Universidade de Lisboa

PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO E REPRESENTAÇÕES DE ALUNOS DO 8.º ANO NO TÓPICO DAS FUNÇÕES

Susana Filipa de Sousa Ferreira Alves Vicente

Mestrado em Ensino de Matemática
no 3.º ciclo do ensino básico e no ensino secundário

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada orientado pela
Professora Doutora Joana da Fonte Dias Gomes da Mata Pereira e coorientado pela
Professora Doutora Maria Antónia Duffner Bessa Monteiro

2022

Universidade de Lisboa

PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO E REPRESENTAÇÕES DE ALUNOS DO 8.º ANO NO TÓPICO DAS FUNÇÕES

Susana Filipa de Sousa Ferreira Alves Vicente

Mestrado em Ensino de Matemática
no 3.º ciclo do ensino básico e no ensino secundário

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada orientado pela
Professora Doutora Joana da Fonte Dias Gomes da Mata Pereira e coorientado pela
Professora Doutora Maria Antónia Duffner Bessa Monteiro

2022

Este trabalho foi desenvolvido no âmbito do projeto REASON, que tem o apoio de fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia, Project REASON (contrato PTDC/CED-EDG/28022/2017).

Resumo

Este relatório resulta da intervenção letiva realizada com uma turma do 8.º ano do ensino básico, ocorrida durante a subunidade didática – Gráficos de Funções Afins, no final do 2.º Período do ano letivo 2019/2020.

O objetivo deste trabalho reside em compreender os *processos de raciocínio matemático* e as *representações* usadas por alunos do 8.˚ ano na resolução de tarefas sobre funções.

Para dar resposta a esta problemática formulei três questões orientadoras que se prendem com as características dos *processos de raciocínio* e as dificuldades sentidas na resolução das tarefas, com as *representações* privilegiadas pelos alunos e com a noção que revelam de função e ainda com a relação entre os *processos de raciocínio* e as *representações* usadas.

A lecionação da unidade de ensino seguiu uma abordagem maioritariamente exploratória, tendo como objetivo a aprendizagem dos alunos. Foram utilizadas tarefas diversificadas com características predominantemente exploratórias e privilegiado o trabalho autónomo a pares, bem como os momentos de discussão e a síntese de conteúdos. Os alunos foram avaliados recorrendo à observação e questionamento, à análise das produções escritas dentro e fora da sala de aula e através de uma Questão de Aula.

A metodologia de investigação seguiu um paradigma interpretativo e uma abordagem qualitativa, onde fui simultaneamente professora e investigadora. Os principais métodos de recolha de dados foram a observação, com registo áudio e vídeo e as produções escritas dos alunos. A análise de dados focou-se nos *processos de raciocínio* dos alunos, nas *representações* utilizadas e nas principais dificuldades observadas.

Os resultados evidenciaram a intuição dos alunos na interpretação da relação funcional envolvida na representação gráfica de uma função. No entanto, verificam-se dificuldades na transição do concreto para o abstrato e na atribuição de significado à simbologia utilizada. Estas dificuldades são evidentes sobretudo na capacidade de *generalização* e na conversão para a representação algébrica de uma função.

Ainda assim, apesar das dificuldades identificadas, verificou-se que as tarefas exploratórias focadas em correspondências quantitativas contextualizadas foram facilitadoras do processo de *generalização*, promovendo a compreensão de conceitos abstratos.

As dificuldades observadas na *justificação* residem essencialmente na capacidade de os alunos comunicarem matematicamente, evidenciando a necessidade de continuar a trabalhar estas capacidades transversais.

Palavras-chave: *Processos de raciocínio matemático*, *funções*, *representações*, *dificuldades*.

Abstract

This report is the result of the teaching intervention carried out with a class of grade 8, which took place during the didactic sub-unit – Affine Function Charts, at the end of the 2nd period of the 2019/2020 school year.

The aim of this report resides on the understanding of the processes of mathematical reasoning and the representations used by grade 8 students in solving tasks about functions.

In order to achieve this aim, I formulated three guiding questions related to the characteristics of the reasoning processes and the difficulties felt in solving tasks, with the representations privileged by the students and with the notion that they reveal of function and also with the relationship between the reasoning processes and the representations used.

The teaching of the didactic unit followed a mostly exploratory approach, aiming for students' learning. A diversity of tasks were used, with predominantly exploratory characteristics, and the teaching approach privileged autonomous work in pairs, as well as moments of discussion and the synthesis of contents. The students were evaluated using observation and questioning, the analysis of written productions inside and outside the classroom and through a Class Question.

The research methodology followed an interpretive paradigm and a qualitative approach, where I was both a teacher and a researcher. Data was collected by observation, with audio and video recording and collection of students' written productions. Data analysis focused on the students' reasoning processes, the representations they used and their main difficulties.

The results evidenced the students' intuition in the interpretation of the functional relationship involved in the graphical representation of a function. However, there are difficulties in the transition from the concrete to the abstract and in the attribution of meaning to the symbology used. These difficulties are evident above all in the ability to generalize and convert to the algebraic representation of a function.

Even so, despite the difficulties identified, the exploratory tasks focused on contextualized quantitative correspondences facilitated the generalization process, promoting the understanding of abstract concepts.

The difficulties observed in the justification essentially reside in the students' ability to communicate mathematically, highlighting the need to continue working on these transversal skills.

Keywords: *Mathematical reasoning processes, functions, representations, difficulties.*

Agradecimentos

À minha orientadora, Professora Doutora Joana Mata Pereira, pela disponibilidade e orientação, pelas críticas sempre construtivas e pertinentes e pelas palavras de motivação imprescindíveis nos momentos mais difíceis. Muito obrigada!

À minha coorientadora, Professora Doutora Maria Antónia Duffner Monteiro pela disponibilidade na orientação científica na elaboração das tarefas e no rigor dos conceitos.

Aos restantes professores do Instituto de Educação e da Faculdade de Ciências, pelos seus ensinamentos, em particular à Professora Doutora Hélia Oliveira, por ao longo deste percurso e, ainda que sem o saber, ter sido uma fonte de inspiração para mim enquanto professora. Muito obrigada!

Ao meu professor cooperante, Professor Paulo Alvega, muito obrigada pela generosidade com que partilhou toda a sua experiência, pelas sugestões tão assertivas e pelas muitas reflexões, tão singulares e enriquecedoras.

Aos alunos da turma que acompanhei por me receberem tão bem e por terem contribuído para a realização deste estudo.

À Escola Padre Alberto Neto por me ter proporcionado esta oportunidade e pela simpatia e disponibilidade de todos os seus colaboradores.

Aos meus colegas de mestrado, pelo apoio, pelas partilhas e pelo convívio saudável e proativo. Obrigada!

À minha colega Maria Joana Monteiro pelo companheirismo, pelas partilhas e pelas suas sugestões sempre criativas.

Aos meus pais pelo encorajamento constante. Ao José pela tolerância e apoio incondicional neste meu caminho e às minhas filhas pela paciência e compreensão apesar das minhas ausências. Muito obrigada!

ÍNDICE

Índice de Quadros

Índice de Figuras

Índice de Anexos

1. Introdução

Neste trabalho pretendo apresentar a minha intervenção letiva supervisionada, ocorrida no âmbito da unidade curricular Iniciação à Prática Profissional IV, assim como aspetos relacionados com a conceção do processo de investigação a partir da formulação do problema, a planificação metodológica, a recolha de dados e resultados obtidos.

Paralelamente à intervenção letiva que decorreu na unidade de ensino "Gráficos de Funções Afins", estabeleci como tema de estudo os "Processos de raciocínio matemático e representações de alunos do 8.˚ ano no tópico das funções".

Neste capítulo introdutório, apresento as minhas motivações para este estudo, a sua pertinência e o objetivo e questões de investigação. No final do capítulo apresento ainda a estrutura deste relatório.

1.1 Motivações e pertinência do estudo

Considero a Matemática uma prática desafiante, contudo esta disciplina é muitas vezes vista pelos alunos como pouco interessante ou muito difícil. Como futura professora de Matemática gostaria de me apropriar de uma prática que promova o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos e os leve a olhar para esta disciplina com mais entusiasmo e consciência da sua abrangência. Além disso, é minha convicção que, ao refletir acerca dos *processos de raciocínio* dos alunos poderei compreender melhor as suas dificuldades e a sua compreensão de uma situação, contexto ou conceito (*sense making*) (Ponte, Mata-Pereira, e Henriques, 2012). Assim, a problemática subjacente a esta investigação reside na tentativa de compreender e aprofundar o conhecimento acerca dos *processos de raciocínio* mobilizados, as suas dificuldades e em que medida o desenvolvimento do raciocínio matemático contribui para a aprendizagem.

A organização do Mestrado em Ensino de Matemática prevê que a prática letiva decorra preferencialmente no 2.˚ período. Considerando o planeamento definido pelo grupo disciplinar de Matemática da escola onde decorre a intervenção, a unidade didática "Gráficos de Funções Afins" (MEC, 2013) está contemplada nesse período. Assim, este relatório enquadra-se no tema da Álgebra, particularmente no tópico das funções.

Na verdade, muito me satisfez o facto de ter a oportunidade de lecionar a unidade de ensino "Gráficos de Funções Afins", pela qual tenho particular interesse. Além de ter uma importância transversal na Matemática, já que, a partir do 7º ano de escolaridade o tópico das Funções acompanha toda a restante vida académica dos alunos, parece-me ainda um tópico apropriado para explorar o raciocínio matemático dos alunos. Este é um tópico que permite estabelecer ligações entre a Matemática e a realidade, tornando-se um veículo para a análise de um vasto leque de situações práticas. Tal como é salientado por Ponte, Branco e Matos (2009a), o tema Álgebra deve ser trabalhado através da criação de ambientes propícios, que permitam captar a atenção dos alunos e que promovam efetivamente as suas aprendizagens. Desta forma, este é um tema que salienta a utilidade da Matemática, contribuindo assim, para o despertar de uma atitude mais positiva relativamente à Matemática nos nossos alunos (NCTM, 2007). Se analisarmos a realidade dos nossos meios de comunicação, facilmente percebemos que existe uma grande quantidade de informação sobre diversos fenómenos, geralmente apresentada por meio de tabelas, gráficos e, expressões algébricas (Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999). Assim, é de extrema importância que os alunos adquiram formação que lhes permita fazer uma leitura e interpretação adequadas dessa informação, tornando-se cidadãos matematicamente literatos.

Reforçando estas minhas convicções, alguns autores, nomeadamente Ponte, Branco e Matos (2009a), defendem que o conceito de função é basilar no currículo e deveria ser "ainda mais reforçado" (p. 13). Para Ronda (2015), a noção de função deve ser compreendida nas variadas aceções, nomeadamente, a função afim (em sentido lato) devendo ser utilizada e interpretada nas mais diversas situações e recorrendo às suas múltiplas *representações*.

Assim, considero essencial, no âmbito das funções, que o professor se familiarize e compreenda melhor as *representações* dos alunos e a sua relação com a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos (Adu-Giamfi & Bossé, 2013). Adicionalmente, de acordo com o NCTM, "os alunos deverão desenvolver uma compreensão alargada e aprender a manusear os conceitos de declive e ordenada na origem, bem como reconhecê-los em tabelas, gráficos e equações" (2007, p. 264).

1.2 Objetivo e questões de investigação

O objetivo da investigação a que me proponho consiste em compreender os *processos de raciocínio matemático* e as *representações* usadas por alunos do 8.˚ ano na resolução de tarefas sobre funções.

Com este objetivo pretendi que a intervenção letiva possibilitasse uma aprendizagem e compreensão dos alunos no tópico das funções através do desenvolvimento do raciocínio matemático. A partir da realização de tarefas que apelassem ao raciocínio matemático, pretendi que a atividade dos alunos resultasse na mobilização de vários *processos de raciocínio*, a partir dos quais pude concluir acerca das aprendizagens mobilizadas e responder às seguintes questões de investigação:

- Quais os *processos de raciocínio* usados pelos alunos e que dificuldades manifestam na resolução das tarefas propostas?
- Que *representações* privilegiam e que compreensão revelam da noção de função?
- Que relação existe entre os *processos de raciocínio* e as *representações* usadas?

Para tal lecionarei a unidade didática – Gráficos de Funções Afins – onde desenvolvi um trabalho, com os alunos, de caráter maioritariamente exploratório.

1.3 Estrutura do Relatório

Desenvolvido ao longo de seis capítulos, este relatório contempla, para além da descrição da prática de ensino supervisionada, algum desenvolvimento relativo à unidade de ensino lecionada e às características do trabalho de cariz investigativo realizado.

Após esta *Introdução*, no segundo capítulo, apresento o *Enquadramento Curricular e Didático* deste trabalho, que serve de suporte teórico ao estudo do tema das funções no ensino da Matemática. É baseado em literatura de referência e reflexões pessoais, focando-se no raciocínio matemático, nas dificuldades no âmbito das funções e na importância das *representações*.

No terceiro capítulo, *Unidade de Ensino*, começo por fazer uma sucinta caracterização da escola e da turma, apresento a ancoragem da unidade didática no programa em vigor e nas aprendizagens essenciais, uma resumida planificação das aulas, as opções tomadas e a sua justificação e ainda os conceitos matemáticos trabalhados ao longo da unidade. Apresento ainda as fichas de trabalho, uma síntese e reflexão das aulas e aspetos da avaliação.

No quarto capítulo, *Métodos e Procedimentos de recolha de Dados*, explicito a metodologia utilizada para o desenvolvimento deste trabalho, a justificação da seleção dos participantes no estudo e os métodos de recolha de dados utilizados para a análise.

No quinto capítulo, *Análise de Dados*, apresento a análise realizada, de acordo com os objetivos do estudo.

Por fim, o sexto capítulo encerra as principais conclusões deste estudo, bem como uma reflexão sobre todo o trabalho desenvolvido e as aprendizagens por mim realizadas.

2. Enquadramento curricular e didático

No presente capítulo, são identificadas orientações curriculares e didáticas para o ensino e aprendizagem das funções. É abordado o raciocínio matemático no âmbito do estudo das funções, o conceito de função e é apresentado o papel das diferentes *representações* na aprendizagem, sustentado pelas perspetivas de vários autores. São ainda apresentadas algumas dificuldades relativas à aprendizagem deste tema e as razões que poderão estar na origem dessas dificuldades.

2.1 Orientações curriculares gerais

De acordo com o Programa de Matemática, é no 3.˚ ciclo que se inicia o estudo formal das funções e este tema adota particular destaque, assumindo um domínio exclusivo – Gráficos de Funções Afins (MEC, 2013). Neste documento, este domínio é tratado fazendo apelo à diversidade de *representações* e a situações de problemas contextualizados como forma de sensibilizar os alunos para a inquestionável relevância da Matemática na compreensão dos diversos fenómenos do nosso mundo.

Relativamente às Aprendizagens Essenciais (ME, 2018, p. 2), são considerados como primordiais no ensino da Matemática, os seguintes objetivos gerais:

- promover a aquisição e desenvolvimento de conhecimento e experiência em Matemática e a capacidade da sua aplicação em contextos matemáticos e não matemáticos;
- desenvolver atitudes positivas face à Matemática e a capacidade de reconhecer e valorizar o papel cultural e social desta ciência.

Especificamente, em relação à aprendizagem da álgebra, as Aprendizagens Essenciais (ME, 2018), indicam, para os alunos do 3.º ciclo, o desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébrico, alargando e aprofundando o estudo das relações matemáticas, nomeadamente através do estudo das funções.

2.2 Funções

2.2.1 O conceito de função

O conceito de função tendo surgido no início do século XVII, foi evoluindo ao longo dos séculos e atualmente vigora uma definição similar à apresentada por Dirichlet em 1837:

Uma função $f: A \rightarrow B$ consiste em dois conjuntos, o domínio A, o conjunto de chegada B, e uma regra que associa a cada elemento x de A (objeto) um só elemento y de B (imagem). Diz-se neste caso que a função está definida em A com valores em B. Chama-se contradomínio de f ao subconjunto de B formado pelas imagens. Quando o contradomínio de f coincide com o conjunto de chegada, a função diz-se sobrejetiva (Teixeira, Precatado, Albuquerque, Antunes e Nápoles, 1997).

Atualmente este conceito, devido à sua importância na álgebra e às suas implicações noutras áreas, continua a ser objeto de estudo por vários matemáticos. Schwindgendorf, Hawks e Beineke (1992) defendem que as "raízes do conhecimento das funções não consistem apenas num único caminho hierárquico" e que este conceito "é simultaneamente uma fundação explícita e implícita do estudo avançado da Matemática e como uma ferramenta" (citado em Ayalon, Watson e Lerman, 2015, p. 322).

O conceito de função é um dos mais relevantes da Matemática, sendo uma ferramenta fundamental na representação e compreensão do mundo. De acordo com a Brochura de Álgebra (Ponte, Branco e Matos, 2009a), "Uma função f, definida num conjunto D e com valores num conjunto E, pode ser vista como uma regra que faz corresponder a cada elemento x de D (chamado objeto) um único elemento de E, que se designa por y ou $f(x)$ (chamado imagem). O conjunto D é designado por domínio de f e o conjunto $C = f(D)$, de todas as imagens dos elementos do domínio, é designado por contradomínio. Deste modo, o contradomínio C é um subconjunto de E, o conjunto onde a função toma valores. As variáveis x e $f(x)$ são, respetivamente, as variáveis independente e dependente."

Também Ponte (1990), refere que o conceito de função é um dos mais importantes de toda a Matemática, sendo um instrumento de excelência para estudar problemas de variação e o modo como essa variação ocorre, no caso particular das funções afins, trabalhando casos de variação constante.

A mesma perspetiva é partilhada por Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) e as normas NCTM (2008), que salientam que os alunos devem ser capazes de associar o conceito de função às ideias de variação e de mudança: "a compreensão da variação é essencial à compreensão das funções e à compreensão de muitas ideias transmitidas nas notícias" (NCTM, 2008, p. 42). É fundamental que os alunos trabalhem com casos de variação constante, bem como casos de situações de variação não constante.

2.2.2 Ensino-Aprendizagem das funções

O estudo das funções e relações, como refere Kaput (1999), é uma das vertentes onde o pensamento algébrico, em particular o raciocínio, se manifesta e o conceito de função apresenta-se como um conceito estruturador e central no currículo da Matemática. A construção, interpretação e manipulação de *representações* de uma relação funcional entre duas variáveis é uma oportunidade central para o aluno contactar com vários aspetos de natureza algébrica. De modo complementar, o estudo das relações funcionais (como sejam a identificação de padrões e regularidades, a utilização de múltiplas formas de representação, e os processos de *generalização* e particularização) é também fundamental para consolidar a compreensão do conceito de função. Assim, um dos grandes objetivos do estudo da Matemática é o desenvolvimento do pensamento algébrico e para o qual contribui fortemente o estudo de funções.

Os documentos curriculares que vigoram em Portugal, nomeadamente o Programa de Matemática do ensino Básico e o Caderno de Apoio do 3.˚ ciclo (MEC, 2013), recomendam que o estudo das funções seja feito através da correspondência entre conjuntos e como relação entre as variáveis. Também, na Brochura de Álgebra (2009a) onde é salientada a importância do conhecimento sobre as funções na formação dos alunos desde o ensino básico, é defendido que este conceito deve ser abordado “enquanto relação entre variáveis e como correspondência unívoca entre dois conjuntos” (Ponte, Branco & Matos, 2009a, p. 116). Neste documento, as funções surgem como um conteúdo de aprendizagem do tema Álgebra e é indicado que o seu estudo seja pautado pela resolução de tarefas que envolvam a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática.

Ainda relativamente à aprendizagem das funções no 3.º ciclo, Ponte et al. (2009) defendem que “os alunos devem saber o que é uma função, identificar correspondências que são ou não funções, reconhecer as diversas *representações* de uma função e identificar objetos e imagens” (p. 116). Acrescentam ainda “que a abordagem da noção de função neste ciclo não privilegia os aspetos estritamente matemáticos do conceito, mas sim o seu uso para modelar situações da realidade e para resolver problemas”.

Segundo Smith (2003), uma função de duas variáveis pode ser estudada pela forma como um valor de uma variável (independente) faz variar o valor da outra variável (dependente), ou seja, pela análise dos correspondentes padrões de variação, ou pode ser estudada pela análise da covariação entre as duas variáveis, por exemplo, x e y. O autor refere ainda que a abordagem relativa ao estudo da covariação é utilizada pelos alunos de forma mais intuitiva e pode ser a base para o estabelecimento de uma relação de correspondência entre cada valor de x e o respetivo valor de y, podendo a partir daí, chegar-se mais facilmente à expressão analítica da função. Este autor destaca que há vantagens em ambos os modos de análise.

Finalmente, Doorman et al. (2012), dizem que as vantagens de existirem diversas formas de encarar as funções, faz com que ensinar este conceito aos alunos seja um desafio pedagógico. Defendendo que o ensino das funções pode, nos primeiros anos, ter um caráter operacional, e a longo prazo, um caracter estrutural, prendendo-se com a abstração que carateriza a construção de objetos matemáticos. (Doorman et al, 2012, citados por Mateus, 2013).

No ensino-aprendizagem das funções é ainda fundamental analisar o vínculo deste tema ao quotidiano do aluno através de explorações, problemas e das discussões em grupo.

2.2.3 Dificuldades esperadas dos alunos

Tal como acontece na Álgebra em geral, no domínio das Funções, existem várias dificuldades identificadas, resultantes essencialmente da introdução da linguagem própria dos processos algébricos e em particular no estabelecimento e definição de relações entre variáveis (Canário, Amado & Carreira, 2011).

Ponte, Branco e Matos (2009a) destacam como principais dificuldades dos alunos no domínio das funções, o uso de terminologia própria - domínio, objeto, imagem - principalmente quando aparecem em contexto exclusivamente matemático. Referem ainda dificuldades na utilização correta da simbologia x, y, e $f(x)$; na passagem de uma representação para a outra; na utilização da informação dada para a resolução de problemas e na interpretação das soluções obtidas de acordo com o contexto dado. Tendo em conta as dificuldades referidas, os autores sugerem como estratégias para ajudar os alunos, a utilização da modelação de situações da realidade e a resolução de problemas. Assim, as tarefas devem evitar contextos exclusivamente matemáticos, evitando que a manipulação simbólica das expressões algébricas seja feita sem atribuição de significado (Ponte, Branco & Matos, 2009a).

Arzarello, Bazzini e Chiappini (2001) partilham da mesma opinião, referindo a incapacidade de os alunos relacionarem as expressões simbólicas com o seu significado, levando a incorreções e manipulações cegas de símbolos algébricos. Assim no desenvolvimento do raciocínio algébrico, para além da capacidade de manipulação simbólica, é fundamental a compreensão do sentido de símbolo, necessária a um bom desempenho nos processos de teste e de demonstração (Arzarello et al., 2001).

Num estudo realizado por Elia et al. (2007), sobre os conhecimentos e dificuldades no estudo das funções, por regra os alunos revelaram melhor desempenho em tarefas cujo trabalho envolvia o gráfico da função e o pior desempenho foi obtido em problemas onde se trabalhava a função a partir da expressão algébrica. As principais dificuldades referem-se a problemas em que se pedia aos alunos que mudassem da representação verbal para a representação algébrica, que reconhecessem uma função num conjunto dado de relações entre variáveis e que construíssem o gráfico a partir da expressão analítica. Outra das dificuldades evidenciadas neste estudo foi a definição correta do conceito de função e a resolução de problemas que envolvessem a transição de uma representação para outra. Para os autores, a transição entre *representações* é um processo que requer uma compreensão global das variáveis, que pode estar a ser trabalhada de forma inadequada no ensino.

Num outro estudo, desenvolvido por Ponte (1984), o autor identificou algumas estratégias e dificuldades dos alunos no campo da construção e interpretação de gráficos cartesianos e na análise das relações funcionais subjacentes a esses processos. Na construção e interpretação de gráficos, a maioria dos alunos conseguiu determinar as coordenadas de pontos em situações que envolvessem variáveis discretas, no entanto, em gráficos que envolvessem funções contínuas, os alunos foram pouco precisos. Foram também sentidas dificuldades no trabalho com escalas, ao nível da construção e interpretação gráfica. O autor analisou ainda as dificuldades dos alunos na identificação e na classificação de variáveis. Em contextos que lhe eram familiares, os alunos foram capazes de identificar corretamente as variáveis associadas ao problema e a maioria soube distinguir corretamente as variáveis contínuas das variáveis discretas. Contudo, em contextos menos familiares, sentiram maiores dificuldades na identificação das variáveis e na compreensão da sua natureza. Esta observação vai de encontro à sugestão de Bardini, Pierce e Stacey (2004), de que os alunos devem ser confrontados com problemas relacionados com a sua realidade, facto que pode facilitar a compreensão dos conceitos envolvidos.

Outras dificuldades são evidenciadas por Sfard (1991) quando os alunos trabalham o conceito de função, tais como: (i) conceber a função como um processo de cálculo; (ii) atribuir uma variação à função; (iii) o considerar verdadeiras afirmações do tipo: toda a função expressa uma certa regularidade e toda a função pode ser expressa por uma fórmula algébrica e (iv) confundir o conceito com uma das suas *representações*.

À lista das dificuldades descritas juntam-se as várias formas de representar a relação funcional (tabelar, gráfica e algébrica). A dificuldade em adquirir o conceito de função aumenta se se tiver em conta que não há só uma representação, mas sim uma grande variedade (Duval, 2006). Também Consciência (2013) defende que a conversão entre *representações* é uma tarefa difícil para os alunos e que existem conversões com diferentes graus de dificuldade, nomeadamente quando se trata da conversão da representação gráfica para a respetiva expressão algébrica.

Sfard (1991), considera que devem ser proporcionadas aos alunos, atividades que estabeleçam relações entre os vários sistemas de representação e estes, devem ser orientados nas várias fases da sua evolução (interiorização, condensação e reificação), de modo a que a definição pretendida para interiorização e a imagem que formarem se completem, permitindo aprendizagens significativas.

Kaput (1999), considera que o raciocínio algébrico e as *representações* algébricas estão entre as ferramentas mais poderosas jamais desenvolvidas. Este autor identifica a dificuldade em lidar com símbolos formais algébricos e em relacionar as diferentes formas de representação que constituem obstáculos na aprendizagem das funções. Defende assim que, para que haja superação das dificuldades dos alunos inerentes ao conceito de função, os professores devem criar ambientes de sala de aula que possibilitem aprender com compreensão, defendendo a realização de tarefas que envolvam diversos tipos de representação.

As dificuldades no uso do conjunto de símbolos e na compreensão do conceito de função, são partilhadas por Saraiva e Teixeira (2009), que destacam a realização de tarefas de natureza diversa como estratégia para ajudar no desenvolvimento do pensamento algébrico, promovendo a capacidade de interpretação e manipulação dos símbolos bem como a procura de relações existentes entre as variáveis. Deste modo, os alunos desenvolvem a capacidade de trabalhar com estruturas algébricas, de representar e de raciocinar de forma progressivamente mais abstrata.

Em suma, as principais dificuldades evidenciadas pelos investigadores mencionados são o uso incorreto da terminologia própria das funções e a transição entre as várias *representações*. Outros aspetos apontados são: a dificuldade de identificação da relação entre as variáveis, na definição do conceito de função, e no estudo da variação de uma função.

As principais estratégias apontadas para ultrapassar as dificuldades referidas são a utilização de tarefas de natureza diversificada, privilegiando a resolução de problemas que permitam estabelecer relações entre vários sistemas de representação.

2.3 Raciocínio matemático

Como já vimos, um dos principais objetivos do ensino da Matemática é promover o desenvolvimento do raciocínio dos alunos, "o que justifica o importante papel da Matemática em todos os sistemas educativos" (Ponte, Mata-Pereira & Henriques, 2012, p. 2) e a importância das tarefas promotoras do raciocínio matemático.

O raciocínio, a par da comunicação e da resolução de problemas, é uma capacidade transversal comum a vários documentos curriculares em vigor. De acordo com o Programa e

Metas Curriculares, a estruturação do pensamento e consequentemente o desenvolvimento do raciocínio matemático é uma das finalidades do ensino da Matemática (MEC, 2013). O raciocínio é ainda considerado no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (ME, 2017), como uma importante área de competência a ser desenvolvida e um dos objetivos essenciais de aprendizagem, de acordo com as Aprendizagens Essenciais (ME, 2018).

É assim inegável que o raciocínio tem um papel fundamental na aprendizagem dos alunos; partindo de conhecimentos prévios e através de um processo evolutivo, alcançam novo conhecimento (Ponte, Mata-Pereira & Henriques, 2012).

Esta ideia é, também, corroborada pelo NCTM (2008), que salienta a importância desta capacidade, referindo que "ser capaz de raciocinar é essencial para a compreensão da Matemática" (p. 61).

2.3.1 Conceito de raciocínio matemático

O conceito de raciocínio matemático é difícil de definir na sua plenitude. Para alguns autores, como é o caso de Oliveira (2008), uma das formas de compreender o raciocínio matemático é ter em conta o raciocínio dos próprios matemáticos ao criarem Matemática, sendo, desta forma, possível encontrar algumas das componentes deste raciocínio.

Segundo Oliveira (2008), raciocinar implica "um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtém novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas ou assumidas (conhecimento prévio)" (p. 3). De modo semelhante, Mata-Pereira e Ponte (2013, p. 18) indicam que "raciocinar, mais do que reproduzir conceitos memorizados e efetuar procedimentos rotineiros, é formular inferências (não imediatas) a partir da informação disponível".

Lannin, Ellis e Elliot (2011) referem-se ao raciocínio matemático de uma outra perspetiva: "é um processo evolutivo de conjeturar, generalizar, investigar porquê e desenvolver e avaliar argumentos" (p. 10).

Podemos dizer que raciocinar matematicamente implica fazer inferências, usando conhecimento pré-existente para chegar a conhecimento novo. As várias perspetivas existentes assumem que o raciocínio matemático tanto pode ser relativo a processos lógicos como intuitivos.

De acordo com Oliveira (2002), existem quatro grandes tipos de raciocínio: (i) indutivo; (ii) dedutivo; (iii) abdutivo; e (iv) transformativo. Partindo das características de cada uma deles, podemos compreender melhor o que caracteriza o raciocínio matemático e os seus processos.

Raciocínio indutivo

De acordo com Oliveira (2002), o raciocínio indutivo, é a inferência de uma regra a partir da observação do que é constante em diversos casos particulares desenvolvendo-se do particular para o geral, sem uma conclusão necessária e com um papel de criação de conhecimento. Este tipo de raciocínio é usado quando se analisam casos particulares, se identificam relações e se fazem generalizações. Tal como refere Oliveira (2002) "quem induz fá-lo por analogia, i.e., a pessoa infere a semelhança das conclusões a partir da diferença dos factos" (p. 174).

É a partir do raciocínio indutivo que se desenvolvem conjeturas que podem ser verificadas através de processos de demonstração como por exemplo a indução matemática (Polya, 1954).

Raciocínio dedutivo

O raciocínio dedutivo é o mais característico da Matemática, sendo considerado por Oliveira (2002), "o elemento estruturante, por excelência, do conhecimento matemático" (p. 178).

Este tipo de raciocínio está relacionado com as demonstrações e a lógica. É um tipo de raciocínio desenvolvido do geral para o particular, com uma conclusão necessária e tem sobretudo um papel de validação de conhecimento (Oliveira, 2002).

Raciocínio abdutivo

A abdução é um processo de inferência que parte de um facto insólito ou invulgar e que procura uma explicação para a sua ocorrência, sendo assim responsável pela descoberta científica.

O raciocínio abdutivo implica formular conjeturas plausíveis sobre uma determinada situação, verificando-as e testando-as para validar o seu significado no contexto em causa (Rivera & Becker, 2009). As conjeturas formuladas baseiam-se nas relações estabelecidas entre os vários aspetos da situação. Assim, o raciocínio abdutivo permite não só gerar hipóteses ou teorias, mas também avaliar as hipóteses no sentido de inferir a melhor explicação (Oliveira, 2002). É assim um raciocínio crítico, que procura um esclarecimento plausível a partir de factos e que tem um papel de explicação e criação de conhecimento (Oliveira, 2002).

Raciocínio transformativo

Para Oliveira (2002), o raciocínio transformativo assenta em duas principais ideias: (i) a ideia de operação (mental ou física); e (ii) a ideia de dinamismo. Trata-se de um raciocínio desenvolvido a partir de imagens mentais com vista a uma explicação ou validação, que poderá ter uma conclusão necessária ou não. Este tipo de raciocínio desempenha um papel de criação ou de validação de conhecimento.

Este tipo de raciocínio, pelas condições que possibilitam o seu desenvolvimento e por se basear em imagens mentais, é difícil de observar ou identificar em aula, pelo que não será foco da presente investigação.

2.3.2 Processos de raciocínio

No 3.º ciclo do ensino básico, para que os alunos se tornem competentes na utilização adequada do raciocínio matemático, é necessário que em sala de aula, haja lugar para a discussão de conjeturas e de afirmações matemáticas com o professor e com os colegas (NCTM, 2007). É expectável que, nestes níveis de ensino, os alunos utilizem *processos de raciocínio matemático* como a formulação de conjeturas, a sua verificação e a apresentação da resolução, ainda que desprovidos do formalismo associado à demonstração Matemática (NCTM, 2007).

A resolução de problemas ou a demonstração de uma *conjetura* é indissociável da mobilização de *processos de raciocínio matemático*, e estes são ao mesmo tempo, formas através das quais os alunos desenvolvem o seu próprio raciocínio matemático (Barbosa, 2013). Esta autora destaca ainda que a comunicação, as conexões e as *representações* utilizadas pelos alunos suportam o raciocínio desenvolvido, levando a uma tomada de decisões no processo de aprendizagem.

Assim, o raciocínio matemático envolve uma variedade de processos, como estabelecer estratégias de resolução, generalizar, conjeturar, comparar, classificar, validar, justificar, demonstrar e exemplificar. Destes processos, pelo papel fundamental que desempenham na Matemática, terão maior destaque neste trabalho, a *conjetura*, a *generalização* e a *justificação*.

Conjeturar

As conjeturas correspondem a uma suposição informada (NCTM, 2008), sendo “afirmações que necessitam de ser provadas” (Ramos, 2009, p. 15). Deste modo, uma *conjetura* não é uma conclusão, tendo sim um carácter provisório (Ponte, Brocado & Oliveira, 2003).

Para Lannin, Ellis e Elliot (2011), conjeturar consiste em analisar relações matemáticas com a finalidade de desenvolver afirmações que têm o propósito de serem verdadeiras, mas que não se conhecem como tal. Ao faze-lo, os alunos reconhecem os aspetos comuns a vários casos, conduzindo-os ao desenvolvimento de generalizações. Estas generalizações, por sua vez levam-nos à compreensão do significado dos conceitos, símbolos e *representações*, sendo particularmente importantes na Matemática por permitirem fazer afirmações válidas para um determinado conjunto de objetos (Carraher, Martinez & Schliemann, 2008; Jeannote & Kieran, 2017). É, contudo, necessário que, tal como refere o NCTM (2008), os alunos compreendam que "a existência de vários exemplos não é suficiente para que se estabeleça a verdade de uma *conjetura*" (p. 220) e que é possível refutar uma *conjetura* através de um contraexemplo.

A formulação de conjeturas utiliza um raciocínio, essencialmente, indutivo, que se pode basear na observação direta de dados, na manipulação dos mesmos ou até, na analogia com outras conjeturas, entre outras formas (Ponte, Brocado & Oliveira, 2003). O estudo de padrões e a procura de regularidades e de relações são exemplos de atividades que possibilitam o surgimento de conjeturas (NCTM, 2008).

Generalizar

A *generalização* é considerada, por vários autores um elemento fulcral do pensamento algébrico. Ponte, Branco e Matos (2009a), caraterizam esta capacidade, considerando que generalizar é "descobrir e comprovar propriedades que se verificam em toda uma classe de objetos" (p. 10), reforçando a ideia da importância de encontrar o geral no particular e confirmando que o particular pertence ao geral.

Segundo Ellis (2011), a *generalização* é definida como "uma atividade onde as pessoas, num contexto socio matemático específico, se envolvem em pelo menos uma de três ações: a) identificar o que é comum entre casos; b) estender o seu raciocínio para além dos casos particulares; ou c) derivar resultados mais amplos através dos casos particulares" (p. 311). Assim sendo, a *generalização* é entendida como um processo dinâmico de identificação de semelhanças e de descoberta de extensões.

Segundo Radford (2006), o pensamento algébrico é uma maneira particular de pensar matematicamente, sendo um processo onde os alunos, através da observação de regularidades e de relações matemáticas existentes em situações particulares, raciocinam de modo geral, chegando a generalizações que expressam usando os seus próprios recursos.

No âmbito do ensino da Matemática, a validade de uma *generalização* deve ser analisada considerando as capacidades, conhecimento e competências dos alunos em causa. Ao longo do percurso escolar dos alunos, é necessário que seja promovida a transição entre as generalizações baseadas maioritariamente em observações empíricas e casos particulares e as generalizações baseadas numa coerência lógica (Carraher, Martinez & Schliemann, 2008).

Numa fase inicial esta capacidade é expressa através de linguagem natural, evoluindo gradualmente para uma linguagem mais formal matematicamente, a linguagem algébrica. Desta maneira, a *generalização* é um aspeto fundamental do raciocínio matemático, quer como processo, quer como produto, tal como defende Ellis (2007a). Com efeito, numa fase preliminar do processo de *generalização*, os alunos desenvolvem uma atividade mental que se caracteriza pela análise dos padrões, identificando propriedades, estabelecendo relações e definindo estratégias de exploração dos mesmos - *ações de generalização* que são divididas em três categorias: *relacionar* (situações e objetos), *procurar* (relações, procedimentos, padrões e resultados) e *estender* (estender o âmbito de aplicação, removendo casos particulares, operando ou continuando o padrão). Segundo Ellis (2007a), O culminar do processo de *generalização* ocorre quando os alunos verbalizam e escrevem as suas conjeturas de uma forma geral após a análise de casos particulares - *generalizações refletidas.*

Radford (2003), caracteriza as generalizações em três níveis, de acordo com o seu grau de generalidade: factual, contextual e simbólica. A *generalização* factual surge quando a observação empírica de casos particulares é aplicada a novos casos particulares, sem alteração do conjunto de objetos matemáticos. A *generalização* contextual, ainda que baseada na observação empírica ou em casos particulares, pressupõe o alargamento a um novo conjunto de objetos matemáticos. E a *generalização* simbólica, envolve a compreensão e utilização da linguagem algébrica. Esta classificação sugere que os alunos devem primeiro aprender a formular generalizações a partir de tarefas nas quais têm a possibilidade de observar padrões e relações. Numa segunda fase, devem formular generalizações utilizando a notação algébrica e posteriormente, devem conseguir obter novas informações ao refletirem sobre as expressões algébricas produzidas (Carraher, Martinez & Schliemann, 2008). É assim fundamental promover a formulação de generalizações nestas diversas fases pois grande parte da compreensão referente a objetos algébricos advém das atividades de *generalização* em Álgebra (Kieran, 2007).

Justificar

A *justificação* de afirmações apoiada em procedimentos, propriedades e definições matemáticas é uma das capacidades que se espera que os alunos comecem a adquirir nos primeiros anos de escolaridade, embora o possam fazer ainda sem grande formalidade. De acordo com o NCTM (2007) “desde as suas primeiras experiências no campo matemático, é importante ajudar as crianças a compreenderem que as afirmações deverão ser sempre justificadas” (p. 61). Estas justificações, segundo Lannin et al. (2011), não devem basear-se na perceção ou exemplos, mas sim na apresentação de argumentos baseados em ideias matemáticas ou na refutação utilizando um contraexemplo para uma determinada afirmação.

No 3.º ciclo do ensino básico espera-se que os alunos sejam capazes de distinguir uma argumentação informal de uma argumentação formal (NCTM, 2007). Ainda que não apresentem o rigor associado a uma demonstração matemática, nesta fase, as justificações deverão já apresentar características mais formais do que em ciclos anteriores. Ao incentivar a *justificação*, o professor deve garantir que os alunos compreendem que tipo de justificações são validas matematicamente (Lannin, 2005), promovendo a passagem das justificações simples e informais para as justificações progressivamente mais formais.

Dada a dificuldade inerente às justificações muito formais, principalmente para alunos dos níveis de ensino mais baixos, Mata-Pereira e Ponte (2018), articulando os níveis de formalidade das justificações adotados por vários autores, sugerem diferentes níveis de *justificação* de acordo com o grau de complexidade e formalidade (Quadro 1).

Quadro 1 - Níveis de complexidade e formalidade da *justificação*
(Mata-Pereira & Ponte, 2018)

Tipos crescentes de formalidade →

Níveis crescentes de complexidade ↓

<table>
<tr><td colspan="3"></td><td>**0**</td><td colspan="3">*Não justificar*</td></tr>
<tr><td rowspan="5">**A**
Não formal</td><td rowspan="5">**B**
Formal mas incompleta</td><td rowspan="5">**C**
Formal</td><td>**1**</td><td colspan="3">*Autoridade externa*</td></tr>
<tr><td>**2**</td><td colspan="3">*Evidência empírica*</td></tr>
<tr><td rowspan="3">**3**</td><td>**3A**</td><td>**3B**</td><td>**3C**</td></tr>
<tr><td>*Coerência lógica*</td><td>*Exemplo genérico*</td><td>*Procedimento ou propriedade*</td></tr>
<tr><td colspan="3">*Justificação dedutiva*</td></tr>
</table>

Também Lannin (2005), de modo a considerar a complexidade das justificações apresentadas pelos alunos, agrupa-as em cinco níveis:

- nível 0 - não justificar (quando as respostas não incluem uma *justificação*);
- nível 1 - apelo à autoridade externa (quando e utiliza uma referência a um outro indivíduo ou material de referência);
- nível 2 – evidência empírica (quando a *justificação* se baseia em exemplos particulares);
- nível 3 – exemplo genérico (quando a *justificação* e dedutiva, mas expressa para uma situação particular);

- e nível 4 - *justificação* dedutiva (quando a validade da *justificação* assenta num argumento dedutivo que é independente dos casos particulares.

De acordo com Lannin, Ellis e Elliot (2011), no final do 3.º ciclo, o professor deve procurar que os alunos:

- efetuem justificações através de argumentos lógicos baseados em ideias já compreendidas anteriormente;
- justifiquem refutações partindo do facto de uma determinada afirmação ser falsa;
- avaliem a validade dos argumentos utilizados;
- tenham presente que uma *justificação* matemática não é um argumento baseado na autoridade, perceção, senso comum ou exemplos particulares;
- e procurem justificar o porquê de uma *generalização* ser verdadeira ou falsa, investigando quais os fatores que podem influenciar essa *generalização*.

2.3.3 O pensamento algébrico no estudo das funções

Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), alertam para a necessidade da existência de conteúdos que promovam o desenvolvimento de uma certa "atividade intelectual", sugerindo uma multiplicidade de tipos de raciocínio associados respetivamente a cada domínio da Matemática. Estes autores referem o trabalho com padrões generalizados como forma de desenvolver o raciocínio funcional nos alunos, partindo de dados em situações familiares. Desta forma, os alunos ao explorarem relações que envolvem correspondências e variações desenvolvem este tipo de raciocínio. Para estes autores, encontrar esta relação funcional entre dois conjuntos de números permite passar da Aritmética para a Álgebra.

Para analisar o raciocínio matemático na aprendizagem do conceito de função, é necessário compreender como é que este conceito se desenvolve. Segundo Sfard (1991), este conceito pode ser entendido de duas formas diferentes. Para esta autora, o conceito de função é adquirido em primeiro lugar de forma operacional, sendo as noções concebidas como um produto de certos processos, ou identificadas com os próprios processos. Só posteriormente é feita a transição para a forma estrutural do conceito de função, na qual a função é tratada como um objeto matemático através da interiorização dos processos. Este desenvolvimento é de evolução lenta e realiza-se por etapas - *interiorização, condensação* e *reificação*. O aluno encontra-se na fase de interiorização quando aprende a noção de variável e adquire a "capacidade de usar uma fórmula para encontrar valores da variável dependente" (Sfard, 1991, p. 19) a partir de manipulações algébricas. Na fase de condensação, o aluno desenvolve a capacidade de pensar sobre um dado processo como um todo, este "é o ponto em que se dá o nascimento 'oficial' de um novo conceito" (Sfard, 1991, p. 19). Considera-se que há evolução nesta fase, quando o aluno consegue combinar um processo com outros já conhecidos, estabelecer comparações, generalizar e alternar entre diferentes *representações* de um conceito. No caso específico das funções, quanto mais o aluno estiver avançado no processo de condensação, significa que melhor trabalhará a função como um todo, sendo capaz de "investigar funções, desenhar os seus gráficos, combinar pares de funções (por exemplo, por composição), até encontrar a função inversa de uma dada função" (p. 19). A reificação significa que o aluno consegue ver a nova entidade matemática como um objeto completo, autónomo e com significado próprio. Segundo a autora, nenhuma destas fases pode ser alcançada sem que a anterior tenha sido ultrapassada. A última fase ocorre de uma forma instantânea (não gradual), e pode ser definida "como sendo uma mudança ontológica – uma súbita capacidade de ver algo familiar numa perspetiva totalmente nova" (p. 19). Assim, a autora defende que é esta evolução que permite ao aluno ver um objeto matemático enquanto tal, deixando de o confundir com a sua representação.

Na perspetiva de Ponte (2006), o estudo da Álgebra "visa desenvolver o *pensamento algébrico* dos alunos" (p. 11), referindo-se não só à de manipulação de símbolos, mas também ao estudo de relações matemáticas abstratas, incluindo a capacidade de lidar com cálculo algébrico e com as funções. Para promover o desenvolvimento do pensamento algébrico, defende o estudo de padrões e regularidades, conduzindo os alunos a representar e a raciocinar sobre os objetos matemáticos e as relações entre eles.

Segundo Ponte, Branco e Matos (2009a), o pensamento algébrico carateriza-se segundo três vertentes: representar, raciocinar e resolver problemas, como mostra o Quadro 2.

Quadro 2 - As três vertentes fundamentais do pensamento algébrico segundo Ponte, Branco e Matos (2009a)

Representar	• Ler, compreender, escrever e operar com símbolos usando convenções algébricas usuais; • Traduzir a informação representada simbolicamente para outras formas de representação (objetos, verbal. Numérica, tabelas e gráficos e vice-versa. • Evidenciar o sentido de símbolo, nomeadamente interpretando os diferentes sentidos no mesmo símbolo em diferentes contextos.
Raciocinar	• Relacionar (analisando propriedades). • Generalizar e agir sobre as generalizações revelando compreensão das regras. • Deduzir.
Resolver problemas e modelar situações	• Utilizar expressões algébricas, equações, inequações, sistemas de equações e inequações, funções e gráficos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios (modelação).

Da observação do Quadro 2, compreendemos melhor de que modo o estudo de funções pode desenvolver o pensamento algébrico, já que observando cada uma destas fases, facilmente encaixarmos em cada uma delas, um exemplo acerca do estudo de funções. É deste modo evidente o contributo do estudo de funções para o desenvolvimento do pensamento algébrico e por consequência o contributo para o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Também para Smith (2008), o uso do raciocínio funcional inclui a utilização do pensamento relacional, centrado em especial, na relação entre duas quantidades variáveis, saindo de relações particulares para a sua *generalização*. Este autor considera três formas distintas de analisar estas relações:

- o pensamento recursivo, na descoberta da variação de valores;
- o pensamento covariacional, analisando a forma como duas quantidades variam simultaneamente e considerando a variação como uma parte explícita e dinâmica da descrição de uma função e;
- a relação de correspondência, compreendendo a relação existente entre cada valor da variável independente e da variável dependente.

Segundo o NCTM (2007), o pensamento algébrico, diz respeito ao estudo das estruturas, à simbologia, à modelação e ao estudo da variação, identificando quatro normas essenciais para a aprendizagem da Álgebra:

- Compreender padrões, relações e funções (estudo das estruturas);
- Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos (simbolização);
- Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas (modelação);
- Analisar a variação em diversos contextos (estudo da variação).

Segundo este documento, os alunos desenvolvem o seu raciocínio matemático, em particular o raciocínio indutivo e dedutivo, através dos processos de identificação de regularidades, formulação e verificação de conjeturas, *generalização*, *justificação* de propriedades, elaboração de cadeias de raciocínio e argumentação em defesa de um processo de resolução e demonstração.

Kaput (2008) identifica no pensamento algébrico dois aspetos fundamentais: formular e expressar generalizações gradualmente mais formais e raciocinar usando simbologia através da sua manipulação. Estes dois aspetos incorporam três abordagens da álgebra: (1) a Álgebra como o estudo das estruturas e sistemas generalizados dos cálculos e das relações numéricas (aritmética generalizada); (2) a Álgebra como o estudo das funções, relações e variações (relações funcionais) e; (3) a sua aplicação em situações de modelação para exprimir e formalizar generalizações. O mesmo autor (2008) refere que a transição abrupta da aritmética para a Álgebra, gera enormes dificuldades nos alunos, sendo uma das principais razões do seu insucesso neste tema. Ora, neste trabalho gostaria de, através do desenvolvimento do raciocínio matemático, contribuir para suavizar essas dificuldades e potenciar a aprendizagem dos alunos sobre funções.

Também para Canavarro (2007) o pensamento algébrico pode ser dividido em duas vertentes principais, com particular interesse na aprendizagem; a aritmética generalizada e o raciocínio funcional. Este último referido por Kaput (2008) como um dos principais eixos do pensamento algébrico é também um dos conteúdos principais da investigação em Álgebra.

De referir que o desenvolvimento do raciocínio matemático constitui um desafio para o próprio professor, tanto ao nível das dificuldades dos alunos como da gestão curricular. Um dos principais desafios que o professor enfrenta prende-se com o tempo, tanto na gestão curricular como na gestão da própria aula. Rodrigues (2009) refere que encontrar tempo que permita trabalhar o raciocínio matemático, de uma forma integrada, é um dos desafios que se colocam e que, de acordo com a autora, se poderia conseguir abordando a gestão curricular de uma forma integrada e conectada. Oliveira (2008) chama a atenção para a necessidade de não se procurar “precipitar o fim do período experimental da tarefa” (p. 8), de modo a chegar mais rapidamente à demonstração.

2.4 Representações

Sendo que o raciocínio matemático dos alunos é diretamente inacessível, torna-se naturalmente inseparável das *representações* e da linguagem através da qual se revela (Arzarello, Bazzini & Chiappini, 2001). Também Mata-Pereira e Ponte (2012, p. 84) referem que “[a]tendendo à impossibilidade de aceder diretamente ao raciocínio dos alunos, as *representações* que estes usam para comunicar esse raciocínio são fundamentais”. Para estes autores as *representações* devem estar articuladas com os processos de significação (*sense making*), os quais “têm também um papel importante no desenvolvimento do raciocínio matemático na medida em que, sem eles, não é possível estabelecer as conexões necessárias para formular, testar e justificar conjeturas” (Mata-Pereira & Ponte, 2012, p. 85).

Também Ponte e Quaresma (2014, p. 103), defendem o papel fundamental das *representações* em matemática “(…) na resolução de um problema ou na realização de uma investigação que requer raciocínio, a escolha da representação a usar é muitas vezes decisiva para se conseguir alcançar o objetivo.”. Estes autores reconhecem ainda as diferentes *representações* como sendo uma ferramenta fundamental para que o professor compreenda e possa caracterizar os *processos de raciocínio* dos alunos.

Assim, para aceder ao raciocínio matemático é necessário que os alunos o expressem, o que é possível apenas através de diferentes *representações*. Deste modo, como refere o NCTM (2007), somente "ao observar as suas *representações* (dos alunos), os professores poderão conseguir compreender os modos de interpretação e de raciocínio dos alunos" (p. 76). Por outro lado, para desenvolver o raciocínio matemático é fundamental que as *representações* sejam enfatizadas.

Greeno e Hall (1997) salientam a relevância das *representações* na sua relação com o raciocínio quando referem que "aprender a construir e interpretar *representações* envolve aprender a participar nas práticas complexas de comunicar e raciocinar, nas quais as *representações* são utilizadas" (p. 361). Estes autores defendem a existência de uma articulação entre a formalidade das *representações* dos alunos e os *processos de raciocínio* por eles privilegiados.

Segundo o NCTM (2007), as *representações* não são apenas um processo, mas também um resultado. Estas permitem aos alunos não só organizarem o seu pensamento, mas também comunicarem matematicamente e podem ser um importante apoio à reflexão dos alunos. O mesmo documento refere ainda que "quando os alunos conseguem aceder às *representações* matemáticas e às ideias que elas expressam, ficam com um conjunto de ferramentas que aumentam significativamente a sua capacidade de pensar matematicamente" (p. 75). De modo semelhante, Goldin (2008) considera que uma representação é uma configuração que pode substituir, sugerir ou simbolizar um objeto que está a ser representado, sugerindo também que os processos de significação, adquiridos através das *representações*, têm um papel importante no desenvolvimento do raciocínio matemático. Assim, as *representações* desempenham um importante papel no processo de ensino-aprendizagem da Matemática e os alunos devem ser capazes de as usar de forma flexível e fluente e devem adquirir a habilidade de optar pela mais adequada em cada situação particular. Para tornar isso possível, os professores devem proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem que os ajudem a dar significado à variedade de *representações* utilizadas e a compreenderem como elas se relacionam entre si.

Nas últimas décadas assistiu-se a um destaque do tema das *representações* nas preocupações da educação matemática. Segundo Ronda (2015), o potencial conhecimento das diversas *representações* de uma função tem ainda a capacidade de influenciar a compreensão do conceito de função, afirmando que "a compreensão do conceito de função é tanto mais sólida quanto as características que se reconhecem de uma função nas diferentes *representações*". Na mesma linha de pensamento, Ponte (2005), afirma que os alunos devem ter contato com as diferentes formas de representar uma função e com a articulação entre elas.

Duval (2006) afirma que, a representação de um conceito matemático leva à obtenção de informações importantes sobre o conceito de função, mas por si só, é insuficiente para analisar o conhecimento desse conceito. Então, a compreensão do conceito de função, será tanto mais completa quanto mais se dominar a conversão entre as várias *representações*.

Assim é essencial facilitar contextos em sala de aula que permitam assumir a representação como parte integrante de uma função, ao mesmo tempo que promovam a sua compreensão e interpretação. Também Carraher, Martinez e Schliemann (2008), destacam que para a compreensão e apropriação do conceito de função será necessário reconhecer as suas diferentes *representações*, identificar, em cada uma delas, características, e comparar estas propriedades nas diferentes *representações*.

Preston e Garner (2003) frisam ainda que uma representação é um instrumento essencial para analisar, resolver e comunicar dados matemáticos, bem como para resolver problemas. Considerando a representação como um meio que apoia e fundamenta a aprendizagem, a combinação de diferentes *representações* representa um ganho de informação acerca do objeto de estudo (Friendland & Tabach, 2001; Preston & Garner, 2003).

2.4.1 Diferentes representações

Friedland e Tabach (2001) atribuem grande importância ao trabalho com vários tipos de *representações*, defendendo que permite eliminar as limitações de cada um dos tipos de representação tornando a aprendizagem da Álgebra mais significativa e efetiva. Estes autores distinguem quatro formas essenciais de *representações* em Matemática e apresentam ainda as vantagens e desvantagens associadas a cada uma delas:

(i) a representação verbal está normalmente associada à apresentação do problema e à interpretação final dos resultados obtidos. Dá ênfase à conexão da Matemática com outras áreas do conhecimento e entre a Matemática e o quotidiano. Tem a desvantagem de não ser uma representação universal, o que pode criar obstáculos a nível da comunicação matemática;

(ii) a representação numérica é uma representação natural, utilizada no início do estudo da Álgebra e que geralmente precede qualquer outro tipo de representação. É importante na compreensão inicial de um problema, mas pode por vezes constituir uma limitação por não ser generalizável;

(iii) a representação gráfica proporciona uma imagem clara da função. É uma forma de representação intuitiva e apelativa devido ao seu carácter visual. Em contrapartida, é muito influenciada por fatores externos, como por exemplo as escalas;

(iv) a representação algébrica é concisa, geral e efetiva na apresentação de padrões e modelos matemáticos e muitas vezes é o único método de justificar e estabelecer generalizações. No entanto, esta representação que utiliza exclusivamente símbolos algébricos pode ocultar o significado matemático ou a natureza do objeto e dificultar a compreensão dos resultados.

Assim, para estes autores, é também fundamental que os professores proponham aos alunos tarefas que estimulem o recurso a várias *representações*, a conversão entre elas e evidenciem a sua utilidade. Smith (2003), reforça esta ideia, defendendo que deve ser dada liberdade aos alunos para conceberem as suas próprias *representações* de forma a promover a atribuição de sentido às variáveis.

Também Santos (2015) confere um destaque particular às *representações* matemáticas "as *representações* matemáticas constituem um importante meio para o desenvolvimento de uma aprendizagem Matemática com compreensão, uma vez que podem potenciar o acesso de todos os alunos a ideias abstratas, à linguagem e ao raciocínio matemáticos" (p. 3), reconhecendo-as não apenas como meio de comunicação, mas também de construção de conhecimento.

Um dos autores que mais tem analisado as *representações* matemáticas é Goldin. Este autor descreve a representação como "uma configuração que representa algo, de alguma forma" (Goldin, 2008, p. 180) e refere-se às *representações* como sistemas de estrutura complexa, aberta e em constante mudança. Goldin distingue dois tipos de *representações*: as externas, que têm existência física em papel, no ecrã do computador, ou noutro suporte e as internas, que não têm existência física e às quais só é possível aceder efetuando inferências a partir da forma como os alunos trabalham com as *representações* externas, as quais podem revelar o processo de representação interna de cada aluno.

Na perspetiva de Duval (2006), a comunicação em Matemática estabelece-se com base em *representações*. Sendo os objetos matemáticos abstratos, não são facilmente observáveis, torna-se necessário recorrer a *representações* em registos adequados que possibilitem a sua aprendizagem.

Para este autor, o problema da compreensão matemática resulta do conflito cognitivo que surge do facto dos objetos matemáticos apenas serem acessíveis através de *representações*. Assim, é fundamental para o processo de aprendizagem, que o aluno seja capaz de distinguir o objeto representado, da sua representação. Para Duval (2006), é fundamental trabalhar diversas *representações*, pois é essa diversidade que confere significado ao objeto matemático, sendo que nenhuma delas isoladamente, consegue descrevê-lo na sua plenitude, mas em conjunto representam e descrevem diferentes aspetos desse mesmo objeto.

No que respeita à transformação de *representações*, Duval (2006) defende que, para se compreenderem as dificuldades de aprendizagem devem distinguir-se dois tipos de transformações: tratamento e conversão. Os tratamentos são transformações de *representações* dentro do mesmo registo (por exemplo, simplificação de expressões analíticas), enquanto as conversões são transformações entre diferentes registos (por exemplo, a passagem da expressão analítica de uma função para a sua representação gráfica). O autor acrescenta ainda que a complexidade cognitiva subjacente ao processo de pensamento Matemático reside no facto de existirem duas formas de transformação tão distintas.

Duval (2003) refere três noções de representação que diferem na sua função: (1) representação subjetiva e mental (ligada a crenças e explicações do sujeito) e tem a função de objetivação; (2) representação interna e computacional (execução de tarefas não conscientes do sujeito), com a função de tratamento; (3) e *representações* semióticas (são externas e conscientes e referem-se a um sistema particular de signos: língua natural; expressão algébrica; gráfico cartesiano, entre outros), com função de objetivação, expressão e tratamento. Destaca estas últimas que, sendo intencionais, são essenciais para a aprendizagem, definindo-as como produções construídas por signos pertencentes a um sistema de representação e defende que para a apreensão de um objeto matemático é necessário a mobilização de distintas *representações* semióticas. Duval (2006) realça também que o mais relevante para compreender os *processos de raciocínio*, em qualquer atividade matemática, é o foco no nível de registos semióticos de representação e não numa representação particular, defendendo que, para analisar a complexidade dos *processos de raciocínio*, devem ser consideradas as diferenças entre os vários registos semióticos de representação que são usados na atividade matemática.

As conversões consistem, assim, em mudanças de registo semiótico de representação (como por exemplo a passagem de uma equação algébrica para a sua representação gráfica). Estas passagens são muitas vezes fundamentais para a compreensão do objeto em questão. Esta ideia é sustentada pelo NCTM (2007) ao referir que "*representações* distintas focam, geralmente, aspetos diferentes de relações e conceitos complexos", assim, para se tornarem conhecedores de conceitos matemáticos, "os alunos necessitam de uma diversidade de *representações* que suportem a sua compreensão" (p. 77).

Também para Kieran (2007), é indiscutível a importância das *representações* na aprendizagem do conceito de função, referindo que, através da visualização do gráfico das funções, os alunos tornam-se mais hábeis na sua compreensão, nomeadamente na representação gráfica da função linear, no estudo do declive e ordenada na origem. Kieran (1992) distingue três modos de representar relações funcionais:

- geometricamente, usando esquemas, diagramas, gráficos, entre outros;

- aritmeticamente, com recurso a números, tabelas ou pares ordenados e;
- algebricamente, com o uso de símbolos literais, fórmulas e correspondências.

O uso de tarefas que permitam recorrer a vários tipos de *representações*, interpretando e analisando as relações existentes entre as variáveis permitem o desenvolvimento do raciocínio funcional nos alunos (Kieran, 1992).

2.4.2 Representações no ensino-aprendizagem das funções

Ponte (1992) considera que o ensino das funções deve articular de modo equilibrado os vários tipos de representação: (i) numérica; (ii) gráfica; e (iii) algébrica e defende que o estudo das propriedades das funções a partir dos seus gráficos pode contribuir para uma aprendizagem mais significativa e o estudo analítico das funções deve surgir com base em atividades sistematicamente realizadas a partir da representação numérica e da representação gráfica.

De um modo geral, todos os autores anteriormente referidos, salientam que é fundamental trabalhar as diferentes *representações* de uma função para que os alunos possam realizar aprendizagens mais significativas e compreendam este conceito. Atendendo às distinções apresentadas por Friedland e Tabach (2001), Kieran (1992) e Ponte (1992), neste trabalho considero para análise dos dados as diferentes formas de representação enumeradas por Friedland e Tabach (2001).

De acordo com as perspetivas apresentadas podemos perceber a potencialidade da aprendizagem dos diversos tipos de *representações* e as vantagens e desenvolvimentos que estas trarão ao aprofundar o estudo de funções. São ainda vários os autores que indicam como forma de desenvolver e analisar o raciocínio funcional, a utilização de tarefas que possibilitem o uso de múltiplas *representações* de uma função, defendendo que a análise da forma como cada representação é feita e a transição entre as diferentes *representações* permitem inferir sobre o raciocínio que está a ser desenvolvido pelos alunos (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999; Kaput, 1999; NCTM, 2007; Ponte, Branco & Matos 2009a). Parece-me assim que a importância do papel das *representações* matemáticas para o desenvolvimento e compreensão do raciocínio matemático, e consequente, para a compreensão do conceito de função, reúne uma concordância expressiva entre os autores.

Na abordagem deste tema devemos então partir do conceito ainda um pouco intuitivo de função e mostrar aos alunos as potencialidades das conexões entre esse conceito e os seus diversos tipos de *representações*. Neste processo devemos tentar incluir a compreensão do conceito, das formas como se representa e das conexões entre as diferentes *representações*.

3. Unidade de Ensino

Durante o ano letivo de 2019/2020 acompanhei uma turma do 8.º ano de escolaridade da Escola Básica e Secundária Padre Alberto Neto. No período entre 2 e 19 de março de 2020 realizei um trabalho de cariz investigativo baseado na lecionação da unidade de ensino "Gráficos de Funções Afins". Contudo, este não foi um ano letivo típico devido à pandemia de Covid-19, que obrigou ao fecho repentino das escolas a partir de 13 de março, transformando o que seria a última semana de intervenção prevista, num acompanhamento da turma à distância.

Neste capítulo apresentarei a contextualização escolar, caracterizando a escola e a turma, seguindo-se o enquadramento da unidade de ensino no Programa e Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico (MEC, 2013) e nas Aprendizagens Essenciais (MEC, 2018). Apresentarei as opções de lecionação tomadas, tanto ao nível das estratégias de ensino, das tarefas e da avaliação e termino com uma síntese reflexiva das aulas que lecionei neste período.

Na secção onde são descritas as tarefas, são também apresentados os conceitos matemáticos recordados ou introduzidos aos alunos.

3.1 Contexto Escolar

3.1.1 Caracterização da Escola

A Escola Básica e Secundária Padre Alberto Neto (EBSPAN), localizada na freguesia de Queluz, concelho de Sintra, é escola-sede do Agrupamento de Escolas Queluz-Belas, constituído por mais nove escolas; uma Escola Básica do 2º e 3º Ciclos, duas Escolas Básicas do 1º Ciclo, cinco Escolas Básicas do 1º Ciclo com Jardim de Infância e um Jardim de Infância.

A EBSPAN integra os 2.˚ e 3.˚ Ciclos do Ensino Básico, os cursos Cientifico-Humanísticos regulares e os Cursos Profissionais do Ensino Secundário. Esta escola, composta por oito pavilhões, possui uma biblioteca, uma sala polivalente e um auditório com cerca de 200 lugares. Todas as salas dispõem de um projetor e de um computador, no entanto, estes equipamentos são insuficientes para que os alunos possam, eles mesmo, trabalhar com o equipamento informático, explorar e realizar atividades pedagógicas que envolvam o acesso a tecnologias.

Quanto aos recursos humanos da escola, o corpo docente é estável e experiente, sendo que 70% dos professores pertencem ao quadro.

De acordo com o Projeto Educativo de novembro de 2018, o agrupamento de Escolas Queluz-Belas, caracteriza-se por uma diversidade cultural expressiva, sendo que cerca de 14,3% dos seus alunos são estrangeiros, predominantemente oriundos dos PALOP e Brasil. A comunidade envolvente é maioritariamente constituída por uma população de famílias de classe média baixa ou baixa, e com baixo nível de escolaridade.

Neste contexto, o insucesso e abandono escolar são realidades preocupantes nesta escola, que tenta, através da promoção da equidade e inclusão social, combater estas dificuldades. Para isso, conta com ações de integração das famílias na escola e com a oferta de percursos escolares diversificados, adequados aos diferentes interesses e expetativas dos alunos e da comunidade, a par disso conta com o envolvimento dos professores numa “micro gestão curricular”, baseada na diferenciação pedagógica e que é bastante evidente na turma que acompanhei.

