TARTU ÜLIKOOL

Loodus- ja täppisteaduste valdkond

Füüsika instituut

Joosep Lember

Sfääriliselt sümmeetrilised staatilised mustad augud skalaar-mittemeetrilisuse teoorias

Bakalaureusetöö (6 EAP)

Füüsika, keemia ja materjaliteaduse õppekava, füüsika eriala

Juhendaja: Laur Järv, PhD

Tartu 2022

Sfääriliselt sümmeetrilised staatilised mustad augud skalaar-mittemeetrilisuse teoorias

Einsteini üldrelatiivsusteooria saab formuleerida vähemalt kolmel ekvivalentsel moel, kasutades aegruumi geomeetria kirjeldamiseks kõverust, väänet või mittemeetrilisust. Kosmoloogilised vaatlused toovad välja teooria probleemid, mistõttu on loodud mitmeid laiendatud gravitatsiooniteooriaid. Käesolevas töös uurime üldrelatiivsusteooria sümmeetrilise teleparalleelse ekvivalendi laiendust: skalaar-mittemeetrilisuse teooriat, kus aegruumi geomeetria kirjeldamiseks kasutatakse mittemeetrilisust ja gravitatsiooniga mitteminimaalselt seotud skalaarvälja. Töös leiame skalaar-mittemeetrilisuse teooriate klassis sfääriliselt sümmeetriliste staatiliste mustade aukude mitmesugused analüütilised lahendid. Esitame lahendite olemasolu teoreemi asümptootiliselt Minkowski mustade aukude jaoks. Lahendite puhul uurime nende käitumist asümptootikas ja hindame selle põhjal füüsikalisust, samuti leiame ka sündmuste horisondi asukoha.

Märksõnad: Skalaar-tensortüüpi gravitatsiooniteooriad, teleparalleelsed gravitatsiooniteooriad, mustad augud

CERCS: P190 Matemaatiline ja üldine teoreetiline füüsika, klassikaline mehaanika, kvantmehaanika, relatiivsus, gravitatsioon, statistiline füüsika, termodünaamika

Spherically symmetric static black holes in scalar-nonmetricity theory

Einstein's general theory of relativity can be formulated in at least three equivalent forms based on the quantity – curvature, torsion or nonmetricity – describing the geometry of spacetime. Cosmological observations bring out the shortcomings of general relativity and motivate the formulation of extended theories of gravitation. In this work we investigate an extension of the symmetric teleparallel equivalent of general relativity, called scalar-nonmetricity theory, where spacetime is described via nonmetricity and a scalar field nonminimally coupled to gravity. We find some analytical solutions for spherically symmetric static black holes in a class of scalar-nonmetricity theories and present a no-hair theorem for asymptotically Minkowski black holes. Finally we analyse if the solutions describe a physical black hole, by studying their behaviour at asymptotics. Additionally we find the position of their event horizon.

Keywords: Scalar-tensor theories of gravity, teleparallel theories of gravity, black holes

CERCS: P190 Mathematical and general theoretical physics, classical mechanics, quantum mechanics, relativity, gravitation, statistical physics, thermodynamics

Sisukord

Sissejuhatus

Aastal 1915 formuleeris Albert Einstein üldrelatiivsusteooria (ÜRT), mis seob gravitatsiooninähtused aegruumi geomeetriaga ning asendas Newtoni teooria kui meile kõige täpsema teadaoleva gravitatsiooni kirjeldava teooria. Erinevalt Newtoni gravitatsiooniteooriast on ÜRT võimeline piisava täpsusega selgitama nähtusi, nagu planeetide periheeli nihe ning valguse kõrvalekalle massiivsest objektist möödumisel. Sellegipoolest on üldrelatiivsusteoorial samuti omad probleemid. Üheks näiteks on universumi kiirenev paisumine, mida ei suuda ÜRT selgitada ilma teooriasse tumeenergia rolli täitva kosmoloogilise konstandi lisamiseta. Kosmoloogiline konstant on aga samuti probleemne, kuna selle osakestefüüsikast arvutatud teoreetiline väärtus ei ole kooskõlas vaatlustulemustega. Samuti suudab ÜRT selgitada vaadeldud galaktikate pöörlemiskõveraid ainult teooriasse tumeaine lisamisel, mida pole siiamaani suudetud vaadelda, kuigi see peaks moodustama enamuse meie universumis olevast ainest. [1][2]

Nende ebakõlade lahendamise lootuses on loodud erinevaid ÜRT laiendusi, nagu $f(R)$ või skalaar-kõveruse teooria. ÜRT kirjeldab aegruumi geomeetriat kõveruse kaudu, kuid samuti on loodud ÜRT-ga ekvivalentseid teooriaid, kus gravitatsiooninähtusi tingivad teised geomeetrilised suurused. Üldrelatiivsusteooria teleparalleelne ekvivalent (ÜRTTE) kasutab geomeetria kirjeldamiseks väänet ning üldrelatiivsusteooria sümmeetriline teleparalleelne ekvivalent (ÜRTSTE) teeb seda väände ja kõveruse asemel mittemeetrilisuse kaudu. Seetõttu on laiendatud gravitatsiooniteooriate loomisel laiendatud ka ÜRT-ga ekvivalentseid teooriaid, näiteks skalaar-väände ja skalaar-mittemeetrilisuse teooriad. Siinkohal on oluline mainida, et ÜRTTE ja ÜRTSTE laiendused ei ole ekvivalentsed vastavate ÜRT laiendustega. [3][4]

Üheks olulisemaks Einsteini üldrelatiivsusteooria ennustuseks on mustade aukude olemasolu, mis kujutavad endast matemaatiliselt väljavõrrandite lõkspinnaga (horisondiga) lahendit. ÜRT-s määravad musta augu omadused üheselt ära kolm parameetrit: mass, impulsimoment ja laeng. Samuti on laiendatud gravitatsiooniteooriates leitud mitmeid musta augu lahendeid, kusjuures skalaarvälja sisaldavates teooriates lisandub skalaarväli neljandaks musta augu omadusi määravaks parameetriks. [5] Nüüdseks kinnitavad mustade aukude olemasolu mitmed vaatlustulemused, nagu mustadest aukudest jäädvustatud pildid [6][7] ja gravitatsioonilainete detekteerimine [8][9].

Käesolevas bakalaureusetöös uurime lähemalt väljavõrrandeid, mis ilmnevad ÜRTSTE laienduses, kuhu on lisatud gravitatsiooniga mitteminimaalselt seotud skalaarväli ning mida nimetatakse skalaar-mittemeetrilisuse teooriaks. Töö eesmärgiks on lahendada väljavõrrandid sfääriliselt sümmeetriliste staatiliste mustade aukude jaoks. Täiendavalt uurime leitud lahendite käitumist asümptootikas ja nende vastavust Newtoni piiriga, et teha järeldusi lahendite füüsikalisuse kohta.

Esimeses peatükis tutvustame töö käigus vajaminevaid mõisteid ning matemaatilisi vahendeid ja anname ülevaate ÜRT-st ja selle laiendustest, täpsemalt skalaar-mittemeetrilisuse teooriast. Teises peatükis uurime lähemalt teoorias ilmnevaid väljavõrrandeid sfääriliselt sümmeetriliste staatiliste mustade aukude kontekstis. Kolmandas peatükis lahendame väljavõrrandid analüütiliselt mitmetel erijuhtudel. Saadud lahendite omaduste uurimisega tegeleb töö neljas peatükk. Viimastes peatükkides arutleme mõnede töö aspektide üle ning esitame kokkuvõtte.

Enamik töös sooritatud arvutusi on tehtud Pythonil põhinevas programmeerimiskeskkonnas Jupyter, kasutades Sympy paketti [10].

Tähistused

$\mathring{A}$ - suurus A on arvutatud, kasutades Levi-Civita seostust

BBMB - Bocharova-Bronnikov-Melnikov-Bekenstein

ÜRT - üldrelatiivsusteooria

ÜRTSTE - üldrelatiivsusteooria sümmeetriline teleparalleelne ekvivalent

ÜRTTE - üldrelatiivsusteooria teleparalleelne ekvivalent

Rasvases kirjas tähistame mõisted nende esmakordsel defineerimisel.

1 Teoreetiline taust

1.1 Geomeetria

Peatükis tutvustame aegruumi geomeetria kirjeldamiseks vajalikke mõisteid ja nendevahelisi seoseid, mida ülejäänud töö käigus kasutame. Peatükk põhineb allikal [11], kui ei ole viidatud teisiti.

Aegruumi kirjeldamiseks kasutatakse teist järku kovariantset tensorit $g_{\mu\nu}$, mida nimetatakse **meetriliseks tensoriks** ehk **meetrikaks**. Meetrika kaudu defineeritakse vektorite skalaarkorrutis

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv g_{\mu\nu} a^{\mu} b^{\nu} \tag{1}$$

ning seega kannab meetrika infot aegruumi punktidevaheliste kauguste ja nurkade kohta. Infinitesimaalsete nihkevektorite skalaarkorrutis annab **meetrilise intervalli**

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \,. \tag{2}$$

Vektorite ja tensorite käitumist paralleelnihetel kirjeldab **seostus** $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$, mis annab eeskirja vektori või tensori komponentide muutumisele erinevates punktides. Seostuse kaudu defineeritakse tensorite kovariantsed tuletised. Esimest järku tensori ehk vektori kovariantne tuletis on

$$\nabla_{\nu} A^{\mu} = \partial_{\nu} A^{\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda} A^{\lambda} \,, \tag{3}$$

kus oleme osatuletise jaoks kasutanud tähistust

$$\frac{\partial A^{\mu}{}_{\rho}}{\partial x^{\nu}} = \partial_{\nu} A^{\mu}{}_{\rho} \,. \tag{4}$$

Kui puutujavektori $V^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau}$ komponendid ei muutu paralleelnihkel mööda joont, mida kirjeldab parameeter τ, siis nimetatakse joont **autoparalleelseks**. Autoparalleelse joone tingimus on antud valemiga [12]

$$V^{\nu} \nabla_{\nu} V^{\mu} = 0 \,. \tag{5}$$

Kõige üldisemal juhul nimetatakse seostust **meetrilis-afiinseks** ja selle võib esitada kolme eri komponendi summana

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\mu\nu} + K^{\lambda}{}_{\mu\nu} + L^{\lambda}{}_{\mu\nu} \,. \tag{6}$$

Esimest liiget valemis (6) nimetatakse **Levi-Civita seostuseks**

$$\mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(\partial_{\nu} g_{\mu\rho} + \partial_{\mu} g_{\nu\rho} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu} \right) \,, \tag{7}$$

see tuleneb vahetult meetrikast. Teine komponent ehk **kontortsiooni tensor**

$$K^{\lambda}{}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(T_{\rho\mu\nu} - T_{\mu\rho\nu} - T_{\nu\rho\mu} \right) = -K_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu} \tag{8}$$

sõltub aegruumi **väändetensorist**, mis defineeritakse seostuse alumiste indeksite antisümmeetria kaudu

$$T^{\lambda}{}_{\mu\nu} \equiv 2\Gamma^{\lambda}{}_{[\mu\nu]} = \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu} \,. \tag{9}$$

Alumiste indeksite suhtes sümmeetrilise seostuse korral on väändetensor null, mis tähendab, et seostus on väändevaba. Viimast seostuse (6) komponenti nimetatakse **disformatsiooni tensoriks**

$$L^{\lambda}{}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(Q_{\rho\mu\nu} - Q_{\mu\rho\nu} - Q_{\nu\rho\mu} \right) = L^{\lambda}{}_{\nu\mu} \tag{10}$$

ja see sõltub **mittemeetrilisuse tensorist**, mis on kovariantne tuletis meetrikast

$$Q_{\rho\mu\nu} \equiv \nabla_{\rho} g_{\mu\nu} = \partial_{\rho} g_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\rho\mu} g_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\rho\nu} g_{\mu\alpha} \,. \tag{11}$$

Näeme, et vääne on puhtalt seostuse omadus, aga mittemeetrilisus sõltub nii seostusest kui ka meetrikast. Seostuse kaudu defineeritakse aegruumi kõverust kirjeldavad suurused, nagu **Riemanni kõverustensor**

$$R^{\sigma}{}_{\rho\mu\nu} \equiv \partial_{\mu} \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\rho} - \partial_{\nu} \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\rho} + \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\rho} \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\alpha} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\rho} \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\alpha} \,, \tag{12}$$

mille ahendamisel saadakse **Ricci tensor**

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\sigma}{}_{\mu\sigma\nu}, \tag{13}$$

millest omakorda leitakse **Ricci skalaar**

$$R \equiv R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}. \tag{14}$$

Üldrelatiivsusteoorias eeldatakse, et seostus koosneb ainult Levi-Civita seostusest. Levi-Civita seostuse definitsioonist (7) järeldub automaatselt, et vääne ja mittemeetrilisus on nullid ning aegruumi geomeetriat jääb kirjeldama ainult kõverus. Analoogselt on võimalik seostusele seada teisi, meetrikast sõltumatuid tingimusi [4]. Üldrelatiivsusteooria sümmeetrilises teleparalleelses ekvivalendis (ÜRTSTE) ja selle laiendustes eeldatakse, et seostus on tasane (kõverus on null) ja väändevaba ning kogu geomeetriat kirjeldab mittemeetrilisus [13]. Levi-Civita seostuse kaudu leitud Ricci skalaari $\mathring{R}$ ja ÜRTSTE mittemeetrilisuse skalaari vahelist seost kirjeldab valem [4]

$$\mathring{R} = Q - \mathring{\nabla}_{\alpha} \left(Q^{\alpha} - \tilde{Q}^{\alpha} \right), \tag{15}$$

kus Q on **mittemeetrilisuse skalaar**

$$Q \equiv -\frac{1}{4}Q_{\alpha\beta\gamma}Q^{\alpha\beta\gamma} + \frac{1}{2}Q_{\alpha\beta\gamma}Q^{\gamma\beta\alpha} + \frac{1}{4}Q_{\alpha}Q^{\alpha} - \frac{1}{2}Q_{\alpha}\tilde{Q}^{\alpha} \tag{16}$$

ning Q_α ja $\tilde{Q}^\alpha$ on mittemeetrilisuse tensori jäljed

$$Q_\mu \equiv Q_\mu{}^\alpha{}_\alpha \,, \qquad \tilde{Q}^\mu \equiv Q_\alpha{}^{\alpha\mu} \,. \tag{17}$$

