and prediction. *Shanghai Arch Psychiatry*, 27(2), 130–135. https://doi.org/10.11919%2Fj.issn.1002-0829.215044

Soro, R. (2002). *Opettajien uskomukset tytöistä, pojista ja tasa-arvosta matematiikassa*. Painosalama Oy.

Souvignier, E. & Kronenberger, J. (2007). Cooperative learning in third graders' jigsaw groups for mathematics and science with and without questioning training. *British Journal of Educational Psychology*, 77(4), 755–771. https://doi.org/10.1348/000709906X173297

Stanat, P. & Christensen, G. (2006). *Where Immigrant Students Succeed – A Comparative Review of Performance and Engagement in PISA 2003.* OECD Publishing.

Star, J. R., Smith III, J. P. & Jansen, A. (2008). What students notice as different between reform and traditional mathematics programs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(1), 9–32.

Sternberg, R. J. (2003). A Broad View of Intelligence: The Theory of Successful Intelligence. *Consulting Psychology Journal: Practice and Research*, 55(3), 139–154. https://doi.org/10.1037/1061-4087.55.3.139

Sternberg, R. J. & Davidson, J. E. (toim.) (2005). *Conceptions of giftedness.* Cambridge University Press.

Suárez-Álvarez, J., Fernández-Alonso, R. & Muñiz, J. (2014). Self-concept, motivation, expectations and socioeconomic level as predictors of academic performance in mathematics. *Learning and Individual Differences, 30*, 118–123. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2013.10.019

Suominen, E. (2013). *Korkeakoulutus periytyy – mitä voidaan tehdä?*. Tulevaisuuden yliopisto. http://tulevaisuudenyliopisto.fi/post/64670610356/korkeakoulutus-periytyy-mit%C3%A4- voidaan-tehd%C3%A4

Szabo, A. (2015). Mathematical problem-solving by high achieving students: Interaction of mathematical abilities and the role of the mathematical memory. Teoksessa K. Krainer & N. Vondrová (toim.), *Proceedings of CERME9*. Prague: Czech Republic: Charles University and ERME, 1087–1093.

Tabachnick, B. G. & Fidell, L. S. (2007). *Using Multivariate Statistics*. Fifth Edition. Pearson.

Tarkkonen, L. (1987). *On Reliability of Composite Scales. An Essay on the Properties of the Coefficients of Reliability – An Unified Approach*. Tilastotieteellisiä tutkimuksia 7. Helsinki: Finnish Statistical Society.

Tarkkonen, L. & Vehkalahti, K. (2005). Measurement errors in multivariate scales. *Journal of Multivariate Analysis*, 96(1), 172–189. https://doi.org/10.1016/j.jmva.2004.09.007

Tiedemann, J. (2002). *Teachers' gender stereotypes as determinants of teacher perceptions in elementary school mathematics*. Educational Studies in Mathematics, 50, 49–62.

Tirri, K. & Kuusisto, E. (2013). How Finland Serves Gifted and Talented Pupils. *Journal for the Education of the Gifted, 36*(1), 84–96. https://doi.org/10.1177/0162353212468066

Tuijula, T. (2011). *"Jos tietää, mitä haluaa." Seurantatutkimus lukio-opiskelijoiden itsesäätelystä, opiskelun kulusta ja odotusten toteutumisesta*. Turun yliopisto. Väitösrkirja, sarja C:316.

Tuohilampi, L. & Hannula, M. (2013). Matematiikkaan liittyvien asenteiden kehitys sekä asenteiden ja osaamisen välinen vuorovaikutus 3, 6. ja 9. luokalla. Teoksessa J. Metsämuuronen (toim.), *Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkittäisarviointi vuosina 2005–2012*. Koulutuksen seurantaraportit 2013:4. Opetushallitus.

Tuohilampi, L., Hannula, M. & Varas, L. (2013). 9-year old students' self-related belief structures regarding mathematics: a comparison between Finland and Chile. Teoksessa M. S. Hannula, P. Portaankorva-Koivisto, A. Laine & L. Näveri (toim.), *Current state of research on mathematical beliefs XVIII: Proceedings of the MAVI-18 Conference, September 12–15, 2012, Helsinki, Finland*. Suomen ainedidaktisen tutkimusseuran julkaisuja: Ainedidaktisia tutkimuksia, no. 6, Suomen ainedidaktinen tutkimusseura ry, Helsinki, 15–26.

Uusikylä, K. (1994). *Lahjakkaiden kasvatus*. WSOY.

