Geometrian tehtävät ylioppilaskirjoituksissa sähköistymisen jälkeen

Mikko Savolainen

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

MATEMAATTIS-LUONNONTIETEELLINEN TIEDEKUNTA
MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIGA FAKULTETEN
FACULTY OF SCIENCE

Tiedekunta – Fakultet – Faculty		Koulutusohjelma – Utbildningsprogram – Degree programme
Opintosuunta – Studieinrikting – Study track		
Tekijä – Författare – Author		
Työn nimi – Arbetets titel – Title		
Työn laji – Arbetets art – Level	Aika – Datum – Month and year	Sivumäärä – Sidoantal – Number of pages
Tiivistelmä – Referat – Abstract		
Avainsanat – Nyckelord – Keywords		
Säilytyspaikka – Förvaringställe – Where deposited		
Muita tietoja – Övriga uppgifter – Additional information		

Sisällys

Luku 1

Johdanto

Tutkimuksen aihe valittiin hyvin luonnollisesti sillä geometria on tutkijan suosikki matematiikan ala, sekä opetuksen sähköistyminen on myös erittäin lähellä tietojenkäsittelytiedettä opiskelevalle opettajalle. Tutkimus sai alkunsa 2020 syksynä, jolloinka matematiikan sähköiset ylioppilaskokeet olivat vielä suhteellisen tuoreita. Aiheen tutkija oli valinnut jo kuitenkin aikaisemmin, kun hän oli suorittamassa omia pedagokisia opintojaan.

Ensimmäiset sähköiset ylioppilaskokeet järjestettiin syksynä 2016, joihin kuului saksan, maantiedon ja filosofian kokeet. Tämä tutkimus käsittelee kuitenkin matematiikan kokeiden sähköisymistä, joidenka ensimmäiset sähköiset ylioppilaskokeet pidettiin keväällä 2019 [13]. Tutkimuksessa tullaan tarkastelemaan kevät 2016 – kevät 2021 kokeissa esiintyneitä geometrian tehtäviä niin kvalitatiivisen ja kvantitatiivisen tutkimuksen keinoin.

Luvussa 2 tutkija käy läpi geometrian ja yliopilaskokeiden historiaa, jonka avulla luodaan pohjaa tutkimuksen kahdelle pääaiheelle. Historiaa on käsitelty sen takia, että voidaan ymmärtää nykyisiä muutoksia hieman paremmin.

Luvuissa 3 ja 4 käsitellään tutkimuksen sisältöä ja tutkimuksessa käsiteltävät tutkimuskysymykset. Sen lisäksi luvussa 4 käydään läpi selkeä rajaus siitä, mitkä tehtävät on otetu huomioon mukaan tehtävissä ja mitä ei.

Luvussa 5 käydään läpi mitä muutoksia sähköinen ympäristö on tuonut tullessaan itse koetilanteeseen ja sielä sallittuihin apuvälineisiin. Tutkija on pyrkinyt selittämään koeymäristön muutoksia ylioppilaslauttakunnan määräysten, ohjeistuksien ja selitteiden pohjalta.

Luku 6 on tutkimuksen kvantitiivinen osuus, missä tutkija käsittelee ylioppilaslauttakunnalta saatua dataa ja nostaa esille tutkimuksen osallta oleellisen tiedon. Syvällisempi pohdinta on jätetty kuitenkin yhteeveto kappaleeseen.

Luku 7 tutkimuksen kvalitatiivissessa osuudessa tutkija tutkii tehtäviä Bloomin taksonomian avulla antaen ensiksi arvosanana jokaiselle tutkimuksessa olevalle tehtävällä sen kognitiivisen haastavuuden perusteella. Näitä arvosanoja vertailemalla tutkija pyrkii löytämään mahdolliset trendit eri kokeiden haastavuuden välillä.

Luvuissa 8 ja 9 tutkija aluksi pyrkii vastaamaan esitettyihin tutkimuskysymyksiin aikaisempien kappaleiden perusteella. Sen lisäksi tutkija tarkastelee tutkimuksen luotettavuutta ja siihen vaikuttavia syitä.

Luku 2

Geometrian ja ylioppilaskokeiden historiaa

2.1 Geometria

Geometrian syntyperää on lähes mahdotonta määrittää aiheen laajuuden takia. Termi geometria on syntyperältään kreikasta ja tulee sanasta geometrein, joka tarkoittaa maan mittausta. Tämän määritelmän perusteella kreikkalaiset historoitsijat Herodotus ja Proclus ehdottivat geometrian syntyperäksi muinaista Egyptiä ja sen asukkaita. Egyptiläiset osasivat laskea tasojen pinta-aloja ja joidenkin kappaleiden tilavuukisa. Tätä osaamista hyödynnettiin esimerkiksi maanmittauksissa vuotuisten Niilin tulvien jälkeen. Tarkempaa syntyperää geometrialle ei olla pystytty määrittämään, koska siitä ei ole säilynyt aiheeseen liittyvää kirjallisuutta. Sitä on oletettavasti ollut jo aikaisemminkin jossain muodossa. [4]

Kreikassa geometria alkoi kehittyä tieteeksi sen nykyisessä merkityksessä. Geometrian pikainen kehitys kreikassa alkoi kahden kreikkalaisen filosofin Thales ja Pythagoras toimesta 6. vuosisadalla eaa. Heidän aikanaan ja sen jälkeen geometriaa oli mukana kehittämässä myös moni muu kreikkalainen matemaatikko (mm. Plato, Hippocrates) vielä 4. vuosisadalle eaa. asti. [3]. Tällä aikavälillä kreikassa tehtiin suuira edistyksiä luonontieteiden ja matematiikan osalta. Geometria matematiikan haarana kehittyi huomattavasti ja ajan filosofit alkoivat esittämään kysymyksiä, miten asiat toimivat ja matematiikasta tuli paljon teoriapohjaisempaa. [4]

Seuraava tärkeä vaihe geometrian historiassa noin 300 vuotta eaa. on Eukleides Alexandrialaisen julkaisema geometrian oppikirja *Alkeet*. Alkeet on ehdottomasti yksi historian tärkeimmistä teoksista ja sen merkitystä matematiikan kehityksessä ei voi vähätellä. Teos on 13 kirjan kokoelma joka sisälsi 467 oletusta taso- ja avaruugeometriasta, joka kattoi kaiken siihen asti tunnetun geometrian. Teos ei perusta tekstiään havainoista, vaan kaikki esitetyt väitteet perustuu logiikkaan ja niistä rakennettuhin aksioomiin. Euklideksen teos ei ollut kuitenkaan puutteeton ja sitä on korjattu ja laajennettu vuosien aikana. Työ on kuitenkin sen verran tärkeä teos, että sen luoma aksiomaattinen järjestelmä on toiminut pohjana geometrian opetukselle. [4]. Teokseen perustuvaa opetusta on ollut suomen lukioissa jo ensimmäisestä perusopetuksen suunitelmassa.[6]

2.2 Ylioppilaskirjoitukset

Kirjalliset ylioppilaskokeet saivat alkunsa Suomessa vuona 1852, kun Keisarillinen Aleksanterin yliopiston sisäänpääsy vaatimukseksi tuli suorittaa uudistettu ylioppilastutkinto. Tutkinto suoritettiin osissa ja se alkoi kahdella kirjallisella kokeella. Ensimmäisessä kokeessa kokelas laati kirjoitelan tutkintolauttakunnan määräämästä aiheesta ja toisessa kokeessa hän käänsi sen latinaksi, tai muuuhun vieraaseen kieleen. Kokeet suoritettuaan hyväksytysti kokelas sai oikeuden osallistua kuulusteluun lukusuunitelmaan kuuluvista aineista. Yksi pakollisista lukusuunitelman aineista oli matematiikka ja sen kuulustelun avulla osallistunut osoitti matemaattisen osaamisensa.[12]

Uudistuksen oli tarkoitus varmentaa ylioppilaiksi hakevien tiedollinen kypsyys. Aikaisemmin yliopistoon saattoi hakea yksityisopettajalta saaduin todistuksin, mutta nyt kaikilla piti olla lukion tai vastaavan oppilaitoksen päättötodistus. Näin alkoi ylioppilastutkinnon muutos lukion päättötodistukseksi, kun ylioppilastutkintoa sidottiin muuhun koulujärjestelmään kirjoitetuin säädöksin.[12]

Kokeiden kirjallinen ja kuulustelu osuudet suoritettiin kokonaisuudessaan yliopistolla, mutta vuona 1874 keisari antoi uuden ohjesäännön ylioppilastutkintoa varten ja kirjalliset kokeet siirtyivät lukioon. Ylioppilasvaliokunta laati kirjalliset tehtävät eri aineiden kokeita varten. Kirjallisiin kokeisiin kuului vain äidinkielen kirjoitelma ja sen kääntäminen, mutta nyt kokeessa oli muunmoassa oltava myös vähintään kolme matematiikan tehtävää. Hyväksytyn kokeen suorittaneet saivat ilmottautua suuliseen kokeseen yliopiston rehtorille. Suullisen kuulustelun piti ylioppilastutkintokunta ja siihen kuului uskonto, vanhat kielet, historia ja matematiikka.[12]

Yliopistossa suoritettu kuulustelu poistui käytöstä vuonna 1919 uuden asetuksen seurauksena. Asetuksen seurauksena ylioppilastutkinto merkitys siirtyi oppikoulujen lukioasteen päättötutkinnoksi yliopiston alkeiskuulustelun sijaan. [12] Pakollisiksi kirjoitettaviksi aineiksi asetettiin äidinkieli, toinen kotimainen kieli, vieras kieli, matematiikka ja reaali aine.

Vuoteen 1983 asti lukiota on säädelty keskushallinnon määräyksin. Lukioiden lukusuunitelmat on annettu asetuksilla, johon opetusministeriö ja kouluhallitus on myöntänyt mahdollisia poikkeuksia. Uusi lukiolaki muutti opetussuunitelman laatimismenettelyä ja sisältöä. Kouluhallitus julkaisi *Lukion opetussuunitelman perusteet 1985*(Jatkossa LOPS85), joka oli ensimmäinen malliaan. LOPS85 antoi jokaiselle aineelle opetuksen tavoitteet ja oppisisällön, jonka mukaan ylioppilastutkinnon päätöskoe piti myös suunitella. Matematiikan oppisisältö oli jettu kahteen osaan *Yleinen oppimäärä* ja *Laaja oppimäärä*. Laajassa oppimäärästä löytyi kolme kurssia, johon oli sisällyetty geometriaa *"Vektorit. Geometriaa"*, *"Analyytistä Geometriaa"* ja *"Vektorilaskennan täydennys, Avaruusgeometria. Komplekisluvut"*. [6]

Ensimmäisen lukion opetussuunitelman perusteiden jälkeen on tehty muutama päivitetty versio. *Lukion opetussuunitelman perusteet 1994, -2003, -2015 ja -2019.* Kouluhallituksen tavoitteena on julkaista uudistettu versio aina kymmenen vuoden sisällä viimeisimmästä painoksesta. Viimeisin opetussuunitelma julkaistiin kuitenkin normaalia aikaisemmin, kun koulutuksen sähköistyminen vaati uutta ajankohtaisempaa ohjeistusta.

Vuoden 1994 opetussuunitelmassa tuli muutos matematiikan rakenteeseen. Yleinen - ja laaja oppimäärä muutettiin lyhyeksi - ja pitkäksi matematiikan oppimääräksi, joissa sisällön painopisteet erosivat toisistaan. Pitkässä matematiikassa oli geometrian kannalta kaksi tärkeää kurssia nimeltä *Geometria* ja *Analyyttinen geometria*. Lyhyessä matematiikassa oli vain yksi geometrian kurssi nimeltä *Geometria.* Vaikka pitkässä ja lyhyessä matematiikassa geometrian kursseilla oli samat nimet, niin niiden sisällöt poikkesivat toisistaan. Geometrian osuudelta kurssijako on pysynyt samanlaisena nyt uusimpaan opetussuunitelmaan (2019) saakka (ks. [11],[10]).

Ensimmäinen matematiikan sähköinen ylioppilas koe järjestettiin keväällä 2019. Sähköistyminen toi mukanaan paljon muutoksia kokeen suoritukseen, järjestämiseen ja hyväksyttyihin työkaluihin. Tutkija palaa näihin muutoksiin luvussa 5 *Sähköinen ympäristö ja työkalut.*

Luku 3

Tutkimuksen suoritus

Tutkimuksen tarkoitus on tarkastella onko sähköistymisellä ollut vaikutusta geometrian tehtäviin ylioppilaskirjoituksissa. Vastaus pyritään saada tutkimalla ja vertailemalla ylioppilaskirjoituksissa esiintyneitä geometrian tehtäviä ja niistä saatuja pisteitä. Tutkimukseen on valittu lyhyen ja pitkän matematiikan kirjoitus kerrat väliltä kevät 2016 - kevät 2021. Rajaus on valittu sen perusteella, että siihen on saatu mukaan tuorreimmat sähköiset yo kirjoitukset, sekä vastapainoksi myös kirjoituksia, joita ei ole tehty sähköisesti. Myöhemmässä kappaleessa käymme läpi, mitkä tehtävät on tarkastelua varten laskettu geometrian tehtäviksi ja minkä takia. Tutkimuksessa tarkasteltavia tehtäviä tullaan tutkimaan ylioppilastutkintolautakunnalta (jatkossa YTL) saadun datan avulla. YTL:n tarjoaman datan lisäksi tutkimus tarkastelee myös sähköistä koeympäristöä ja siinä olevia työkaluja, ja miten ne ovat muuttaneet kokeita ja niiden malliratkaisuja. Geometrian tehtävät on arvioitu myös Bloomin taksonomian avulla, jonka avulla tehtävien haastavuutta on vertailtu sähköisten ja ei-sähköisten kokeiden välillä.