3.1.2 Caracterização da Turma

A turma do 8.º ano, que acompanhei no ano letivo de 2019/2020 e onde realizei a minha intervenção, era inicialmente constituída por 28 alunos. No entanto um dos alunos mudou de escola por razões desconhecidas, outro por ter sido vítima de agressões por colegas no recinto escolar, e uma terceira aluna, que apenas comunicava em Inglês, deixou de frequentar as aulas pouco depois do início do ano letivo, sabendo-se agora que terá emigrado para Inglaterra. Entretanto a turma recebeu uma nova aluna no início do 2.º período escolar, ficando deste modo, com um total de 26 alunos (12 rapazes e 14 raparigas), com idades compreendidas entre os 12 e os 16 anos, sendo a média de idades de 13,3 anos.

No geral, o nível socioeconómico das famílias destes alunos é médio baixo, com 14 alunos a beneficiarem de apoio social escolar (8 alunos com o escalão A e 6 alunos com escalão B). Relativamente ao nível cultural e académico, estes alunos provêm de famílias em que apenas 27% dos pais e 38% das mães completaram o ensino secundário e 4% dos pais e 11% das mães têm uma licenciatura. Esta realidade traduz-se, nalguns casos, em baixas expetativas relativamente ao percurso escolar dos seus filhos, os quais acabam por manifestar desinteresse pela aprendizagem. A turma é étnica e culturalmente diversificada e integra 5 alunos de origem estrangeira; dois guineenses e três brasileiros.

Destes alunos, a maioria transitou da mesma turma do 7.º ano, sendo que apenas três alunos são novos na turma. Esta é uma turma com dificuldades a todas as disciplinas, mas em particular, na disciplina de Matemática. No ano anterior apenas 12 alunos transitaram sem qualquer negativa, 6 alunos transitaram com uma negativa, 1 aluno transitou com duas negativas, 2 alunos transitaram com 3 negativas e 5 alunos transitaram com 4 negativas. Dos 14 alunos que transitaram para o 8.˚ ano com alguma negativa, todos obtiveram nível 2 na disciplina de Matemática. De acordo com os níveis da avaliação efetuada, no início do ano letivo o desempenho geral da turma, foi considerado de pouco satisfatório pelo professor Paulo Alvega, professor de Matemática desta turma, desde o ano anterior.

No seu percurso académico, 5 dos 26 alunos já ficaram retidos em algum dos anos letivos anteriores, um deles teve uma retenção no 8.º ano, três tiveram duas retenções e um teve 3 retenções ao longo do seu trajeto escolar.

Embora, tenha havido registo de faltas disciplinares e relatos de mau comportamento nalgumas disciplinas, na disciplina de Matemática o comportamento desta turma não representa um problema, registando-se apenas algumas situações pouco significativas e próprias da idade, em que o professor teve de chamar a atenção dos alunos.

Vários alunos desta turma apresentam, em sala de aula, uma atitude reservada, manifestando alguns problemas de comunicação e falta de confiança nos seus conhecimentos. Estes aspetos fazem deste grupo uma turma naturalmente pouco participativa, no entanto, dadas as caraterísticas do Professor Paulo Alvega, estes alunos estão já familiarizados com uma abordagem de ensino-aprendizagem exploratória, em que são o elemento central da aula e em que estão constantemente a ser estimulados a colaborar e a comunicar. A maioria dos alunos não realiza o trabalho de casa proposto e não apresenta dúvidas nas aulas, nem pedidos de esclarecimento no período de preparação para os momentos de avaliação. Os maiores desafios de lecionar nesta turma são de facto o incentivo à participação ativa dos alunos em aula e à criação de hábitos de trabalho fora da sala de aula.

Apesar das suas dificuldades, aos poucos os alunos foram revelando algum entusiasmo e começaram a adquirir confiança e vontade de participar, ainda que timidamente. Verificou-se também a existência de uma cultura de trabalho colaborativo, a qual deriva, em grande parte, do facto de estarem estrategicamente colocados a pares, em que um dos elementos é mais competente que o outro. Esta disposição varia ao longo do ano letivo, após cada momento de avaliação sumativa, em que é feita nova redistribuição dos alunos pelas carteiras, a partir dos resultados obtidos e das características de cada um. Esta é uma prática instituída pelo Professor Paulo Alvega em que a escolha dos lugares é feita por ele atendendo a critérios de desempenho e às características comportamentais dos alunos. No ano letivo em que acompanhei esta turma, a distribuição dos alunos em pares foi elaborada também atendendo ao meu parecer.

Dadas as suas características e, no âmbito da "micro gestão curricular" e das preocupações da escola em corresponder às necessidades dos alunos, esta turma beneficia de um programa de acompanhamento "especial" na disciplina de Matemática (GAT – Grupo de Aprendizagem Temporário). Esta forma de combate ao insucesso escolar, consiste na divisão da turma em dois grupos de desempenho, que ficam em salas separadas com professores diferentes. Deste modo há a possibilidade de adequar a abordagem dos conteúdos ao nível de desempenho de cada grupo e, o número reduzido de alunos por sala, permite um acompanhamento mais personalizado de todos. Esta divisão foi sendo alterada ao longo do ano, a partir da concordância dos professores envolvidos (Professor titular da turma, professor Paulo Alvega e a Professora assistente) e, neste caso, também a minha opinião foi tida em conta, já que eu acompanhava a turma diariamente. Os critérios que regulavam esta divisão dos alunos foram essencialmente os resultados que foram sendo observados nos momentos de avaliação, mas foram ainda analisados caso a caso, situações em que a motivação dos alunos pudesse beneficiar com a transição de um grupo para o outro.

Relativamente às classificações verificadas na avaliação formal do 1.º período escolar na disciplina de Matemática, em 25 alunos (dado que nesta altura já 3 alunos que haviam saído da turma), a turma contou com 10 alunos de nível 2, 8 alunos de nível 3 (alguns ainda assim com muitas dificuldades), 6 alunos de nível 4 e 1 aluno de nível 5. Ou seja, 40% dos alunos da turma obtiveram classificação negativa no final do 1º período (Figura 1), ficando a média da turma na disciplina de Matemática em 2,92. Contudo esta avaliação representou já uma melhoria relativamente aos 14 alunos que haviam transitado para o 8.º ano com nível 2 à disciplina.

Embora nas aulas, os alunos trabalhem autonomamente e apresentem algum entusiasmo com as atividades, de acordo com o conselho de turma, o seu baixo desempenho resultou sobretudo da inexistência de hábitos de trabalho em casa, da falta de organização e das lacunas que apresentam relativamente aos conteúdos lecionados em anos anteriores. Embora os resultados estejam longe do desejável, penso que esta evolução positiva verificada logo no 1º período, relativamente ao ano anterior, se deveu ao facto destes alunos terem mantido o professor de Matemática, que permitiu uma continuidade no tipo de trabalho realizado com alguém já familiarizado com as suas principais dificuldades.

No final do 2º período escolar, dos 26 alunos, 4 obtiveram classificação de nível 2 a Matemática (menos 6 alunos que no período anterior), 15 alunos obtiveram nível 3, 6 alunos obtiveram classificação de nível 4 e 1 aluno obteve classificação de nível 5. Assim, no 2.º período apenas 15% dos alunos obtiveram nível 2, verificando-se um crescimento significativo de alunos com nível 3 (Figura 1). Relativamente a alunos de nível 4, não se verificou uma melhoria significativa. Esta evolução positiva verificada na disciplina de Matemática, traduziu-se num aumento da média de 2,92 para 3,15 e foi acompanhada nas outras disciplinas. No geral, verificou-se uma recuperação significativa dos alunos com maiores dificuldades, dos 10 alunos que apresentavam 3 ou mais negativas no 1.º Período, todos sem exceção melhoraram, havendo um aluno que recuperou de oito negativas no 1.º Período para duas, no 2.º Período e outro aluno que recuperou de seis para zero. Esta evolução positiva está refletida na percentagem de negativas à totalidade das disciplinas, a qual, no final do 1.º Período era de 21% e no final do 2.º Período havia descido para 7%.

Esta melhoria global tão expressiva deveu-se essencialmente, de acordo com a diretora de turma, à melhoria do comportamento geral da turma e ao seu notável empenho. Em particular, na disciplina de Matemática, podem ter contribuído para esta recuperação, além dos fatores já referidos, o trabalho realizado nos grupos de aprendizagem temporários (GAT), que permitiu uma diferenciação pedagógica significativa envolvendo os alunos com mais dificuldades e desmotivados. Trabalhando em grupos menores, os alunos sentiram interesse no seu progresso e, de um modo geral, reagiram favoravelmente, empenhando-se para atingir melhores resultados.

Como já foi referido, este foi um ano letivo atípico devido à pandemia de Covid-19, assim as duas últimas semanas do 2.º período ocorreram de forma irregular e ainda pouco organizada, tendo o 3.º período sido lecionado na sua totalidade à distância.

Assim, no 3.º Período escolar, as classificações à disciplina de Matemática mantiveram-se muito equiparadas às classificações obtidas no período anterior, verificando-se ainda assim uma melhoria, com um aluno com nível 2 no 2º Período a recuperar para nível 3, no 3.º Período e um dos alunos com nível 3 passou a ter nível 4 (Figura 1). Apesar da disciplina de Matemática continuar a ter a média mais baixa da turma, relativamente às restantes disciplinas, o empenho desta turma e a sua evolução foram notáveis aos longo do ano letivo, terminando desta forma com uma média à disciplina de Matemática de 3,23 e com 5 alunos a marcarem presença no quadro de excelência da escola.

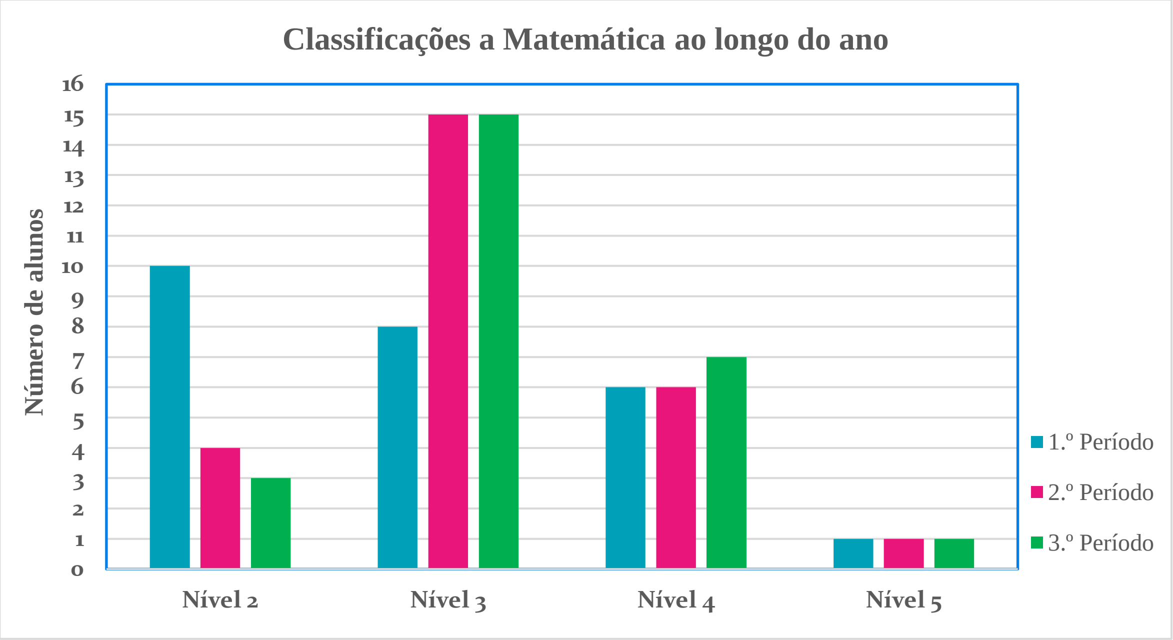


Figura 1 – Classificação dos alunos, por período escolar, à disciplina de Matemática.

O facto de no 3.º Período não ter havido uma evolução significativa relativamente ao período anterior, deve-se em grande parte às condições particulares, já mencionadas, em que decorreu este período, que envolveram dificuldades de comunicação com alguns alunos, a falta de interação presencial que é fundamental para manter a motivação dos mesmos e também a dificuldade em reunir elementos para uma avaliação justa e criteriosa. De qualquer forma, os alunos que já possuíam hábitos de trabalho e revelavam competências na disciplina, tiveram oportunidade de atingir um maior aprofundamento dos conteúdos.

3.2 Ancoragem curricular da unidade didática

É no 3.˚ ciclo que os alunos têm o primeiro contacto explícito com o conceito de função e iniciam a abordagem e compreensão dos diferentes significados das letras e da utilização de variáveis, representando quantidades em problemas e contextos diversificados. Este tema que, de acordo com Ponte, Branco e Matos (2009), é basilar no currículo da Matemática, torna-se a partir de então presença assídua nos programas de Matemática. Após a sua introdução no 7.˚ ano de escolaridade, na unidade de Funções (MEC, 2013), com a definição do conceito de função, de sequência e sucessão, o trabalho com a função constante, linear, afim e de proporcionalidade direta e trabalhadas as operações com funções numéricas, o tema das funções vai evoluindo em complexidade conforme se avança nos níveis de ensino.

No 8.˚ ano este tema surge no âmbito do domínio das Funções, Sequências e Sucessões – FSS8, na unidade didática de "Gráficos de Funções Afins" (MEC, 2013), que suporta a prática letiva considerada neste trabalho e que foi abordado de modo a articular os conteúdos estabelecidos no Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (MEC, 2013) com os objetivos de aprendizagem definidos nas Aprendizagens Essenciais (MEC, 2018). No quadro 3 são apresentados os conteúdos previstos no Programa de Matemática e os objetivos a alcançar de acordo com as Aprendizagens Essenciais.

Quadro 3 - Transcrição dos conteúdos da unidade didática Gráficos de Funções Afins (MEC, 2013, p. 23) e dos *Objetivos essenciais de aprendizagem específicos das funções* (MEC, 2018, p. 11)

Programa de Matemática (FSS8)	Aprendizagens essenciais
Conteúdos	Objetivos essenciais de aprendizagem
· Equação de reta não vertical e gráfico de função linear ou afim; · Declive e ordenada na origem de uma reta não vertical; · Relação entre declive e paralelismo; · Determinação do declive de uma reta determinada por dois pontos com abcissas distintas; · Equação de reta vertical; · Problemas envolvendo equações de retas.	· Reconhecer uma função em diversas *representações*, e interpretá-la como relação entre variáveis e como correspondência unívoca entre dois conjuntos, e usar funções para representar e analisar situações, em contextos matemáticos e não matemáticos; · Representar e interpretar graficamente uma função afim e relacionar a representação gráfica com a algébrica e reciprocamente; · Resolver problemas utilizando equações e funções, em contextos matemáticos e não matemáticos, concebendo e aplicando estratégias para a sua resolução, incluindo a utilização de tecnologia, e avaliando a plausibilidade dos resultados.

Para além dos aspetos apresentados no quadro 3, ambos os documentos assentam na valorização da aquisição de capacidades transversais, assim procurei para além dos objetivos específicos das funções, valorizar outos objetivos essenciais de aprendizagem descriminados nas aprendizagens essenciais, como a resolução de problemas, a comunicação matemática e o raciocínio matemático, que é, aliás, a principal temática da componente investigativa deste trabalho. Para isso tive em conta os objetivos descriminados para cada um desses conteúdos, como por exemplo o desenvolvimento da capacidade de abstração, *generalização* e argumentação matemática e também a capacidade de exprimir por escrito e oralmente ideias matemáticas, explicar e justificar raciocínios recorrendo a terminologia e linguagem próprias da Matemática (MEC, 2018).

Para além dos documentos de apoio acima referidos, outros sustentaram as opções por mim tomadas neste trabalho, como é o caso do NCTM (2007, p. 264), que afirma: “os alunos deverão desenvolver uma compreensão alargada e manusear os conceitos de declive e ordenada na origem, bem como reconhecê-los em tabelas, gráficos e equações”, sustentando a opção tomada para este trabalho, de apelar às várias *representações* e conversão entre elas.

De acordo com o planeamento efetuado pelos professores de Matemática da ESPAN, esta unidade didática teve início após uma primeira abordagem ao domínio da Álgebra, mais precisamente às equações de 1º grau com uma incógnita, de forma a que os alunos tivessem oportunidade de recordar o significado de incógnita para, posteriormente, atribuírem mais facilmente significado ao conceito de variável. Imediatamente após a abordagem das funções foram abordados os sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas.

Em suma, tendo como princípio a importância do desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos e a sua capacidade de manipular e interpretar as várias *representações* de uma função, o meu principal objetivo, nesta unidade didática, foi o de contribuir para a aprendizagem dos conteúdos definidos no Programa, priorizando os objetivos mencionados nas aprendizagens essenciais (quadro 3).

Neste percurso abordei a relação entre função de proporcionalidade direta e linear, e tentei tirar partido desta conexão para abordar a noção de declive. Uma vez que o cálculo analítico do declive não é considerado nas aprendizagens essenciais e dadas as características da turma, o professor titular sugeriu que este cálculo não fosse abordado, pelo que o conceito de declive foi interpretado apenas geometricamente. Foram ainda estudadas as retas não verticais como gráficos de funções afins, analisada a interpretação da variação dos parâmetros a e b numa equação do tipo $y = ax + b$ e trabalhado o conceito de ordenada na origem e a sua interpretação geométrica. Estas aprendizagens foram sendo introduzidas nas aulas privilegiando o desenvolvimento de atividades promotoras do raciocínio matemático dos alunos.

Após considerar todos os aspetos anteriormente referidos, estabeleci os seguintes objetivos de aprendizagem para os alunos como sendo os principais a atingir no estudo da unidade didática gráficos de funções afins:

- Compreender a noção de função como relação de dependência unívoca entre duas variáveis;
- Distinguir e relacionar os tipos de funções na sua representação algébrica e gráfica;
- Construir/escrever gráficos/expressões algébricas de funções lineares e afins;
- Interpretar gráficos/expressões algébricas de funções lineares e afins;
- Usar várias *representações* de funções afins e lineares e a capacidade de converter umas nas outras;
- Interpretar situações que envolvam as noções de declive, de ordenada na origem e compreender as consequências da variação destes parâmetros;
- Resolver problemas envolvendo gráficos de funções afins, modelando diferentes situações em contexto real, recorrendo a procedimentos matemáticos;
- Comunicar e raciocinar matematicamente.

O Quadro 4 resume, a planificação ajustada a partir da planificação inicialmente prevista para a lecionação desta unidade de ensino. Os ajustes efetuados em cada aula resultam de circunstâncias não previstas, como o não cumprimento do plano de aula e a entrada em estado de contingência. Inicialmente a lecionação desta unidade foi projetada para 3 semanas, contemplando 6 tempos de 45 minutos e 3 tempos de 90 minutos distribuídos por 9 aulas que incluíram uma questão de aula e um teste de avaliação. Estas aulas seriam lecionadas no final do 2º período entre 2 e 19 de março, contudo foram interrompidas a 12 de março devido à pandemia de Covid-19, tendo decorrido apenas entre 2 e 12 de março.

A planificação aqui apresentada a um nível macro, encontra-se detalhada a um nível micro, nos planos de aula, no Anexo 2. Estes planos de aula integram os objetivos e estrutura da aula, os recursos a usar, a metodologia e estratégia, a atividades esperada dos alunos e da professora, os objetivos específicos e a avaliação, slides de síntese e propostas de atividades complementares.

Como já foi referido, imediatamente antes do tema das funções, os alunos trabalharam os monómios e os polinómios, tendo sido uma oportunidade de trabalharem os conceitos algébricos, reduzindo assim algumas das dificuldades esperadas nas noções mais abstratas da Álgebra, como o uso de incógnitas e a obtenção de pontos a partir de uma expressão algébrica dada.

Assim, a planificação teve por base, para além dos objetivos já mencionados, o conhecimento das características dos alunos e o conhecimento prévio que têm sobre o tema. Este conhecimento foi bastante facilitado pela colaboração do professor titular, que também acompanhara a turma no ano letivo anterior e que, pelo seu profundo conhecimento da mesma, teve um papel muito importante na definição de algumas das ações e decisões que foram sendo, por mim, tomadas no decurso das aulas lecionadas.

Quadro 4 - Plano geral da unidade de ensino

<table>
<tr><th>Aulas previstas | Tempo (min.)</th><th>Tópicos abordados</th></tr>
<tr><td>1 | 45</td><td rowspan="2">• Noção de função como relação entre duas variáveis;
• Domínio e contradomínio;
• Relação de proporcionalidade direta;
• Variável dependente e independente;
• O coeficiente de x com a constante de proporcionalidade;
• Função constante.</td></tr>
<tr><td>2 | 45</td></tr>
<tr><td>3 | 90
(Questão de Aula)</td><td>• Noção de declive de uma função;
• Proporcionalidade direta e função linear;
• a como declive de uma função;
• Relação entre representações.</td></tr>
<tr><td>4 | 45</td><td rowspan="2">• Declive de uma função;
• b como ordenada na origem;
• Compreender a função afim como a soma de uma função linear e uma constante.
• Representação gráfica e algébrica da função afim;
• Relacionar funções lineares e funções afins.</td></tr>
<tr><td>5 | 45</td></tr>
<tr><td>6 | 90</td><td>• Relação entre as presentações gráfica e algébrica e por tabela da função afim;
• Equação da reta;
• Efeito da variação dos parâmetros a e b na representação gráfica da função afim;
• Noção de declive, de ordenada na origem e respetivas interpretações geométricas;
• Equação da reta.</td></tr>
<tr><td>7 | 45</td><td rowspan="3">Aulas não lecionadas por encerramento das escolas em estava prevista a consolidação dos conteúdos da temática “Gráficos de Funções Afins”.</td></tr>
<tr><td>8 | 45</td></tr>
<tr><td>9 | 90
(Teste de Avaliação)</td></tr>
</table>

3.3 Conceitos matemáticos envolvidos

Nesta secção são apresentados os principais conceitos matemáticos abordados durante a lecionação desta Unidade Didática. De notar que, dado o nível de escolaridade dos alunos e as características da turma, estes conceitos foram tratados em sala de aula, por vezes, com uma linguagem mais simples que ajudasse os alunos à sua compreensão.

No Programa e Metas Curriculares do Ensino Básico (MEC, 2013) há vários descritores que são de extrema importância para a lecionação da unidade "Gráficos de Funções Afins" do 8.º ano de escolaridade, os quais tive em conta na minha intervenção letiva.

Mais do que ensinar um conjunto de regras, conceitos e definições, tentei que os alunos compreendessem o seu significado e que os relacionassem entre si.

Comecei por recordar alguns conceitos já abordados no ano letivo anterior e cujo entendimento é imprescindível para avançar no estudo das funções.

Assim, a noção de função foi apresentada como uma correspondência entre dois conjuntos A e B, que a cada elemento do conjunto A (domínio da função) faz corresponder um e um só elemento do conjunto B (conjunto de chegada) e foram exemplificadas situações que retratavam funções e outras que não retratavam funções. A nomenclatura *objeto* foi transmitida como sendo cada um dos elementos do conjunto A e a nomenclatura *imagem*, como cada um dos elementos do conjunto B que corresponde a algum elemento do conjunto A. A nomenclatura habitualmente usada para o domínio e contradomínio de uma função f também foi abordada como sendo D_f para o domínio e D'_f para o contradomínio.

A função de proporcionalidade direta foi apresentada como sendo toda a função definida por uma expressão algébrica do tipo $y = kx$, em que k é a constante de proporcionalidade, com $k > 0$, e relacionada com a função linear para a qual existe um número racional a tal que $f(x) = ax$ e em que a se designa coeficiente de x e em que $a = f(1)$. Ou seja, de acordo com o descritor 1.1 o declive dos gráficos de funções lineares foi abordado como sendo o valor da ordenada quando a abcissa é igual a 1 ou, ainda, como sendo igual à constante de proporcionalidade entre as ordenadas e as abcissas. Esta abordagem estabelece uma conexão com os conteúdos do 7.º ano de escolaridade levando os alunos a construir conhecimento novo a partir de conhecimento prévio. Foi ainda abordada a influência do sinal do parâmetro a (declive positivo ou declive negativo) na reta que define graficamente a função linear e associado o declive positivo a retas que passam pelo 1º quadrante e o declive negativo a retas que passam pelo 2º quadrante.

A função constante foi recordada como sendo do tipo $f(x) = b$, em que b é uma constante e cuja representação gráfica é um conjunto de pares ordenados com a mesma ordenada (reta horizontal).

A família das funções afins foi assim tratada separadamente, começando com a função constante e linear, já abordadas no ano letivo anterior. Por fim, a introdução da função afim foi abordada como a soma de uma função linear e uma função constante e foi explicada a sua representação gráfica e algébrica:

Função afim (linear ou não linear): Função afim é uma função, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, da forma $f(x) = ax + b$, com a e b reais, em que a é designado por coeficiente de x e b por termo independente. Caso $b = 0$ e $a \neq 0$, a função $f(x) = ax$ denomina-se função linear. Para $a = 0$ e $b \neq 0$, a função $f(x) = b$ chama-se função constante.

Os alunos foram orientados para observarem a representação gráfica da função afim como uma reta não vertical, através da evidência de que a equação reduzida de uma reta é do tipo $y = ax + b$, em que a e b são números reais, sendo a o declive e b a ordenada na origem (descritor 1.3) que corresponde à ordenada do ponto $(0, b)$, levando os alunos a compreenderem que a representação algébrica de uma função não é mais do que uma equação. Esta abordagem foi essencial para clarificar a dificuldade que os alunos revelam ao identificarem uma incógnita que surge sob a forma $f(x)$.

Para abordar a equação da reta comecei por explorar com a turma alguns exemplos a partir de funções afins e a noção de equação da reta envolveu a compreensão dos parâmetros a (declive de uma reta) e b (ordenada na origem) e da compreensão da relação entre declive e paralelismo de retas não verticais como sendo aquelas que têm o mesmo declive. A noção de declive e ordenada na origem foram sempre destacadas devido à importância que assumem na construção da representação algébrica e gráfica da reta, nomeadamente a sua influência na inclinação da reta. A noção de retas paralelas foi introduzida a partir do valor do declive, de acordo com o descritor 1.4, no qual é considerado que duas retas r e s não verticais que, num referencial cartesiano, têm equação $y = ax + b$ e $y = cx + d$, respetivamente, são paralelas quando e apenas quando têm o mesmo declive.

De ressalvar que o declive de uma reta não vertical como sendo o valor de $a = (yb - ya)/(xb - xa)$, apresentado no descritor 1.5., em que $(xa, ya), (xb, yb)$ são dois pontos da reta, não foi lecionado por opção pedagógica.

A equação foi finalmente apresentada como sendo qualquer igualdade em que, pelo menos um dos membros, contém uma ou mais variáveis, a que chamamos incógnitas, porque representam quantidades desconhecidas.

Deste modo, o estudo das equações também saiu reforçado desta unidade didática já que, quando oportuno, foram realizadas conexões matemáticas com a resolução de equações de 1º grau, necessárias para determinar o valor de um objeto ou de uma imagem e o valor da ordenada na origem ou para apoiar as mudanças entre *representações* e a necessidade da construção de equações de reta definidas a partir das funções.

Embora o termo "forma canónica", não tenha surgido nas aulas, os alunos distinguiram e compreenderam o significado dos termos constituintes da função na sua representação algébrica.

Nas aulas foram abordados vários tipos de representação: tabular, gráfica, algébrica, diagrama sagital e ainda a linguagem natural, sendo que as mais trabalhadas pelos alunos foram a representação gráfica e algébrica, de acordo com as diretrizes do Programa de Matemática (MEC, 2013).

Uma vez que as *representações* gráficas de todas as funções que os alunos estudaram até ao momento são retas, para trabalhar as *representações* gráficas foi importante que os alunos tivessem noção de que dois pontos definem uma reta, apelando à conexão com o tema Geometria. A necessidade de saber resolver equações do 1º grau volta aqui a ser importante já que a construção da representação gráfica implica que os alunos determinem as coordenadas de pontos que pertencem à função.

De ressalvar que os conceitos foram sempre apresentados com recurso a exemplos orais ou escritos no quadro ou ainda com recurso a slides de apoio à aula. As definições e conceitos referidos foram introduzidas após a exploração de exemplos ou de tarefas, levando os alunos a refletirem sobre as suas características antes mesmo de serem nomeadas e muitas vezes foram os próprios alunos que, após essa exploração, explicaram por palavras suas os significados que, posteriormente me limitei a transformar numa linguagem mais formal.

3.4 Estratégia de ensino

Ao definir as estratégias de ensino a adotar, a minha primeira preocupação foi a de que elas fossem promotoras de aprendizagem significativa nos alunos. Para isso tentei, durante todo o processo, ter sempre presente quais as expectativas relativamente ao que se espera que os alunos aprendam e, como é que eu, enquanto professora, posso contribuir para tal.

Nas tomadas de decisão sobre as estratégias de ensino, tive presente as palavras de Ponte (2005, p. 12):

> Toda a planificação pressupõe a definição (explícita ou implícita) de uma estratégia de ensino, onde sobressaem sempre dois elementos, a atividade do professor (o que ele vai fazer) e a atividade do aluno (o que ele espera que o aluno faça), e se estabelece um horizonte temporal para a respetiva concretização (um certo período de tempo ou número de aulas).

Assim, considerei aspetos como as particularidades da turma, os recursos disponíveis, os objetivos pretendidos no estudo da temática das funções, os objetivos transversais a trabalhar e os objetivos do presente trabalho. Outro aspeto importante foi manter alguma flexibilidade nessa estratégia, que me permitiu, no decorrer da lecionação adaptar ou alterar situações inicialmente planeadas.

Adotados estes pontos de partida, procurarei abordar o tema em estudo de forma a proporcionar a compreensão dos alunos propondo tarefas que despertassem o seu interesse e, ao mesmo tempo, abordassem os conceitos matemáticos de forma sólida e significativa, procurando sempre criar espaço para o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Como forma de alcançar os propósitos referidos e sendo que o foco desta investigação assenta na criação de oportunidades para que os alunos evidenciem os seus *processos de raciocínio matemático*, privilegiei uma abordagem de ensino-aprendizagem exploratória, centrada no aluno e na sua atividade em que "o professor não procura explicar tudo mas deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem. A ênfase desloca-se da atividade ensino para a atividade mais complexa ensino-aprendizagem" (Ponte, 2005, p. 13). Este tipo de abordagem, além de ser mais desafiante para os alunos, proporciona aprendizagens mais significativas e duradouras. No decorrer das aulas houve, por vezes, a necessidade de associar a esta abordagem, uma outra correspondente a um ensino mais direto, adaptando o planeamento, com o intuito de promover a aprendizagem dos alunos indo ao encontro das suas características.

Para apoiar esta opção predominantemente exploratória propus tarefas de carácter diversificado (tarefas de exploração, exercícios e problemas) que representassem oportunidades para os alunos raciocinarem matematicamente sobre vários pontos de vista e que lhes permitissem atribuir sentido ao conhecimento matemático que surge quer do trabalho autónomo, quer da discussão e reflexão sobre essas tarefas. Tive também o cuidado de que proporcionassem o desenvolvimento de capacidades transversais e a conexão entre conceitos matemáticos (NCTM, 2008).

Outro elemento que tive em conta na construção das tarefas foram as suas características quanto ao grau de desafio matemático (reduzido/elevado) e quanto ao grau de estrutura (aberto/ fechado) (Ponte, 2005).

Quanto à natureza das tarefas e, mais uma vez, dadas as características da turma, optei sobretudo por tarefas com contextos que pudessem aproximar-se de situações familiares aos alunos. Segundo Ponte e Quaresma (2012), o trabalho em situações contextualizadas com base na realidade, é fundamental para o desenvolvimento dos conceitos e das ideias matemáticas por parte dos alunos, bem como para o desenvolvimento da sua capacidade de usar a Matemática na resolução de problemas. As tarefas puramente matemáticas tiveram como objetivo principal a consolidação de conhecimentos e a familiarização dos alunos com os símbolos e a terminologia das funções que, como já foi referido, juntamente com o estabelecimento de conexões entre *representações*, são as dificuldades mais frequentes dos alunos neste tema.

De forma a potenciar as vantagens desta abordagem de trabalho, preparei as aulas de acordo com uma sequência de ações: antecipação, monitorização, seleção, sequenciação e estabelecimento de conexões matemáticas (Canavarro, 2011), antecipando o que era expectável que acontecesse na aula, principalmente no que toca as diferentes estratégias e possíveis dificuldades dos alunos.

Em continuidade com as opções já mencionadas, as aulas foram realizadas seguindo uma estrutura maioritariamente em três momentos: (1) introdução da tarefa; (2) realização de trabalho autónomo; (3) discussão coletiva e sistematização (Canavarro, Oliveira & Menezes, 2014; Ponte, Quaresma & Branco, 2011).

No primeiro momento da aula, a introdução da tarefa, tentei certificar-me que todos os alunos compreenderam os objetivos, esclarecer eventuais dúvidas levantadas e informar acerca do modo e período de tempo do trabalho autónomo. No momento de trabalho autónomo procurei ter uma intervenção menos ativa, procurando apoiar os alunos nas suas dificuldades, através do questionamento, levando-os a encontrarem a resposta e promovendo a colaboração entre pares sempre que possível. Monitorizei as resoluções e discussões dos pares que foram surgindo e, de acordo com o que fui observando, preparei, de acordo com as mais valias que poderiam trazer, a sequência de resoluções a serem apresentadas. Durante este momento, fui também recolhendo informação que, a partir das dúvidas observadas, me pareceu fundamental levar ao momento de discussão coletiva.

Na seleção das resoluções que serviram de mote ao momento da discussão coletiva, tentei que, quer pela sua diversidade ou pela oportunidade de discutir erros comuns, contribuíssem para a aprendizagem dos alunos e estimulassem a realização de conexões matemáticas, já que "os momentos de discussão constituem, assim, oportunidades fundamentais para a negociação de significados matemáticos e construção de novo conhecimento" (Ponte, 2005, p.16). Durante este momento procurei motivar e moderar a interação entre os alunos procurando que argumentassem para fundamentar os seus pontos de vista e refletissem sobre a sua atividade, de acordo com o que defende Ponte (2005, p. 1) "o que os alunos aprendem resulta de dois fatores principais: a atividade que realizam e a reflexão que sobre ela efetuam".

A sistematização mereceu especial atenção e foi realizada, sempre que possível, recorrendo à participação dos alunos, permitindo que consolidassem conhecimentos e estabelecessem conexões entre os vários conceitos matemáticos abordados revelando a Matemática como um todo interligado (Canavarro, 2011; Canavarro, Oliveira & Menezes, 2014).

A par do trabalho realizado em sala de aula, planei realizar algumas tarefas que os alunos resolvessem em casa. Devido às circunstâncias já mencionadas relativas à pandemia de Covid-19, propus apenas uma tarefa que os alunos entregaram e que devolvi com feedback escrito. Esta modalidade teve o objetivo de identificar o que os alunos estavam ou não a aprender e compreender melhor as suas dificuldades, além disso foi uma tentativa de lhes incutir o hábito de trabalharem em casa, algo que, como já foi referido, é um aspeto da sua formação em que é necessário investir.

As tarefas em sala foram realizadas a pares, uma vez que esta organização do trabalho permite que os alunos beneficiem das interações entre eles e desenvolvam a capacidade de argumentar e justificar as suas ideias e processos matemáticos, apoiando a construção do seu próprio conhecimento, já que "situações que levem os alunos a apoiar os outros e a receber ajuda dos pares constituem experiências ricas na reestruturação dos seus próprios conhecimentos, na regulação das suas aprendizagens, e no desenvolvimento da responsabilidade e da autonomia" (Santos, 2002, p. 2). Para além das vantagens mencionadas, este modo de trabalho foi fácil de implementar pois representou uma continuidade com a abordagem instituída pelo professor titular.

Uma vez que na unidade de ensino das funções, a dimensão gráfica assume uma enorme relevância, seria expectável que uma das estratégias utilizadas fosse a utilização de tecnologia, nomeadamente recorrendo a aplicações visualmente interativas e apelativas, como o GeoGebra. Contudo, como já foi referido, o acesso à sala de computadores desta escola é muito limitado e o uso de telemóveis em sala de aula não era viável. Assim, como forma de contornar esta limitação, recorri, em algumas das aulas, a projeções de resoluções dos alunos e de gráficos sobre o quadro branco. Assim, sobre estas projeções dos eixos cartesianos ou dos gráficos de funções, foi possível os alunos desenharem, assinalarem pontos de referência e explorarem as alterações provocadas pela variação de determinados parâmetros, na representação gráfica da função. Podendo apagar a atividade desenvolvida e, mantendo a base projetada, voltar a fazer nova exploração.

3.5 As Tarefas

Nesta secção, apresento a descrição das tarefas (Anexo 1) e os objetivos principais que estas pretendiam atingir, bem como os conteúdos matemáticos trabalhados em sala de aula.

Fundamental em qualquer proposta pedagógica é a construção/seleção e adaptação criteriosa das tarefas a propor aos alunos pois "as tarefas são um elemento fundamental na caracterização de qualquer currículo, pois elas determinam em grande medida as oportunidades de aprendizagem oferecidas aos alunos" (Ponte, 2005, p. 23). As tarefas são uma ferramenta chave para abrir portas a uma aprendizagem significativa e a uma dinâmica de aula interessante para os alunos, se combinadas com um modo de construção do conhecimento adequado, em particular, quando o objetivo é a observação das estratégias, *representações* e raciocínio matemático desenvolvidos pelos alunos, como é o caso do presente estudo.

Assim, tal como alertam Mata-Pereira e Ponte (2012, p. 83), "é necessário que os alunos sejam incentivados a apresentar justificações, ainda que sem o rigor associado à demonstração matemática formal". E, para isso, Ponte e Sousa (2010) afirmam que é necessário "partir de tarefas apropriadas, matematicamente ricas, mas suscetíveis de ser entendidas pelos alunos e, principalmente, manter um discurso que convide à participação, justificação e reflexão por parte dos alunos" (p. 32).

As tarefas de exploração e as tarefas de investigação serão, à partida, adequadas para promover o desenvolvimento do raciocínio matemático, pois na realização da atividade por elas proposta "temos, por um lado, a formulação de conjeturas (sobre um objeto específico ou genérico), apoiada numa razão e, por outro lado, a definição de uma estratégia de teste de uma *conjetura*" (Ponte & Sousa, 2010, p. 31).

Por exemplo, de acordo com Carraher, Martinez & Schliemann (2008), para a formulação de generalizações é necessário que as tarefas propostas estejam associadas a situações exploratórias que envolvam ou suscitem a criação de casos particulares com características passíveis de generalizar a um conjunto mais alargado de dados.

Assim, a par de uma abordagem predominantemente de ensino-aprendizagem exploratório, como tendência geral do meu trabalho, recorri a um ensino mais direto ou expositivo apenas quando necessário. Desta forma, e de acordo com Ponte (2005, p. 16) "a realização de tarefas abertas, de carácter exploratório e investigativo é um elemento marcante neste tipo de ensino", referindo-se ao ensino exploratório. Deste modo, decidi apostar em tarefas de natureza diversificada, privilegiando uma abordagem de caracter exploratório.

As tarefas propostas aos alunos foram desenvolvidas por mim, sendo que algumas foram adaptadas de materiais já existentes. Concebi estas tarefas tendo presente elementos de ordem curricular (indicações constantes dos documentos curriculares oficiais), os materiais e recursos disponíveis, os conhecimentos prévios dos alunos e as características específicas desta turma. Ao enunciar as questões tive como principais preocupações:

- que fossem de interpretação clara;
- que explorassem situações que permitissem à turma a aquisição de conhecimentos relativos à unidade de ensino;
- que estimulassem *processos de raciocínio matemático* como a formulação de *conjeturas*, a *generalização* e a *justificação*.

De referir que no ano letivo em que realizei este estudo, a carga horária semanal dedicada à disciplina de Matemática, no 8.º ano da EBSPAN, diminuiu de 5 para 4 tempos semanais de 45 minutos. Esta redução, refletiu-se numa planificação em que os tempos dedicados às várias unidades de ensino foram encurtados e, dos 15 tempos sugeridos no Programa e Metas (MEC, 2013) para a unidade didática “Gráficos de funções afins”, apenas foram disponibilizados 12 tempos.

Este aspeto, juntamente com o facto de o professor titular da turma ser o mesmo do ano anterior e, portanto, ter sido uma preciosa fonte de informação relativamente aos conteúdos lecionados e às dificuldades dos alunos evidenciadas no ano anterior, optei por não realizar uma ficha diagnóstico inicial, numa tentativa de ganhar algum tempo.

À semelhança da estrutura com que os alunos estão familiarizados, todas as tarefas terminam com um espaço em branco delimitado, onde os alunos devem registar os conceitos abordados e sintetizados no final da aula.

Para além das tarefas para realizar em sala de aula, efetuei também uma tarefa a ser realizada como trabalho de casa, numa tentativa de que os alunos consolidassem conhecimentos e adquirissem hábitos de trabalho extra-aula, que como já foi referido, é um dos problemas identificados nesta turma. A ideia inicial apontava para a realização de mais uma tarefa a realizar em casa, contudo, com os acontecimentos derivados da pandemia de Covid-19, os alunos acabaram por realizar em casa parte da tarefa 3 e as duas tarefas restantes que estavam previstas para a sala de aula.

3.5.1 Tarefa 1 | Os gráficos contam histórias

Como esta tarefa (Anexo 1.1) seria trabalhada na primeira aula de uma nova temática (funções), foi elaborada com o objetivo de retomar os conteúdos do 7.º ano e avaliar a capacidade de leitura gráfica dos alunos.

A questão 1 foi inspirada em parte da tarefa 8 “Passeio a pé” de Ponte, Matos e Branco (2009b), a qual já havia sido adaptada de um trabalho de Driscoll, (1999).

Esta é uma questão de natureza exploratória, que pode trazer um grau de desafio acrescido pelo facto de os alunos terem de interpretar dois gráficos em simultâneo. No entanto a principal dificuldade reside no caráter mais aberto relativamente ao que é pedido, já que podem surgir interpretações distintas que resultem em respostas diferentes. Constituída por duas questões relativas à leitura gráfica de uma situação em contexto real, a sua finalidade principal é rever a capacidade de interpretação gráfica e relembrar que situações de proporcionalidade direta podem ser modeladas por funções, ditas funções de proporcionalidade direta. Os objetivos mais específicos, são;

- Observar a relação entre duas grandezas no plano cartesiano e expressar a relação existente por meio de expressão algébrica e no plano cartesiano;

- a interpretação da variação de grandezas atendendo ao contexto;
- a partir do gráfico, identificar uma imagem dado um objeto e vice-versa;
- relembrar a noção de função como relação entre duas variáveis;
- identificar a função constante.

Na primeira questão (1.1.) é esperado que os alunos interpretem informação em dois gráfios que simulam a história de uma caminhada e que relacionem estes dois gráficos, trazendo um desafio acrescido à questão. A partir da interpretação da variação da distância em função do tempo, é possível que os alunos associem intuitivamente a velocidade com a inclinação da reta que descreve o movimento. Os alunos devem identificar os objetos correspondentes às imagens a partir da observação gráfica e interpretarem a relação entre as variáveis. Na discussão desta questão será ainda oportuno rever noções tais como variável dependente e independente, apesar destes conceitos não estarem explícitos na questão.

Na questão 1.2. pede-se aos alunos que modelem graficamente uma nova função que represente a variação da distância ao longo do tempo, relativamente a um ponto de referência (casa do Mário). Desta forma espera-se que os alunos convertam a informação apresentada em linguagem natural para linguagem gráfica, mostrando compreensão da noção de dependência.

A questão 2 foi construída com base na tarefa 7 da ficha diagnóstica de Teixeira (2016) e, embora contemple apenas noções já trabalhadas no ano anterior, considero que tem um grau de desafio mais elevado, uma vez que os alunos necessitam de mobilizar o conhecimento de conceitos com os quais já não têm contacto há bastante tempo, tendo de efetuar conversões entre as várias *representações* da função de proporcionalidade direta.

Foi concebida de modo a contemplar conceitos estudados no 7.º ano e a explorar as diferentes *representações* de uma função. Com base nos dados de uma situação de contexto real, apresentados na forma tabular, é pedido que os alunos convertam a informação numa representação gráfica de uma função. Assim serão convocados a recordar as características do gráfico de uma função deste tipo, como um gráfico de pontos representados por um par ordenado, em que o primeiro elemento é designado por abcissa e o segundo por ordenada, e que estão alinhados sobre uma reta que passa na origem do referencial (questão 2.1.). Devem ainda interpretar essa representação como uma relação de proporcionalidade direta através da observação gráfica (questão 2.2.) e expressar essa compreensão algebricamente (questão 2.3).

Na questão 2.4. os alunos são chamados a reconhecer a expressão algébrica de uma função de proporcionalidade direta, demonstrando capacidade de *generalização*, de compreensão da relação entre as variáveis e da noção de constante de proporcionalidade direta associada a um contexto (distância percorrida num segundo). Este momento poderá ser oportuno para apelar à perceção de que a imagem de zero é zero e de que a imagem de um é a constante de proporcionalidade.

Esta tarefa foi também estruturada de forma a que noções como objeto, imagem, domínio e contradomínio surgissem com naturalidade a partir da discussão de todas as questões e em particular da última (2.5.), onde o objetivo é que os alunos determinem, a partir de uma imagem dada, o objeto correspondente usando a expressão algébrica.

3.5.2 Tarefa 2 | Sequências gráficas

Esta tarefa (Anexo 1.2) foi adaptada de uma tarefa da brochura da Álgebra de Ponte, Branco e Matos (2009a, p. 123).

A tarefa é de natureza exploratória e aberta, podendo suscitar diferentes estratégias por parte dos alunos abrindo caminho à construção de novos conceitos, já que é o primeiro contacto dos alunos com a função afim. Considero o seu grau de dificuldade elevado, pois as coordenadas dos pontos marcados nem sempre são muito explícitas, sendo necessário que os alunos procurem regularidades e estimem valores para responderem às questões. Além disso nesta tarefa a letra surge como número generalizado, como incógnita, na resolução de equações simples e como variável.

Esta tarefa foi realizada com a propósito principal de introduzir a função afim a partir da observação de sequências, de modo a estabelecer ligação entre tópicos já que, de acordo com Ponte, Branco e Matos (2009a), o trabalho de cunho exploratório realizado com o estudo de sequências, que em particular são funções de variável natural, estimula a procura de relações entre objetos, apelando ao desenvolvimento das capacidades de abstração e de *generalização*. Este facto contribui para o desenvolvimento da compreensão das noções de variável e de função baseado na noção de variação e relação entre variáveis. Esta tarefa foi ainda concebida para facilitar o entendimento do domínio como sendo as ordens da sequência e interpretar a extensão desse domínio quando passamos de uma sequência numérica para uma função real de variável real.

Nesta tarefa os alunos têm contacto com uma questão que envolve relações entre variáveis, e podem, com o apoio de um slide previsto para esta aula, observar a translação responsável pela obtenção da função afim a partir da função linear.

A tarefa é constituída por questões que envolvem a interpretação de uma situação contextualizada em linguagem natural e apoiada graficamente pela representação de alguns pontos que servirão de ajuda à representação algébrica de funções afim, uma linear e outra não linear.

Além de reforçar a distinção entre relações de proporcionalidade direta e relações que não são de proporcionalidade direta, esta tarefa tem como objetivos principais:

- Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano, explorando visualmente o comportamento das relações lineares;
- analisar graficamente funções afim e compreende-la como a translação da função linear;
- relacionar declives com a inclinações das retas e com a distância percorrida por segundo;
- Compreender o coeficiente de proporcionalidade de grandezas diretamente proporcionais;
- representar algebricamente funções afim;
- compreender o significado de ordenada na origem.

Inicialmente pretende-se que os alunos façam corresponder à situação descrita a respetiva representação gráfica e interpretem corretamente os gráficos para responderem às questões 1.2. e 1.3., nomeadamente pretende-se que os alunos interpretarem o ponto de interseção dos gráficos no contexto da tarefa.

Na questão 1.4. os alunos deverão determinar quantos metros por segundo percorre cada uma das amigas, sendo nesta questão relembrados da noção de constante de proporcionalidade direta e confrontados com a impossibilidade de usar o mesmo cálculo para a representação da corrida da Rita. Assim, espera-se que constatem que num dos casos estão perante uma situação de proporcionalidade direta e no outro não, apesar de existir uma taxa de variação constante em ambas – a velocidade média. Os alunos devem entender que este facto se deve à existência de um avanço inicial.

Na questão 1.5. os alunos devem interpretar a velocidade média encontrada anteriormente, como o declive, para escrever a expressão algébrica que representa a corrida da Larissa. Depois devem encontrar uma estratégia que lhes permita determinar a mesma expressão, mas no caso da corrida da Rita, verificarão que não basta uma expressão do tipo da anterior, devem associar o avanço inicial à ordenada na origem, partindo para o processo de *generalização* formal.

Na questão 1.6., os alunos serão chamados a reunir a informação que foram obtendo ao longo da tarefa e a explorar simultaneamente duas funções afins (linear e não linear) e argumentar acerca das diferenças entre as duas situações. Esta questão é crucial pois os alunos começam a trabalhar com funções lineares e a função afim é introduzida a partir de um avanço fixo, o qual devem associar ao termo independente. Aqui os alunos deparam-se com duas funções paralelas cujo valor do declive é o mesmo, facilitando a introdução da função afim a partir da translação de uma função linear. Há, assim, oportunidade para fazer a conexão entre dois tópicos matemáticos: funções e isometrias. Assim, para a discussão preparei um slide com as *representações* gráficas destas funções, onde fosse evidente que se tratam de duas semirretas paralelas que têm a mesma inclinação relativamente à parte positiva do eixo das abcissas, apesar de uma passar na origem do referencial e outra não, tornando claro que a representação gráfica de uma função afim resulta da translação da representação gráfica de uma função linear, segundo um vetor com direção perpendicular à reta que a representa (e reciprocamente) e em que a extremidade desse vetor coincide com o ponto em que a representação gráfica da função afim interseta o eixo das ordenadas.

3.5.3 Tarefa A | A poupança da Laís

Esta tarefa (Anexo 1.3) foi elaborada para que os alunos a resolvessem em casa, tendo a oportunidade de, autonomamente, confrontarem as suas dúvidas, consolidar os conceitos que vêm sendo trabalhados em aula, explorar a função afim e estimular o estudo fora da sala de aula.

Assim esta tarefa tem um contexto mais simples, questões mais diretas e um caracter mais fechado do que as realizadas em aula, para que existisse uma maior adesão por parte dos alunos. Já que, dada a natureza dos alunos e as suas dificuldades, poderiam facilmente desinteressar-se de uma tarefa que lhes parecesse mais complicada, sabendo que não teriam o apoio dos colegas nem a professora para esclarecer dúvidas.

De um modo geral, pretendi que os alunos, identificassem num contexto concreto, conceitos e noções basilares do tema Funções. O contexto de realidade ajuda a que os alunos consigam relacionar o valor independente da expressão algébrica de uma função afim com um valor fixo, independente do número de meses de poupança para, desta forma, construírem o conhecimento mais facilmente.

As duas primeiras questões têm como objetivo fazer emergir a expressão de uma função afim, com a qual os alunos já terão sido confrontados na tarefa anterior. Através de uma correta interpretação das variáveis envolvidas neste contexto, os alunos, trabalhando com um valor inicial de 350 euros, obtém a expressão da função.

A questão 1.3. tem como foco a transformação da representação algébrica para a representação gráfica da função afim através do cálculo da imagem dos 10 primeiros meses. Foi intencional não identificar o referencial cartesiano para poder detetar possíveis dificuldades que ainda surjam no reconhecimento das variáveis dependente e independente, objeto e imagem, domínio e contradomínio, coeficiente de x e termo independente.

Na questão 1.4., os alunos poderão responder efetuando uma manipulação algébrica da expressão e obtendo o valor de t, ou poderão fazer a leitura do gráfico que efetuaram na alínea anterior o que me permitirá ter alguma noção do tipo de representação privilegiada pelos alunos.

Na questão 1.5., o principal objetivo é que os alunos identifiquem que a nova função, sem a ajuda inicial da avó, se trata de uma função linear e reconheçam as características algébricas que a distinguem da função afim.

3.5.4 Tarefa 3 | Gasóleo com talão de desconto

Esta tarefa foi adaptada das tarefas 4 e 5 “Gasóleo em promoção” de Matos (2007). A tarefa foi inicialmente concebida para ser efetuada pelos alunos em aula (Anexo 1.4), contudo, devido ao encerramento das escolas a 13 de março, acabou por ser realizada em aula apenas até à questão 1.5., sendo que a continuidade da resolução foi feita virtualmente. Este facto obrigou a que a tarefa como está apresentada inicialmente (Anexo 1.4), sofresse algumas alterações, a partir da questão 1.6. (Anexo 1.5), de modo a tornar-se mais dirigida e, portanto, mais acessível aos alunos em trabalho à distância, já que uma tarefa mais aberta poderia levá-los facilmente ao desinteresse, principalmente por não terem com quem partilhar e discutir as suas dúvidas.

Assim procederei à descrição e análise da tarefa 3 na sua versão inicial e depois comentarei a versão enviada aos alunos já em fase de pandemia de Covid-19.

O propósito principal desta tarefa foi o de reforçar os aspetos que distinguem situações de proporcionalidade direta, ou não. Teve ainda como objetivos:

- Conferir significado aos conceitos de declive, ordenada na origem e tornar clara a relação entre conjuntos;
- Reconhecer a imagem de um objeto e vice-versa;
- Representar e analisar graficamente funções afins;
- Representar algebricamente funções afim.

Nesta tarefa os alunos exploram uma primeira situação onde não existe uma relação de proporcionalidade direta entre as variáveis, devido a um talão de desconto e, em seguida, uma outra em que essa relação passa a existir. É constituída por questões relativas à modelação de duas situações contextualizadas e que servem de base às *representações* gráficas e algébricas de funções afim, uma linear e outra não linear. Pretende-se sobretudo que sejam trabalhadas as diferentes formas de representação das relações funcionais, a alternância entre elas e as potencialidades de cada uma.

As duas funções modelam matematicamente situações reais, sendo que na primeira, o modelo deixa de fazer sentido, para a situação em que, para um reduzido número de gasóleo colocado (4,1(6) litros), o valor do desconto seria superior ou igual ao valor a pagar. Assim, esta tarefa permite fazer a exploração do significado de domínio da função, da sua extensão e analisar e sistematizar os aspetos mais formais relativos à função afim.

Como já foi referido, esta tarefa sofreu alterações de modo a facilitar o trabalho autónomo dos alunos em casa. Assim, podemos ver que na segunda versão (Anexo 1.5), as questões 1.6. e 1.7. se mantêm, mas agora são complementadas com dicas (a azul), que pretendem alertar os alunos para certos pormenores ou esclarecer dúvidas comuns de modo a tentar substituir um pouco o que poderia ser o meu trabalho de apoio complementar à ficha, feito em aula. A questão 1.7. beneficia ainda de três opções de resposta, de modo a diminuir o grau de dificuldade.

A questão 2 cujo principal objetivo é a relação entre duas funções, uma de proporcionalidade direta e outra em que essa relação não existe, concluindo com a análise da situação mais vantajosa em determinado contexto, também foi complementada com dicas, inclusive o referencial cartesiano apresentado na primeira versão da tarefa foi melhorado e complementado com a representação gráfica da 1º função de modo a facilitar a comparação visual das duas funções e a perceção de que, no caso da função linear, a ordenada na origem é sempre zero. Na 2.ª versão da tarefa foram ainda adicionadas mais duas questões com o objetivo de conduzir os alunos no caminho a percorrer para concluir acerca das relações pretendidas.

Por fim, pretende-se que os alunos explorem simultaneamente as duas funções afins (lineares e não lineares), compreendendo o ponto de interseção dos gráficos ou decifrando o significado da igualdade das suas expressões algébricas. Esta tarefa pretendia ainda, que os alunos compreendessem que apesar de o declive estar presente tanto na função afim como na função linear, o modo de o determinar pode ser diferente.

Quando esta tarefa foi enviada aos alunos para que a terminassem em casa, tive o cuidado de enviar também a resolução da primeira parte (a verde), efetuada na última aula presencial, bem como a resolução das questões extra que foram surgindo ao longo da aula e que muito contribuíram para o enriquecimento da tarefa. Quando necessário, houve também o cuidado de acrescentar notas (a laranja) de modo a chamar a atenção dos alunos para os aspetos mais formais envolvidos nas questões.

Mais tarde, foi enviada aos alunos uma proposta de correção integral da tarefa, incluindo comentários e chamadas de atenção para que pudessem confrontar com a sua própria resolução (Anexo 1.6).

3.5.5 Questão de Aula

A Questão de Aula (Anexo 1.7), foi realizada tendo por base o exemplo 11 da página 135 da brochura da Álgebra de Ponte, Branco e Matos (2009a). Esta tarefa foi realizada com o propósito de avaliar os alunos e, seguindo a linha do que havia sido feito até então, é de natureza exploratória e refere-se a uma situação contextualizada, modelada por uma função afim não linear e representada por uma tabela.

A última pergunta, revisita a função linear no mesmo contexto anterior e serve para verificar a capacidade dos alunos em analisar as duas situações, comparando-as.

Com esta tarefa pretendo compreender se os alunos compreendem as diferentes *representações* de relações funcionais e a sua destreza em realizar mudanças de representação, bem como as suas preferências em termos de representação, quando necessitam de interpretar uma relação funcional.

Para além destes objetivos, a Questão de Aula tem o propósito de perceber a capacidade de os alunos identificarem uma imagem dado um objeto e de determinarem um valor fixo do ordenado (associado à ordenada na origem) e um valor variável do mesmo (associado ao declive) promovendo a compreensão do significado das duas constantes encontradas, quer no contexto do problema, quer gráfica e algebricamente, nas questões c) e d).

Os alunos deverão verificar quer algébrica quer graficamente que apesar de existir uma variação constante do ordenado, esta situação não representa uma função de proporcionalidade direta. Embora não seja solicitado, os alunos poderão recorrer à representação gráfica da primeira situação e perceber que, pelo facto de o número de carros ser um valor discreto, será um conjunto de pontos isolados.

3.5.6 Tarefa 4

Quando elaborei esta tarefa estava previsto que fosse realizada em sala de aula, contudo devido aos factos já relatados, foi adaptada (Anexo 1.8) e enviada aos alunos para resolverem autonomamente em casa. Por este motivo, esta tarefa tem um caracter mais direto e fechado e ainda inclui algumas dicas com pormenores importantes a ter em conta na resolução das questões.

O objetivo principal desta tarefa é a consolidação dos conhecimentos adquiridos nas aulas anteriores e a familiarização com a simbologia e terminologia desta unidade didática através da relação entre as *representações* gráfica e algébrica de funções afins. Esta tarefa serve ainda para que os alunos:

- Associem uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano;
- Comparem e explorem a representação da relação linear no plano cartesiano;

- Utilizem a noção de equação de 1º grau com duas variáveis para comparar e explorar a representação da relação linear;
- Reconheçam e explorem a representação de grandezas proporcionais no plano cartesiano.

De modo a diversificar a natureza das tarefas efetuadas anteriormente, as questões desta tarefa foram formuladas num contexto puramente matemático.

A tarefa começa por contrapor as *representações* gráficas de duas funções afins, uma com declive positivo e outra com declive negativo e na primeira questão é pedida a transferência de representação de cada uma das funções para a representação algébrica.

Na segunda questão pretendo que os alunos identifiquem a ordenada na origem e na terceira os alunos devem perceber a terminologia associada aos conceitos de imagem e objeto da função e perceberem que estão a obter pontos pertencentes à mesma função a partir de dados diferentes. Neste caso, os alunos poderiam ainda mobilizar diferentes tipos de abordagem, podendo determiná-los por observação do gráfico ou pela resolução da equação da reta.

A questão 1.4. tem o objetivo da resolução de uma equação para determinar o objeto correspondente à imagem 8, uma vez que não é possível ser observado graficamente.

Mais uma vez, na questão 1.5. é solicitada a conversão entre *representações*. Neste caso, é pedida a representação gráfica da função afim, a partir de dados suficientes que a caracterizam. Deste modo, através da *justificação* pedida, os alunos são solicitados a demonstrem o seu conhecimento acerca dos significados dos conceitos de declive e ordenada na origem (as letras a e b). Nesta questão juntamente com a questão 1.6., os alunos devem perceber as diferenças das *representações* gráficas e simbólicas da função afim e linear, trabalhando a noção de declive e o efeito que este provoca na representação gráfica da função, associando o paralelismo de duas retas ao mesmo declive.

A questão 1.6., não permite que a observação seja feita graficamente, pelo que o aluno terá mais uma vez de, representar a função algebricamente. Esta questão é um pouco mais complexa, pois exige dois passos, primeiro obter a expressão e posteriormente a substituição das coordenadas do ponto nessa expressão. Esta insistência na expressão algébrica da função é propositada para que os alunos possam compreender, treinar e distinguir processos já que, como foi anteriormente dito, é um dos aspetos mais difíceis para os alunos. Com esta questão, os alunos têm ainda a oportunidade de mobilizarem os seus conhecimentos de equações, realizando conexões matemáticas e apelando ao raciocino e à compreensão de quem desempenha o papel de variável independente e dependente.

Na última questão da tarefa pretendo que os alunos demonstrem o seu conhecimento da função linear, já que sabendo que a sua representação tem de passar no ponto (0,0), percebam que tem todos os dados necessários para traçar o gráfico. A sequência das questões 1.5. a 1.7. permite aos alunos confrontarem-se com o facto de que, para desenharem a função afim, precisam de dois pontos e no caso da função linear apenas necessitam de um ponto dado.

A proposta de correção desta tarefa, incluindo comentários e chamadas de atenção, foi enviada aos alunos para que pudessem confrontar com a sua própria resolução (Anexo 1.9).

Esta tarefa, embora de natureza menos desafiante, não deixa de ser relevante para os alunos, uma vez que na fase em que estávamos da unidade era imprescindível que se familiarizassem com os processos, com os conceitos e terminologias, para depois poderem aplicar com maior rigor esse conhecimento a situações problemáticas.

3.5.7 Tarefa 5 | A bateria a descarregar

À semelhança da tarefa anterior, também esta deveria ter sido realizada em sala de aula, contudo devido aos factos já relatados, teve de ser adaptada (Anexo 1.10) e enviada aos alunos para resolverem autonomamente em casa. Assim, tornou-se numa tarefa com um caracter mais direto e fechado, do que o inicialmente previsto, inclui ainda algumas dicas com pormenores importantes a ter em conta na resolução das questões.

Apesar de a ideia de usar uma bateria a descarregar nesta tarefa ter surgido de uma tarefa explorada pela equipa da Nova Escola (março, 2018), foi totalmente reformulada por mim com o intuito de cobrir os objetivos desejados neste momento da unidade didática.

A partir de um contexto familiar aos alunos pretendi que eles compreendessem as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e pudessem experienciar essas relações numa função com declive negativo em contexto real, compreendendo como varia a carga da bateria com o tempo. Assim, esta tarefa pretende que os alunos se envolvam numa modelagem simples, que lhes permitirá obter compreensão acerca da vida útil da bateria de um telemóvel em função do tempo, descrevendo matematicamente a situação o que é apresentada em linguagem natural.

Esta tarefa apela à compreensão de como os alunos podem utilizar as funções para resolver problemas da vida real e de situações próximas da sua realidade. Os objetivos particulares desta tarefa, são:

- Verificar que a reta traduz o conjunto solução para todos os possíveis valores de uma equação de duas incógnitas $y = ax + b$;
- Representar algebricamente e graficamente a função afim;
- Analisar as relações entre o crescimento ou o decrescimento com o coeficiente da variável independente e a noção de declive.

- Compreender o efeito da variação dos parâmetros a e b na representação gráfica de funções do tipo $f(x) = ax + b$.

Na questão 1.2., é feito o apelo à *generalização* que implica a compreensão gráfica da situação descrita e a questão 1.3. é um desafio a que os alunos percebam a impossibilidade de cada uma das opções apresentadas e cheguem eles à expressão algébrica que relaciona a carga da bateria com o tempo. As duas questões anteriores serviram também para que os alunos tivessem oportunidade de compreender e treinar o processo que leva à *generalização*.

A questão 1.4. pretende que os alunos compreendam o significado de igualar a zero a expressão encontrada e o seu significado no contexto do problema.

A questão 2.1. é um apelo à compreensão do conceito de restrição ao domínio e contradomínio, aplicado à situação prática descrita. Esta questão foi elaborada para que em aula os alunos compreendessem como é que a limitação do conjunto dos objetos é impactante no conjunto das imagens.

Na questão 2.2. pretende-se que os alunos compreendam o significado da percentagem de carga que descarrega por minuto como o declive da nova função e que relacionem a sua representação algébrica e gráfica, usando a primeira para chegar à segunda e conectando assim as duas *representações*. Esta questão evoca ainda o trabalho com equações, o uso da substituição de variáveis por valores concretos e mobiliza o trabalho com percentagens de modo a modelar novas situações. Mais uma vez apela-se ao raciocínio e às conexões matemáticas para a sua resolução.

Na questão 2.3. os alunos devem comparar os declives das duas funções e perceber a sua relação com a percentagem de carga que descarrega por minuto em cada um dos casos.

A proposta de correção desta tarefa, incluindo comentários e chamadas de atenção, foi enviada aos alunos para que pudessem confrontar com a sua própria resolução (Anexo 1.11).

3.6 As Aulas

Nesta secção apresentarei uma síntese reflexiva das aulas lecionadas, explicando como decorreram e se foram ou não conseguidos os objetivos propostos para cada aula.

3.6.1 Aula 1 (45 minutos) | 2 de março de 2020

Esta aula foi planeada (Anexo 2.1) com o objetivo de recordar conceitos trabalhados no 7º ano de escolaridade, nomeadamente o conceito de função e de variável dependente e independente, tendo como ponto de partida a interpretação gráfica de funções.

Esta aula iniciou-se com a disposição dos alunos pelos respetivos lugares, já que foi a aula seguinte ao teste de avaliação, o que juntamente com a agitação provocada pela logística montada (câmara de filmar), fez prolongar um pouco este momento.

Já que esta foi a primeira aula sobre o tema das funções, deste ano letivo, comecei por questionar a turma acerca do seu conhecimento sobre grandezas que se relacionam, solicitando um exemplo. Perante a já esperada ausência de respostas, resolvi ser eu a dar um exemplo como forma de desbloquear a interação. Optei por um exemplo em que as duas grandezas não se relacionavam (O peso de peras comprado com o valor de parquímetro a pagar), esperando confrontar os alunos com a sua interpretação da realidade e assim, promover uma pequena discussão, à qual os alunos responderam entusiasticamente. Os alunos perceberam que essas grandezas não se relacionam e deram exemplos de grandezas que se relacionam (por exemplo o tempo que o carro está estacionado com o valor de parquímetro a pagar) e identificaram qual delas depende da outra. Aproveitando esse entendimento questionei os alunos:

- Como podemos falar de duas variáveis que se relacionam, em que uma depende da outra? Como podemos dizer isto de outra forma?