1.2 Üldrelatiivsusteooria

Üldrelatiivsusteoorias, kus eeldatakse Levi-Civita seostust, on ruumi vääne ja mittemeetrilisus nullid ning aegruumi geomeetriat kirjeldatakse ainult kõveruse kaudu. Mõjufunktsionaal pannakse kirja kahe liikme summana [11]

$$S = \frac{c^4}{16\pi G_N} S_{EH} + S_m \,, \tag{18}$$

kus c on valguse kiirus vaakumis, G_N on Newtoni gravitatsioonikonstant ning **Einsteini-Hilberti mõjufunktsionaal**

$$S_{EH} \equiv \int d^4x \sqrt{-g} \mathring{R} \tag{19}$$

kannab infot aegruumi geomeetria kohta ja S_m on mateeriast tingitud mõju. Meetrika determinandi g ees olev miinusmärk on tingitud sellest, et neljamõõtmelise aegruumi korral on determinant negatiivne. Mõjufunktsionaali varieerimisel meetrika järgi saame **Einsteini väljavõrrandid** [11]

$$\mathring{G}_{\mu\nu} \equiv \mathring{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathring{R} = \kappa^2 \mathcal{T}_{\mu\nu} \,, \tag{20}$$

kusjuures $\kappa^2 = \frac{8\pi G_N}{c^4}$, $\mathring{G}_{\mu\nu}$ on **Einsteini tensor** ja $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ on **mateeriatensor** (energia-impulsi tensor), mis on aegruumi kõveruse tekitajaks.

Üldrelatiivsusteooriat on võimalik üldistada gravitatsioonidünaamika muutmisega. Üheks võimaluseks on lisada aegruumi gravitatsiooniga mitteminimaalselt seotud skalaarväli Φ, mille tulemusena [12]

$$S = S_R + S_\Phi + S_m \,, \tag{21}$$

kus

$$S_R = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{A}(\Phi) \mathring{R} \,, \tag{22}$$

$$S_\Phi = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} \mathcal{B}(\Phi) g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \mathcal{V}(\Phi) \right] \,. \tag{23}$$

Funktsioonid $\mathcal{A}(\Phi)$, $\mathcal{B}(\Phi)$ ja $\mathcal{V}(\Phi)$ on vabad funktsioonid, mille fikseerimine määrab konkreetse teooria, kusjuures kui $\mathcal{A}(\Phi)$ on konstantne, siis on skalaarväli gravitatsiooniga minimaalselt seotud. Mõjufunktsionaali varieerimisel meetrika ja skalaarvälja järgi saadakse väljavõrrandid skalaar-kõveruse teoorias [12]. Teine lihtne võimalus ÜRT üldistamiseks on muuta lagranžiaani tiheduse funktsionaalne sõltuvus Ricci skalaarist üldisele kujule $f(\mathring{R})$, mille tulemusena saame $f(R)$ teooria, kus mõjufunktsionaal on

$$S_{f(R)} \equiv \int d^4x\sqrt{-g}f(\mathring{R})\,. \tag{24}$$

1.3 Skalaar-mittemeetrilisuse teooria

Alapeatükk teeb sissejuhatusse skalaar-mittemeetrilisuse teooriasse ja põhineb allikal [4], kui ei ole viidatud teisiti.

Erinevalt ÜRT-st, eeldatakse üldrelatiivsusteooria sümmeetrilises teleparalleelses ekvivalendis (ÜRTSTE), et seostus on väändevaba ja tasane. See tähendab, et peavad kehtima tingimused [13]

$$T^{\lambda}{}_{\mu\nu} = 0\,, \qquad\qquad R^{\lambda}{}_{\mu\nu\sigma} = 0\,. \tag{25}$$

Analoogselt ÜRT-ga esitatakse ka ÜRTSTE-s mõjufunktsionaal kahe osana, kusjuures Einsteini-Hilberti mõjufunktsionaali asemel on mõjufunktsionaal [13]

$$S_Q = \int d^4x\sqrt{-g}Q\,, \tag{26}$$

kuna ainuke geomeetriat kirjeldav mittetriviaalne suurus on mittemeetrilisus. Valemi (15) abil taandub mõjufunktsionaal Einsteini-Hilberti mõjufunktsionaaliks (19), kuhu on lisatud ääreliige, mis liikumisvõrrandeid ei mõjuta. Seetõttu on kummastki teooriast leitud liikumisvõrrandid samad, mis kinnitab teooriate ekvivalentsust. ÜRTSTE-le gravitatsiooniga mitteminimaalselt seotud skalaarvälja Φ lisamise tulemusena saame skalaar-mittemeetrilisuse teooria mõjufunktsionaaliga

$$S = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}\left(\mathcal{L}_g + \mathcal{L}_l\right) + S_m\,, \tag{27}$$

kus $\mathcal{L}_g$ on gravitatsioonidünaamikat kirjeldav lagranžiaani tihedus

$$\mathcal{L}_g = \mathcal{A}(\Phi)Q - \mathcal{B}(\Phi)g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\Phi\partial_\beta\Phi - 2\mathcal{V}(\Phi)\,. \tag{28}$$

Lagrange'i kordajatest λ koosnev liige $\mathcal{L}_l$

$$\mathcal{L}_l = 2\lambda_\mu{}^{\beta\alpha\gamma}R^\mu{}_{\beta\alpha\gamma} + 2\lambda_\mu{}^{\alpha\beta}T^\mu{}_{\alpha\beta} \tag{29}$$

tagab, et kõverustensor ja väändetensor on nullid. Analoogselt skalaar-kõveruse teooriatega on skalaarväli gravitatsiooniga minimaalselt seotud, kui $\mathcal{A}$ on arvuline konstant. Mõjufunktsionaali (27) varieerimisel meetrika järgi saame väljavõrrandid

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\mu\nu} \equiv & \frac{2}{\sqrt{-g}}\nabla_\alpha\left(\sqrt{-g}\mathcal{A}P^\alpha{}_{\mu\nu}\right) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{A}Q + \mathcal{A}\left(P_{\mu\alpha\beta}Q_\nu{}^{\alpha\beta} - 2Q_{\alpha\beta\mu}P^{\alpha\beta}{}_\nu\right) + \\ & + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(\mathcal{B}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\Phi\partial_\beta\Phi + 2\mathcal{V}\right) - \mathcal{B}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi = \kappa^2\mathcal{T}_{\mu\nu}\,,\end{aligned} \tag{30}$$

kus $P^\alpha{}_{\mu\nu}$ on superpotentsiaal

$$P^\alpha{}_{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{2}L^\alpha{}_{\mu\nu} + \frac{1}{4}\left(Q^\alpha - \tilde{Q}^\alpha\right)g_{\mu\nu} - \frac{1}{8}\left(\delta^\alpha{}_\mu Q_\nu + \delta^\alpha{}_\nu Q_\mu\right) \tag{31}$$

ning $\delta^\alpha{}_\mu$ on Kroneckeri delta. Skalaar-mittemeetrilisuse teoorias esinevad suurused on seotud Levi-Civita seostusest arvutatud Einsteini tensoriga valemi

$$\mathring{G}_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\nabla_\alpha\left(\sqrt{-g}P^\alpha{}_{\mu\nu}\right) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}Q + P_{\mu\alpha\beta}Q_\nu{}^{\alpha\beta} - 2Q_{\alpha\beta\mu}P^{\alpha\beta}{}_\nu \tag{32}$$

kaudu. Selle seose abil on võimalik esitada väljavõrrandid (30) kujul

$$\kappa^2\mathcal{T}_{\mu\nu} = \mathcal{A}\mathring{G}_{\mu\nu} + 2\frac{d\mathcal{A}}{d\Phi}P^\alpha{}_{\mu\nu}\partial_\alpha\Phi + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(\mathcal{B}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\Phi\partial_\beta\Phi + 2\mathcal{V}\right) - \mathcal{B}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi\,. \tag{33}$$

Kuna meetrilis-afiinsetes gravitatsiooniteooriates on seostus ja meetrika sõltumatud, siis peame varieerima ka seostuse järgi, millest saame

$$\mathcal{C}_\mu \equiv \nabla_\beta\left\{\partial_\alpha\mathcal{A}\left[\nabla_\mu\left(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\right) - \delta^\alpha{}_\mu\nabla_\gamma\left(\sqrt{-g}g^{\gamma\beta}\right)\right]\right\} = 0\,. \tag{34}$$

Mõjufunktsionaali varieerimine skalaarvälja järgi annab

$$2\mathcal{B}\mathring{\nabla}_\alpha\mathring{\nabla}^\alpha\Phi + \frac{d\mathcal{B}}{d\Phi}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\Phi\partial_\beta\Phi + \frac{d\mathcal{A}}{d\Phi}Q - 2\frac{d\mathcal{V}}{d\Phi} = 0\,. \tag{35}$$

Analoogselt ÜRT-ga on võimalik ka ÜRTSTE üldistada lagranžiaani tiheduse funktsionaalse sõltuvuse muutmisega, mida nimetatakse $f(Q)$ teooriaks, kus

$$\mathcal{L}_g = f(Q)\,. \tag{36}$$

Viimane on esitatav skalaar-mittemeetrilisuse teooria kaudu, kui teha valik

$$\mathcal{A}(\Phi) = \frac{df}{d\Phi}\,, \qquad \mathcal{B}(\Phi) = 0\,, \qquad \mathcal{V}(\Phi) = \frac{1}{2}\left(\frac{df}{d\Phi}\Phi - \Phi\right)\,, \tag{37}$$

kus Φ on skalaarväli. Niisuguse valiku tegemisel tuleb arvestada, et $\frac{d^2f}{d\Phi^2} \neq 0$, millest järeldub, et $\Phi = Q$. Järelikult on $f(Q)$ teooria üldise skalaar-mittemeetrilisuse teooria erijuht.

1.4 Lie tuletis ja Killingi vektorid

Alapeatükk põhineb allikal [11], kui ei ole viidatud teistmoodi. Käesolevas töös on olulised meetrika sümmeetriad ehk **isomeetriad**, mille rakendamine lihtsustab märkimisväärselt võrrandeid. Seetõttu on olulisteks matemaatilisteks vahenditeks Lie tuletised ja Killingi vektorid, mille tutvustamisega järgnev alapeatükk tegeleb.

Lie tuletis kujutab endast suunatuletise üldistust koordinaatidest sõltumatule kujule. Lie tuletis meetrikast vektori V^ρ suunas defineeritakse valemiga

$$\pounds_V g_{\mu\nu} \equiv V^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} + \partial_\mu V^\rho g_{\rho\nu} + \partial_\nu V^\rho g_{\mu\rho} \,. \tag{38}$$

Killingi vektoriteks nimetatakse isomeetriat genereerivaid vektoreid ehk vektoreid, mille suunas Lie tuletis meetrikast on null

$$\pounds_V g_{\mu\nu} = 0 \,. \tag{39}$$

Levi-Civita seostuse korral järeldub sellest automaatselt, et on ka täidetud tingimus

$$\pounds_V \mathring{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu} = 0 \,, \tag{40}$$

kus Lie tuletis seostusest on leitav valemiga [3]

$$\pounds_V \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \equiv V^\sigma \partial_\sigma \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \partial_\sigma V^\lambda \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} + \partial_\mu V^\sigma \Gamma^\lambda{}_{\sigma\nu} + \partial_\nu V^\sigma \Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma} + \partial_\mu \partial_\nu V^\lambda \,. \tag{41}$$

Meetrilis-afiinsetes teooriates on seostus meetrikast sõltumatu. Seetõttu, kui nõuda, et seostus peab samuti rahuldama sümmeetriatingimusi, siis peavad meetrika ja seostus täitma kahte sõltumatut tingimust (39) ja (40), kusjuures valemis (40) tuleb asendada $\mathring{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu} \rightarrow \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$.

Sfäärilise sümmeetriaga süsteemide uurimisel on otstarbekas kasutada sfäärilisi koordinaate $x^\mu = \begin{pmatrix} ct & r & \theta & \varphi \end{pmatrix}$. Nendes koordinaatides tagavad kolmruumi sfäärilise sümmeetria kolm Killingi vektorit

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{R} = \sin\varphi \, \mathbf{e}_\theta + \cot\theta \cos\varphi \, \mathbf{e}_\varphi \,, \tag{42}$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{S} = \cos\varphi \, \mathbf{e}_\theta - \cot\theta \sin\varphi \, \mathbf{e}_\varphi \,, \tag{43}$$

$$\mathbf{V}_3 = \mathbf{T} = \mathbf{e}_\varphi \,, \tag{44}$$

kus $\mathbf{e}_\theta$ ja $\mathbf{e}_\varphi$ on baasivektorid. Lisaks ruumilistele sümmeetriatele saame nõuda ka aegruumi **staatilisust**, mis tähendab, et leidub Killingi vektor, mis on risti hüperpindadega, kus t on konstantne. Sfäärilistes koordinaatides staatilisust tagav Killingi vektor on

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{e}_t \,, \tag{45}$$

kus $\mathbf{e_t}$ on ajakoordinaadi baasivektor.