Tutkimus pyrkii vastaamaan seuraaviin tutkimuskysymyksiin:

1. Onko geometrian tehtävät muuttuneet sähköistymisen seurauksena ja jos on, niin miten muutos on nähtävissä?

2. Miten geometristen tehtävien osuus on muutunut pisteytyksessä?

3.1 Tutkimuksen eri vaiheet

- Pitkän matematiikan tehtävien rajaus lukion opetussuunitelma perusteet 2015 (jatkossa LOPS 2015) geometria (MAA3) kurssin mukaisesti.

- Lyhyen matematiikan tehtävien rajaus LOPS 2015 geometria (MAB3) kurssin mukaisesti.

- Sähköisten työkalujen ja koeympäristön tarjoamien hyötyjen tutkinta.

- Tehtävien tarkastelu hyödyntäen Bloomin taksonomiaa.
- YTL:tä saadun raakadatan tutkinta ja tulkinta.
- Tutkimuksen yhteenveto ja tutkimuskysymyksiin vastaaminen.

Luku 4

Geometria lukion opetusuunitelmassa

Geometria on suhteellisen laaja käsite ja harva ylioppilaskirjoituksissa esiintyvistä tehtävistä koostuu pekästään geometriasta. Tukimusta varten tutkija on tehnyt rajauksen, joka määrittelee, mitkä tehtävistä tutkimus laskee geometrian tehtäviksi. Rajauksen tarkoitus on tarjota yksikäsitteinen määritelmä, minkä avula tehtäviä voidaan vertailla keskenään. Rajaus ollaan tehty LOPS 15 [9] mukaan, sillä koe määräyksissä ilmoitetaan, että tehtäviä laadittaessa otetaan huomioon Opetushallituksen hyväksymät opetussuunnitelman perusteet (ks. [19, 20, 18]). Seuraavaksi tutkija määrittelee pitkän ja lyhyen matematiikan vertailukelpoiset geometrian tehtävät.

4.1 Pitkän matematiikan geometrian tehtävien rajaus

.

Tutkimusta varten geometrian rajaus on pitkässä matematiikassa tehty pitkän matematiikan geometria (MAA3) kurssin keskeisiä sisältöjä ja aiheita tarkastellen. Jos tehtävä on laskettu vertailu kelpoiseksi, niin se on aihealueeltaan ollut LOPS 2015 geometria kurssin (MAA3) keskeistä sisältöä. Pitkän matematiikan pakollisiin kursseihin kuuluu myös analyyttisen geometrian kurssi (MAA5). Tutkimus ei ota tarkastelussa huomioon koe tehtäviä, jotka kuulvat tämän kurssin keskeisiin sisältöihin.

Keskeiset sisällöt Geometria (MAA3) kurssilla LOPS15 mukaan [9]:

- Kuvioiden ja kappaleiden yhdenmuotoisuus.
- Sini- ja kosinilause.
- Ympyrän, sen osien ja siihen liittyvien suorien geometria.

- kuvioihin ja kappaleisiin liittyvien pituuksien, kulmien, pinta-alojen ja tilavuuksien laskeminen.

Keskeiset aiheet Geometria (MAA3) kurssilla LOPS15 mukaan [9]:

Suorakulmaisen kolmion trigonometriaa	Tasogeometrian peruskäsitteitä
Kohtisuora projektio suoralle	Monikulmiot
Kolmio, sen kulmien summa ja pinta-ala	Kolmioon liittyviä lauseita
Kolmioiden luokittelu ja Pythagoraan lause	Yksikkömuunnokset
Sini ja kosini yli 90° kulmille	Kosinilause
Kolmion pinta-ala sinin avulla	Sinilause
Nelikulmio yleisesti, suunnikas ja puolisuunnikas	Säännöllinen monikulmio
Ympyrään liittyviä käsitteitä	Ympyrän piiri ja kaaren pituus
Ympyrään liittyviä pinta-aloja	Ympyrään liittyviä pinta-aloja
Ympyrään liittyviä kulmia	

Pitkän matematiikan kevät 2016 - kevät 2021 ylioppilaskirjoituksissa on yhteensä ollut 143 tehtävää. Näistä tehtävistä 20 on laskettu geometrian tehtäviksi. Näistä tehtävistä 6 on ollut osana sähköisiä kokeita ja loput 14 on tehty ilman sähköistä koeympäristöä. Alla taulukko näyttää, mitkä tehtävät miltäkin kirjoitus kerralta on laskettu mukaan. Taulukosta on hyvä huomata, että sähköisissä kokeissa on ollut vähemmän vertailu kelpoisia geometrian tehtäviä, kuin aikaisemmissa kokeissa.

Koe	Tehtävät	Lukumäärä
Kevät 2016	6, 7, 9.1, 13	4
Syksy 2016	5, 6	2
Kevät 2017	6, 7, 12	3
Syksy 2017	5, 6	2
Kevät 2018	6	1
Syksy 2018	8, 11	2
Kevät 2019	6	1
Syksy 2019	1	1
Kevät 2020	5	1
Syksy 2020	5	1
Kevät 2021	6, 12	2

Taulukko 4.1: Pitkän matematiikan vertailtavat tehtävät.

4.2 Lyhyen matematiikan geometrian tehtävien rajaus

Tutkimusta varten geometrian rajaus on lyhyen matematiikan kohdalla suoritettu geometria (MAB3) kurssin mukaisesti. Jos tehtävä on laskettu vertailukelpoiseksi, niin se on aihealueeltaan ollut geometria (MAB3) kurssin keskeistä sisältöä.

Keskeiset sisällöt Geometria (MAB3) kurssilla [9]:

- Kuvioiden yhdenmuotoisuus.
- Suorakulmaisen kolmion trigonometria.
- Pythagoraan lause ja Pythagoraan lauseen käänteislause.
- Kuvioiden ja kappaleiden pinta-alan ja tilavuuden määrttäminen.
- Geometrian menetelmien käyttö koordinaatistossa.

Keskeiset aiheet Geometria (MAB3) kurssilla LOPS15 mukaan [9]:

Geometrian peruskäsitteitä	Kulma
Vieruskulmat ja ristikulmat	Samankohtaiset kulmat
Yksikkömuunnokset	Monikulmiot
Kolmiot	Pythagoraan lause
Yhdenmuotoisuus	Trigonometriset funktiot
Koordinaatisto	Nelikulmiot
Ympyrä	Ympyräsektori
Ympyrän tangentti	Lieriö
Kartio	Pallo

Lyhyen matematiikan ylioppilaskirjoituskerroilla kevät 2016 - kevät 2021 on ollut yhteensä 143 tehtävää. Rajauksien jälkeen jäljelle jää 23 vertailukelpoista tehtävää, joista 13 on ollut osana sähköisiä kokeita ja 10 tehty ilman sähköistä koeympäristöä. Sähköisissä kokeissa on siis keskimääräisesti ollut enemmän klassisen geometrian tehtäviä, kuin ei sähöisissä.

Koe	Tehtävät	Lukumäärä
Kevät 2016	6	1
Syksy 2016	5, 6	2
Kevät 2017	6	1
Syksy 2017	2, 8	2
Kevät 2018	4, 13	2
Syksy 2018	2, 13	2
Kevät 2019	3, 5, 6, 10	4
Syksy 2019	2, 6, 12	3
Kevät 2020	5, 7, 11	3
Syksy 2020	7, 11	2
Kevät 2021	2	1

Taulukko 4.2: Lyhyen matematiikan vertailtavat tehtävät

Esimerkkejä

Seuraavaksi hieman esimerkkejä siitä, millaiset tehtävät on otettu tutkimuksessa huomioon. Esimerkiksi pitkän matematiikan kokeen kevät 2019 tehtävä *5: Paraabeleja pohjapiirroksessa* ei ole osana tutkimusta, mutta samalla pitkän matematiikan kirjoituskerran kevät 2020 tehtävä *5: Kuvioita ympyrässä* lasketaan mukaan tutkimukseen. Lyhyessä matematiikassa on tarjolla vain yksi geometrian kurssi, niin kaikki MAB3 kurssin alaiset tehtävät lasketaan mukaan. Esimerkki tehtäväksi sopii syksyn 2016 kokeen tehtävä 6.

Kevään 2019 tehtävä 5 ei tule mukaan vertailuun, vaikka onkin geometrinen tehtävä. Tehtävässä on tarkoitus selvittää paraabelien nollakohdat ja huiput, jonka jälkeen pinta-alan voi laskea integraalin avulla. Tehtävä on aihealueeltaan siis kurssin MAA5 analyytinen geometria sisältöä, eikä tämän takia kyseistä tehtävää oteta huomioon tehtävien vertailussa.

Toisaalta pikän matematiikan kirjoituskerran kevät 2020 tehtävä 5 tulee mukaan vertailuun. Tehtävässä tulee hyödyntää kuvioiden yhdenmuotoisuutta ja laskea ympyröiden pinta-aloja. Tehtävä kuuluu aihealueeltaan MAA3 geometria kurssiin.

Lyhyen matematiikan kokeessa syksy 2016 on esimerkki tehtävästä, joka lasketaan mukaan. Tehtävässä 6 kokeen tekijän pitää laskea katkaistun kartion ja lieriön yhdistetty tilavuus. Tehtävä kuuluu aihealueeltaan MAB3 geometria kurssiin ja on siksi vertailukelpoinen

Luku 5

Sähköinen ympäristö ja työkalut

Ylioppilas-kokeiden sähköistäminen alkoi syksyllä 2016, mutta matematiikkan koe sähköistyi vasta kevääänä 2019 [13]. Matematiikan kirjoituskerroilla kevät 2016 - syksy 2018 koe suoritettiin ja palautettiin paperisena, mutta jo kevään 2016 kokeessa oli mukana muutoksia sähköistymisen suuntaan. Koe jaettiin A- ja B-osioihin, missä kokeen suorittajalla oli käytössään eri määrä apuvälineitä. Ennen sähköistymistä kokeen suorittajalla oli A-osassa käytössään vain taulukkokirja ja laskimen sai käyttöön vasta B-osiossa. Tähän jaotteluun tuli kuitenkin muutoksia, kun myös matematiikan kokeet sähköistyivät.

Kevät 2019 oli matematiikassa ensimäinen kirjoituskerta, kun koe siirtyi sähköiseen koeympäristöön. Koe suoritettiin tietokoneella ja koeympäristöön pääsi käynistämällä tietokoneen YTL:n tarjoaman USB-muistitikun kautta. Käynistyksen jälkeen kokelaan piti luoda yhteys internetistä erillään olevaan koeverkko järjestelmään ja kirjautua sisään hänelle tarjotuilla tunnuksilla [14]. Paikallinen koeympäristö rajoittaa kokeen suorittajan tietokoneen käyttöä ja sillä tavoiteltaan verkon häiriöttömyyttä. Tarkoituksena on, että kokeen suorittajalla olisi pääsy vain itse koeympäristöön ja sen tarjoamiin sovelluksiin. Sähköinen koeympäristö mahdollisti kuvien lisäksi uusia havainto materiaalien tarjoamisen. Tämä on nähtävissä jo kevään 2019 pitkän matematiikan kokeesta, jossa tehtävässä *12:Kolmion piiri ja pinta-alan suhde* tarjotussa havainto materiaaleissa on dynaaminen *Geogebra* sovellus havainnollistamassa tilannetta [15].

Vuoden 2016 tulleiden muutosten mukaisesti, myös sähköiset kokeet on jaettu osiin A ja B. Erona kuitenkin se, että kokeen suorittaja näkee kaikki osiot heti kokeen aloittaessaan, mutta ei saa kaikkia työkaluja käyttöönsä vasta, kun A-osio on palautettu. Toisin kuin ennen sähköistymistä, niin sähköisissä kokeissa kokeen suorittajalla oli A-osassa taulukkokirjan lisäksi myös mahdollista käyttää funktiolaskinta. Tämän sallimista on perusteltu sillä, että tietokoneella on liian monta tapaa päästä hyödyntämään laskinta (kuten F12-Kehitystyökalut), eikä niiden valvonta koetilaisuudessa olisi mielekästä [21]. Tämän seurauksena pitää kiinnittää enemmän huomiota, minkälaisia A-osion tehtäviä kokeissa tarjotaan, että olisivat mielekkäitä kokelaan osaamistason arviointiin. Palautettuaan A-osion kokelaalta poistuu oikeus sen muokkaamiseen ja hän saa käyttöönsä lisää työkaluja, mitä voi hyödyntää B-osan tehtävien ratkaisussa. Sähköisiin kokeisiin siirtyessä kokelaalla oli mahdollisuus käyttää myös fyysisiä laskimia, mutta kokeesta syksy 2020 alkaen niiden käytöstä luovuttiin ja käytössä oli vain niiden sähköiset versiot (ks. [8, 18]).