E na falta de respostas, dizendo:

- Podemos dizer que uma variável é função de outra.

Distribuí a primeira página da tarefa 1 e referi a importância de justificarem todas as estratégias usadas, dando indicação de que deveriam realizar a primeira tarefa a pares, em 15 minutos. Lembrei que não deviam apagar ou rasurar o que realizassem durante o trabalho autónomo, fazendo as correções ou anotações ao lado. Expliquei também que durante estas aulas filmadas, todas as tarefas seriam recolhidas no final de cada aula e entregues no início da aula seguinte.

Projetei os gráficos da tarefa 1 e li o enunciado, questionando se todos compreendiam o que era pedido e se entendiam o que estava representado em cada um dos gráficos.

Os alunos deram início ao trabalho autónomo, durante o qual, privilegiando o questionamento e a interação entre os alunos, pude testemunhar alguns diálogos interessantes dos pares de alunos, que indicavam que, na generalidade, a tarefa estava a ser compreendida.

Os alunos mostraram-se empenhados durante todo este momento e, no que toca à questão 1.1., pude perceber que a maioria dos alunos não teve grande dificuldade em interpretar a secção em que o gráfico se fazia representar por um segmento de reta horizontal, afirmando que representava um período de tempo em que o Mário esteve parado. As maiores dificuldades surgiram do facto da resposta ser aberta, o que provocou alguma insegurança nalguns pares, que estavam na dúvida se poderiam ou não completar a sua história. Nestes casos fui dando dicas que poderiam acrescentar pormenores à história: O Mário caminhou sempre à mesma velocidade? Podes determinar a velocidade média a que o Mário andou?

Quando chegou a casa do amigo, como estava o seu estado e fome? Escolhe um ponto sobre o gráfico e descreve o que representam as suas coordenadas.

Na resolução da questão 1.2. também não surgiram grandes dificuldades, ainda assim este momento da aula foi prolongado por mais uns minutos para dar oportunidade a todos de explorar os gráficos de modo a descobrir mais interpretações possíveis.

A discussão da questão 1.1., teve início com a ida ao quadro de um aluno, que fez a leitura da história elaborada pelo par. Por sugestão minha, esse aluno, ao mesmo tempo que lia, foi indicando, nos gráficos projetados, os fatores que lhe permitiam fazer tais afirmações. Pedi a outro par, que tinha elaborado uma história mais completa, para ler a sua e questionei a turma acerca de possíveis diferenças que tivessem relativamente às histórias lidas. Na ausência de divergências ou acréscimos e, para me certificar que todos tinham entendido o que havia sido dito resolvi lançar algumas questões à turma:

- O aluno Rui referiu que o Mário caminhou mais depressa na segunda parte do percurso do que na primeira, antes de parar. Porque acham que ele disse isso? Como observam isso observando o gráfico?

E obtive respostas interessantes: - “A reta está mais assim”, fazendo o gesto com o braço, referindo-se à inclinação da reta, ou: - “No mesmo período de tempo, o Mário percorreu mais distância.”

À questão: - Quanto tempo esteve o Mário a caminhar? Obtive a resposta: “5 horas” da generalidade da turma. Contudo esta resposta foi rapidamente corrigida e explicada por uma aluna, que respondeu: “4 horas”.

Quando foram questionados acera do que estava a acontecer ao Mário num ponto específico do seu percurso, os alunos, embora recorrendo a linguagem não matemática, também foram capazes de identificar as coordenadas do ponto e relacionar os dois gráficos para responder à questão.

Para esta aula estava ainda planeada a discussão da questão 1.2., mas pelo atraso verificado no início da aula, esta discussão foi deixada para a aula seguinte.

Reflexão

A aula, na sua globalidade correu bem. Embora o plano de aula não tenha sido cumprido na totalidade, os alunos, quando solicitados, foram participativos na discussão e demonstraram compreensão na interpretação gráfica. Contudo, penso que, dada a compreensão que os alunos demonstraram, teria sido possível recuperar o tempo perdido inicialmente, não concedendo mais tempo para o trabalho autónomo, que afinal se verificou pouco fértil e também conferindo maior ritmo à discussão coletiva da questão 1.1.. Este momento da aula, embora se tenha revelado muito interessante e me tenha permitido observar as conquistas dos alunos, não necessitava de ser tão explorado, agilizando o processo.

Um momento muito positivo da aula foi sem dúvida o exemplo inicial que dei de duas grandezas que não se relacionavam, o que, ao promover um conflito cognitivo nos alunos, imediatamente os despertou para o tema.

Após esta pequena provocação, coloquei a questão:

- Como podemos falar de duas variáveis que se relacionam, em que uma depende da outra? Como podemos dizer isto de outra forma?

Concluí que esta abordagem não foi a melhor opção, não surtindo o efeito desejado e tendo eu que introduzir a palavra função na discussão. Para facilitar esta abordagem penso que deveria ter dado um exemplo familiar em que as variáveis se relacionassem, sugerir aos alunos que dessem outros exemplos e a partir daí promover uma pequena discussão coletiva, estimulando os alunos a utilizarem linguagem que recordavam acerca do tema das funções.

De qualquer modo penso que a introdução ao tema foi positiva e suficiente para que a generalidade da turma começasse a revisitar os seus conhecimentos sobre funções. Isso tornou-se muito visível, na fase de trabalho autónomo em que, através do questionamento dei espaço aos alunos para trocarem entusiasticamente ideias com os pares, estimulando o desenvolvimento da sua argumentação e, consequentemente, da sua comunicação matemática.

Um momento menos conseguido que vejo agora, a esta distância, foi o prolongamento do trabalho autónomo, que não teria sido necessário porque na verdade a maioria dos pares não acrescentou detalhes ao que já havia escrito e este tempo teria sido fundamental para terminar a discussão da tarefa 1, como referi anteriormente.

Apesar de não ter concluído a discussão da questão 1.2., como previsto, considero que os objetivos da aula, devido ao tempo que foi dado para a exploração das particularidades da tarefa e para a discussão da resolução da questão 1.1., foram atingidos. Os alunos relembraram a noção de função e a interpretação e construção de um gráfico de uma função, além disso os alunos tiveram oportunidade de identificar graficamente uma relação de proporcionalidade direta e identificaram a função constante.

3.6.2 Aula 2 (45 minutos) | 4 de março de 2020

Dado o pequeno atraso verificado na aula anterior, a planificação inicial desta aula sofreu um ajuste de modo a contemplar a discussão da questão 1.2. da tarefa 1, iniciada na aula anterior. A nova planificação encontra-se no Anexo 2.2.

Uma vez que havia recolhido as produções dos alunos na aula anterior, pude verificar que esta questão não levantou grandes dúvidas e que todos apresentavam cenários muito idênticos e possíveis. Assim, iniciei a aula com a redistribuição das tarefas e a projeção do referencial da questão 1.2. e solicitei à aluna Sónia que fosse representar a sua versão gráfica da história. Para esta discussão preparei uma alternativa e representei-a no referencial com o intuito de produzir um desafio cognitivo aos alunos, desenhando um segmento de reta vertical em representação do percurso de retorno a casa. A generalidade da turma acabou por referir a impossibilidade da minha representação, uma vez que o Mário não poderia estar a duas distâncias diferentes de casa no mesmo momento. Relembrei aqui o ponto e as suas coordenadas, representando dois pontos sobre o segmento de reta vertical e solicitando à turma que identificasse as coordenadas desses pontos e verificasse que ambos tinham a mesma abcissa.

Como previsto no plano de aula, aproveitei esta discussão para recordar as noções de variável dependente e independente: "A distância está a depender do tempo, portanto não pode variar sem que o tempo varie". Percebi nesta discussão que embora os alunos apresentassem uma boa capacidade de interpretar as situações intuitivamente, a maioria não usava linguagem matemática para se explicar e não recordava o significado dos termos matemáticos envolvidos. Assim, desenhei no quadro um diagrama de setas que pretendia representar a solução gráfica apresentada por mim e usei-o como exemplo para, sempre questionando a turma, abordar os conceitos de objeto e imagem, domínio e contradomínio e representei nesse diagrama os dois pontos identificados anteriormente na reta vertical, para que pudessem observar que não se trata de uma função.

Esta discussão acabou por se prolongar mais do que o previsto e o facto de me aperceber no decorre da aula de que não ia cumprir o plano, levou-me a incutir mais ritmo no final da aula.

Sistematizei ditando a definição de função e solicitando que a escrevessem no espaço destinado a isso no final da tarefa e o facto de tentar acelerar esta fase da aula levou a que grande parte da turma não conseguisse acompanhar o que me obrigou a várias repetições na leitura, perda de ritmo da aula e alguma agitação por parte dos alunos.

Projetei a tabela de dados da tarefa 2, li o enunciado e coloquei algumas questões indicativas da compreensão que os alunos fizeram da transposição da linguagem natural para a representação tabular.

Dei início ao trabalho autónomo com as indicações habituais do modo de trabalho e tempo para realizarem a tarefa 2. Nesta altura tinha já a noção que a discussão desta tarefa teria de ficar para a aula seguinte e que, portanto, o trabalho autónomo se iria prolongar até ao final da aula, o que representariam cerca de 25 minutos (quando no plano estavam previstos 15).

Durante o trabalho autónomo, verifiquei que a maior dificuldade na questão 2.1. consistiu na identificação das variáveis, tempo e distância, como variável independente e dependente, respetivamente. Ultrapassada essa dificuldade, na generalidade representaram bem os pontos no referencial e traçaram a semirreta. Na questão 2.2., a generalidades dos alunos revelaram não se recordar da noção de proporcionalidade direta e na questão 2.3. a maioria da turma recorreu à regra de três simples demonstrando pouco entendimento da constante de proporcionalidade.

Na questão 2.4. a maioria dos alunos reconheceu a expressão que definia a relação entre as variáveis e na última questão a grande maioria dos alunos revelou grandes dificuldades tanto a perceberem que poderiam utilizar a expressão usada na questão anterior, quer na aplicação do raciocínio inverso, na substituição das variáveis e na resolução da equação. Demonstrando que têm um entendimento gráfico e tabular da função que não é acompanhado pelo seu entendimento na representação algébrica.

Reflexão

Um bom momento da aula foi o desenho do segmento de reta vertical em representação do percurso de retorno a casa, o que levou os alunos a entenderem a definição de função de forma intuitiva, o complemento dessa exploração com a realização do diagrama de setas permitiu aos alunos observar que não se trata de uma função e permitiu ainda a exploração dos conceitos de objeto e imagem, domínio e contradomínio. Esta discussão acabou por se prolongar mais do que o desejado, mas penso que foi importante para começar a trazer à discussão a terminologia matemática envolvida. Contudo, penso que aquando do planeamento deveria ter previsto a necessidade de mais tempo para consolidar estes termos uma vez que era a primeira vez em muito tempo que os alunos voltavam a ouvi-los e devia ter sido menos ambiciosa no plano de aula, que mais uma vez não foi totalmente cumprido.

Apesar de não ter sido realizada nesta aula a discussão da tarefa 2 nem a sistematização, como havia planeado, foram abordados os conceitos previstos (noção de função, de variável dependente e independente, objeto, imagem, domínio e contradomínio), embora ache que a noção de variável dependente e independente não ficou ainda bem entendida por toda a turma. Quanto à abordagem da relação de proporcionalidade direta e da sua constante de proporcionalidade, esta noção não foi propositadamente abordada formalmente perante a turma, apenas foi abordada individualmente durante o trabalho autónomo pois achei que, embora todos os conceitos abordados fossem de revisão, eram já bastantes para uma aula de 45 minutos e achei melhor deixar essa abordagem para a discussão na aula seguinte.

Assim penso que apesar da minha ansiedade para avançar na aula, o balanço foi positivo pois acabou por decorrer, respeitando o ritmo dos alunos. Nesta aula tive a perceção que o plano de aula era demasiado ambicioso tanto na quantidade de momentos previstos, como de conceitos a relembrar.

O facto de optar por ditar a definição de função também não foi a melhor opção porque, dado o atraso que se verificava acabei por tentar acelerar esta fase o que levou a que grande parte da turma não conseguisse acompanhar o que me obrigou a várias repetições na leitura, perda de ritmo da aula e alguma agitação por parte dos alunos. Penso que talvez a melhor opção tivesse sido a projeção da definição, o que permitiria aos alunos passarem com mais calma e a mim, dispor de algum tempo para ajustar a continuação da aula.

Ter permitido o prolongamento do trabalho autónomo da tarefa 2 foi positivo pois dadas as dificuldades sentidas com a terminologia, usei esse tempo extra para, durante o trabalho autónomo, tentar perceber mais individualmente as dificuldades de cada um, questionando e dando a oportunidade aos alunos de consolidarem conceitos sem o entendimento dos quais não me fazia sentido avançar para as novidades do 8.º ano. Contudo, apesar do prolongamento, a maioria dos alunos não conseguiu terminar a tarefa, demonstrando dificuldades principalmente na compreensão da constante de proporcionalidade e na representação algébrica de uma função. Neste caso, penso que deveria ter antecipado estas dificuldades, já que estávamos ainda no segundo tempo de 45 minutos dedicado às funções e, embora esta tarefa apenas necessitasse dos conhecimentos adquiridos no ano anterior, os alunos já haviam esquecido grande parte dos conceitos e ainda estavam a adaptar-se à nova linguagem e terminologia associadas às funções.

Assim, caso tivesse antecipado a existência de eventuais lacunas no conhecimento prévio dos alunos teria programado dar maior enfase à função de proporcionalidade direta, às suas principais características e à influência da constante de proporcionalidade, por exemplo, comparando duas funções de proporcionalidade direta com valores de constante de proporcionalidade distintos, o que teria sido benéfico para os alunos.

3.6.3 Aula 3 (90 minutos) | 5 de março de 2020

Após analisar as reproduções dos alunos relativas à questão 2 da tarefa 1 e verificar que a grande maioria não havia sequer tentado ainda fazer as duas últimas questões, planeei esta aula (Anexo 2.3) de modo a dar um pouco mais de tempo ao trabalho autónomo, e, posteriormente para fazer a discussão e sistematização dessa resolução e por fim realizar e discutir a tarefa 2.

Assim, iniciei a aula dando mais 10 minutos de trabalho autónomo aos alunos para que tivessem a oportunidade de terminarem a tarefa, já que planeava conduzir a discussão de cada questão até uma sistematização dos conceitos envolvidos. Assim, era importante que a maioria tivesse tido oportunidade de explorar as questões por si, antes dos conceitos serem relembrados por mim ou pelos colegas.

Como havia levado as resoluções dos alunos e, numa tentativa de agilizar a discussão das duas primeiras questões, resolvi projetar as resoluções dos alunos como alavanca para a discussão. Como verifiquei que na questão 2.1. não se levantaram questões, projetei uma das resoluções e avancei logo solicitando à turma que me indicasse as coordenadas de um ponto que marquei sobre a reta, relembrei a relação de dependência entre as abcissas e as ordenadas e relacionei-as com os eixos cartesianos. Questionei a turma sobre qual o domínio e o contradomínio da função, bem como o nome que damos aos seus elementos e relembrei que uma função é uma correspondência entre esses elementos. A turma correspondeu positivamente, revelando já uma evolução na aprendizagem, relativamente ao que havia verificado nas primeiras aulas deste tema.

Estes termos foram escritos no quadro e foi solicitado aos alunos que registassem tudo, já que eles ainda demonstram pouca autonomia nesse aspeto, sendo muitas vezes necessário incentivá-los a realizar registos cuidadosos.

Para iniciar a discussão da questão 2.2., projetei quatro respostas diferentes, todas contendo afirmações verdadeiras, mas nem todas suficientes para justificar o que era pedido. Aqui todos perceberam e afirmaram a veracidade das afirmações, mas verifiquei muita dificuldade em distinguirem as duas respostas que, embora com uma linguagem pouco matemática, apresentavam a *justificação* completa, mencionando que a razão entre as variáveis é constante. Com as dificuldades apresentadas, tive noção da falta de entendimento do significado da relação de proporcionalidade direta, pelo que introduzi o conceito de proporcionalidade direta e de constante de proporcionalidade e ditei uma resposta usando uma linguagem matemática. Senti, contudo, que a maioria dos alunos ainda não se havia apropriado deste significado e que teria de voltar a este assunto.

Para a resolução da questão 2.3. solicitei ao aluno Samuel que usou uma regra de três simples, para apresentar a sua resolução também para chamar a atenção para a necessidade de reduzir os minutos a segundos, algo que este par de alunos não havia feito. A turma conseguiu detetar o erro e perceber porque é que o resultado tinha dado diferente do seu e na maioria relataram ter usado também uma regra de três simples, revelando que ainda não se apropriaram da noção de constante de proporcionalidade.

Para resolver a questão 2.4. pedi à aluna Camila para ir ao quadro por ter efetuado uma resolução interessante e completa. Este par começou por determinar a constante de proporcionalidade para escolher a expressão correta e ainda escreveu que "0,34 é a distância percorrida num segundo". Solicitei à turma que explicasse a resolução da aluna Camila e obtive respostas bastante satisfatórias: "a distância aumenta na mesma proporção do tempo", ou "a razão entre a distância e o tempo é sempre constante". Enfatizei o facto de a constante de proporcionalidade resultar do quociente entre os valores de y e de x. Quanto à observação escrita acerca do significado da constante de proporcionalidade, lembrei à aluna Camila e à turma, que esta deveria querer referir-se não à distância percorrida, mas atendendo ao contexto do problema, à distância a que se encontra a trovoada e após esta correção questionei se todos concordavam com a afirmação. Alguns alunos concordaram com a veracidade da afirmação, mas ninguém soube explicar porquê.

Assim, pegando nesta frase da aluna aproveitei para esclarecer o significado da terminologia $d(t)$ e t, usada na expressão algébrica e, substituindo t por 1, propus à turma que resolvesse a equação resultante. Todos pareceram perceber como se obtém analiticamente o 0,34 e aproveitei para fazer a transposição desse resultado para a representação gráfica, representando a partir das indicações dos alunos, o ponto de coordenadas (1;0,34) no gráfico, referindo que a imagem de 1 corresponde sempre à constante de proporcionalidade, quando se trata de uma relação de proporcionalidade direta, explorando aqui a obtenção de constante de proporcionalidade direta a partir do quociente entre o valor da ordenada e da abcissa de um dado ponto. Ficou ainda claro que a turma conseguiu interpretar este resultado atendendo ao contexto do problema, pois ajudaram na correção da afirmação feita pela colega.

A questão 2.5. levantou muitas dúvidas por haver a necessidade de, usando o mesmo procedimento, inverterem as operações efetuadas anteriormente ou usarem a expressão algébrica já determinada. Poucos pares fizeram uso da expressão algébrica, revelando dificuldades em entender o conceito de função e em manipular equações de 1º grau.

A aluna Luísa foi efetuar a resolução do par ao quadro e explicou que efetuaram o inverso da regra de três simples efetuada anteriormente: “Se há pouco tínhamos o tempo e fizemos uma regra de três simples para descobrir a distância, agora fizemos o inverso”. Apenas um dos grupos revelou ter usado a expressão geral e substituído $d(t)$ por 51 km.

Pareceu-me adequado fazer uma sistematização após a avalanche de novidades que haviam sido tratadas. A partir das dicas dos alunos fiz o registo no quadro dos diferentes tipos de *representações* de funções que tínhamos visto até à data, ficou a faltar a representação algébrica, a qual tive eu de recordar à turma. Relembrei que a função estudada nesta tarefa se trata de uma função linear a representar uma relação de proporcionalidade direta e relembrei a sua expressão geral, referindo que a letra a se designa de coeficiente de x e, em particular representa a constante de proporcionalidade.

Após distribuir a primeira página da tarefa 2 e ler o enunciado, os alunos deram início ao trabalho autónomo nos mesmos moldes a que estão habituados. Mais uma vez o tempo que havia planeado para o trabalho autónomo até à questão 1.3., foi insuficiente. O que havia planeado para 15 minutos, acabou por prolongar-se até ao final da aula, por cerca de 30 minutos, pelo que não houve nesta aula lugar para a discussão prevista.

Nas primeiras questões a maior dificuldade que percebi no trabalho autónomo foi a falta de *justificação* das respostas, muitos dos alunos, penso que menosprezam a necessidade de justificar ou não conseguem expressar a *justificação* numa linguagem correta. Apesar disso os alunos mostraram entusiamo e mesmo depois de eu dar a aula por terminada vários pares continuavam a discutir ideias.

Reflexão

Penso que a projeção das resoluções se revelou bastante motivadora para os alunos que de sentiram que as suas produções haviam sido analisadas pela professora e valorizadas, além disso torna-se útil por reduzir o tempo de discussão.

O momento da discussão da segunda questão da tarefa 1 foi muito rico e essencial para estabelecer a ligação com os conteúdos lecionados no ano anterior. A turma correspondeu positivamente, os alunos mostraram-se motivados e revelaram uma evolução na aprendizagem relativamente ao às primeiras aulas, tanto ao nível da apropriação da terminologia como do seu significado. Ganhei assim alguma confiança nas opções tomadas em aulas anteriores, que embora mais demoradas, pareciam começar agora a dar frutos.

A opção de ter feito uma sistematização imediatamente antes do início da tarefa 2, revelou-se uma boa escolha, já que os alunos arrumaram ideias e partiram para a tarefa seguinte com maior confiança. Neste momento da aula penso que teria sido oportuno introduzir também o a como o declive da função e realizar o seu cálculo analítico, indo um pouco mais além, já que no ano anterior os alunos não realizaram esse cálculo.

Os objetivos para esta questão (da tarefa 1) foram alcançados e os alunos conseguiram identificar os elementos do domínio e do contradomínio. No que se refere à definição de função, alguns alunos tinham uma noção da definição, pelo que apenas foi necessário esclarecer algumas dúvidas e clarificar a definição correta. Para o plano da aula anterior havia preparado uma projeção com vários exemplos, contendo uma mesma função nas quatro *representações* abordadas e onde eram apresentadas algumas questões sobre conceitos lecionados no ano letivo anterior. Optei por não fazer essa projeção pois as aprendizagens que pretendia alcançar com ela foram todas discutidas e registadas no quadro durante a discussão. A registar que, essencialmente as dificuldades mais visíveis nesta questão foram a resistência na utilização de linguagem matemática adequada.

O prolongamento de tempo do trabalho autónomo para a realização da tarefa 2 deveu-se às dificuldades que fui percecionando durante a monotorização. Estas dificuldades na primeira parte da tarefa, acabaram por revelar algumas fragilidades na sua conceção, as quais terão dificultado a interpretação da mesma, que começou logo por verificar-se na interpretação do enunciado. O facto de o enunciado mencionar que as amigas dariam 6 voltas ao campo foi interpretado por alguns alunos como sendo um dado importante para realizar a tarefa e os alunos tentaram encontrar uma *justificação* para esse dado sendo que muitos deles associaram cada uma das voltas a cada um dos pontos marcados no referencial. É claro que essa interpretação revela falta de entendimento do referencial representado, mas de qualquer forma penso que essa dificuldade foi ampliada pela necessidade que os alunos sentiram de justificar um dado supérfluo no enunciado. Neste caso o enunciado deveria ser reformulado e fornecida a extensão da corrida ou simplesmente ser dito que a corrida se realizaria até ao final da pista, dando a extensão da mesma. Assim, penso que a tarefa pecou por défice de indicações, o que levou os alunos a interpretações incorretas.

Outra questão que levantou dificuldades por falta de clareza do texto foi a questão 1.1. onde é referida a distância percorrida pelas amigas como sendo relativa ao eixo das ordenadas. Na verdade, o eixo das ordenadas não espelha a distância percorrida, mas a posição das amigas em determinado momento. Este erro foi percecionado por alguns alunos mais competentes, tendo sido os seus comentários a alertarem-me para ele quando, durante o trabalho autónomo referiram que aos zero segundos a Rita não tinha percorrido 200 metros. Como estávamos no final da aula quando me apercebi e como vi de imediato que o mesmo estava repetido na questão 1.5., decidi guardar um momento específico na aula seguinte para fazer a correção para toda a turma e aproveitar para esclarecer a diferença entre uma coisa e outra. Este erro acabou por revelar a capacidade de interpretação gráfica que os alunos têm, mas deveria ter sido evitado por mim através de uma revisão mais cuidada da tarefa.

Para esta aula estava prevista a realização de toda a tarefa 2, o que não foi possível. Também não distribuí a tarefa A, realizada com o intuito de fomentar o trabalho para além da aula, porque esta foi realizada com o propósito de consolidar conceitos relacionados com a função afim e como não chegou a haver discussão desse tema, optei por não distribuir a tarefa para casa. Penso que esta foi a melhor opção pois, dadas as características destes alunos, que revelam muita resistência a trabalhar em casa, penso que deparados com a nova função, tenderiam a desinteressar-se da tarefa.

3.6.4 Aula 4 (45 minutos) | 9 de março de 2020

Esta aula teve início com a discussão das questões 1.1., 1.2. e 1.3. da tarefa, realizadas na aula anterior, como previsto no plano de aula (Anexo 2.4). Como levei as produções dos alunos comigo, pude analisá-las, perceber as dificuldades e assim, agilizar este momento da aula, avançando mais rapidamente nas questões que não suscitaram dúvidas e dando mais tempo para a discussão das restantes.

A resolução da questão 1.1. foi realizada oralmente, a partir da projeção dos gráficos representados nas situações 1 e 2. Assim, solicitei à aluna Teresa que escolhesse a situação que representava a descrição do enunciado e que justificasse essa escolha. Aproveitei esta questão para explorar as coordenadas de um ponto e introduzir o conceito de ordenada na origem e a turma não apresentou dificuldades em identificar as suas coordenadas. A turma também não teve dificuldades em identificar as variáveis dependente e independente e aproveitei para questionar a turma se poderia ou não, no contexto do problema, traçar uma reta que unisse os pontos representados. A turma soube responder e explicar porquê, mas, mais uma vez, numa linguagem matemática pouco formal, o que abriu portas para que eu explicasse numa linguagem mais formal mencionando a possibilidade, neste caso, da expansão no domínio para todos os valores positivos por se tratar de uma variável continua. Como esta interpretação gráfica da situação 2 estava a ser tão rica e bem recebida pelos alunos, continuei esta exploração e, após a turma ter identificado a sequência C como representante de uma função linear, identifiquei no gráfico os pontos comuns a qualquer função linear; $(0,0)$ e $(1, a)$ e solicitei a um aluno que determinasse o valor de a, no caso concreto escrevendo $f(1)$ no quadro e explicando o seu significado. Escrevi a expressão geral da função linear e assim ficaram registadas as características principais de uma função deste tipo. Após a discussão dessas características questionei a turma sobre a natureza da função representada pela sequência D que foi unanime ao considerar que não era uma função linear, explicando que não passa no ponto $(0,0)$.

Para iniciar a discussão da questão 1.2., projetei no quadro duas respostas de dois pares, as quais eram representativas da maioria das respostas obtidas e questionei a turma sobre qual delas estava correta. Toda a turma concordou que a Larissa ganhou a corrida, mas nem todos concordaram que as amigas não correram a mesma distância. A aluna Luísa disponibilizou-se para ir ao quadro defender a resposta errada e explicar porque é que as duas amigas correram ambas 2000 m. A aluna acabou por ser corrigida pela maioria da turma e ela própria, ao explicar o seu raciocínio percebeu que a Rita apenas tinha corrido 1800 metros.

Pelas respostas à questão 1.3. percebi que a turma tinha entendido a representação gráfica e deslindado a eventual dificuldade desta questão, pelo que me limitei a projetar uma das respostas e questionar a turma sobre as coordenadas do ponto em que as duas retas se encontram e sobre o seu significado no contexto do problema.

Esta discussão demorou mais do que o previsto porque a explorei, consolidando e introduzindo conceitos que estavam previstos apenas para o momento de síntese no final da aula. Aproveitei ainda este momento em que senti os alunos recetivos, para mais uma vez acentuar a distinção entre a distância percorrida e a posição em determinado momento, fazendo alusão ao erro que se encontrava na tarefa e valorizando o facto de alguns alunos terem detetado a existência de uma incoerência nos dados.

Mais uma vez percebi que não ia conseguir cumprir o que havia planeado e que a discussão e sistematização da segunda parte da tarefa teria de ficar para a aula seguinte, pelo que não iriamos falar de declive nem da função afim, nesta aula.

Distribuí a segunda parte da tarefa e dei 15 minutos para a sua realização a pares. Durante o trabalho autónomo pude perceber que muitos alunos ainda tinham dificuldade com os termos associados a este tema, nomeadamente em identificar o que é o objeto e o que é a imagem e qual é a variável dependente e independente quando estamos a falar da representação algébrica da função.

Na questão 1.4., não revelaram grande dificuldade e recorreram aos seus conhecimentos de física para determinar a velocidade média da Larissa. No caso da Rita, manifestaram algumas dificuldades, mas quase todos conseguiram chegar ao resultado correto. Na questão 1.5. tive a oportunidade de verificar se houve evolução no que respeita à interpretação da expressão algébrica da função. Assim, no que respeita a expressão da função linear os alunos não mostraram muita dificuldade e muitos identificaram mesmo a velocidade média encontrada na alínea anterior como sendo o coeficiente de t. No que toca à expressão da função r, apenas alguns dos alunos mais competentes conseguiram escrevê-la, revelando mais uma vez a dificuldade na transposição da representação gráfica para a representação simbólica.

A questão 1.6. levantou algumas questões principalmente pelo facto dos gráficos que devem ser comparados se encontrarem em referenciais cartesianos diferentes. Nesta questão, talvez pela dificuldade de interpretar gráficos em dois referenciais e também por ser uma questão mais aberta, os alunos mostraram alguma dificuldade, não conseguindo, sem ajuda, definir quais as diferenças e as semelhanças que deveriam apontar.

No final da aula entreguei as tarefas 1 comentadas e anotadas com feedback, também distribuí a tarefa A, para os alunos realizarem em casa durante o período de uma semana. Embora ainda não tivéssemos discutido em grupo a função afim, esta já não se apresentaria como algo totalmente desconhecido pois já haviam trabalhado com ela.

Reflexão

Um aspeto que reconheço como muito benéfico para a compreensão das dificuldades dos alunos e também como forma de agilizar a aula seguinte e redefinir eventuais estratégias foi o facto de ter levado as produções dos alunos de uma aula para a outra e refletir sobre elas. Tenho, neste momento, plena convicção dos benefícios desta prática que penso incluir no meu método de trabalho como futura professora, em momentos chave. Por exemplo, quando ao introduzir um novo tema, necessite de analisar os conhecimentos prévios e as dificuldades dos alunos, ou quando ao chegar próximo do seu final pretenda entender e alertar os alunos para o que ainda é necessário reforçar.

Outra prática também adotada nesta aula e que, apesar de por vezes atrasar o plano previsto, acaba por se revelar muito produtiva é a dilatação do tempo de discussão, como aconteceu com a interpretação gráfica da situação 2 e na questão 1.3., que pela disponibilidade que os alunos demonstraram no momento, proporcionou uma exploração muito rica que permitiu antecipar a referência a alguns conceitos de forma natural e sequencial, deixando que fosse o ritmo dos alunos o condutor no percurso da aula. Claro que esta decisão pode ser arriscada e nem sempre resultar, mas penso que durante a aula, quando se revela necessário, podemos e devemos descolar-nos um pouco dos tempos estipulados para cada momento da aula e devemos manter em aberto a possibilidade de aproveitar situações de entusiasmo dos alunos.

O facto de ter permitido que a aluna Luísa fosse ao quadro defender uma resposta errada, foi também um bom momento da aula, envolvendo os alunos em troca de ideia, justificações e argumentações interessantes.

Relativamente à questão 1.6., esta é mais uma melhoria a efetuar nesta tarefa, devendo apresentar uma representação das funções a comparar num mesmo referencial cartesiano. Contudo, durante a aula, ao observar esta dificuldade dos alunos, decidi que na próxima aula, prepararia, para a discussão desta questão, uma projeção que representasse as duas funções no mesmo referencial. Mais uma vez percebi que é essencial o cuidado que é necessário na elaboração das tarefas.

3.6.5 Aula 5 (45 minutos) | 11 de março de 2020

Dadas as dificuldades de linguagem ainda observadas na aula anterior, iniciei esta aula usando a analogia da função e uma máquina, algo que o professor Paulo Alvega usava no ano anterior. Assim, a turma pode recordar, mais uma vez, a terminologia associada às funções. Após esta exploração em grupo, iniciámos a discussão da 2ª parte da tarefa 2, como previsto no plano de aula (Anexo 2.5). De modo a agilizar a discussão, projetei duas respostas à questão 1.4., uma delas em que, no caso da Rita, o par determinou a velocidade média a partir da sua localização em relação à origem e não em relação à distância percorrida, recordei o significado da razão distância percorrida/tempo e explorámos graficamente a diferença, que no caso da Rita se verifica entre a distância que ela percorreu e a distância a que se encontra da origem.

Na discussão da questão 1.5. projetei duas respostas, uma correta e outra que considerava a corrida da Rita como uma proporcionalidade direta. Após a exploração da questão anterior, toda a turma soube responder que a resposta correta era a que considerava a soma de 200 metros. Aqui aproveitei para fazer, em grupo, a exploração algébrica da situação. Com o ajuda dos alunos fomos investigar, para cada uma das expressões $(3t\ e\ 3t + 200)$, qual a posição da Rita em relação à origem, substituindo t por 400 segundos. Fazendo em paralelo a leitura gráfica, todos entenderam que era necessário somar 200 metros para que, em cada segundo obtivéssemos a posição correta da Rita. Mais uma vez aproveitei para esclarecer o erro no enunciado que descrevia as funções como representando a relação entre o tempo e a distância percorrida, explicando por que razão risquei em todas as tarefas a palavra percorrida.

A discussão da questão 1.6. foi igualmente feita a partir da projeção de algumas respostas dos alunos. Como não havia respostas completas a esta questão optei por fazer a discussão projetando um referencial com as duas *representações* gráficas que os alunos deviam comparar, numa tentativa de que conseguissem observar mais detalhes. Esta visualização, tal como havia previsto na aula anterior, permitiu que a generalidade da turma mencionasse que as retas têm a mesma inclinação, que são paralelas e que ambas as expressões algébricas têm o número 3 como coeficiente de t. A turma identificou ainda o gráfico correspondente à Larissa como representando uma função linear e o gráfico correspondente à Rita como não representando uma função linear. Aproveitei para introduzir a noção de declive e de função afim como soma de uma linear e uma constante e em grande grupo a turma acabou por chegar a uma resposta completa para a questão 1.6..

Na sistematização representei graficamente e algebricamente a função afim e questionando a turma, identificámos o significado de cada uma das incógnitas da expressão. O significado de a gerou alguma discussão, com alguns alunos a relacionarem a com a constante de proporcionalidade direta. Para esclarecer esta confusão, relembrei a averiguação feita no início da aula, na qual verificámos que a razão y/x não era constante no caso da Rita e usei a máquina que havia desenhado no quadro no início da aula, para exemplificar o caso concreto da Rita: "Se entrar zero, a máquina $3t + 200$ transforma em 200" e recordei o "conceito" de ordenada na origem.

Numa tentativa de interligar conteúdos (funções e isometrias), projetei a translação da função $L(t)$ na função $R(t)$, mas tive de ser eu a recordar qual a isometria representada, apesar das isometrias terem sido um tema lecionado há relativamente pouco tempo.

Distribuí a tarefa 3 e relembrei que na aula seguinte haveria Questão de Aula (QA), de modo que deveriam estudar mais do que o habitual. Os alunos começaram imediatamente a trabalhar a pares e, nesse curto período de trabalho autónomo senti que havia ainda alguma desorganização de ideias e conceitos, pelo que pensei que, para além da sistematização feita nesta aula, seria necessário voltar aos aspetos mais formais do tema na próxima aula.

Reflexão

Esta aula foi mais conduzida por mim e menos centrada no aluno, recorrendo sempre ao questionamento da turma para construir ou completar uma ideia ou conceito. Analisando esta opção, penso que foi tomada na altura certa, após os alunos já terem explorado todos os conceitos a partir da modelação de situações em contextos reais, serem agora chamados a consolidar os conceitos relativos às funções e a começarem a estabelecer uma linguagem mais formal.

Considero que, apesar da aula ter sido mais centrada em mim, tentei sempre que as minhas exposições tivessem como ponto de partida dúvidas ou comentários dos alunos, conciliando os aspetos que nesse momento da unidade didática achei que tinham de ser reforçados com as necessidades observadas no momento. Assim, conforme foram surgindo dúvidas durante a aula, aproveitei para as integrar, e fazer a sua exploração em grupo, como foi o caso da exploração algébrica e gráfica que permitiu que toda a turma entendesse que era necessário somar 200 metros para que, em cada segundo obtivéssemos a posição correta da Rita e com isso se aproximasse da noção de ordenada na origem. De facto, penso que o aspeto mais forte desta aula foi a naturalidade com que a fui "conduzindo" de modo a atingir os objetivos a que me propunha, sem deixar de ouvir ou alunos e incorporar os seus comentários nas explorações.

A tentativa de interligar os conteúdos, projetando a translação da função $L(t)$ na função $R(t)$, não foi bem-sucedida. Penso que deveria ter fornecido aos alunos uma pista que os orientasse para o tipo de resposta que era esperada, como relembrar as isometrias com um exemplo ou dar-lhes mais tempo para que pudessem fazer a ligação entre os temas.

Quanto aos objetivos definidos para esta aula, penso que também foram atingidos, em parte devido a esta opção de aula que, embora mais expositiva, me pareceu necessária e útil atendendo à fase do tema em que nos encontrávamos.

3.6.6 Aula 6 (90 minutos) | 12 de março de 2020

Esta aula foi planeada (Anexo 2.6) de modo a sistematizar e consolidar os conceitos que tinham vindo a ser trabalhados ao longo da unidade didática. Assim, estava decidida a retificar toda a linguagem menos matemática dos alunos e a solicitar esclarecimentos acerca dos significados dos conceitos. Pois, tal como na aula anterior, considerei que era altura de exigir mais rigor matemático.

A introdução desta aula foi uma sistematização das várias *representações* das funções lecionadas até ao momento e dos conceitos envolvidos. Esta sistematização foi registada de forma organizada por mim no quadro, mas foi elaborada em conjunto com os alunos que foram respondendo às minhas questões e completando a informação fornecida pelos colegas.

Redistribuí a primeira folha da tarefa 3 e informei que, como habitualmente, o trabalho seria realizado a pares e que teriam mais cerca de 25 minutos para realizar até à questão 1.6.. Queria essencialmente, neste momento, verificar o resultado da sistematização efetuada no início da aula para perceber se algumas das questões que tinham causado dúvidas em aulas anteriores, estariam agora mais esclarecidas. De facto, verifiquei que a grande maioria dos alunos que não havia realizado a totalidade da tarefa ou que havia cometido alguns erros, tiveram a oportunidade de, a partir da síntese discutida inicialmente, aplicar esses conhecimentos o que foi gratificante.

Os alunos resolveram com entusiasmo a tarefa e as dificuldades que foram surgindo foram as esperadas. Surgiu, contudo, uma dificuldade que não havia previsto, os alunos revelaram dificuldade em distinguir entre a variável em causa e a sua unidade, ou seja, à questão: qual é a variável independente, eles respondiam, os litros. Esta dificuldade foi sendo corrigida quando surgiu.

Para realizar a discussão optei pela "estratégia do marcador", esta foi uma técnica que observei algumas vezes o Professor Paulo Alvega fazer e que, dadas as características da minha turma (pouco participativa e pouco confiante para ir ao quadro), decidi experimentar. Consiste em durante o trabalho autónomo, ir distribuindo individualmente os marcadores pelos alunos que pretendo que vão ao quadro, alertando-os antecipadamente de qual a questão que vão resolver.

Como havia levado as resoluções da aula anterior para casa, optei mais uma vez por projetar algumas das respostas no quadro, principalmente aquelas que não suscitaram grandes dificuldades.

A resposta de um dos pares à primeira questão foi projetada no quando e toda a turma a resolveu corretamente. Para a realização da questão 1.2. a aluna Sónia foi ao quadro marcando apenas os pontos sem os unir, quando a turma foi questionada quanto à possibilidade de união dos pontos, todos entenderam que estes podem ser unidos pela continuidade das variáveis no contexto do problema. A aluna Sónia, uniu os pontos sem passar pela origem, mostrando entendimento da função afim, contudo prolongou-a até encontrar a parte negativa do eixo dos yy. Aproveitei esta representação para chamar a atenção para o contexto do problema e a turma percebeu onde deveria parar-se a representação da semirreta e o porquê, relacionando esse facto com o contradomínio da função. Depressa perceberam que o menor valor a pagar seria de 2,50 euros.

A questão 1.3. foi resolvida no quadro pela aluna Lara que foi clara na sua explicação e não levantou questões, servindo de mote para mais uma vez consolidar o significado de $f(x)$ como sendo o valor de y dado em função de x. A questão 1.4., como também não levantou dúvidas foi registada por mim no quadro, mas a partir das respostas das turmas. Contudo aproveitei aqui para distinguir claramente a diferença entre a variável e a sua unidade de medida.

A questão 1.5. foi resolvida pelo aluno Filipe e, por implicar o raciocínio inverso, suscitou algumas questões que foram esclarecidas entre os próprios colegas de turma, proporcionando um bom momento de interajuda e comunicação.

Após este momento lancei mais um desafio à turma, após salientar que, como já havíamos visto no contexto do problema, a reta não se prolonga para baixo. Assim, convidei os alunos a imaginarem que ela se prolongaria, e, nesse caso, a descobrirem as coordenadas do ponto em que interseta o eixo dos yy. Facilmente disseram que seria num ponto de coordenadas $(0, -b)$, mostrando um entendimento do contexto do problema, mas também da sua compreensão puramente matemática.

Apesar de ser um aspeto já trabalhado por várias vezes, os alunos continuaram a revelar alguma dificuldade na determinação das expressões algébricas, como é pedido na questão 1.4.. A conversão entre *representações*, nomeadamente quando se trata da conversão para a forma algébrica não é ainda simples. Assim, embora esta questão fizesse parte apenas da 2ª parte da tarefa (questão 1.6.), decidi no pouco tempo que restava antes da realização da QA, pedir à turma que determinasse a expressão geral da função. Perante as questões de alguns alunos esclareci novamente o significado das variáveis e mencionei que a expressão geral deve traduzir o preço a pagar em função da quantidade de gasóleo colocada, identificando as variáveis dependentes e independentes. A expressão foi surgindo na discussão com a turma, primeiro como a relação de proporcionalidade direta entre o valor a pagar e a quantidade de gasóleo colocada $(x \times 1{,}2)$ e depois perceberam todos que a esse valor teriam de retirar o desconto.

A aula terminou com 20 minutos para a realização da questão de aula.

Reflexão

Considero que a introdução desta aula em forma de sistematização foi muito benéfica e que permitiu de facto aos alunos consolidarem ideias e, sobretudo, organizarem praticamente toda a informação relativa às funções num único registo.

Um aspeto positivo prendeu-se com o facto de ao perceber que os alunos, mais motivados para a discussão por estarem agora na posse de conhecimentos consolidados, tornariam as trocas de ideias mais interessantes e estimulantes, pelo que resolvi prolongar por mais 10 minutos o momento de trabalho autónomo inicial. Este aspeto viria a retirar algum tempo à sistematização final da aula, contudo esse atraso não prejudicou o alcance dos objetivos previstos, porque eles foram sendo introduzidos oportunamente durante a discussão.

O uso da "Técnica do marcador", revelou-se bastante positiva, os alunos sabendo o que vão fazer sentem-se mais seguros e preparados para enfrentar a exposição perante a turma, o que resultou muito bem.

O facto de ter lançado um desafio extra que ia ao encontro das explorações que a turma estava a fazer, mostrando que estava atenta ao seu entusiasmo ao descobrir coisas novas revelou-se muito proveitoso, nesta altura a aula ganhou uma dinâmica muito positiva, toda a turma estava empenhada e entusiasmada com as novas descobertas e com o desafio proposto. Percebi neste momento o verdadeiro potencial que há em ouvir os alunos e ir ao encontro deles, das suas descobertas e valorizá-las, explorando-as, mesmo que saindo um pouco do alinhamento inicial planeado no plano de aula.

Considero que esta aula foi uma das mais bem conseguidas até ao momento, não só porque consegui cumprir o que havia planeado, mas sobretudo porque não me deixei restringir a esse planeamento e fui permeável aos comentários dos alunos, e a partir deles "construi" novos desafios que manifestamente motivaram o entusiasmo da turma, traduzindo-se numa aprendizagem significativa.

3.7 Avaliação

Para compreender o alcance da aprendizagem dos alunos é indispensável que haja avaliação, no entanto, para que seja promotora de aprendizagem, a avaliação deve ir muito para além da avaliação sumativa.

De acordo com o NCTM (2008, p. 23), "a avaliação deve apoiar a aprendizagem de uma Matemática relevante e fornecer informações úteis quer para os professores, quer para os alunos". Desta forma a avaliação é vista como parte integrante do ensino-aprendizagem da Matemática e deve contribuir, ela própria para a aprendizagem dos alunos.

Assim, atendendo aos seus benefícios, procurei além da avaliação sumativa, concretizar uma avaliação formativa e reguladora, estas últimas com uma componente reflexiva muito evidente, permitindo-me identificar as principais aprendizagens e dificuldades dos alunos e, simultaneamente, obter dados que me permitissem refletir sobre a minha própria prática.

Para Santos (2008, p. 4), a avaliação formativa é "um processo de acompanhamento do ensino aprendizagem", que permite ao professor compreender melhor a forma como o aluno aprende, as aprendizagens que realiza e as dificuldades que manifesta. Santos e Pinto (2018, p. 509) reforçam que a avaliação formativa "…usa as evidências para perceber onde o aluno está em termos de aprendizagem para tomar decisões no sentido de providenciar mais e melhores aprendizagens e para regular o ensino". Esta avaliação deve ser dirigida ao aluno e estimular a reflexão acerca da sua aprendizagem, constituindo parte da mesma e deve adaptar-se a cada indivíduo, respeitando assim a diversidade, deve ainda dirigir-se, também, ao professor para o orientar na sua prática letiva.

É ainda importante recordar, que segundo Santos (2008), a recolha de informação não é suficiente, essa informação deve ser interpretada contribuindo para uma intervenção reguladora. Essa intervenção pode contribuir para o esclarecimento da relação entre os objetivos de aprendizagem e as tarefas e para a clarificação e negociação de critérios de avaliação. Assim, os alunos compreenderão melhor o modo como as suas aprendizagens são avaliadas nas tarefas que realizam. Neste processo não é suficiente a observação ou a recolha de informação, mas é crucial que seja dado um sentido à informação recolhida, o que permitirá uma intervenção reguladora na qual a interação entre o professor e o aluno tem a máxima importância na medida em que permite uma negociação de pontos de vista e a construção de um entendimento comum.

Assim, tentei aplicar aquilo que Santos (2008) indica como sendo parte de uma avaliação formativa ou reguladora, fazendo uso dos seguintes instrumentos:

- questionamento oral na aula (NCTM, 2007) de modo a tentar aceder aos seus raciocínios, à sua adesão à tarefa e ainda para promover a reflexão e a autoavaliação dos alunos;
- observação direta do trabalho autónomo dos alunos ao circular pela sala, durante o qual fui privilegiando o questionamento orientado para que os alunos compreendessem as suas aprendizagens e raciocínios ou as suas dificuldades;
- recolha e análise das produções escritas dos alunos realizadas em sala ou em casa. Todos os trabalhos produzidos pelos alunos foram analisados por mim e devolvidos com feedback escrito sobre a atividade que realizaram, permitindo-lhes confirmar as suas aprendizagens, esclarecer dúvidas e refletirem sobre elas, tendo oportunidade de corrigir o erro. Este instrumento de avaliação é também uma forma de motivar os alunos, transmitindo-lhes confiança sobre o trabalho desenvolvido. (Santos & Pinto, 2018). Além de me permitir obter informação acerca das aprendizagens dos alunos, este instrumento promoveu também a minha reflexão acerca da tarefa, do seu potencial e de eventuais modificações à mesma;
- uma Questão de Aula (Anexo 1.7) realizada em trinta minutos do final de uma aula, cujo caracter inicialmente previsto era essencialmente formativo para o professor e de caracter regulador para os alunos.

O questionamento oral, sempre presente está intimamente ligado com a abordagem de ensino exploratório que conduziu a minha intervenção, em que a comunicação e interação entre alunos e entre professor e alunos, tem um papel fundamental para perceber as conceções que os alunos formam acerca dos conteúdos lecionados, e fazer eventuais ajustes ao ritmo das aulas, à linguagem utilizada e aos conteúdos lecionados.

A Questão de Aula, que inicialmente foi prevista para ter um caracter essencialmente formativo, dadas as circunstâncias (Pandemia de Covid-19), que não permitiram a realização do teste de avaliação, acabou por se tornar também um elemento de avaliação sumativa, já que foi o único momento de avaliação deste tipo, nesta Unidade Didática, com que os alunos contactaram, resultando assim numa classificação quantitativa atribuída à atividade dos alunos. Teve também, um caracter Formativo, pois aquando da devolução da mesma, foram feitos comentários e sugestões de melhoria a cada para de alunos. Além disso, para mim, como professora o seu principal objetivo foi permitir-me perceber em que situação se encontrava a aprendizagem dos alunos e que lacunas era necessário ainda colmatar.

O teste escrito de avaliação sumativa, acabou por não se realizar devido ao encerramento das escolas. Por este motivo, a Questão de Aula acabou por ser o único elemento de avaliação sumativa para a temática das funções.

A avaliação sumativa é fundamental para a obtenção da classificação necessária no final de cada período letivo. Essa classificação quantitativa resulta da apreciação de vários aspetos, nos quais, de acordo com os critérios da escola, os testes de avaliação sumativa entram com a maior percentagem.

Na avaliação que fiz nesta unidade didática, procurei também ser coerente com os critérios definidos pelo conselho pedagógico da escola, respeitando uma certa continuidade com o modo de trabalho desenvolvido com os alunos até então.

Resumidamente, para mim, enquanto professora, este modo de trabalho revelou-se muito esclarecedor quer das dificuldades, quer das aprendizagens realizadas por parte dos alunos. Pude refletir acerca da atividade dos alunos e investigar o sentido e razões das suas dificuldades. Possibilitou também a reflexão sobre a minha prática letiva, permitindo-me fazer reajustes e por vezes redirecionar a planificação prevista no sentido de ir ao encontro das necessidades dos alunos.

4. Métodos e procedimentos de recolha de dados

O objetivo deste capítulo é apresentar e fundamentar as opções metodológicas que orientaram este estudo de cariz investigativo. Assim, tendo em conta a problemática em estudo e as questões orientadoras do mesmo, apresentarei as opções metodológicas adotadas, os participantes, os instrumentos de recolha de dados, o processo de análise dos dados e as questões de ética associadas.

4.1 Opções metodológicas

Com o principal objetivo de entender o raciocínio matemático dos alunos e os seus benefícios na aprendizagem no tema das funções, partindo da observação da atividade dos participantes no seu ambiente natural, o paradigma da investigação será interpretativo e a abordagem qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994).

De acordo com Fernandes (1991), a investigação qualitativa é a melhor forma de obter informações relativamente a processos de ensino e aprendizagem. Já para Kauark, Manhães e Medeiros, nesta metodologia "há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito", "o ambiente natural é a fonte direta para coleta de dados e o pesquisador é o instrumento-chave, sendo que processo e seu significado são os focos principais de abordagem" (2010, p. 26). Esta metodologia "vai muito além do visível e do concreto. Ela mergulha fundo no significado próprio das ações e relações humanas, que nem sempre, podem ser transformadas em equações matemáticas e apresentadas em tabelas estatísticas" (Neves & Domingues, 2007, p. 19).

Assim, as minhas escolhas visam promover um melhor entendimento dos significados atribuídos pelos alunos às suas opções, estratégias e *representações*, já que no estudo qualitativo o investigador procura obter dados descritivos a partir do contacto direto com o objeto de estudo, seguindo um paradigma interpretativo, pois existe um envolvimento pessoal do investigador. Stake (1995) fala deste tipo de metodologia, destacando o seu cunho interpretativo e o modo como se pretende compreender as "complexas inter-relações" (p. 37) existentes entre os fenómenos ocorridos e os dados recolhidos, como ocorre no presente estudo.

A investigação interpretativa é, segundo Bogdan e Biklen (1994), especialmente adequada quando as questões são "formuladas com o objetivo de investigar os fenómenos em toda a sua complexidade e em contexto natural" (p. 16). Assim, sendo este estudo realizado num contexto de investigação e descrição, em que assumi o papel de professora e de investigadora, vai ao encontro das considerações que estes autores fazem acerca da abordagem da investigativa qualitativa. Em particular, o estudo respeita 5 características da investigação qualitativa, nomeadamente:

(i) a fonte direta dos dados do estudo é o ambiente natural dos participantes, pois foi feita, principalmente, com os alunos no decorrer das aulas, em que, paralelamente ao meu papel de professora, me servi da observação como elemento primordial na interpretação e análise dos dados;

(ii) é descritiva, na medida em que os dados incluem notas de campo, gravações áudio e vídeo e produções dos alunos que apresento do modo mais fidedigno possível, ao recorrer aos registos escritos dos alunos ou à análise de diálogos;

(iii) o investigador interessa-se sobretudo pelos processos e estratégias dos participantes, deixando para segundo plano os resultados ou produtos. Assim, ao analisar os dados, estudei as suas produções interpretei-as independentemente do resultado final, dando particular importância à forma como se desenrolam as estratégias utilizadas pelos alunos, as opções tomadas e o caminho percorrido até alcançarem certas *representações*;

(iv) a análise de dados foi feita indutivamente, não se pretendendo confirmar hipóteses prévias; e

(v) o entendimento e compreensão dos significados que os participantes atribuem é de importância vital, na medida em que dará tanto mais qualidade à base que sustenta o próprio estudo. Nesse sentido, quer durante o trabalho autónomo, ou em momentos oportunos durante a aula, quer analisando as produções escritas dos alunos, tentei sempre esclarecer com os alunos as suas interpretações dos conceitos e a forma como os mobilizavam nas resoluções das tarefas propostas.

4.2 Participantes no estudo

Dos 14 alunos a quem foi lecionada esta unidade de ensino, apenas dois não consentiram a participação, todos os outros, num total de 12 alunos, participaram ativamente no estudo. Como foi explicado anteriormente, a turma beneficia de uma das medidas de promoção do sucesso (GAT), sendo que nas aulas de Matemática foi dividida em dois grupos de desempenho. Assim, a unidade de ensino foi lecionada à parte da turma com melhor desempenho, num total de 14 alunos. Já que havia uma redução significativa de alunos e até um “género de triagem” relativa ao seu desempenho, optei pela participação de todos, sendo todas as produções alvo de análise. Esta minha opção prende-se com o objetivo do estudo, no qual pretendo identificar os *processos de raciocínio* e *representações* adotadas pelos alunos, bem como as dificuldades que ocorrem. Caso contrário, poderia estar a reduzir demasiado o espectro de análise das estratégias, *representações* e conhecimentos matemáticos mobilizados pelos alunos.

Deste modo, sem reduzir o espetro de análise dos aspetos a considerar, observei uma maior diversidade de alunos, o que pode potenciar uma variedade de *processos de raciocínio*s matemáticos que possam emergir.

4.3 Recolha de dados

Para a realização deste estudo foi imprescindível a seleção dos instrumentos de recolha de dados, que foram selecionados tendo em conta o objetivo da investigação em curso.

Para proceder à recolha de dados e, analisando a natureza do trabalho e os seus objetivos, escolhi duas técnicas: a observação das aulas, com recurso a registos em áudio e vídeo e ao registo num diário de bordo e a recolha documental.

4.3.1 Observação das aulas

A observação é um dos métodos de recolha de dados mais usados nas abordagens qualitativas (Bodgan & Biklen, 1994). O contacto direto com os intervenientes, na sala de aula revela as características em contexto real, permitindo a observação e descrição de comportamentos dos sujeitos no seu ambiente natural. Neste caso, sendo eu investigadora participante, a observação foi efetuada por mim e fiz-me valer da interação com os alunos para motivar e enriquecer o desenvolvimento da aula de acordo com o seu objetivo. Assim, pude recolher informações sobre o tipo de participação e envolvimento dos alunos nas aulas bem como da interação entre eles o que permitiu estudar os processos cognitivos utilizados e identificar as variáveis relevantes para este trabalho.

Por outro lado, a realização das gravações em áudio e vídeo de todas as aulas, permitiram-me posteriormente proceder a uma análise detalhada dos momentos da aula e ter acesso a esses dados sempre que necessário durante o trabalho de análise. Este facto foi fundamental como complemento às produções escritas dos alunos, já que por vezes, durante a aula os alunos verbalizam ideias que não passam para o registo escrito.

A escolha destes instrumentos deveu-se ao facto das suas valências irem ao encontro das necessidades decorrentes da natureza das observações a efetuar. Assim, a gravação permite ilustrar as situações de um modo fiável e detalhado e tem a vantagem de produzir material que pode ser analisado repetidamente, quando necessário. Por ser realizada *in situ*, proporciona uma valiosa recolha de dados, permitindo uma análise de pormenores apenas possível nestas condições.

Para que os alunos não ficassem pouco à vontade com a presença da câmera de filmar usada para registo das aulas, expliquei-lhes anteriormente que iria utilizar esse equipamento e também qual a razão da sua utilização, deixando claro que não seria utilizado como forma de contribuir com dados para a sua avaliação.

Após cada aula organizei um “relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiência e pensa no decurso da recolha e refletindo sobre os dados de um estudo qualitativo” (Bogdan & Bicklen, 1994, p.150). Estas notas de campo que elaborei sob a forma de Diário de Bordo (Anexo 3), foram realizadas logo após cada aula, quando ainda tinha presente os aspetos mais relevantes ocorridos. Estes registos são, sobretudo notas de natureza descritiva, mas também uma forma de efetuar uma reflexão critica preliminar no momento em que as situações ainda estão muito presentes na memória. Esta reflexão recaiu na descrição geral do que se passou em aula, na análise da minha prática letiva e na identificação de aspetos positivos e aspetos a melhorar. Tive também particular interesse em identificar os *processos de raciocínio* observados e as aprendizagens efetuadas, tornando este documento num importante instrumento de auxílio na posterior análise dos dados e na identificação de eventuais aspetos a melhorar em futuras intervenções.

4.3.2 Recolha documental

A recolha documental, incidiu essencialmente nas produções escritas dos alunos, a partir das tarefas propostas durante a unidade de ensino de modo a possibilitar a sua posterior análise. Esta recolha é essencial para colmatar as dificuldades do registo de dados e facilitar a sua interpretação e tem como objetivos principais: fundamentar afirmações e declarações do investigador; ilustrar a atividade dos alunos em situações relevantes para a investigação e possibilitar-me, enquanto professora/investigadora, uma análise minuciosa das dificuldades e *processos de raciocínio* dos alunos.

Apesar dos constantes avisos que fiz aos alunos para que não apagassem a suas resoluções originais após a discussão da tarefa, os alunos revelaram alguma resistência em não as apagar ou rasurar quando se enganavam. Reconheço assim que alguns dados possam ter sido “contaminados” pois, por vezes, os alunos apagaram os seus registos originais e substituíram-nos pela versão corrigida. Ainda assim, complementadas com os outros elementos recolhidos, estas produções dos alunos são elementos-chave para este trabalho e fulcrais para a identificação de estratégias e conhecimentos mobilizados.

Além disso foram ainda recolhidos documentos fornecidos pelo professor cooperante, tais como registos acerca da situação socioeconómica do agregado familiar e características mais pessoais dos alunos. Também recolhi registos de avaliação e grelhas de caracterização dos comportamentos e desempenhos dos alunos, fornecidos pelo diretor de turma. Toda esta informação foi fundamental, orientando a relação que fui estabelecendo com os alunos. Permitiu-me trabalhar no sentido de prevenir certos comportamentos indesejados ao mesmo tempo que pude fomentar e valorizar outros, atendendo às características particulares de cada aluno.

Obtive ainda mais material para recolha, nas reuniões em que participei, nomeadamente nos conselhos de turma e nas reuniões intercalares, onde reuni mais dados sobre os alunos e sobre a sua evolução, dando-me uma melhor perceção das características da turma em todas as disciplinas ao invés de apenas na disciplina de Matemática. Este conhecimento do desempenho de cada aluno num espetro mais alargado, permitiu-me identificar situações em que o aluno demonstra muitas dificuldades na grande maioria das disciplinas, revelando um eventual desinteresse pela escola em geral bem como identificar situações em que a dificuldade do aluno se revela particularmente na disciplina de Matemática. Deste modo pude trabalhar no sentido de tentar melhorar a relação do aluno com a escola ou especificamente com a Matemática, dependendo das situações. Além disso pude também perceber os alunos que valorizam a Matemática relativamente às outras disciplinas e trabalhar no sentido de os levar mais além para que não se desinteressassem.

4.4 Processo de análise de dados

Segundo Bogdan e Biklen (1994), “analisar os dados consiste no processo de busca e de organização sistemático de transcrições de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais que foram sendo acumulados, com o objetivo de aumentar a sua própria compreensão desses mesmos materiais e de lhe permitir apresentar aos outros aquilo que encontrou” (p. 205).

A análise de dados realizada neste estudo segue uma linha interpretativa e incide essencialmente sobre as produções escritas dos alunos. Esta análise foi complementada com os registos áudio e vídeo e, com os registos do Diário de Bordo, tendo como objetivo procurar dar resposta às questões de investigação inicialmente formuladas.

Os principais focos de análise destes documentos, são:

- os *processos de raciocínio* usados pelos alunos;
- as dificuldades que manifestam na resolução das tarefas propostas;
- as *representações* que privilegiam;
- a compreensão que revelam da noção de função e;
- a relação que existe entre os *processos de raciocínio* e as *representações* usadas.

Esta análise é útil também para compreender a evolução que os alunos revelam ao longo da unidade de ensino.

Nas múltiplas *representações* tentei identificar quais as conversões que suscitavam mais ou menos dificuldades, tentando simultaneamente perceber quais seriam as origens dessas dificuldades. Em cada representação tentei, sempre que possível, identificar o tipo de erros que os alunos mais cometem e qual a representação em que têm mais facilidade ou mais dificuldade em trabalhar.

Para proceder à análise dos dados, organizei todos os dados recolhidos, incluindo as produções de todos os alunos da turma.

4.5 Questões de ordem ética

Antes do início do período correspondente à lecionação da unidade didática "Gráficos de Funções Afins" e, portanto, à recolha de dados, tive em conta as questões de ordem ética necessárias para avançar neste processo. Assim, solicitei autorização à Direção da Escola, para a realização do estudo e para a gravação áudio e vídeo das aulas e garanti que o seu deferimento fosse do conhecimento da Diretora de Turma e da Coordenadora do Departamento de Matemática da escola.

De seguida, solicitei autorização aos Encarregados de Educação dos alunos da turma, num documento que simultaneamente serviu para que os encarregados de educação consentissem a participação dos seus educandos num projeto sobre "Raciocínio matemático e formação de professores" – Projeto REASON. Neste documento foram clarificados os procedimentos previstos, os objetivos do estudo e a garantia de confidencialidade dos dados. Tive ainda o cuidado de transmitir oralmente aos alunos a sua total liberdade na opção de participarem ou não no estudo, garantindo que essa decisão não teria qualquer influência na sua avaliação.

Os encarregados de educação contactados, maioritariamente consentiram a participação dos seus educandos, havendo apenas dois que não deram o seu consentimento e, nesses casos, houve todo o cuidado para que não fossem inseridos no estudo ou filmados em circunstância alguma.

Reforço que ao longo do presente estudo, a identidade dos participantes será totalmente salvaguardada e os nomes utilizados serão fictícios. Expostas estas condutas, penso ter acautelado as questões éticas implicadas na realização deste estudo (Bogdan & Biklen, 1994).

5. Análise de Dados

Este capítulo é dedicado à análise dos dados recolhidos ao longo da prática letiva supervisionada. Esta análise foi efetuada de modo a dar resposta às questões de estudo que formulei inicialmente, procurando atender aos conhecimentos matemáticos mobilizados e às aprendizagens efetuadas pelos alunos.

A análise é aqui apresentada pela mesma sequência em que as tarefas foram realizadas em aula e é feita por conjunto de questões ou questão a questão, consoante a sequência das mesmas seja mais ou menos encadeada. A análise de cada tarefa termina com uma síntese realçando os aspetos mais relevantes em cada uma delas.

Como referi no capítulo anterior, esta análise incidirá sobre todos os alunos da turma, cuja autorização para tal foi concedida.

5.1 Tarefa 1 | Os gráficos contam histórias

Esta tarefa (Anexo 1.1) foi trabalhada na primeira aula relativa à temática das funções, com o principal objetivo de relembrar conteúdos já aprendidos no 7.º ano e avaliar a capacidade de leitura gráfica dos alunos.

Questão 1

A primeira questão desta tarefa foi realizada com o intuito de compreender a interpretação que os alunos fazem de uma função representada por um gráfico, identificando, ainda que informalmente, os intervalos onde esta é crescente, decrescente ou constante, sendo esta análise essencial para a coerência da possível história.

Nesta questão, os alunos têm oportunidade de exprimir, em linguagem natural, processos e ideias matemáticas observadas num gráfico (na questão 1.1.) e depois fazer o processo inverso (na questão 1.2.), trabalhando aspetos relacionados com a comunicação matemática escrita.

Questão 1.1.

Nesta questão os alunos tinham de dar resposta ao seguinte: “com base na informação gráfica descreva o percurso do Mário durante a caminhada”.

Na atividade realizada por alguns alunos, como é o caso da Camila (Figura 2) e do Tomás (Figura 3), observou-se uma descrição muito completa do percurso efetuado utilizando uma *representação verbal escrita*, de uma forma coerente, objetiva e reflexiva que remete para a clara interpretação do contexto. Estes alunos, associaram a análise dos dois gráficos e identificaram as distâncias, os tempos e os intervalos, fazendo referências específicas a diversos momentos e relacionando-os aos respetivos estados de fome. A aluna Camila apresenta ainda explicitamente uma análise qualitativa das velocidades a que o Mário se deslocou em cada uma das partes do percurso. Identificam ainda o período em que a distância à casa é constante.

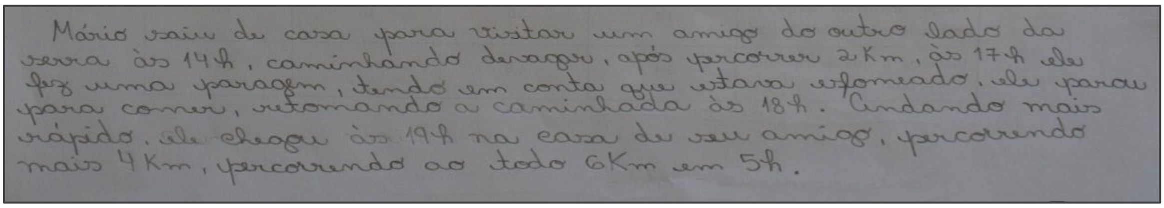

Mário saiu de casa para visitar um amigo do outro lado da serra às 14h, caminhando devagar, após percorrer 2Km, às 17h ele fez uma paragem, tendo em conta que estava esfomeado, ele parou para comer, retomando a caminhada às 18h. Andando mais rápido, ele chegou às 19h na casa do seu amigo, percorrendo mais 4Km, percorrendo ao todo 6Km em 5h.