2 Sfääriliselt sümmeetriliste väljavõrrandite uurimine

Peatükis uurime üldiseid skalaar-mittemeetrilisuse teooria väljavõrrandeid sfäärilise sümmeetriaga staatilise musta augu kontekstis. Esimeses alapeatükis 2.1 tagame, et skalaarväli, mis on gravitatsiooniga seotud, ja aegruumi geomeetria vastaksid staatilisuse, sfäärilise sümmeetria ja skalaar-mittemeetrilisuse teooria tingimustele. Peatükis 2.2 leiame väljavõrrandite ekvivalentsed kujud sümmeetriatingimusi rahuldavas aegruumis. Viimases alapeatükis 2.3 analüüsime väljavõrrandeid ja esitame teoreemi, mis seab piirangu vabadele funktsioonidele, mille korral leiduvad asümptootiliselt Minkowski musta augu lahendid. Käesolevas peatükis ja edaspidi kasutame ühikuid, kus $c \equiv 1$.

2.1 Geomeetria ja sümmeetria tingimused

Sfääriliselt sümmeetriliste staatiliste mustade aukude uurimiseks tuleb esmalt tagada, et aegruumi geomeetria rahuldab samuti staatilisuse ja sümmeetria nõudeid. See tähendab, et aegruumi meetrika jaoks peab kehtima tingimus (39) kõigi Killingi vektorite (42)–(45) korral. Signatuuriga $(-,+,+,+)$ meetrika, mis vastab nendele tingimustele, on esitatav kujul [13]

$$ds^2 = -g_{tt}dt^2 + g_{rr}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \,, \tag{46}$$

kus g_{tt} ja g_{rr} on positiivsed funktsioonid radiaalkoordinaadist r. Käesolevas töös nõuame, et seostus, mis on meetrikast sõltumatu, rahuldaks samuti sümmeetriatingimusi. Järelikult peab kõigi Killingi vektorite (42)–(45) korral kehtima samuti tingimus (40). Skalaar-mittemeetrilisuse teooriates peavad lisaks olema täidetud tingimused (25), mis tagavad, et seostus on tasane ja väändevaba. Esimene seostuse kordajate hulk, mis rahuldab kõiki eelnevalt mainitud tingimusi, on [13]

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \left[\begin{bmatrix} c & \Gamma^{\varphi}{}_{r\varphi} & 0 & 0 \\ \Gamma^{\varphi}{}_{r\varphi} & \Gamma^{t}{}_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sin^2\theta}{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma^{r}{}_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right.$$
$$\left. \begin{bmatrix} 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma^{\varphi}{}_{r\varphi} & 0 \\ c & \Gamma^{\varphi}{}_{r\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma^{\varphi}{}_{r\varphi} \\ 0 & 0 & 0 & \cot\theta \\ c & \Gamma^{\varphi}{}_{r\varphi} & \cot\theta & 0 \end{bmatrix} \right] , \tag{47}$$

kus $c \neq 0$ on suvaline konstant ning ${\Gamma^t}_{rr}$, ${\Gamma^r}_{rr}$ ja ${\Gamma^\varphi}_{r\varphi}$ on radiaalkoordinaadist r sõltuvad vabad funktsioonid. Seejuures vabad funktsioonid ei ole omavahel sõltumatud ning nende vahel kehtib seos

$$\frac{d}{dr}{\Gamma^\varphi}_{r\varphi} = c{\Gamma^t}_{rr} + {\Gamma^\varphi}_{r\varphi}({\Gamma^r}_{rr} - {\Gamma^\varphi}_{r\varphi})\,. \tag{48}$$

Lisaks seostuse kordajatele (47) leidub veel teine seostuse kordajate hulk, mille puhul on täidetud vajalikud sümmeetria ja geomeetria tingimused [13]

$$ {\Gamma^\lambda}_{\mu\nu} = \left[\begin{bmatrix} -c\,(2c-k)\,{\Gamma^t}_{\theta\theta} - c + k & \frac{(2c-k)\left(c{\Gamma^t}_{\theta\theta}+1\right){\Gamma^t}_{\theta\theta}}{{\Gamma^r}_{\theta\theta}} & 0 & 0 \\ \frac{(2c-k)\left(c{\Gamma^t}_{\theta\theta}+1\right){\Gamma^t}_{\theta\theta}}{{\Gamma^r}_{\theta\theta}} & {\Gamma^t}_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {\Gamma^t}_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {\Gamma^t}_{\theta\theta}\sin^2\theta \end{bmatrix} \right. $$
$$ \begin{bmatrix} -c\,(2c-k)\,{\Gamma^r}_{\theta\theta} & c\,(2c-k)\,{\Gamma^t}_{\theta\theta} + c & 0 & 0 \\ c\,(2c-k)\,{\Gamma^t}_{\theta\theta} + c & {\Gamma^r}_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {\Gamma^r}_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {\Gamma^r}_{\theta\theta}\sin^2\theta \end{bmatrix} $$
$$ \left. \begin{bmatrix} 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-c{\Gamma^t}_{\theta\theta}-1}{{\Gamma^r}_{\theta\theta}} & 0 \\ c & \frac{-c{\Gamma^t}_{\theta\theta}-1}{{\Gamma^r}_{\theta\theta}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-c{\Gamma^t}_{\theta\theta}-1}{{\Gamma^r}_{\theta\theta}} \\ 0 & 0 & 0 & \cot\theta \\ c & \frac{-c{\Gamma^t}_{\theta\theta}-1}{{\Gamma^r}_{\theta\theta}} & \cot\theta & 0 \end{bmatrix} \right]. \tag{49} $$

Eelmise juhuga analoogselt on c ja k suvalised konstandid ning ${\Gamma^t}_{rr}$, ${\Gamma^r}_{rr}$, ${\Gamma^t}_{\theta\theta}$ ja ${\Gamma^r}_{\theta\theta} \neq 0$ on vabad funktsioonid, mis sõltuvad koordinaadist r ja on omavahel seotud diferentsiaalvõrrandite

$$\frac{d}{dr}{\Gamma^r}_{\theta\theta} = -c\left[(2c-k)\,{\Gamma^t}_{\theta\theta} + 2\right]{\Gamma^t}_{\theta\theta} - {\Gamma^r}_{\theta\theta}{\Gamma^r}_{rr} - 1\,, \tag{50a}$$
$$\frac{d}{dr}{\Gamma^t}_{\theta\theta} = -\frac{\left\{\left[c\,(2c-k)\,{\Gamma^t}_{\theta\theta} + 3c - k\right]{\Gamma^t}_{\theta\theta} + 1\right\}{\Gamma^t}_{\theta\theta}}{{\Gamma^r}_{\theta\theta}} - {\Gamma^r}_{\theta\theta}{\Gamma^t}_{rr} \tag{50b}$$

kaudu. Lisaks geomeetriat kirjeldavale meetrikale ja seostusele on skalaar-mittemeetrilisuse teoorias aegruumi lisatud gravitatsiooniga seotud skalaarväli. Sfääriliselt sümmeetrilisele aegruumile lisaks nõuame, et skalaarväli rahuldab samuti sümmeetriatingimusi, mistõttu võime valemi (41) eeskujul panna kirja Lie tuletise skalaarväljast Φ vektori V^ρ suunas

$$\pounds_V \Phi = V^\sigma \partial_\sigma \Phi\,. \tag{51}$$

Lie tuletise rakendamisel sfäärilist sümmeetriat ja staatilisust genereerivate Killingi vektorite (42)–(45) suunas leiame, et skalaarväli, mis võib üldjuhul olla funktsioon kõigist koordinaatidest

$\Phi(t, r, \theta, \varphi)$, lihtsustub funktsiooniks $\Phi(r)$.

Tasase ja väändevaba aegruumi geomeetriat kirjeldab täielikult mittemeetrilisuse tensor $Q_{\rho\mu\nu}$, mis on antud valemiga (11). Sfääriliselt sümmeetrilise staatilise aegruumi mittemeetrilisuse tensori leidmiseks kasutame meetrikat (46) ning seostuse kordajaid (47) või (49). Ruumi kokkuhoiuks ei hakka me mittemeetrilisuse tensori komponente välja kirjutama. Valemi (15) või (16) abil saame leida mittemeetrilisuse skalaarid. Kuna sobivaid seostuse kordajaid on kaks komplekti, siis esitame siinkohal mõlema jaoks arvutatud mittemeetrilisuse skalaarid. Esimesest seostuse kordajate hulgast (47) leitud mittemeetrilisuse skalaar on

$$Q_1 = \frac{1}{2r^2 g_{tt} g_{rr}^2}\Bigg\{r\left(-3r\,\Gamma^{\varphi}{}_{\mathrm{r}\varphi}+4\right)g_{rr}\frac{d}{dr}g_{tt} + \Bigg\{3r^2\,\Gamma^{\varphi}{}_{\mathrm{r}\varphi}\frac{d}{dr}g_{rr} + r\;\Big[3r\left[-2c\,\Gamma^{\mathrm{t}}{}_{\mathrm{rr}} - \right. \\ \left. -2\,\Gamma^{\varphi}{}_{\mathrm{r}\varphi}(\,\Gamma^{\mathrm{r}}{}_{\mathrm{rr}} - \Gamma^{\varphi}{}_{\mathrm{r}\varphi})\right] - 12\Gamma^{\varphi}{}_{r\varphi}\Big]\,g_{rr} + 4g_{rr}\left(g_{rr}+1\right)\Bigg\}g_{tt}\Bigg\} \tag{52}$$

ja teine seostuse kordajate hulk (49) annab meile

$$\begin{aligned}
Q_2 =& \frac{1}{4r^3 g_{tt}^2 g_{rr}^3 (\Gamma^r{}_{\theta\theta})^2}\Bigg\{2cr^3\left(k-2c\right)g_{rr}^3\left(\Gamma^r{}_{\theta\theta}\right)^3\frac{dg_{tt}}{dr} + \Bigg\{2cr^3\Bigg[\Bigg[2\left(k-2c\right)\Gamma^r{}_{rr}\left(\Gamma^r{}_{\theta\theta}\right)^3 + \\
&+ \left(k-2c\right)\left(2+4c\Gamma^t{}_{\theta\theta} - 2c\left(k-2c\right)\left(\Gamma^t{}_{\theta\theta}\right)^2\right)\left(\Gamma^r{}_{\theta\theta}\right)^2\Bigg]g_{rr}^3 + \\
&+ \left(\left(2c-k\right)\left(\Gamma^r{}_{\theta\theta}\right)^3\frac{dg_{rr}}{dr} + \frac{dg_{tt}}{dr}\left(k-2c\right)\Gamma^r{}_{\theta\theta}\left(\Gamma^t{}_{\theta\theta}\right)^2\right)g_{rr}^2\Bigg] + \\
&+ 2r^2\Gamma^r{}_{\theta\theta}\frac{dg_{tt}}{dr}\left[4\Gamma^r{}_{\theta\theta} + r\left(k\Gamma^t{}_{\theta\theta}+2\right)\right]g_{rr}^2 + 4r\left(2cr(2c-k) + \frac{dg_{tt}}{dr}\right)g_{rr}^3\left(\Gamma^r{}_{\theta\theta}\right)^3\Bigg\}g_{tt} + \\
&+ \Bigg\{2cr^3\Bigg[\frac{dg_{rr}}{dr}\left(2c-k\right)g_{rr}\Gamma^r{}_{\theta\theta}\left(\Gamma^t{}_{\theta\theta}\right)^2 + \Bigg[\left(4\Gamma^t{}_{rr}\left(2c-k\right)\left(\Gamma^r{}_{\theta\theta}\right)^2+8\right)\Gamma^t{}_{\theta\theta} + \\
&+\; 2\left[2(3c-2k) + \left(k-2c\right)\Gamma^r{}_{rr}\Gamma^r{}_{\theta\theta}\right]\left(\Gamma^t{}_{\theta\theta}\right)^2 + 4\left(2c-k\right)^2\left(\Gamma^t{}_{\theta\theta}\right)^3 + \\
&+ 2c\left(2c-k\right)^2\left(\Gamma^t{}_{\theta\theta}\right)^4\Bigg]g_{rr}^2\Bigg] - 8r\left[\Gamma^r{}_{rr}\left(\Gamma^r{}_{\theta\theta}\right)^3 + c\Gamma^t{}_{\theta\theta}\left(2+\left(2c-k\right)\Gamma^t{}_{\theta\theta}\right)\left(\Gamma^r{}_{\theta\theta}\right)^2\right]g_{rr}^3 - \\
&- 2r^3\frac{dg_{rr}}{dr}\left(k\Gamma^t{}_{\theta\theta}+2\right)g_{rr}\Gamma^r{}_{\theta\theta} + 4r\Bigg[k^2r^2\left(\Gamma^t{}_{\theta\theta}\right)^2 + \left(\Gamma^r{}_{\theta\theta}\right)^2\left(\Gamma^r{}_{\theta\theta}\frac{dg_{rr}}{dr} + 2 - kr^2\Gamma^t{}_{rr}\right) + \\
&+ 2r^2\left(2r^2\Gamma^r{}_{rr} + 4r + 2cr\left(k-2c\right)\left(\Gamma^t{}_{\theta\theta}\right)^2 + kr\left(r\Gamma^r{}_{rr}+2\right)\Gamma^t{}_{\theta\theta}\right)\Gamma^r{}_{\theta\theta}\Bigg]g_{rr}^2\Bigg\}g_{tt}^2\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{53}$$

Mittemeetrilisuse skalaarid esinevad otseselt väljavõrrandites (30) ja (35) ja nende keeruline kuju viitab otseselt väljavõrrandite keerukusele.