YTL on luonnut listan ylioppilaskokeissa käytettävistä ohjelmista [17]. Tutkija käy niistä seuraavaksi lyhyesti läpi ne ohjelmat, mitkä YTL on nimennyt sähköisten matematiikan kokeiden määräyksissä(ks. [8, 18]).

Gnome, KCalc ja SpeedCrunch

Gnome, KCalc ja SpeedCrunch ovat kaikki funktiolaskimia, joita kokeen suorittaja voi hyödyntää pitkän ja lyhyen matematiikan kirjoituksissa. Nämä kolme ovat taulukkokirjan lisäksi ainoat koeympäristössä tarjotut sovelluksen, mitä kokeen suorittaja voi hyödyntää A-osaa tehdessä. KCalc oli käytettävissä jo ensimmäisessä sähköisessä matematiikan kokeessa keväänä 2019. [8] Gnome ja SpeedCrunch tulivat käyttöön vasta syksyllä 2019 [18].

LibreOffice Calc

LibreOffice on toimisto-ohjelmisto, jota voit käyttää mm. tekstinkäsittelyn, taulukkolaskennan, esitysgrafiikan ja vektorigrafiikan tekemiseen. LibreOffice Calc oli ensimmäistä kertaa käytössä keväänä 2019 [8].

wxMaxima

Maxima on symboliseen laskentaan suunnattu ohjelma. Maxima sisältää myös Lisp koodausohjelmiston, millä sitä on mahdollista laajentaa. wxMaxima on Maximan graafinen käyttöliittymä. wxMaxima oli ensimmäistä kertaa käytössä keväänä 2019 [8].

Texas Instruments TI-Nspire CAS

TI-Nspire CAS on Texas Instrumentsin matemaattisiin aineisiin kehittämä tietokoneohjelmisto. Ohjelmiston avulla voidaan mm. kirjoittaa tekstiä, kaavoja, laskea laskuja, piirtää kuvaajia, tutkia geometriaa, Ohjelmoida pythonia ja analysoida luonnontieteiden dataa. TI-Nspire CAS oli ensimmäistä kertaa käytössä keväänä 2019 [8].

Casio ClassPad Manager

Casio ClassPad Manager on matemaattisiin aineisiin kehitetty tietokoneohjelmisto, joka toimii CASIO BASIC ohjelmistoympäristössä. ClassPad Manager soveltuu hyvin sähköisten ratkaisujen ratkaisemiseen ja esittämiseen. ClassPad Manager oli ensimmäistä kertaa käytössä keväänä 2019 [8].

Logger Pro

Logger Pro on tiedon keräämis- ja analysointityökalu. Logger Pro oli ensimmäistä kertaa käytössä keväänä 2019 [8].

Geogebra

Geogebra on matemaattisiin aineisiin kehitetty graafinen ja symbolinen tietokoneohjelmisto. Sen tärkeimpiä ominaisuuksia on reaaliaikainen visualisointi. Se myös mahdollistaa kuvien muokkauksen, jolloin muokkaukset tulevat algebra muotoon myös reaaliajassa. Geogebra on geometristen tehtävien osalta yksi tärkeimmistä sallituista sovelluksista. Tutkija myöhemmin näyttää esimerkin tehtävän ratkaisusta geogebran avulla. Geogebra oli ensimmäistä kertaa käytössä keväänä 2019 [8].

4f Vihko

4f Vihko on matemaattinen kirjoitusalusta. Sen avulla voi luoda tyylitellyt vastaukset välivaiheiden kanssa. Sovellus pystyy myös tarkastamaan tehtyjen laskujen oikeellisuuden. Sovelluksesta pystyy kopioimaan suoraan Abitti-järjestelmään. 4f Vihko oli ensimmäistä kertaa käytössä keväänä 2019 [8].

5.1 Sähköisten työkalujen käyttö tehtävän ratkaisussa

Sähköiset työkalut mahdollistavat uusia tapoja ratkaista geometrian tehtäviä. Otetaan esimerkki tehtäväksi kevään 2021 pitkän matematiikan tehtävä *12: Piilotetut pallot*. Ratkaistaan tehtävä aluksi ilman työkaluja YTL:n hyvän vastauksen piirteiden avulla. Sen jälkeen uudelleen pelkästään Geogebran avulla.

Tehtävä 12: Piilotetut pallot. [16] Pöydällä on kolme 3-säteistä palloa, joista kukin pallo koskettaa kahta muuta. Pallot yritetään peittää puolipallon muotoisella kuvulla, jonka säde on R. Kupu on kuitenkin liian pieni, jolloin sen reuna jää joka kohdassa 1 yksikön korkeudelle pöydästä. Määritä säteen R tarkka arvo.

Vastaaminen ilman sähköisiä työkaluja

Tehtävässä ei ole tarjolla havainnollistavaa materiaalia, niin tehtävää tehdessä on hyvä ensiksi hahmottaa tilannetta. Jotta puolipallon muotoisen kuvun säde R saadaan selville, on ensiksi selvitettävä kuvun keskipiste.

Ajatellaan pöytätasolle kolme 3-säteistä palloa. Olkoon näiden pallojen keskipisteet P_1, P_2 ja P_3. Huomataan, että keskipisteet P_1, P_2 ja P_3 muodostavat yhdessä tasasivuisen kolmion $P_1P_2P_3$, jonka sivut ovat pituudeltaan 6. Seuraavaksi kolmion korkeuden h voidaan laskea käyttäen Pythagoraan lausetta, tai hyödyntäen kolmioon soveltuvaa muistikolmiota. Pythagoraan lauseen avulla kolmion korkeus saadaan seuraavasti:

$$\begin{aligned} 3^2 + h^2 &= 6^2 \\ h^2 &= 6^2 - 3^2 \\ h^2 &= 27 \\ h &= \sqrt{27} \\ h &= 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

Kolmion korkeus h on täten $3\sqrt{3}$. Määritetään kolmion korkeusjanojen leikkaus piste P_4. Korkeusjanat leikkaavat toisensa suhteessa $1:2$. Täten pisteiden P_1, P_2 ja P_3 etäisyys pisteeseen P_4 on $2\sqrt{3}$. Piste P_4 on nyt pienien pallojen keskellä, joten sen etäisyys suuremman puolipallon keskipisteeseen P_5 on 2. Pisteet P_1, P_4 ja P_5 muodostavat yhdessä suorakulmaisen kolmion. Lasketaan Pythagoraan lauseen avulla pisteiden P_1 ja P_5 etäisyys r.

$$\begin{aligned} r^2 &= (2\sqrt{3})^2 + 2^2 \\ r &= \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} \\ r &= \sqrt{16} \\ r &= 4 \end{aligned}$$

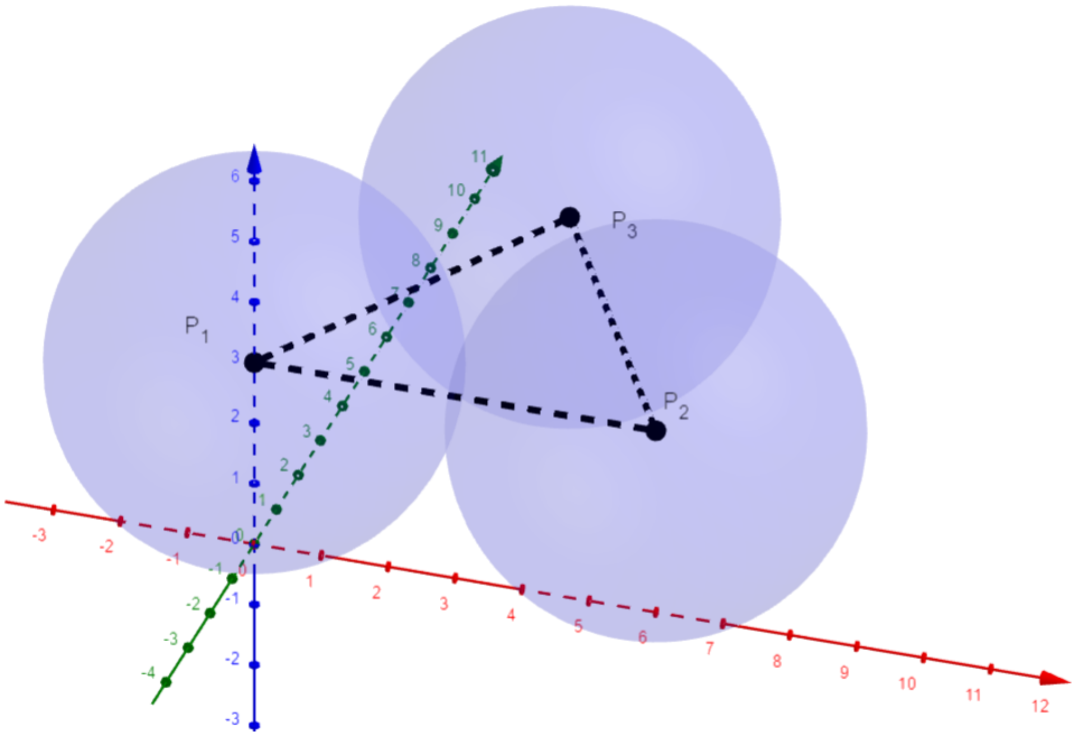
Suurempi puolipallo on koskettaa pienempiä palloja, joten sen säde R saadaan summaamalla pienen pallon säde edellä laskettuun etäisyyteen $3 + 4 = 7.\square$

Tehtävä ei sisällä matemaattisesti haastavia kaavoja, mutta havaintomateriaalin puuttuessa vaatii kokelaalta erinomaista geometrista ratkaisukykyä.

Vastaaminen geogebran avulla

Hyvän vastauksen piirteen kaikki vaatimukset on helppo esittää geogebran avulla oikeastaan tekemättä mitään laskuja. Tehtävän tekijän pitää vain sanallisesti perustella kaikki vaiheet, mitä hän geogebralla tekee. Isoimpana etuna geogebrassa on vaiheiden havainnointi ja työkaluja kokeilemalla voi päätyä oikeaan ratkaisuun.

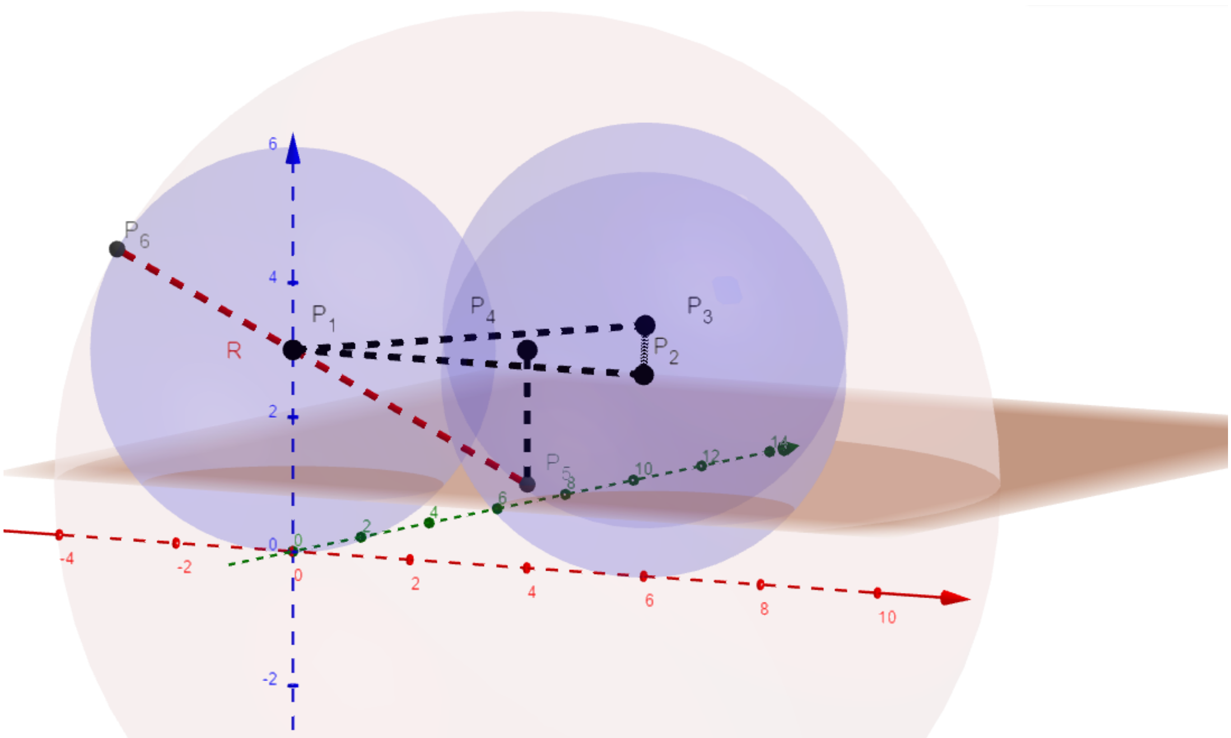
Oleteaan pöydän taso $z_1 = 0$. Luodaan kaksi pistettä $P_1 = (0, 0, 3)$ ja $P_2 = (6, 0, 3)$. Luodaan viimeinen alkuasetelman piste P_3 hyödyntäen Geogebran työkalua *Säännöllinen monikulmio.* Työkalu asettaa viimeisen pisteen P_3 oikeaan paikkaan niin, että sillä on sama etäisyys tasoon z_1, kuin pisteillä P_1 ja P_2. Nyt pisteet P_1, P_2 ja P_3 ovat kuuden mittayksikön päässä toisistaan ja kolmen mittayksikön päässä pöydän tasosta z_1. Luodaan seuraavaksi pisteiden P_1, P_2 ja P_3 ympärille pallot, joiden säde on 3 käyttäen Geogebran työkalua *Pallo: keskipiste ja säde.* Nyt kukin pallo koskettaa kahta muuta palloa ja tasoa z_1 vain yhdessä pisteessä. Tilannetta havainnollistaa kuva 5.1