Figura 2 - Resposta da Camila à questão 1.1. da Tarefa 1

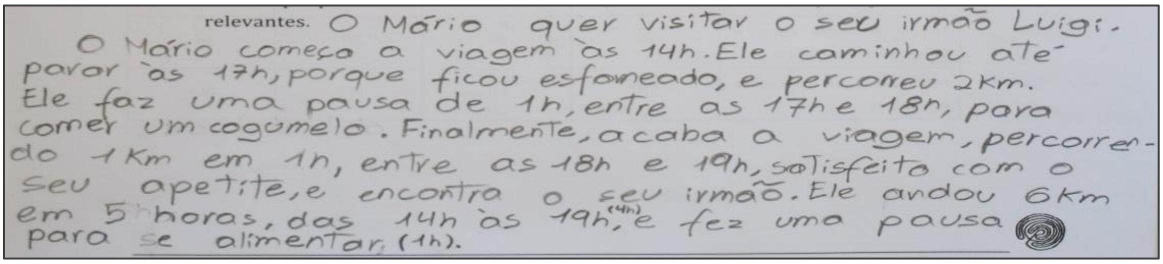

relevantes. O Mário quer visitar o seu irmão Luigi.
O Mário começa a viagem às 14h. Ele caminhou até parar às 17h, porque ficou esfomeado, e percorreu 2km. Ele faz uma pausa de 1h, entre as 17h e 18h, para comer um cogumelo. Finalmente, acaba a viagem, percorrendo 1Km em 1h, entre as 18h e 19h, satisfeito com o seu apetite, e encontra o seu irmão. Ele andou 6km em 5 horas, das 14h às 19h (4h), e fez uma pausa para se alimentar (1h).

Figura 3- Resposta do Tomás à questão 1.1. da Tarefa 1

Já outras resoluções, embora apresentem respostas corretas utilizando uma *representação verbal escrita*, apresentam uma análise mais curta e menos completa, com uma fundamentação pouco elaborada. É o caso dos alunos Débora (Figura 4), Hugo (Figura 5) e Lara (Figura 6).

Nestas resoluções pode observar-se que a interpretação gráfica está correta, mas a resposta denota dificuldades na expressão dos conhecimentos e em justificar de modo fundamentado as várias etapas do percurso.

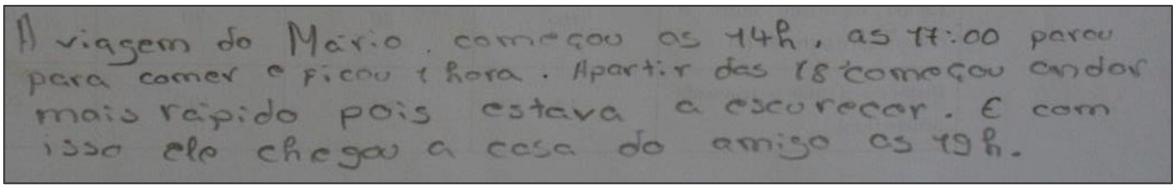

A viagem do Mário, começou as 14h, as 17:00 parou para comer e ficou 1 hora. Apartir das 18 começou andar mais rápido pois estava a escurecer. E com isso ele chegou a casa do amigo as 19h.

Figura 4 - Resposta da Débora à questão 1.1. da Tarefa 1

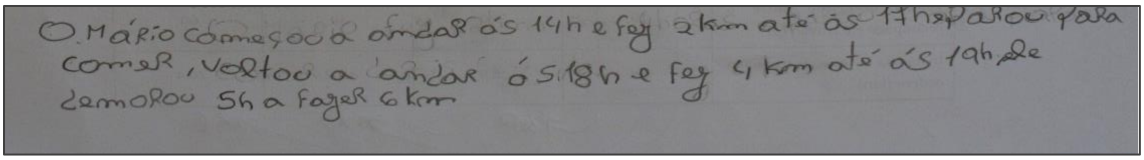

O Mário começou a andar ás 14h e fez 2km até ás 17h e parou para comer, voltou a andar ás 18h e fez 4 km até ás 19h, ele demorou 5h a fazer 6km

Figura 5 - Resposta do Hugo à questão 1.1. da Tarefa 1

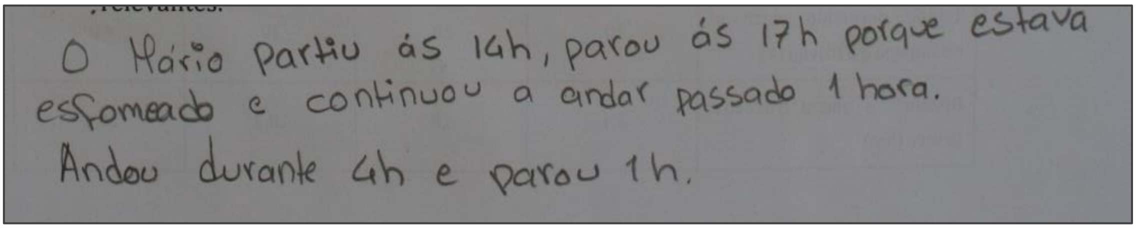

O Mário partiu ás 14h, parou ás 17h porque estava esfomeado e continuou a andar passado 1 hora.
Andou durante 4h e parou 1h.

Figura 6 - Resposta da Lara à questão 1.1. da Tarefa 1

Outras respostas, revelam pouca objetividade e alguma dificuldade na expressão de ideias. Por exemplo, no caso da resposta do aluno Gustavo (Figura 7), embora tenha efetuado uma leitura clara do gráfico, é referido que os 6 km foram percorridos em 4 horas, sem justificar que é a retirado a esse período o tempo de paragem.

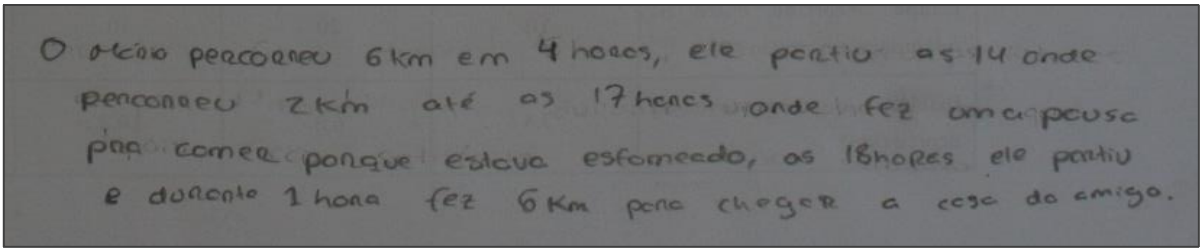

O Mário percorreu 6km em 4 horas, ele partiu as 14 onde percorreu 2km até as 17 horas onde fez uma pausa pra comer porque estava esfomeado, as 18horas ele partiu e durante 1 hora fez 6Km para chegar a casa do amigo.

Figura 7 - Resposta do Gustavo à questão 1.1. da Tarefa 1

Embora não tenha sido comum, houve também casos em que se observou alguma dificuldade em analisar de forma correta e simultânea as duas *representações* gráficas. Por exemplo, a aluna Teresa (Figura 8) na sua resposta, além da dificuldade de expressão, concluí erradamente que o Mário, após a paragem passa a andar mais rápido devido a estar escurecendo.

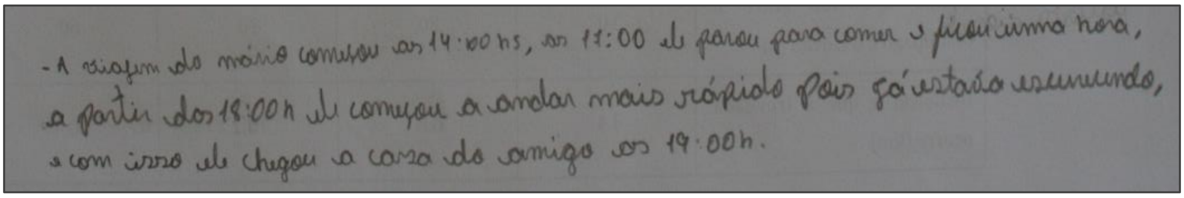

- A viagem do mário começou as 14:00 hs, as 17:00 ele parou para comer e ficou uma hora, a partir das 18:00h ele começou a andar mais rápido pois já estava escurecendo, e com isso ele chegou a casa do amigo as 19:00h.

Figura 8 - Resposta da Teresa à questão 1.1. da Tarefa 1

Questão 1.2.

Na questão 1.2. pediu-se aos alunos que descrevessem outra versão da caminhada em que o Mário teria voltado atrás e, que elaborassem o gráfico com os registos de tempo decorrido na caminhada.

Esta questão não levantou muitas dúvidas por parte dos alunos, todos modelaram um percurso adequado à situação descrita, tendo optado pela resolução mais simples e direta, sem contribuírem com mais detalhes para a história, já que, sendo uma questão aberta poderiam fazer outras variações no percurso do Mário, para além das que foram fixadas.

A resposta da aluna Luísa (Figura 9), é representativa das respostas dadas pelos outros alunos e apresenta uma representação gráfica correta da situação descrita. De qualquer forma, é de salientar que os alunos se limitaram a representar apenas o que estava descrito, não fazendo uso da abertura da questão para elaborarem um gráfico com momentos distintos de velocidade ou paragem.

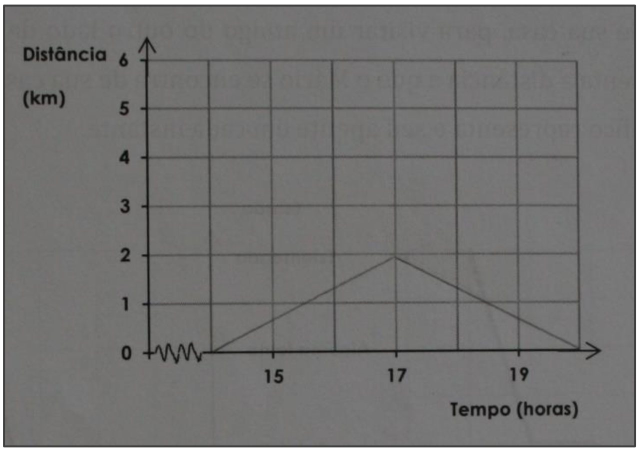


Figura 9 - Resposta da Luísa à questão 1.2. da Tarefa 1

Em síntese, a generalidade da turma demonstrou conseguir interpretar a representação gráfica de uma função, mas nem todos conseguiram produzir uma história adequada que envolvesse a situação, limitando-se a descrever os factos observados. Verifica-se assim que os alunos não aproveitaram a abertura das questões para ir para além do que é a leitura direta e obvia dos dados indicados.

Relativamente aos *processos de raciocínio*, na questão 1.1., a generalidade da turma recorreu à argumentação e *justificação*, suportando as suas respostas na conversão da representação gráfica em representação verbal escrita. De um modo geral a atividade dos alunos foi bem-sucedida, embora se verifiquem algumas lacunas na utilização da argumentação e *justificação*.

Na questão 1.2., utilizaram a representação gráfica, como era expectável, refletindo alguma facilidade na interpretação gráfica de situações reais, mostrando que conseguem modelar graficamente uma situação descrita, realizando a conversão para a representação gráfica. Contudo, verificou-se, como já foi referido, que os alunos poderiam ter apresentado *representações* gráficas mais ricas, explorando a abertura da questão.

A maior dificuldade observada nas respostas dos alunos tem a ver com a expressão escrita das suas ideias de forma clara. Observa-se alguma disparidade na capacidade de expressão dos alunos; a inclusão ou não de coordenadas de pontos específicos e a referência à variação existente em alguns intervalos a apoiarem detalhes da história. Também a forma como os alunos associam os gráficos difere, sendo que alguns alunos analisam os gráficos em simultâneo, mas outros revelam alguma dificuldade em conciliar a informação dos dois gráficos, interpretando-os em separado.

Em relação à compreensão da noção de função, nas respostas a estas questões observa-se que uma das principais diferenças nas resoluções dos alunos incidiram no maior ou menor detalhe com que contam a história. Essa diferença pode dever-se ao conhecimento existente ou à experiência anterior, os quais podem afetar a construção do conceito matemático de função e o sentido que o aluno dá à situação. Há ainda a registar que na questão 1.1., apenas uma aluna, embora sem indicar valores exatos para a velocidade, relacionou diretamente a inclinação dos segmentos de reta ao valor da velocidade constante em cada troço, demonstrando compreensão da relação entre as duas variáveis. Por outro lado, nenhum aluno tentou explorar a distância a que o Mário se encontra, a cada instante, da casa do amigo, o que poderá sugerir alguma falta de confiança relativamente ao conhecimento da noção de função.

Questão 2

Na questão 2, com base nos dados de uma situação de contexto real, apresentados na forma tabular, é pedido aos alunos que convertam a informação numa representação gráfica da função e mais tarde, na sua representação algébrica.

A questão 2 foi estruturada de forma a que as noções de objeto, imagem, domínio e contradomínio surgissem a partir da discussão coletiva.

Questão 2.1.

Nesta questão, a quase totalidade da turma fez a representação gráfica da distância percorrida em função do tempo corretamente demonstrando reconhecer a função linear e facilidade na conversão da representação tabular para a representação gráfica, como mostra a resolução da aluna Camila (Figura 10).

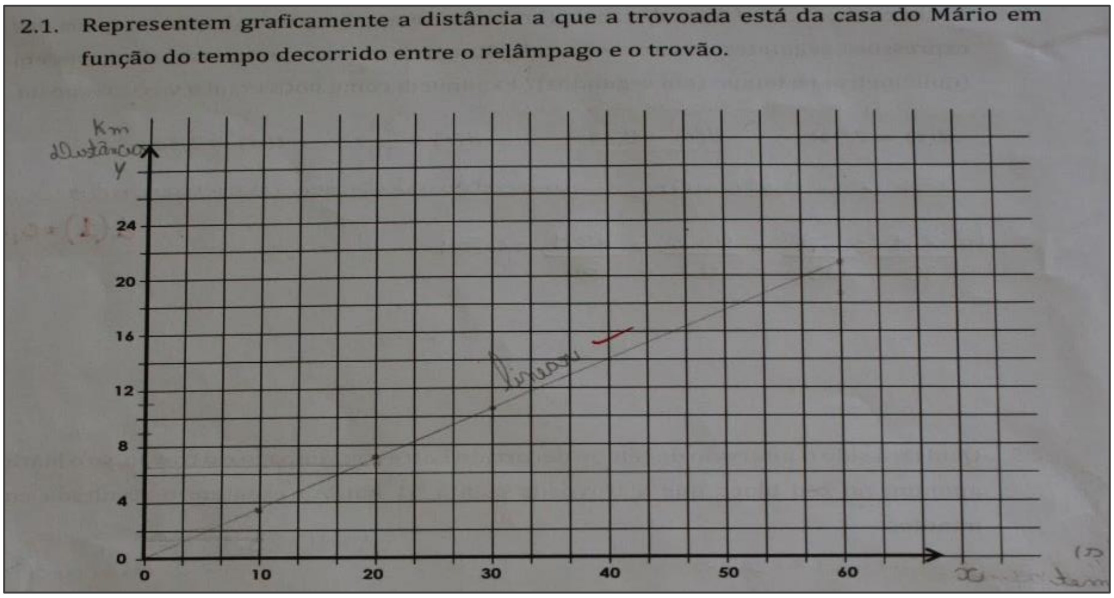


Figura 10 - Resposta da Camila à questão 2.1. da Tarefa 1

Apenas uma aluna, a Teresa (Figura 11), embora tenha marcado corretamente os pares ordenados, ao traçar a reta não teve em conta as características da representação gráfica da função linear, demonstrando que ainda não identificou a função como tal, ou que desconhece as suas particularidades.

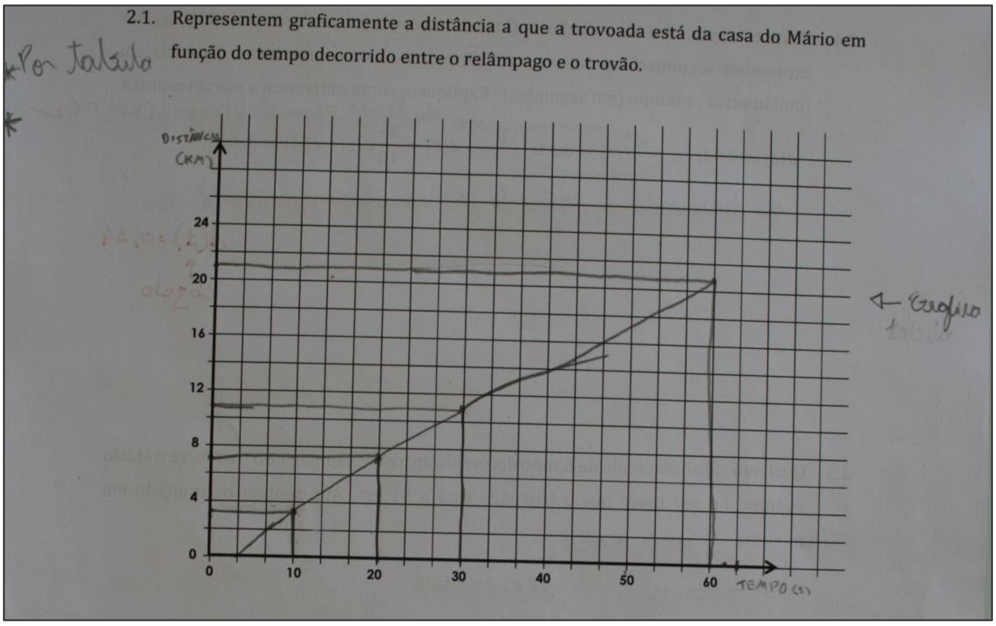


Figura 11 - Resposta da Teresa à questão 2.1. da Tarefa 1

Questão 2.2.

Nesta questão foi pedido aos alunos que justificassem porque é que a função representada é, ou não, uma relação de proporcionalidade direta.

A maioria dos alunos recorreu à *representação verbal* e *numérica* para responder à questão 2.2., justificando de forma coerente, através de relações numéricas entre as variáveis com uma boa apresentação das suas ideias e utilizando corretamente a noção da relação de proporcionalidade direta. É o caso da aluna Camila (Figura 12), que, como a maioria, não recorreu à observação gráfica efetuada anteriormente para justificar a sua resposta, optando pela utilização das características algébricas da função e pela *justificação* em representação numérica.

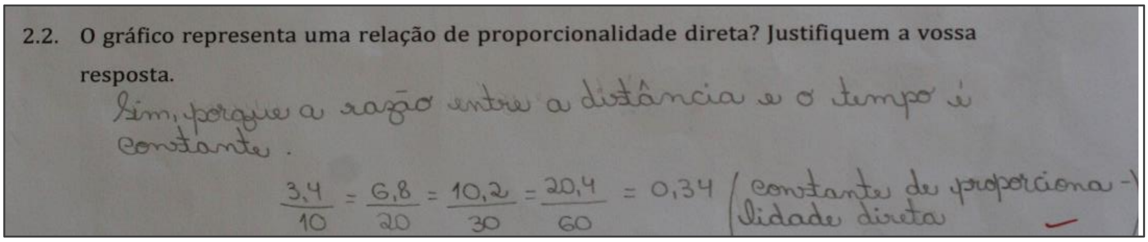

2.2. O gráfico representa uma relação de proporcionalidade direta? Justifiquem a vossa resposta.
Sim, porque a razão entre a distância e o tempo é constante.
$\frac{3,4}{10} = \frac{6,8}{20} = \frac{10,2}{30} = \frac{20,4}{60} = 0,34$ / constante de proporcionalidade direta

Figura 12 - Resposta da Camila à questão 2.2. da Tarefa 1

Também o aluno Samuel (Figura 13), recorreu à representação verbal escrita e numérica, remetendo para a razão entre a distância e o tempo, ainda que não o faça de forma correta. Este aluno, embora tenha efetuado corretamente a representação gráfica e identifique a relação como sendo de proporcionalidade direta, não consegue justificar corretamente, mostrando confusão entre alguns conceitos e usando desnecessariamente a definição de função.

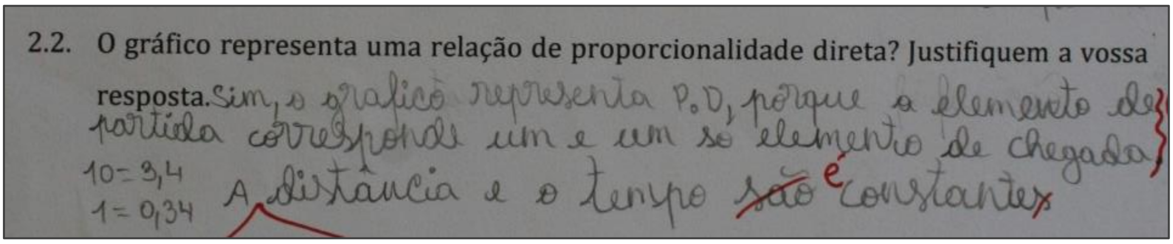

2.2. O gráfico representa uma relação de proporcionalidade direta? Justifiquem a vossa resposta. Sim, o gráfico representa P.D, porque a elemento de partida corresponde um e um só elemento de chegada.
10 = 3,4
1 = 0,34
A distância e o tempo ~~são~~ é constantes

Figura 13 - Resposta do Samuel à questão 2.2. da Tarefa 1

O aluno Jorge (Figura 14) também responde corretamente, recorrendo a uma representação tabular para justificar a proporcionalidade direta, revelando que entende que as variáveis em causa aumentam na mesma proporção. Contudo, o aluno poderia completar a *justificação* recorrendo à definição ou às propriedades da relação de proporcionalidade direta.

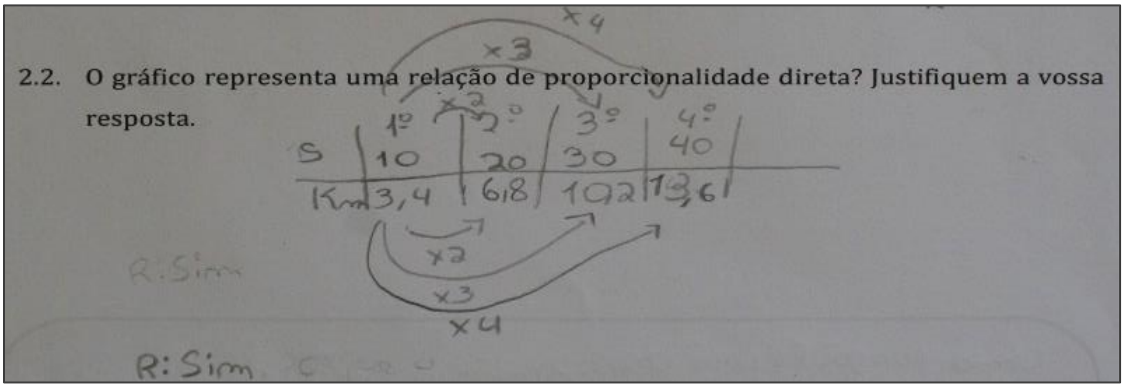


Figura 14 - Resposta do Jorge à questão 2.2. da Tarefa 1

Outros alunos optaram apenas pela representação verbal escrita, mas sem conseguirem apresentar uma resposta correta ou completa. É o caso da aluna Teresa (Figura 15), que *justifica* de forma errada a sua resposta, mantendo a dificuldade, já identificada anteriormente, em compreender a função linear e a relação de proporcionalidade direta entre duas variáveis. No entanto, devo destacar que a aluna refere o termo “constante”, o que pode indicar alguma ideia, ainda que vaga e incompleta, do que se entende por relação de proporcionalidade direta.

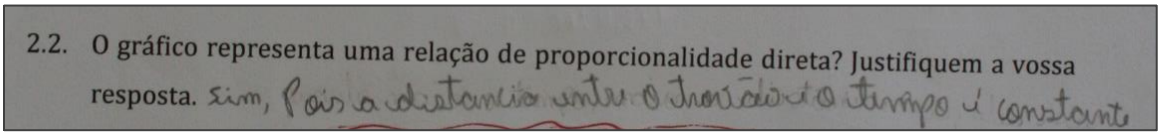


Figura 15 - Resposta da Teresa à questão 2.2. da Tarefa 1

Já o aluno Filipe (Figura 16) não justifica a sua resposta, ainda que tenha feito uma representação gráfica correta, revelando conhecimento da noção de função e responda corretamente que a relação é de proporcionalidade direta.

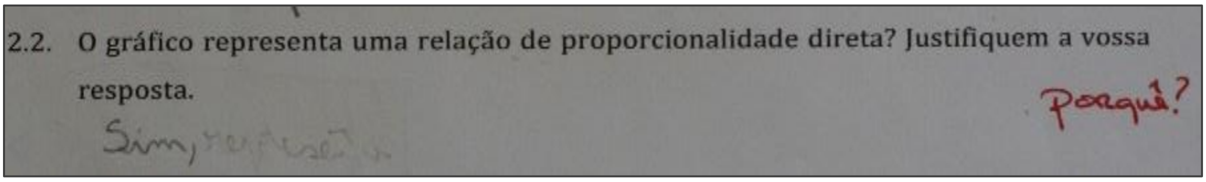


Figura 16 - Resposta do Filipe à questão 2.2. da Tarefa 1

Questão 2.3.

Na questão 2.3., os alunos poderão expressar a compreensão da relação de proporcionalidade direta algebricamente ou responder recorrendo à representação numérica ou tabular.

A generalidade da turma resolve a questão recorrendo à representação numérica, usando muitas vezes uma regra de três simples, demonstrando capacidade de equacionar a relação entre as variáveis, abrindo caminho a uma representação algébrica da função.

Por exemplo a aluna Camila (Figura 17) resolve a questão de duas formas. Primeiro recorreu a uma representação numérica esquemática que evidência de forma correta a relação entre as variáveis, revelando compreensão relativamente à noção de função e em relação à proporcionalidade direta. De seguida faz uso de uma relação de três simples, embora incompleta, estando em falta o cálculo do x. Neste caso, falta ainda, a resposta à questão, o que acontece com muita frequência, sendo que os alunos resolvem a questão corretamente, mas não elaboram a resposta final.

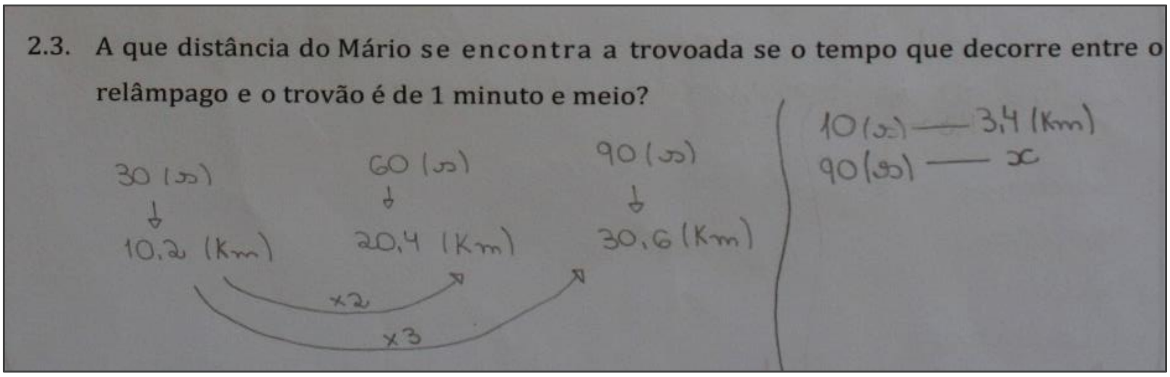


Figura 17 - Resposta da Camila à questão 2.3. da Tarefa 1

Na resolução seguinte, o Jorge (Figura 18) expressa compreensão da relação de proporcionalidade direta. O aluno recorre à tabela que havia efetuado na questão 2.2. para justificar a relação de proporcionalidade direta. Fazendo uso da representação numérica, este aluno faz uma *conjetura* assumindo que ao fim de 1 minuto e meio o Mário terá percorrido uma vez a distância que percorreu em 30 segundos mais duas vezes essa mesma distância e, a partir dos dados obtidos elaborou uma resposta correta recorrendo à representação verbal escrita.

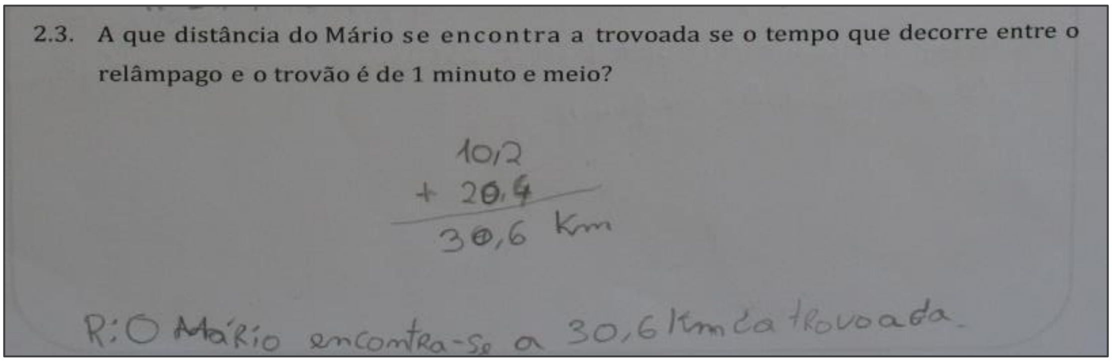


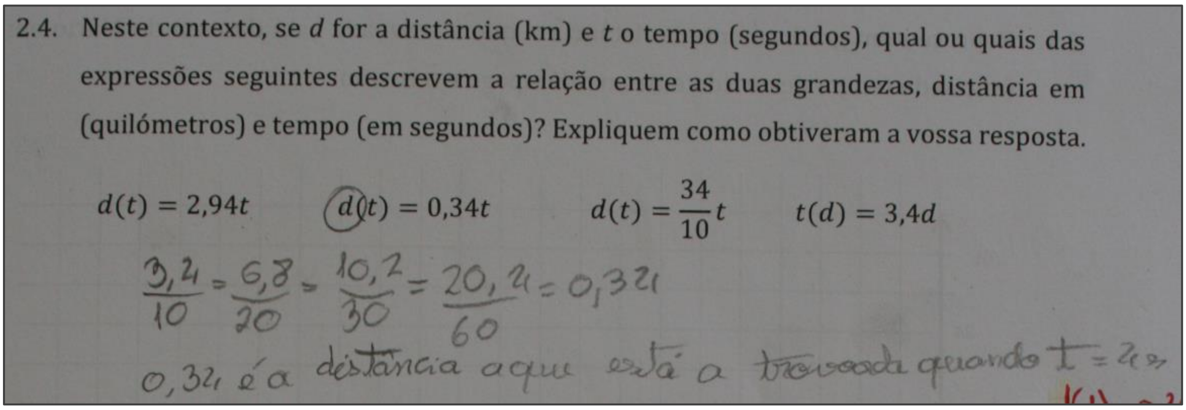
Figura 18 - Resposta do Jorge à questão 2.3. da Tarefa 1

Questão 2.4.

Nesta questão pretendi entender se os alunos haviam compreendido a relação entre duas grandezas através das expressões que representam essas mesmas relações.

A turma recorreu à representação numérica para efetuar os cálculos que lhe permitiram responder e por vezes recorreu à representação verbal escrita para complementar ou justificar os procedimentos efetuados.

Como se observa pela resposta do aluno Rui, apresentada na Figura 19, na *justificação* dada à única resposta correta (a segunda expressão), o aluno evidencia compreensão da relação entre a distância e o tempo chegando ao valor da constante de proporcionalidade (k). De realçar que, embora o aluno evidencie compreensão da relação entre as variáveis, pode não compreender a representação algébrica dessa relação, já que identifica erradamente a contante de proporcionalidade direta como sendo a distância a que a trovoada se encontra quando $t = 4s$.


2.4. Neste contexto, se d for a distância (km) e t o tempo (segundos), qual ou quais das expressões seguintes descrevem a relação entre as duas grandezas, distância em (quilómetros) e tempo (em segundos)? Expliquem como obtiveram a vossa resposta.

$d(t) = 2{,}94t$ $\quad d(t) = 0{,}34t$ $\quad d(t) = \frac{34}{10}t$ $\quad t(d) = 3{,}4d$

$\frac{3{,}4}{10} = \frac{6{,}8}{20} = \frac{10{,}2}{30} = \frac{20{,}4}{60} = 0{,}34$

0,34 é a distância aque está a trovoada quando $t = 4s$

Figura 19 - Resposta do Rui à questão 2.4. da Tarefa 1

O Samuel (Figura 20), optou por testar todas as expressões algébricas apresentadas e justificar a resposta, identificando a expressão correta por ser aquela que verifica os resultados apresentados na tabela. O aluno identificou ainda a resposta como sendo a representação algébrica de uma função linear. A estratégia do aluno, embora correta, pode denunciar ainda alguma insegurança na compreensão do significado e na *generalização* dos parâmetros da expressão algébrica da função, que o leva a verificar todas as situações para confirmar a correta.

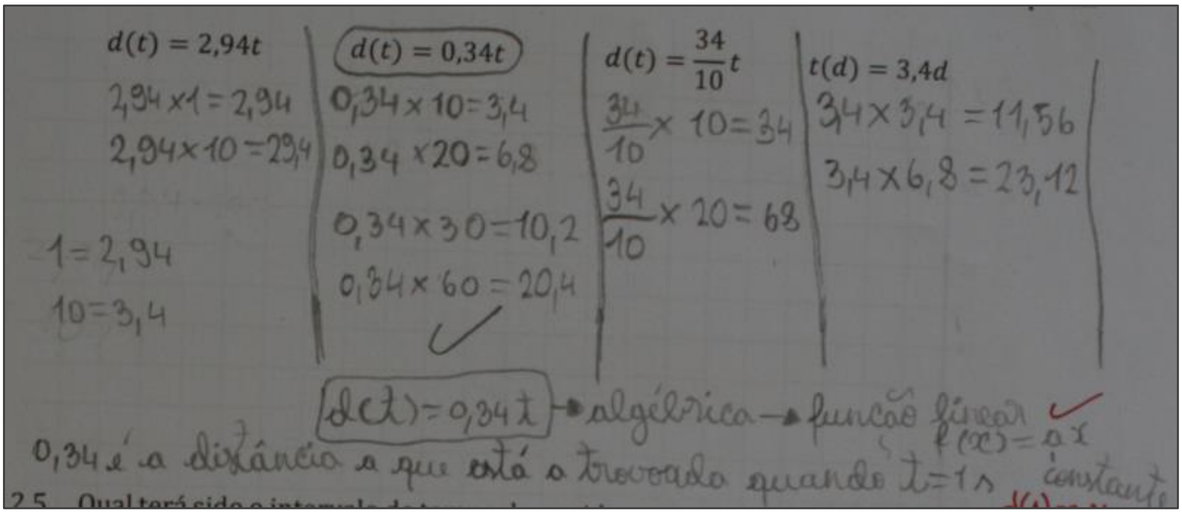


Figura 20 - Resposta do Samuel à questão 2.4. da Tarefa 1

O Jorge, como vemos na Figura 21, desenvolveu uma *justificação* correta, evidenciando compreensão da relação entre a distância e o tempo e chegando ao valor da constante de proporcionalidade direta. No entanto um erro de cálculo levou-o a escolher expressão errada.

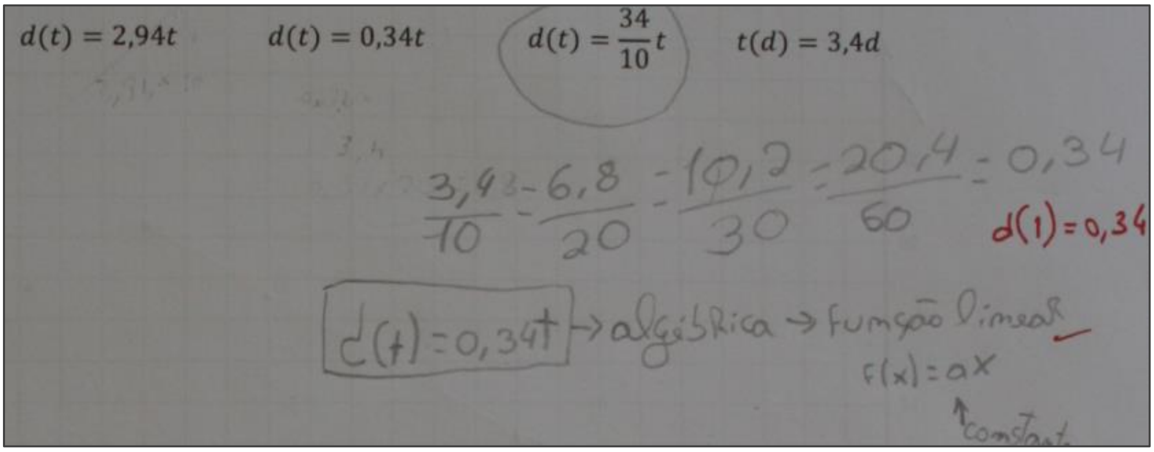


Figura 21 - Resposta do Jorge à questão 2.4. da Tarefa 1

Questão 2.5.

A última pergunta desta tarefa, questionava os alunos sobre qual teria sido o intervalo de tempo decorrido entre o relâmpago e o trovão.

A maioria dos alunos, tal como a Luísa (Figura 22) e a Teresa (Figura 23), não recorreu à expressão algébrica encontrada na questão 2.4., optando por realizar os cálculos a partir dos dados apresentados na tabela e respondendo corretamente 2 minutos e 30 segundos.

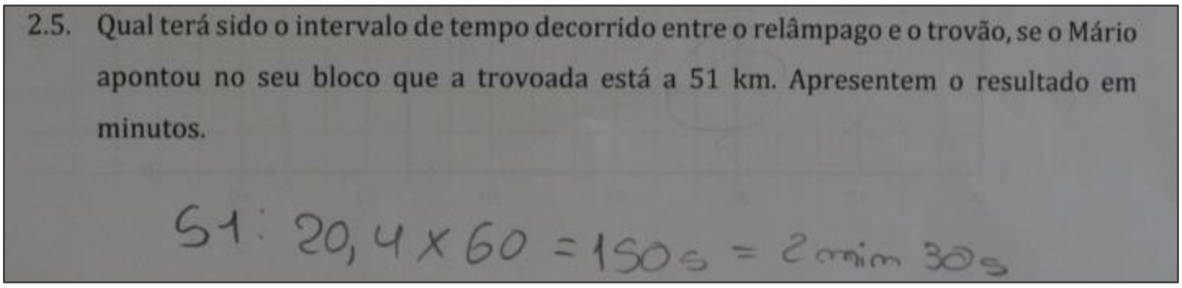


Figura 22 - Resposta da Luísa à questão 2.5. da Tarefa 1

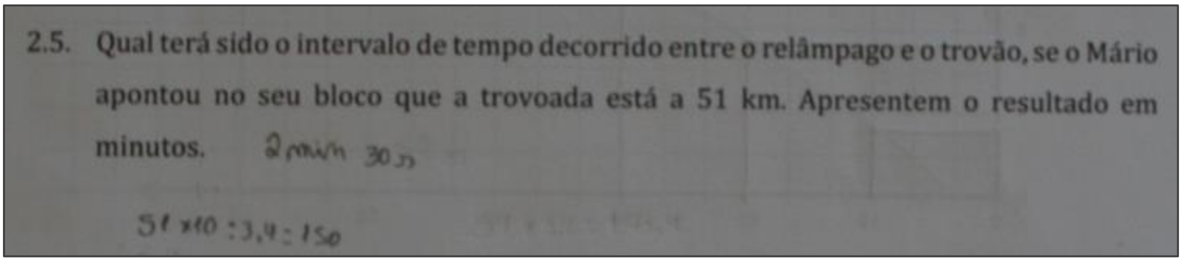


Figura 23 - Resposta da Teresa à questão 2.5. da Tarefa 1

Apesar dos cálculos efetuados pelo aluno Filipe (Figura 24), recorrendo à expressão algébrica encontrada em 2.4. estarem corretos e mostrarem compreensão dos parâmetros da função linear, apresentou a resposta com as unidades incorretas (em segundos), ignorando que o resultado era solicitado em minutos.

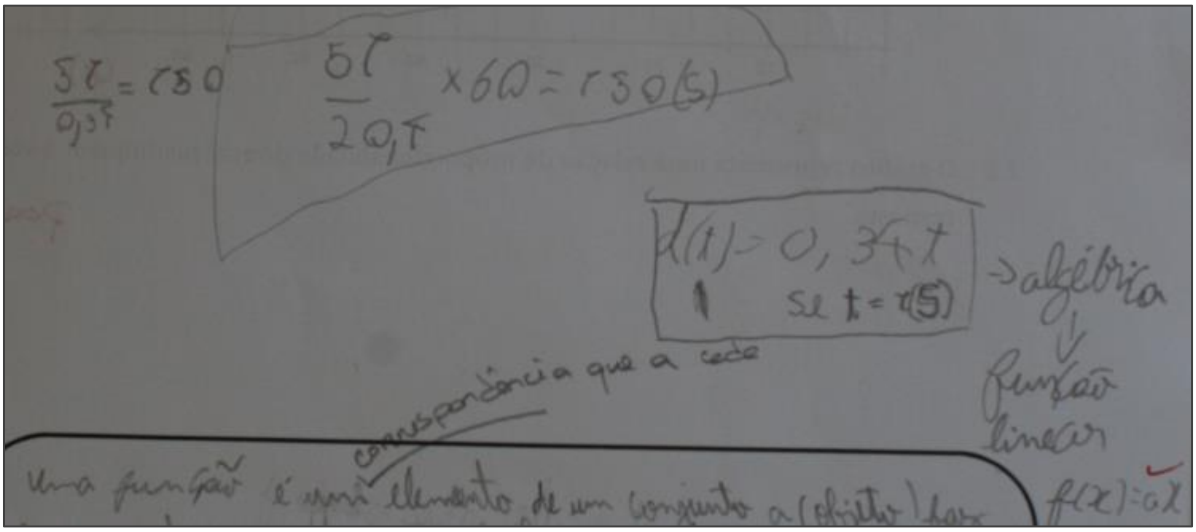


Figura 24 - Resposta do Filipe à questão 2.5. da Tarefa 1

A aluna Joana (Figura 25) também recorreu à expressão algébrica para responder à questão, refletindo compreensão da mesma e a apresentando a resposta na unidade pedida. Há a assinalar a dificuldade da aluna na utilização da simbologia, usando um sinal de igual onde deveria usar uma equivalência.

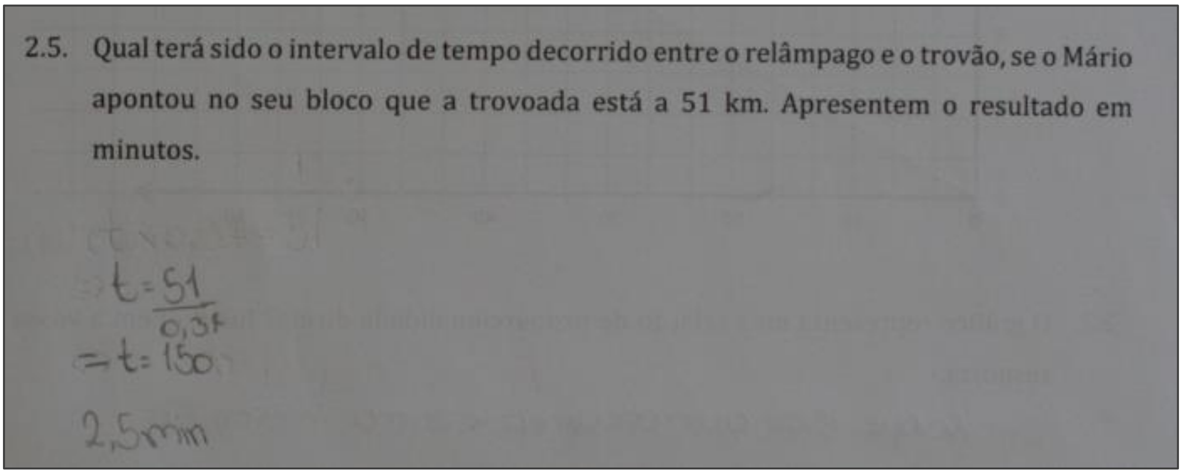


Figura 25 - Resposta da Joana à questão 2.5. da Tarefa 1

Analisando as respostas à questão 2, verifica-se que os alunos tiveram a oportunidade de trabalhar a conversão de *representações*, nomeadamente da representação tabular para a gráfica e destas, para a algébrica. Houve ainda a oportunidade de equacionarem respostas, mostrando compreensão da relação entre as variáveis envolvidas e trabalharam a representação em linguagem natural, numérica, a resolução de equações do primeiro grau e a noção de relação de proporcionalidade direta.

Relativamente aos *processos de raciocínio* utilizados na questão 2., estiveram presentes a *justificação*, a *conjetura* e a *generalização* suportadas pelas *representações* verbal escrita, numérica, tabular e algébrica. A generalidade da turma mostrou conseguir efetuar as conversões de *representações* da função de proporcionalidade direta solicitadas e responder às questões utilizando os dados de cada uma delas, verificando-se uma preferência na utilização das *representações* verbal escrita e numérica na *justificação* das respostas dadas e uma preferência pela representação tabular em detrimento da representação algébrica, para obter os dados necessários à resolução da questão.

Uma das maiores dificuldades observadas nas respostas dos alunos foi a capacidade de se expressarem. Esta dificuldade é visível na ausência da apresentação de uma resposta à questão colocada, ficando-se a atividade pelas ações necessárias para chegar à resposta, sem que a resposta propriamente dita seja elaborada. Também as justificações apresentadas, se encontram, por vezes, incompletas e escassas na utilizam de termos matemáticos. Outra dificuldade observada tem a ver com o facto já mencionado acerca das *representações* privilegiadas, que parece denotar alguma falta de compreensão do significado dos parâmetros da expressão algébrica da função de proporcionalidade direta.

Em relação à compreensão da noção de função de proporcionalidade direta, pelas respostas dadas, podemos depreender que há uma boa compreensão desta relação quando expressa graficamente ou por tabela. Já a representação algébrica parece ser evitada pelos alunos, podendo indiciar dificuldades na interpretação da *generalização* das situações e na identificação dos parâmetros envolvidos na construção do conceito matemático de função.

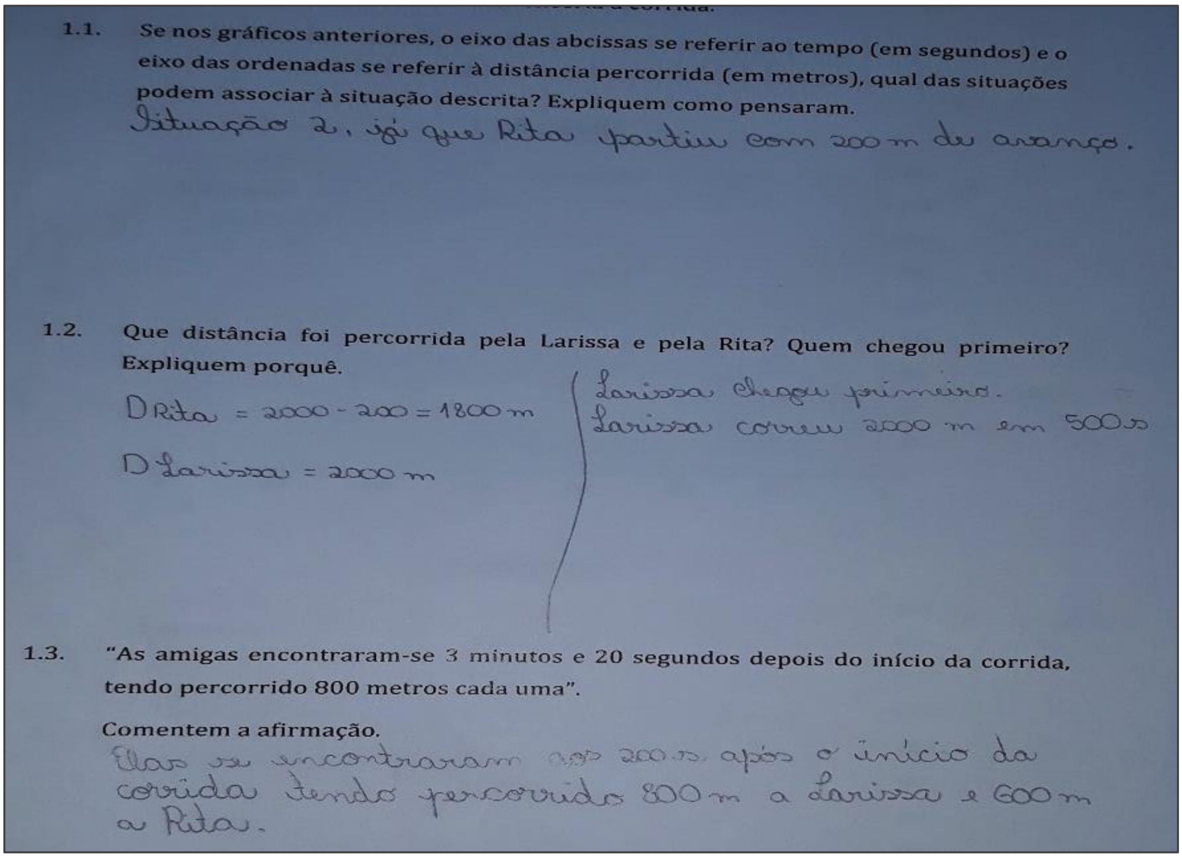
5.2 Tarefa 2 | Sequências gráficas

A tarefa é constituída por questões que envolvem a interpretação de uma situação contextualizada em linguagem natural apoiada graficamente pela representação de alguns pontos que servirão de ajuda à representação algébrica de funções afim, uma linear e outra não linear. Foi realizada de modo a proporcionar o primeiro contacto dos alunos com a função afim a partir da observação de sequências de modo a contribuir para o desenvolvimento da compreensão das noções de variável e de função, baseado na noção de variação e relação entre variáveis.

Questões 1.1., 1.2. e 1.3.

As três primeiras questões, na generalidade, foram respondidas, mostrando compreensão na leitura e interpretação gráfica.

A aluna Camila (Figura 26), evidencia compreensão na leitura gráfica e utiliza essencialmente a representação verbal escrita para responder e justificar as suas respostas. Na questão 1.2., a aluna recorre também à representação numérica, determinando a distância percorrida por cada uma das amigas, identificando que num dos casos a ordenada na origem é 200 m. Nesta resposta a aluna revela ainda compreensão das noções de variável dependente e independente e da relação entre ambas, já que a linguagem utilizada na resposta fornece informação acerca do modo como esta aluna utilizou as *representações* construídas para chegar ao resultado. Na questão 1.3. mais uma vez recorre à representação verbal escrita e embora não comente o que está errado na afirmação, reescreve-a, corrigindo-a. Nesta resposta a aluna poderia completar justificando porque é que a afirmação está errada.



1.1. Se nos gráficos anteriores, o eixo das abcissas se referir ao tempo (em segundos) e o eixo das ordenadas se referir à distância percorrida (em metros), qual das situações podem associar à situação descrita? Expliquem como pensaram.

Situação 2, já que Rita partiu com 200 m de avanço.

1.2. Que distância foi percorrida pela Larissa e pela Rita? Quem chegou primeiro? Expliquem porquê.

DRita = 2000 - 200 = 1800 m

DLarissa = 2000 m

Larissa chegou primeiro.
Larissa correu 2000 m em 500 s

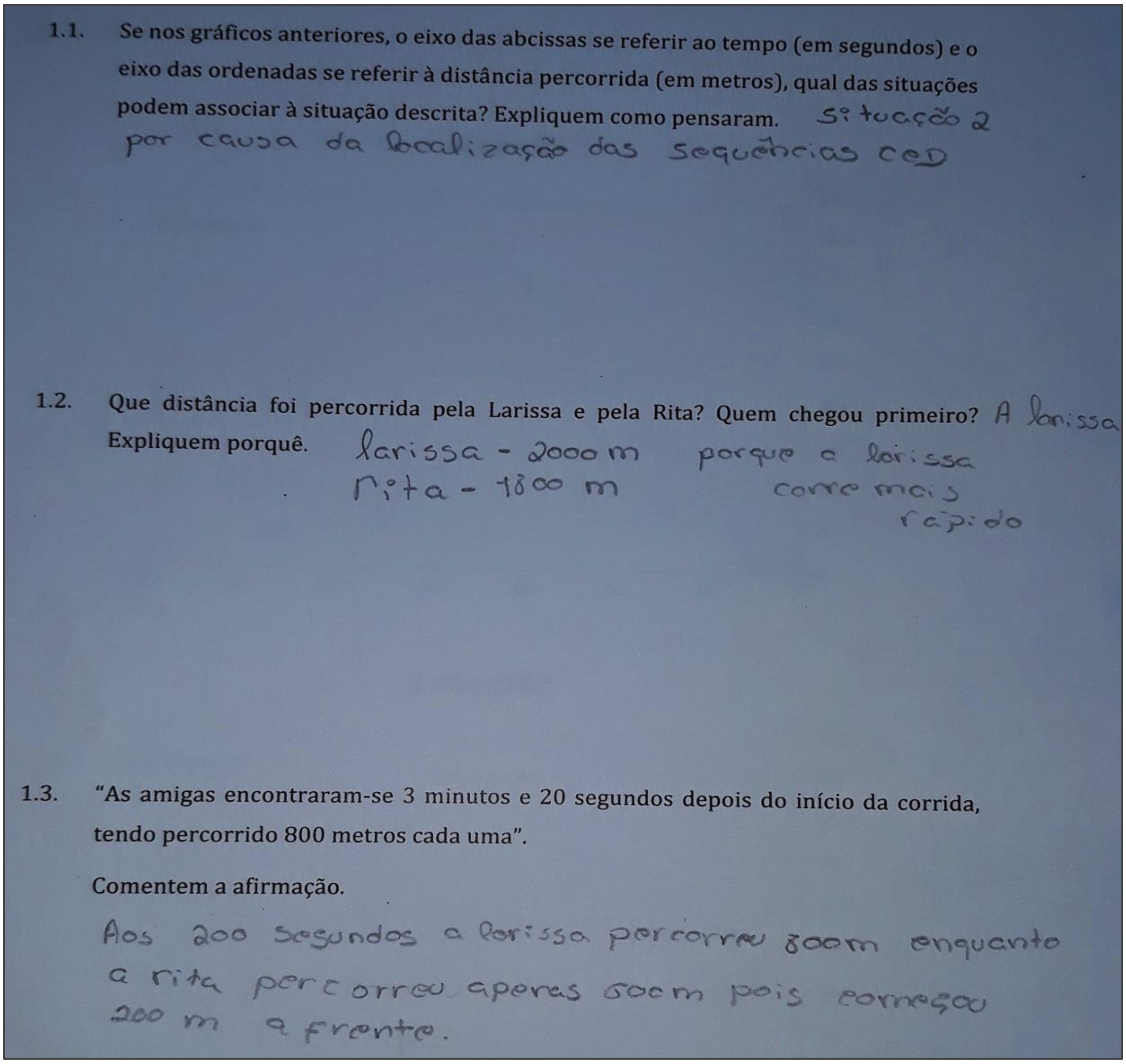
1.3. "As amigas encontraram-se 3 minutos e 20 segundos depois do início da corrida, tendo percorrido 800 metros cada uma".

Comentem a afirmação.

Elas se encontraram aos 200 s após o início da corrida tendo percorrido 800 m a Larissa e 600 m a Rita.

Figura 26 - Respostas da aluna Camila às questões 1.1., 1.2. e 1.3. da Tarefa 2

Também a aluna Débora (Figura 27) responde recorre essencialmente à representação verbal escrita, contudo a *justificação* da resposta à questão 1.1. não é clara, utilizando uma linguagem que não favorece a comunicação matemática e pode ser interpretada de forma ambígua ou conduzir a associações incorretas. Na questão 1.2. a aluna, embora mais uma vez responda corretamente, mantém as dificuldades ao nível da *justificação*, não explicando como chegou à distância percorrida pelas amigas. A aluna justifica a maior distância percorrida pela Larissa com o facto de esta correr mais rápido, mas não fica claro se a aluna compreende o significado do avanço com que a Rita começa a corrida. Na questão 1.3., a aluna mais uma vez apresenta uma *justificação* incompleta, corrigindo a frase sem, no entanto, explicar onde reside o erro e porquê.



1.1. Se nos gráficos anteriores, o eixo das abcissas se referir ao tempo (em segundos) e o eixo das ordenadas se referir à distância percorrida (em metros), qual das situações podem associar à situação descrita? Expliquem como pensaram. Situação 2 por causa da localização das sequências C e D

1.2. Que distância foi percorrida pela Larissa e pela Rita? Quem chegou primeiro? Expliquem porquê. A larissa

larissa - 2000 m
Rita - 1800 m

porque a larissa corre mais rápido

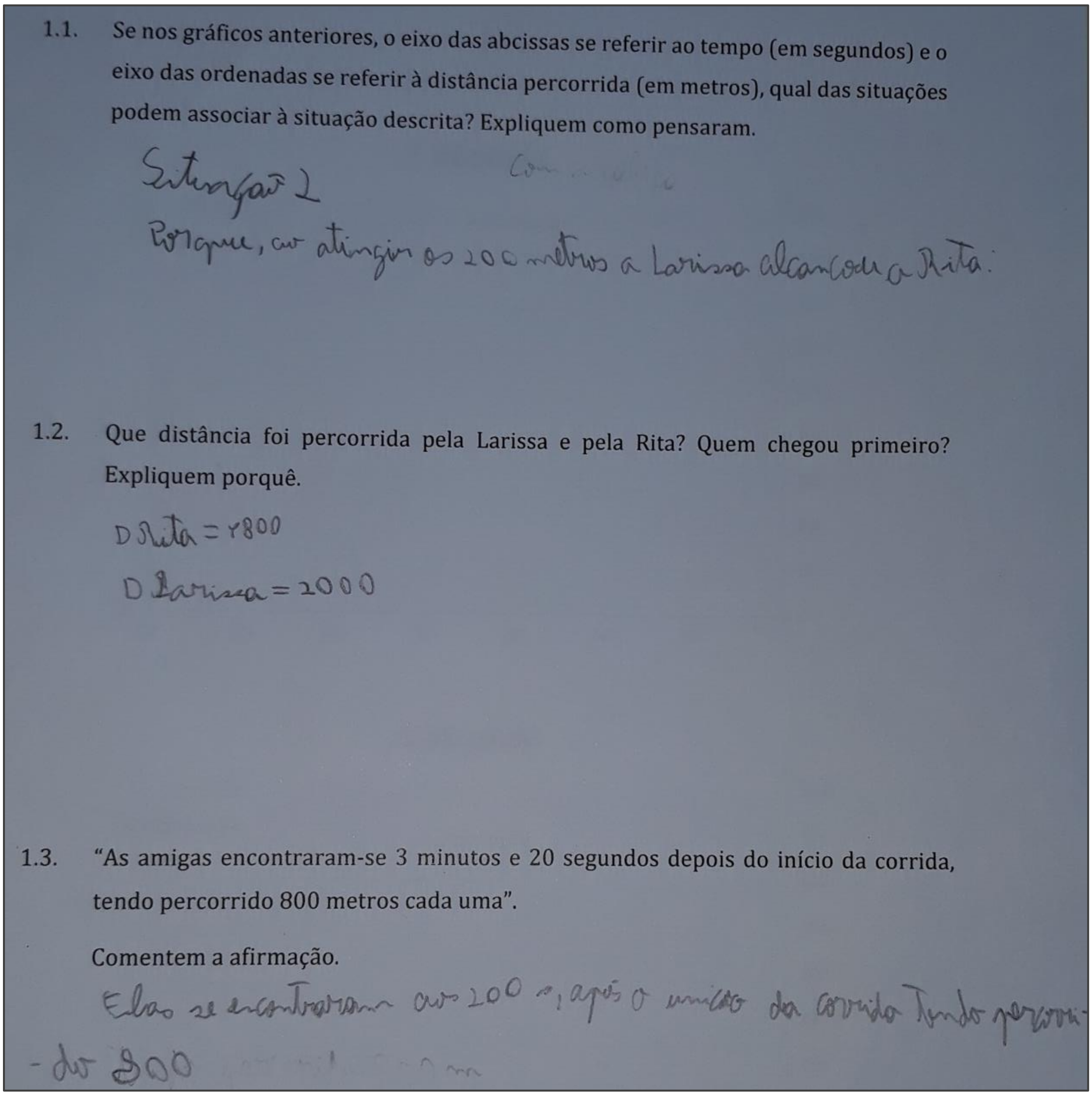
1.3. "As amigas encontraram-se 3 minutos e 20 segundos depois do início da corrida, tendo percorrido 800 metros cada uma".

Comentem a afirmação.

Aos 200 segundos a larissa percorreu 800m enquanto a rita percorreu apenas 600m pois começou 200 m a frente.

Figura 27 - Respostas da aluna Débora às questões 1.1., 1.2. e 1.3. da Tarefa 2

No caso das respostas do aluno Filipe (Figura 28) pode-se observar que apresenta dificuldades na interpretação gráfica, apesar de, na questão 1.1., identificar corretamente a situação descrita em linguagem natural, a *justificação* que apresenta é pouco objetiva, podendo significar que o Filipe não compreendeu o gráfico. Na questão 1.2. o aluno consegue estabelecer a conexão entre o enunciado e a representação gráfica, identificando a distância percorrida por cada uma das amigas, contudo não responde à questão de quem chegou primeiro e revela dificuldades em justificar as suas constatações. Na questão 1.3. o aluno tem oportunidade de demonstrar compreensão da leitura gráfica e a sua adaptação ao contexto real, contudo limita-se a reescrever a frase que era suposto comentar e detetar o erro, demonstrando mais uma vez dificuldades na *justificação*.


1.1. Se nos gráficos anteriores, o eixo das abcissas se referir ao tempo (em segundos) e o eixo das ordenadas se referir à distância percorrida (em metros), qual das situações podem associar à situação descrita? Expliquem como pensaram.

Situação 2
Porque, ao atingir os 200 metros a Larissa alcançou a Rita.

1.2. Que distância foi percorrida pela Larissa e pela Rita? Quem chegou primeiro? Expliquem porquê.

D Rita = 1800
D Larissa = 2000

1.3. "As amigas encontraram-se 3 minutos e 20 segundos depois do início da corrida, tendo percorrido 800 metros cada uma".

Comentem a afirmação.

Elas se encontraram aos 200 s, após o início da corrida tendo percorri-
-do 800

Figura 28 - Respostas do aluno Filipe às questões 1.1., 1.2. e 1.3. da Tarefa 2

Nas respostas às três questões anteriores os alunos recorreram fundamentalmente à conversão da representação gráfica para a representação verbal escrita, diferindo as respostas, essencialmente, na escolha da estratégia usada e na forma mais ou menos completa com que são justificadas.

A generalidade dos alunos mostrou compreensão da representação gráfica, verificando-se que na questão 1.2. a maioria dos alunos recorreu à interpretação do gráfico para determinar a distância percorrida por cada uma das amigas, reconhecendo que a Rita parte com um avanço de 200 metros e identificando que a Larissa é mais rápida. É o caso da aluna Camila, cuja resposta revela ainda compreensão das noções de variável dependente e independente e da relação entre ambas. Este entendimento foi visível na maioria das respostas e permitiu que os alunos fizessem a conversão da representação gráfica para as *representações* verbal escrita e numérica corretamente.

Relativamente aos *processos de raciocínio*, foi usada a *justificação*, suportada maioritariamente pela representação verbal escrita e por vezes numérica, sendo de assinalar, no entanto, que um número considerável de alunos não justificou as suas opções ou apresentou justificações incompletas. É o caso dos alunos Débora e Filipe, referidos anteriormente, que apresentam justificações pouco claras ou incompletas na generalidade das suas respostas.

Mais uma vez se verifica dificuldade na expressão e exposição das ideias utilizando linguagem matemática, sendo que a *justificação* é o processo de raciocínio mais diretamente afetado por este facto. Na questão 1.3., os alunos tiveram a oportunidade de comentar uma frase mostrando compreensão do vínculo entre a representação gráfica e o contexto real do problema. Contudo, mais uma vez se observa que os alunos desenvolvem pouco as respostas às questões mais abertas, facto que pode ter a ver com a falta de hábito desta prática ou com alguma dificuldade no uso e interpretação da terminologia relativa ao conceito de função e de toda a simbologia envolvida.

Em relação à compreensão da noção de função, pelas respostas dadas, podemos depreender que há uma boa compreensão da relação entre as variáveis dependente e independente quando expressa graficamente.

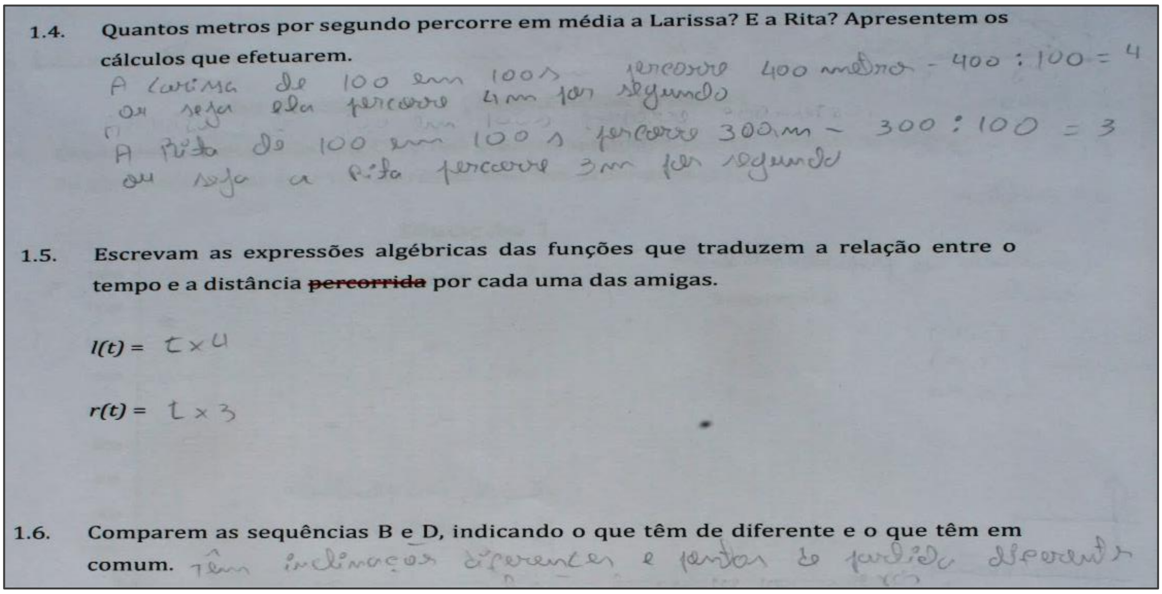
Há a salientar que nenhum dos alunos recorreu à informação disponibilizada no enunciado em linguagem natural, a partir da qual poderiam ter em conta que a Rita percorre 3 metros por segundo e parte com um avanço inicial de 200 metros e assim efetuar a multiplicação do tempo decorrido (em segundos), pela distância percorrida por segundo (em metros), seguida da adição dos 200 metros iniciais. Verificando-se, assim, a preferência dos alunos por fazer a leitura dos dados no gráfico.