2.2 Väljavõrrandite ekvivalentsed kujud

Töö teoreetilise sissejuhatuse osas oleme välja toonud üldised skalaar-mittemeetrilisuse teooria väljavõrrandid (30), (34) ja (35), mis on saadud mõjufunktsionaali (27) varieerimisel vastavalt meetrika, seostuse ja skalaarvälja järgi. Kuna uurime sfääriliselt sümmeetrilisi staatilisi muste auke tasases ja väändevabas aegruumis, saame väljavõrrandeid oluliselt lihtsustada. Eelnevas alapeatükis leitud sümmeetriatingimusi rahuldava meetrika (46), seostuse (47) või (49) ja skalaarvälja $\Phi(r)$ asendamine väljavõrranditesse annab väljavõrrandid, mida peab niisuguste sümmeetriatega aegruum skalaar-mittemeetrilisuse teoorias rahuldama. Kummagi seostuse kordajate hulga puhul muutub suur osa meetrika ja seostuse väljavõrranditest triviaalseteks, kusjuures meetrika väljavõrrandid (30) saame sümboolselt kirjutada kujul

$$\mathcal{M}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{tt} & \mathcal{M}_{tr} & 0 & 0 \\ \mathcal{M}_{tr} & \mathcal{M}_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{M}_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{M}_{\theta\theta}\sin^2\theta \end{pmatrix} = \kappa^2 \mathcal{T}_{\mu\nu} \tag{54}$$

ning seostuse väljavõrrandid (34) kujul

$$\mathcal{C}_{\mu} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_t \\ \mathcal{C}_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\,. \tag{55}$$

Mustade aukude uurimisel võime eeldada, et aegruumis puuduvad igasugused mateeriavormid, mistõttu on mateeriatensor null ehk $\mathcal{T}_{\mu\nu} = 0$.

Mateeriatensori puudumisel saame lahendada meetrika väljavõrrandite ainukese mittediagonaalkomponendi $\mathcal{M}_{tr}$ võrrandi. Esimese seostuse kordajate hulga (47) korral on võrrand kujul

$$\mathcal{M}_{tr} = \frac{3c}{2}\frac{d\Phi(r)}{dr}\frac{d\mathcal{A}(\Phi)}{d\Phi} = 0\,, \tag{56}$$

mille lahendamiseks on kaks võimalust

$$\frac{d\Phi(r)}{dr} = 0\,, \qquad\qquad \frac{d\mathcal{A}(\Phi)}{d\Phi} = 0\,. \tag{57}$$

Esimene võimalus vastab olukorrale, kus skalaarväli on konstantne, ning teine juhule, kus $\mathcal{A}$ on konstant. Konstantse skalaarvälja korral on $\mathcal{A}$ samuti konstantne ning skalaar-mittemeetrilisuse teooria taandub ÜRTSTE-ks, kuhu on lisatud konstantne skalaarväli, mis on ekvivalentne Einsteini üldrelatiivsusteooriaga, kus Newtoni gravitatsioonikonstant G_N on ümber defineeritud ja $\mathcal{V}(\Phi)$ on kosmoloogilise konstandi rollis. Kui aga $\mathcal{A}$ on konstantne, siis on skalaarväli gravitatsiooniga minimaalselt seotud. Selle tulemusena taandub skalaar-mittemeetrilisuse teooria ÜRTSTE-ks, kus on gravitatsioonikonstant ümber defineeritud ja kuhu on lisatud skalaarväli. Teadaolevalt on ÜRT-i varasemalt põhjalikult uuritud, mistõttu ei paku need erijuhud meile käesolevas töös huvi.

Teise seostuse kordajate hulga (49) korral on meetrika väljavõrrandite mittediagonaalkomponent

$$\mathcal{M}_{tr} = \left[\frac{k}{2} - c(2c-k)\Gamma^{t}{}_{\theta\theta}(r)\right] \frac{d\Phi(r)}{dr} \frac{d\mathcal{A}(\Phi)}{d\Phi} = 0\,. \tag{58}$$

Selle võrrandi lahendamiseks on kolm varianti

$$\frac{k}{2} - c(2c-k)\Gamma^{t}{}_{\theta\theta}(r) = 0\,, \qquad \frac{d\Phi(r)}{dr} = 0\,, \qquad \frac{d\mathcal{A}(\Phi)}{d\Phi} = 0\,, \tag{59}$$

kusjuures viimased kaks annavad taaskord kas konstantse skalaarvälja või konstantse $\mathcal{A}$, seega jätame need kõrvale. Edaspidi uurime lähemalt esimest võimalust ehk lahendame võrrandi

$$\frac{k}{2} - c(2c-k)\Gamma^{t}{}_{\theta\theta}(r) = 0\,. \tag{60}$$

Lahendid jagunevad kaheks haruks. Esimeses harus, kus eeldame, et $2c \neq k \neq 0$, saame avaldada seostuse komponendi

$$\Gamma^{t}{}_{\theta\theta}(r) = \frac{k}{2c(2c-k)}\,. \tag{61}$$

Teises harus võtame $c = k = 0$, mistõttu seostuse komponent $\Gamma^{t}{}_{\theta\theta}$ jääb vabaks. Seostuse kordajad $\Gamma^{r}{}_{rr}$ ja $\Gamma^{t}{}_{rr}$ on arvutatavad seostest (50a) ja (50b), mis teises harus lihtsustuvad kujudele

$$\frac{d}{dr}\Gamma^{r}{}_{\theta\theta} = -\Gamma^{r}{}_{\theta\theta}\Gamma^{r}{}_{rr} - 1\,, \tag{62a}$$

$$\frac{d}{dr}\Gamma^{t}{}_{\theta\theta} = -\frac{\Gamma^{t}{}_{\theta\theta}}{\Gamma^{r}{}_{\theta\theta}} - \Gamma^{r}{}_{\theta\theta}\Gamma^{t}{}_{rr}\,. \tag{62b}$$

Töös uurime ainult teist haru, kuna sellele vastavad väljavõrrandid on lihtsamad ja esimese haru uurimiseks ei jäänud piisavalt aega. Tingimuse $c = k = 0$ asendamisel väljavõrranditesse leiame, et kolm järelejäänud meetrika väljavõrrandit $\mathcal{M}_{tt}=0$, $\mathcal{M}_{rr}=0$ ja $\mathcal{M}_{\theta\theta}=0$ on

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_{tt} &= \left(\frac{\frac{d}{dr}g_{rr}}{rg_{rr}^2}+\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r^2 g_{rr}}\right)\mathcal{A}+\left(-\frac{\frac{d}{dr}\Phi}{g_{rr}\,\Gamma^{\mathrm{r}}{}_{\theta\theta}}-\frac{2\frac{d}{dr}\Phi}{rg_{rr}}-\frac{\Gamma^{\mathrm{r}}{}_{\theta\theta}\,\frac{d}{dr}\Phi}{r^2}\right)\frac{d\mathcal{A}}{d\Phi}- \\
&\quad -\frac{\mathcal{B}\left(\frac{d}{dr}\Phi\right)^2}{2g_{rr}}-\mathcal{V}=0\,, \\
\mathcal{M}_{rr} &= \left(\frac{\frac{d}{dr}g_{tt}}{rg_{tt}g_{rr}}-\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^2 g_{rr}}\right)\mathcal{A}+\left(-\frac{\frac{d}{dr}\Phi}{g_{rr}\,\Gamma^{\mathrm{r}}{}_{\theta\theta}}+\frac{\Gamma^{\mathrm{r}}{}_{\theta\theta}\,\frac{d}{dr}\Phi}{r^2}\right)\frac{d\mathcal{A}}{d\Phi}- \\
&\quad -\frac{\mathcal{B}\left(\frac{d}{dr}\Phi\right)^2}{2g_{rr}}+\mathcal{V}=0\,, \\
\mathcal{M}_{\theta\theta} &= \left[\left(-\frac{\frac{d}{dr}g_{rr}}{4g_{tt}g_{rr}^2}+\frac{1}{2rg_{tt}g_{rr}}\right)\frac{dg_{tt}}{dr}+\frac{\frac{d^2}{dr^2}g_{tt}}{2g_{tt}g_{rr}}-\frac{\left(\frac{d}{dr}g_{tt}\right)^2}{4g_{tt}^2 g_{rr}}-\frac{\frac{d}{dr}g_{rr}}{2rg_{rr}^2}\right]\mathcal{A}+ \\
&\quad +\left(\frac{\frac{d}{dr}\Phi}{g_{rr}\,\Gamma^{\mathrm{r}}{}_{\theta\theta}}+\frac{\frac{d}{dr}\Phi\frac{d}{dr}g_{tt}}{2g_{tt}g_{rr}}+\frac{\frac{d}{dr}\Phi}{rg_{rr}}\right)\frac{d\mathcal{A}}{d\Phi}+\frac{\mathcal{B}\left(\frac{d}{dr}\Phi\right)^2}{2g_{rr}}+\mathcal{V}=0\,.
\end{aligned}
\tag{63}
$$

Teise haru korral on seostuse väljavõrrand $\mathcal{C}_t=0$ automaalselt rahuldatud ning seostuse välja-võrranditest jääb alles

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}_r &= \left[2r^2 g_{rr}\left(\frac{d\Phi}{dr}\right)^2-2g_{rr}^2\left(\Gamma^{\mathrm{r}}{}_{\theta\theta}\right)^2\left(\frac{d\Phi}{dr}\right)^2\right]g_{tt}\frac{d^2\mathcal{A}}{d\Phi^2}+\left\{\left(r^2 g_{rr}\frac{d\Phi}{dr}-g_{rr}^2\left(\Gamma^{\mathrm{r}}{}_{\theta\theta}\right)^2\frac{d\Phi}{dr}\right)\frac{dg_{tt}}{dr}+\right. \\
&\quad +\left[-r^2\frac{d\Phi}{dr}\frac{dg_{tt}}{dr}-2\left(\left(\Gamma^{\mathrm{r}}{}_{\theta\theta}\right)^2\frac{d^2\Phi}{dr^2}+2\,\Gamma^{\mathrm{r}}{}_{\theta\theta}\,\frac{d\Phi}{dr}\frac{d\,\Gamma^{\mathrm{r}}{}_{\theta\theta}}{dr}\right)g_{rr}^2+\right. \\
&\quad \left.\left.+\left(2r^2\frac{d^2\Phi}{dr^2}+4r\frac{d\Phi}{dr}-\left(\Gamma^{\mathrm{r}}{}_{\theta\theta}\right)^2\frac{d\Phi}{dr}\frac{dg_{rr}}{dr}\right)g_{rr}\right]g_{tt}\right\}\frac{d\mathcal{A}}{d\Phi}=0\,.
\end{aligned}
\tag{64}
$$

Skalaarvälja võrrand (35) on teises harus

$$
\left(\frac{2\frac{d^2}{dr^2}\Phi}{g_{rr}}-\frac{\frac{d}{dr}\Phi\frac{d}{dr}g_{rr}}{g_{rr}^2}+\frac{\frac{d}{dr}\Phi\frac{d}{dr}g_{tt}}{g_{tt}g_{rr}}+\frac{4\frac{d}{dr}\Phi}{rg_{rr}}\right)\mathcal{B}+Q\frac{d\mathcal{A}}{d\Phi}-2\frac{d\mathcal{V}}{d\Phi}-\frac{\left(\frac{d\Phi}{dr}\right)^2\frac{d\mathcal{B}}{d\Phi}}{g_{rr}}=0\,. \tag{65}
$$

2.3 Lahendite olemasolu teoreem

Käesolevas alapeatükis leiame skalaar-mittemeetrilisuse teoorias kehtiva lahendite olemasolu teoreemi (ingl *no-hair theorem*), mille abil on võimalik seada piiranguid teooriatele, milles leidub sfäärilise sümmeetriaga staatilisi musta augu lahendeid, mis on asümptootikas kirjeldatavad Minkowski meetrikaga. Alapeatükis läbi viidud analüüs on analoogne artiklis [14] tehtuga skalaar-väände teoorias.