Kuva 5.1: Piotetut pallot 1

Selvitetään pisteiden P_1, P_2 ja P_3 muodostaman monikulmion keskipiste P_4 hyödyntämällä Geogebran työkalua *Kulmanpuolittaja.* Luodaan taso $z_2 = 1$, joka kuvaa puolipallon reunan etäisyyttä pöydän tasosta. Luodaan tason z_2 ja pisteen P_4 välille lyhyin mahdollinen jana hyödyntäen Geogebran työkalua *Kohtisuora suora* ja nimetään janan pistettä tasolla P_5. Piirretään puolisuora pisteestä P_5, joka kulkee pisteen P_1 kautta hyödyntäen Geogebran työkalua *Puolisuo-*

ra kahden pisteen kautta. Nimetään puolisuoran ja pisteen P_1 pallon ulompaa leikkauspistettä P_6. Pisteiden P_1 ja P_6 väilnen jana tehtävässä etsitty puoliympyrän säde R. Geogebra antaa janan pituudeksi 7, joka on haluttu vastaus. Tilannetta havainnollistaa kuva 5.2.$\square$



Kuva 5.2: Piilotetut pallot 2

Luku 6

Ylioppilaslautakunnan data

Ylioppilastutkintolauttakunnalta saatu data sisältää koostettua dataa lyhyen ja pitkän matematiikan kevät 2016 - syksy 2021 ylioppilaskirjoituksista. Jokaisen kirjoituskerran datasta tutkijalla on käytössään sen kokeen *Tehtävien pistejakauma* ja *Korrelaatiot ristiin* taulukot. Tehtävien pistejakauma taulukkoa tutkija käsittelee kohdassa 6.2 ja korrelaatiot ristiin taulukoita kohdissa 6.1 ja 6.3. Datan avulla voidaan havainnollistaa, kuinka suuri painoarvo geometrian tehtävillä on ollut kussakin ylioppilaskokeessa. Sen lisäksi datan tarjoamasta pistejakaumasta voidaan tehdä eri johtopäätöksiä tehtävien haastavuudesta. Datasta ei voi kuitenkaan saada selville yksittäisen tekijän saamia tuloksia, joten tutkimuksessa pidättäydytään antamaan arvioita keskiarvojen ja painotettujen keskiarvojen perusteella.

6.1 Geometrian tehtävien osuus pisteytyksessä

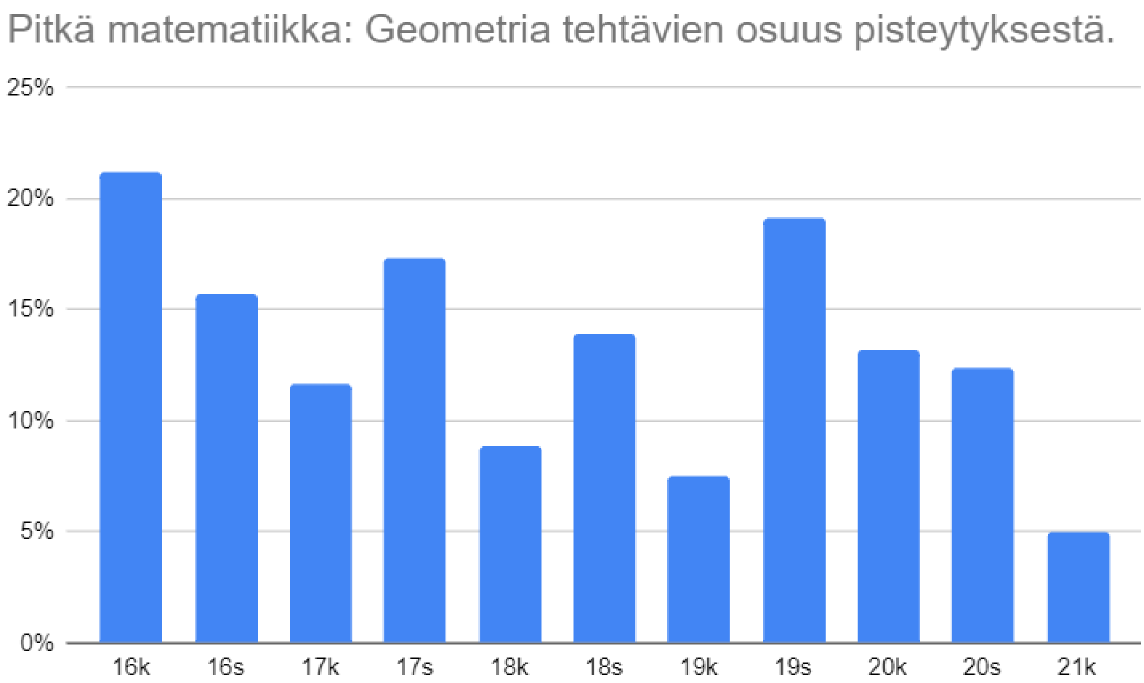
YTL:n datasta on saatu selville kuinka paljon kokeen suorittajat ovat yhteisesti saaneet pisteitä. Tähän arvoon verrataan kaikki geometria tehtävistä saadut pisteet. Esimerkiksi pitkän matematiikan ylioppilaskirjoituksissa syksy 2016 on ollut kaksi geometrian tehtävää. Näistä kahdesta tehtävästä on tullut 16 prosenttia kaikista kokeessa jaetuista pisteistä. Syksynä 2019 on taas ollut vain yksi tehtävä ja se on ollut vastuussa 19 prosenttia kokeesta ansaituista pisteistä. Tämä johtuu siitä, että kaikki kokeen suorittajat eivät välttämättä valitse samoja tehtäviä ja osa tehtävistä voivat olla haastavampia kuin toiset. Tämän vertailun avulla voidaan kuitenkin hieman arvioida geometrian merkitystä ylioppilas kirjoituksissa eri vuosilla.

Geometrian tehtävien prosentuaalinen osuus p on laskettu seuraavanlaisella kaavalla:

$$p = \sum_{i=1}^{n} s_i/S$$

Missä S on kokeesta saadut kaikki pisteet, s_i geometrian tehtävistä saadut pisteet ja n on geometrian tehtävien määrä. Kaavan avulla summataan kaikki geometrian tehtävistä saadut pisteet ja verrataan niitä kokeesta saatuihin kaikkiin pisteisiin.

Geometrian tehtävistä on saatu suhteellisesti eniten pisteitä kokeessa kevät 2016 (21 prosenttia kokeessa saaduista pisteistä), sekä vähiten kokeessa kevät 2021 (5 prosenttia kokeessa saaduista pisteistä). Täten kaikkien vuosien hajontaväli on 16 prosenttiyksikköä. Ennen sähköistymistä geometrian tehtävien keskivertoinen osuus kaikista pisteistä on ollut 15 prosenttia. Sähköistymisen jälkeen prosentuaalinen osuus on tippunut 11 prosenttiin. Tuloksia tarkastellessa pitää ottaa huomioon se, että sähköisissä kokeissa on keskimäärin ollut vähemmän kuin kaksi geometrian tehtävä koetta kohti, kun taas ennen sähköistymistä kokeissa on ollut keskimäärin yli kaksi tehtävää. Esimerkiksi kevään 2016 kokeessa on ollut neljä geometrian tehtävää, joka on yksi syy, minkä takia kyseisessä kokeessa geometrian osuus on ollut suurempi, kuin muissa kokeissa.

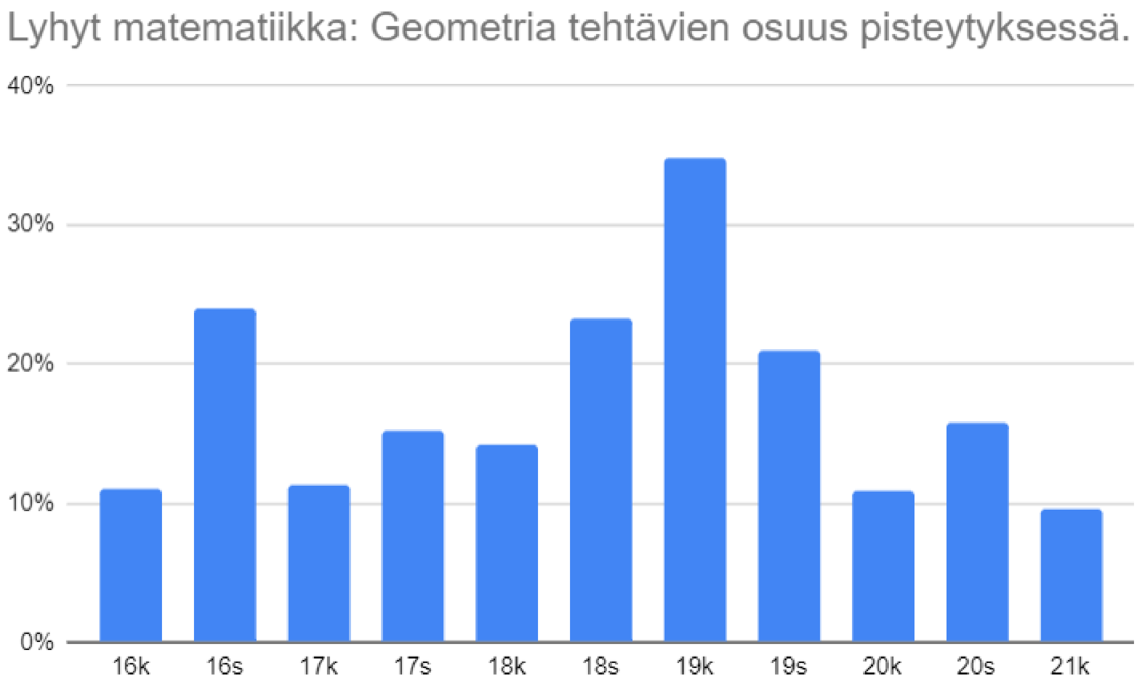


Taulukko 6.1: Pitkä matematiikka geometrian tehtävien osuus keskiarvoon nähden

Ylioppilaskoe	Prosentuaalinen osuus
Kevät 2016	21%
Syksy 2016	16%
Kevät 2017	12%
Syksy 2017	17%
Kevät 2018	9%
Syksy 2018	14%
Kevät 2019	7%
Syksy 2019	19%
Kevät 2020	13%
Syksy 2020	12%
Kevät 2021	5%

Taulukko 6.1: Pitkä matematiikka geometria tehtävien prosentuaalinen osuus ylioppilaskokeissa.

Lyhyessä matematiikassa geometrian tehtävistä saaduista pisteistä ei ole huomattavissa selkeää kehitystä, kun niitä verrataan kokeista saatuihin pisteisiin. Pisteisiin vaikuttaa tehtävistä saadut pisteet, tehtyjen tehtävien määrä ja kokeista saadut kaikki pisteet. Pienin prosentuaalinen osuus geometrian tehtävillä on ollut kokeessa kevät 2021 (n. 10 prosenttia). Suurin prosentuaalinen osuus geometrian tehtävillä on ollut kokeessa kevät 2019 (n. 35 prosenttia). Ennen sähköistymistä geometrian keskivertoinen osuus on ollut n. 17 prosenttia, kun taas sähköistymisen jälkeen keskivertoinen osuus on ollut n. 19 prosenttia. Hajontaa kirjoituskertojen välillä on ollut 25 prosenttiyksikköä. Suurin vaikuttaja prosentuaalisiin osuuksiin on mitä todennäköisimmin tehtävien määrä. Kevät 2019 kokeella oli suurin prosentuaalinen osuus ja siinä oli myös neljä geometrian tehtävää. Samalla, kun kevät 2021 kokeessa oli vain yksi geometrian tehtävä.



Kuva 6.2: Lyhyt matematiikka geometrian tehtävien osuus keskiarvoon nähden

Ylioppilaskoe	Prosentuaalinen osuus
Kevät 2016	11%
Syksy 2016	24%
Kevät 2017	11%
Syksy 2017	15%
Kevät 2018	14%
Syksy 2018	19%
Kevät 2019	35%
Syksy 2019	21%
Kevät 2020	11%
Syksy 2020	16%
Kevät 2021	10%

Taulukko 6.2: Lyhyt matematiikka geometria tehtävien prosentuaalinen osuus ylioppilaskokeissa.

6.2 Tehtävistä saadut pisteet

YTL:tä saaduissa taulukoissa on myös kaikkien eri tehtävien pistejakaumat. Ennen sähköisiä kokeita jokaisesta tehtävässä oli jaossa 6 pistettä. Sähköisissä kokeissa jokaisesta tehtävästä oli mahdollista saada 12 pistettä. Jotta tutkija on voinut verrata eri kirjoituskertoja keskenään, on jokaisen kokeen geometrian tehtävien keskiarvoista muodostettu painotettu keskiarvo. Tätä painotettua keskiarvoa tutkija on verrannut tehtävien maksimipisteisiin, niin on saatu arvio tehtävän haastavuudesta.