Vansteenkiste, M., Simons, J., Lens, W., Sheldon, K. M. & Deci, E. L. (2004). Motivating learning, performance, and persistence: The synergistic effects of intrinsic goal contents and autonomy-supportive contexts. *Journal of Personality and Social Psychology*, 87(2), 246–260. https://doi.org/10.1037/0022-3514.87.2.246

Vanttaja, M. (2002). *Koulumenestyjät. Tutkimus laudaturylioppilaiden koulutus- ja työurista*. Suomen kasvatustieteellinen seura.

Venkat, H. & Brown, M. (2009). Examining the implementation of the mathematics strand of the Key Stage 3 Strategy: What are the bases of evaluation? *British Educational Research Journal*, 35(1), 5–24. https://doi.org/10.1080/01411920802041665

Vettenranta, J., Hiltunen, J., Kotila, J., Lehtola, P., Nissinen, K., Puhakka, E., Pulkkinen, J. & Ström, A. (2020). *Perustaidoista vauhtia koulutielle. Neljännen luokan oppilaiden matematiikan ja luonnontieteiden osaaminen. Kansainvälinen TIMSS 2019- tutkimus Su*omessa. Koulutuksen tutkimuslaitos. https://jyx.jyu.fi/handle/123456789/73016

Vettenranta, J., Välijärvi, J., Ahonen, A., Hautamäki, J., Hiltunen, J., Leino, K., Lähteinen, S., Nissinen, K., Nissinen, V., Puhakka, E., Rautopuro, J. & Vainikainen M.-P. (2016). *PISA15 Ensituloksia. Huipulla pudotuksesta huolimatta*. Opetus- ja kulttuuriministeriön julkaisuja 2016: 41.

Vilenius-Tuohimaa, P., Aunola, K. & Nurmi, J.-E. (2008). The association between mathematical word problems and reading comprehension. *Educational Psychology*, 28(4), 409–426. https://doi.org/10.1080/01443410701708228

Vlahovic-Stetic, V., Vidovic, V. V. & Arambasic, L. (1999). Motivational characteristics in mathematical achievement: a study of gifted high-achieving, gifted underachieving and non-gifted pupils. *High Ability Studies, 10*(1), 37–49. https://doi.org/10.1080/1359813990100104

Välijärvi, J. (2017). *PISA 2015: oppilaiden hyvinvointi*. Koulutuksen tutkimuslaitos. https://ktl.jyu.fi/vanhat/julkaisut/julkaisuluettelo/julkaisut/2017/KTL-D118

Välijärvi, J. (2021). *Lausunto oikeus oppia -ohjelman tasa-arvoa koskevaan selvitykseen*. Selvitystä varten annettu lausunto. https://api.hankeikkuna.fi/asiakirjat/e57d8e02-1729-464d-8610-6178679904f8/9f45d3bc-2af9-4015-b5a0-5bdc246894e9/KIRJE_20210128093639.PDF

Wigfield, A. & Eccles, J. S. (2000). Expectancy–value theory of achievement motivation. *Contemporary Educational Psychology*, 25(1), 68–81. https://doi.org/10.1006/ceps.1999.1015

Wigfield, A. & Karpathian, M. (1991). Who am I and what can I do? Children's selfconcepts and motivation in achievement situations. *Educational Psychologist*, 26(3–4), 233–261. https://doi.org/10.1080/00461520.1991.9653134

Williams, T. & Williams, K. (2010). Self-efficacy and performance in mathematics: Reciprocal determinism in 33 nations. *Journal of Educational Psychology,* 102(2), 453–466. https://doi.org/10.1037/a0017271

Winheller, S., Hattie J. A. & Brown, G. T. (2013). Factors influencing early adolescents' mathematics achievement: High-quality teaching rather than relationships. *Learning Environments Research,* 16(1), 46–69. https://doi.org/10.1007/s10984-012-9106-6

Winner, E. (2000). The origins and ends of giftedness. *American Psychologist, 55*(1), 159–169. https://doi.org/10.1037/0003-066X.55.1.159
Ylioppilastutkintolautakunta (2021). *Tilastoja ylioppilastutkinnosta*. https://www.ylioppilastutkinto.fi/tietopalvelut/tilastot/tilastotaulukot
Yoshino, A, (2012). The Relationship between Self-Concept and Achievement in TIMSS 2007: A Comparison between American and Japanese Students. *International Review of Education*, 58(2), 199–219. http://dx.doi.org/10.1007/s11159-012-9283-7
Zimmerman, B. J. (2000). Self-efficacy: an essential motive to learn. *Contemporary Educational Psychology, 25*(1), 82–91. https://doi.org/10.1006/ceps.1999.1016