Teoreemi tuletamiseks leiame esiteks meetrika väljavõrrandite (33) jälje vaakumis, kus mateeriatensor on null

$$\mathcal{A}\overset{\circ}{G} + \frac{d\mathcal{A}}{d\Phi}\partial_\mu\Phi\left(Q^\mu - \tilde{Q}^\mu\right) + \mathcal{B}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi + 4\mathcal{V} = 0\,. \tag{66}$$

Einsteini väljavõrranditest (20) jälje leidmisel ja seose (15) kasutamisel on võimalik võrrandisse (66) tekitada täisdivergentsi liige

$$\mathcal{A}Q - \mathcal{B}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - 4\mathcal{V} = \overset{\circ}{\nabla}_\mu\left[\mathcal{A}\left(Q^\mu - \tilde{Q}^\mu\right)\right]\,. \tag{67}$$

Järgnevalt integreerime saadud tulemust üle ruumipiirkonna V, millega tähistame musta augu sündmuste horisondist väljapoole jäävat aegruumi piirkonda. Integreerimisel kasutame **Gaussi teoreemi**, mille kohaselt saame asendada integraali üle aegruumi piirkonna V integraaliga üle hüperpinna ∂V, mis ümbritseb piirkonda V [11],

$$\int_V \sqrt{-g}\nabla_\mu A^\mu d^4x = \int_{\partial V} \sqrt{-g}A^\mu n_\mu d^3x\,, \tag{68}$$

kus A^μ on suvaline vektor ning n_μ on hüperpinna ∂V puutujavektor. Valemi (67) integreerimine annab seose

$$\int_V d^4x\sqrt{-g}\left(\mathcal{A}Q - \mathcal{B}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - 4\mathcal{V}\right) = \int_{\partial V}\mathcal{A}\left(Q^\mu - \tilde{Q}^\mu\right)n_\mu d^3x\,. \tag{69}$$

Teiseks kirjutame skalaarvälja võrrandi (35) ümber kujul

$$\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi\left(\frac{1}{2}\frac{d\mathcal{B}}{d\Phi}\Phi + \mathcal{B}\right) - \frac{1}{2}\frac{d\mathcal{A}}{d\Phi}\Phi Q + \frac{d\mathcal{V}}{d\Phi}\Phi = \overset{\circ}{\nabla}_\mu\left(\mathcal{B}\Phi\overset{\circ}{\nabla}^\mu\Phi\right) \tag{70}$$

ning integreerime seda samuti üle aegruumi piirkonna V. Gaussi teoreemi arvestamisel saame integreerimise tulemusena

$$\int_V d^4x\sqrt{-g}\left[\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi\left(\frac{1}{2}\frac{d\mathcal{B}}{d\Phi}\Phi + \mathcal{B}\right) - \frac{1}{2}\frac{d\mathcal{A}}{d\Phi}\Phi Q + \frac{d\mathcal{V}}{d\Phi}\Phi\right] = \int_{\partial V}\mathcal{B}\Phi\overset{\circ}{\nabla}^\mu\Phi n_\mu d^3x\,. \tag{71}$$

Järgnevalt nõuame, et musta augu lahend oleks asümptootiliselt Minkowski, mis tähendab, et piiril $r \to \infty$ võtab meetrika kuju

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2\,. \tag{72}$$

Uurime võrrandite (69) ja (71) paremaid pooli, kus integreerime üle piirkonna ∂V. Piirkond koosneb sündmuste horisondist, asümptootikast ehk ruumilisest lõpmatusest ning tuleviku ja mineviku hüperpindadest. Viimase kahe normaalivektorid on vastassuunalised ja aegruumi staatilisuse tõttu vastavad panused integraalile taanduvad. Seetõttu analüüsime kummagi integraali

(69) ja (71) paremat poolt esiteks sündmuste horisondil ja seejärel ruumilises lõpmatuses.

Võrrandi (69) parema poole uurimiseks vaatame, mis juhtub integrandiga sündmuste horisondil. Selleks peame leidma mittemeetrilisuse tensori jälgede vahe. Kuna käesolevas töös lahendame seostuse kordajate (49) korral leitud väljavõrrandeid teises harus, kus $c = k = 0$, siis leiame sellele harule vastava mittemeetrilisuse tensori jälgede vahe

$$Q^{\mu} - \tilde{Q}^{\mu} = \begin{pmatrix} \frac{\Gamma^{t}{}_{rr}}{g_{rr}} + \frac{2\Gamma^{t}{}_{\theta\theta}}{r^2} & \frac{2}{g_{rr}\Gamma^{r}{}_{\theta\theta}} + \frac{\frac{d}{dr}g_{tt}}{g_{tt}g_{rr}} + \frac{4}{rg_{rr}} + \frac{2\Gamma^{r}{}_{\theta\theta}}{r^2} & 0 & 0 \end{pmatrix} . \qquad (73)$$

Paneme tähele, et selle esimesed kaks komponenti on nullist erinevad. Sfääriliselt sümmeetrilise staatilise musta augu sündmuste horisondil ühtib normaalivektor n^{μ} Killingi vektoriga (45), kusjuures selle vektori norm on sündmuste horisondil null, millest tuleneb et $g_{tt} = 0$ (vt peatükk 4.2). Järelikult on sündmuste horisondil $n_t = 0$ ja $n_r = 0$, mistõttu on võrrandi (69) paremal pool olev integrand samuti sündmuste horisondil null. Kuna skalaarväli sõltub ainult radiaalkoordinaadist $\Phi(r)$ ning sündmuste horisondil on $n_r = 0$, siis on lihtne näha, et valemi (71) parema poole integrand on sündmuste horisondil null.

Ruumilises lõpmatuses asuva hüperpinna normaalivektor on radiaalsuunaline, mis tähendab, et ainuke nullist erinev komponent on n^r. Kuna eeldame, et asümptootikas kirjeldab aegruumi Minkowski meetrika, siis $n_r = n^r \neq 0$ ning võrrandi (69) paremal poolel olev integrand on null, kui nõuda, et

$$\lim_{r\to\infty} \Gamma^{r}{}_{\theta\theta}(r) \sim \pm r^{q} \to \pm\infty \,, \qquad (74)$$

kus $q \in (0, 2)$. Kuna soovime, et meetrika oleks asümptootiliselt Minkowski, siis peab selle tagajärjel skalaarvälja $\Phi(r)$ tuletis ruumilises lõpmatuses olema null, mistõttu $\mathring{\nabla}^{\mu}\Phi = 0$. Järelikult on valemi (71) parema poole integrand ruumilises lõpmatuses samuti null.

Näeme, et nii sündmuste horisondil kui ka asümptootikas muutuvad võrrandite (69) ja (71) integrandid nulliks, mistõttu on kummagi võrrandi paremad pooled nullid. Nende omavahelisel liitmisel saame tingimuse

$$\int_V d^4x\sqrt{-g}\left[Q\left(\mathcal{A} - \frac{1}{2}\frac{d\mathcal{A}}{d\Phi}\Phi\right) + \frac{1}{2}\frac{d\mathcal{B}}{d\Phi}\Phi\partial_{\mu}\Phi\partial^{\mu}\Phi + \frac{d\mathcal{V}}{d\Phi}\Phi - 4\mathcal{V}\right] = 0\,, \qquad (75)$$

mida peavad vabad funktsioonid $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ ja $\mathcal{V}$ täitma, et uuritavas teoorias leiduksid asümptootiliselt Minkowski musta augu lahendid. Valem (75) kujutab endast lahendite olemasoluks tarvilikku aga mitte piisavat tingimust. Seega saame lahendite olemasolu teoreemina väita, et kui vabad funktsioonid ei rahulda tingimust (75), siis ei ole võimalik leida musta augu lahendeid, mida kirjeldab asümptootikas Minkowski meetrika. Kui aga tingimus on täidetud, tuleb lahendite asümptootikat eraldi uurida, enne kui saame väita, et lahend on või ei ole asümptootiliselt Minkowski.

Saadud tulemuse põhjal saame määrata vabade funktsioonide kuju, mida kasutame väljavõrrandite lahendamiseks. Liigse keerukuse vältimiseks on mõistlik valida võimalikult lihtsad vabad funktsioonid, mistõttu uurime käesolevas töös teooriaid, kus skalaarvälja potentsiaal $\mathcal{V}(\Phi)$ puudub ning kineetiline liige $\mathcal{B}(\Phi) = \beta$, kus β on konstant. Kuna tingimus (75) on kindlasti täidetud, kui

$$Q\left(\mathcal{A} - \frac{1}{2}\frac{d\mathcal{A}}{d\Phi}\Phi\right) + \frac{1}{2}\frac{d\mathcal{B}}{d\Phi}\Phi\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi + \frac{d\mathcal{V}}{d\Phi}\Phi - 4\mathcal{V} = 0\,, \tag{76}$$

siis juba tehtud valikute arvestamisel saame leida ka mitteminimaalse seose funktsiooni $\mathcal{A}(\Phi)$. Leiame, et asümptootiliselt Minkowski musta augu lahendid on võimalikud, kui $\mathcal{A}$ on võrdeline Φ^2-ga. Täpsemalt valime käesolevas töös teooriate klassi mitteminimaalse seose funktsiooniga

$$\mathcal{A}(\Phi) = p\frac{\beta}{8}\Phi^2\,, \tag{77}$$

kus p on parameeter, mille fikseerimine määrab teooria. Parameetri puhul eeldame, et $p \neq 0$, kuna vastasel juhul muutub mitteminimaalse seose funktsioon nulliks. Kui konstantse $\mathcal{A}$ korral on võimalik gravitatsioonikonstant ümber defineerida, siis $\mathcal{A} = 0$ puhul muutub gravitatsioonikonstant lõpmatuks ja teooria singulaarseks.

3 Väljavõrrandite lahendamine

Peatükis lahendame väljavõrrandid (63)–(65), mille tulemusena saame sfääriliselt sümmeetriliste staatiliste mustade aukude lahendid skalaar-mittemeetrilisuse teooriates. Väljavõrrandite lahendamisel lähtume eelmisest alapeatükist, kus fikseerisime teooriate klassi määravad vabad funktsioonid

$$\mathcal{A} = p\frac{\beta\Phi^2}{8}\,, \qquad \mathcal{B} = \beta\,, \qquad \mathcal{V} = 0\,. \tag{78}$$

Järgnevalt kirjeldame protseduuri, mille tulemusena jõuame sfääriliselt sümmeetriliste staatiliste mustade aukude lahenditeni selles skalaar-mittemeetrilisuse teooriate klassis. Esiteks asendame seosed (78) väljavõrranditesse (63)–(65). Lisaks eeldame, et meetrika komponentide g_{tt} ja g_{rr} vahel kehtib seos

$$g_{tt} = \frac{1}{g_{rr}}\,, \tag{79}$$

mis kehtib paljudes tuntud musta augu lahendites, nagu Schwarzschildi lahend [11]. See lihtsustab oluliselt väljavõrrandite lahendamist, kuna saame võrranditest elimineerida otsitava muutuja g_{tt}. Pärast selle eelduse tegemist konstrueerime väljavõrranditest $\mathcal{M}_{tt} = 0$ ja $\mathcal{M}_{rr} = 0$ võrrandi

$$\mathcal{M}_{tt} + \mathcal{M}_{rr} = -pr\Phi - p\Phi\Gamma^r{}_{\theta\theta} - 2r\Gamma^r{}_{\theta\theta}\frac{d\Phi}{dr} = 0\,, \tag{80}$$

millest on võimalik avaldada seostuse kordaja

$$\Gamma^r{}_{\theta\theta} = -\frac{pr\Phi}{p\Phi + 2r\frac{d}{dr}\Phi}\,. \tag{81}$$

Siin ja edaspidi eeldame, et

$$p\Phi + 2r\frac{d}{dr}\Phi \neq 0 \implies \Phi \neq Cr^{-\frac{p}{2}}\,, \tag{82}$$

kus C on integreerimiskonstant, kuna vastasel juhul tekib valemisse (81) nulliga jagamine. Skalaarvälja $\Phi = Cr^{-\frac{p}{2}}$ asendamisel väljavõrranditesse saame kontrollida, et niisuguse skalaarvälja korral lahendid puuduvad, mistõttu ei vähenda eelduse tegemine saadavate lahendite arvu. Võrrandi (81) asendamine kõikidesse väljavõrranditesse vähendab otsitavate suuruste arvu veel ühe võrra ning asendamise tulemusena jääb meile alles neli võrrandit: $\mathcal{M}_{tt} = 0$, $\mathcal{M}_{\theta\theta} = 0$, $\mathcal{C}_r = 0$ ja skalaarvälja võrrand. Esimesest on võimalik avaldada meetrika komponendi g_{rr} tuletis

$$\frac{dg_{rr}}{dr} = \frac{\left\{4r^2\left(\frac{d\Phi}{dr}\right)^2 - \Phi\left(g_{rr}-1\right)\left[2r\frac{d\Phi}{dr}\left(p+1\right) + p\Phi\right]\right\}g_{rr}}{r\left(p\Phi + 2r\frac{d\Phi}{dr}\right)\Phi}\,, \tag{83}$$

mille asendamisel väljavõrrandisse $\mathcal{M}_{\theta\theta} = 0$ saame

$$\mathcal{M}_{\theta\theta} = \left[r\Phi \frac{d^2\Phi}{dr^2} - \frac{d\Phi}{dr} \left(r\frac{d\Phi}{dr} - \Phi \right) \right] \left[p^2\Phi^2 \left(1 - g_{rr}\right) + 4r\frac{d\Phi}{dr} \left(r\frac{d\Phi}{dr} + p\Phi \right) \right] = 0 \,. \quad (84)$$

Paneme tähele, et võrrandid (83) ja (84) moodustavad esimest ja teist järku harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemi, mis seob allesjäänud otsitavaid funktsioone $\Phi(r)$ ja $g_{rr}(r)$. Järelikult saame nende diferentsiaalvõrrandite lahendamisel kätte kõik otsitavad suurused $g_{tt}, g_{rr}, \Gamma^r{}_{\theta\theta}$ ja Φ. Kui nende korral on seostuse väljavõrrand $\mathcal{C}_r = 0$ ja skalaarvälja võrrand samuti rahuldatud, oleme kõik väljavõrrandid (63)–(65) lahendanud ning jõudnud musta augu lahendini.