6.2.1 Painotetun keskiarvon muodostaminen

Esimerkki painotetusta keskiarvosta. Olkoon kirjoituskerta X ja merkataan sen tehtäviä lukupareina $x_i = \{n_i, m_i\}$, missä n_i on tehtävän suorituskerrat ja m_i tehtävän pistejakauman keskiarvo. Painotettu keskiarvo μ lasketaan seuraavasti:

$$\mu = \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot m_i \Bigg/ \sum_{i=1}^{k} n_i$$

$$\iff \mu = \frac{n_1 \cdot m_1 + \cdots + n_k \cdot m_k}{n_1 + \cdots + n_k}.$$

Oletetaan esimerkki koe X, missä on kaksi geometrian tehtävää $x_1, x_2 \in X$. Niiden painotettu keskiarvo μ lasketaan silloin seuraavasti.

$$\mu = \frac{n_1 \cdot m_1 + n_2 \cdot m_2}{n_1 + n_2}$$

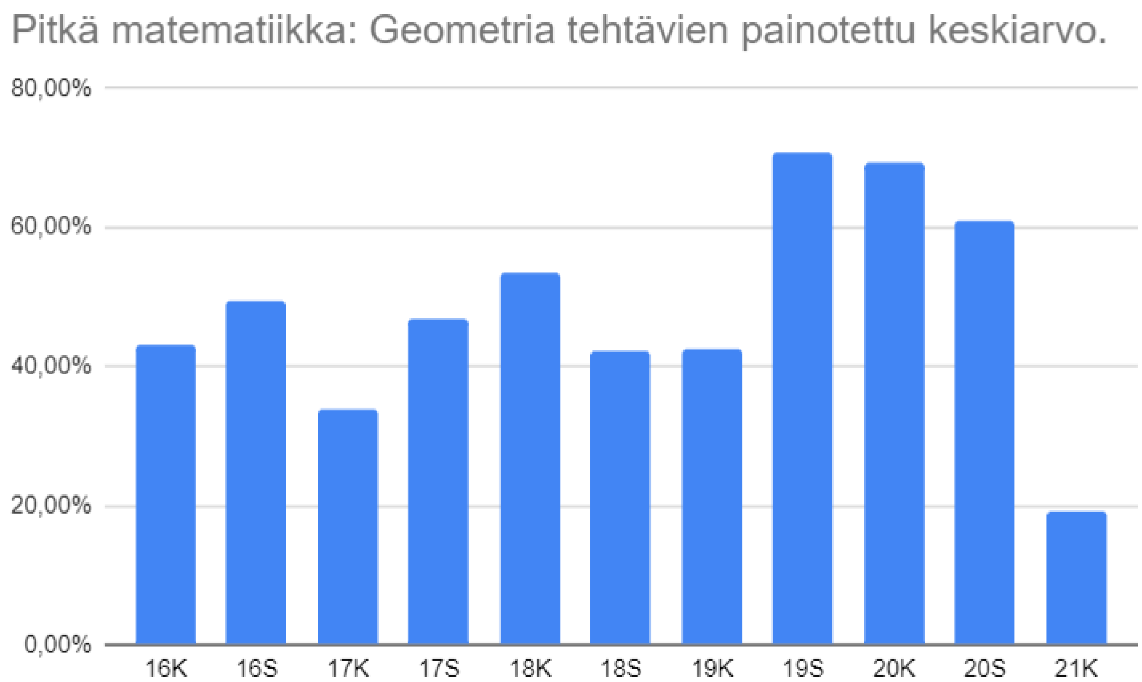
Jotta kaikkien kirjoituskertojen painotetut keskiarvot olisivat vertailtavissa, niin muodostetaan niistä suhdeluvut koetehtävien maksimi pisteisiin. Ennen sähköistymistä tehtävissä oli jaossa 6 pistettä ja sähköistymisen jälkeen 12 pistettä. Merkataan ennen sähköistymistä ollutta suhdelukua merkillä μ_e ja sähköistymisen jälkeistä merkillä μ_s. Lasketaan ne seuraavasti:

$$\mu_e = \frac{\mu}{6} \quad \text{tai} \quad \mu_s = \frac{\mu}{12}$$

6.2.2 Datasta saadut painotetut keskiarvot

Painotetun keskiarvon avulla tutkija yrittää havainnollistaa eri kirjoituskertojen geometrian tehtävien haastavuutta. Mitä alhaisempi painotettu keskiarvo on, niin oletettavasti sitä haastavampia sen vuoden geometrian tehtävät ovat olleet. Yleisesti kokeiden loppupään tehtävät ovat hieman haastavampia, kuin alkupään tehtävät. Esimerkiksi pitkän matematiikan kokeessa syksy 2019 on ollut vain yksi geometrian tehtävä. Se oli kokeen ensimmäinen tehtävä, joten sen voidaan olettaa olleen suunnitellusti helpompi. Matematiikan koe määräyksissä useasti mainitaan, että tehtävät pyritään pistämän järjestykseen helpoimmasta vaikeimpaan (ks. [19][20]). Vaikka tätä ei lue kyseisen kokeen määräyksissä, niin tutkija ottaa sen silti huomioon. Tämä antaa yhden syyn, miksi syksyn 2019 painotettu keskiarvo on muita suurempi. Taulukkoon 6.3 on tuotu esille myös kirjoituskerta kohtaisesti vaihteluvälit, jossa on näkyvillä kokeessa olleiden tehtävien pienin ja suurin keskiarvo ilman painotusta. Jos kokeessa on ollut vain yksi tehtävä, niin ei ole vaihteluväliä. Siinä tapauksessa väliä on merkattu pelkällä viivalla. Taulukoissa 6.3 ja 6.4 arvot on pyöristetty kokonaisiin prosenttiyksikköihin.

Tarkastelemalla taulukkoa 6.3 huomataan, että pisteytyksen mukaan helpoin tehtävä on kokeen syksy 2016 tehtävä 5, mistä kokelaat ovat keskivertoisesti saaneet 72 prosenttia pisteistä. Kuitenkin saman kokeen tehtävästä 4 on saatu vain 32 prosenttia pisteistä, joten kokeen painotettu keskiarvo on vain 34 prosenttia. Tämän seurauksena pisteiden suurimmat painotetut keskiarvot ovat sähköisiltä kirjoituskerroilta syksy 2019 – syksy 2020. Alhaisin painotettu keskiarvo on saatu sähköisestä kokeesta kevät 2021.

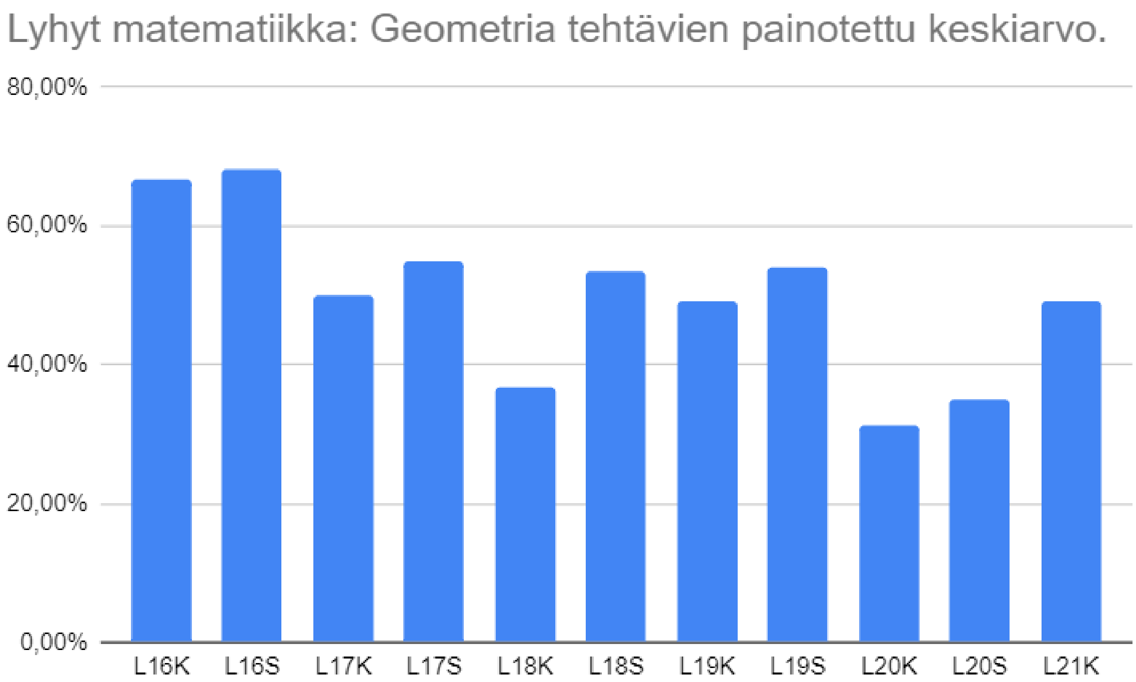


Kuva 6.3: Pitkä matematiikka geometrian tehtävien painotettu keskiarvo

Ylioppilaskoe	2016 – 2018 μ_e 2019 – 2021 μ_s	Vaihteluväli Min - Max
Kevät 2016	41%	18% – 52%
Syksy 2016	49%	32% – 72%
Kevät 2017	34%	27% – 38%
Syksy 2017	47%	35% – 57%
Kevät 2018	53%	–
Syksy 2018	42%	33% – 52%
Kevät 2019	24%	–
Syksy 2019	71%	–
Kevät 2020	70%	–
Syksy 2020	61%	–
Kevät 2021	19%	12% – 28%

Taulukko 6.3: Pitkä matematiikka geometria tehtävien painotettu keskiarvo.

Katsomalla painotettuja keskiarvoja taulukosta 6.4 voidaan sanoa, että lyhyen matematiikan kokeissa tehtävät ovat olleet sähköistymisen jälkeen haastavampia, kuin ennen sitä. Lyhyen matematiikan kokeissa suurin painotettu keskiarvo on tullut syksynä 2016, jossa painotettu keskiarvo on ollut 68 prosenttia. Vastaavasti pienin geometrian tehtävien painotettu keskiarvo on ollut kokeessa kevät 2020, kun painotettu keskiarvo on ollut 31 prosenttia. Tähän alhaiseen painotettuun keskiarvoon vaikuttaa vahvasti tehtävän 11 keskiarvo, joka on ollut vain 3 prosenttia.



Kuva 6.4: Lyhyt matematiikka geometrian tehtävien painotettu keskiarvo

Ylioppilaskoe	Painotettu keskiarvo prosentteina.	Vaihteluväli Min - Max
Kevät 2016	67%	–
Syksy 2016	68%	45% – 82%
Kevät 2017	50%	–
Syksy 2017	55%	53% – 55%
Kevät 2018	37%	–
Syksy 2018	54%	15% – 83%
Kevät 2019	49%	33% – 63%
Syksy 2019	54%	16% – 75%
Kevät 2020	31%	3% – 53%
Syksy 2020	54%	29% – 45%
Kevät 2021	49%	–

Taulukko 6.4: Lyhyt matematiikka geometria tehtävien painotettu keskiarvo.

6.3 CORR-Menettely

YTL on datahajotelmassaan hyödyntänyt CORR-Menetelmää [5], joka laskee jokaiselle tehtävälle *Pearson korelaatio kertoimen* sen vuoden tehtävien ja kokeesta saatujen kokonaispistemäärien välille. Pearsonin avulla voidaan arvioida kahden tapahtuman välistä lineaarista korrelaatiota, ja antaa arvoja välillä -1 ja 1. Esimerkiksi jos saatu korrelaatio kerroin on negatiivinen, niin voidaan olettaa näiden kahden asian korreloivan toisiaan negatiivisesti. Jos korrelaatio on positiivinen, niin korreloivat asiat toisiaan positiivisesti. Korrelaatio ei itsessään kerro mitään siitä kuinka hyvin tehtävässä on pärjätty. vaan siitä miten siitä saadut pisteet ovat linjassa kokeesta saatuihin pisteihin. Esimerkiksi tehtävästä voi saada täydet pisteet, mutta kokeen muista tehtävistä tulisi nolla pistettä. Tällöin korrelaatio olisi hyvin alhainen.

6.3.1 CORR-Menettelyn muodostaminen

Tutkimuksessa hyödynnetty Pearson korrelaatio r_{xy} muuttujille x ja y lasketaan seuraavanlaisella kaavalla:

$$r_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{s_x s_y}$$

$$\iff r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}((x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}))}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}}$$

Missä:

- σ_{xy} on muttujien x ja y kovarianssi
- s_x,s_y muuttujien x ja y keskihajonnat
- $\overline{x}, \overline{y}$ ovat muuttujien x ja y keskiarvot
- x_i ja y_i muuttujien x ja y lukupareja
- n on lukuparien (x_i, y_i) määrä

Käydään esimerkki Pearson korrelaation laskemisesta, missä pohjana toimii liite 9.1. Liite kuvaa koetta, jossa on ollut kaksi tehtävää x ja y. Kokeessa on ollut 100 suoritusta, jotka on indeksoitu $i = [1, 100]$ molemmissa tehtävissä vasemmalta oikealle ja ylhäältä alas. Suoritusta i vastaa lukupari $\{x_i, y_i\}$.