Outra constatação é que nenhum aluno recorreu à representação tabular onde poderia colocar os diversos valores do tempo e da distância percorrida e procurar regularidades que lhes permitissem determinar a distância percorrida pela Rita em 100 segundos. Do mesmo modo se verifica que nenhum aluno procurou estabelecer a expressão algébrica que traduz a distância percorrida em função do tempo e obter a imagem correspondente a $x = 100$.

Questões 1.4., 1.5. e 1.6.

Nestas questões os alunos são chamados a reconhecer as características da função linear e afim, a fazer a interpretação gráfica e a efetuar a conversão dessa representação noutras, observando-se que a generalidade da turma revelou uma boa compreensão no que toca a função linear e alguma dificuldade relativamente à função afim, nas respostas às questões colocadas.

É o caso do aluno Jorge (Figura 29), cujas respostas mostram compreensão da noção de função linear, da sua representação gráfica e também compreensão da diferença entre a distância percorrida e a distância à origem. O aluno recorre à representação numérica para, a partir dos dados lidos no gráfico, relacionar corretamente as duas variáveis e efetuar os cálculos que o levam à distância percorrida por segundo e à resposta que dá em linguagem verbal escrita, justificando corretamente as suas ideias. Na questão 1.5. o aluno revela capacidade de *generalização* e compreensão na conversão da função linear para a representação algébrica. Contudo, embora tenha distinguido as duas funções na questão 1.4., considerando o avanço de 200 m da Rita, na questão 1.5., não consegue reproduzir esse conhecimento na representação algébrica da função afim. Relativamente à *generalização* da função afim, o aluno assume que, tal como na função linear, o coeficiente de t é a distância percorrida por segundo, ignorando o facto da Rita não ter iniciado a corrida na origem do referencial. Na resposta à questão 1.6. o aluno volta a revelar dificuldades, embora reconheça que os pontos de partida são diferentes diz que os segmentos de reta têm inclinações diferentes, o que não é verdade. Além disso, na sua *justificação*, o aluno, tal como a restante turma, nunca faz uso dos termos matemáticos corretos em cada situação, como seria o caso de ordenada na origem ou declive.


1.4. Quantos metros por segundo percorre em média a Larissa? E a Rita? Apresentem os cálculos que efetuarem.

A Larissa de 100 em 100 s percorre 400 metros - 400 : 100 = 4
ou seja ela percorre 4 m por segundo
A Rita de 100 em 100 s percorre 300 m - 300 : 100 = 3
ou seja a Rita percorre 3 m por segundo

1.5. Escrevam as expressões algébricas das funções que traduzem a relação entre o tempo e a distância ~~percorrida~~ por cada uma das amigas.

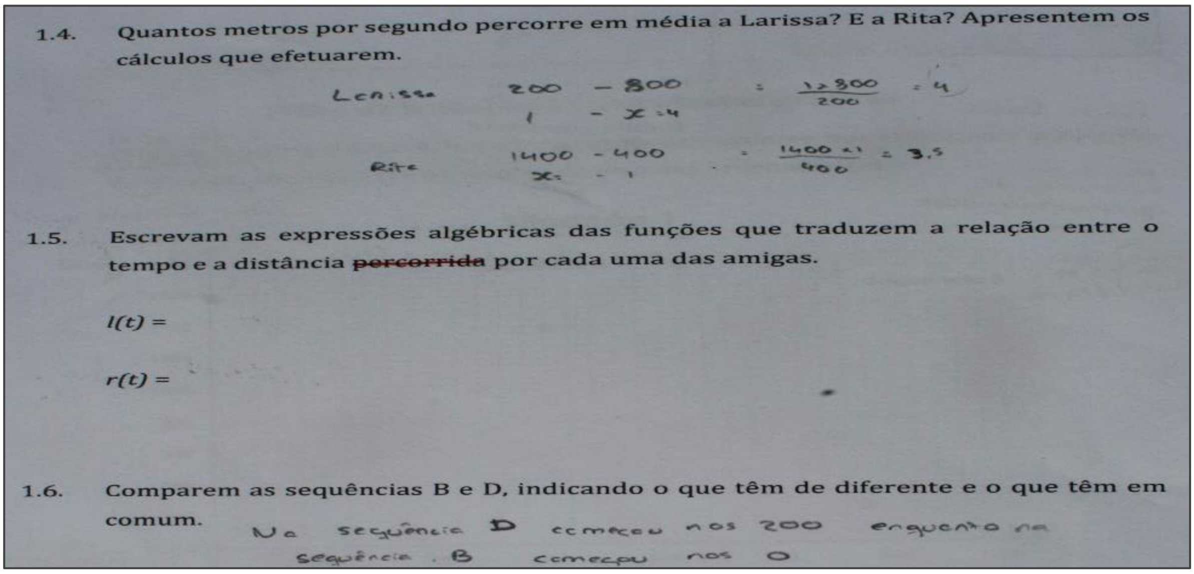
$l(t) =$ t × 4

$r(t) =$ t × 3

1.6. Comparem as sequências B e D, indicando o que têm de diferente e o que têm em comum. Têm inclinações diferentes e pontos de partida diferentes

Figura 29 - Respostas do aluno Jorge às questões 1.4., 1.5. e 1.6. da Tarefa 2

Na questão 1.4. alguns alunos apresentam os cálculos revelando ter equacionado a situação recorrendo a uma regra de três simples para determinar a distância percorrida por segundo. É o caso do aluno Gustavo (Figura 30), que não equaciona corretamente o caso da Rita, não contando com o facto de ela partir com 200 metros de avanço. Quanto à *generalização* pedida na questão 1.5., o aluno não dá qualquer resposta, mostrando uma possível dificuldade neste processo de raciocínio e na compreensão da representação algébrica de uma função. Na questão 1.6. limita-se a descrever o que observa no gráfico, mas não lhe dá significado nem refere outras características que nos permitam aferir acerca do seu entendimento da noção de função, deixando a resposta incompleta e sem *justificação*. Também este aluno, à semelhança da generalidade da turma, usa uma linguagem pouco clara e escassa em termos matemáticos.


1.4. Quantos metros por segundo percorre em média a Larissa? E a Rita? Apresentem os cálculos que efetuarem.

Larissa 200 — 800 : $\frac{1 \times 800}{200} = 4$

1 — x = 4

Rita 1400 - 400 : $\frac{1400 \times 1}{400} = 3.5$

x - 1

1.5. Escrevam as expressões algébricas das funções que traduzem a relação entre o tempo e a distância ~~percorrida~~ por cada uma das amigas.

$l(t) =$

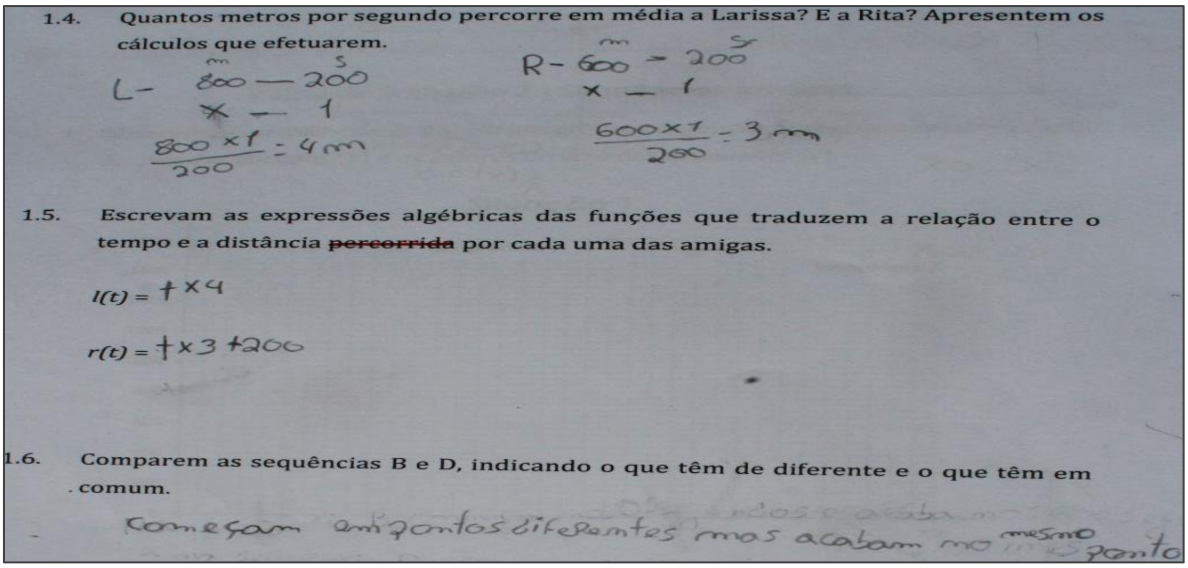
$r(t) =$

1.6. Comparem as sequências B e D, indicando o que têm de diferente e o que têm em comum.

Na sequência D começou nos 200 enquanto na sequência B começou nos 0

Figura 30 - Respostas do aluno Gustavo às questões 1.4., 1.5. e 1.6. da Tarefa 2

Também o aluno Hugo (Figura 31) equaciona a situação, revelando compreensão na conversão da representação gráfica da função linear e afim para a representação algébrica recorrendo à regra de três simples. Na questão 1.5. o aluno elabora corretamente a mesma conversão, desta vez, evidenciando capacidade de generalizar a situação descrita e compreensão da distinção que marca a função afim no contexto do problema. Apesar disso, na questão 1.6. o aluno adota uma linguagem matematicamente pouco clara e parece ignorar os significados matemáticos dos conceitos aprendidos.


1.4. Quantos metros por segundo percorre em média a Larissa? E a Rita? Apresentem os cálculos que efetuarem.

L- 800 — 200 (m, s)

x — 1

$\frac{800 \times 1}{200} = 4m$

R- 600 — 200 (m, s)

x — 1

$\frac{600 \times 1}{200} = 3m$

1.5. Escrevam as expressões algébricas das funções que traduzem a relação entre o tempo e a distância ~~percorrida~~ por cada uma das amigas.

$l(t) = t \times 4$

$r(t) = t \times 3 + 200$

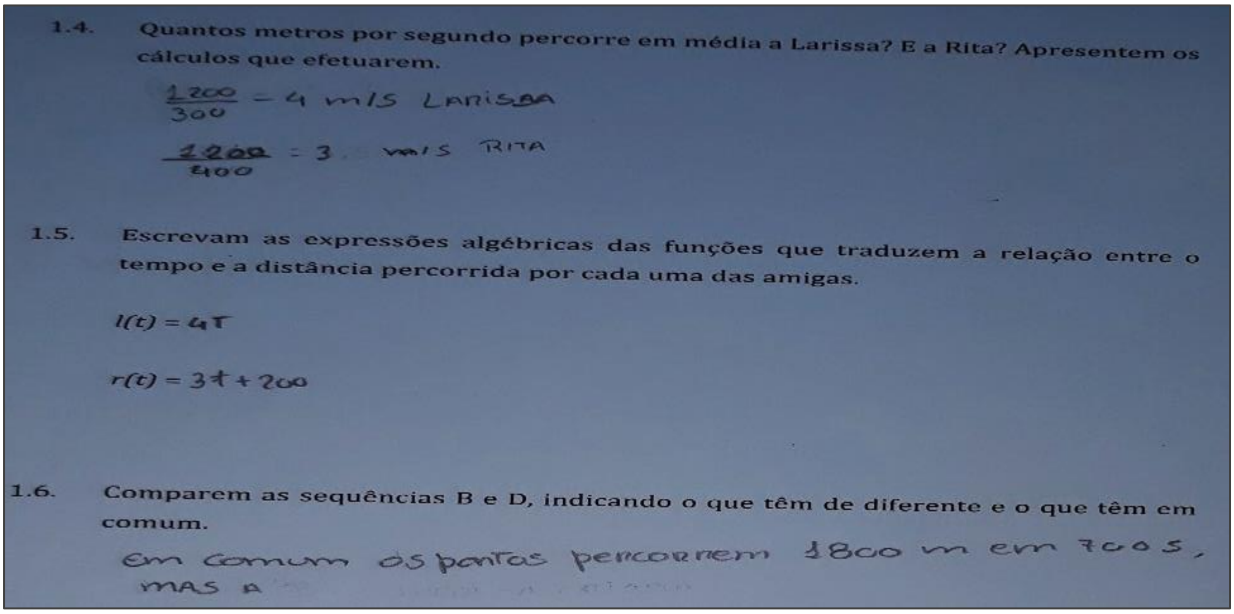
1.6. Comparem as sequências B e D, indicando o que têm de diferente e o que têm em comum.

começam em pontos diferentes mas acabam no mesmo ponto

Figura 31 - Respostas do aluno Hugo às questões 1.4., 1.5. e 1.6. da Tarefa 2

Nas respostas da aluna Sónia (Figura 32) são visíveis os diversos aspetos da sua compreensão da noção de função. Esta aluna identificou as regularidades existentes e a partir do teste da sua *conjetura*, responde à questão 1.4., embora esteja em falta a elaboração da resposta propriamente dita. Na questão 1.5. não revelou qualquer dificuldade na *generalização* e representação algébrica das duas funções, mostrando conhecimento dos parâmetros envolvidos e do seu significado.

Na resposta à questão 1.6., embora o comentário efetuado, corresponda a um facto verdadeiro, a linguagem usada não é a mais adequada. Além disso, sendo esta uma questão aberta, era esperado que fossem analisadas mais relações e desenvolvidos os comentários, o que se verificou uma dificuldade para a generalidade dos alunos.


1.4. Quantos metros por segundo percorre em média a Larissa? E a Rita? Apresentem os cálculos que efetuarem.

$\frac{1200}{300} = 4$ m/s LARISSA

$\frac{1200}{400} = 3$ m/s RITA

1.5. Escrevam as expressões algébricas das funções que traduzem a relação entre o tempo e a distância percorrida por cada uma das amigas.

$l(t) = 4T$

$r(t) = 3t + 200$

1.6. Comparem as sequências B e D, indicando o que têm de diferente e o que têm em comum.

Em comum os pontos percorrem 1800 m em 700 s, MAS A

Figura 32 - Resposta da aluna Sónia às questões 1.4., 1.5. e 1.6. da Tarefa 2

Houve também alunos, como é o caso do Samuel, que estando ainda muito focados nas características da função linear revelam dificuldades em aplicar o conhecimento já adquirido a uma situação diferente, como é o caso da função afim não linear.

Na resposta à questão 1.4., este aluno (Figura 33) recorre a coordenadas de pontos no gráfico, mostrando compreender a representação gráfica da função linear, embora não tenha conseguido aplicar esse conhecimento à situação da função afim, deixando a resposta incompleta. Além disso, o uso das unidades não é o correto, pelo que fica a dúvida acerca da compreensão acerca da relação entre as variáveis.

Na questão 1.5., o aluno revela alguma aptidão na manipulação algébrica e conhecimento dos conceitos de imagem e objeto, bem como da forma geral da função linear, convertendo o enunciado numa expressão algébrica geral. No entanto, depois disso, não conseguiu perceber que já tinha encontrado o coeficiente de *x* na resposta anterior, revelando falta de noção do conceito de declive ou coeficiente de *x* na função linear. Na questão 1.6. o aluno não conseguiu terminar a resposta nem fazer um comentário correto pois parece não reconhecer as características da função afim.

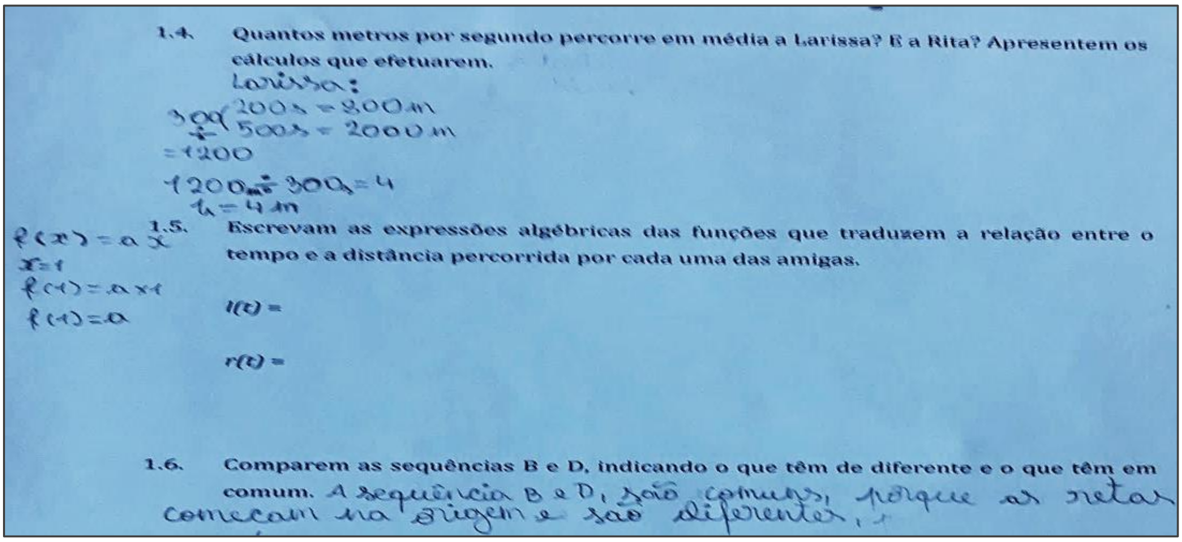


Figura 33 - Resposta do aluno Samuel às questões 1.4., 1.5. e 1.6. da Tarefa 2

No geral, os alunos interpretaram a situação no contexto real e, em determinadas alíneas, utilizaram uma sequência de passos para conseguirem dar resposta ao problema. Alguns alunos recorreram também a uma equação algébrica para apoiarem a sua resposta, mostrando compreensão dos conceitos que estavam a usar.

Relativamente aos *processos de raciocínio*, foi usada a *justificação*, suportada maioritariamente pela representação verbal escrita e numérica. Foi também usada a *generalização*, não só na questão 1.5., onde era expectável, já que era solicitada a expressão algébrica das funções, mas também na questão 1.4., em que alguns alunos optaram por equacionar a resolução a partir da situação particular.

As questões 1.4. e 1.5. podem ser resolvidas usando várias estratégias, porém, nas situações em que não existe proporcionalidade direta, muitas das estratégias que os alunos estão habituados a utilizar para resolver problemas rapidamente deixam de funcionar. Na verdade, com muita frequência, os alunos usam estratégias porque assumem existir proporcionalidade direta em situações em que tal relação não existe. Este facto verificou-se na generalidade destas respostas em que há nitidamente uma dificuldade na representação numérica e/ou algébrica da função afim não linear.

As dificuldades de expressão e linguagem mantém-se, notando-se principalmente em justificações pouco claras ou incompletas. Esta dificuldade torna-se muito evidente principalmente em questões mais abertas, como é o caso da questão 1.6., em que os alunos ficam muito aquém no que respeita ao desenvolvimento dos comentários, quer por dificuldade em expressarem ideias, quer por dificuldades no uso de linguagem matemática clara.

Em relação à compreensão da noção de função, parece haver um bom entendimento da noção de função linear, embora nalguns casos revelem dificuldade em determinar um objeto que corresponde a uma imagem dada em situações contextualizadas. Contudo, relativamente à função afim, há dificuldades que se prendem com as características desta função no contexto do problema. Estas dificuldades manifestam-se, essencialmente, na falta de entendimento do comportamento das variáveis envolvidas, principalmente quando expresso numericamente e algebricamente e são evidentes, sobretudo na conversão da representação gráfica para a representação algébrica.

5.3 Tarefa A | A poupança da Laís

Relativamente a esta tarefa devo recordar que foi realizada pelos alunos de forma autónoma, em casa[1]. De referir que apenas três alunos, todos de nível bom, entregaram a sua resolução, pelo que a análise é pouco representativa do que pode ser o desempenho da turma.

Questões 1.1. e 1.2.

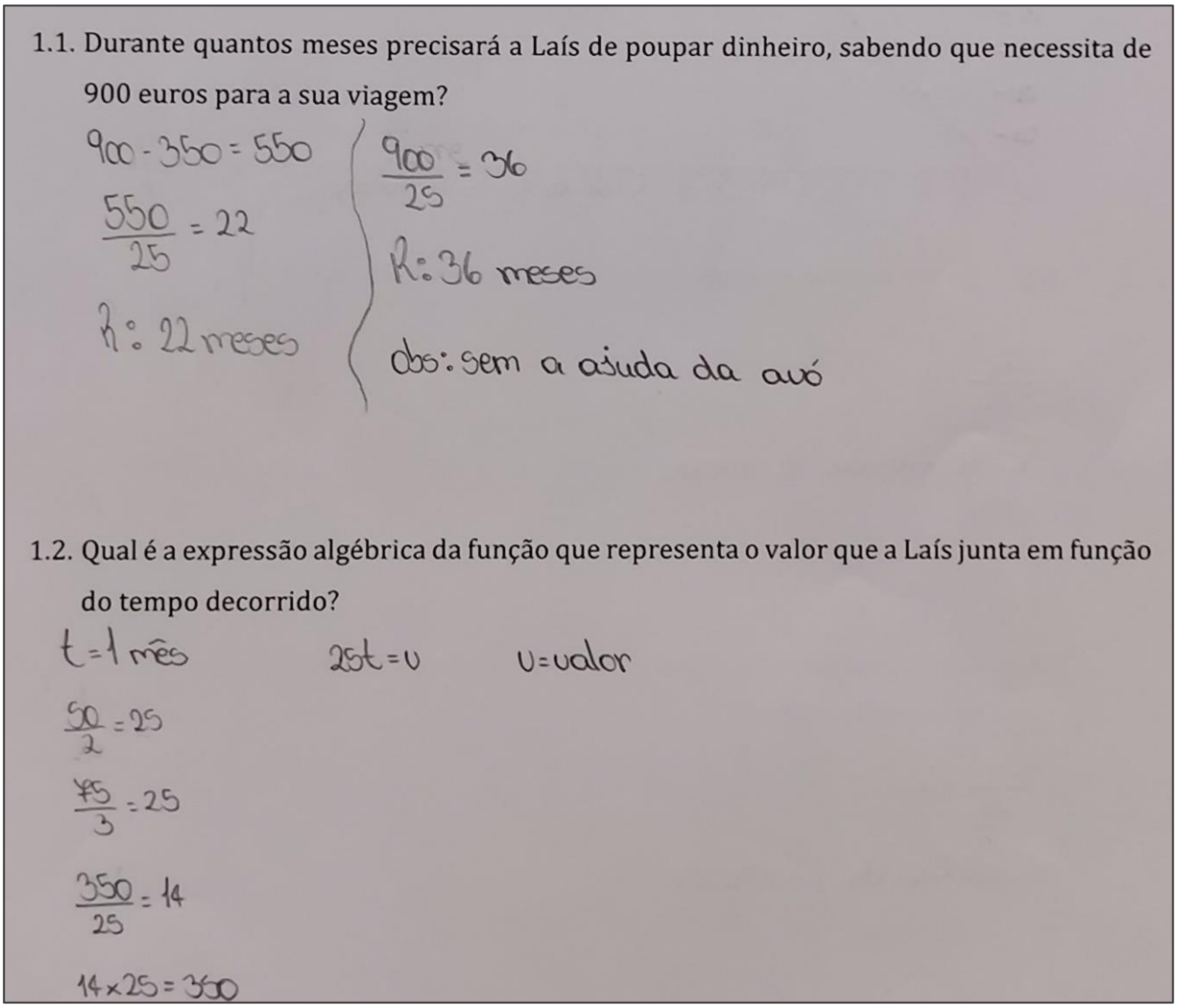
Na resposta a estas questões os alunos utilizaram a representação verbal escrita e numérica evidenciando, na generalidade, compreender a relação entre as variáveis tempo e valor de dinheiro acumulado, bem como a influência dos 350 euros iniciais. Há a registar ainda alguma dificuldade na representação algébrica da função afim e no uso e compreensão da simbologia utilizada na representação algébrica de uma função.

A aluna Joana justificou a resposta à questão 1.1. (Figura 34) recorrendo aos dados apresentados e relacionando-os corretamente através da representação numérica. Subtraiu primeiro o valor inicial para demonstrar o valor que a "Laís necessitaria de poupar" e de seguida utilizando a divisão para chegar ao número de meses necessários para o fazer. A aluna vai mais além e determina também o tempo necessário, caso não existisse o valor inicial entregue pela avó. A resposta propriamente dita foi elaborada recorrendo à representação verbal escrita.

Relativamente à questão 1.2., aluna percebeu que não se trata de uma relação de proporcionalidade direta, contudo, ao tentar generalizar a situação descrita usou a mesma

[1] Assinalo que, por lapso, a questão 1.5. da tarefa está erradamente identificada como sendo a questão 1.1..

estratégia que usaria para uma proporcionalidade direta e escreveu a expressão de uma função linear, esquecendo o valor inicial que dado pela avó. A aluna embora determine paralelamente o número de meses que a Laís necessita para perfazer a soma de 350 euros, não consegue a abstração suficiente para transportar esse conhecimento para a representação algébrica da expressão.


1.1. Durante quantos meses precisará a Laís de poupar dinheiro, sabendo que necessita de 900 euros para a sua viagem?

$900 - 350 = 550$

$\frac{550}{25} = 22$

R: 22 meses

$\frac{900}{25} = 36$

R: 36 meses

obs: sem a ajuda da avó

1.2. Qual é a expressão algébrica da função que representa o valor que a Laís junta em função do tempo decorrido?

$t = 1$ mês $\quad 25t = v \quad v =$ valor

$\frac{50}{2} = 25$

$\frac{75}{3} = 25$

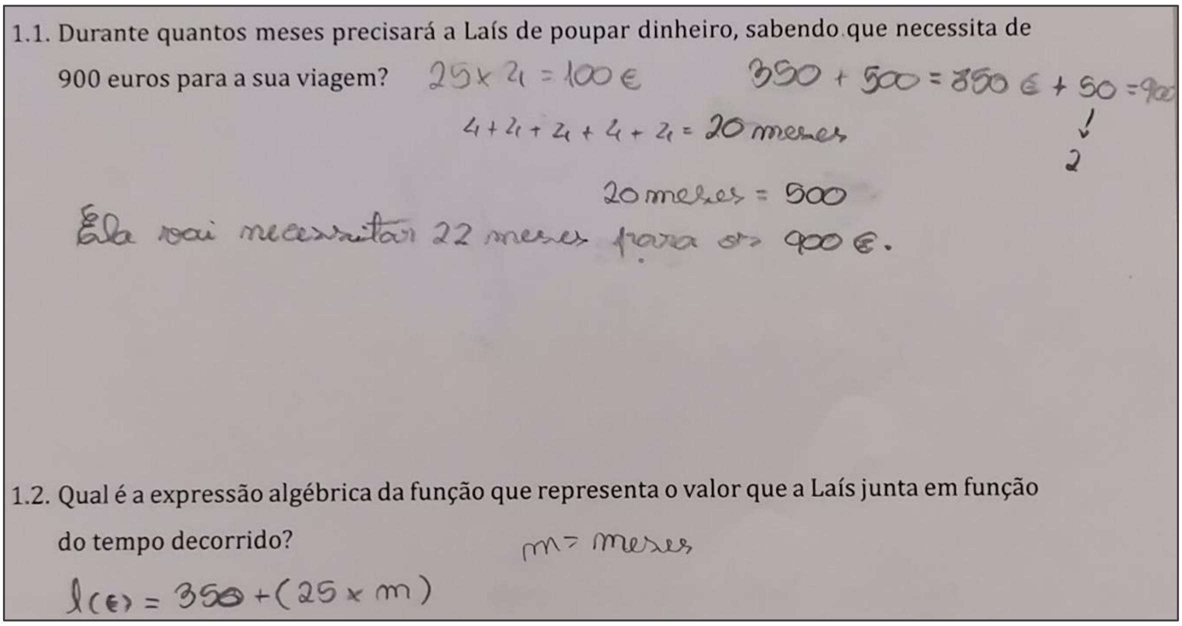
$\frac{350}{25} = 14$

$14 \times 25 = 350$

Figura 34 - Resposta da Aluna Joana às questões 1.1. e 1.2. da Tarefa A

No que respeita à resposta do aluno Rui (Figura 35) à questão 1.1., pode observar-se nitidamente a estratégia de resolução usada já que o aluno fez uma representação numérica muito fiel ao seu pensamento. O aluno parte de uma *conjetura*, que lhe parece que vai permitir chegar ao valor necessário e após verificar essa *conjetura*, recorre à tentativa e soma-lhe o valor em falta para atingir os 900 euros, transformando posteriormente esse valor no período de tempo e somando-o ao tempo anterior. O aluno dá a resposta convertendo os seus cálculos em representação verbal escrita.

Na questão 1.2., o aluno generaliza corretamente a situação descrita e representa a expressão algébrica, mostrando no entanto confusão no uso das variável "dinheiro em função do tempo *l(m)*”, escrevendo *l(€)*, indicando falta de entendimento do significado da simbologia utilizada.



1.1. Durante quantos meses precisará a Laís de poupar dinheiro, sabendo que necessita de 900 euros para a sua viagem?

25 x 4 = 100 €

350 + 500 = 850 € + 50 = 900

4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20 meses

2

20 meses = 500

Ela vai necessitar 22 meses para os 900 €.

1.2. Qual é a expressão algébrica da função que representa o valor que a Laís junta em função do tempo decorrido?

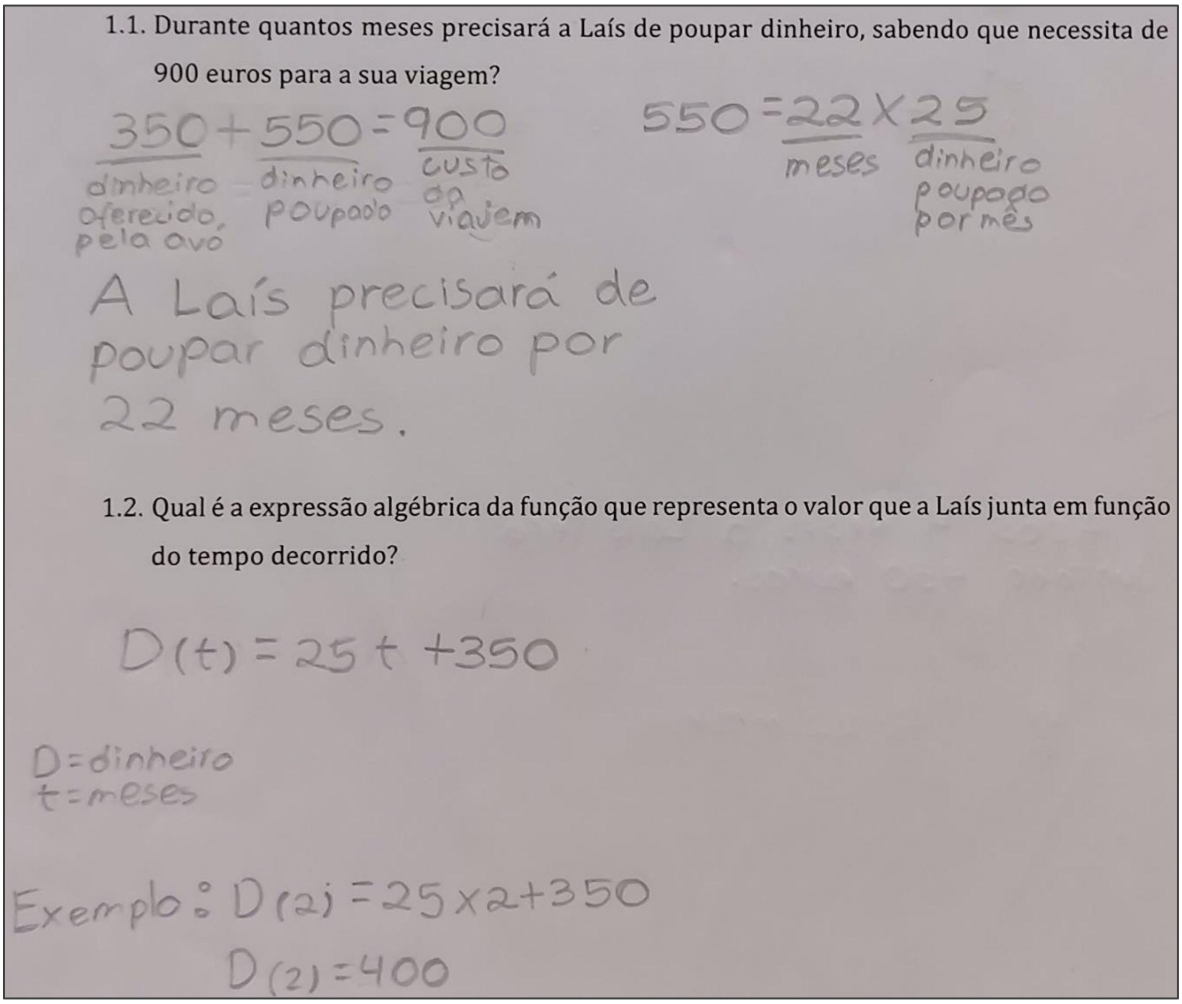
m = meses

l(€) = 350 + (25 x m)

Figura 35 - Resposta do Aluno Rui às questões 1.1. e 1.2. da Tarefa A

A resposta do aluno Tomás (Figura 36) à questão 1.1. é muito interessante, pois o aluno parece resolver o problema de forma inversa, começando por conjeturar o valor em falta para atingir os 900 euros representando a relação entre as variáveis quer de forma numérica quer de forma verbal escrita para definir as várias parcelas envolvidas. Depois o aluno volta a conjeturar para chegar ao número de meses necessário para atingir o valor total. De notar que o aluno não apresenta os cálculos efetuados, apenas equaciona a situação já com os resultados.

Na questão 1.2., o aluno representou de forma correta a expressão algébrica pedida, utilizando e identificando corretamente a simbologia associada. O aluno apresenta ainda a resolução da equação para uma situação hipotética de um período de 2 meses demonstrando nitidamente conhecimento do significado da simbologia envolvida.


1.1. Durante quantos meses precisará a Laís de poupar dinheiro, sabendo que necessita de 900 euros para a sua viagem?

$\underbrace{350}_{\text{dinheiro oferecido pela avó}} + \underbrace{550}_{\text{dinheiro poupado}} = \underbrace{900}_{\text{custo da viagem}}$

$550 = \underbrace{22}_{\text{meses}} \times \underbrace{25}_{\text{dinheiro poupado por mês}}$

A Laís precisará de poupar dinheiro por 22 meses.

1.2. Qual é a expressão algébrica da função que representa o valor que a Laís junta em função do tempo decorrido?

$D(t) = 25t + 350$

D=dinheiro
t=meses

Exemplo: $D(2) = 25 \times 2 + 350$
$D(2) = 400$

Figura 36 - Resposta do Aluno Tomás às questões 1.1. e 1.2. da Tarefa A

Questão 1.3.

Na questão 1.3. foi pedido aos alunos para fazerem a representação gráfica da função que descreve a “poupança da Laís durante os primeiros 10 meses”.

A aluna Joana (Figura 37) representou o gráfico da função passando na origem, mostrando consonância na conversão da expressão algébrica de uma função linear que havia representado anteriormente (questão 1.2.) para a representação gráfica, ignorando mais uma vez o valor inicial fixo.

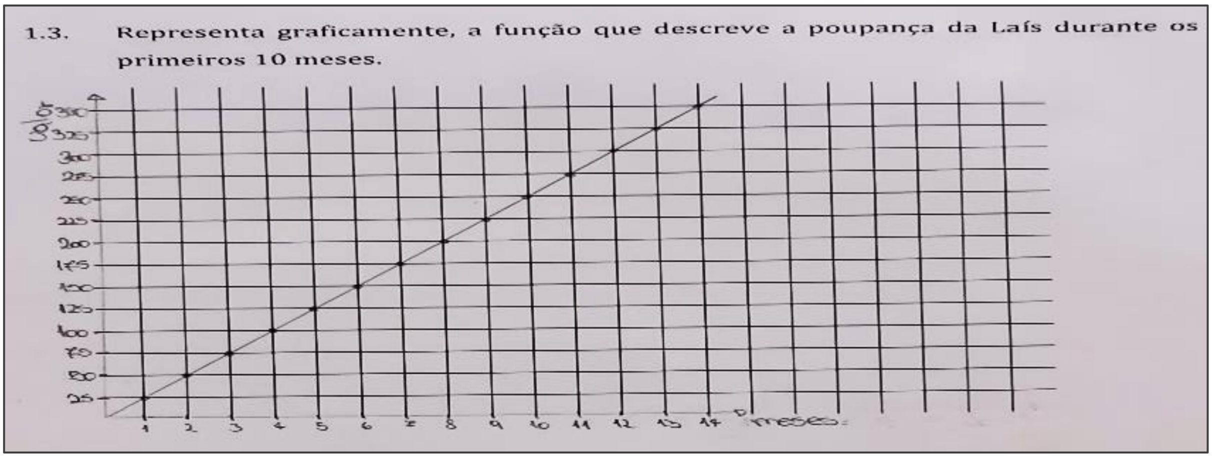


Figura 37 - Resposta da aluna Joana à questão 1.3. da Tarefa A

Já o aluno Rui, na questão 1.3. (Figura 38), representou graficamente a sua resposta, considerando corretamente os 350 € como a ordenada na origem demonstrando facilidade na conversão da representação algébrica para a representação gráfica. O aluno não apresentou dificuldades nesta representação e na interpretação da situação descrita. De notar que o aluno parece considerar as variáveis envolvidas como discretas, o que na situação particular não é errado, já que a Laís poupa 25 € por mês, não necessariamente de forma contínua.

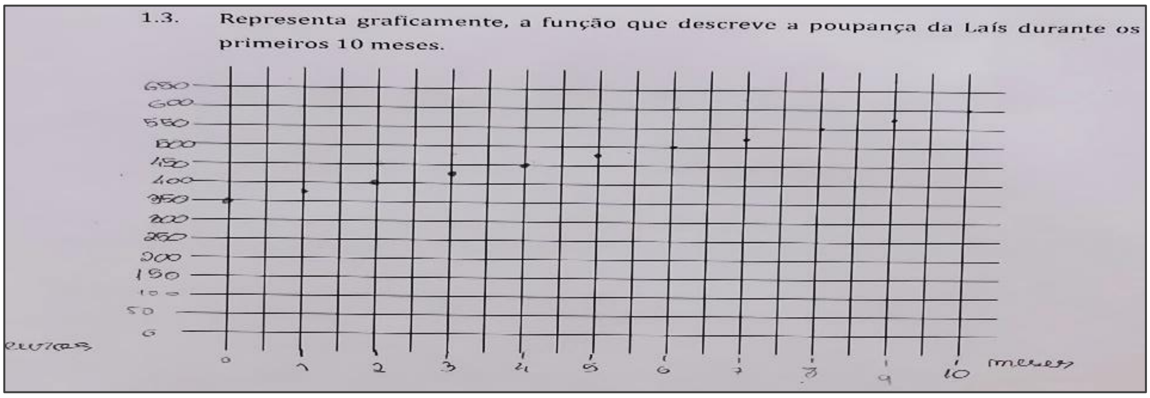


Figura 38 - Resposta do aluno Rui à questão 1.3. da Tarefa A

O aluno Tomás representou de forma correta o gráfico da função na questão 1.3. (Figura 39) mostrando facilidade na conversão do registo algébrico para o registo gráfico. Ao unir os pontos representados no referencial, o aluno mostra que interpreta a situação, considerando a natureza contínua das variáveis em causa.

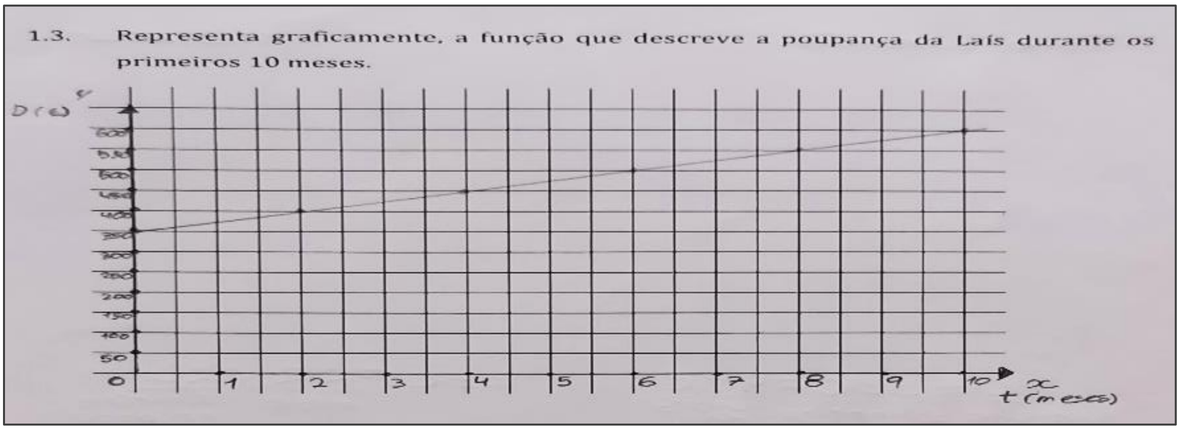
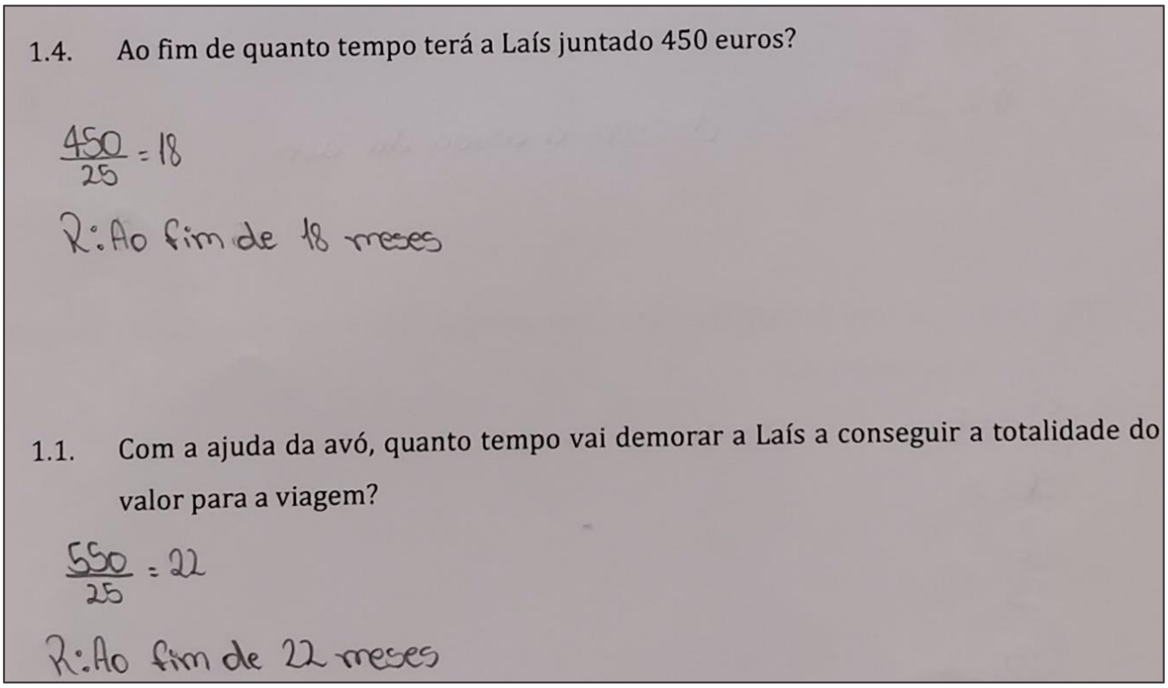


Figura 39 - Respostas do aluno Tomás à questão 1.3. da Tarefa A

Questões 1.4. e 1.5.

Nestas questões os alunos são convocados a interpretar o contexto da relação entre as variáveis que representaram anteriormente e aplicá-la a uma situação real.

Na resposta à questão 1.4., a aluna Joana (Figura 40), embora mostrando conhecimento da relação entre as variáveis, respondeu mais uma vez partindo do princípio de que se trata de uma função linear e efetuou os cálculos esquecendo, mais uma vez, que a Laís já teria 350 euros iniciais. No entanto, na questão 1.5., a aluna, talvez pela observação efetuada no enunciado da questão, que refere claramente a intervenção da ajuda da avó, relacionou as variáveis após retirar esse valor inicial, chegando à resposta correta.


1.4. Ao fim de quanto tempo terá a Laís juntado 450 euros?

$\frac{450}{25} = 18$

R: Ao fim de 18 meses

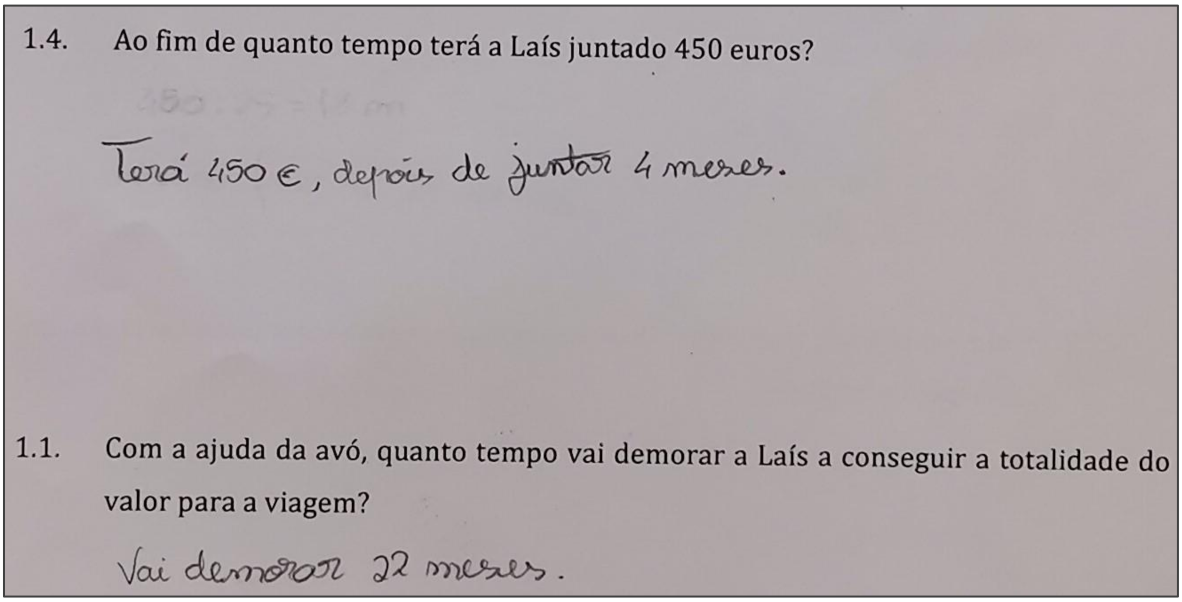
1.1. Com a ajuda da avó, quanto tempo vai demorar a Laís a conseguir a totalidade do valor para a viagem?

$\frac{550}{25} = 22$

R: Ao fim de 22 meses

Figura 40 - Respostas da aluna Joana às questões 1.4. e 1.5. da Tarefa A

No que respeita à questão 1.4. os alunos Rui (Figura 41) e Tomás (Figura 42) responderam utilizando a representação verbal escrita, através da leitura direta que fizeram do gráfico, mostrando uma preferência pela interpretação gráfica em detrimento da forma algébrica ou da expressão matemática. Já na questão 1.5., ambos responderam corretamente, mas não justificam as suas respostas, ficando por perceber qual a estratégia que usaram.



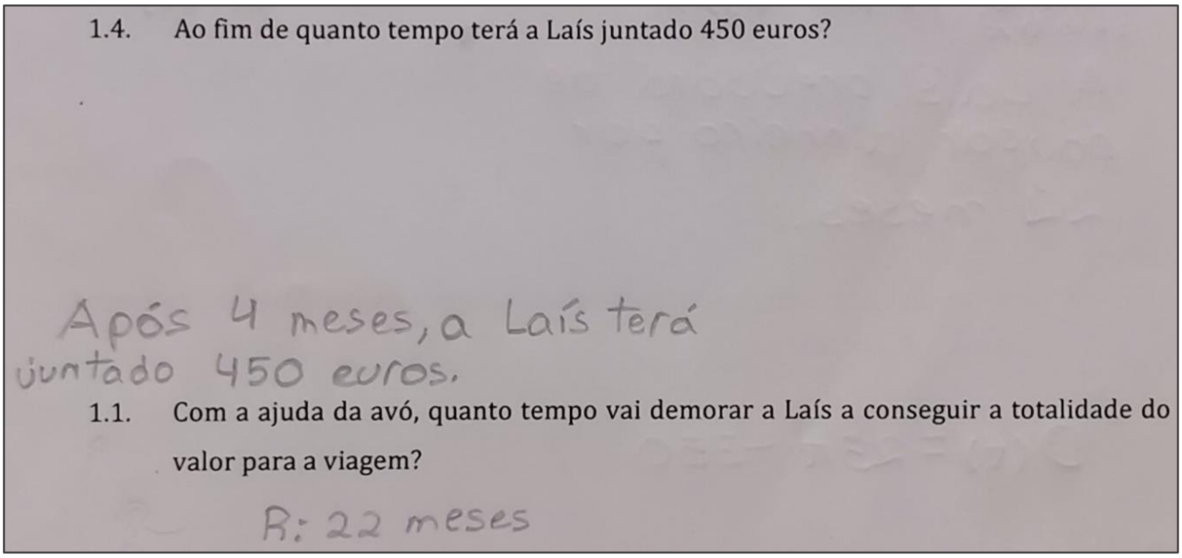
1.4. Ao fim de quanto tempo terá a Laís juntado 450 euros?

Terá 450 €, depois de juntar 4 meses.

1.1. Com a ajuda da avó, quanto tempo vai demorar a Laís a conseguir a totalidade do valor para a viagem?

Vai demorar 22 meses.

Figura 41 – Resposta do aluno Rui às questões 1.4. e 1.5. da Tarefa A



1.4. Ao fim de quanto tempo terá a Laís juntado 450 euros?

Após 4 meses, a Laís terá juntado 450 euros.

1.1. Com a ajuda da avó, quanto tempo vai demorar a Laís a conseguir a totalidade do valor para a viagem?

R: 22 meses

Figura 42 - Resposta do aluno Tomás às questões 1.4. e 1.5. da Tarefa A

De uma forma geral, os alunos mostraram conseguir concretizar a transição da representação verbal escrita para a representação algébrica e desta para a representação gráfica de uma função. De notar a preferência dos alunos pela interpretação gráfica, aquando da necessidade da recolha de dados para responderem às questões.

Apenas a aluna Joana revelou algumas dificuldades na interpretação da situação como correspondendo a uma função afim, o que viria a condicionar as suas respostas seguintes.

Quanto aos *processos de raciocínio* usados nas resoluções desta tarefa, encontramos a *justificação* e a *generalização*. Aquando da utilização do processo de *justificação* os alunos optam normalmente pela representação verbal escrita e numérica, já o processo de *generalização* é normalmente efetuado recorrendo à representação numérica e algébrica. Em ambos os processos se verificaram algumas dificuldades. Relativamente à *justificação*, este processo por vezes é simplesmente esquecido pelos alunos, já na *generalização* as dificuldades registam-se mais ao nível da compreensão do significado da simbologia utilizada.

Em relação à compreensão da noção de função, parece haver um bom entendimento da relação entre as variáveis, embora ainda se verifiquem dúvidas relativamente às relações envolvidas na função afim.

5.4 Tarefa 3 | Gasóleo com talão de desconto

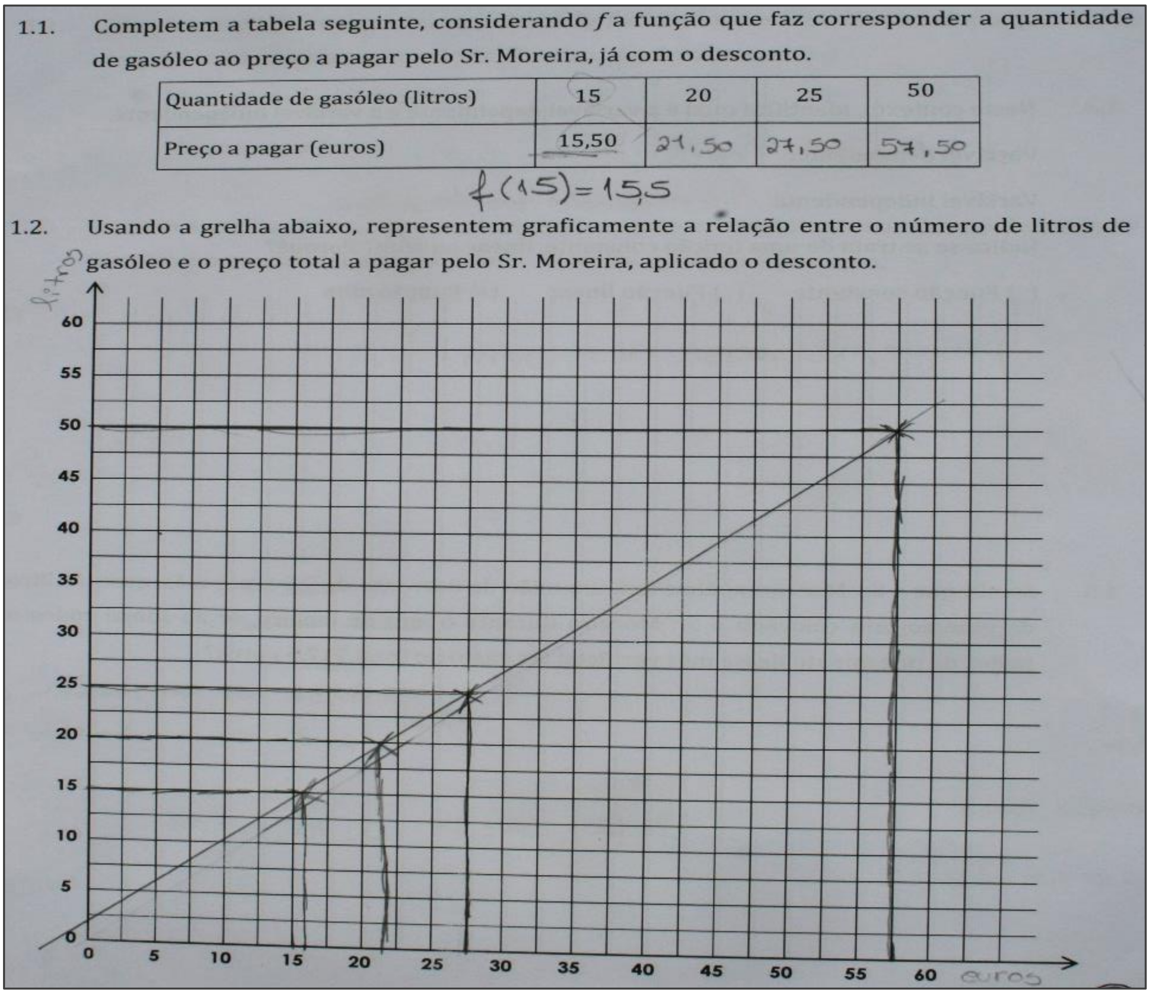
O conjunto de questões existentes nesta tarefa visou permitir que os alunos contactassem com situações do quotidiano que podem ser interpretadas à luz da Matemática, nomeadamente das funções.

Questões 1.1. e 1.2.

Nas questões 1.1. e 1.2. pretendeu-se que os alunos considerassem a função $f(x)$ e a sua representação tabular e gráfica, através da compreensão da relação entre as duas variáveis.

A generalidade dos alunos usou corretamente a relação entre as variáveis, multiplicando o número de litros por 1,2 €, recorrendo à aplicação da estratégia já construída anteriormente no âmbito das funções, o uso da correspondência. Maioritariamente conseguiram identificar corretamente as variáveis dependente e independente e representar a função graficamente como tratando-se de uma função afim de variáveis continuas.

Analisando as respostas da aluna Débora a estas questões (Figura 43), verifica-se que mostra compreensão da representação tabular da situação descrita verbalmente e relaciona corretamente as duas variáveis. Na questão 1.2. a aluna, embora tenha unido os pontos mostrando compreensão acerca da continuidade da função e utilizado corretamente a descrição das unidades em causa, a aluna evidencia não ter firmes as noções de variável dependente e independente, obtendo uma representação gráfica distorcida. Verifica-se que a aluna não criticou o resultado gráfico obtido recorrendo à interpretação do contexto, já que com zero euros não seria possível colocar qualquer quantidade de gasóleo.



1.1. Completem a tabela seguinte, considerando f a função que faz corresponder a quantidade de gasóleo ao preço a pagar pelo Sr. Moreira, já com o desconto.

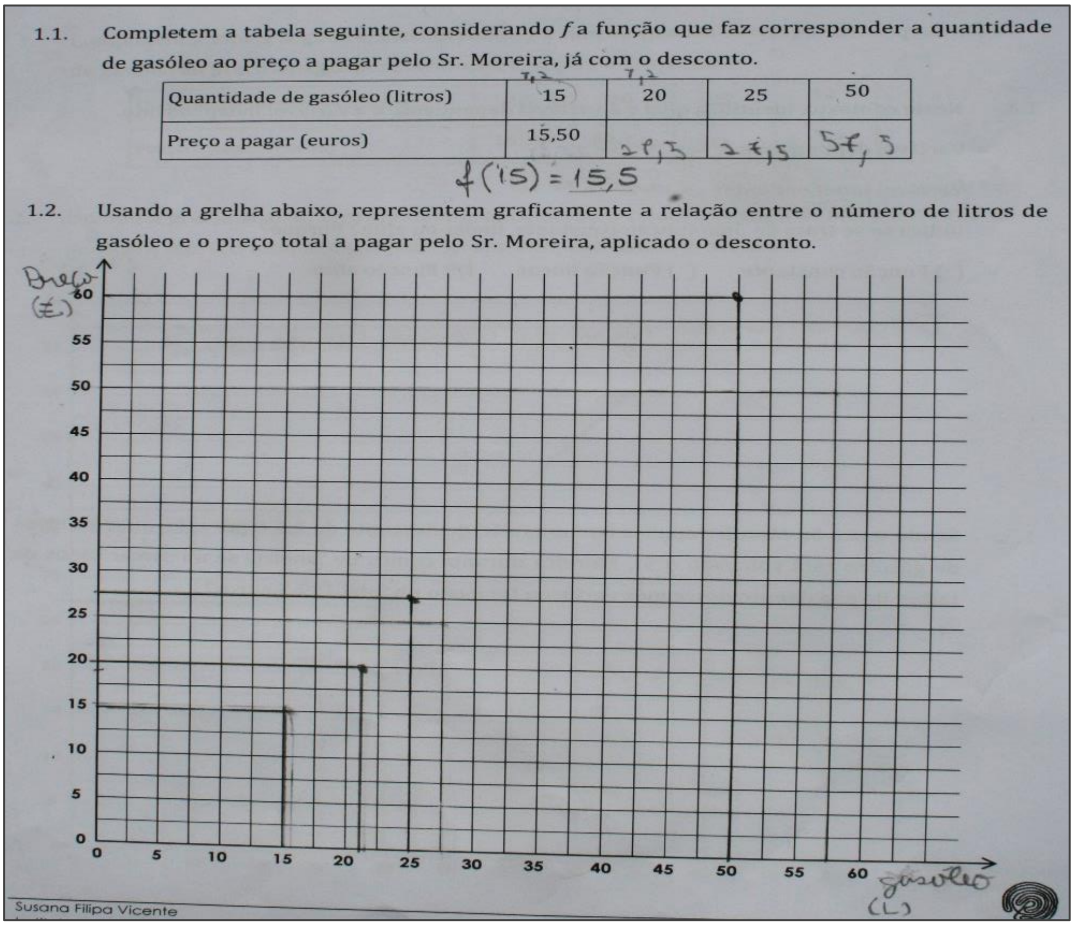
Quantidade de gasóleo (litros)	15	20	25	50
Preço a pagar (euros)	15,50	21,50	27,50	57,50

$f(15)=15,5$

1.2. Usando a grelha abaixo, representem graficamente a relação entre o número de litros de gasóleo e o preço total a pagar pelo Sr. Moreira, aplicado o desconto.

Figura 43 - Respostas da aluna Débora às questões 1.1. e 1.2. da Tarefa 3

As respostas do aluno Filipe (figura 44) às questões 1.1. e 1.2., evidenciam compreensão sobre a representação tabular e gráfica da função afim e a conversão entre ambas. De notar que o aluno não uniu os pontos representados no gráfico, deixando em aberto a possibilidade de não entender a continuidade das variáveis.



1.1. Completem a tabela seguinte, considerando f a função que faz corresponder a quantidade de gasóleo ao preço a pagar pelo Sr. Moreira, já com o desconto.

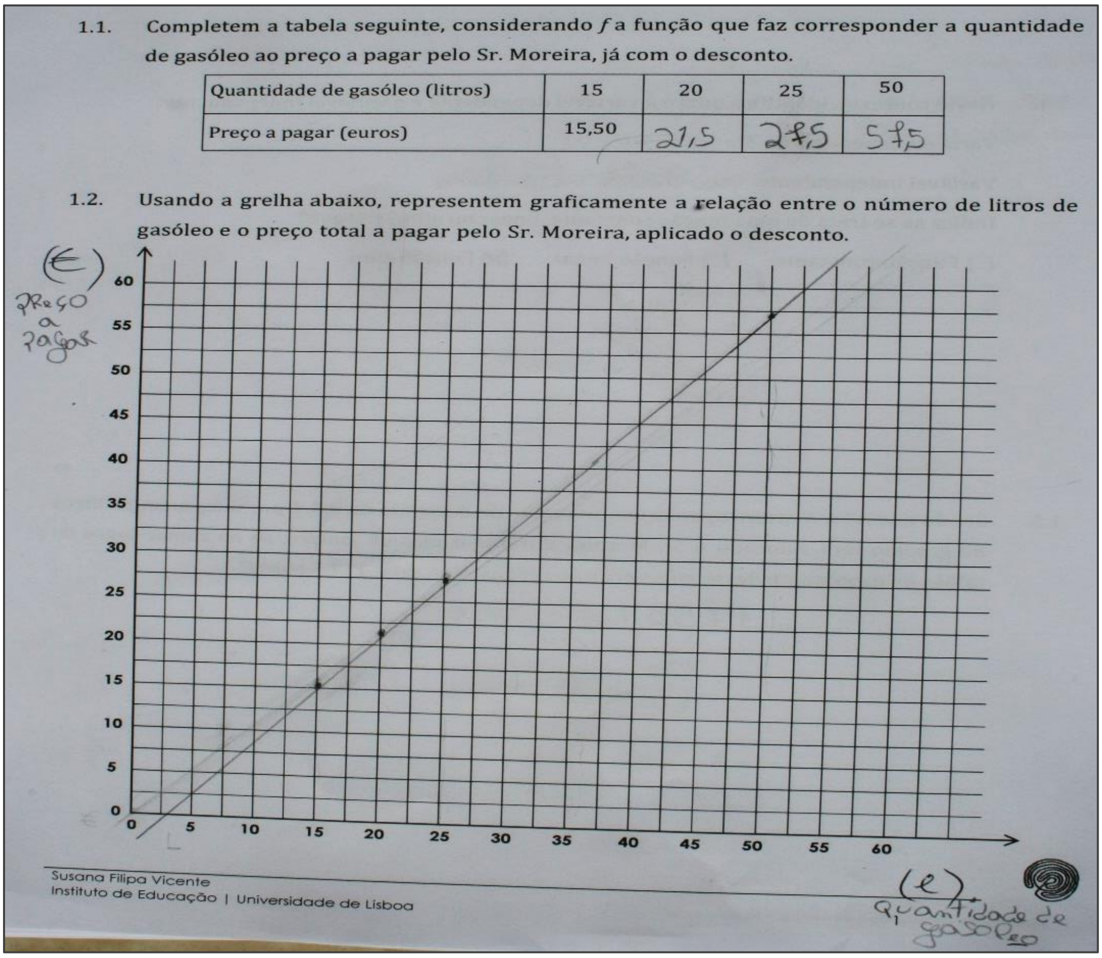
Quantidade de gasóleo (litros)	15	20	25	50
Preço a pagar (euros)	15,50	21,3	27,5	57,3

$f(15) = 15,5$

1.2. Usando a grelha abaixo, representem graficamente a relação entre o número de litros de gasóleo e o preço total a pagar pelo Sr. Moreira, aplicado o desconto.

Figura 44 - Respostas do aluno Filipe às questões 1.1. e 1.2. da Tarefa 3

No que respeita às respostas do aluno Jorge (Figura 45) pode observar-se que mostra compreensão da representação tabular de uma função e da sua conversão para a representação gráfica de uma função afim. Contudo, o aluno prolonga a representação gráfica um pouco abaixo do eixo dos xx, até ao ponto que que esta intersectaria o lado negativo do eixo dos yy, mostrando que não relacionou diretamente a representação gráfica com o contexto real do problema ignorando a restrição ao domínio resultante de impossibilidade de colocar menos de 5,00 € de gasóleo.