3.1 Esimene lahendustee

Võrrandi (84) lahendamiseks on kaks eri võimalust. Vaatame esiteks olukorda, kus esimene sulg on null ehk lahendame võrrandi

$$r\Phi \frac{d^2\Phi}{dr^2} - \frac{d\Phi}{dr} \left(r\frac{d\Phi}{dr} - \Phi \right) = 0 \,. \quad (85)$$

Diferentsiaalvõrrandi lahendamisel leiame, et skalaarväli on kujul

$$\Phi(r) = C r^{-\frac{p}{p+1}} \,, \quad (86)$$

kus C on integreerimiskonstant. Diferentsiaalvõrrandit (85) rahuldab ka skalaarväli $\Phi = C r^{-\frac{p}{2}}$, kuid see on vastuolus eespool tehtud eeldusega (82). Samuti oleme kõrvale jätnud konstantse skalaarvälja lahendi. Lahendi (86) asendamisel skalaarvälja ja seostuse võrrandisse ning võrrandisse (83) leiame, et esimesed kaks on automaatselt rahuldatud, ning viimasest saame diferentsiaalvõrrandi meetrika komponendi g_{rr} jaoks

$$\frac{dg_{rr}}{dr} + \frac{1+p}{1-p}\frac{g_{rr}^2}{r} + \frac{p-1}{p+1}\frac{g_{rr}}{r} = 0 \,, \quad (87)$$

kusjuures oleme eeldanud, et $p \neq \pm 1$. Diferentsiaalvõrrandi lahendamisel ja eelduse (79) arvestamisel saame musta augu lahendi, mida kirjeldab meetrika

$$ds^2 = -\left[\left(\frac{p+1}{p-1} \right)^2 \left(1 + C_0 r^{\frac{p-1}{p+1}} \right) \right] dt^2 + \frac{dr^2}{\left(\frac{p+1}{p-1}\right)^2 \left(1 + C_0 r^{\frac{p-1}{p+1}} \right)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \,, \quad (88)$$

kus C_0 on integreerimiskonstant. Võrrandi (81) abil leiame, et

$$\Gamma^r{}_{\theta\theta}(r) = \left(\frac{1+p}{1-p} \right) r \quad (89)$$

ning seoste (62a) ja (62b) kaudu arvutame ülejäänud seostuse vabad funktsioonid

$$\Gamma^{t}{}_{rr}(r) = \frac{1}{r}\left(\frac{p-1}{p+1}\right)\left[\frac{d}{dr}\Gamma^{t}{}_{\theta\theta} + \frac{1}{r}\Gamma^{t}{}_{\theta\theta}\left(\frac{p-1}{p+1}\right)\right], \qquad \Gamma^{r}{}_{rr}(r) = -\frac{2}{p+1}. \tag{90}$$

Paneme samuti tähele, et seostuse komponent $\Gamma^{r}{}_{\theta\theta}$ läheb piirprotsessis $r \to \infty$ lõpmata suureks, mis on kooskõlas eelmises peatükis lahendite olemasolu teoreemi tuletamisel tehtud eeldusega.

3.2 Teine lahendustee

Teine võimalus võrrandi (84) lahendamiseks on arvestada, et teine sulg on null ehk lahendada diferentsiaalvõrrand

$$p^2\Phi^2\left(1 - g_{rr}\right) + 4r\frac{d\Phi}{dr}\left(r\frac{d\Phi}{dr} + p\Phi\right) = 0. \tag{91}$$

Lahendamine annab seose skalaarvälja Φ ja meetrika komponendi g_{rr} vahel

$$\Phi(r) = Ce^{\frac{p}{2}\left(-\ln r \pm \int \frac{1}{r}\sqrt{g_{rr}}dr\right)}, \tag{92}$$

kus C on integreerimiskonstant. Integraali ees olev märgi vabadus ($\pm$) on tingitud ruutjuurest integrandis. Skalaarvälja asendamisel seosesse (83) saame diferentsiaalvõrrandi

$$r\frac{d}{dr}g_{rr} \mp 2pg_{rr}^{\frac{3}{2}} + g_{rr}^2(p+1) + g_{rr}(p-1) = 0, \tag{93}$$

millel on kolm eri lahendit vastavalt sellele, kas $p = -1$, $p = 1$ või $p \neq \pm 1$. Kõigil kolmel juhul tuleb lahendi leidmiseks lisaks koordinaadi r positiivsusele, mis on niikuinii vaikimisi eeldatud, eeldada, et $\sqrt{g_{rr}} > 0$, mistõttu skalaarvälja ja g_{rr} vaheline seos (92) võtab hoopis kuju

$$\Phi(r) = Ce^{\frac{p}{2}\left(-\ln r + \int \frac{1}{r}\sqrt{g_{rr}}dr\right)}. \tag{94}$$

Samuti saame veenduda, et sellel kujul skalaarväli rahuldab seostuse väljavõrrandit (64) ja skalaarvälja võrrandit (65).

Kui $p = -1$, siis diferentsiaalvõrrandi (93) lahendamisel ja eelduse (79) arvestamisel saame meetrika lahendiks

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{C_1}{r}\right)^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{C_1}{r}\right)^2} + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2, \tag{95}$$

kus C_1 on suvaline konstant. Musta augu lahendit, mida kirjeldab niisugusel kujul meetrika, nimetatakse Bocharova-Bronnikovi-Melnikovi-Bekensteini (BBMB) mustaks auguks [15]. Valemi (94) kaudu leiame skalaarvälja

$$\Phi = \frac{C}{\sqrt{1 - \frac{C_1}{r}}}, \tag{96}$$

millest omakorda saame valemite (81), (62a) ja (62b) abil seostuse kordajad

$$\Gamma^r{}_{\theta\theta}(r) = C_1 - r\,, \qquad \Gamma^r{}_{rr}(r) = 0\,, \qquad \Gamma^t{}_{rr}(r) = -\frac{(C_1 - r)\frac{d}{dr}\Gamma^t{}_{\theta\theta}(r) + \Gamma^t{}_{\theta\theta}(r)}{(C_1 - r)^2}\,, \tag{97}$$

kusjuures $r > C_1$. Siinkohal läheb meetrika komponent $\Gamma^r{}_{\theta\theta}$ piirprotsessis $r \to \infty$ negatiivsesse lõpmatusse, mis on samuti kooskõlas eeldusega (74).

Kui $p = 1$, siis on meetrika lahend kujul

$$ds^2 = -\left[1 + W\left(-\frac{C_2}{r}\right)\right]^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left[1 + W\left(-\frac{C_2}{r}\right)\right]^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2\,, \tag{98}$$

kusjuures funktsiooni $W(z)$ nimetatakse **Lamberti funktsiooniks** ja defineeritakse võrrandi

$$W(z)e^{W(z)} = z \tag{99}$$

lahendina [16]. Meetrika komponentide ja Lamberti funktsiooni omaduste [16] abil leiame skalaarvälja

$$\Phi = C\sqrt{-\frac{1}{rW\left(-\frac{C_2}{r}\right)}}\,, \tag{100}$$

millest omakorda saame leida seostuse kordajad

$$\Gamma^r{}_{\theta\theta}(r) = -r\left[1 + W\left(-\frac{C_2}{r}\right)\right]\,, \tag{101}$$

$$\Gamma^r{}_{rr}(r) = -\frac{W^2\left(-\frac{C_2}{r}\right)}{r\left[1 + W\left(-\frac{C_2}{r}\right)\right]^2}\,, \tag{102}$$

$$\Gamma^t{}_{rr}(r) = \frac{r\left[1 + W\left(-\frac{C_2}{r}\right)\right]\frac{d}{dr}\Gamma^t{}_{\theta\theta} - \Gamma^t{}_{\theta\theta}}{r^2\left[1 + W\left(-\frac{C_2}{r}\right)\right]^2}\,. \tag{103}$$

Kuna Lamberti funktsioon $W\left(-\frac{C_2}{r}\right)$ on piirprotsessis $r \to \infty$ null, siis saame L'Hospitali reegli abil leida, et ka $p = 1$ korral leitud $\Gamma^r{}_{\theta\theta}$ on kooskõlas tingimusega (74).

Diferentsiaalvõrrandi (93) lahendamisel üldise p jaoks, kus $p \neq \pm 1$, ei ole võimalik leida üldlahendit meetrika komponendi g_{rr} jaoks, kuid leiame tingimuse

$$\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{g_{rr}}}\right)\left(1 \mp \frac{1}{K\sqrt{g_{rr}}}\right)^K = \frac{C_3}{r}\,, \tag{104}$$

mida peab meetrika komponent g_{rr} rahuldama. Siinkohal oleme defineerinud suuruse K parameetri p kaudu,

$$K = \frac{1+p}{1-p}\,, \tag{105}$$

ning C_3 on integreerimiskonstant. Kindlate parameetrite p väärtuste korral on võimalik tingimusest (104) avaldada g_{rr} ning jõuda musta augu lahendini [17]. Käesolevas töös me ei ole seda teinud, vaid piirdume juba leitud lahenditega ja nende analüüsimisega.

3.3 Lahendite kokkuvõte

Vabade funktsioonide (78) poolt määratud teooriate klassis leitud sfääriliselt sümmeetrilised staatilised mustade aukude lahendid, mis rahuldavad eeldust (79), saame vastavalt parameetri p väärtusele klassifitseerida järgmiselt:

1. Parameeter $p \neq \pm 1$:

   - Esimene lahendite klass on kirjeldatud meetrikaga

   $$ds^2 = -\left[\left(\frac{p+1}{p-1}\right)^2\left(1 + C_0 r^{\frac{p-1}{p+1}}\right)\right]dt^2 + \frac{dr^2}{\left(\frac{p+1}{p-1}\right)^2\left(1 + C_0 r^{\frac{p-1}{p+1}}\right)} + r^2 d\Omega^2\,, \quad (106)$$

   kus $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$, ning skalaarväli ja seostuse komponent on antud kujul

   $$\Phi(r) = C r^{-\frac{p}{p+1}}\,, \quad (107)$$

   $$\Gamma^r{}_{\theta\theta}(r) = \left(\frac{1+p}{1-p}\right) r\,. \quad (108)$$

   - Teises lahendite klassis peab meetrika komponent g_{rr} rahuldama tingimust

   $$\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{g_{rr}}}\right)\left(1 \mp \frac{1}{K\sqrt{g_{rr}}}\right) = \frac{C_3}{r}\,, \qquad K = \frac{1+p}{1-p}\,. \quad (109)$$

2. Parameeter $p = -1$:

   Lahendiks on BBMB meetrika

   $$ds^2 = -\left(1 - \frac{C_1}{r}\right)^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{C_1}{r}\right)^2} + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2 \quad (110)$$

   ning skalaarväli ja seostuse komponent on antud valemitega:

   $$\Phi(r) = \frac{C}{\sqrt{1 - \frac{C_1}{r}}}\,, \quad (111)$$

   $$\Gamma^r{}_{\theta\theta}(r) = C_1 - r\,. \quad (112)$$

3. Parameeter $p = 1$:

   Lahendit kirjeldab meetrika

   $$ds^2 = -\left[1 + W\left(-\frac{C_2}{r}\right)\right]^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left[1 + W\left(-\frac{C_2}{r}\right)\right]^2} + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2\,, \quad (113)$$

   skalaarväli

   $$\Phi(r) = C\sqrt{-\frac{1}{rW\left(-\frac{C_2}{r}\right)}} \quad (114)$$

   ja seostuse kordaja

   $$\Gamma^r{}_{\theta\theta}(r) = -r\left[1 + W\left(-\frac{C_2}{r}\right)\right]\,. \quad (115)$$

4 Lahendite uurimine

Peatükis analüüsime eespool leitud sfäärilise sümmeetriaga staatiliste mustade aukude lahendeid. Alapeatükis 4.1 uurime lahendite käitumist ruumilises asümptootikas ja järeldame selle põhjal, kas lahendid kirjeldavad füüsikalist musta auku. Alapeatükis 4.2 leiame lahendite sündmuste horisondi ning viimases alapeatükis 4.3 esitame käesolevas töös leitud füüsikalised musta augu lahendid.

4.1 Asümptootika

Laiendatud gravitatsiooniteooriates leitud lahendite puhul on oluline, et piirjuhul oleks lahend kooskõlas Newtoni gravitatsiooniteooriaga. Selleks uurime, kuidas käituvad lahendid mustast august eemal, kus musta augu mõju aegruumi geomeetriale on väga väike. Piisavalt väikese mõju korral võib aegruumi kirjeldada Minkowski meetrikaga, mis sfäärilistes koordinaatides on kujul (72), kuhu on lisatud väike, Newtoni gravitatsioonipotentsiaalist tingitud häiritus. Niisuguses aegruumis on meetrika komponent

$$g_{tt} = 1 + 2U = 1 - \frac{2G_N M}{r}\,, \tag{116}$$

kus $U = -\frac{G_N M}{r}$ on Newtoni gravitatsioonipotentsiaal ning kasutame sama konventsiooni nagu valemis (46). [12]

Töös leitud mustade aukude lahendite analüüsimiseks kontrollime rittaarenduse meetodil, kas lahendid on kooskõlas Newtoni piiriga ehk kas mustast august eemaldumisel võtab meetrika komponent g_{tt} kuju (116). Funktsiooni $f(x)$ **Taylori reaks** punkti $x = a$ ümbruses nimetatakse lõpmatut summat

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\,, \tag{117}$$

kus $f^{(n)}$ tähistab funktsiooni $f(x)$ n-järku tuletist. Newtoni piiri kontrollimiseks uurime lahendeid mustast august piisavalt kaugel, kus r läheb väga suureks. Seetõttu rakendame Taylori rittaarendust funktsioonile $g_{tt}(r)$ piiril $r \to \infty$ ja vaatame, kas tulemus ühtib valemiga (116). Lisaks Newtoni piiri kontrollimisele tasub ka uurida, mis juhtub skalaarvälja lahenditega piirprotsessis $r \to \infty$.