Suorituksista on tehty kaksi tiivistelmä taulukkoa. Taulukossa 6.5 on näkyvissä molempien tehtävien pistejakaumat ja suoritusten määrä N. Taulukossa 6.6 on laskettu tehtävien ja kokeen pisteiden summat ja keskiarvot.

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	N
Tehtävä x	20	10	22	11	18	19	100
Tehtävä y	17	16	18	17	18	14	100

Taulukko 6.5: Esimerkkikokeen pistejakauma.

	Pisteiden summa	**Keskiarvo**
Tehtävä x	254	2,54
Tehtävä y	245	2,45
Koe k	499	4,99

Taulukko 6.6: Esimerkki kokeen tehtävien pisteiden summa ja keskiarvo.

Tehtävien x ja y välinen Pearson korrelaatio r_{xy} saadaan sijoittamalla arvot kaavaan. Tehtävien väliseksi korrelaatioksi saadaan viiden desimaalin tarkkuudella 0,08000. Korrelaatio on hyvin olematon, sillä luvut olivat satunnaisesti valittuja.

Tutkimuksessa käytetyssä datassa korrelaatio on kuitenkin laskettu tehtävän ja kokeesta saatujen kokonaispisteiden välille. Lasketaan jokaisen suorituksen i kokonaispisteet $k_i = x_i + y_i$ ja lasketaan niille keskiarvo $\overline{k}$. Tehtävän x ja kokeen k välinen Pearson korrelaatio saadaan laskettua samalla kaavalla r_{xk}. Esimerkki kokeessa tehtävän x ja kokeen k korrelaatio viiden desimaalin tarkkuudella on 0,75360. Nähtävissä on siis selkeä korrelaatio, mikä on oletettavissa, kun tehtävä x sisältää puolet kokeen k arvoista. Tehtävän vaikutus kokeen arvoihin useasti vähenee, kun tehtäviä on enemmän.

6.3.2 CORR-menettely pitkä matematiikka

Taukoissa 6.7 ja 6.8 on tuotu näkyville jokaisen tehtävän korrelaatio sen vuoden kokeen kokonaispisteiden kanssa. Vain ne suoritukset on laskettu korrelaatio kertoimeen, missä tehtävä on ollut mukana suoritusta. Tärkeä huomata, että tehtävät korreloivat itsensä kanssa täydellisesti, niin vaikuttavat ne positiivisesti korrelaatioon koesuorituksen kanssa, sillä tehtävät ovat osana sitä.

Pitkässä matematiikan geometrian tehtävistä syksyn 2017 tehtävä 6 on saanut suurimman korrelaatio kertoimen 0,80906 ja pienimmän kertoimen sai kevään 2021 tehtävä 12 kertoimella 0,47257. Molemmat on korostettu taulukossa 6.7 omilla väreillään.

Koe	Tehtävät	Korelaatio
Kevät 2016	6	0,69085
	7	0,64041
	9.1	0,60109
	13	0,66376
Syksy 2016	5	0,71627
	6	0,76364
Kevät 2017	6	0,72987
	7	0,7526
	12	0,72444
Syksy 2017	5	0,73885
	6	0,80906
Kevät 2018	6	0,6934
Syksy 2018	8	0,73883
	11	0,71136
Kevät 2019	6	0,73658
Syksy 2019	1	0,61864
Kevät 2020	5	0,61560
Syksy 2020	5	0,68659
Kevät 2021	6	0,77538
	12	0,47257

Taulukko 6.7: Pitkä matematiikka Pearson Korrelaatio.

6.3.3 CORR-Menettely lyhyt matematiikka

Lyhyen matematiikan geometrian tehtävistä syksyn 2017 tehtävä 8 on saanut isoimman korrelaatio kertoimen $0,77729$ ja pienimmän kertoimen sai kevään 2018 tehtävä 4 kertoimella $0,43453$. Molemmat on korostettu taulukossa 6.8 omilla väreillään.

Koe	Tehtävät	Korelaatio
Kevät 2016	6	0,62672
Syksy 2016	5	0,62082
	6	0,66880
Kevät 2017	6	0,65738
Syksy 2017	2	0,67501
	8	0,77729
Kevät 2018	4	0,43453
	13	0,64565
Syksy 2018	2	0,55648
	13	0,59582
Kevät 2019	3	0,67361
	5	0,69813
	6	0,65990
	10	0,67576
Syksy 2019	2	0,66158
	6	0,61856
	12	0,53569
Kevät 2020	5	0,62643
	7	0,70540
	11	0,36508
Syksy 2020	7	0,72618
	11	0,59463
Kevät 2021	2	0,71561

Taulukko 6.8: Lyhyt matematiikka Pearson Korrelaatio.

Luku 7

Bloomin taksonomia

Tätä lukua varten tutkija on käynyt tehtäviä läpi yksilökohtaisemmin. Tarkoituksena on löytää tehtävistä mahdollisia eroja tehtävien välillä katsomatta niistä saatuja pisteitä. Tarkastelussa apunaan tutkija on hyödyntänyt muokattua *Bloomin taksonomiaa*, johon on haettu mallia Markus Aarniluoman diplomityöstä[1] ja Anne-Maria Lepistön pro-gradusta [7]. Bloomin taksonomian eri tasoista tarjotaan selitykset ja niitä vastaavat esimerkki tehtävät. Esimerkkeihin on valittu tehtäviä ylioppilaskirjoituksista. Jokainen tehtävä on tuotu taulukkoon ja nämä taulukot tutkija selittää auki aloittaen pitkän matematiikan taulukosta ja sen jälkeen siirtyy lyhyen matematiikan taulukkoon.

7.1 Bloomin taksonomia

Bloomin taksonomia on *Benjamin Bloomin* mukaan nimetty kognitiivisen osaamisen asteikko, jonka avulla tehtävät voidaan jakaa kuuteen erilliseen oppimistavoitteeseen ja haastavuuteen ks. [1]. Vuoden 1956 alkuperäisessä englanninkielisessä artikkelissa asteikon eri tasot on nimetty seuraavasti. *Knowledge, comprehension, application, analysis, synthesis* ja *evaluation*[2]. Näistä tutkija on tehnyt suomennokset ja ne on käyty vaiheittain läpi. Tutkimuksessa käytetään eri tasoista lyhenteitä. Esimerkiksi *BT1* tarkoittaa Bloomin taksonomian kognitiivisen osaamisen tasoa yksi. Samaa lyhenne järjestelmää käytetään myös muille viidelle Bloomin taksonomian tasoille.

- **BT1: Muistaa:** Muistamiseen kuuluu kaksi alaluokkaa, jotka ovat mieleenpalauttaminen ja tunnistaminen.

  Oppilas kykenee vastaamaan muistista hänelle ennalta opetetulla tavalla. Geometrian tehtävä esimerkkinä voisi olla seuraavanlainen kysymys:

  "Miten kirjoitetaan Pythagoraan lause"

Oppilaalta vaaditaan muistamaan lause, mutta häneltä ei vaadita sen ymmärtämistä tai käyttämistä. Muistaminen luo hyvän pohjan oppimiselle ja mahdollistaa tulevaisuudessa yhteyksien luomisen. Esimerkiksi peruskoulussa kertolaskuja voi opiskella opettelemalla ulkoa kertotauluja.

- **BT2: ymmärtää:** ymmärtämiseen kuuluu seitsemän alaluokkaa. Tulkitseminen, esimerkin esittäminen, luokitteleminen, tiivistäminen, päätteleminen, vertaileminen ja selittäminen.

  Geometrian tehtävä esimerkkinä voisi olla seuraavanlainen käsitteitä koskeva kysymys:

  "Mitä yhteistä on neliöllä ja kolmiolla, mutta ei ympyrällä?"

  Kysymykseen vastaaminen tarvitsee taitoa luokitella geometrisiä tasokappaleita. Tekijä voi muistaa/tietää luetelluista kappaleista jotain faktapohjaisia käsitteitä, kuten sen että kolmiossa ja neliössä on kulmia, kun ympyrässä taas ei ole. Tärkeä on kuitenkin huomata se, että pelkästään oikea vastaus ei tarkoita, että vastaaja ymmärtää kysymyksen. Jos kysymys ei ole vastaajalle uusi, niin hän voi muistaa halutun vastauksen. Silloin ymmärtämisen sijasta kysymys olisi vaikeustasoa BT1 muistaa.

  Tutkimuksessa yksinkertaisemmat pinta-ala laskut on luokiteltu myös BT2 tason tehtäviksi, kuten suorakulmion pinta-alan laskeminen.

- **BT3: soveltaa:** soveltaminen voidaan jakaa kahteen alaluokkaan. Suorittaminen ja implementoiminen.

  Geometrian koetehtävä esimerkkinä voisi olla seuraavanlainen:

  "Selvitä hypotenuusan pituus, kun kateettien pituus on 5 ja 8"

  Tehtävää varten termien osaamisen ja suhteiden ymmärtämisen lisäksi vaaditaan tekijältä myös soveltavaa taitoa. Tehtävässä tulee muistaa Pythagoraan lause ja implementoida sitä halutun ratkaisun saamiseen. Tähän ei siis riitä pelkästään tieto mihin Pythagoraan lausetta voi käyttää, vaan pitää myös osata käyttää sitä.

- **BT4: analysoiminen:** analysoiminen voidaan jakaa kolmeen alaluokkaan. Erotteleminen, organisoiminen ja attribuoiminen.

  BT4 tason tehtävissä kokelaan pitää osata pilkkoa tehtävä pienempiin osiin ja löytää sieltä oleellinen tieto tehtävän ratkaisuun.

  Analysointia vaativa geometrian tehtävä voisi olla seuraavanlainen:

  "Suorakulmion muotoisen talon pohja on leveyssuunnassa viisi metriä ja pituussuunnassa kolme metriä. Koira on laitettu talon ulkokulmaan hihnaan, jonka pituus on 6 metriä. Kuinka iso pinta-alaltaan on alue, missä koira pystyy liikkumaan"

Tehtävän ratkaisu vaatii kysymyksen paloittelua pienimpiin osiin ja oleellisen tiedon poimintaa. Tehtävästä annosta pitää esimerkiksi osata päätellä, että talo rajoittaa hihnassa olevan koiran liikettä.

- **BT5: syntesoiminen:** syntesoiminen voidaan jakaa kahteen alaluokkaan. Tarkistaminen ja kritisoiminen.

  BT5 tason tehtävissä kokelaan pitää esimerkiksi osata luoda jotain uutta avustamaan tehtävän ratkaisussa.

  Geometrian esimerkki tehtävänä voisi olla seuraavanlainen:

  "Muodosta kolme toistaan sivuavaa ympyrää A, B ja C, joilla on sama säde $r = 5$. Mikä on tällöin ympyröiden väliin jääneen alueen pinta-ala?"

  Yksi ratkaisu tapa on luoda keskipisteiden välille tasakylkinen kolmio. Kun lasketaan tämän kolmion pinta-ala ja vähennetään siitä ympyröiden sektorit, niin saadaan haluttu pinta-ala.

  Sen sijaan, että kokelaalle olisi annettu vain yksinkertainen laskutoimitus, niin hänen tulee kyetä lisäämään työhön jotain, jotta pääsisi ratkaisuun.

- **BT6: arvioiminen:** Arvioimisella on kolme alaluokkaa. Hypotesoiminen, suunnittteleminen ja tuottaminen.

  Arvioimisen tasoa vaativa geometrian tehtävä voisi olla seuraavanlainen:

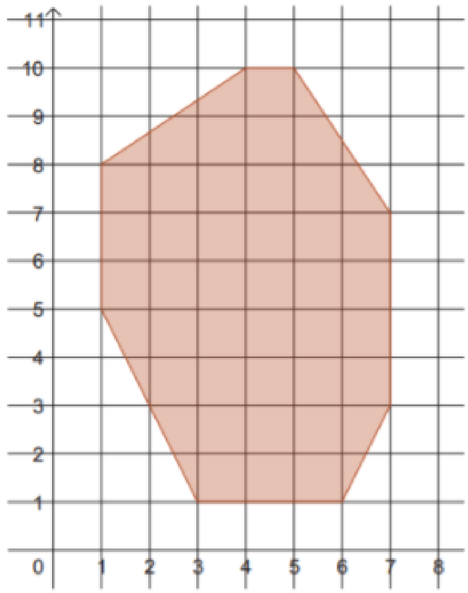
  "Tutki minkälaisissa tapauksissa voisit hyödyntää kosinilausetta ja tee itsellesi siitä jokin uusi yleistys."

  Arvioimisen tason tehtävät vaativat tekijältä tutkintaa, perusteluja ja pohdintaa. Tällainen tehtävä voisi olla jokin tutkimus, missä opiskelija on ensiksi perehtynyt aiheeseen.

7.2 Esimerkki tehtäviä

Pitkän ja lyhyen matematiikan päätös kokeissa kevät 2016 - kevät 2021 oli tehtäviä vain bloomin taksonomian haastavuus tasolta 2-5. Tutkija käy seuraavaksi konkreettiset esimerkit kokeissa olleista Bloomin taksonomian tason arvoisista tehtävistä.