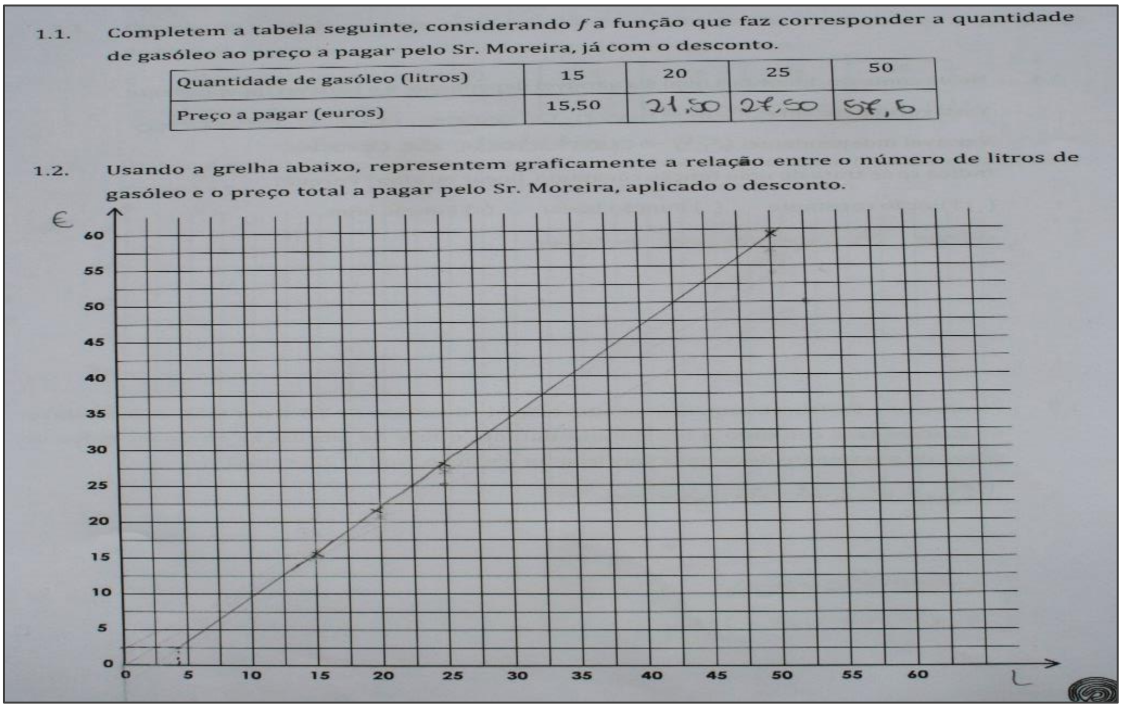

1.1. Completem a tabela seguinte, considerando *f* a função que faz corresponder a quantidade de gasóleo ao preço a pagar pelo Sr. Moreira, já com o desconto.

Quantidade de gasóleo (litros)	15	20	25	50
Preço a pagar (euros)	15,50	21,5	27,5	57,5

1.2. Usando a grelha abaixo, representem graficamente a relação entre o número de litros de gasóleo e o preço total a pagar pelo Sr. Moreira, aplicado o desconto.

Figura 45 - Respostas do aluno Jorge às questões 1.1. e 1.2. da Tarefa 3

Já a aluna Joana (Figura 46), representou corretamente a função na sua forma tabular e fez uma conversão correta para a representação gráfica, tendo o cuidado de a relacionar com a interpretação do contexto real do problema. Assim, a aluna interrompeu a representação gráfica no ponto de coordenadas (4,1(6); 2,5), correspondente à quantidade mínima de gasóleo que é possível colocar, nas circunstâncias do problema, assumindo uma restrição ao domínio da função. A aluna poderia ter ido mais longe e ter recorrido à expressão algébrica para identificar as coordenadas desse ponto, de qualquer forma é notável que tenha feito esta interpretação, relacionando a simbologia matemática com a realidade.



1.1. Completem a tabela seguinte, considerando f a função que faz corresponder a quantidade de gasóleo ao preço a pagar pelo Sr. Moreira, já com o desconto.

Quantidade de gasóleo (litros)	15	20	25	50
Preço a pagar (euros)	15,50	21,50	27,50	57,6

1.2. Usando a grelha abaixo, representem graficamente a relação entre o número de litros de gasóleo e o preço total a pagar pelo Sr. Moreira, aplicado o desconto.

Figura 46 - Respostas da aluna Joana às questões 1.1. e 1.2. da Tarefa 3

Questões 1.3., 1.4. e 1.5.

Este grupo de questões teve como finalidade consolidar as noções de objeto e imagem, variável dependente e independente, a relação entre as variáveis e as características da função afim, culminando na representação algébrica da função.

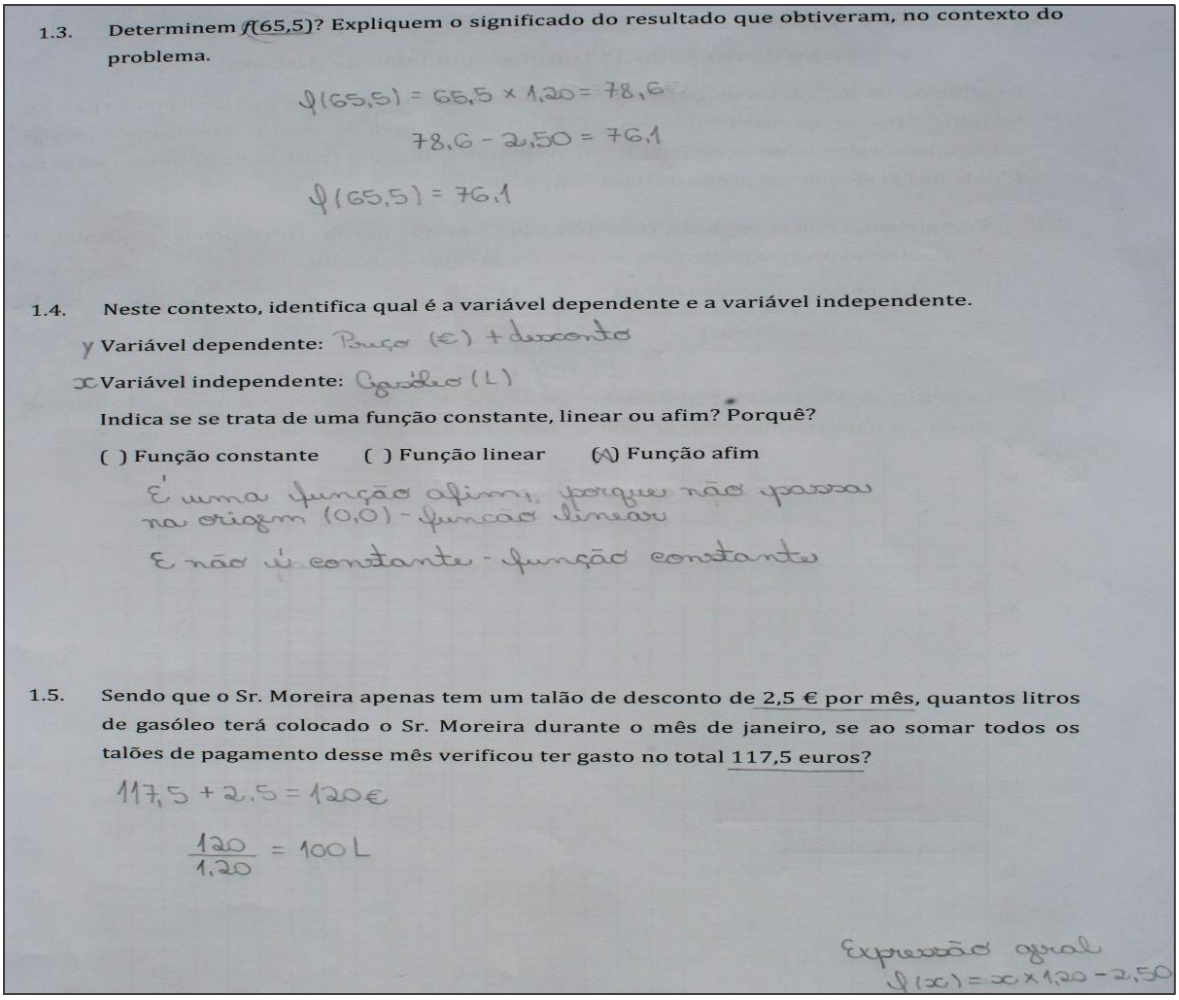
Nestas questões observa-se que houve uma evolução significativa no que respeita à identificação e interpretação da função afim, bem como na sua conversão para a representação algébrica.

A aluna Camila (Figura 47) desenvolve uma estratégia correta para responder à questão 1.3., equacionando a relação entre as variáveis para justificar a sua resposta. Contudo a aluna não efetuou, como solicitado, a relação do resultado obtido com o contexto do problema, podendo denunciar alguma dificuldade em relacionar o objeto matemático com o seu significado real. De notar também a dificuldade na utilização da simbologia matemática ao empregar duas igualdades consecutivas.

Na resposta à questão 1.4. a aluna identifica corretamente as variáveis dependente e independente e posteriormente identifica a função como sendo uma função afim, por exclusão de partes, ou seja, a aluna justifica uma afirmação demonstrando que não pode ser nenhuma das outras hipóteses dadas evidenciando ainda pouca confiança ao evocar as características da função afim e recorrendo às funções que lhe são mais familiares para justificar a resposta.

Na questão 1.5. a aluna recorreu à manipulação algébrica como resposta, tendo relacionado corretamente entre si as variáveis.

O pedido da representação algébrica da função, como foi referido anteriormente, surgiu no final da aula como questão extra, por ter começado a surgir naturalmente nas resoluções de alguns alunos. A aluna, como a maioria da turma, efetuou corretamente a conversão para a representação algébrica, generalizando facilmente as situações particulares trabalhadas.



1.3. Determinem $f(65,5)$? Expliquem o significado do resultado que obtiveram, no contexto do problema.

$f(65,5) = 65,5 \times 1,20 = 78,6$

$78,6 - 2,50 = 76,1$

$f(65,5) = 76,1$

1.4. Neste contexto, identifica qual é a variável dependente e a variável independente.

y Variável dependente: Preço (€) + desconto

x Variável independente: Gasóleo (L)

Indica se se trata de uma função constante, linear ou afim? Porquê?

( ) Função constante ( ) Função linear (X) Função afim

É uma função afim, porque não passa na origem (0,0) - função linear

E não é constante - função constante

1.5. Sendo que o Sr. Moreira apenas tem um talão de desconto de 2,5 € por mês, quantos litros de gasóleo terá colocado o Sr. Moreira durante o mês de janeiro, se ao somar todos os talões de pagamento desse mês verificou ter gasto no total 117,5 euros?

$117,5 + 2,5 = 120€$

$\frac{120}{1,20} = 100L$

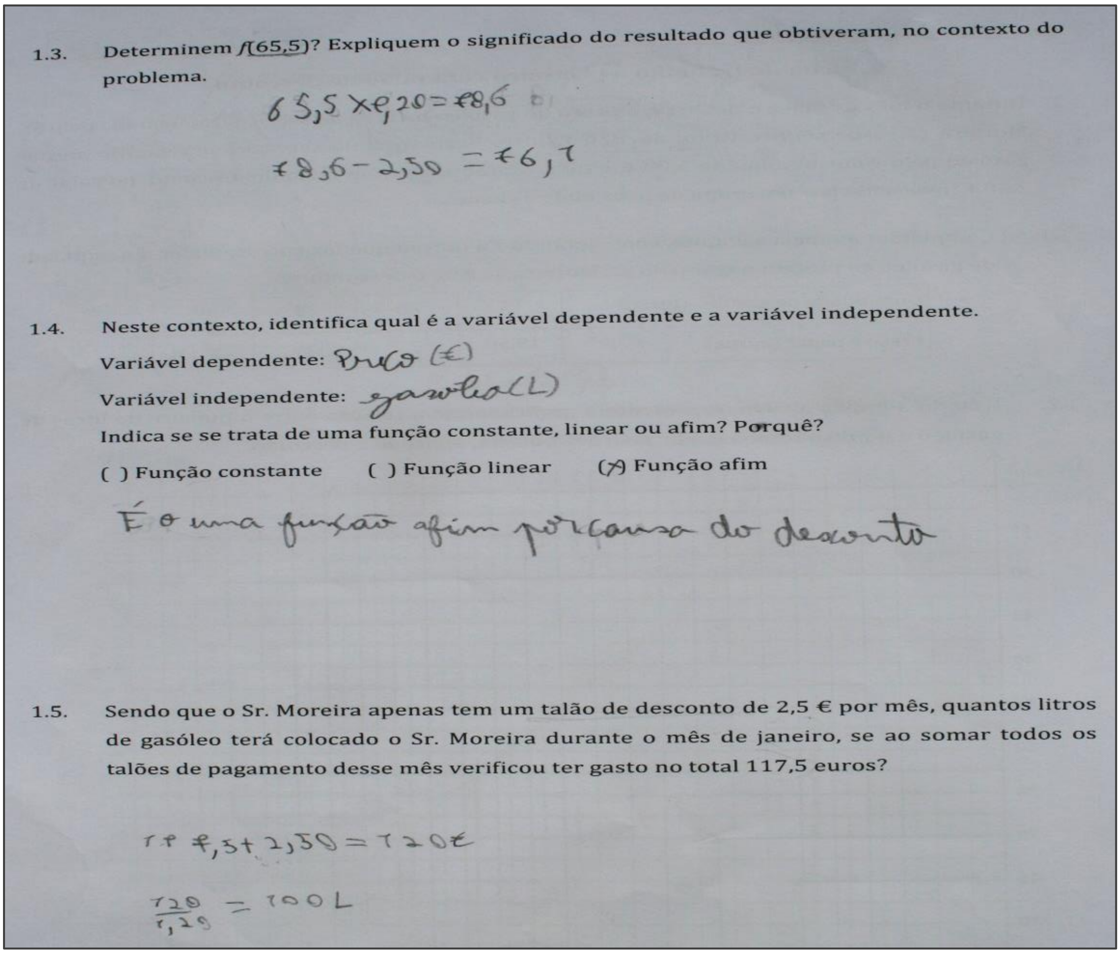
Expressão geral

$f(x) = x \times 1,20 - 2,50$

Figura 47 - Respostas da aluna Camila às questões 1.3., 1.4. e 1.5. da Tarefa 3

Quanto ao Filipe (Figura 48), como aconteceu com a aluna anterior, verificar-se a incapacidade de relacionar o objeto matemático com o contexto real (questão 1.3.), contudo há a destacar a forma como tenta justificar a resposta à questão 1.4. invocando o valor fixo associado (desconto), como a principal característica que distingue a função afim. Embora não use linguagem matemática apropriada e não se justifique com clareza, reconhece a soma do termo constante.

De notar que o aluno não chegou a efetuar a *generalização* pedida como questão extra, não tendo conseguido efetuar a conversão da expressão que utilizou na resposta à questão 1.5. para a sua representação algébrica.


1.3. Determinem *f*(65,5)? Expliquem o significado do resultado que obtiveram, no contexto do problema.

65,5 x €1,20 = €78,6

€78,6 − 2,50 = €76,1

1.4. Neste contexto, identifica qual é a variável dependente e a variável independente.

Variável dependente: Preço (€)

Variável independente: gasóleo (L)

Indica se se trata de uma função constante, linear ou afim? Porquê?

( ) Função constante ( ) Função linear (X) Função afim

É o uma função afim porcausa do desconto

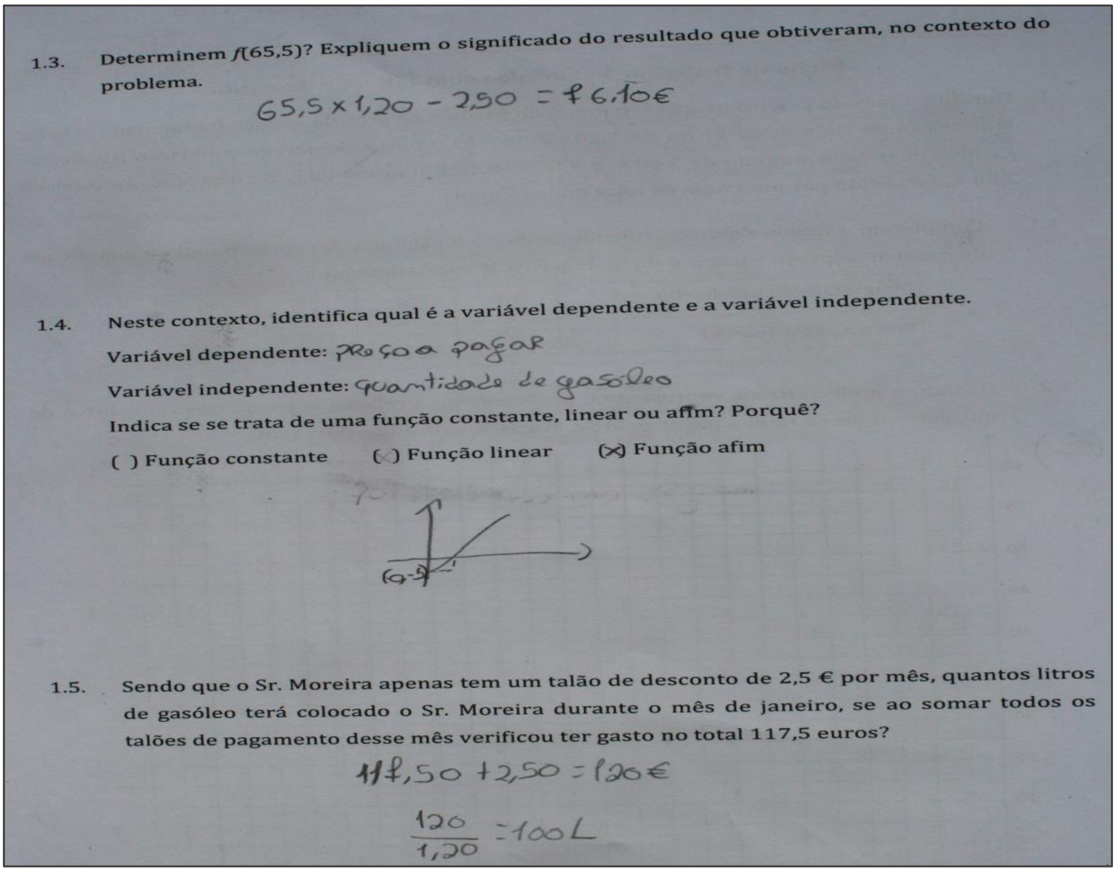
1.5. Sendo que o Sr. Moreira apenas tem um talão de desconto de 2,5 € por mês, quantos litros de gasóleo terá colocado o Sr. Moreira durante o mês de janeiro, se ao somar todos os talões de pagamento desse mês verificou ter gasto no total 117,5 euros?

117,5 + 2,50 = 120€

$\frac{120}{1,20}$ = 100L

Figura 48 - Respostas do aluno Filipe às questões 1.3., 1.4. e 1.5. da Tarefa 3

O aluno Hugo (figura 49) mostra um entendimento da noção de função e da relação entre as variáveis envolvidas já que na resposta à questão 1.3. o aluno mostra ser capaz de adequar uma equação à situação em causa, determinando assim a imagem de 65,5. De qualquer forma mantém-se a dificuldade em fazer corresponder o significado desse objeto com o seu significado no contexto real. Nas resoluções deste aluno, há ainda a apontar o facto de ter optado pela representação gráfica como forma de justificar que a função é afim. Contudo, nesta sua tentativa, embora válida, não determina corretamente as coordenadas do ponto em que o gráfico interseta o eixo dos *yy*, fazendo a representação gráfica de uma função afim, mas determinando $f(0)$ como se de uma função linear se tratasse. O aluno relaciona corretamente as variáveis como forma de responder à questão 1.5., mas não generalizou esse conhecimento de modo a obter a representação algébrica da função.


1.3. Determinem $f(65,5)$? Expliquem o significado do resultado que obtiveram, no contexto do problema.

65,5 x 1,20 − 2,50 = f 6,10€

1.4. Neste contexto, identifica qual é a variável dependente e a variável independente.

Variável dependente: preço a pagar

Variável independente: quantidade de gasóleo

Indica se se trata de uma função constante, linear ou afim? Porquê?

( ) Função constante ( ) Função linear (x) Função afim

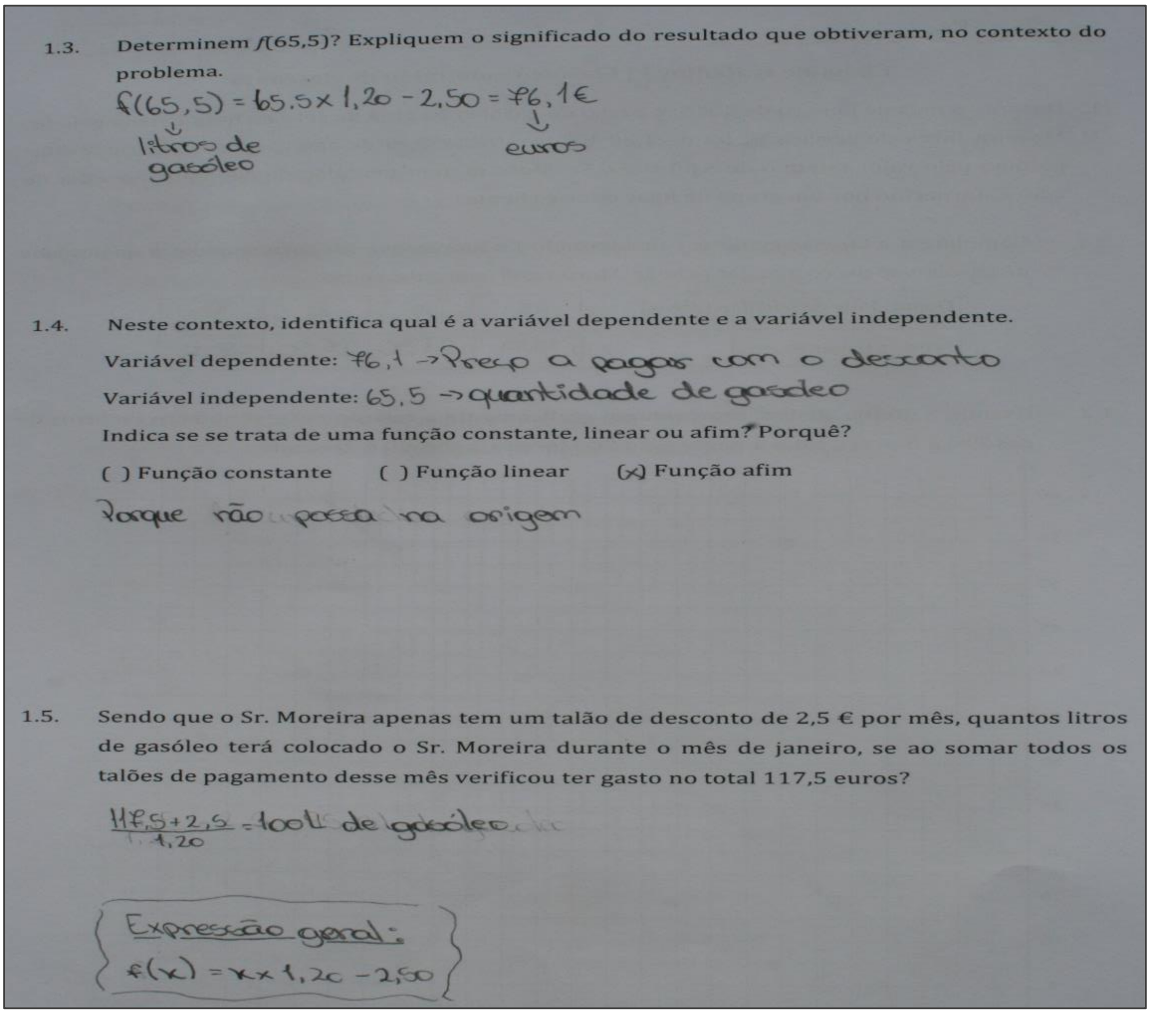
1.5. Sendo que o Sr. Moreira apenas tem um talão de desconto de 2,5 € por mês, quantos litros de gasóleo terá colocado o Sr. Moreira durante o mês de janeiro, se ao somar todos os talões de pagamento desse mês verificou ter gasto no total 117,5 euros?

117,50 + 2,50 = 120€

$\frac{120}{1,20}$ = 100L

Figura 49 - Respostas do aluno Hugo às questões 1.3., 1.4. e 1.5. da Tarefa 3

Nas respostas da aluna Joana (Figura 50), há a destacar que na resposta à questão 1.3., mostra conhecer e compreender o conceito de função, identificando inclusive as variáveis em causa na expressão que utilizou para encontrar a resposta à questão. Contudo com esta identificação a aluna não responde claramente à questão formulada pois, embora identifique as variáveis no contexto real, não descreve a relação entre elas. Tal como outros alunos, a aluna revela dificuldades na utilização da simbologia matemática, usando duas igualdades consecutivas. A aluna identifica as variáveis envolvidas e reconhece tratar-se de uma função afim, justificando porque é que não é uma função linear. Relaciona corretamente as variáveis como forma de responder à questão 1.5., e converteu a representação numérica na representação algébrica da função generalizando esse conhecimento particular.



1.3. Determinem $f(65,5)$? Expliquem o significado do resultado que obtiveram, no contexto do problema.

$f(65,5) = 65.5 \times 1,20 - 2.50 = 76,1€$

litros de gasóleo — euros

1.4. Neste contexto, identifica qual é a variável dependente e a variável independente.

Variável dependente: 76,1 → Preço a pagar com o desconto

Variável independente: 65.5 → quantidade de gasóleo

Indica se se trata de uma função constante, linear ou afim? Porquê?

( ) Função constante ( ) Função linear (x) Função afim

Porque não passa na origem

1.5. Sendo que o Sr. Moreira apenas tem um talão de desconto de 2,5 € por mês, quantos litros de gasóleo terá colocado o Sr. Moreira durante o mês de janeiro, se ao somar todos os talões de pagamento desse mês verificou ter gasto no total 117,5 euros?

$\frac{117,5+2,5}{1,20} = 100$ L de gasóleo

Expressão geral:

$f(x) = x \times 1,20 - 2,50$

Figura 50 - Respostas da aluna Joana às questões 1.3., 1.4. e 1.5. da Tarefa 3

Em suma a generalidade dos alunos mostraram capacidade de reconhecer correspondências que são funções, identificaram corretamente as variáveis em causa, mas apresentam normalmente ausência de justificações, ou são apresentadas justificações pouco consolidadas ou pouco claras.

Uma das dificuldades mais recorrente identificada nestas produções dos alunos prendeu-se com a dificuldade em relacionar os objetos matemáticos ao seu significado no contexto real e descrever o modo como se dava a variação entre as variáveis dependente e independente, ficando por vezes incerto o seu entendimento sobre a influência que a alteração do número de litros causaria no preço total a pagar. Embora se observe uma melhoria na compreensão da simbologia utilizada no tema funções, a maioria dos alunos revela ainda dificuldades na utilização das igualdades e equivalências.

Relativamente aos *processos de raciocínio*, foi visível o uso da *justificação*, sob a forma de representação verbal escrita. No entanto, embora se notem melhorias na utilização deste processo, continuam a verificar-se algumas dificuldades em apresentar uma *justificação* completa. No que diz respeito à *generalização* para chegar à representação algébrica da função afim, alguns alunos ainda sentiram dificuldades. Os restantes exprimiram essa *generalização* em linguagem formal e mostrando compreensão a linguagem simbólica usada.

A noção de função, em particular de função afim, parece estar a consolidar-se, observando-se um bom entendimento da noção dos conceitos envolvidos (objeto, imagem, variáveis dependente e independente), da correspondência entre grandezas e sobretudo verifica-se uma evolução na compreensão da simbologia usada.

Quanto à conversão entre *representações* também se verifica uma melhoria, sendo que a maioria da turma conseguiu converter a representação verbal escrita na tabular e esta na representação gráfica. Posteriormente, recorrendo a processos que envolveram equacionar a relação entre as variáveis, a maioria dos alunos representou algebricamente a função afim.

Esta tarefa conduziu ainda a uma discussão interessante sobre os valores que a variável independente pode tomar, nos casos discreto e contínuo e ainda sobre o valor mínimo que pode tomar atendendo ao contexto descrito no enunciado. Estas explorações à tarefa enriqueceram muito a discussão e vieram dar sentido às aprendizagens efetuadas.

Como já foi referido, devido à interrupção das aulas, esta tarefa não foi terminada em aula, sendo solicitado aos alunos que a terminassem em casa, tendo, no entanto, sido possível fazer o estudo da situação sem proporcionalidade direta, do ponto de vista analítico e gráfico, constituindo-se como um importante momento de aprendizagem.

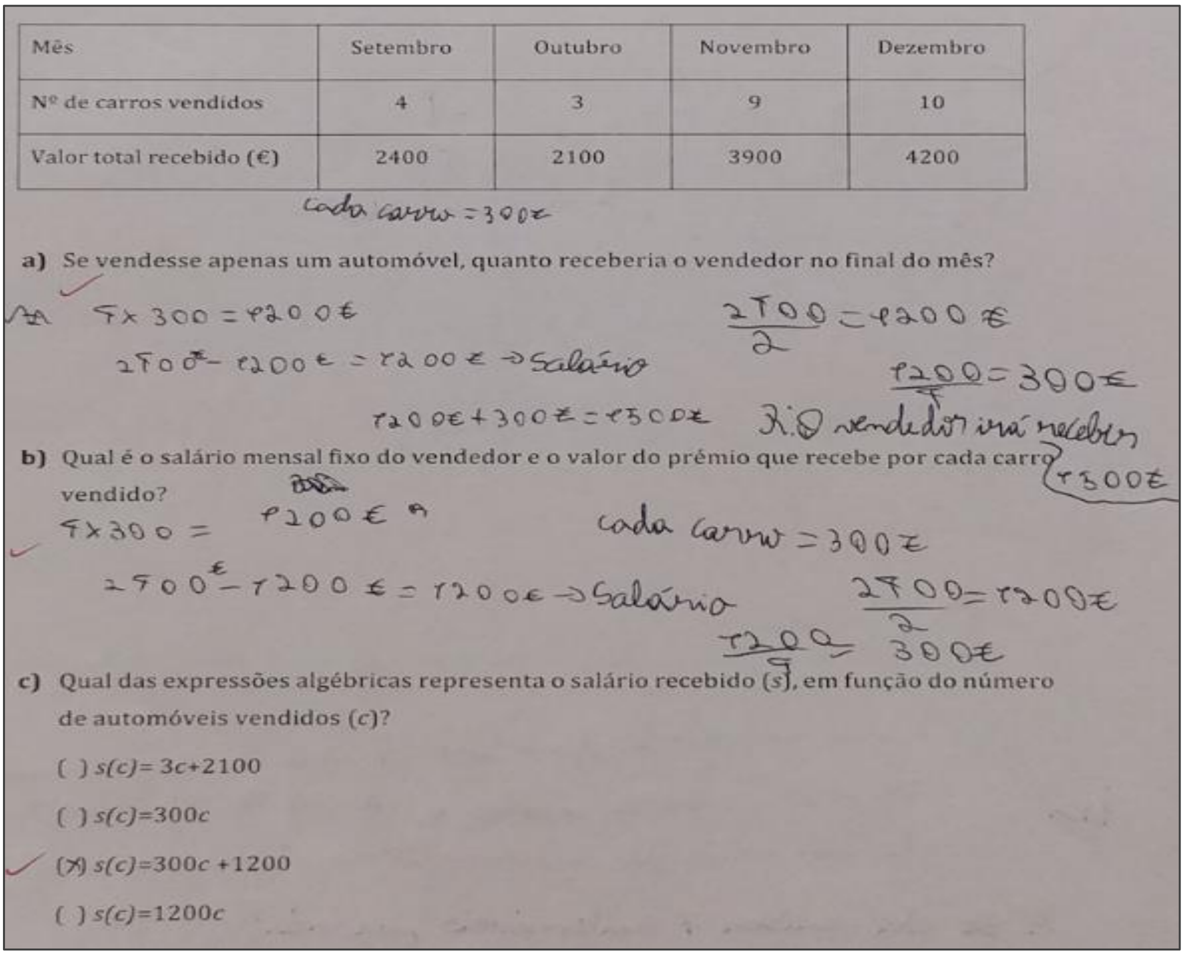
5.5 Questão de Aula

A Questão de Aula composta por uma tarefa com 4 alíneas, foi realizada a pares. Os alunos mostraram sobretudo uma evolução na compreensão dos conceitos associados especificamente à função afim, como o valor fixo (ordenada na origem).

Alíneas a), b) e c)

Na alínea a), o par de alunos Camila e Filipe (Figura 51), a partir dos valores do mês de setembro e fazendo posteriormente a diferença entre o valor recebido pelo vendedor de automóveis e o seu salário fixo, conseguem chegar ao valor da comissão por automóvel vendido (300€), de forma a concluírem que o vendedor iria receber 1500€ se vendesse apenas um automóvel. Mostram uma boa capacidade de leitura tabular e de conversão dos seus dados para a representação numérica e verbal escrita, apresentando uma resposta completa e uma boa *justificação* incluindo todos os passos que os levam ao resultado final.

Na alínea b) aproveitam os cálculos já efetuados na alínea anterior. Reforçam que o valor da comissão é de 300€ e o salário fixo do vendedor é de 1200€. Na alínea c), estes alunos, bem como a restante turma, escolheram a expressão algébrica correta, que generaliza a relação do salário recebido em função dos automóveis vendido (terceira opção), efetuando corretamente a conversão da representação tabular para a representação algébrica.



Mês	Setembro	Outubro	Novembro	Dezembro
Nº de carros vendidos	4	3	9	10
Valor total recebido (€)	2400	2100	3900	4200

cada carro = 300€

a) Se vendesse apenas um automóvel, quanto receberia o vendedor no final do mês?

→ Salário

R: O vendedor irá receber

b) Qual é o salário mensal fixo do vendedor e o valor do prémio que recebe por cada carro vendido?

cada carro = 300€

→ Salário

c) Qual das expressões algébricas representa o salário recebido (s), em função do número de automóveis vendidos (c)?

( ) $s(c)= 3c+2100$

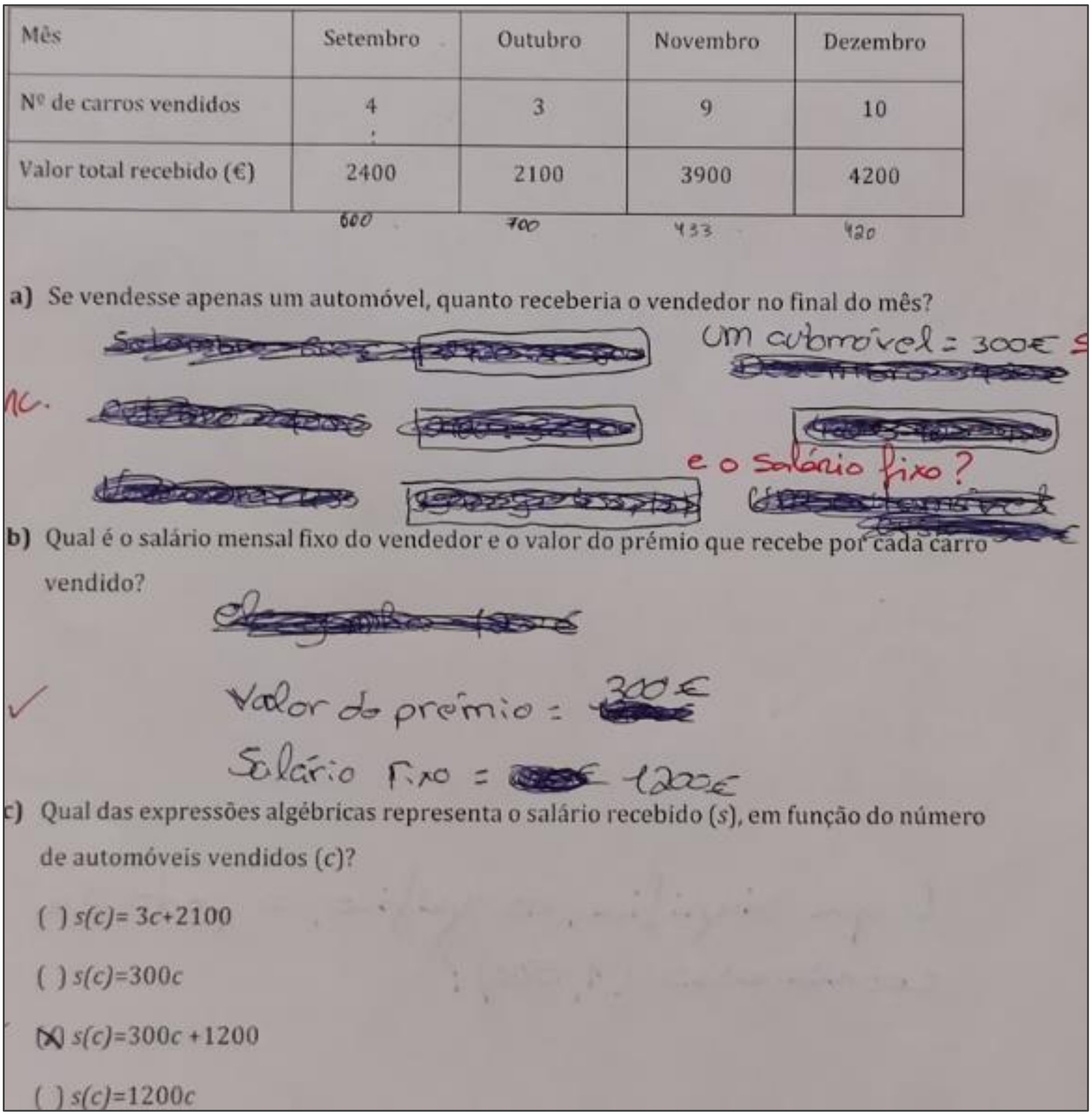
( ) $s(c)=300c$

(X) $s(c)=300c +1200$

( ) $s(c)=1200c$

Figura 51 – Respostas dos alunos Camila e Filipe às alienas a), b) e c) da Questão de Aula

À semelhança de outras duplas, a dupla Débora e Teresa (Figura 52) não resolveu a alínea a). As alunas percebem que a venda de cada automóvel representa um ganho de 300€, mas não apresentam nenhum cálculo justificativo desse valor e também não chegam ao valor do salário pretendido. Estas alunas respondem corretamente às alíneas b) e c), mas nunca apresentam cálculos que justifiquem essas respostas, deixando em aberto possíveis dificuldades na compreensão da representação tabular e da relação entre variáveis numa função afim.



Mês	Setembro	Outubro	Novembro	Dezembro
Nº de carros vendidos	4	3	9	10
Valor total recebido (€)	2400	2100	3900	4200

600 700 433 420

a) Se vendesse apenas um automóvel, quanto receberia o vendedor no final do mês?

Um automóvel = 300€

e o salário fixo?

b) Qual é o salário mensal fixo do vendedor e o valor do prémio que recebe por cada carro vendido?

Valor do prémio = 300€

Salário fixo = 1200€

c) Qual das expressões algébricas representa o salário recebido (s), em função do número de automóveis vendidos (c)?

( ) $s(c)= 3c+2100$

( ) $s(c)=300c$

(X) $s(c)=300c+1200$

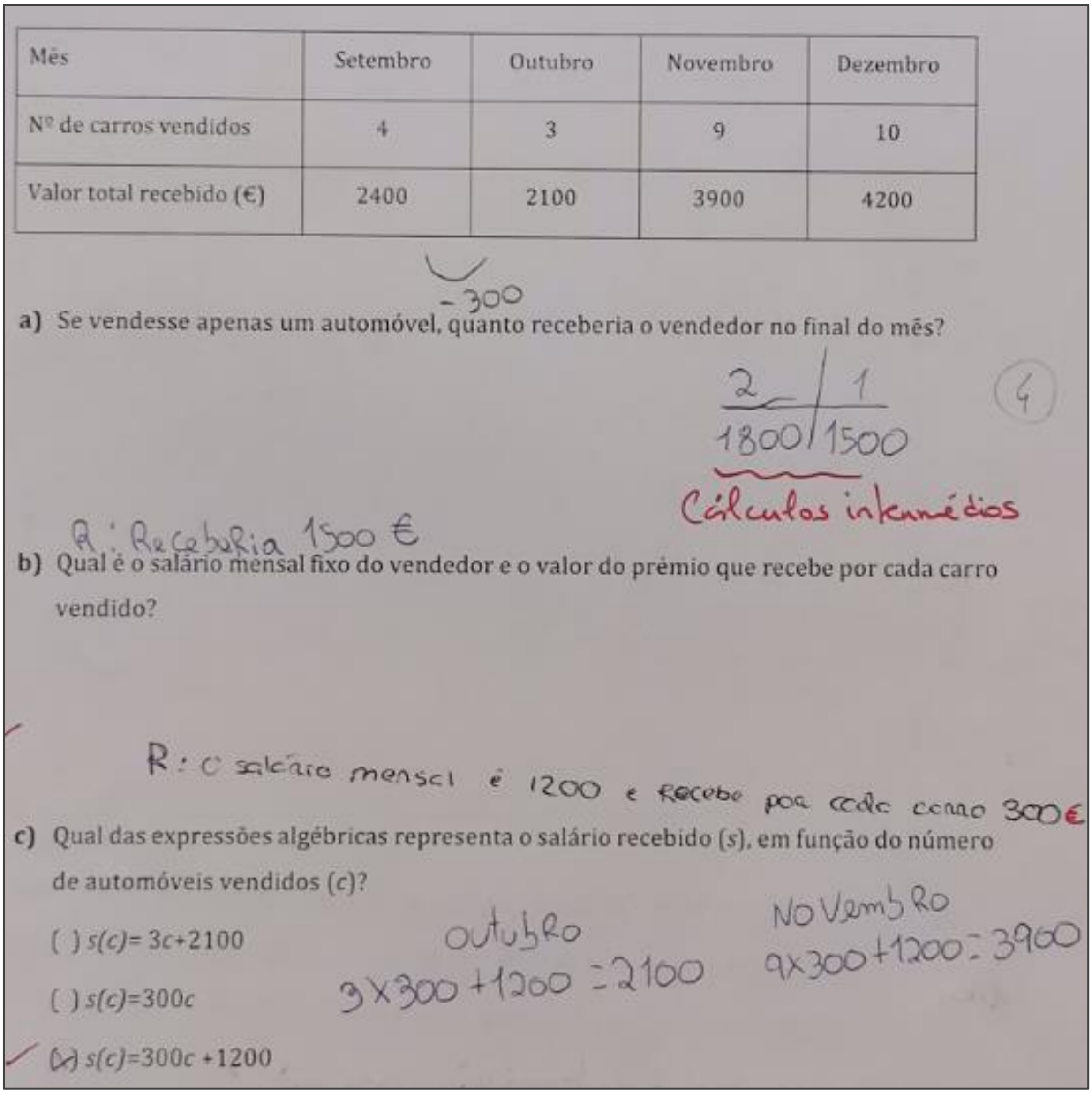
( ) $s(c)=1200c$

Figura 52 – Respostas das alunas Débora e Teresa às alienas a), b) e c) da Questão de Aula

A dupla de alunos Hugo e Gustavo (Figura 53) mostra entender que cada automóvel acresce 300€ ao salário do vendedor, assinalando na tabela a diferença entre os meses de setembro e outubro. Após reconhecerem este padrão, recorrem à representação tabular para determinarem o salário recebido aquando da venda de 2 e 1 automóveis, respondendo corretamente e mostrando reconhecimento do padrão envolvido através da leitura tabular.

A resposta à alínea b) está correta, embora os alunos não apresentem cálculos que a suportem, pressupondo-se que retiraram 300€ por cada veículo vendido a menos, mas ainda revelam dificuldades em relacionar as variáveis entre si (n.º de carros vendido com o valor total recebido).

Na alínea c) os alunos, a partir do conhecimento adquirido acerca da função afim, conjeturaram qual a expressão algébrica correta, tendo justificado a escolha através da verificação da expressão geral usando dois casos particulares.



Mês	Setembro	Outubro	Novembro	Dezembro
Nº de carros vendidos	4	3	9	10
Valor total recebido (€)	2400	2100	3900	4200

-300

a) Se vendesse apenas um automóvel, quanto receberia o vendedor no final do mês?

2	1
1800	1500

Cálculos intermédios

(4)

R: Receberia 1500 €

b) Qual é o salário mensal fixo do vendedor e o valor do prémio que recebe por cada carro vendido?

R: O salário mensal é 1200 e recebe por cada carro 300€

c) Qual das expressões algébricas representa o salário recebido (s), em função do número de automóveis vendidos (c)?

( ) $s(c)=3c+2100$

( ) $s(c)=300c$

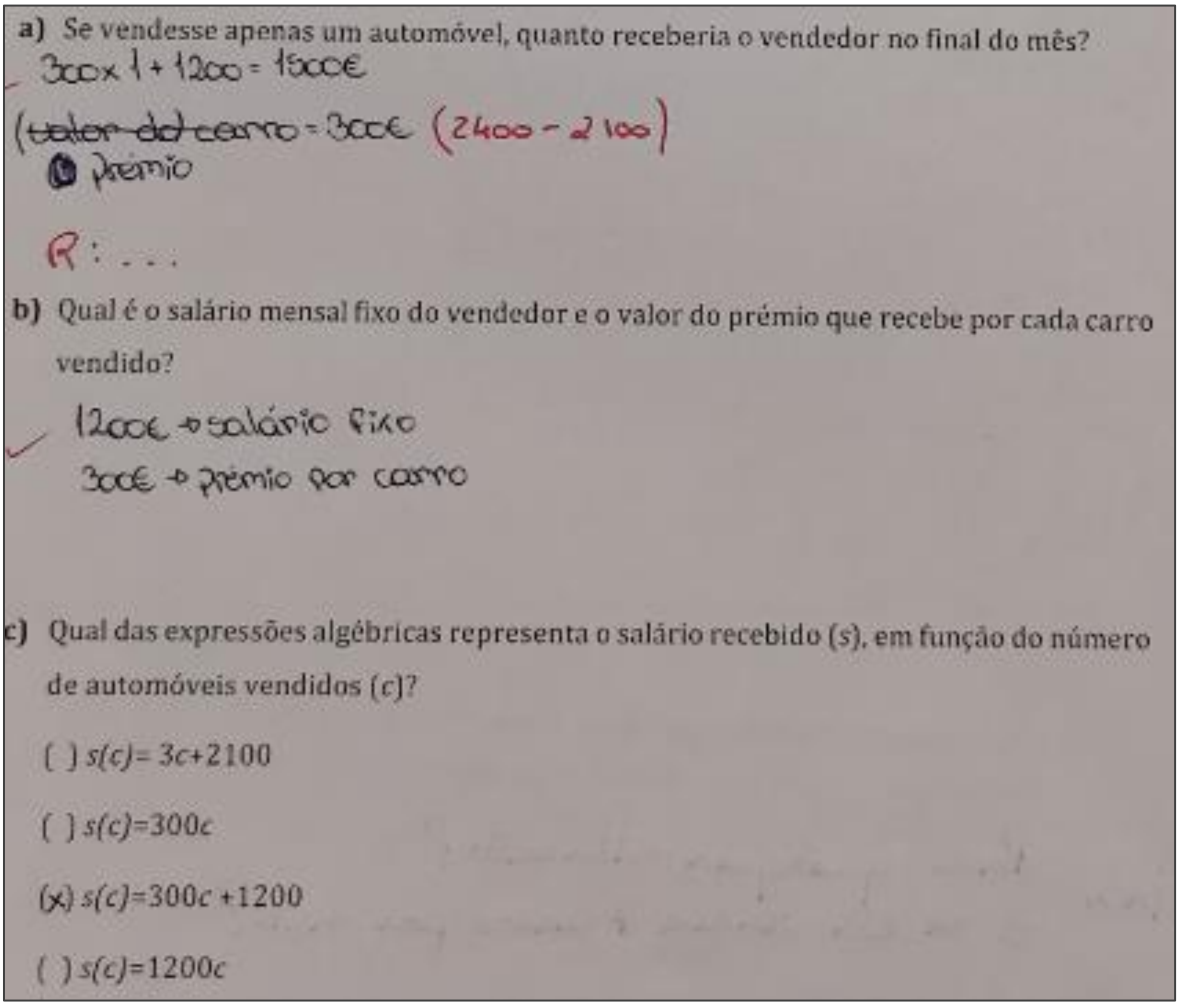
(x) $s(c)=300c+1200$

outubro
$3\times300+1200=2100$

Novembro
$9\times300+1200=3900$

Figura 53 – Respostas dos alunos Hugo e Gustavo às alienas a), b) e c) da Questão de Aula

A dupla Joana e Sónia (Figura 54), apresentam a resposta correta à alínea a), mas os cálculos intermédios estão incompletos pois os alunos não mostram de que forma chegam ao valor do prémio de 300€ por automóvel vendido. Os alunos, à semelhança de outros casos, também não apresentam a resposta propriamente dita à questão. Nas alíneas b) e c), as alunas respondem corretamente, identificando a expressão que generaliza a situação descrita, mas não apresentam os cálculos que fizeram, portanto, não justificam a sua resposta.


a) Se vendesse apenas um automóvel, quanto receberia o vendedor no final do mês?

$300 \times 1 + 1200 = 1500€$

(~~valor do carro~~ = 300€ (2400 − 2100)

prémio

R: . . .

b) Qual é o salário mensal fixo do vendedor e o valor do prémio que recebe por cada carro vendido?

1200€ → salário fixo

300€ → prémio por carro

c) Qual das expressões algébricas representa o salário recebido (s), em função do número de automóveis vendidos (c)?

( ) $s(c)= 3c+2100$

( ) $s(c)=300c$

(x) $s(c)=300c+1200$

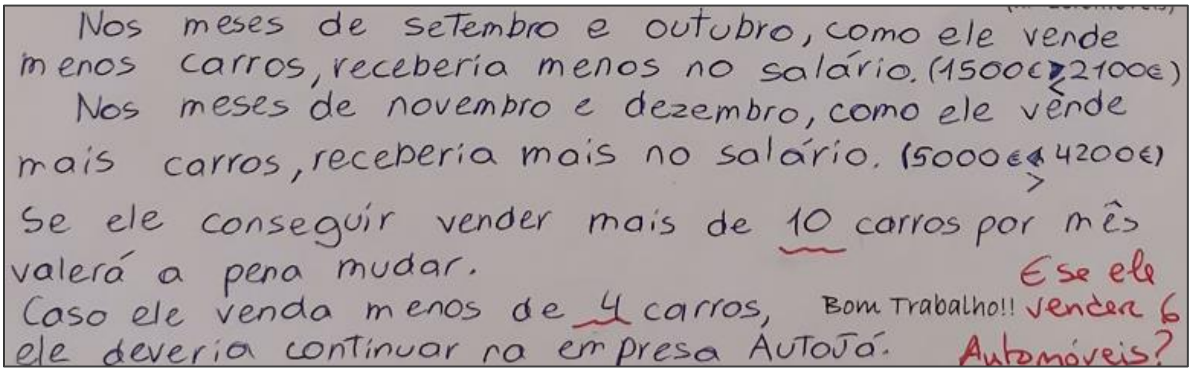
( ) $s(c)=1200c$

Figura 54 – Respostas das alunas Joana e Sónia às alienas a), b) e c) da Questão de Aula

Alínea d)

Por fim, na alínea d) é pedido que os alunos analisem um gráfico que reflete as condições que uma outra empresa oferece ao vendedor de carros. Esta questão possibilita aos alunos o uso de várias estratégias e *representações*.

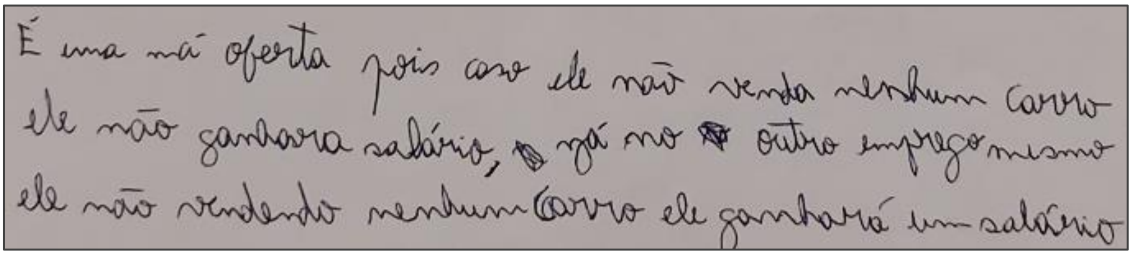
A resposta mais completa foi dada pela dupla de alunos Samuel e Tomás. Os alunos recorrem à representação verbal escrita e detalham que há situações em que não compensaria mudar de empresa, se as vendas fossem como no mês de setembro ou outubro, mas quando vendesse mais carros (fazem referência a um número de 10 carros por mês) seria compensador. A resposta mostra que os alunos interpretaram corretamente a questão e a representação gráfica, mas a *justificação* está incompleta já que não tiveram a preocupação de serem rigorosos quanto ao número de carros exato a partir do qual compensa a mudança.



Nos meses de setembro e outubro, como ele vende menos carros, receberia menos no salário. (1500€ < 2100€)
Nos meses de novembro e dezembro, como ele vende mais carros, receberia mais no salário. (5000€ > 4200€)
Se ele conseguir vender mais de 10 carros por mês valerá a pena mudar.
Caso ele venda menos de 4 carros, ele deveria continuar na empresa AutoJá.
Bom Trabalho!!
E se ele vender 6 Automóveis?

Figura 55 - Respostas dos alunos Samuel e Tomás à alínea d) da Questão de Aula

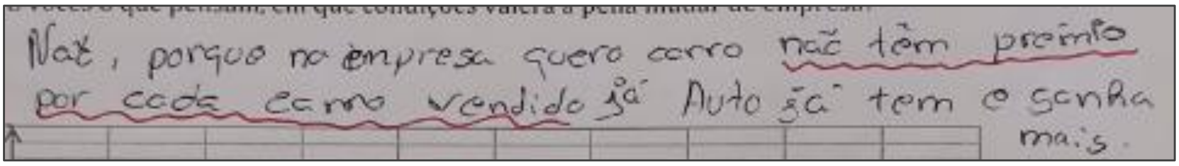
A maioria dos alunos respondeu de forma idêntica à dupla Camila e Filipe (Figura 56). Estes alunos dão respostas muito incompletas, tendo em conta apenas o salário fixo de 1200€ na empresa onde trabalha e argumentando que não compensa a mudança para a nova empresa pela inexistência deste valor fixo quando não vende nenhum automóvel. Estes alunos não fazem uma leitura global do gráfico, fixando-se apenas na ordenada na origem e ignorando que a partir de 7 automóveis já compensaria a mudança.



É uma má oferta pois caso ele não venda nenhum carro ele não ganhara salário, já no outro emprego mesmo ele não vendendo nenhum carro ele ganhará um salário

Figura 56 – Respostas dos alunos Camila e Filipe à alínea d) da Questão de Aula

A dupla de alunas Débora e Teresa (Figura 57) evidencia dificuldade na interpretação do gráfico que representa a situação da empresa QueroCarro mostrando desconhecimento da relação entre as variáveis dependente e independente, respondendo de forma incorreta à alínea.



Não, porque na empresa quero carro não têm prémio por cada carro vendido já AutoJá tem e ganha mais.

Figura 57 - Respostas das alunas Débora e Teresa à alínea d) da Questão de Aula

Os alunos responderam às questões colocados usando várias *representações*, verbal escrita, numérica, tabular e algébrica e a conversão entre elas. Há, no entanto, a assinalar que na alínea d) nenhum dos pares optou por representar graficamente a situação da empresa AutoJá, sobrepondo ambos os gráficos, o que lhes permitiria fazer a leitura direta do ponto de interseção. Mais uma vez se verifica que numa questão menos direta e que dependa mais da sua "criatividade", os alunos mantêm uma estratégia pouco eficaz, muito próxima da que se verifica para questões mais diretas.

Nesta Questão de Aula registaram-se processos de *justificação*, de *conjetura* e de *generalização*. Nos processos de *justificação* verifica-se uma preferência pela utilização das *representações* verbal escrita e numérica, no entanto este é dos processos em que os alunos manifestam mais dificuldades, encontrando-se muitas vezes incompleto.

Outra observação que podemos fazer é que, mais uma vez se verifica que, por vezes, há ausência na apresentação de uma resposta propriamente dita à questão colocada.

Em relação à compreensão da noção de função afim, podemos depreender que houve uma evolução significativa na compreensão desta correspondência nas suas várias *representações*, incluindo a algébrica.

6. Conclusões

Neste capítulo começo por efetuar uma breve síntese do trabalho desenvolvido, após o que apresento as principais conclusões obtidas a partir da Análise de Dados realizada, com a qual procuro dar resposta às questões de investigação que orientam o presente estudo. Por fim, elaboro uma reflexão final e pessoal acerca da experiência que foi o Mestrado de Ensino em Matemática, em particular, a prática de ensino supervisionada. Nesta reflexão aponto ainda alguns aspetos que, a meu ver, teriam contribuído para melhorar este estudo.

6.1 Síntese do estudo

Este trabalho tem como principal objetivo compreender os *processos de raciocínio matemático*, as dificuldades e as *representações* usadas por alunos do 8.º ano na resolução de tarefas sobre funções. Para procurar dar uma resposta a esta problemática, formulei inicialmente três questões orientadoras:

- Quais os *processos de raciocínio* usados pelos alunos e que dificuldades manifestam na resolução das tarefas propostas?
- Que *representações* privilegiam e que compreensão revelam da noção de função?
- Que relação existe entre os *processos de raciocínio* e as *representações* usadas?

Neste estudo, de natureza qualitativa e interpretativa, um dos maiores desafios foi o meu papel de observadora participante durante a prática letiva supervisionada. Esta etapa ocorreu durante a lecionação da unidade didática “Gráficos de Funções Afins” a uma turma do 8.º ano de escolaridade da Escola Básica e Secundária Padre Alberto Neto.

Durante as aulas optei por uma abordagem de caracter maioritariamente exploratório, privilegiando o trabalho autónomo a pares e encorajando sempre que possível o trabalho colaborativo. A recolha dos dados foi efetuada sob a forma das produções escritas dos alunos, da gravação em áudio e vídeo, da observação participante e do registo reflexivo no diário de bordo.

As tarefas foram formuladas com o intuito de promover o recurso a várias *representações* e *processos de raciocínio matemático*, nomeadamente generalizações e justificações. Estas tarefas, maioritariamente contextualizadas, foram elaboradas com o propósito de proporcionar o entendimento e aprendizagem de ideias abstratas e conceitos, a partir do significado real das ferramentas matemáticas associadas às funções. Procurei ainda propor algumas questões cuja abertura proporcionasse a exploração de diferentes abordagens e promovesse o desenvolvimento do pensamento matemático criativo dos alunos.

6.2 Principais conclusões

Neste trabalho, dada a interrupção inesperada das aulas, devido à pandemia de Covid-19, ficaram por lecionar os últimos quatro tempos que havia previsto. Assim, não disponho de condições para poder aprofundar muito acerca do progresso efetuado pelos alunos ao nível da compreensão e da consolidação dos conceitos trabalhados, já que este seria mais visível no final da unidade curricular. De qualquer forma, o facto da observação da turma ter sido constante e contínua, permite-me avançar algumas reflexões e conclusões.

As principais conclusões deste estudo são aqui apresentadas e organizadas de modo a dar resposta às questões de investigação formuladas.

Quais os processos de raciocínio usados pelos alunos e que dificuldades manifestam na resolução das tarefas propostas?

Os *processos de raciocínio* mais observados nas resoluções dos alunos foram a *conjetura*, a *generalização* e a *justificação,* sendo que as maiores dificuldades surgiram no uso destes dois últimos processos. Já Ponte e Quaresma (2014, p. 102) apontam para estas dificuldades, referindo que "Os alunos mostram dificuldade na produção de generalizações e justificações e tendem a considerar que justificar se reduz a apresentar os cálculos realizados na resolução da tarefa".

Embora, desde o início da intervenção, tenha sido possível observar uma ligeira melhoria na utilização do processo de *justificação*, verifiquei que muitos alunos desvalorizam a necessidade de justificar as suas respostas, ou fazem-no de forma incompleta. Esta dificuldade é visível na ausência da apresentação de uma resposta à questão colocada, ficando-se a atividade pelas ações necessárias para chegar à resposta, sem que a resposta propriamente dita seja elaborada

Verifiquei também que, as justificações, quando apresentadas, se encontram incompletas e escassas na utilização de termos matemáticos. Da minha observação, parece-me que esta questão está intimamente ligada à dificuldade que alguns alunos revelam em expressarem e exporem as suas ideias de forma clara e detalhada, tanto por escrito como oralmente. Por outro lado, o facto dos alunos tenderem a adotar uma linguagem matematicamente pouco rica ou a ignorar os significados matemáticos dos conceitos envolvidos, dificulta, por si só, a interpretação matemática do que escrevem. Assim, nesta investigação, a *justificação* é o processo de raciocínio mais diretamente afetado pela dificuldade de os alunos comunicarem matematicamente, capacidade transversal ainda pouco trabalhada. As observações efetuadas por Cunha (2010), corroboram esta conclusão, já que o autor apresenta a falta de hábitos de comunicação matemática como principal razão da dificuldade dos alunos em expressarem os seus raciocínios justificadamente, oralmente ou por escrito.

Quando apresentadas, as justificações surgem maioritariamente sob a forma de linguagem natural e por vezes numérica. Como já havia sido observado no estudo de Henriques e Ponte (2014, p. 288), "a linguagem natural surge sempre como ferramenta de apresentação das suas conjeturas e das suas justificações".

As principais estratégias de *justificação* usadas são a recorrência a conhecimentos anteriores e, mais raramente, os alunos recorrem a contraexemplos para refutar uma afirmação. Verifico também que são poucos os alunos que revelam a capacidade de formular, testar e formalizar conjeturas, sendo que, maioritariamente identificam com alguma facilidade, as regularidades existentes, principalmente nos casos que envolvem proporcionalidade direta, mas não procuram explorar outros casos particulares.

No que diz respeito à *generalização*, uma das estratégias mais usadas foi a relação com situações anteriores, em que os alunos procuram resolver novos casos procurando semelhanças com situações anteriores. Esta estratégia foi também relatada por Ellis (2007b) e pode estar na origem da dificuldade, que alguns alunos mostram em, a partir do conhecimento que têm da função linear, fazer uma transição de sucesso para a função afim, evidenciando dificuldades, principalmente na compreensão do significado da simbologia utilizada.

Da análise efetuada, esta dificuldade parece ter origem na falta de compreensão do significado dos parâmetros da expressão algébrica da função de proporcionalidade direta, trabalhada no ano anterior. A aplicação indevida da proporcionalidade direta foi de facto a maior dificuldade apresentada por estes alunos e verifica-se claramente quando os alunos tentam usar estratégias às quais se habituaram para resolver situações que envolvem proporcionalidade direta e que tentam aplicar quando esta relação não existe, conduzindo a generalizações erradas. Nestas situações, os alunos estão mais focados em relações recursivas, que assentam em correspondências quantitativas e não tanto em relações funcionais, que implicariam o entendimento da relação entre as variáveis e a compreensão do significado dos parâmetros envolvidos. Já Barbosa (2011), alertava para o facto de que a utilização de uma abordagem essencialmente numérica, que não atribui significado às variáveis, pode ser num obstáculo à *generalização*. Esta autora afirma que o raciocínio recursivo apresenta algumas limitações, conduzindo frequentemente a generalizações incorretas por não promover a descoberta de relações funcionais, tal como foi observado neste estudo.

Verifiquei também que, mesmo em situações em que o aluno revela entendimento da relação funcional envolvida, depara-se com a complexidade da abstração envolvida na utilização da linguagem formal necessária à representação simbólica. Este aspeto foi já amplamente reportado em vários estudos, nomeadamente no estudo de Cunha (2010), em que é observada a dificuldade que os alunos manifestam em transitar do concreto para o abstrato. Esta dificuldade prende-se essencialmente com o facto de o aluno não conseguir interpretar o significado de uma letra ou da totalidade da expressão algébrica, impedindo a correta conversão entre as várias *representações* e a representação algébrica.

Outra dificuldade que encontrei, foi a tendência de os alunos focarem as suas respostas em exemplos particulares, ao invés de estabelecerem uma regra geral que lhes permitiria a resolução de várias questões. Penso que este aspeto, para além de revelar a falta de confiança dos alunos em relação à *generalização*, denuncia falta de perceção do potencial que a expressão geral de uma função tem e do quanto pode agilizar a resolução de algumas questões. Tenho ainda que assinalar que a grande maioria dos alunos não sente necessidade de testar as suas conjeturas, recorrendo a casos particulares para validar as suas generalizações.

Apesar de uma das dificuldades identificada nas produções dos alunos ter a ver com a relação dos objetos matemáticos ao seu significado no contexto real e com a descrição do modo como se dá a variação entre as variáveis dependente e independente, verifiquei que as tarefas focadas em correspondências quantitativas contextualizadas foram facilitadoras do processo de *generalização*, promovendo a compreensão de conceitos abstratos.

Ainda relativamente ao processo de *generalização*, penso que é importante salientar os procedimentos desenvolvidos pelos alunos, mesmo quando não resultam numa *generalização* formal. Neste trabalho pude observar algumas dessas etapas do pensamento dos alunos, tais como a compreensão da relação entre as variáveis e a atribuição de significado aos objetos matemáticos tendo em conta o contexto do problema, a utilização de raciocínios inversos, procedimentos de tentativa e erro e também de confirmação através de casos particulares.

Nas estratégias usadas pelos alunos na *generalização*, verifiquei que as privilegiadas foram as estratégias recursiva e tentativa e erro, tal como definidas por Barbosa (2011), para escolherem a opção correta de entre as apresentadas. Dada a interrupção inesperada do trabalho que estava a ser desenvolvido com estes alunos, não foi possível observar a evolução expectável nas estratégias de *generalização* da função afim. Assim, a estratégia explcita (Barbosa, 2011, p. 330), que implica a formalização da regra com base na compreensão da relação entre as variáveis, e o ajuste das características da *generalização* da função linear às características do novo padrão estudado (função não linear), foi observada muito raramente.

Uma das dificuldades que mais se evidencia nesta investigação, é também a que gera maiores disparidades nas atividades registadas dos alunos e revela-se sobretudo no maior ou menor detalhe com que interpretam e contam uma história a partir dos dados e com a resistência de alguns alunos em envolverem-se na exploração de questões mais abertas. A generalidade dos alunos não aproveita a abertura de algumas questões para ir para além do que é a leitura direta e obvia dos dados indicados. Quando têm a oportunidade de comentar uma frase ou representação, mostrando compreensão do vínculo entre ela e o contexto real do problema, os alunos desenvolvem pouco as respostas, facto que pode ter a ver com a falta de hábito desta prática ou com alguma dificuldade no uso e interpretação da terminologia relativa ao conceito de função e de toda a simbologia envolvida. Estes aspetos podem ser explicados pela influência que o conhecimento ou a experiência anterior têm na maneira como um aluno dá sentido a uma situação, de acordo com o NCTM (2009, p. 4), "a criação de sentido pode ser considerada como o desenvolvimento da compreensão de uma situação, contexto ou conceito conectando-o com o conhecimento existente ou experiência anterior".

Embora ao longo das aulas tenha observado uma melhoria na compreensão da simbologia algébrica formal utilizada no tema das funções, ao trabalharem a resolução de equações do primeiro grau, foi percetível a dificuldade que é para alguns alunos distinguir se estão em presença de igualdades ou equivalências.

Que representações privilegiam e que compreensão revelam da noção de função?