4.1.1 Lahendid, kus $p \neq \pm 1$

Käsitleme esmalt kõige üldisemat lahendite klassi, mille korral teooriat määrav parameeter $p \neq \pm 1$. Väljavõrrandite lahendiks on meetrika (106), millest komponent

$$g_{tt}(r) = \left(\frac{p+1}{p-1}\right)^2 \left(1 + C_0 r^{\frac{p-1}{p+1}}\right) . \tag{118}$$

Uurime esiteks g_{tt} piirväärtust

$$\lim_{r \to \infty} g_{tt}(r) = \begin{cases} \left(\frac{p+1}{p-1}\right)^2 , & p \in (-1, 1) \\ \infty \, , & p \notin (-1, 1) \, . \end{cases} \tag{119}$$

Näeme, et meetrika jääb lõplikuks, kui $p \in (-1, 1)$ ning on otseselt asümptootikas kirjeldatav Minkowski meetrikaga, kui $p = 0$. Viimase oleme juba varasemalt välistanud, et vältida teooria muutumist singulaarseks. Asümptootikas lõplik meetrika on võimeline kirjeldama asümptootiliselt Minkowski aegruumi ka siis, kui $p \neq 0$. See on võimalik, kui teha koordinaatteisendus koordinaatidele t ja r, mille tulemusena meetrika komponendid g_{tt} ja g_{rr} muutuvad ruumilises lõpmatuses üheks.

Newtoni piiri kontrollimiseks paneme tähele, et meil ei ole tarvis meetrika komponenti (118) ritta arendada, kuna see on juba astmerea kujul. Näeme, et ainuke võimalus ühitada g_{tt} Newtoni piiriga (116) on kui valemis (118) on r astmel -1. See on aga taaskord võimalik ainult siis, kui $p = 0$, mis on välistatud. Sellegipoolest saame valida p nullile kuitahes lähedaseks nii, et $r^{\frac{p-1}{p+1}} \approx r^{-1}$ ehk jõuame Newtoni piirile kuitahes lähedale. Siiski võime väita, et lahend meetrikaga (106) ei ole Newtoni piiriga kooskõlas kuna täpne vastavus on ainult siis, kui $p = 0$.

Lisaks meetrikale tasub uurida ka skalaarvälja käitumist. Väljavõrrandeid rahuldav skalaarväli on antud valemiga (107). Leiame skalaarvälja piirväärtuse protsessis $r \to \infty$

$$\lim_{r \to \infty} \Phi(r) = \lim_{r \to \infty} C r^{-\frac{p}{p+1}} = \begin{cases} \infty \, , & p \in (-1, 0) \\ 0 \, , & p \notin (-1, 0) \end{cases} \, . \tag{120}$$

Paneme tähele, et skalaarväli on lõplik ainult siis, kui $p \notin (-1, 0)$. Lõpmatu skalaarväli vastab gravitatsioonikonstandi väärtusele $G_N = 0$, järelikult peab füüsikalise teooria puhul nii meetrika kui ka skalaarväli jääma asümptootikas lõplikuks, mis on võimalik, kui $p \in (0, 1)$. Kui aga skalaarväli on null, siis järeldub et $\mathcal{A} = 0$, mis muudab teooria singulaarseks. Seetõttu näeme, et iga p väärtuse korral on skalaarvälja lahend ebafüüsikaline.

Analüüsist saame järeldada, et lahendite klass, mida kirjeldavad meetrika (106) ja skalaarväli (107) ei ole füüsikaliselt realistlikud. Näeme, et teooria puhul ei ole rahuldatud Newtoni piir, kuigi saame jõuda piirile kuitahes lähedale, ning lahendid jäävad lõplikuks ainult siis, kui parameeter p asub kindlas vahemikus. Kuigi meetrika on võimalik lihtsa koordinaatteisendusega teisendada asümptootiliselt Minkowski meetrikaks, siis isegi parameetri p vahemikus, kus skalaarväli on lõplik, muutub teooria asümptootikas singulaarseks.

4.1.2 Lahendid, kus $p = -1$

Parameetri p väärtusel $p = -1$ leidsime BBMB musta augu lahendi, mida iseloomustab meetrika (110). Meetrika komponendi g_{tt} rittarendusel saame

$$g_{tt}\Big|_{r\to\infty} = 1 - \frac{2C_1}{r} + \frac{C_1^2}{r^2} + ... \approx 1 - \frac{2C_1}{r}\,, \tag{121}$$

kus oleme piirdunud kahe esimese liikmega, kuna piirprotsessis $r \to \infty$ muutuvad ülejäänud liikmed kiiresti nulliks. Näeme, et tulemus on kooskõlas Newtoni piiriga (116), kui määrata konstant $C_1 = G_N M$, kus M on musta augu mass. Sellest tulenevalt saame piirprotsessis $r \to \infty$ Minkowski meetrika (72).

Skalaarvälja lahendi (111) uurimisel asümptootikas leiame, et

$$\lim_{r\to\infty} \Phi(r) = C\,. \tag{122}$$

Siit on näha, et konstant C on skalaarvälja väärtus musta augu puudumisel. See võiks olla kooskõlas üldrelatiivsusteooriaga, kus gravitatsioonikonstant on G_N, mistõttu $\mathcal{A} = 1$. Kuna $\mathcal{A} = -\frac{\beta}{8}\Phi^2$ leiame, et

$$C = \sqrt{-\frac{8}{\beta}}\,. \tag{123}$$

Peale konstantide fikseerimist on skalaarvälja lahend

$$\Phi(r) = \sqrt{-\frac{8}{\beta\left(1 - \frac{G_N M}{r}\right)}}\,. \tag{124}$$

Leidsime, et meetrika lahend (110) on kooskõlas Newtoni piiriga, kui fikseerida konstant C_1. Samuti veendusime, et ka skalaarväli (111) on füüsikaliselt realistlik ning andsime tõlgenduse lahendis esinevale konstandile C.

4.1.3 Lahendid, kus $p = 1$

Kui valida $p = 1$, siis kirjeldab sfääriliselt sümmeetrilise ja staatilise musta augu aegruumi meetrika (113). Taaskord kõrgemat järku liikmete kõrvale jätmisel saame meetrika komponendi g_{tt} rittaarendusel

$$g_{tt}\Big|_{r\to\infty} \approx 1 - \frac{2C_2}{r}\,, \tag{125}$$

kus oleme arvestanud Lamberti funktsiooni omadust [16]

$$\frac{d}{dz}W(z)\Big|_{z=0} = 0\,. \tag{126}$$

Paneme tähele, et valikul $C_2 = G_N M$ on meie leitud lahend kooskõlas Newtoni piiriga (116). Seetõttu langeb ka lahend (113) asümptootikas kokku Minkowski meetrikaga (72).

Uurime skalaarvälja (114) käitumist piirprotsessis $r \to \infty$. Kuna piirprotsessis muutub Lamberti funktsioon $W\left(-\frac{C_2}{r}\right)$ nulliks, siis peame kasutama L'Hospitali reeglit, mille abil saame piirväärtuseks

$$\lim_{r\to\infty} C\sqrt{-\frac{1}{rW\left(-\frac{C_2}{r}\right)}} = C\sqrt{\frac{1}{C_2}}\,. \tag{127}$$

Sarnaselt eelmisele alapeatükile nõuame, et skalaarvälja väärtus asümptootikas oleks selline, mis taastab meile ÜRT-i ehk muudab $\mathcal{A} = 1$. Käesoleval juhul on $\mathcal{A} = \frac{\beta}{8}\Phi^2$, mistõttu

$$C = \sqrt{C_2\frac{8}{\beta}} = \sqrt{\frac{8G_N M}{\beta}}\,. \tag{128}$$

Konstantide asendamisel näeme, et skalaarvälja lahend on

$$\Phi(r) = \sqrt{-\frac{8G_N M}{\beta r W\left(-\frac{G_N M}{r}\right)}}\,. \tag{129}$$

Leidsime, et teooriale $p = 1$ leitud lahend (113) on samuti kooskõlas Newtoni piiriga ning kirjeldab asümptootikas Minkowski aegruumi. Samuti veendusime, et skalaarväli (114) on füüsikaline, ning määrasime nii meetrikas kui ka skalaarväljas esinevad konstandid.

4.2 Sündmuste horisont

Teadaolevalt on oluliseks musta auguga kaasnevaks nähtuseks sündmuste horisont, mida kirjeldab musta auku ümbritsev hüperpind, mille seest ei ole isegi valgusel võimalik pääseda. Sündmuste horisondile matemaatilisema definitsiooni andmiseks sfääriliselt sümmeetriliste staatiliste mustade aukude korral on otstarbekas kasutada Killingi horisondi mõistet. **Killingi horisondiks** nimetatakse null-hüperpinda, millel Killingi vektori norm on null, kusjuures **null-hüperpind** on pind, mille normaalivektori norm on null. Järelikult on Killingi horisondi normaalivektoriks seesama Killingi vektor, mis Killingi horisondi defineerib ja sellel null on. Staatilise aegruumi korral on teada, et sündmuste horisont ühtib Killingi horisondiga, kus Killingi vektori (45) norm on null. Vektori (45) norm on null, siis kui

$$g_{tt} = 0\,, \tag{130}$$

mida käsitlemegi käesolevas töös matemaatilise sündmuste horisondi definitsioonina. [12]

Järgnevalt leiame leitud lahendite sündmuste horisondi asukohad. Kuigi musta augu lahendite klass meetrikaga (106) ei kirjelda asümptootiliselt Minkowski aegruumi võime sellegipoolest uurida, kas lahenditel ilmneb sündmuste horisont. Võrrandi $g_{tt} = 0$ lahendamisel leiame, et sündmuste horisont leidub koordinaadi

$$r = \left(-\frac{1}{C_0}\right)^{\frac{p+1}{p-1}} \tag{131}$$

väärtusel.

Füüsikaliselt huvitavam on aga uurida füüsikaliselt realistlikke lahendeid. Teises lahendite klassis, kus $p = -1$ ning musta augu lahend on määratud meetrikaga (110) eksisteerib sündmuste horisont, kui

$$r = C_1 = G_N M\,, \tag{132}$$

kus oleme vastavalt eelmises alapeatükis (4.1) tehtud analüüsile asendanud konstandi C_1.

Meetrika lahendi (113) sündmuste horisondi saame leida võrrandi

$$W\left(-\frac{G_N M}{r}\right) = -1\,, \tag{133}$$

lahendamisel radiaalkoordinaadi r jaoks. Siinkohal oleme taaskord eelmise alapeatüki kohaselt asendanud lahendis konstandi $C_2 = G_N M$. Teame, et Lamberti funktsioon omab reaalarvulisi väärtusi kui argument $-\frac{G_N M}{r} \geq -\frac{1}{e}$, kusjuures võrduse korral ongi Lamberti funktsiooni väärtuseks -1 [16]. Seetõttu leiame, et sündmuste horisont leidub radiaalkoordinaadi väärtusel

$$r = G_N M e\,. \tag{134}$$

4.3 Füüsikaliste lahendite kokkuvõte

Alapeatükis esitame eelnevates alapeatükkides tehtud analüüsi põhjal leitud füüsikalised sfäärilise sümmeetriaga staatiliste mustade aukude lahendid skalaar-mittemeetrilisuse teooriate klassis, mille määravad vabad funktsioonid (78). Füüsikaline tähendab, et lahendid on ruumilises lõpmatuses kirjeldatavad Minkowski meetrikaga (72) ning lahendit iseloomustav meetrika ja skalaarväli on aegruumis lõplik ega ei muuda teooriat singulaarseks. Leidsime kaks füüsikalist lahendit, mis kirjeldavad musta auku massiga M:

- Teoorias, kus vabad funktsioonid on kujul

  $$\mathcal{A} = -\frac{\beta}{8}\Phi^2\,, \qquad \mathcal{B} = \beta\,, \qquad \mathcal{V} = 0\,, \tag{135}$$

  leidub BBMB lahend, mida kirjeldab meetrika

  $$ds^2 = -\left(1 - \frac{G_N M}{r}\right)^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{G_N M}{r}\right)^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2\,. \tag{136}$$

  Skalaarvälja lahend on

  $$\Phi(r) = \sqrt{-\frac{8}{\beta\left(1 - \frac{G_N M}{r}\right)}}\,. \tag{137}$$

  Mustal augul on sündmuste horisont musta augu keskpunktist kaugusel $r = G_N M$.

- Teoorias, kus vabad funktsioonid on kujul

  $$\mathcal{A} = \frac{\beta}{8}\Phi^2\,, \qquad \mathcal{B} = \beta\,, \qquad \mathcal{V} = 0\,, \tag{138}$$

  leidub musta augu lahend, mida kirjeldab meetrika

  $$ds^2 = -\left[1 + W\left(-\frac{G_N M}{r}\right)\right]^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left[1 + W\left(-\frac{G_N M}{r}\right)\right]^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2\,, \tag{139}$$

  ning skalaarväli

  $$\Phi(r) = \sqrt{-\frac{8 G_N M}{\beta r W\left(-\frac{GM}{r}\right)}}\,. \tag{140}$$

  Sündmuste horisont asub musta augu keskelt kaugusel $r = G_N M e$.