2. Muotoilukilpailun palkintolautakunta myöntää muistolaatan kilpailun parhaille teoksille. Lautakunnan taiteellinen avustaja tekee ensimmäisen version laatan pienoismallista käyttämällä Geogebra-ohjelman koordinaatistopiirrosta. Hän aloittaa suorakulmiosta, jonka leveys on 6 ja korkeus 9 pituusyksikköä. Leikkaamalla pois tämän suorakulmion kaikki neljä kulmaa eri tavoilla hän päätyy viereisen kuvion monikulmioon. Määritä tämän monikulmion pinta-ala.



Kuva 7.1: BT2: Lyhyt matematiikka syksy 2018 tehtävä 2

BT2/L2018S2: Tehtävässä voi huomata, että laatta muodostuu suorakulmiosta, josta on poistettu neljä suorakulmaista kulmiota. Suorakulmion pinta-ala on $6 \cdot 9 = 54$ ja siitä vähennettävien kolmioiden pinta-alat ovat $3, 3, 4$ ja 1. Joten laatan pinta-ala on $54 - 11 = 43$.$\square$

Tehtävä on BT2 tasoa. Tehtävää varten ei tarvitse soveltaa monimutkaisempia kaavoja, joka tekisi tehtävästä tason BT3 tehtävän. Oikeaan vastaukseen pääsee, jos tekijä osaa laskea yksinkertaisia pinta-aloja ja ymmärtää niiden suhteita.

6. Algoritmista ajattelua (12 p.)

Alakoulun oppilaat harjoittelevat algoritmista ajattelua ja ohjelmointia. Oppilaiden tehtävänä on ohjelmoida toisiaan toimimaan täsmälleen tarkasti annettujen ohjeiden mukaan. Eräs oppilas antaa luokkatoverilleen seuraavat ohjeet:

(a) Aloita pisteestä A.
(b) Kulje täsmälleen 2 metriä suoraan eteenpäin.
(c) Käänny 90 astetta oikealle.
(d) Kulje täsmälleen 4 metriä eteenpäin.
(e) Käänny 90 astetta oikealle.
(f) Kulje täsmälleen 7 metriä eteenpäin ja olet perillä pisteessä B.

6.1. Esitä oppilaan kulkema reitti käyttämällä sopivaa piirto-ohjelmaa ja kuvakaappaustyökalua. (6 p.)
6.2. Laske pisteiden A ja B välinen etäisyys. (6 p.)

Kuva 7.2: BT3: Lyhyt matematiikka syksy 2019 tehtävä 6

BT3/L2019s6: Tehtävä jakautuu kahteen kohtaan. Ensimmäisessä kohdassa pitää ensoksi muodostaa oikea polkuen hyödyntäen tietoa, että 90° aste on suorakulmainen käännös. Kun polku on hahmoteltu, niin voidaan pisteiden A ja B etäisyys selvittää pythagoraan lauseen avulla. $\sqrt{4^2 + (7-2)^2} \approx 6,4(m)$.$\square$

Tehtävä on haastavuudeltaan BT3, sillä siinä joutuu havainnollistamaan tilannetta ja soveltamaan pythagoraan lausetta siihen sopivassa tilanteessa,

Ympyrän säde on 4. Sen sisälle piirretään kolme käyrää, jotka yhdistävät ympyrän vaakasuoran halkaisijan päätepisteet kuvion 5. A osoittamalla tavalla. Jokainen käyrä koostuu kahdesta puoliympyrän kaaresta, ja ne jakavat ympyrän vaakasuoran halkaisijan neljään yhtä suureen osaan. Yhdessä käyrät jakavat ympyrän neljään eriväriseen alueeseen. Osoita, että niillä kaikilla on sama pinta-ala.

Kuva 7.3: BT4: Pitkä matematiikka kevät 2020 tehtävä 5

BT4/P2020K5: Tehtävässä on tulee huomata, että ympyrän halkaisija on jaettu neljään yhtäsuureen osaan ja niistä muodostuneista paloista muodostuu kaksi yhtenevää paria.

Oranssin ja vihreän alueiden pinta-alat $\pi/2 + (8\pi - 9\pi/2) = 4\pi$

Keltaisen ja sinisen alueiden pinta-alat $(2\pi\pi/2) + (9\pi/2 - 2pi = 4\pi$

Näin ollen ollaan näytetty, että kaikki osat pinta-alaltaan yhtäsuuria. $\square$

Tehtävä on haastavuudeltaan bloomin taksonomian neljättä tasoa, koska tehtävä pitää osaa pilkkoa pienempiin osiin ja ymmärettävä kappaleiden pinta-alojen suhteita.

12. Piilotetut pallot 12 p.

Pöydällä on kolme 3-säteistä palloa, joista kukin pallo koskettaa kahta muuta. Pallot yritetään peittää puolipallon muotoisella kuvulla, jonka säde on R. Kupu on kuitenkin liian pieni, jolloin sen reuna jää joka kohdassa 1 yksikön korkeudelle pöydästä. Määritä säteen R tarkka arvo.

Kuva 7.4: BT5: Pitkä matematiikka kevät 2021 tehtävä 12

Tehtävän ratkaisu käyty läpi luvussa 5.

Tehtävä on haastavuudeltaan bloomin taksonomian tasoa viisi. Tehtävää ratkaisua varten pitää osata luoda uutta tietoa jo annetuista tiedoista. Nämä vaiheet pitää myös osata perustella, jotta niitä voi hyödyntää.

7.3 Bloomin taksonomia pitkässä matematiikassa

Pitkässä matematiikassa Bloomin taksonomia jakauma on nähtävistä taulukosta 7.1. Taulukossa on näkyvissä jokaisen tehtävän BT. Jos tehtävässä on ollut alakohtia, niin niistä jokainen on arvioitu erikseen. Näille alakohdille on kaksi merkintätapaa. Ennen sähköistymistä tehtävien alakohtia merkattiin aakkosilla ja sähköisissä kokeissa numeroilla. Esimerkiksi Syksy 2016 tehtävässä 6 on kaksi alakohtaa a) ja b). Kohta a) on haastavuudeltaan BT4 ja kohta b) on haastavuudeltaan BT5. Yhteenveto taulukossa 7.2 alakohtia ei kuitenkaan käsitellä erikseen vaan tehtävää käsitellään sen haastavimman tason mukaan. Syksy 2016 tehtävä 6 on haastavuudeltaan siis BT5.

Puolet kokeissa esiintyneistä tehtävistä on tasoa BT4 riippumatta siitä onko koe ollut ennen, vai jälkeen sähköistymisen. Taksonomian jakaumassa ei muutenkaan ole suuria eroja sähköistymisen seurauksena. BT5 tehtävien osuus on vähentynyt vain 3 prosenttiyksikköä, mutta tähän varmasti vaikuttaa myös tehtävien vähäinen määrä.

Koe	Tehtävä	Bt
Kevät 2016	6	a) 3 b) 5
	7	4
	9.1	3
	13	4
Syksy 2016	5	a) 3 b) 3
	6	a) 4 b) 5
Kevät 2017	6	4
	7	5
	12	4
Syksy 2017	5	4
	6	5
Kevät 2018	6	4
Syksy 2018	8	4
	11	a) 2 b) 2 c) 5
Kevät 2019	6	4
Syksy 2019	1	1) 2 2) 3 3) 3
Kevät 2020	5	4
Syksy 2020	5	5
Kevät 2021	6	4
	12	5

Taulukko 7.1: Bloomin taksonomia pitkä matematiikka

Kevät 2016	BT3	14%
–	BT4	50%
Syksy 2018	BT5	36%
Kevät 2019	BT3	17%
–	BT4	50%
Kevät 2021	BT5	33%

Taulukko 7.2: Bloomin taksonomia jakauma pitkä matematiikka.

7.4 Bloomin taksonomia lyhyessä matematiikassa

Kaikista lyhyen matematiikan koetehtävistä puolet ovat tasoa BT4, mutta painotetusti ennen sähköistymistä. Ennen sähköistymistä yleisin tehtävien taso oli BT4 joka sisälsi 70 prosenttia tehtävistä. Sähköistymisen jälkeen painopiste siirtyi tason BT3 tehtäviin, joita oli 46 prosenttia tehtävistä.

Lyhyen matematiikan kokeissa oli mukana tason BT2 tehtäviä, mitä ei ollut pitkässä matematiikassa. Sen lisäksi BT5 tason tehtäviä oli lyhyessä matematiikassa vasta sähköistymisen jälkeen, mutta niitäkin ollut vain yksi kappale.

Koe	**Tehtävä**	**Bt**
Kevät 2016	6	a) 3 b) 4
Syksy 2016	5 6	4 4
Kevät 2017	6	4
Syksy 2017	2 8	a) 2 b) 3 a) 3 b) 2
Kevät 2018	4 13	4 a) 4 b) 4 c) 4
Syksy 2018	2 3	2 4
Kevät 2019	3 5 6 10	3 4 5 1) 4 2) 2 3) 2
Syksy 2019	2 6 12	2 3 1) 3 2) 3 3) 2
Kevät 2020	5 7 11	4 3 4
Syksy 2020	7 11	4 3
Kevät 2021	2	3

Taulukko 7.3: Bloomin taksonomia lyhyt matematiikka

Kevät 2016	BT2	10%
–	BT3	20%
Syksy 2018	BT4	70%
Kevät 2019	BT2	8%
–	BT3	46%
Kevät 2021	BT4	38%
	BT5	8%

Taulukko 7.4: Bloomin taksonomia jakauma pitkä matematiikka.

Luku 8

Yhteenveto

Tässä kappaleessa tutkija pyrkii vastaamaan kaikkiin tutkimuskysymyksiin viitaten aikaisemmin tutkimuksessa käytyihin kappaleisiin. Ensimmäiseen kahteen kysymykseen vastataan kappaleiden 5 ja 7 avulla. Viimeiseen kysymykseen vastataan pelkästään kappaleen 6 avulla.

Onko geometrian tehtävät muuttuneet sähköistymisen seurauksena ja jos on, niin miten muutos on nähtävissä?

Tutkimusta aloittaessaan tutkijan hypoteesi oli, että sähköistymisen seurauksena geometrian tehtäviin olisi tullut paljon muutoksia, jotka olisi olleet nähtävissä tehtävänannoissa, sekä tehtävien haastavuudessa. Tämä johtui siitä, että siirtyessä sähköiseen ympäristöön, niin kokeen suorittajille tuli käyttöön ottamisen mukana uusia apuvälineitä tehtävien ratkaisuun (ks. kappale 5). Selkeä muutos on tapahtunut tehtäviin tarjotuissa materiaaleissa. Ennen sähköistymistä tehtävänannon mukana saattoi olla tilannetta havainnollistava kuva, mutta kokeiden sähköistyessä pystyttiin kuvien lisäksi tarjoamaan esimerkiksi dynaamisia Geogebra sovelluksia. Esimerkiksi pitkän matematiikan kevät 2019 sähköisen kokeen tehtävässä 12 oli liitteenä Geogebra sovellus, joka havainnollisti tehtävässä puhuttua dynaamista kolmiota. Sähköistyminen on mahdollistanut myös uusien tehtävä tyyppien tarjoamisen. Lyhyen matematiikan kokeessa syksy 2019 tehtävässä 2 oli useampi alakohta, joista osa oli monivalintoja.

Tehtäviä tarkasteltiin Bloomin taksonomian kannalta, jossa tutkija kävi jokaisen tehtävän läpi ja arvioi tehtävien haastavuutta asteikolla BT asteikolla 1–6 (ks. kappale 7). Tutkimuksessa olleet tehtävät jakautuivat asteikolla välille 2–5.

Pitkässä matematiikassa taksonomian jakaumassa (ks. taulukko 7.2) ei ollut näkyvissä merkittävää muutosta tehtävien haastavuuden välillä. Ennen sähköistymistä ja sen jälkeen 50 prosenttia tehtävistä oli tasoa BT4. Tason BT3 ja BT5 tehtävissä muutosta oli vain 3 prosenttiyksikköä.

Lyhyessä matematiikassa Bloomin taksonomia tasojen jakaumassa (ks. taulukko 7.4) tapahtui huomattavasti enemmän muutoksia. Ennen sähköistymistä 70 prosenttia tehtävistä oli tasoa BT4, missä sähköistymisen jälkeen tehtävistä vain 38 prosenttia oli tasoa BT4, kun painopiste siirtyi tason BT3 tehtäviin, joita oli 46 prosenttia tehtävistä. Lyhyessä matematiikan tehtävistä on tärkeä nostaa myös esille se, että sähköistymisen jälkeen 8 prosenttia tehtävistä oli tasoa BT5, mitä ennen sähköistymistä ei ollut ollenkaan. Data antaisi ymmärtää, että tehtävät olisivat yleisesti olleet sähköisissä kokeissa helpompia, mutta mukana ollut myös vaikeampia tehtäviä. Tämä tulos on kuitenkin ristiriidassa tehtävistä saatujen pisteiden painotettujen keskiarvojen kanssa. Pisteytyksestä saatuihin tuloksiin tutkija palaa seuraavassa alakohdassa.

Miten geometria tehtävien osuus on muuttunut pisteytyksessä?

Kappaleessa 6 tutkija käy läpi ylioppilaslauttakunnalta saatua dataa pitkän ja lyhyen matematiikan ylioppilaskirjoituksista aikaväliltä kevät 2016 - kevät 2021. Tätä dataa on tutkittu useammasta näkökulmasta ja niiden avulla on tehty vertauksia sähköisten kokeiden ja ennen sähköistymistä olleden kokeiden välille.