Aquando da construção das tarefas apresentadas aos alunos, tive a preocupação de que permitissem uma diversidade de *representações* matemáticas e que as questões possibilitassem a escolha de estratégias distintas na sua resolução, de modo a que os alunos pudessem usufruir dos benefícios dessa multiplicidade na aprendizagem.

Apesar de os alunos já terem trabalhado com relações de proporcionalidade direta e funções afins lineares no ano letivo anterior, optei por fazer uma revisão do conceito de função e voltar a abordar cada um dos tipos de representação que lhe estão associados. No decorrer desta revisão, verifiquei que alguns elementos da turma conseguiam interpretar e compreender contextos reais que podem ser traduzidos por funções.

Da análise à primeira tarefa tenho a salientar a naturalidade com que a maioria dos alunos interpretou a conversão da informação fornecida em linguagem verbal escrita na representação gráfica da situação e vice-versa. Esta constatação revelou que estes alunos têm alguma facilidade na interpretação gráfica estabelecendo relação com o significado que esta toma no seu contexto. Verifiquei também alguma facilidade na conversão da representação tabular na representação gráfica, quando se trata da função linear. Esta habilidade deveu-se certamente à revisão feita inicialmente e também ao facto de, nos referenciais cartesianos estarem já assinaladas as escalas a usar pelos alunos, de qualquer forma, surpreendeu-me a facilidade que revelaram na marcação correta dos pontos no referencial, verificando-se apenas que um pequeno grupo de alunos sentiram algumas dificuldades na identificação das variáveis independente e dependente, confundindo-as. Já o processo de união dos pontos, deixou transparecer algumas dificuldades quanto à necessidade, ou não, dessa união ou ainda quanto às restrições do domínio da função, não compreendendo se a reta é infinita ou onde deve terminar. Neste caso os alunos usaram corretamente apenas o primeiro quadrante do referencial cartesiano, mas parece-me que a generalidade dos alunos o fez por ser uma tendência e não por atribuir significado a esse aspeto, dando sentido ao contexto do problema ou tendo em consideração o domínio da função. Este aspeto corrobora o descrito por Loureiro (2013), que diz que os alunos costumam considerar valores positivos e limitam o gráfico da função ao primeiro quadrante.

Na conversão da linguagem verbal escrita para a representação tabular, constatei que os alunos não sentiram dificuldades e privilegiaram o método aditivo ou multiplicativo, estabelecendo uma relação correta entre as variáveis. A regra de três simples foi outra estratégia muito utilizada pelos alunos na determinação de um valor desconhecido, apesar de, alguns alunos não compreenderem porque a podiam utilizar, já que verifiquei mais tarde que a tentavam usar também na função afim não linear.

A conversão para a representação algébrica da função de proporcionalidade direta não suscitou muitas dificuldades, o que deve ter ocorrido pelo facto de serem dadas várias opções de escolha dessa representação e não tanto pela sua compreensão, já que outra das observações que fiz, foi que, apesar da noção de "inclinação" da reta estar interiorizada pela generalidade dos alunos, a noção de declive não está consolidada. Apesar dos alunos revelarem a capacidade de equacionar respostas, mostrando compreensão da relação entre as variáveis envolvidas numa relação de proporcionalidade direta, não associaram o valor do declive de uma reta que passa na origem do referencial ao valor da constante de proporcionalidade direta.

Da análise efetuada pude observar que uma das principais diferenças nas resoluções dos alunos, incidiram no maior ou menor detalhe com que contam ou exploram uma situação. Essa diferença pode dever-se ao conhecimento existente ou à experiência anterior, os quais influenciam a construção do conceito matemático de função e o sentido que o aluno dá à situação.

Há ainda a registar que, na questão 1.1. da tarefa 1, apenas uma aluna, embora sem indicar valores exatos para a velocidade, relacionou diretamente a inclinação dos segmentos de reta ao valor da velocidade constante em cada troço, demonstrando compreensão da relação entre as duas variáveis. Por outro lado, nenhum aluno tentou explorar a relação entre a variável dependente e a variável independente (distância a que o Mário se encontra a cada instante, da casa do amigo), o que poderá sugerir alguma falta de confiança relativamente ao conhecimento da noção de função.

Da análise da tarefa 2 saliento que nenhum dos alunos recorreu à informação disponibilizada no enunciado em linguagem verbal escrita, donde poderia tirar a informação sobre a distância percorrida por segundo e efetuar a multiplicação do tempo decorrido, pela distância percorrida por segundo e, adicionar os 200 metros iniciais. Esta estratégia, que envolveria a manipulação numérica, bem como a procura de regularidades numa eventual representação tabular da função, verificou-se pouco atrativa para os alunos que, quase sempre, mostraram preferência pela interpretação e leitura dos dados no gráfico. Do mesmo modo se verifica que nenhum aluno procurou estabelecer a expressão algébrica que traduz a distância percorrida em função do tempo e obter a imagem correspondente a $x = 100$. De qualquer modo, as respostas dadas voltam a corroborar a boa interpretação gráfica de situações de proporcionalidade direta já que a generalidade dos alunos identifica as coordenadas de um ponto no referencial e determina o quociente entre as suas coordenadas, reconhecendo graficamente uma situação de proporcionalidade direta. Ainda que intuitivamente, os alunos estão a determinar a constante de proporcionalidade, atribuindo-lhe significado no contexto da situação. Alguns alunos revelam ainda a capacidade de encontrar a relação de correspondência entre as variáveis procurando relações aritméticas e revelando compreensão das noções de variável dependente e independente. Estes procedimentos foram visíveis na maioria das respostas e permitiram que os alunos fizessem a conversão da representação gráfica para as *representações* verbal escrita e numérica corretamente.

Quando se trata da função afim, surgem várias dificuldades, nomeadamente logo na questão da interpretação e do que distingue esta função no contexto do problema. Foi possível observar dificuldades em compreender que as *representações* gráficas de funções não têm de passar sempre na origem do referencial. Esta dificuldade, também apontada por Elia et al (2007), parece estar relacionada com o facto de os alunos terem estudado a função linear em primeiro lugar, mas de qualquer forma demonstra dificuldades na compreensão da correspondência entre o objeto e a imagem. Assim, observei que as dificuldades se manifestam em particular na falta de compreensão do comportamento da variável dependente relativamente à independente, principalmente quando expresso numérica ou algebricamente e são evidentes, sobretudo na conversão da representação gráfica para a representação algébrica, a qual implica, para estes alunos, um salto significativo entre a sua capacidade de interpretar de forma mais intuitiva a função, e compreendê-la no seu formato mais abstrato.

Assim, ao passarmos para situações em que não existe relação de proporcionalidade direta, muitas das estratégias que os alunos estão habituados a utilizar deixam de funcionar. Foi o que se verificou nas tarefas 2 e 3, onde verifiquei que, muito frequentemente, os alunos, tendem a usar essas estratégias, assumindo estar perante uma situação em que essa relação existe. Este facto verificou-se na generalidade das respostas analisadas em que há nitidamente uma dificuldade na representação numérica e/ou algébrica da função afim não linear, sugerindo falta de compreensão do seu significado.

A representação tabular e, particularmente a sua conversão para a representação algébrica, também gerou algumas dificuldades. Os alunos revelam dificuldades relacionadas com o significado que atribuem às variáveis, principalmente porque nos dados apresentados o valor de b não está explicitamente presente.

Verifiquei também que os alunos mostram muitas dificuldades em identificar o efeito da variação dos parâmetros da equação de uma função na sua representação gráfica. Existem casos em que os alunos ainda não identificam que o declive da reta é o coeficiente de x na expressão algébrica e não compreendem a sua influência na inclinação da reta em relação ao semieixo positivo das abcissas. De qualquer modo, ainda que não seja muito evidente pelos dados apresentados, pelas discussões em sala de aula, considero que a generalidade dos alunos reconheceu duas retas paralelas como retas que tem o mesmo declive. Para além disto, os alunos mostraram estabelecer a relação entre uma função afim e o seu gráfico, sobretudo, ao evidenciarem que o gráfico de uma função afim é uma reta que não passa na origem do referencial e que, o gráfico de uma função linear é uma reta que passa no ponto $(0,0)$.

Relativamente à ordenada na origem, a sua determinação analítica, embora não tenha sido aprofundada revelou-se um problema devido às dificuldades na resolução de equações. Contudo, mesmo a sua identificação mais intuitiva gerou algumas dúvidas, alguns alunos tiveram dificuldade em identificar que se trata do ponto de interseção do eixo das ordenadas com a representação gráfica da função e também que poderiam obter esse valor diretamente por observação da representação gráfica. Este facto mostra que, embora estes alunos mostrem alguma facilidade em interpretar gráficos, quando se trata de relacionar essa representação com os significados da simbologia utilizada, surgem algumas dificuldades. Ou seja, os alunos identificam claramente a relação entre as variáveis e a correspondência entre determinado objeto e a sua imagem no contexto do problema, mas quando é necessário recorrer a uma maior abstração para fazer a interpretação algébrica surgem algumas dificuldades, quer na identificação do tipo de expressão associada a cada representação gráfica, quer na identificação gráfica dos parâmetros da expressão.

Quanto às questões menos diretas, verifica-se que se mantêm as dificuldades verificadas anteriormente. Os alunos tendem a manter uma estratégia pouco eficaz, muito próxima da que se verifica para questões mais diretas e não evidenciam ainda a capacidade de optar pela representação mais eficiente para a resolução do problema. Foi o caso da alínea d) da tarefa 3, em que nenhum dos pares de alunos optou por representar graficamente a situação da empresa AutoJá, sobrepondo ambos os gráficos, o que lhes permitiria fazer a leitura direta do ponto de interseção.

De qualquer modo constatei que, no decorrer das aulas, a noção de função, em particular de função afim, começou a consolidar-se. Pude observar alguns alunos que começaram a revelar um bom entendimento da noção dos conceitos envolvidos (objeto, imagem, variáveis dependente e independente), da correspondência entre grandezas e sobretudo verifiquei uma grande evolução na compreensão da simbologia usada. Não posso deixar de referir que a análise da tarefa 3 foi a principal responsável para esta minha conclusão, já que conduziu a uma discussão tão interessante que envolveu os alunos de toda a turma. Esse envolvimento contribuiu em muito para clarificar a compreensão que alguns alunos já haviam adquirido sobre os valores que a variável independente pode tomar, nos casos discreto e contínuo e ainda sobre o seu valor mínimo. Constatei assim que, atendendo à situação descrita no enunciado, os alunos mostraram uma compreensão significativa das restrições do contexto e da forma como influenciam o domínio da função.

No decorrer das aulas, verifiquei uma melhoria na conversão entre *representações*, já que os alunos acabaram por conseguir converter a representação verbal escrita na tabular e esta na representação gráfica sem grandes hesitações, mesmo tratando-se da função afim. Posteriormente, recorrendo a processos que envolveram equacionar a relação entre as variáveis, uma parte significativa dos alunos também representou algebricamente a função afim.

Na análise efetuada observa-se uma nítida preferência dos alunos pela representação gráfica, em detrimento de outras, o que pode denotar alguma falta de compreensão do significado dos parâmetros da expressão algébrica da função de proporcionalidade direta. Este facto deve estar relacionado com a facilidade, verificada logo no início, que estes alunos mostraram na visualização dos dados de uma situação contextualizada. Assim considero que a leitura da representação gráfica, onde os alunos identificam um ponto da reta representada e estabelecem a correspondência entre as variáveis, com o objetivo de evidenciar a relação funcional entre elas foi uma das aprendizagens obtidas com mais significado, como também é referido por Matos (2007).

Pelas respostas dadas, podemos depreender que há uma boa compreensão desta relação quando é expressa graficamente ou por tabela, já a representação algébrica parece ser evitada pelos alunos, podendo indiciar dificuldades na interpretação da *generalização* das situações e na identificação dos parâmetros envolvidos na construção do conceito matemático de função. Esta foi a representação que suscitou mais dúvidas aos alunos, resultado também referido por Kieran (1992).

Em suma a generalidade dos alunos mostrou capacidade de reconhecer correspondências que são funções, identificou corretamente as variáveis em causa, mas tem dificuldade em concretizar esse conhecimento em linguagem matemática formal.

Que relação existe entre os processos de raciocínio e as representações usadas?

Como já vimos, as *representações* matemáticas têm uma estreita ligação com o raciocínio e desempenham um papel fundamental em Matemática.

Na análise efetuada, constatei que a generalidade da turma mostrou conseguir efetuar as conversões de *representações* da função de proporcionalidade direta solicitadas e mostrou compreensão desta correspondência. Quando se trata de obter os dados necessários à resolução de uma questão colocada, os alunos revelam uma preferência clara pela leitura dos dados graficamente. Caso esta representação não esteja disponível na questão, preferem a representação tabular em detrimento da representação algébrica.

Para efetuar uma *justificação*, verifiquei uma preferência dos alunos pela utilização das *representações* verbal escrita e da representação numérica. No entanto este é dos processos em que os alunos manifestam mais dificuldades, ficando normalmente incompleto ou sendo mesmo inexistente. Uma das razões para esta dificuldade pode não ter a ver apenas com insegurança na resposta dada. Se considerarmos que este processo de raciocínio está intimamente ligado à representação verbal escrita que, por sua vez, é uma forma de representação não universal, esta dificuldade pode residir no obstáculo que é a própria comunicação matemática, já que a sua utilização e interpretação pode ser feita de forma ambígua ou conduzir a associações incorretas.

De qualquer forma é importante que este processo seja mais trabalhado, uma vez que é importante na interpretação final dos resultados obtidos e, por isso, é fundamental para enfatizar a conexão da Matemática com o quotidiano e/ou outras áreas do conhecimento. Além disso promove o desenvolvimento da representação verbal escrita e, consequentemente de capacidades transversais como a linguagem matemática e utilização de notações.

O processo de *generalização* é normalmente efetuado recorrendo à representação algébrica, embora por vezes pouco formal, ou usando a simbologia sem lhe atribuir significado. Esta representação é muito apoiada na representação numérica, em que os alunos recorrem a casos particulares, quer para confirmar relações entre as variáveis, quer como forma de chegar a essas relações. Este é, contudo, um processo em que os alunos revelam bastantes dificuldades, já que a representação algébrica é a que exige uma maior capacidade de abstração, significação dos parâmetros e flexibilidade no uso de conexões entre as várias formas de representação e estratégias.

À medida que os alunos foram progredindo nas suas aprendizagens ao nível da compreensão da relação entre as variáveis, começaram a reconhecer essa relação nos vários tipos de tipos de representação e, através deles, a identificar os diferentes tipos de funções estudadas (proporcionalidade direta, linear e afim).

6.3 Reflexão final

Este trabalho é o resultado da minha primeira experiência a lecionar, na integra, uma unidade de ensino e só foi possível após uma escolha que envolveu uma mudança significativa no meu percurso profissional, que acabou por se revelar muito compensadora e que superou todas as minhas expectativas.

As unidades curriculares do Mestrado em Ensino da Matemática, constituíram uma base fundamental no desenvolvimento das minhas competências como futura professora, sendo que não posso deixar de salientar a importância das aprendizagens proporcionadas pelas disciplinas de Didática da Matemática, Iniciação à Prática Profissional e Metodologia do Ensino da Matemática, fundamentais para a realização deste trabalho de investigação. Além disso, todo o processo que envolveu a pesquisa e leitura de artigos de investigação relacionados com as funções, preparam-me para identificar mais facilmente algumas estratégias vulgarmente utilizadas pelos alunos e, essencialmente para as dificuldades expectáveis. A reflexão sobre as experiências relatadas e os seus ensinamentos, foi uma mais valia essencial para esboçar o fio condutor deste trabalho, para fundamentar as opções tomadas e apoiar algumas conclusões.

No início deste trabalho de investigação, nomeadamente da prática de ensino supervisionada, foi muito importante o facto de o professor cooperante já ter acompanhado esta turma no 7.º ano de escolaridade, já que me permitiu ter acesso à profundidade ou abrangência com que os temas haviam sido abordados no ano anterior e às aprendizagens que haviam sido consolidadas. Estes aspetos, juntamente com a generosidade com que partilhou comigo toda a informação sobre os alunos e as suas particularidades, bem como o seu comportamento em grupo e o seu desempenho no ano anterior, foram essenciais para que eu pudesse adequar os materiais e o planeamento das aulas e deu-me a confiança necessária para avançar.

A etapa mais difícil e trabalhosa de todo este processo, talvez tenha sido a elaboração e/ou reconstrução das tarefas, já que o potencial de aprendizagem que encerram em si, as transforma numa ferramenta cuja elaboração deve ser cuidada e pautada por critérios e objetivos bem definidos. Com elas pretendi desencadear possibilidades que permitissem alcançar respostas às questões de investigação inicialmente formuladas, ao mesmo tempo que deviam ter uma composição coerente e encadeada e garantir a compreensão e aprendizagem das funções afins. Apesar de todos os cuidados, por vezes identifiquei, no decorrer das aulas, situações em que algumas alterações às tarefas teriam proporcionado mais aprendizagens, que deveria ter organizado a tarefa de outra forma, que deveria ter sido mais/menos ambiciosa nas questões ou ter sido mais rigorosa na linguagem utilizada. Enfim, não é fácil conseguir o equilíbrio das vertentes de uma tarefa e considero que nem sempre o consegui. De qualquer forma, é um trabalho muito desafiante precisamente porque pode ser constantemente posto à prova e sofrer uma evolução resultante disso.

A esta distância e, apesar de considerar indiscutível a importância da planificação e lecionação, considero que foi o ato de refletir, após cada aula, o mais impactante e que mais contribuiu para a minha evolução durante o período de lecionação e para a minha aprendizagem e evolução como futura professora. Cada aula dada foi analisada e alvo, não só da minha reflexão, mas também da do professor cooperante, da minha colega de mestrado e, por vezes, dos professores orientadores. Esta oportunidade de refletir com colegas permitiu-me ajustar a planificação de aulas seguintes, a gestão do tempo e do processo de ensino-aprendizagem. Também me possibilitou regular a conduta durante as aulas, em particular durante a discussão coletiva e conseguir, a cada passo, evoluir como professora. Esta prática mostrou-me o quão é importante e necessário que um professor reflita, seja flexível, de modo a manter-se atento e disponível para, em qualquer momento, alterar ou ajustar estratégias e conciliar as características dos alunos, os imprevistos em aula e os objetivos de aprendizagem.

Devo aqui destacar também a tomada de consciência, por experiência própria, da importância do trabalho colaborativo. A partilha de opiniões, a capacidade de ouvir e de discutir argumentos abrem um espaço inigualável para a aprendizagem tanto dos alunos como do professor. Estes alunos, devido às práticas do professor cooperante, estavam já familiarizados com este tipo de dinâmicas, o que facilitou a implementação do trabalho a pares e elevou as discussões coletivas a um nível que, inicialmente não pensei ser possível. Aconteceu algumas vezes e foi muito compensador ver os “meus” alunos, libertarem-se do rotulo de pouco participativos e permitirem-se empolgar pela Matemática.

Outro aspeto muito positivo nesta experiência, foi, no final de cada aula, ter recolhido as resoluções dos alunos. Esta prática permitiu-me ter acesso direto às resoluções, e, com tempo, refletir sobre pormenores das dificuldades e as aprendizagens efetuadas, o que nem sempre se consegue durante o trabalho em sala de aula. Além disso pude preparar criteriosamente as resoluções a serem apresentadas e identificar os aspetos a abordar e a consolidar durante a discussão coletiva, enriquecendo muito estes momentos.

Uma prática que também revelou ter muito potencial para dinamizar a aula e promover a aprendizagem, foi a criação de questões extra durante a discussão. Estas questões propostas por mim, foram surgindo durante a aula e/ou durante a discussão, pela observação que fui fazendo da evolução dos alunos, numa tentativa de ir ao encontro do que estava a faltar quer para consolidarem uma aprendizagem, quer para irem mais além na exploração da tarefa. Estes momentos foram essencialmente de debate de ideias e senti da parte dos alunos muita recetividade a esta prática que, sem dúvida veio dar sentido às aprendizagens efetuadas e despertou nos alunos um papel ativo na construção do seu próprio conhecimento.

Quanto ao trabalho escrito, o maior desafio foi a análise dos dados. Todo o processo que implicou a seleção das resoluções, a sua análise à luz das questões de investigação, o confronto e cruzamento de toda a informação recolhida, foi difícil e demorado. Por outro lado, refletir e concluir a partir desses dados foi um pouco frustrante, já que, por vezes, apenas foi possível estabelecer algumas conjeturas. No entanto, é indiscutível a importância da análise detalhada das resoluções dos alunos, para a compreensão dos seus *processos de raciocínio* e da forma como representam as suas ideias. Esta análise possibilitou-me aprofundar essa compreensão um nível que apenas a lecionação das aulas não teria permitido.

De registar que os alunos manifestaram algumas dificuldades, particularmente, ao nível da comunicação matemática escrita e oral, na correta utilização dos termos e simbologia e no processo de *justificação*, tal como é referido por Canário (2011), que afirma que a relutância dos alunos em justificar as suas respostas é uma consequência das suas dificuldades. Apesar das minhas tentativas para colmatar as dificuldades na linguagem matemática e na capacidade de argumentação e *justificação*, a maioria destes alunos necessita ainda muito de trabalhar estes aspetos. Algo que também é necessário trabalhar é o sentido critico dos alunos. Estes tendem a não explorar questões abertas nem a verificar as suas respostas, no entanto, penso que a contextualização da maioria das tarefas foi importante, já que a maioria dos alunos apesar de não ter por hábito fazer a verificação, tem a capacidade de fazer uma interpretação mais intuitiva do resultado obtido no contexto do problema.

Não posso deixar de anotar, após esta reflexão, alguns aspetos que teriam contribuído para melhorar este estudo. Assim, não posso deixar de lamentar a interrupção inesperada das aulas que impediu que fossem trabalhados alguns aspetos e consolidadas algumas aprendizagens. Um aspeto que gostaria de ter consolidado era a manipulação da expressão algébrica da função com a finalidade clara de ocorrer a conversão para outro tipo de representação. Esta exploração estava prevista para as aulas seguintes e permitiria aos alunos utilizarem sobretudo processos numéricos para determinarem as coordenadas de pontos para a construção do gráfico da função, ou até irem mais longe e já demonstrarem capacidade de associar diretamente as expressões analíticas das funções aos respetivos gráficos, sem utilizar processos numéricos. Os alunos teriam ainda a oportunidade de consolidar o significado dos parâmetros que constituem as expressões algébricas do tipo $y = ax + b$ e a sua relação com os pontos relevantes do gráfico de modo a que a compreensão da representação algébrica ganhasse, com a compreensão já adquirida da representação gráfica e os símbolos algébricos fossem aprendidos com significado.

O efeito da variação dos parâmetros da equação da reta na representação gráfica da função foi também pouco explorado e não houve tempo para abordar a representação gráfica de uma função com declive negativo (o que estava previsto na realização da tarefa 4) nem a identificação do sinal do declive diretamente por observação direta dessa representação.

Outra questão que esperava ter analisado com os alunos era a sua compreensão relativamente às vantagens e desvantagens do uso de determinada representação matemática dependendo das questões colocadas, já que, segundo Ponte e Quaresma (2014, p. 103), "(…) na resolução de um problema ou na realização de uma investigação que requer raciocínio, a escolha da representação a usar é muitas vezes decisiva para se conseguir alcançar o objetivo."

Relativamente às tarefas, penso que nem sempre se revelaram suficientes para estimularem os *processos de raciocínio*, principalmente no que toca às justificações. Muitas vezes estas foram conseguidas apenas através do questionamento oral, quer individual, durante o trabalho autónomo, quer coletivo, durante a discussão da tarefa. Assim, penso que futuramente devo encontrar mais e melhores estratégias que promovam estes processos.

Também acredito que a realização de entrevistas a alguns dos alunos teria sido benéfica. Nelas conseguiria ter esclarecido a intencionalidade de alguns procedimentos utilizados pelos alunos, por exemplo, não fica claro se os alunos sabem que para representar uma reta são suficientes apenas dois pontos. Poderia clarificar a compreensão que os alunos adquiriram da noção de função através do significado que atribuem aos objetos matemáticos. Também teria obtido informação que, eventualmente, me permitiria tirar algumas conclusões, nomeadamente acerca da capacidade de conversão entre *representações* e das conexões entre os *processos de raciocínio* e as *representações* privilegiadas pelos alunos.

O facto de não ter concluído as aulas previstas inicialmente, impossibilita a leitura das aprendizagens que teriam sido efetuadas no culminar da unidade didática. Ainda assim, considero que algumas das dificuldades que os alunos revelaram no início do estudo foram atenuadas. Em particular, destaco a capacidade que estes alunos evidenciaram em interpretar e compreender graficamente uma função. Esta aptidão foi fundamental para a evolução verificada no decorrer da intervenção letiva e para a aquisição das aprendizagens efetuadas, nomeadamente, na apropriação dos conceitos mais elementares do tema das funções, no cálculo de objetos e imagens, na apropriação dos vários tipos de representação possíveis, na conversão entre elas e na associação dos tipos de função trabalhados às suas possíveis *representações*.

Esta minha leitura das aprendizagens foi corroborada pala análise da questão de aula. Embora tenha revelado algumas dificuldades dos alunos, evidenciou também a aquisição de aprendizagens muito significativas, o que me faz crer que estaríamos, juntos, a percorrer um bom caminho.

Apesar de todos os obstáculos e, para além de tudo o que já foi dito, este estudo foi importantíssimo. Possibilitou-me compreender melhor as dificuldades dos alunos, os *processos de raciocínio*, as *representações* e as suas características. Permitiu-me conhecer várias ferramentas e comportamentos que contribuem para uma aprendizagem mais significativa e, em particular, para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos.

Com a realização deste estudo termino um ciclo de desafios, obstáculos e aprendizagens constantes e desejo inaugurar um futuro como professora de Matemática, que prevejo igualmente desafiante, árduo, mas muito compensador.

Referências

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação básica*. ME, Departamento do Ensino Básico.

Adu-Gyamfi, K., & Bossé, M. J. (2013). Processes and reasoning in representations of linear functions. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *12*(1), 167–192. https://doi.org/10.1007/s10763-013-9416-x

Agrupamento de Escolas de Queluz-Belas (2018). *Projeto Educativo do Agrupamento de Escolas Queluz-Belas*. AEQB.

Ayalon, M., Watson, A., & Lerman, S. (2015) Functions represented as linear sequential data: relationships between presentation and student responses. *Educational Studies in Mathematics*, *90*, 321–339. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9628-9

Arzarello, F., Bazzini, L., & Chiappini, G. (2001). A model for analysing algebraic processes of thinking. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell e R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra*. Kluwer.

Barbosa, A. (2011). Generalização de padrões em contextos visuais: um estudo no 6ºano de escolaridade. In M. H. Martinho, R. A. Ferreira, I. Vale e J.P. Ponte (Eds.), *Ensino e Aprendizagem da Álgebra – Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 327-345). EIEM.

Barbosa, A. (2013). O contributo da visualização no desenvolvimento do raciocínio funcional. Em *Atas de Encontro de Investigação em Educação Matemática: Raciocínio Matemático* (pp. 51-80). SPIEM.

Bardini, C., Pierce, R. U., & Stacey, K. (2004). Teaching linear functions in context with graphic calculators: Students' responses and the impact of the approach on their use of algebraic symbols. *International Journal of Science and Mathematical Education*, *2*(3), 353-376.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação: uma Introdução à Teoria e aos Métodos*. Porto Editora.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino Exploratório da Matemática: Praticas e Desafios. *Educação e Matemática*, *115*, 11-17.

Canavarro, A. P. (2007). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante, 6(2)*, 81-118.

Canavarro, A. P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2014). Práticas de ensino exploratório da Matemática: Ações e intenções de uma professora. In J. P. da Ponte (Org.) *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 217-231). IE.

Canário, M. F. (2011). *Modelação e Utilização das Tecnologias no Estudo da Função Afim: Um Estudo de caso* [Dissertação de Mestrado, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa]. Repositório ULisboa. https://repositorio.ul.pt/handle/10451/6038

Canário, F., Amado, N., & Carreira, S. (2011). O Geogebra na Construção de Modelos Matemáticos: Uma experiência no estudo da variação linear. Em *ATAS XXII SIEM* (pp. 845-857). APM.

Carraher, D., Martinez, M., & Schliemann, A. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education, 40*(1), 3-22. https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-007-0067-7

Consciência, M. (2013). *A calculadora gráfica na aprendizagem das funções no ensino secundário* [Tese de Doutoramento, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa]. Repositório ULisboa. https://repositorio.ul.pt/handle/10451/10521

Cunha, C (2010). *A utilização de ferramentas tecnológicas e os processos de aprendizagem: um estudo na introdução à Álgebra no 2º ciclo* [Dissertação de Mestrado, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa]. Repositório ULisboa. https://repositorio.ul.pt/handle/10451/2547

Doorman, M., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P., & Reed, H. (2012). Tool use and the development of the function concept: form repeated calculations to functional thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education, 10*(6), 1243-1267.

Driscoll, M. (1999). *Fostering algebraic thinking: A guide for teachers, grades 6-10*. Heinemann.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 103-131.

Duval, R. (2003). Registos de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. Em D. S. Machado, *Aprendizagem em matemática: Registos de representação semiótica* (pp. 11-33). Papirus.

Elia, I. et al. (2007). Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *5*, 533-556.

Ellis, A. (2007a). A taxonomy for categorizing generalizations: Generalizing actions and reflection generalizations. *Journal of the Learning Sciences*, *16*(2), 221 – 262.

Ellis, A. (2007b). The influence of reasoning with emergent quantities on students' generalizations. *Cognition and Instruction*, 25(4), 439–478.

Ellis, A. (2011). Generalizing promoting actions: How classroom collaborations can support students' mathematical generalizations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *42*(4), 308 – 345.

Fernandes, D. (1991). Notas sobre os paradigmas da investigação em educação. *Noesis*, *18*, 64-66.

Friedland, A., & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representation in algebra. Em Cuoco (Ed), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 173-185). NCTM.

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. Em L. D. English, *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 178-203). Routledge.

Greeno, J., & Hall, R. (1997). Practicing representation. *Phi Delta Kappan*, *78*, 361-367.

Henriques, A., e Ponte, J. P. (2014). As representações como suporte do raciocínio matemático dos alunos quando exploram atividades de Investigação. *Bolema, 28*(48), 276-298.

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 96*(1), 1-16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? Em J. Kaput, D. Carraher, e M. Blanton, *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17). Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. Em E. Fennema, e T. Romberg, *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Erlbaum.

Kauark, F. S., Manhães, F. C., Medeiros, C. H. (2010). *Metodologia da Pesquisa: um guia prático*. Editora Itabuna.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). Macmillan.

Kieran, C. (2007). Learning and Teaching Algebra at the Middle School Through College Levels: Building Meaning for Symbols and Their Manipulation. Em F. K. Lester, *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 707-762). Charlotte, NC: Information Age.

Lannin, J. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(3), 231-258.

Lannin, J., Ellis A. B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematics reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8.* NCTM.

Loureiro, N. M. S. (2013). *A representação gráfica das funções linear e afim: um estudo com alunos do 8.º ano.* [Dissertação de Mestrado, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa]. Repositório ULisboa. https://repositorio.ul.pt/handle/10451/9826

Mateus, A. (2013). *A capacidade de generalização no estudo das funções no 8.º ano.*

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2013). Desenvolvendo o raciocínio matemático: generalização e justificação no estudo das inequações. *Boletim Gepem, 62*, 17-31.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2012). Raciocínio matemático em conjuntos numéricos: Uma investigação no 3.º ciclo. *Quadrante*, *XXI*(2), 81-110.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2018). Teacher's actions to promote students' justification. *Acta Scientiae*, *20*(3), 487-505. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v20iss3id3910

Matos, A. (2007). Explorando relações funcionais no 8.º ano: Um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico. Dissertação de Mestrado. UL.

MEC (2018). *Aprendizagens Essenciais-8º ano -Matemática*. MEC.

MEC (2013). *Caderno de Apoio do 3.º ciclo do ensino básico*. MEC.

MEC (2017). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*. DGE.

MEC (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico*. MEC.

Neves, E. B., & Domingues, A. C. (2007). *Manual de Metodologia da Pesquisa Científica*. Rio de Janeiro: ESAO.

Nova escola (2008). *Estudo do domínio de uma função*. Acedido em https://novaescola.org.br/plano-de-aula/548/estudo-do-dominio-de-uma-funcao.

NCTM (2009). *Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making*. Autor.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. APM.

NCTM (2008). *Princípios e normas para a matemática escolar*. APM.

Oliveira, P. (2002). *A investigação do professor, do matemático e do aluno: uma discussão epistemológica* [Dissertação de Mestrado, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa]. Repositório ULisboa. https://repositorio.ul.pt/handle/10451/43019

Oliveira, P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia. *Educação e Matemática*, *100*, 3-9.

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning: Induction and analogy in mathematics* (Vol. I). Princeton University Press.

Ponte, J. (1984). Functional reasoning and the interpretation of Cartesian graphs. *(Doctoral dissertation) Univesity of Georgia*. APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI(Ed.) *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). APM.

Ponte, J. P. (2006). Números e Álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, e P. Canavarro (Eds.), *Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). SEM-SPCE.

Ponte, J. P. (1990). O conceito de função no currículo de Matemática. *Educação e Matemática*, *15*, 3-9.

Ponte, J. P. (1992). The story of the concept of function and some educational implications. *The Mathematics Educator*, *3*, 3-8.

Ponte, J. P., Branco, N. & Matos, A. (2009a). *Álgebra no Ensino Básico*. Ministério da Educação.

Ponte, J. P., Matos, A., & Branco, N. (2009b). *Sequências e funções*. Ministério da Educação**.**

Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2003). *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*. Autêntica.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. *Praxis Educativa, 7*(2), 355-377.

Ponte, J. P., Quaresma, M. (2014). Representações e processos de raciocínio na comparação e ordenação de números racionais numa abordagem exploratória. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 28*(50), 1464-1484.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Branco, N. (2011). Tarefas de exploração e investigação na aula de matemática. *Educação Matemática em Foco*, *1*(1) 9-29.

Ponte, J. P., & Sousa, H. (2010). Uma oportunidade de mudança na Matemática no Ensino Básico. Em APM (Ed.), *O Professor e o Programa de Matemática do Ensino Básico* (pp. 11-41). APM.

Preston, R., & Garner, A. S. (2003). Representation as a vehicle for solving and communicating. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *9*(1), 38-43.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In S. Alatorre, J. Cortina, M. Sáiz e A. Méndez (Eds), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *1*, 1-21.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 37-70.

Ramos, C. (2009). *A argumentação na aula de Matemática: um estudo colaborativo* [Dissertação de Mestrado, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa]. Repositório ULisboa. https://repositorio.ul.pt/handle/10451/3422

Rivera, F., & Becker, J. (2009). Algebraic reasoning through patterns. *Mathematics Teacher in the Middle School, 15*(4), 213-221.

Rodrigues, M. (2009). As capacidades transversais no novo programa do ensino básico: desafios à sua integração. *Educação e Matemática*, *105*, 38-40.

Ronda, E. (2015). Growth points in linking representations of function: a research- based framework. *Educational Studies in Mathematics, 90*, 303-319. https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-015-9631-1

Santos, L. (2002). *Auto-avaliação regulada: porquê, o quê e como?* [Capítulo de Livro, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa]. Repositório ULisboa. https://repositorio.ul.pt/handle/10451/4884

Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. In L. Menezes, L. Santos, H. Gomes e C. Rodrigues (Eds.), *Avaliação em Matemática: Problemas e desafios* (pp. 11-35). Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.

Santos, L. (2015). Representações. In M. V. Pires, R. T. Ferreira, A. Domingos, C. Martinho, I. Vale, N. Amado, S. Carreira, T. Pimentel, L. Santos (Eds.). *Representações Matemáticas*. *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática*. SPIEM.

Santos, L., & Pinto, J. (2018). Ensino de Conteúdos Escolares: A Avaliação como fator estruturante. In Veiga, F. H. (Coord.). *O Ensino na Escola de Hoje: Teoria, Investigação e Aplicação* (pp. 503-539). Climepsi Editora.

Saraiva, J. M., & Teixeira, M. A. (2009). Secondary school students understanding of function via exploratory and investigative tasks. *Quaderni di Ricerca in Didattica, 19,* 74-83.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of same coin. *Educational Studies in Mathematics, 1,* 1-36.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In J. Kaput, D. Carraher, e M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 133–160). Lawrence Erlbaum Associates.

Smith, E. (2003). *Stasis and change: Integrating patterns, functions, and algebra throughout the K-12 curriculum*. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, e D. Schifter (Eds.), A research companion to Principles and standards for school mathematics (pp. 136-150). NCTM.

Stake, R. (1995). *The Art of Case Study Research.* SAGE Publications.

Teixeira, I. (2016). *A noção de declive nas funções afim, linear e constante* [Dissertação de Mestrado, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa]. Repositório ULisboa.

https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/27939/1/ulfpie051338_tm.pdf

Teixeira, P.; Precatado, A.; Albuquerque, C.; Antunes, C.; Nápoles, S. (1997). *Funções: Matemática- 10.º ano de escolaridade*. ME-DES.

Anexos

Anexo 1 | Tarefas e fichas de trabalho

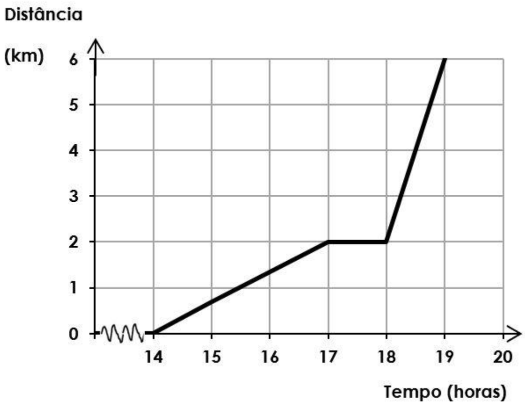
Anexo 1.1 | Ficha de trabalho 1 – Os gráficos contam histórias

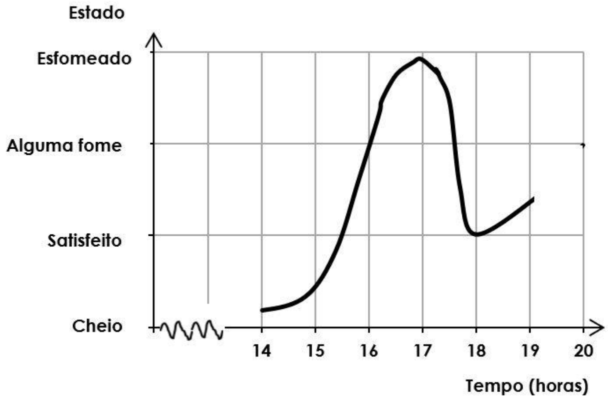
matemática

ID: ______________________________ DATA: __________ oito

Ficha de trabalho 1 | Os gráficos contam histórias

1. Observem os gráficos seguintes que traduzem a história da caminhada que o Mário fez, a partir de sua casa, para visitar um amigo do outro lado da serra. O primeiro gráfico representa a distância a que o Mário se encontra de sua casa a cada instante e o segundo gráfico representa o seu apetite em cada instante.

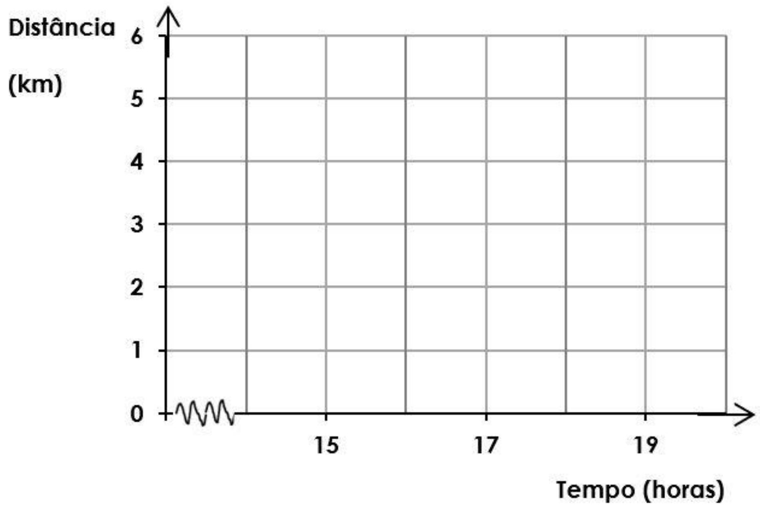




1.1. Com base na informação disponível nos **dois gráficos**, descrevam o percurso do Mário durante a sua caminhada.

Lembrem-se de incluir informação acerca:
- da distância percorrida pelo Mário;
- das paragens feitas durante o seu percurso,
- do tempo que o Mário esteve a caminhar, entre outras observações que considerem relevantes.

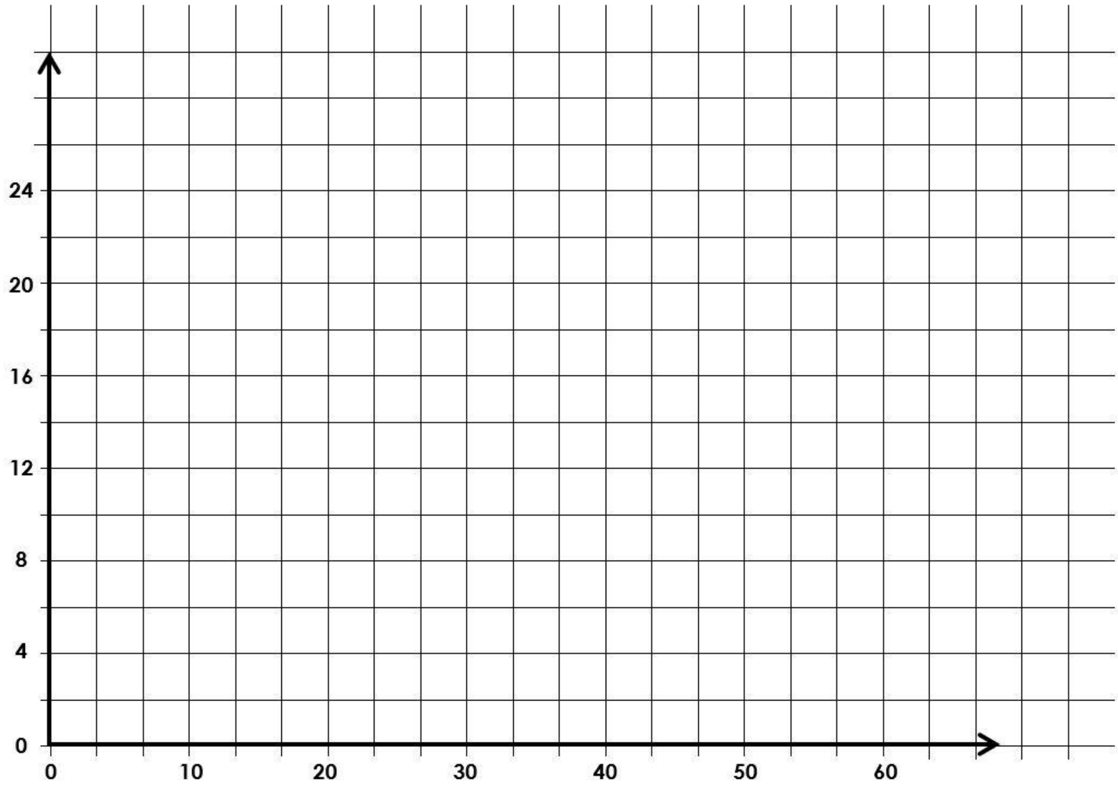
1.2. Numa outra versão desta história, imaginem que a determinada altura do seu percurso, quando ficou esfomeado, o Mário percebeu que não havia levado o seu lanche. Assim, decidiu regressar a casa e não voltou a sair. Representa esta outra versão da caminhada através de um gráfico que relaciona a distância a que o Mário está de sua casa com o tempo decorrido.



2. Antes de iniciar a caminhada, o Mário ouviu trovões e ficou preocupado porque não quer ser apanhado no meio da serra pela trovoada. Mas o Mário conhece bem a natureza e aprendeu a relacionar o tempo que decorre entre o relâmpago e o trovão com a distância a que a trovoada ocorre de si. Assim, efetuou um registo no seu bloco de apontamentos para saber se era seguro ir caminhar.

	1º registo	2º registo	3º registo	4º registo
Tempo decorrido entre o relâmpago e o trovão (s)	10	20	30	60
Distância a que a trovoada ocorre (km)	3,4	6,8	10,2	20,4

2.1. Representem graficamente a distância a que a trovoada está da casa do Mário em função do tempo decorrido entre o relâmpago e o trovão.



2.2. O gráfico representa uma relação de proporcionalidade direta? Justifiquem a vossa resposta.

2.3. A que distância do Mário se encontra a trovoada se o tempo que decorre entre o relâmpago e o trovão é de 1 minuto e meio?

2.4. Neste contexto, se d for a distância (km) e t o tempo (segundos), qual ou quais das expressões seguintes descrevem a relação entre as duas grandezas, distância em (quilómetros) e tempo (em segundos)? Expliquem como obtiveram a vossa resposta.

$d(t) = 2{,}94t$ $\quad$ $d(t) = 0{,}34t$ $\quad$ $d(t) = \dfrac{34}{10}t$ $\quad$ $t(d) = 3{,}4d$

2.5. Qual terá sido o intervalo de tempo decorrido entre o relâmpago e o trovão, se o Mário apontou no seu bloco que a trovoada está a 51 km. Apresentem o resultado em minutos.

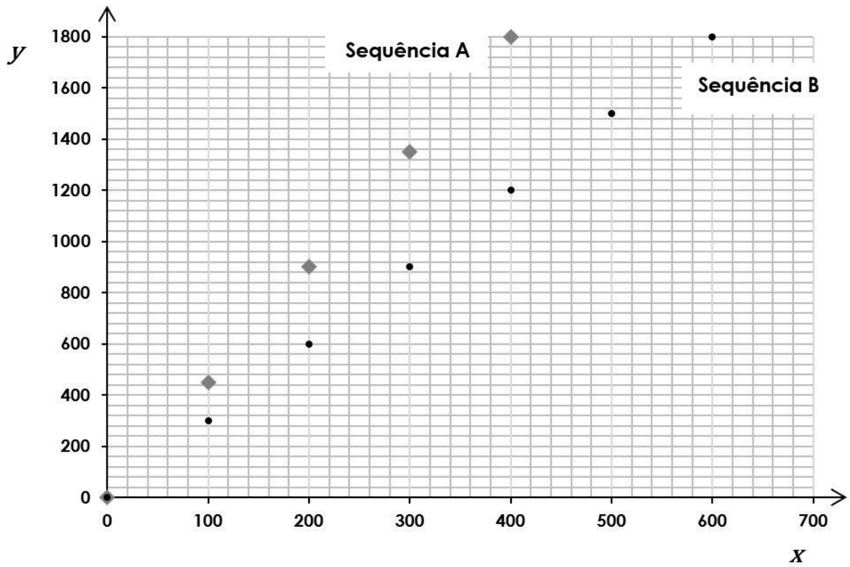
matemática

ID: ______________________ DATA: __________ oito

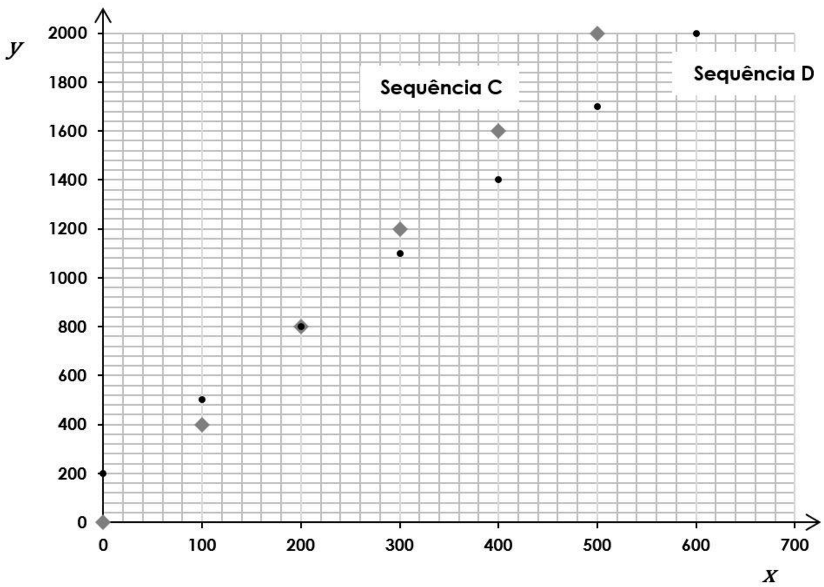
Ficha de trabalho 2 | Sequências gráficas

1. Observem as sequências A, B, C e D nos gráficos seguintes, que relacionam os valores do eixo das abcissas (x) e os valores do eixo das ordenadas (y).

Situação 1



Situação 2



A Larissa pratica atletismo e participa regularmente em corridas, a Rita apesar de não ser muito veloz, gosta muito de correr e por isso a Larissa desafiou-a para uma corrida de seis voltas ao campo da escola. Para ser mais justo, a Larissa deixou a Rita partir com 200 metros de avanço e garantiu que mesmo assim venceria a corrida.

1.1. Se nos gráficos anteriores, o eixo das abcissas se referir ao tempo (em segundos) e o eixo das ordenadas se referir à distância percorrida (em metros), qual das situações representadas (situação 1 ou situação2), podem associar à situação descrita?
Expliquem como pensaram.

1.2. Que distância foi percorrida pela Larissa e pela Rita? Quem chegou primeiro?
Expliquem porquê.

1.3. Comentem a afirmação seguinte.
"As amigas encontraram-se 3 minutos e 20 segundos depois do início da corrida, tendo percorrido 800 metros cada uma".

1.4. Quantos metros por segundo percorre em média a Larissa? E a Rita? Apresentem os cálculos que efetuarem.

1.5. Escrevam as expressões algébricas das funções que traduzem a relação entre o tempo e a distância percorrida por cada uma das amigas.

$l(t) =$

$r(t) =$

1.6. Comparem as sequências B e D, indicando o que têm de diferente e o que têm em comum.

Anexo 1.3 | Ficha de trabalho A – A poupança da Laís

matemática

ID: ______________________________ DATA: __________ oito

Ficha de trabalho A | A poupança da Laís

1. A Laís quer muito fazer uma viagem quando terminar o secundário. Para tal, resolveu começar a juntar 25 euros por mês e a sua avó decidiu ajudá-la oferecendo-lhe 350 euros.

1.1. Durante quantos meses precisará a Laís de poupar dinheiro, sabendo que necessita de 900 euros para a sua viagem?

1.2. Qual é a expressão algébrica da função que representa o valor que a Laís junta em função do tempo decorrido?

1.3. Representa graficamente, a função que descreve a poupança da Laís durante os primeiros 10 meses.

1.4. Ao fim de quanto tempo terá a Laís juntado 450 euros?

1.5. Sem a ajuda da avó, quanto tempo vai demorar a Laís a conseguir a totalidade do valor para a viagem?

Anexo 1.4 | Ficha de trabalho 3 – Gasóleo com talão de desconto (1ª versão)

matemática

ID: ______________________________ DATA: __________ oito

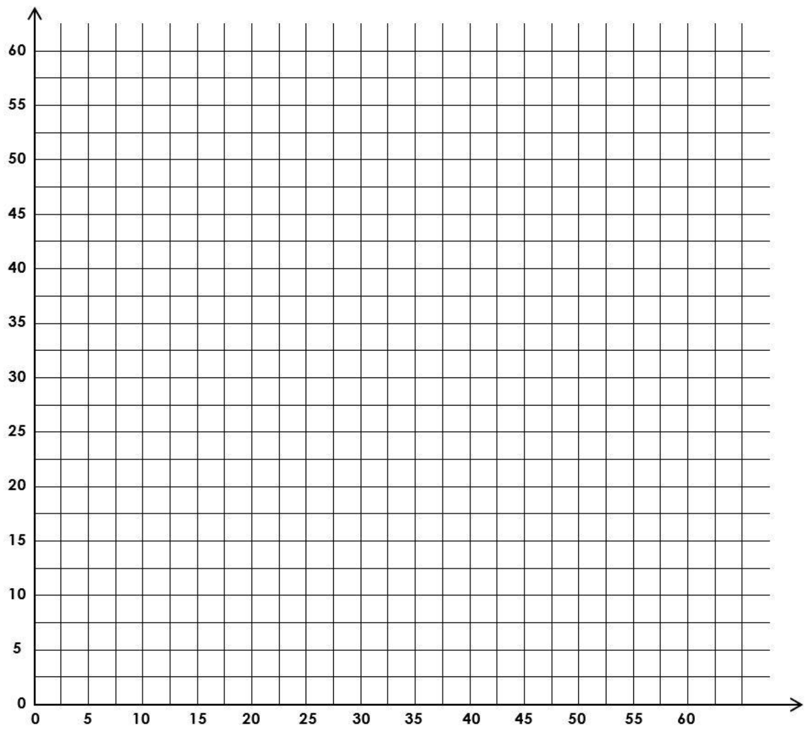
Ficha de trabalho 3 | Gasóleo com talão de desconto

1. Durante o mês de janeiro de 2019, o preço do gasóleo na área de serviço frequentada pelo Sr. Moreira (área de serviço F) foi de 1,20 €/litro. Nesta área de serviço o valor mínimo de abastecimento é de 5,00 €.

2.1. Considerem que o Sr. Moreira tem um talão de desconto, no valor de 2,50 € e completem a tabela seguinte, considerando *f* a função que faz corresponder a quantidade de gasóleo ao preço a pagar.

Quantidade de gasóleo (litros)	15	20	25	50
Preço a pagar (euros)	15,50			

2.2. Usando a grelha abaixo, representem graficamente a relação entre o número de litros de gasóleo e o preço total a pagar pelo Sr. Moreira, aplicado o talão de desconto.



2.3. Determinem $f(65,5)$? Expliquem o significado do resultado que obtiveram, no contexto do problema.

2.4. Neste contexto, identifica qual é a variável dependente e a variável independente.

Variável dependente:

Variável independente:

Indiquem se se trata de uma função constante, linear ou afim? Porquê?

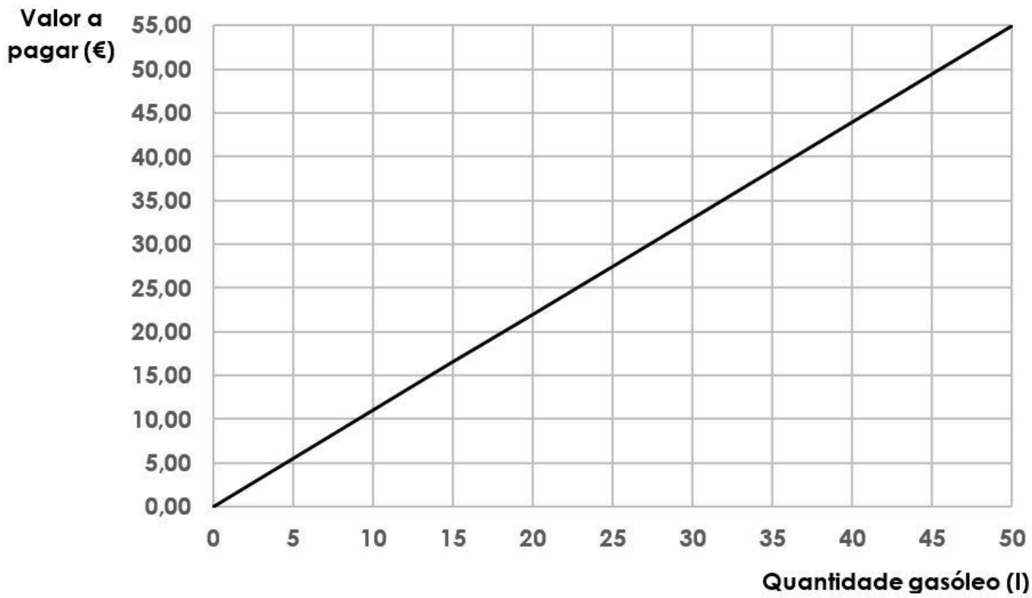
( ) Função constante ( ) Função linear ( ) Função afim

2.5. Sendo que o Sr. Moreira apenas tem um talão de desconto de 2,5 € por mês, quantos litros de gasóleo terá colocado o Sr. Moreira durante o mês de janeiro, se ao somar todos os talões de pagamento desse mês verificou ter gasto no total 117,5 euros?

2.6. Encontrem uma expressão geral que permita calcular o preço total a pagar pelo gasóleo adquirido, nesta situação.

2.7. Considerando que o deposito do carro do Sr. Moreira tem a capacidade máxima de 55 litros, indiquem qual é o domínio e o contradomínio da função f.

2. Numa outra área de serviço (G), o preço do gasóleo por litro segue a função representada graficamente abaixo.



2.1. Sabendo que nesta área de serviço não aceitam o talão de desconto do Sr. Moreira, qual é a área de serviço mais vantajosa, caso o Sr. Moreira pretenda colocar 20 litros de gasóleo? Justifiquem a vossa resposta.

2.2. Quantos litros de gasóleo deverá colocar o Sr. Moreira, para que seja mais vantajoso ir à área de serviço onde o seu talão de desconto não é aceite? Expliquem como pensaram.

Anexo 1.5 | Ficha de trabalho 3 – Gasóleo com talão de desconto (2ª versão)

FECG	matemática
ID: ______ DATA: ______	oito

Ficha de trabalho 3 | Gasóleo com talão de desconto

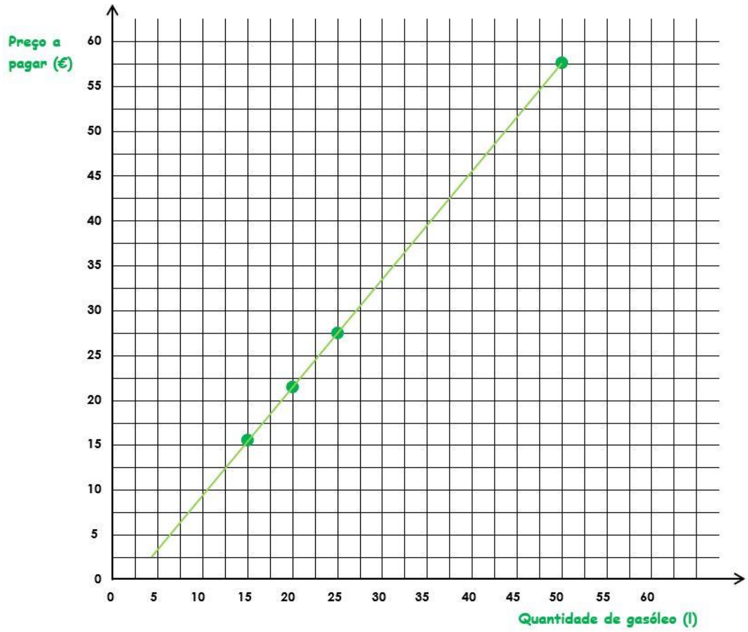
Correção e comentários às questões efetuadas em sala de aula:

1. Durante o mês de janeiro de 2019, o preço do gasóleo na área de serviço frequentada pelo Sr. Moreira (área de serviço F) foi de 1,20 €/litro. Nesta área de serviço o valor mínimo de abastecimento é de 5,00 €.

1.1. Considerem que o Sr. Moreira tem um talão de desconto, no valor de 2,50 € e completem a tabela seguinte, considerando f a função que faz corresponder a quantidade de gasóleo ao preço a pagar.

Quantidade de gasóleo (litros)	15	20	25	50
Preço a pagar (euros)	15,50	21,50	27,50	57,50

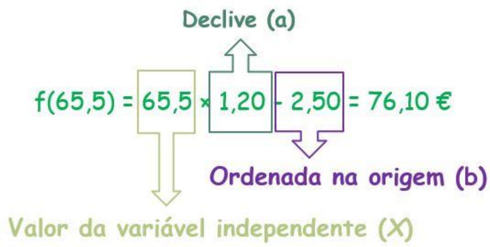
1.2. Usando a grelha abaixo, representem graficamente a relação entre o número de litros de gasóleo e o preço total a pagar pelo Sr. Moreira, aplicado o talão de desconto.



Nota: neste caso podemos traçar a linha que une os pontos marcados porque todos os pontos sobre essa linha têm significado no contexto do problema. Ou seja, o Sr. Moreira pode colocar uma quantidade decimal de gasóleo (por exemplo: 20,2 litros) e pagará o correspondente a essa quantidade colocada. Estamos, portanto, num contexto em que o domínio e o contradomínio da função, são números reais ($\mathbb{R}$).

Repara que o gráfico não está definido para valores abaixo dos 2,50 €, devido às condições do problema.

1.3. Determinem $f(65{,}5)$? Expliquem o significado do resultado que obtiveram, no contexto do problema.



O resultado obtido (76,10 €), significa que, por 65,5 litros de gasóleo (objeto – elemento do domínio da função), o Sr. Moreira paga 76,10 € (imagem – elemento do contradomínio da função).

1.4. Neste contexto, identifica qual é a variável dependente e a variável independente.

Variável dependente: preço a pagar com desconto.
Variável independente: quantidade de gasóleo.

Indica se se trata de uma função constante, linear ou afim? Porquê?
( ) Função constante ( ) Função linear (×) Função afim

Trata-se de uma função afim porque os seus pontos definem uma reta que não passa na origem (0,0). Caso fizesse sentido, no contexto do problema, prolongar o segmento de reta que representa a função, observaríamos isso graficamente. Neste caso, como *f(0)* não faz sentido, o gráfico não se encontra aí definido, mas, caso tenhamos dúvidas, podemos fazer o seu prolongamento a tracejado para chegar a esta conclusão.

1.5. Sendo que o Sr. Moreira apenas tem um talão de desconto de 2,5 € por mês, quantos litros de gasóleo terá colocado o Sr. Moreira durante o mês de janeiro, se ao somar todos os talões de pagamento desse mês verificou ter gasto no total 117,5 euros?

Se o Sr. Moreira não tivesse o talão teria pago: 117,5 + 2,5 = 120,00 €
Como o preço por litro é 1,20 €, vem: $\frac{120,00}{1,20} = 100$ litros.

Então, durante o mês de janeiro, o Sr. Moreira colocou 100 litros de gasóleo.

1.6. Encontrem uma expressão geral que permita calcular o preço total a pagar pelo gasóleo adquirido, nesta situação.

f(x) = 1,20x - 2,50

Nota: f(x) representa o valor a pagar em função da quantidade de gasóleo colocada (x).

A partir daqui a ficha não foi resolvida em aula, será para resolveres em casa, incluindo os desafios Extra

Extra 1: Qual é o declive e a ordenada na origem da função f?

Sendo f(X) = 1,20X - 2,50   (como viste em 1.6.)

Declive =

Ordenada na origem =

Extra 2: Qual é a quantidade mínima de gasóleo que o Sr. Moreira pode colocar nesta bomba, usando o seu talão de desconto? Escolhe a opção correta.

(A) 2,50 €   (B) 15 litros   (C) 4,1(6) litros   (D) 5 litros

Dica: Na representação gráfica feita em 1.2., faz sentido prolongar a reta para baixo? não te esqueças que nesta área de serviço é obrigatório pôr um valor mínimo de 5,00 € e que o Sr. Moreira tem um talão de desconto.

1.7. Considerando que o deposito do carro do Sr. Moreira tem a capacidade máxima de 55 litros. Indica qual das opções abaixo representa o domínio e o contradomínio da função *f*.

Dica: Relembra que o domínio (D) é o conjunto dos objetos e contradomínio (D´) é o conjunto das imagens. O domínio desta função inclui todos os valores contemplados entre a quantidade mínima e a quantidade máxima de gasóleo que o Sr. Moreira pode colocar. O contradomínio inclui todos os valores contemplados entre o valor mínimo e máximo que o Sr. Moreira paga pelo gasóleo colocado.

Opção A: Domínio (D*f*) = [4,1(6) ; 55] e Contradomínio (D`*f*) = [2,50 ; 63,50]

Opção B: Domínio (D*f*) = [15 ; 55] e Contradomínio (D`*f*) = [15,50 ; 63,50]

Opção C: Domínio (D*f*) =]4,1(6) ; 55[e Contradomínio (D`*f*) =]2,50 ; 63,50[

2. Numa outra área de serviço (G), o preço do gasóleo por litro segue a função *g* representada graficamente abaixo (a preto). No gráfico está também representada a função *f* (a verde), relativa ao preço a pagar na primeira bomba estudada, usando talão de desconto.

2.1. A função *g* representa uma relação de proporcionalidade direta? Porquê?

2.2. Qual das opções seguintes representa a expressão geral que permite calcular o preço a pagar pelo gasóleo adquirido, nesta área de serviço. Justifica a tua resposta.

(**A**) $g(x)= 1{,}1x + 5$ (**B**) $g(x) = 1{,}1x$ (**C**) $g(x) = 0{,}(90)x$ (**D**) $g(x) = 1{,}1x - 5$

2.3. Sabendo que nesta área de serviço não aceitam o talão de desconto do Sr. Moreira, qual é a área de serviço mais vantajosa, caso o Sr. Moreira pretenda colocar 20 litros de gasóleo? Justifica a tua resposta.

Dica: Podes ler no gráfico a ordenada correspondente à abcissa 20 e comparar os dois valores ou podes utilizar a expressão geral de cada uma das funções, substituindo *x* por 20.

2.4. Quantos litros de gasóleo deverá colocar o Sr. Moreira, para que seja mais vantajoso ir à área de serviço onde o seu talão de desconto não é aceite? Explica como pensaste.

Dica: Podes responder a esta questão através da análise do gráfico ou igualando as expressões das duas funções e assim descobrir o valor de *X* para o qual as retas das duas funções se intersetam.

Extra 3: Observa os dois gráficos no referencial acima e compara o declive das duas retas. Indica qual a reta que tem maior declive.

Anexo 1.6 | Ficha de trabalho 3 – Gasóleo com talão de desconto (correção)

FECG		matemática
ID: ______________________________	DATA: __________	oito

Ficha de trabalho 3 | Gasóleo com talão de desconto

Correção e comentários às questões efetuadas em casa:

Extra 1: Qual é o declive e a ordenada na origem da função f?

Sendo f(X) = 1,20X – 2,50 (como viste em 1.6.)

Declive = 1,20 (coeficiente da variável independente)

Ordenada na origem = -2,50 (ordenada do ponto em que a reta da função, se prolongada, interseta o eixo vertical (yy))

Extra 2: Qual é a quantidade mínima de gasóleo que o Sr. Moreira pode colocar nesta bomba, usando o seu talão de desconto? Escolhe a opção correta.

Dica: Na representação gráfica feita em 1.2., faz sentido prolongar a reta para baixo? não te esqueças que nesta área de serviço é obrigatório pôr um valor mínimo de 5,00 € e que o Sr. Moreira tem um talão de desconto.