5 Arutelu

Väljavõrrandite uurimisel jõudsime viie võrrandini (63)–(65), mis kirjeldavad mateeriavaba aegruumi sfääriliselt sümmeetrilises staatilises skalaar-mittemeetrilisuse teoorias. Lähemal vaatlusel on võimalik märgata, et nendest viiest on sõltumatud ainult neli [17]. Sellegipoolest uurisime käesolevas töös kõiki viit võrrandit, kuna väljavõrrandite lahendamise puhul ei ole vahet milliseid me käsitleme, peaasi et kõik oleksid lahendatud. Võrrandid seovad omavahel seitset tundmatut suurust, millest kolm vaba funktsiooni $\mathcal{A}(\Phi)$, $\mathcal{B}(\Phi)$ ja $\mathcal{V}(\Phi)$ määravad teooria ning ülejäänud neli otsitavat suurust – meetrika komponendid $g_{tt}(r)$ ja $g_{rr}(r)$, skalaarväli $\Phi(r)$ ning seostuse komponent $\Gamma^r{}_{\theta\theta}(r)$ – määravad musta augu lahendi. Seetõttu ei saa võrrandeid üldjuhul lahendada ja tuleb fikseerida vähemalt kolm tundmatut suurust. Standardne lähenemine on esmalt fikseerida teooria ehk vabad funktsioonid, mida tegime ka käesolevas töös. Pärast vabade funktsioonide fikseerimist sidusid neli sõltumatut võrrandit nelja otsitavat suurust, mis tähendab, et teoreetiliselt on võimalik kõik võrrandid lahendada ja saada musta augu lahend. Reaalsuses on võrrandid väga keerulised, kuna kõik muutujad on omavahel igas võrrandis seotud ja nende eraldamine ei ole nii lihtne. Seetõttu on mõistlik teha mõningaid eeldusi, mis aitavad muutujaid eraldada ja niimoodi lahendamist lihtsustada. Käesolevas töös eeldasime meetrika komponentide vahel seost (79). Seejärel tuleb võrrandite lahendamiseks võrrandeid erineval moel kombineerida ja manipuleerida enne kui on võimalik jõuda lahenduvate diferentsiaalvõrranditeni, nagu oli näha peatükis 3. Võrrandite kombineerimine ei ole ilmselge, mistõttu tuli 3. peatükis kirjeldatud protseduurini jõudmiseks proovida mitmeid erinevaid kombinatsioone. Samuti andis programmeerimiskeskkond Jupyter, milles on tehtud enamik käesoleva töö arvutusi, tihti diferentsiaalvõrrandite lahendid alternatiivsel kujul ning need tuli käsitsi teisendada sobivale, töös esitatud, kujule.

Väljavõrrandite lahendamisel leidsime kolm lahendit vastavalt mitteminimaalse seose funktsioonis $\mathcal{A}$ esineva parameetri p väärtusele. Nendest kolmest leidsime, et kaks lahendit saavad kirjeldada asümptootiliselt Minkowski musta augu lahendit, kusjuures üks lahend (136) on varem teadaoleva BBMB musta augu lahendi kujul [15]. Teine füüsikaliselt realistlik lahend (139) sisaldab endast Lamberti funktsiooni. Kuigi käesoleva töö eesmärk ei olnud uurida musta augu sündmuste horisondi sisse jäävat piirkonda, mistõttu eeldasime meetrika komponentide g_{tt} ja g_{rr} positiivsust, paneme tähele, et leitud BBMB lahend (136) kirjeldab ka sündmuste horisondi sisse jäävat piirkonda. Samas aga ei ole Lamberti funktsioon defineeritud, kui tema argument on väiksem kui $-\frac{1}{e}$, mida ta sündmuste horisondi sisse jääva piirkonna puhul peaks olema. Seetõttu ei ole Lamberti funktsiooni sisaldav lahend (139) võimeline kirjeldama sündmuste horisondi sisse jäävat piirkonda, mistõttu tuleks seda eraldi uurida.

Lisaks leidsime eraldiseisva lahendite klassi, mis peab rahuldama tingimust (109). Kuna me ei uurinud põhjalikumalt tingimusest tulenevaid lahendeid, siis ei saa me käesoleva töö kontekstis väita midagi nende füüsikalisuse või ebafüüsikalisuse kohta. Mõned näited tingimusest (109) leitud lahendite kohta on toodud artiklis [17], kus on nende füüsikalisust ka põgusalt analüüsitud.

Käesolevas töös leitud lahendid on ainult väike osa võimalikest skalaar-mittemeetrilisuse teooriates leiduvatest lahenditest. Nagu varem mainitud, on võimalik leida veel lahendeid, mis peavad rahuldama tingimust (109). Samuti saab uurida lahendeid skalaar-mittemeetrilisuse teoorias, kus esineb mittetriviaalne skalaarvälja potentsiaal ($\mathcal{V} \neq 0$) või mittekonstantne kineetiline liige $\mathcal{B}$. Lisaks võib analüüsida osakeste trajektoore töös leitud mustade aukude gravitatsiooniväljas või uurida kuidas käituvad teoorias gravitatsioonilained. Viimaste põhjal on võimalik skalaar-mittemeetrilisuse teooriat kontrollida, kui võrrelda tulemusi mustade aukude piltide [6][7] ja gravitatsioonilainete vaatlustulemustega [8][9].

6 Kokkuvõte

Käesoleva töö eesmärk oli leida sfääriliselt sümmeetriliste staatiliste mustade aukude lahendeid üldrelatiivsusteooria laienduses, mida nimetatakse skalaar-mittemeetrilisuse teooriaks. Töö käigus uurisime teoorias ilmnevaid väljavõrrandeid ning leidsime nende lahendid konkreetses teooriate klassis. Viimaks analüüsisime lahendite füüsikalisust.

Töö teoreetilise tausta osas tutvustasime aegruumi geomeetria kirjeldamiseks kasutatavaid matemaatilisi mõisteid ning tõime välja Einsteini poolt formuleeritud üldrelatiivsusteooria põhilised, töö kontekstis olulised aspektid. Lisaks selgitasime, kuidas on võimalik üldrelatiivsusteooriat üldistada laiendatud graviatsiooniteooriateks, kusjuures andsime täpsema ülevaate skalaar-mittemeetrilisuse teooriast. Sfäärilise sümmeetriaga staatiliste mustade aukude uurimiseks tutvustasime lisaks matemaatilisi vahendeid, nagu Killingi vektorid ja Lie tuletis.

Teises peatükis esitasime skalaar-mittemeetrilisuse teoorias staatilist ja sfääriliselt sümmeetrilist aegruumi kirjeldava meetrika ja seostuse kordajad ning leidsime selle põhjal sümmeetriatingimustele vastavad väljavõrrandid, mida peab musta augu lahend rahuldama. Lisaks uurisime üldiseid väljavõrrandeid lähemalt ja tuletasime lahendite olemasolu teoreemi ehk leidsime tingimuse vabadele funktsioonide, mille korral ei ole võimalik leida musta augu lahendit, mida kirjeldab asümptootikas Minkowski meetrika.

Kolmandas peatükis kirjeldasime väljavõrrandite lahendamise protseduuri. Lahendamisel leidsime neli erinevat lahendite klassi vastavalt teooriat fikseeriva parameetri p väärtusele. Parameetri väärtusel $p \neq \pm 1$ leidsime kaks klassi musta augu lahendeid, millest esimest kirjeldab meetrika (106) ning teine on antud tingimusega (109). Erijuhtudel kui $p = -1$ leidsime BBMB musta augu lahendi (110) ning $p = 1$ korral leidub Lamberti funktsiooni kaudu antud lahend (113).

Peatükis 4 analüüsisime leitud musta augu lahendeid (106), (110) ja (113) ning tegime järeldusi nende füüsikalisuse kohta. Füüsikalisuse kontrollimiseks vaatasime kas lahendid on kooskõlas Newtoni piiriga ning uurisime lahendite käitumist ruumilises lõpmatuses. Järeldasime, et musta augu lahend (106), kus $p \neq \pm 1$ ei kirjelda füüsikalist musta auku, kuid lahendid (110) ja (113) saavad kirjeldada füüsikalist musta auku, kui fikseerida lahendis esinevad konstandid. Täiendavalt leidsime lahendite puhul sündmuste horisondi asukoha.

Viimases ehk arutelu peatükis tõime eraldi esile teoorias olevate võrrandite ja otsitavate suuruste arvu ja selgitasime selle mõju väljavõrrandite lahendamisele. Lisaks arutlesime kas leitud lahendid on võimelised kirjeldama musta augu piirkonda, mis jääb sündmuste horisondist sissepoole ning tõime välja, kuidas on võimalik käesolevat tööd jätkata.

Tänuavaldused

Soovin erilist tänu avaldada oma juhendajale, Laur Järvele, kellega oli väga meeldiv ja põnev koostööd teha. Laur Järv oli alati väga toetav ja abivalmis ning suutis vajadusel ka kõige keerulisemaid kontseptsioone lihtsalt ja arusaadavalt lahti seletada. Olen tänulik, et sain tema juhendamisel kirjutada bakalaureusetöö niivõrd huvitaval teemal. Samuti sooviksin tänada Jorge Gigante Valcarceli ja Sebastian Bahamondet, kelle koostööl valmis teadusartikkel, kus kajastuvad ka käesoleva bakalaureusetöö tulemused. Jorge ja Sebastian olid samuti väga abivalmid ning nendega tekkinud diskussioonid olid alati väga huvitavad.

Joosep Lember

Kirjandus

[1] S. Capozziello ja M. De Laurentis, „Extended theories of gravity“, *Physics Reports* 509, 167–321 (2011).

[2] T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla ja C. Skordis, „Modified gravity and cosmology“, *Physics reports* 513, 1–189 (2012).

[3] S. Bahamonde, K. F. Dialektopoulos, C. Escamilla-Rivera, G. Farrugia, V. Gakis, M. Hendry, M. Hohmann, J. L. Said, J. Mifsud ja E. Di Valentino, „Teleparallel gravity: From theory to cosmology“, *arXiv:2106.13793* (2021).

[4] L. Järv, M. Rünkla, M. Saal ja O. Vilson, „Nonmetricity formulation of general relativity and its scalar-tensor extension“, *Physical Review D* 97, 124025 (2018).

[5] C. A. Herdeiro ja E. Radu, „Asymptotically flat black holes with scalar hair: a review“, *International Journal of Modern Physics D* 24, 1542014 (2015).

[6] K. Akiyama ja E. H. T. Collaboration, „First M87 event horizon telescope results. I. The shadow of the supermassive black hole“, *Astrophys. J. Lett* 875, L1 (2019).

[7] K. Akiyama ja E. H. T. Collaboration, „First Sagittarius A* Event Horizon Telescope Results. VI. Testing the Black Hole Metric“, *The Astrophysical Journal Letters* 930, L17 (2022).

[8] B. P. Abbott, LIGO Scientific Collaboration ja Virgo Collaboration, „Observation of gravitational waves from a binary black hole merger“, *Physical review letters* 116, 061102 (2016).

[9] R. Abbott, LIGO Scientific, VIRGO ja KAGRA, „GWTC-3: Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo During the Second Part of the Third Observing Run“, *arXiv:2111.03606* (2021).

[10] A. Meurer, C. P. Smith, M. Paprocki, O. Čertík, S. B. Kirpichev, M. Rocklin, A. Kumar, S. Ivanov, J. K. Moore, S. Singh, T. Rathnayake, S. Vig, B. E. Granger, R. P. Muller, F. Bonazzi, H. Gupta, S. Vats, F. Johansson, F. Pedregosa, M. J. Curry, A. R. Terrel, v. Roučka, A. Saboo, I. Fernando, S. Kulal, R. Cimrman ja A. Scopatz, „SymPy: symbolic computing in Python“, *PeerJ Computer Science* 3, e103 (2017).

[11] M. Blau, *Lecture notes on general relativity*, Albert Einstein Center for Fundamental Physics Bern (2011).

[12] S. M. Carroll, *Spacetime and geometry*, Cambridge University Press (2019).

[13] F. D'Ambrosio, S. D. Fell, L. Heisenberg ja S. Kuhn, „Black holes in $f(\mathbb{Q})$ gravity“, *Physical Review D* 105, 024042 (2022).

[14] S. Bahamonde, L. Ducobu ja C. Pfeifer, „Scalarized Black Holes in Teleparallel Gravity“, *arXiv:2201.11445* (2022).

[15] J. D. Bekenstein, „Exact solutions of Einstein-conformal scalar equations“, *Annals of Physics* 82, 535–547 (1974).

[16] F. W. J. Olver, A. B. Olde Daalhuis, D. W. Lozier, B. I. Schneider, R. F. Boisvert, C. W. Clark, B. R. Miller, B. V. Saunders, H. Cohl ja M. A. McClain, „NIST Digital Library of Mathematical Functions“, `http://dlmf.nist.gov/`, Release 1.1.5 of 2022-03-15, vaadatud 23.05.2022.

[17] S. Bahamonde, J. G. Valcarcel, L. Järv ja J. Lember, „Black hole solutions in scalar-tensor symmetric teleparallel gravity“, ilmumas.

II. Litsents

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, **Joosep Lember**,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose

   Sfääriliselt sümmeetrilised staatilised mustad augud skalaar-mittemeetrilisuse teoorias, mille juhendaja on Laur Järv,

   reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 4.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Joosep Lember
27.05.2022