Pitkän matematiikan kohdalla on huomattavissa selkeä geometria tehtävien väheneminen. Ennen sähköisiä kokeita kevät 2016 - syksy 2018 on ollut tarjolla keskimäärin 2,33 geometrian tehtävää, kun sähköistymisen jälkeen kevät 2019 - kevät 2021 on keskimäärin ollut vain 1,8. Laskemalla kokeissa olleista geometrian tehtävistä myös painotetut keskiarvot, niin näyttää siltä, että tehtävät olisivat helpottuneet (ks. Taulukko 6.3). Kun jokaista kirjoituskertaa tarkastellaan omana kokonaisuutena, niin edellä mainitut syyt yhdessä selittävät miksi geometrian tehtävien osuus pisteytyksessä on vaihdellut kirjoituskertojen välillä (ks. Taulukko 6.1) Eniten geometria tehtävistä saatuja pisteitä suhteessa kokeista saatuihin pisteisiin on kevään 2016 kokeessa. Kyseisessä kokeessa 21 prosenttia jaetuista pisteistä tuli geometrian tehtävistä, mutta saman aikaisesti tehtäviä oli peräti neljä. Toiseksi eniten pisteitä geometrian tehtävistä suhteessa kokeessa jaettuihin pisteisiin oli syksyn 2019 kokeessa, mutta kyseisessä kokeessa geometrian tehtäviä oli vain yksi. Geometrian osalta vähiten pisteitä tuli kokeesta kevät 2021, missä oli kaksi geometrian tehtävää, mutta niistäkin toisessa tuli vain 5 prosenttia koko kokeen pisteistä. Kun pitkän matematiikan geometrian tehtäviä tarkasteltiin Perason korrelaation avulla, niin saatiin nopea arvio tehtävien haastavuudesta muihin sen kokeen tehtäviin. Korkeimman korrelaation sai syksyn 2017 tehtävä 6 pyöristetyllä kertoimella 0,81 ja matalimman korrelaatio kertoimen sai kevään 2021 tehtävä 12 pyöristetyllä kertoimella 0,47.

Lyhyessä matematiikassa geometrian tehtäviä esiintyy enemmän sähköisissä kokeissa. Ennen sähköistymistä kevät 2016 – syksy 2018 geometrian tehtäviä oli keskimäärin 1,8 koetta kohti ja sähköisissä kokeissa kevät 2019 – kevät 2021 geometrian tehtäviä oli keskimäärin 2,4 koetta kohti. Tarkastellessa lyhyen matematiikan geometrian tehtävien painotettuja keskiarvoja, niin näyttää sitä, että tehtävät olisivat olleet hieman helpompia ennen sähköistymistä. Painotetun keskiarvon mukaan helpoin koe geometrian suhteen on ollut syksy 2016, missä geometrian tehtävien painotettu keskiarvo on 68 prosenttia. Vaikeimmat geometrian tehtävät painotetun keskiarvon mukaan on ollut sähköisessä kokeessa kevät 2020, missä geometrian tehtävien painotettu keskiarvo oli 31 prosenttia. Suurimman tehtävästä ansaittujen pisteiden keskiarvo on syksyn 2018 tehtävä 2, josta on saatu keskimäärin 83 prosenttia pisteistä. Haastavin tehtävä on ollut kevään 2020 tehtävä 11, mistä on saatu keskimäärin vain 3 prosenttia pisteistä. Verrattaessa geometrian tehtävistä saatuja pisteitä sen vuoden koko kokeen pisteisiin saadaan arvio, kuinka suuri merkitys geometrian tehtävillä on ollut sen vuoden pisteytyksessä. Suurin osuus pisteytyksessä on ollut kokeella kevät 2019, missä geometrian tehtävistä on tullut 35 prosenttia koko kokeen pisteistä. Tämä on selitettävissä sillä, että kyseisessä kokeessa on ollut neljä geometrian tehtävää, joka on enemmän, kuin muissa kokeissa. Geometrian tehtävillä alhaisin prosentuaalinen osuus pisteytyksessä on ollut kokeessa kevät 2021, missä vain 10 prosenttia kokeen pisteistä on tullut geometrian tehtävistä. Kokeessa on vai yksi geometria tehtävä ja painotetun keskiarvon mukaan se on ollut haastavin verrattuna muihin kokeisiin, missä on ollut vain yksi geometrian tehtävä. Tarkastellessa tehtäviä Pearson korrelaation avulla saatiin myös arvio siitä, kuinka hyvin tehtävien haastavuus on ollut linjassa muiden sen vuoden tehtävien kanssa. Erityistä huomiota herättää kevään 2020 tehtävä 11, minkä alhainen korrelaatio kerroin kokeen kanssa on 0,36508. Tehtävä ei ole haastavuudeltaan linjassa muiden kokeen tehtävien kanssa ja tehtävän alhainen keskiarvosta voidaan päätellä, että tehtävä on ollut haastava.

Luku 9

Luotettavuus

Tässä kappaleessa tutkija haluaa nostaa esille mahdollisia tuloksiin vaikuttavia asioita.

Tutkimuksessa hyödynnettiin erittäin paljon YTL:n tarjoamaa dataa, mutta rajausten jälkeen tutkittava otos on jäänyt suhteellisen pieneksi. Pitkän matematiikan osalta tutkimuksessa oli mukana 20 tehtävää (6 sähköistä tehtävää ja 14 tehtävää ennen sähköistymistä). Lyhyen matematiikan osalta tutkimuksessa oli mukana 23 tehtävää (13 sähköistä tehtävää ja 10 tehtävää ennen sähköistymistä). Koska otokset ovat olleet pieniä, niin varsinkin keskiarvoihin perustuvat tilastot saattavat antaa väärän kuvan. Esimerkkinä pitkän matematiikan geometria tehtävien painotetut keskiarvot pylvästaulukossa 6.4 on kirjoituskerroilla syksy 2019 ja kevät 2020 kokeilla suurimmat painotetut keskiarvot. Molemmissa kokeissa on ollut vain yhdet tehtävät, joten niistä johtopäätöksien tekeminen voidaan nähdä luotettavuus ongelmana. Tämän lisäksi on tärkeä nostaa se, että tutkijan saama data on ollut jo tiivistellyssä muodossa, eikä tutkijalla ole ollut pääsyä yksittäisiin koesuorituksiin.

Tehtäviä tutkittiin myös Bloomin taksonomian avulla, jonka mukana on tullut myös muita tutkimuksen luotettavuuteen vaikuttavia ongelmia. Tutkimuksessaan tutkija antoi jokaiselle tehtävälle oman BT tason kuvaamaan tehtävän vaativuutta. Vaikka tutkija on yrittänyt tehdä arvioinnista mahdollisimman yksiselitteistä, niin tehtäville voisi perustella myös jonkin toisen BT tason.

Jos tutkimus uusitaan, niin seuraavat kehitysideat kannattaa ottaa huomioon. Matematiikan kohdalla sähköisiä kokeita ei ole kerennyt olemaan vielä tarpeeksi, niin kannattaa odottaa useampi vuosi ennen tutkimuksen uusimista. Tarkastellessa tehtäviä Bloomin taksonomian kannalta, niin kannattaa tehtävien arviointi tehdä useamman ihmisen voimin.

Kirjallisuus

[1] Markus Aarniluoma. *Tarkistetun Bloomin taksonomian käyttö järjestelmätekniikan oppikirjan kuvien luokitteluun.* URL: https://trepo.tuni.fi/bitstream/handle/123456789/24371/Aarniluoma.pdf?sequence=3 (viitattu 02. 01. 2022).

[2] Benjamin S. Bloom. *Taxonomy of educational objectives; the classification of educational goals, by a committee of college and university examiners.* New York, Longmans, Green, 1956-.

[3] K. Borsuk ja W. Szmielev. *Foundations of geometry : Euclidean and Bolyai-Lobachevskian geometry, projective geometry.* Amsterdam : North-Holland, 1960.

[4] O. Byer ja F. Lazebnik ja D. L. Smeltzer. *Methods for Euclidean Geometry.* Mathematical Association of America, Inc, 2010. ISBN: 978-0-88385-763-2.

[5] SAS Institute Inc. *CORR-Procedure.* 2022. URL: https://support.sas.com/rnd/app/stat/procedures/corr.html (viitattu 07. 04. 2022).

[6] Kouluhallitus. *Lukion opetussuunnitelman perusteet 1985.* Valtion painatuskeskus, 1985. ISBN: 951-860-001-7.

[7] Anne-Mari Lepistö. *Geometria lukion matematiikassa.* URL: https://helda.helsinki.fi/bitstream/handle/10138/39465/geometria.pdf?sequence=3&isAllowed=y (viitattu 02. 01. 2022).

[8] Matematiikan digitaalisen kokeen määräykset. *Matematiikan kokeen määräykset ja ohjeet.* 2018. URL: https://peda.net/haapajarvi/haapajarvenlukio/oppiaineet/matematiikka/lyhyen-kurssisivut2/yo-kokeet/mdkm:file/download/effc3a0fe98fbffd5d025 fi_maaraykset_matematiikka_digitaalinen_koe.pdf (viitattu 13. 04. 2022).

[9] Helsinki: Opetushallitus. *Lukion opetussuunitelman perusteet 2015.* URL: https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/172124_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2015.pdf (viitattu 15. 03. 2022).

[10] Helsinki: Opetushallitus. *Lukion opetussuunitelman perusteet 2019.* URL: https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2019.pdf (viitattu 08. 03. 2022).

[11] Helsinki: Opetushallitus. *Lukion opetussuunnitelman perusteet 1994*. ISBN: 951-47-8797-8.

[12] M. Kaarinen ja P. Kaarinen. *Sivistyksen portti*. Otava, 2002. ISBN: 951-1-18340-0.

[13] Rita Trötschkes. *Sähköisen yo-kokeiden aikataulu*. URL: `https://yle.fi/aihe/artikkeli/2015/06/01/sahkoisen-yo-kokeiden-aikataulu` (viitattu 16. 03. 2022).

[14] Ylioppilastutkintolautakunta. *Digitaalinen ylioppilastutkinto*. URL: `https://www.ylioppilastutkin` `fi/ylioppilastutkinto/digitaalinen-ylioppilastutkinto` (viitattu 16. 03. 2022).

[15] Ylioppilastutkintolautakunta. *FI – Matematiikka pitkä oppimäärä kevät 2019*. URL: `https://yle.fi/plus/abitreenit/2019/kevat/M-fi/attachments/index.html#12.A%22` (viitattu 15. 03. 2022).

[16] Ylioppilastutkintolautakunta. *FI – Matematiikka, pitkä oppimäärä kevät 2021*. URL: `https://yle.fi/plus/abitreenit/2021/Kev%C3%A4t/2021-03-24_M_fi/index.html` (viitattu 15. 03. 2022).

[17] Ylioppilastutkintolautakunta. *Koejärjestelmässä käytettävissä olevat ohjelmat*. URL: `https://www.ylioppilastutkinto.fi/ylioppilastutkinto/digitaalinen-ylioppilastutkinto/koejarjestelman-ohjelmat` (viitattu 15. 03. 2022).

[18] Ylioppilastutkintolautakunta. *Matematiikan digitaalisen kokeen määräykset*. 2019. URL: `https://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot/Ohjeet/Koekohtaiset/fi_maaraykset_matematiikka_digitaalinen_koe.pdf` (viitattu 08. 04. 2022).

[19] Ylioppilastutkintolautakunta. *Matematiikan kokeen määräykset ja ohjeet*. 2016. URL: `https://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot/Ohjeet/Koekohtaiset/fi_maaraykset_matematiikka.pdf` (viitattu 08. 04. 2022).

[20] Ylioppilastutkintolautakunta. *Matematiikan kokeen määräykset ja ohjeet*. 2017. URL: `https://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot/Ohjeet/Koekohtaiset/matematiikka_maaraykset_090217.pdf` (viitattu 08. 04. 2022).

[21] Ylioppilastutkintolautakunta. *Vastauksia digitaalisia MAFYKE-kokeita koskevaan kyselyyn 30.3.2017*. URL: `https://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot/Sahkoinen_tutkinto/mafyke-ytl-fi.pdf` (viitattu 15. 03. 2022).

Liitteet

Taulukko 9.1: Esimerkkiehtävien x ja y pistejakauma. Vasemmalla x pisteet ja oikealla y pisteet.

0	0	1	1
2	0	4	4
2	4	1	3
0	0	3	5
5	0	5	4
5	2	1	2
1	4	5	4
2	0	2	3
0	0	4	0
5	1	5	4
5	1	3	4
2	3	3	4
0	5	0	2
3	4	2	3
4	4	0	5
3	2	1	2
5	4	5	0
5	4	3	2
5	2	0	4
5	0	4	2
2	5	0	5
2	0	5	2
1	3	2	2
5	4	2	0
2	0	1	2

1	4	0	1
3	5	4	3
0	0	3	4
1	0	3	2
4	4	2	5
1	5	1	4
2	4	2	5
1	5	4	4
5	1	1	4
2	1	4	0
0	3	3	5
3	0	0	4
1	1	2	4
4	3	0	3
2	2	3	0
0	3	2	3
0	4	0	2
5	2	0	3
2	0	5	1
2	0	5	0
1	3	5	5
4	3	2	3
1	2	1	3
2	4	5	1
4	2	5	2