(A) 2,50 € (B) 15 litros (C) 4,1(6) litros (D) 5 litros

O valor mínimo que se pode colocar nesta área de serviço são 5,00 €. Como o Sr. Moreira vai usar o seu talão de desconto, paga 5,00-2,50 = 2,50 €.

De acordo com a expressão encontrada em 1.6., podes determinar a quantidade de gasóleo que o Sr. Moreira coloca quando paga 2,50 €, substituindo *f(X)* por 2,50 € e determinado o valor de *X*:

$$2{,}50 = 1{,}20X - 2{,}50 \Leftrightarrow 2{,}50 + 2{,}50 = 1{,}20X \Leftrightarrow X = 4{,}1(6) \text{ litros}$$

Então, a quantidade mínima de gasóleo que o Sr. Moreira pode colocar, usando o desconto é de 4,1(6) litros.

<u>Nota</u>: O valor mínimo que o Sr. Moreira paga, corresponde à quantidade mínima de gasóleo que pode colocar. Entendes agora que não faz sentido prolongar a reta abaixo do ponto de coordenadas (4,1(6);2,50), pois abaixo deste ponto a função *f* não está definida no contexto do problema.

1.1. Considerando que o deposito do carro do Sr. Moreira tem a capacidade máxima de 55 litros. Indica qual das opções abaixo representa o domínio e o contradomínio da função *f*.

<u>Dica</u>: Relembra que o domínio (D) é o conjunto dos objetos e contradomínio (D´) é o conjunto das imagens. O domínio desta função inclui todos os valores contemplados entre a quantidade mínima e a quantidade máxima de gasóleo que o Sr. Moreira pode colocar. O contradomínio inclui todos os valores contemplados entre o valor mínimo e máximo que o Sr. Moreira paga pelo gasóleo colocado.

<u>Opção A:</u> Domínio (D*f*) = [4,1(6) ; 55] e Contradomínio (D`*f*) = [2,50 ; 63,50]

<u>Opção B:</u> Domínio (D*f*) = [15 ; 55] e Contradomínio (D`*f*) = [15,50 ; 63,50]

<u>Opção C:</u> Domínio (D*f*) =]4,1(6) ; 55[e Contradomínio (D`*f*) =]2,50 ; 63,50[

<u>Nota</u>: Se a capacidade máxima do deposito é de 55 litros, então essa é a quantidade máxima de gasóleo que o Sr. Moreira pode colocar, de cada vez, no seu veículo.
Ou seja, o domínio da função *f*, que corresponde à quantidade de gasóleo que o Sr. Moreira pode colocar, está compreendido entre os valores mínimo e máximo possíveis:

- Mínimo de gasóleo que é possível colocar (determinado no Extra 2) = 4,1(6) litros;
- Máximo de gasóleo que é possivel colocar = 55 litros.

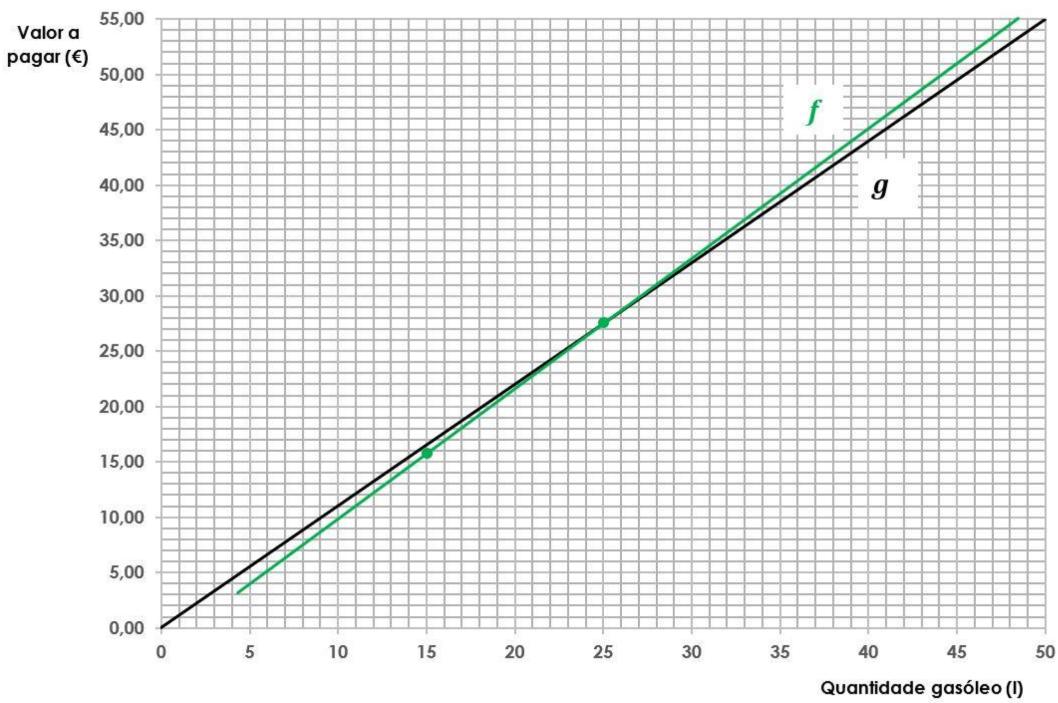
Nota: O contradomínio da função, que corresponde ao valor a pagar pelo gasóleo colocado, está compreendido entre os valores mínimo e máximo a pagar, que são, respetivamente, as imagens de 4,1(6) e de 55:

- $f(4{,}1(6)) = 2{,}50$ € (visto no Extra 2);
- $f(55) = 1{,}20 \times 55 - 2{,}50 \Leftrightarrow f(55) = 63{,}50$ €.

Então: D = [4,1(6) ; 55] (conjunto dos objetos)

D\` = [2,50 ; 63,50] (conjunto das imagens)

2. Numa outra área de serviço (G), o preço do gasóleo por litro segue a função g representada graficamente abaixo (a preto). No gráfico está também representada a função f (a verde), relativa ao preço a pagar na primeira bomba estudada, usando talão de desconto.



2.1. A função g representa uma relação de proporcionalidade direta? Porquê?

Sim, representa uma relação de proporcionalidade direta porque graficamente pode representar-se por uma reta que passa na origem (0,0).

Nota: Também podes determinar a expressão que relaciona as duas variáveis (quantidade de gasóleo e valor a pagar) e verificas que é do tipo *g*(*x*) = *ax*, em que *a* é a contante de proporcionalidade direta.

2.2. Qual das opções seguintes representa a expressão geral que permite calcular o preço a pagar pelo gasóleo adquirido, nesta área de serviço. Justifica a tua resposta.

(**A**) *g(x)= 1,1x + 5* (**B**) *g(x) = 1,1x* (**C**) *g(x) = 0,(90)x* (**D**) *g(x) = 1,1x – 5*

Nota: O ponto de coordenadas (50;55) é de fácil leitura no gráfico, assim como o ponto de coordenadas (20;22).

Já vimos que se trata de uma função linear que traduz uma proporcionalidade direta, então (usando o ponto de coordenadas (50;55)), temos:

$\frac{55}{50} = 1{,}1$ (constante de proporcionalidade direta ou declive).

Logo, a expressão será do tipo *g*(*x*) = *ax*, com *a*=1,1: *g*(*x*) = 1,1*x*

2.3. Sabendo que nesta área de serviço não aceitam o talão de desconto do Sr. Moreira, qual é a área de serviço mais vantajosa, caso o Sr. Moreira pretenda colocar 20 litros de gasóleo? Justifica a tua resposta.

Dica: Podes ler no gráfico a ordenada correspondente à abcissa 20 e comparar os dois valores ou podes utilizar a expressão geral de cada uma das funções, substituindo *x* por 20.

- *f*(20) = 21,50 € (pela tabela)
- *g*(20) = 1,1 × 20 ⇔ *g*(20) = 22,00 €

Então, se o Sr. Moreira pretende colocar 20 litros de gasóleo, é mais vantajoso ir à área de serviço inicial (F), pois pagará menos.

2.4. Quantos litros de gasóleo deverá colocar o Sr. Moreira, para que seja mais vantajoso ir à área de serviço onde o seu talão de desconto não é aceite? Explica como pensaste.

Dica: Podes responder a esta questão através da análise do gráfico ou igualando as expressões das duas funções e assim descobrir o valor de X para o qual as retas das duas funções se intersetam.

Igualando as funções f e g, obtemos a abcissa do ponto de interseção das retas que representam as funções:

$$f(X) = g(X) \Leftrightarrow 1{,}2X - 2{,}5 = 1{,}1X \Leftrightarrow 0{,}1X = 2{,}5 \Leftrightarrow X = 25 \text{ litros}$$

As duas retas encontram-se no ponto de abcissa 25, o que significa que se o Sr. Moreira quiser colocar 25 litros de gasóleo é indiferente a área de serviço escolhida, paga o mesmo em ambas. Se o Sr. Moreira quiser colocar mais de 25 litros de gasóleo, compensa ir à área de serviço *G*, pois pagará menos.

Extra 3: Observa os dois gráficos no referencial acima e compara o declive das duas retas. Indica qual a reta que tem maior declive.

A reta que representa a função f é mais inclinada, o que significa que o seu declive é maior (1,2). A inclinação da reta que representa a função g é menos acentuada, verificando-se que tem um declive menor (1,1).

O ponto de interseção das duas retas (25 ; 27,5), representa o ponto a partir do qual é mais vantajosa a área de serviço *G*.

Nota: As retas só se intersetam porque não são paralelas, se fossem paralelas teriam declives iguais e, nesse caso, uma delas seria sempre mais vantajosa que a outra, independentemente da quantidade de gasóleo colocada.

Anexo 1.7 | Questão de Aula

Escola Secundária Padre Alberto Neto — Matemática

Questão Aula n.º 7 — 8.º Ano de escolaridade

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS QUELUZ-BELAS

Cabeçalho da primeira página

Nomes: ______________________________ Turma: 8 _____

Data: 12 março 2020 Professor:

Classificação: ______________ Enc. Educação:

1. Um vendedor de automóveis, trabalha na empresa **AutoJá**. Para além do salário mensal fixo, recebe ainda um prémio por cada automóvel vendido. A tabela que se segue apresenta o valor total, em euros, recebido pelo vendedor em função do número de carros vendidos.

Mês	Setembro	Outubro	Novembro	Dezembro
Nº de carros vendidos	4	3	9	10
Valor total recebido (€)	2400	2100	3900	4200

a) Se vendesse apenas um automóvel, quanto receberia o vendedor no final do mês?

b) Qual é o salário mensal fixo do vendedor e o valor do prémio que recebe por cada carro vendido?

c) Qual das expressões algébricas representa o salário recebido (s), em função do número de automóveis vendidos (c)?

( ) $s(c)= 3c+2100$

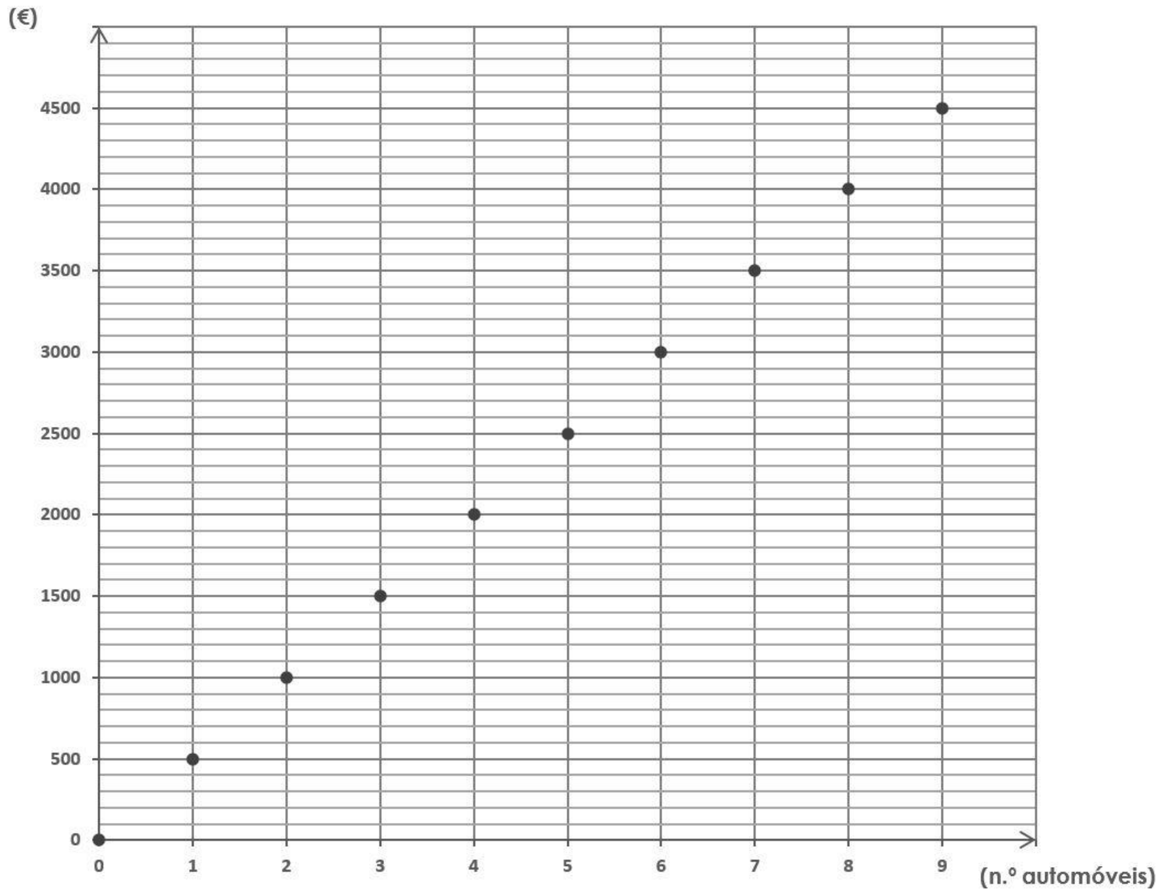
( ) $s(c)=300c$

( ) $s(c)=300c +1200$

( ) $s(c)=1200c$

d) A empresa **QueroCarro,** está interessada em contratar este vendedor de automóveis e propôs-lhe outras condições. Essas condições estão representadas no gráfico seguinte, que relaciona o número de automóveis vendidos com o salário mensal. O vendedor acha que são ótimas condições, mas um amigo disse-lhe: "Tem cuidado, pode não ser uma boa mudança!"

E vocês o que pensam, em que condições valerá a pena mudar de empresa?



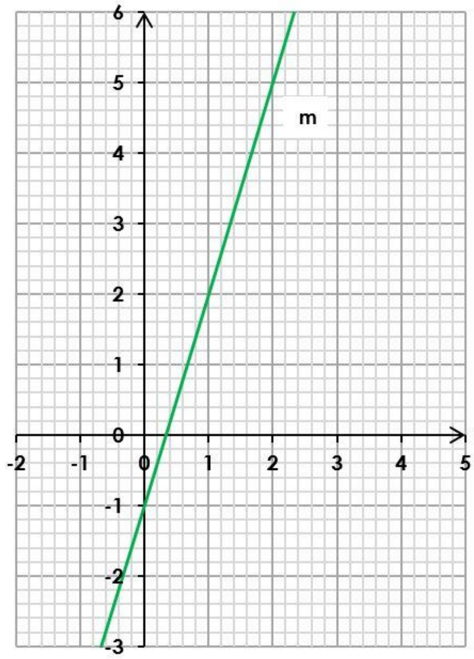
matemática

ID: ______________________ DATA: __________ oito

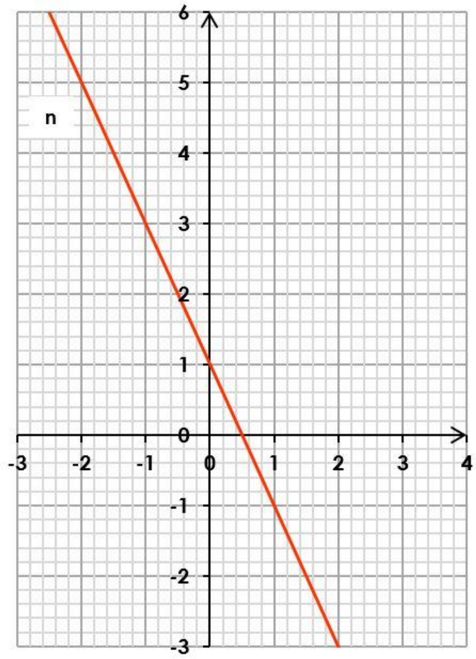
Ficha de trabalho 4

1. As retas nos referenciais cartesianos 1 e 2, traduzem a representação gráfica das funções $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{n}$, respetivamente.

Referencial Cartesiano 1



Referencial Cartesiano 2



1.1. Identifica qual das equações seguintes corresponde a cada uma das funções representadas graficamente. Justifica a tua resposta, identificando o declive e a ordenada na origem em cada um dos casos.

$(\boldsymbol{A})\ \boldsymbol{y = 3x}$ $(\boldsymbol{B})\ \boldsymbol{y = 3x + 1}$ $(\boldsymbol{C})\ \boldsymbol{y = 1 - 3x}$ $(\boldsymbol{D})\ \boldsymbol{y = 3x - 1}$

$(\boldsymbol{E})\ \boldsymbol{y = 2x - 1}$ $(\boldsymbol{F})\ \boldsymbol{y = 1 - 2x}$ $(\boldsymbol{G})\ \boldsymbol{y = -2x}$ $(\boldsymbol{H})\ \boldsymbol{y = 2x + 1}$

Dica: Repara que a reta que representa a função n tem declive negativo. Podes verificar as tuas opções, substituindo x e y pelas coordenadas de um ponto conhecido, nos gráficos e verificando a igualdade de ambos os membros das equações.

1.2. Indica as coordenadas do ponto de interseção da função ***m*** com o eixo vertical (*yy*).Completa:

$\boldsymbol{n}(1) =$_____

$\boldsymbol{n}($____$) = 1$

1.4. Resolve a equação *m(x) = 8*.

1.5. No referencial cartesiano 1, representa a reta de uma função ***p***, paralela a ***m*** e cuja ordenada na origem é $\frac{1}{2}$. Podemos dizer que as funções ***p*** e ***m*** têm o mesmo declive? Porquê?

1.6. O ponto $\left(\frac{5}{2}, 8\right)$ pertence ao gráfico da função ***p***? Porquê?

Dica: Podes começar por definir a expressão que representa a função p.

1.7. No referencial cartesiano 2, representa a reta da função linear ***q***, que interceta a função ***n*** no ponto $\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

Dica: Recorda as características da função linear.

matemática

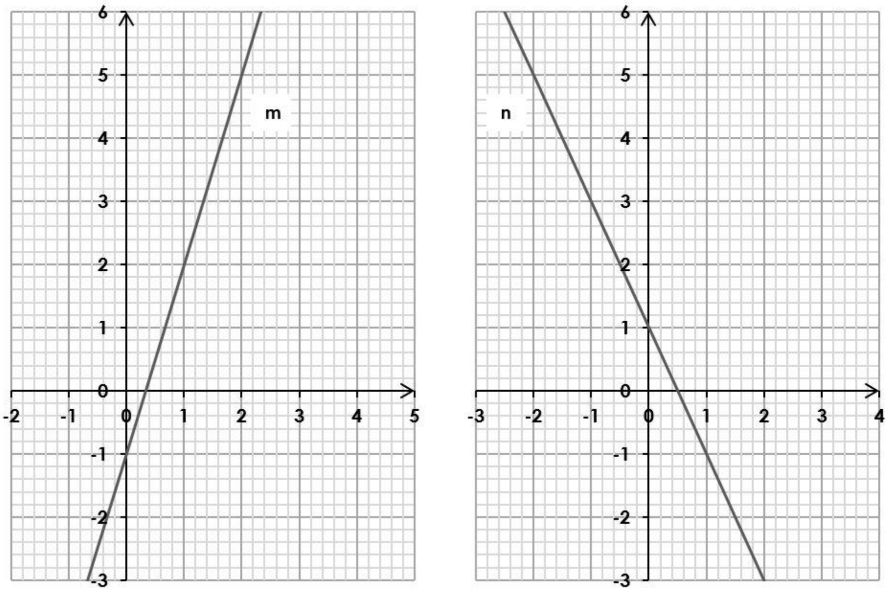
ID: ______ DATA: ______ oito

Ficha de trabalho 4

Correção e comentários

1. As retas nos referenciais cartesianos 1 e 2, traduzem a representação gráfica das funções ***m*** e ***n***, respetivamente.

Referencial Cartesiano 1 **Referencial Cartesiano 2**



1.1. Identifica qual das equações seguintes corresponde a cada uma das funções representadas graficamente. Justifica a tua resposta, e identifica o declive e a ordenada na origem em cada um dos casos.

Função m

$(A)\ y = 3x$ $(B)\ y = 3x + 1$ $(C)\ y = 1 - 3x$ $(D)\ y = 3x - 1$

$(E)\ y = 2x - 1$ $(F)\ y = 1 - 2x$ $(G)\ y = -2x$ $(H)\ y = 2x + 1$

Função n

Dica: Repara que a reta que representa a função n tem declive negativo. Podes verificar as tuas opções, substituindo x e y pelas coordenadas de um ponto conhecido, nos gráficos e verificando a igualdade de ambos os membros das equações.

Ambas as funções são afins, logo são do tipo *f(x) = ax+b*, portanto estão excluídas as hipóteses (A) e (G), que representam funções lineares.

- A função m tem declive positivo e ordenada na origem -1 (interseção com o eixo das ordenadas). Tanto a opção (D) como a (E), têm estas características, então vamos verificar qual delas verifica os dados do gráfico, substituindo, por exemplo, as coordenadas do ponto (1;2) em ambas:

(D): $2 = 3 \times 1 - 1 \Leftrightarrow 2 = 2$ (verdade)

Então a opção correta para a função m é a (D), com declive 3.

- A função n tem declive negativo e ordenada na origem 1 (interseção com o eixo das ordenadas). Tanto a opção (C) como a (F), têm estas características, então vamos verificar qual delas verifica os dados do gráfico, por exemplo para o ponto de coordenadas (-1;3):

(C): $3 = 1 - 3 \times (-1) \Leftrightarrow 3 = 4$ (falso)

(F): $3 = 1 - 2 \times (-1) \Leftrightarrow 3 = 3$ (verdade)

Então a opção correta para a função n é a (F), com declive -2.

1.2. Indica as coordenadas do ponto de interseção da função $\boldsymbol{m}$ com o eixo vertical (yy).

O ponto de interseção com o eixo das ordenadas tem coordenadas (0;-1).

1.3. Completa:

$\boldsymbol{n}(1) = -1$

$\boldsymbol{n}(0) = 1$

<u>Nota</u>: Repara que podes responder através da leitura do gráfico, verificando que a imagem de 1 é -1, ou seja x=1 corresponde a y=-1 e que o objeto que corresponde à imagem de 1 é 0.

Caso as coordenadas dos pontos não fossem de fácil leitura no gráfico, poderias substituir na expressão da função n, o x por 1, obtendo y=-1 e substituir o y por 1, obtendo x=0.

1.4. Resolve a equação $m(x) = 8$.

m(x) corresponde à imagem de um determinado *x* que vamos descobrir resolvendo a equação:

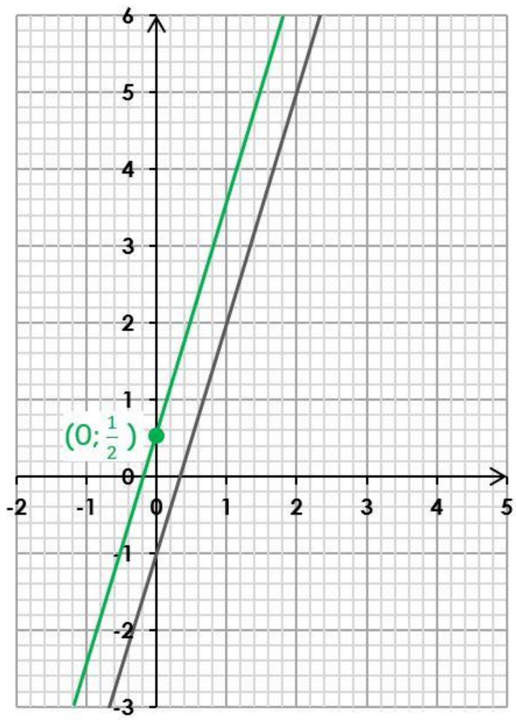
$3X - 1 = 8 \Leftrightarrow 3X = 9 \Leftrightarrow X = 3$

<u>Nota</u>: Então podemos concluir que a imagem de 3 é 8, ou seja quando x=3, o valor de y é 8.

1.5. No referencial cartesiano 1, representa a reta de uma função ***p***, paralela a ***m*** e cuja ordenada na origem é $\frac{1}{2}$. Podemos dizer que as funções ***p*** e ***m*** têm o mesmo declive? Porquê?

<u>Nota</u>: Como sabemos que a reta vai ser paralela à primeira, necessitamos apenas de um ponto para a traçar. Neste caso o ponto é dado $(0; \frac{1}{2})$.

As funções p e m têm o mesmo declive porque as retas que as definem têm exatamente a mesma inclinação (são paralelas).



1.6. O ponto $\left(\frac{5}{2}, 8\right)$ pertence ao gráfico da função ***p***? Porquê?

Dica: Podes começar por definir a expressão que representa a função *p*.
<u>Nota</u>: Para podermos responde através da observação do gráfico, teríamos de prolongar a reta para fora do que está definido no referencial e ver se

o ponto está sobre a mesma. Outra forma de resolver é substituindo as coordenadas do ponto na expressão que define a função p.

Já vimos que a função *p* tem o mesmo declive da função *m*, então a função *p* tem declive 3 e é, tal como *m*, uma função afim. Pelo enunciado sabemos que tem ordenada na origem $\frac{1}{2}$, então: $p(x) = 3x + \frac{1}{2}$

Agora podemos verificar se o ponto $\left(\frac{5}{2}, 8\right)$ está sobre a reta que define esta função:

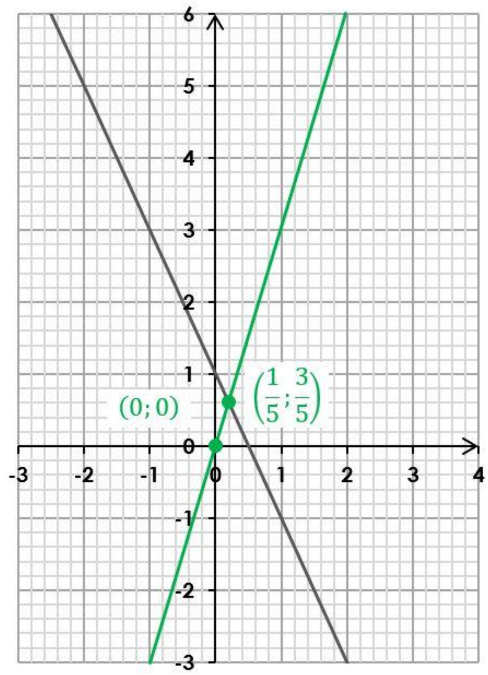
$8 = 3 \times \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 8 = \frac{15}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 8 = 8$ (verdade)

Então o ponto $\left(\frac{5}{2}, 8\right)$ pertence à reta definida pela função p.

1.7. No referencial cartesiano 2, representa a reta da função linear ***q***, que interceta a função ***n*** no ponto $\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

Dica: Recorda as características da função linear.

Nota: Sabemos que a reta que representa uma função linear passa sempre na origem (0;0). O outro ponto de que necessitamos para traçar a reta é dado no enunciado $\left(\frac{1}{5}; \frac{3}{5}\right)$.



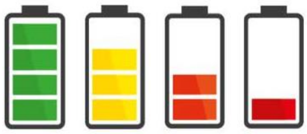
Nota: O ponto de interseção é comum às duas retas. Então podemos descobrir em que ponto duas retas se cruzam, igualando as expressões de ambas as retas e descobrindo o valor de x que satisfaz essa equação.

Anexo 1.10 | Ficha de trabalho 5 – A bateria a descarregar

matemática

ID: ______________________________ DATA: __________ oito

Ficha de trabalho 5 | A bateria a descarregar

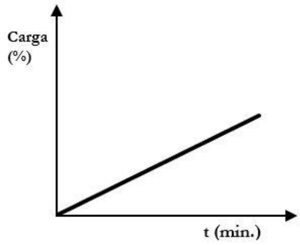


1. A Iris vai com os pais visitar os primos e quer garantir que não fica sem bateria no telemóvel para ouvir música durante toda a viagem. Para isso fez a seguinte experiência: carregou na totalidade a bateria do telemóvel e ouviu música até ficar sem carga na bateria. Nessa experiência registou o seguinte:

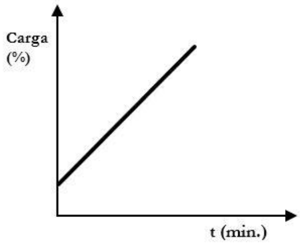
Às 9:00 horas da manhã a bateria do telemóvel tem 100% de carga. Às 13:10 horas, a bateria do telemóvel estava totalmente descarregada.

1.1. Tendo a Iris carregado o telemóvel antes de sair e ouvido música durante toda a viagem, caso a viagem dure 3 horas e meia, quanto restará de carga na bateria do telemóvel, quando chegar a casa dos primos? Justifica a tua resposta.

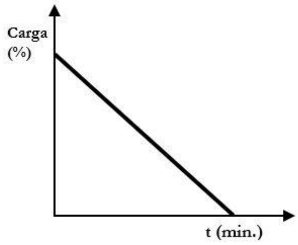
1.2. Qual dos gráficos poderá ser uma representação da função que relaciona o tempo com a carga da bateria no telemóvel. Explica porquê.



A



B



C

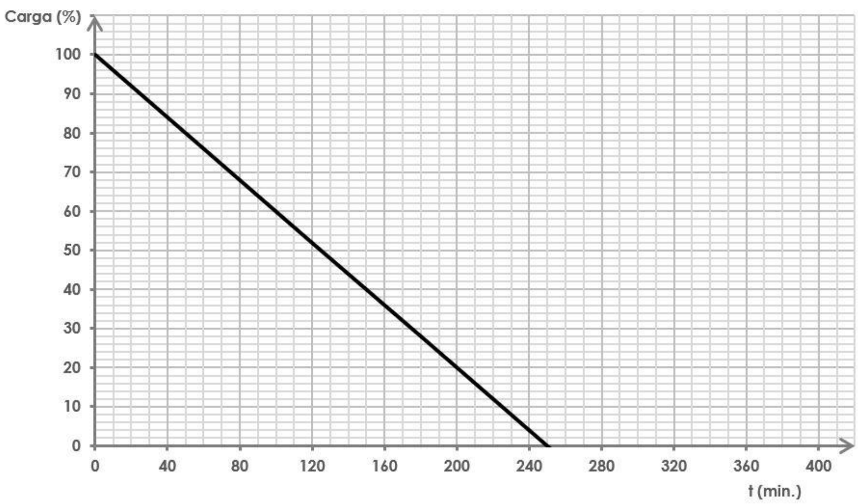
1.3. Após verificar os seus registos a Iris fez algumas tentativas para encontrar uma expressão que relacione a carga de bateria no telemóvel com o tempo. Assim, poderá prever quando ficará sem bateria, para qualquer situação em que queira ouvir música. Encontrou três expressões (em baixo), mas não teve tempo de verificar se faziam sentido. Achas que alguma das expressões encontradas pela Iris faz sentido? Porquê?

$(\boldsymbol{A})\ q(t) = 0{,}4t + 100$ $\quad(\boldsymbol{B})\ q(t) = 0{,}4t - 100$ $\quad(\boldsymbol{C})\, q(t) = -\,0{,}4t + 100$ $\quad(\boldsymbol{D})\ q(t) = -0{,}4t$

Dica: No contexto deste problema, o coeficiente da variável independente (que é o declive da reta), representa a percentagem por minutos, a que a carga da bateria diminui.

1.4. Determina ao fim de quanto tempo a bateria estará totalmente descarregada.

2. O gráfico seguinte representa a função que relaciona o tempo com a carga da bateria no telemóvel, quando a Iris está a ouvir música (encontrada em 1.3.).



2.1. Indica qual das opções corresponde ao domínio e ao contradomínio da função.

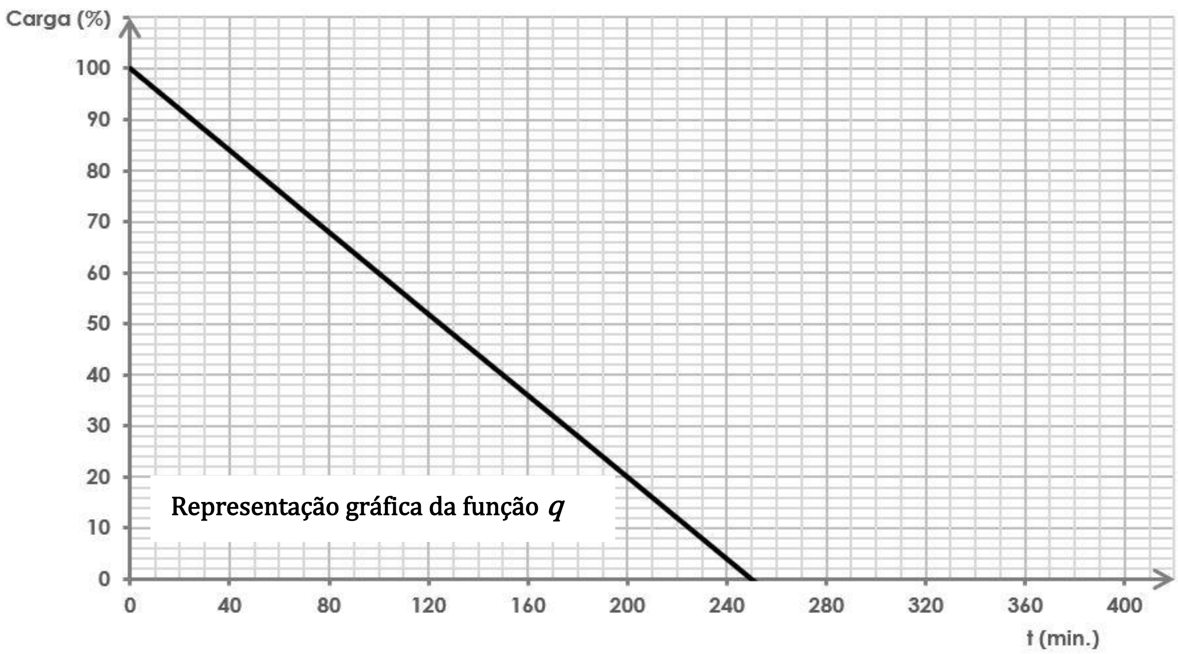
Opção A: Domínio (Dq) = [0 ; 100] e Contradomínio (D`q) = [0 ; 250]

Opção B: Domínio (Dq) = [0 ; 250] e Contradomínio (D`q) = [0 ; 100]

Opção C: Domínio (Dq) =]0 ; 250[e Contradomínio (D`q) =]0 ; 100[

2.2. Agora a Iris descobriu que o seu telemóvel, quando não está a ser usado, descarrega 0,25% a cada minuto. Representa, no referencial cartesiano abaixo, o gráfico que relaciona o tempo com a carga da bateria no telemóvel, quando a Iris **não está a usar o telemóvel**. Designa a função representada por ***c***.

Dica: Lembra-te que para representares uma reta, necessitas conhecer apenas 2 pontos da mesma.



2.3. O que podes dizer da observação dos dois gráfios? Que conclusões podes tirar?

Assinala as afirmações verdadeiras com a letra V e as afirmações falsas com a letra F.

- [ ] A inclinação da reta que representa a função ***c*** é menor que a inclinação da reta que representa a função ***q***, logo o declive é maior no caso da função ***c***.
- [ ] A inclinação da reta que representa a função *c* é menor que a inclinação da reta que representa a função ***q***, logo o declive é menor no caso da função ***c***.
- [ ] No caso da função ***q***, a percentagem de descarga da bateria, por minuto, é menor.
- [ ] No caso da função ***c***, a percentagem de descarga da bateria, por minuto, é menor.
- [ ] O telemóvel descarrega mais rapidamente no caso da função ***c***.
- [ ] Quando não está a ser usado para ouvir música, o telemóvel aguenta mais tempo ligado.

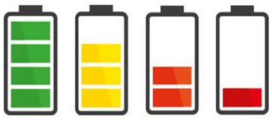
Anexo 1.11 | **Ficha de trabalho 5 – A bateria a descarregar (correção)**

matemática

ID: ______________________ DATA: ________ oito

Ficha de trabalho 5 | A bateria a descarregar

Correção e comentários



1. A Iris vai com os pais visitar os primos e quer garantir que não fica sem bateria no telemóvel para ouvir música durante toda a viagem. Para isso fez a seguinte experiência: carregou na totalidade a bateria do telemóvel e ouviu música até ficar sem carga na bateria. Nessa experiência registou o seguinte:

Às 9:00 horas da manhã a bateria do telemóvel tem 100% de carga. Às 13:10 horas, a bateria do telemóvel estava totalmente descarregada.

1.1. Tendo a Iris carregado o telemóvel antes de sair e ouvido música durante toda a viagem, caso a viagem dure 3 horas e meia, quanto restará de carga na bateria do telemóvel, quando chegar a casa dos primos? Justifica a tua resposta.

De acordo com o registo da Iris, o telemóvel demora 4 horas e 10 minutos (250 minutos) a descarregar completamente a bateria. Através de uma regra de três simples, podemos saber que percentagem é que a bateria descarrega em 3 horas e 30 minutos (210 minutos):

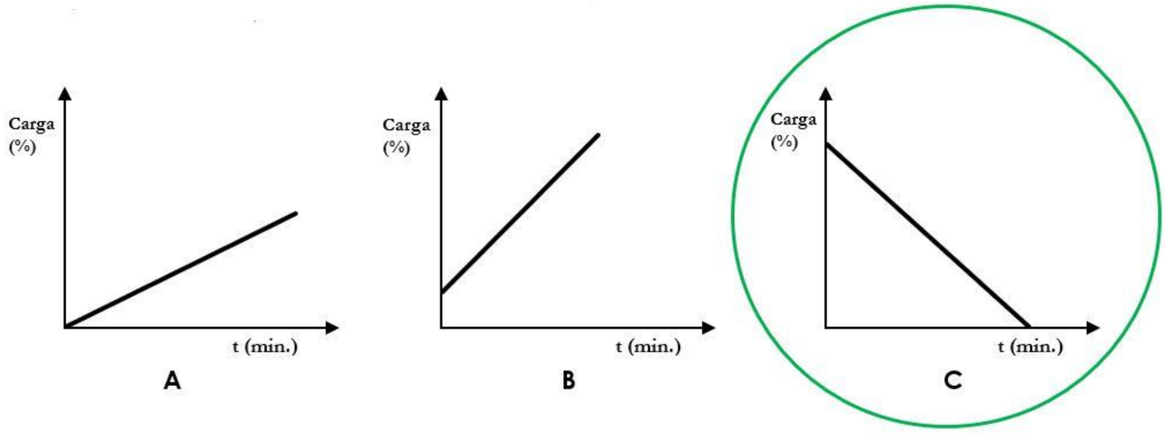
250 minutos ——— 100%

210 minutos ——— x

x = 84%

Então, quando a Iris chegou a casa dos primos, a bateria do seu telemóvel tinha 16% de carga.

1.2. Qual dos gráficos poderá ser uma representação da função que relaciona o tempo com a carga da bateria no telemóvel. Explica porquê.



Sabemos que não pode ser a opção A porque não se trata de uma função linear, ou seja, quando t = 0, a percentagem de carga na bateria do telemóvel não é zero, então a reta desta função não passa na origem.

Agora vamos analisar como é que a percentagem de carga na bateria varia com a passagem do tempo. Com o passar do tempo, a carga na bateria vai diminuindo e quando t = 0, a carga é 100%, diminuindo a partir daí até ser 0%.

Então só pode ser a opção C, que representa a diminuição da carga à medida que o tempo aumenta (declive negativo).

Nota: a opção A pode representar uma situação em que se ligue o telemóvel à corrente para carregar a bateria quando esta está totalmente descarregada. Este gráfico representaria assim, o aumento da carga na bateria do telemóvel com o aumento do tempo (declive positivo). A opção B, pode representar uma situação idêntica, mas quando se começa a carregar a bateria quando esta ainda tem alguma carga (pois quando t = 0, a percentagem de carga não é zero).

1.3. Após verificar os seus registos a Iris fez algumas tentativas para encontrar uma expressão que relacione a carga de bateria no telemóvel com o tempo. Assim, poderá prever quando ficará sem bateria, para qualquer situação em que queira ouvir música. Encontrou três expressões (em baixo), mas não teve tempo de verificar se faziam sentido. Achas que alguma das expressões encontradas pela Iris faz sentido? Porquê?

$(\boldsymbol{A})\ q(t) = 0{,}4t + 100$ $(\boldsymbol{B})\ q(t) = 0{,}4t - 100$ $(\boldsymbol{C})\ q(t) = -0{,}4t + 100$ $(\boldsymbol{D})\ q(t) = -0{,}4t$

Dica: No contexto deste problema, o coeficiente da variável independente (que é o declive da reta), representa a percentagem por minutos, a que a carga da bateria diminui.

Já vimos que a função não é linear, portanto não pode ser a opção (D). Também sabemos que, para o tempo inicial (t = 0), a bateria tem 100% de carga, ou seja, a ordenada na origem é 100, portanto poderia ser a opção (A), contudo, também vimos que o declive da reta é negativo e, portanto, também não pode ser esta opção porque este declive é positivo (0,4).

Já vimos que em 250 minutos a bateria descarrega 100%, então em um minuto, descarrega: $\frac{100}{250} = 0{,}4$. Concluímos assim que a Iris não acertou na expressão (A) apenas porque não considerou o declive negativo (porque a percentagem de bateria está a diminuir com o tempo).

Então, a expressão que relaciona a percentagem de bateria com o tempo, neste caso, é a opção (C):

$$q(t) = -0{,}4t + 100$$

1.4. Determina ao fim de quanto tempo a bateria estará totalmente descarregada.

Na questão 1.1 vimos que a bateria demora 250 minutos a descarregar completamente, então podemos afirmar que a bateria fica com 0% de carga ao fim de 4 horas e 10 minutos.

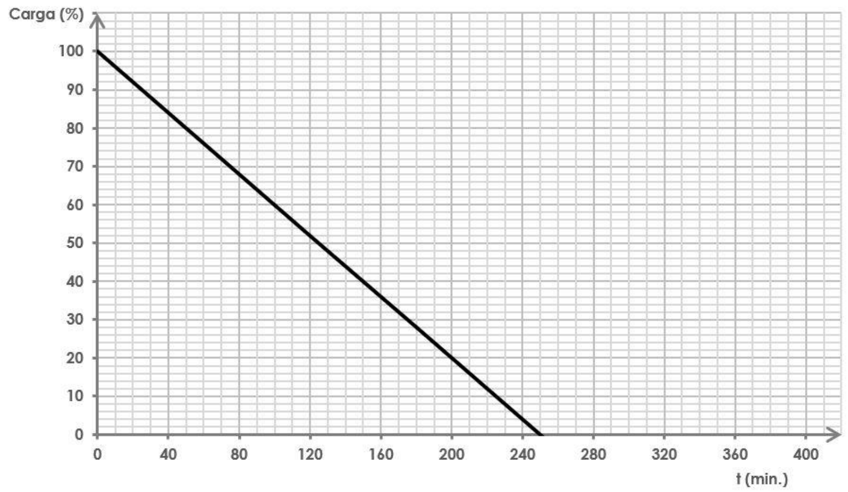
Nota: Caso não tivesses esta informação poderias responder a esta questão através da expressão da função q.

A bateria estará totalmente descarregada quando a percentagem de carga é 0%, ou seja, quando q(t) = 0%.

Então vamos determinar, substituindo q(t) por zero, qual o tempo (t) para o qual isso acontece:

$- 0{,}4t + 100 = 0 \Leftrightarrow t = +\frac{100}{0.4} \Leftrightarrow t = 250$ minutos
(tal como já havíamos concluído).

2. O gráfico seguinte representa a função que relaciona o tempo com a carga da bateria no telemóvel, quando a Iris está a ouvir música (encontrada em 1.3.).



2.1. Indica qual das opções corresponde ao domínio e ao contradomínio da função.

Opção A: Domínio (Dq) = [0 ; 100] e Contradomínio (D`q) = [0 ; 250]

Opção B: Domínio (Dq) = [0 ; 250] e Contradomínio (D`q) = [0 ; 100]

Opção C: Domínio (Dq) =]0 ; 250[e Contradomínio (D`q) =]0 ; 100[

- O tempo varia entre 0 e 250 minutos;
  Domínio: D = [0 ; 250]
- A percentagem de carga varia entre 0% e 100%;
  Contradomínio: D´ = [0 ; 100]

Nota: o domínio e o contradomínio estão representados sob a forma de intervalos porque tanto o tempo como a percentagem de bateria podem tomar qualquer valor (mesmo decimal) compreendido entre os seus limites. Ambos os intervalos são fechados porque é possível que o tempo tome exatamente os valores 0 e 250, assim como é possível ter 0% de bateria ou ter 100% de bateria.

2.2. Agora a Iris descobriu que o seu telemóvel, quando não está a ser usado, descarrega 0,25% a cada minuto. Representa, no referencial cartesiano acima, o gráfico que relaciona o tempo com a carga da bateria no telemóvel, quando a Iris **não está a usar o telemóvel**.

Designa a função representada por ***c***.

Dica: Lembra-te que para representares uma reta, necessitas conhecer apenas 2 pontos da mesma.

Se a bateria, neste caso, descarrega 0,25% a cada minuto, a equação da função, que representa a variação da percentagem de carga com o tempo, terá declive -0,25, então a expressão desta função será:

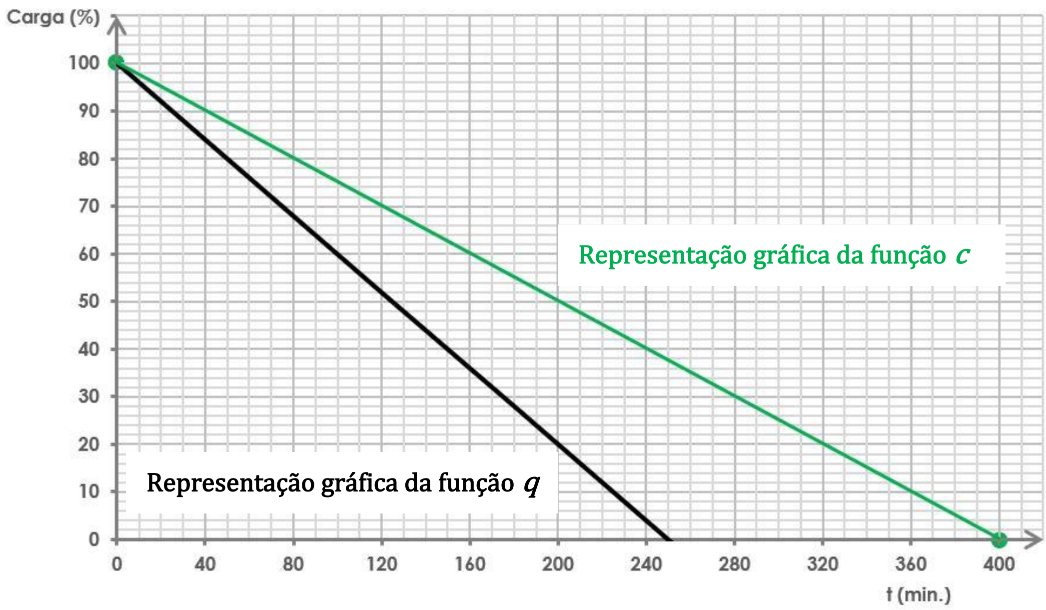
$c(t) = -0{,}25t + 100$

Já conhecemos o ponto de ordenada 100 (ordenada na origem), que tem coordenadas (0 ; 100).

Um outro ponto pode ser o correspondente ao momento em qua a bateria descarrega completamente (0%):

$0 = -0{,}25t + 100 \Leftrightarrow t = \frac{100}{0.25} \Leftrightarrow t = 400$ minutos

Então temos outro ponto (400;0), que nos permite traçar a reta pretendida.



2.3. O que podes dizer da observação dos dois gráfios? Que conclusões podes tirar? Assinala as afirmações verdadeiras com a letra V e as afirmações falsas com a letra F.

V — A inclinação da reta que representa a função ***c*** é menor que a inclinação da reta que representa a função ***q***, logo o declive é maior no caso da função ***c***.

F — A inclinação da reta que representa a função *c* é menor que a inclinação da reta que representa a função ***q***, logo o declive é menor no caso da função ***c***.

F — No caso da função ***q***, a percentagem de descarga da bateria, por minuto, é menor.

V — No caso da função ***c***, a percentagem de descarga da bateria, por minuto, é menor.

F — O telemóvel descarrega mais rapidamente no caso da função ***c***.

V — Quando não está a ser usado para ouvir música, o telemóvel aguenta mais tempo ligado.

Como se trata de um declive negativo e a inclinação da reta que representa a função c é menor que a inclinação da reta que representa a função q. Posso concluir que, como o declive é maior no caso da função c, a percentagem de descarga da bateria, por minuto, é menor, pelo que a bateria demora mais tempo a descarregar completamente. O telemóvel, quando não está a ser usado para ouvir música aguenta mais tempo ligado.

Anexo 2 | Planificação das aulas

Anexo 2.1 | Planificação da aula 1

Plano de Aula

Professor Orientador: Joana da Mata Pereira
Professor Coorientador: Maria Antónia Duffner
Professor Cooperante: Paulo Alvega
Discente: Susana Filipa Vicente
Data 02.03.2020 | **Turma** 8D | **Duração** 45 minutos

Domínio: Funções, sequências e sucessões
Subdomínio: Gráficos de funções afins

Objetivos da aula:

- Relembrar a noção de função como relação entre duas variáveis;
- Construir e interpretar o gráfico de uma função, atendendo ao contexto;
- Identificar uma relação de proporcionalidade direta;
- Identificar a função constante.

Conhecimentos prévios dos alunos:

- Resolução de equações e operações com polinómios;
- Conceitos e terminologia associados ao tema das funções: domínio, contradomínio, conjunto de chegada, variável dependente, variável independente, imagem e objeto;
- Reconhecer uma situação de proporcionalidade direta;
- Reconhecer diferentes tipos de representações de funções.

Recursos para a aula:
Ficha de trabalho n.º 1.

Metodologia de Trabalho:

- Aula estruturada em três momentos: Introdução, Trabalho autónomo, Discussão e Sistematização.
- Trabalho autónomo realizado a pares.

Momentos da aula / Organização do trabalho	Tempo (min.)
1. Entrada dos alunos e distribuição pelos lugares	5
2. Distribuição da Ficha de trabalho n.º 1 e introdução da tarefa 1	5
3. Trabalho autónomo dos alunos na resolução da tarefa 1	15
4. Apresentação das resoluções da tarefa 1 e discussão em grande grupo e sistematização	20

Desenvolvimento da Aula

1. Entrada dos alunos e distribuição pelos lugares | 5 min

Nesta aula os alunos vão mudar de lugares, pelo que no início da aula terei de os informar dos novos lugares que irão ocupar.

2. Introdução da Tarefa 1 | 5 min

Ao distribuir a Ficha de Trabalho, os alunos serão informados que trabalharão a pares e que o trabalho autónomo durará 15 minutos, seguido de discussão em grande grupo. Sublinharei a importância de justificarem todas as respostas, destacando que todas as respostas devem ser dadas nessa ficha, que será recolhida no final da aula (para efeitos da investigação que é do conhecimento dos alunos) e devolvida na aula seguinte.

Nesta ocasião, irei reforçar que, em circunstância alguma, deverão apagar o que escreveram na ficha de trabalho quando registarem o resultado da discussão. Os alunos serão também informados que apesar do trabalho ser realizado a pares, todos os alunos receberão uma ficha de trabalho e cada um deverá dar a resposta na sua folha.

Os gráficos da tarefa serão projetados e depois de ler a tarefa 1, devo certificar-me de que todos compreendem os dados e entendem o que é pedido.

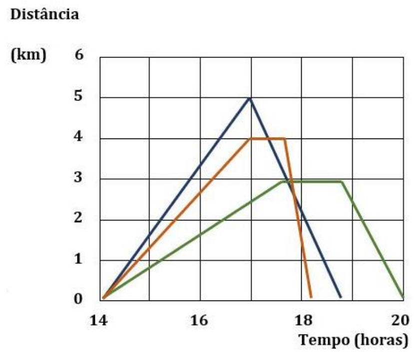
3. Trabalho autónomo | 15 min

Durante o período de trabalho autónomo, vou circular pela sala com o objetivo de apoiar os alunos com eventuais dificuldades, privilegiando o questionamento e a discussão entre o par de alunos, promovendo a sua autonomia e entreajuda.

É também o momento para monitorizar o trabalho desenvolvido pelos alunos e efetuar a seleção e sequência das resoluções que integrarão a discussão posterior, tendo em conta os objetivos da aula.

Tarefas e atividades	Atividade dos alunos e possíveis dificuldades	Respostas do professor e aspetos a ter em atenção	Objetivos e avaliação
Ficha de trabalho n.º 1 Resolução da tarefa 1 - 15 min -	**Questão 1.1.** • Várias estratégias são possíveis. É expectável que os alunos construam um cenário possível para a caminhada do Mário, que contemple a informação disponível em ambos os gráficos. É esperado que a história contenha informação acerca da distância total percorrida pelo Mário, do local de partida e de chagada, do tempo que durou o percurso e o tempo em que o Mário	As dificuldades coletivas e não impeditivas da continuação do trabalho de cada grupo, serão abordadas na fase de discussão coletiva. As dificuldades coletivas impeditivas de progressão da atividade serão esclarecidas, no momento, perante a turma.	✓ Mostrar compreensão acerca da relação entre a distância percorrida e o tempo decorrido. ✓ A perceção da relação entre a inclinação da reta e a velocidade. ✓ A capacidade de relacionar a informação contida nos dois gráficos. ✓ A identificação dos momentos de paragem.

	este efetivamente a caminhar. Os alunos devem identificar se o Mário esteve ou não parado e perceber a relação do estado de apetite do Mário com o percurso efetuado, devem ainda fazer um comentário à variação da velocidade de caminhada do Mário. **Dificuldades** o Associação das linhas do gráfico à inclinação do percurso efetuado e não à relação entre a distância percorrida e o tempo ou à relação entre a fome e o tempo decorrido; o Dificuldade em interpretar os dois gráficos em simultâneo, não conseguindo relacionar a distância percorrida com o estado do Mário.	o Como se relacionam as duas grandezas? o O que representa o x, e o y? o Dá-me um exemplo de um ponto sobre o gráfico e descreve o que representam a suas coordenadas. o Já reparaste que o eixo das abcissas é igual nos dois gráficos? o Se escolheres um ponto às 17 horas em ambos os gráficos, o que podes dizer que está a acontecer ao Mário nesse preciso momento?	

	Questão 1.2. • Podem ocorrer vários cenários como resposta. Os alunos devem sugerir um cenário em que o Mário volte para trás depois das 17 horas (quando fica esfomeado) e podem considerar que esteve parado ou não. Podem ainda variar a velocidade com que o Mário regressa a casa tendo que ter em conta que, neste caso o gráfico termina na distância zero.  **Dificuldades:** o Não perceber que ao voltar para trás, a distância ao ponto de ordenada zero vai diminuindo, mas o tempo continua a aumentar; o Não relacionar o percurso com o estado e fazer o regresso quando o Mário ainda não se apresenta esfomeado.	o A que distância está o Mário de sua casa às 16 horas? E às 18 horas? o O Mário está mais longe ou mais perto de sua casa? o Qual o motivo que leva o Mário a regressar a casa? A que horas começa ele a sentir fome?	✓ Identificação do momento em que o Mário está esfomeado e a partir daí compreender que ao voltar, a distância a casa vai diminuindo e compreender como representar essa aproximação graficamente.

4. Discussão | 20 min

Após dar por concluído o momento de trabalho autónomo, devo ter em conta os objetivos da aula, de modo a conduzir a discussão no sentido de que fiquem esclarecidos os pontos essenciais.

Assim, devo promover a comunicação escrita e oral, levando o aluno a refletir sobre os conceitos trabalhados e reforçando conhecimentos.

Devo envolver todos os alunos na discussão, recorrendo a questões:

Alguém pensou de outro modo?

Alguém tem dúvidas?

Discussão 1.1.

A primeira resolução será projetada no quadro e um aluno (em representação do par de alunos) deverá explicar a sua história, justificando as afirmações que fizer a partir da leitura dos gráficos.

Deverei realçar que na leitura de um gráfico é fundamental identificar a que corresponde cada um dos eixos, salientando as noções de variável dependente e independente ao questionar, neste caso, qual é a variável independente e qual a variável dependente.

Caso hajam tempo e se verifique pertinente, poderá ser pedido a outros alunos que leiam a sua história a partir do lugar, para que possa ser discutida por todos.

Caso haja erros que se observem na generalidade dos alunos, pode ser pertinente mostrar uma dessas resoluções no quadro, de modo a solicitar a opinião/discussão de todos na tentativa de resolver o erro.

Discussão 1.2.

Projetar no quadro branco o referencial da ficha e a um aluno que desenhe sobre ele a sua versão da história, pedindo que argumente acerca da resolução apresentada. Devo questionar a existência de respostas diferentes e se houver tempo, poderá vir outro aluno ao quadro desenhar a sua resposta, promovendo o confronto de estratégias.

Este momento poderá ser propicio para recordar o que é uma situação de proporcionalidade direta, como uma situação em que as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais, por a razão entre elas ser sempre constante.

5. Sistematização

A sistematização será deixada para a aula seguinte, aquando do término da ficha de trabalho 1.

Atividades Complementares:

Atendendo à diversidade de ritmos de trabalho dos alunos ou no caso de a aula planeada decorrer num tempo inferior ao esperado, será proposto a todos os alunos, que iniciem a resolução da tarefa 2.

Anexo 2.2 | Planificação da aula 2

Plano de Aula

Professor Orientador: Joana da Mata Pereira

Professor Coorientador: Maria Antónia Duffner

Professor Cooperante: Paulo Alvega

Discente: Susana Filipa Vicente

Data 04.03.2020 | **Turma** 8D | **Duração** 45 minutos

Domínio: Funções, sequências e sucessões

Subdomínio: Gráficos de funções afins

Objetivos da aula:

- Relembrar a noção de função como relação entre duas variáveis;
- Distinguir variável dependente e independente;
- Construir e interpretar o gráfico de uma função;
- Compreender e interpretar a função nas suas várias representações;
- Identificar uma relação de proporcionalidade direta;
- Relacionar o coeficiente de x com a constante de proporcionalidade;

Conhecimentos prévios dos alunos:

- Resolução de equações e operações com polinómios;
- Conceitos e terminologia associados ao tema das funções: domínio, contradomínio, conjunto de chegada, variável dependente, variável independente, imagem e objeto;
- Reconhecer uma situação de proporcionalidade direta;
- Reconhecer diferentes tipos de representações de funções.

Recursos para a aula:

Ficha de trabalho n.º 1, projeção de PowerPoint.

Metodologia de Trabalho:

- Aula estruturada em cinco momentos: Discussão da tarefa 1.2. (efetuada na aula anterior), Introdução da tarefa 2., Trabalho autónomo, Discussão da tarefa 2. e Sistematização.
- Trabalho autónomo realizado a pares.

Momentos da aula / Organização do trabalho	Tempo (min.)
1. Discussão da tarefa 1.2. da ficha de trabalho n.º 1 (realizada na aula anterior)	8
2. Introdução da tarefa 2 da ficha de trabalho n.º 1	2
3. Trabalho autónomo dos alunos na resolução da tarefa 2	15
4. Apresentação das resoluções da tarefa 2 e discussão em grande grupo	15
5. Sistematização	5

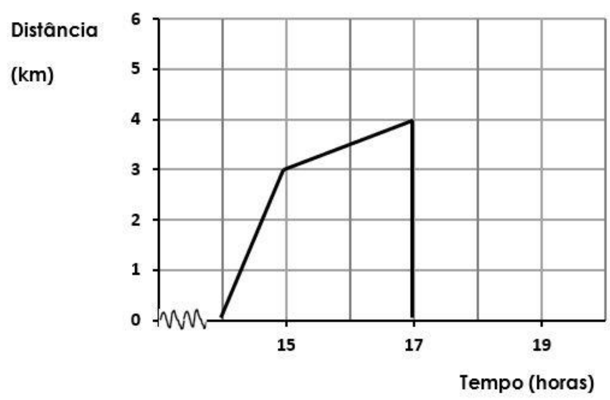
Desenvolvimento da Aula

1. Discussão da Tarefa 1.2. | 8 min

Discussão 1.2.

Projetar no quadro branco o referencial da ficha e solicitar a um aluno que desenhe sobre ele a sua versão da história, pedindo que argumente acerca da resolução apresentada. Devo questionar a existência de respostas diferentes, e caso haja alguma pertinente poderá vir outro aluno ao quadro desenhar a sua resposta, promovendo o confronto de estratégias.

Este momento poderá ser propicio para recordar qual é a variável dependente e independente e relembrar o conceito de função. Para isso irei propor uma resolução da tarefa que seja polémica e incite a discussão:



Após sugerir esta resolução, espero que os alunos identifiquem a sua impossibilidade e explorarei essa evidência de modo a introduzir os termos: variável dependente e independente, ordenadas, abcissas e também introduzir a definição de função. Assim vou sugerir que escrevam no final da ficha, no espaço respetivo, a definição de função:

Uma função f é uma correspondência que a cada elemento de um conjunto A (objeto), faz corresponder um e um só elemento do conjunto B (imagem). Escreve-se $\boldsymbol{f: A \rightarrow B}$.

Ao conjunto dos objetos, chama-se domínio da função *f*;

Ao conjunto das imagens, chama-se contradomínio da função *f*.

2. Introdução da Tarefa 2 | 2 min

Ao distribuir a Ficha de Trabalho, os alunos serão informados que trabalharão a pares e que o trabalho autónomo durará 15 minutos, seguido de discussão em grande grupo. Deverei sublinhar a importância de justificarem todas as respostas, destacando que todas as respostas devem ser dadas nessa ficha, que será recolhida no final da aula (para efeitos da investigação que é do conhecimento dos alunos) e devolvida na aula seguinte.

Nesta ocasião, irei reforçar que, em circunstância alguma, deverão apagar o que escreveram na ficha de trabalho e que o registo da discussão deve ser feito sem apagar o que escreveram antes. Os alunos serão também informados que apesar do trabalho ser realizado a pares, todos os alunos receberão uma ficha de trabalho e cada um deverá dar a resposta na sua folha.

Farei a projeção da tabela da tarefa no quadro e após ler o enunciado da tarefa 2 devo e certificar-me de que todos o compreendem.

3. Trabalho autónomo | 15 min

Durante o período de trabalho autónomo, vou circular pela sala com o objetivo de apoiar os alunos com eventuais dificuldades, privilegiando o questionamento e a discussão entre o par de alunos, promovendo a sua autonomia e entreajuda.

É também o momento para monitorizar o trabalho desenvolvido pelos alunos e efetuar a seleção e sequência das resoluções que integrarão a discussão posterior, tendo em conta os objetivos da aula.

Tarefas e atividades	Atividade dos alunos e possíveis dificuldades	Respostas do professor e aspetos a ter em atenção	Objetivos e avaliação
Ficha de trabalho n.º 1 Resolução da tarefa 2 - 15 min -	**Questão 2.1.** • Os alunos devem identificar o eixo das abcissas como sendo relativo ao tempo decorrido entre o relâmpago e o trovão (s) e o eixo das ordenadas como sendo referente à distância a que a trovoada ocorre (km). Marcarem os pontos de coordenadas (10; 3,4), (20; 6,8), (30; 10,2), (60; 20,4) **Dificuldades** ○ Identificarem o tempo como variável dependente; ○ Não nomear os eixos; ○ Perceberem que podem unir os pontos, formando uma reta;	As dificuldades coletivas e não impeditivas da continuação do trabalho de cada grupo, serão abordadas na fase de discussão coletiva. As dificuldades coletivas impeditivas de progressão da atividade serão esclarecidas, no momento, perante a turma. ○ Qual é a variável dependente e independente? ○ Qual é o valor que é dado em função do outro? ○ É possível que o tempo decorrido entre o relâmpago e o trovão seja de 22 segundos?	✓ Identificação das coordenadas dos pontos a partir da observação da tabela; ✓ Compreensão de que a semi-reta é um conjunto de pontos; ✓ Compreensão de que a distância é a variável dependente e o tempo é a variável independente.

	Questão 2.2. • Calcular o quociente entre os valores de y e os de x (ou entre os valores de x e os de y) e justificar a proporcionalidade pelo facto de a razão ser constante; • Justificar a proporcionalidade argumentando que a distancia da trovoada depende diretamente do tempo decorrido entre o relâmpago e o trovão, ou seja, se multiplicarmos o tempo decorrido, por um certo valor, a distância a que está a trovoada aumenta na mesma proporção; • Recorrer à representação gráfica e indicar que os pontos do gráfico estão "alinhados", e que a distancia aumenta com o aumento do tempo (e que a imagem de zero é zero). **Dificuldades** o Não recordar o que é ser diretamente proporcional; o Não conseguir determinar a constante de proporcionalidade; o Determinar o quociente apenas para um ou dois casos.	o Existe alguma relação entre a distância a que ocorre a trovoada e o intervalo de tempo entre o relâmpago e o trovão? o O que significa essa relação? o O que significa serem diretamente proporcionais? o O que representa a constante de proporcionalidade? o Calculando o quociente apenas para esses valores como podes garantir que essa razão se mantém sempre?	✓ Mostrar compreensão do significado de proporcionalidade direta.

	Questão 2.3. • Utilizar a constante de proporcionalidade e multiplicá-la por 90 segundos (90×0,34=30,6 km); • Recorrer a uma regra de três simples. **Dificuldades** o Não entender que tem de converter 1,5 minutos em segundos.	o Lê novamente a questão. Em que unidades está definido o tempo? o 1 minuto corresponde a quantos segundos?	✓ Perceber que a distância a que está a trovoada depende diretamente do tempo decorrido entre o relâmpago e o trovão.
	Questão 2.4. • Recorrer à distância por segundo (ou à constante de proporcionalidade) e escrever $d(t)=0{,}34t$. **Dificuldades** o Generalização da relação entre a distância da trovoada e o tempo entre o relâmpago e o trovão.	o Como estão relacionadas as variáveis? o Olhando para a tabela, como se relaciona a distância a que está a trovoada com o tempo decorrido entre relâmpago e trovão?	✓ Reconhecer a relação entre a variável dependente e a variável independente e capacidade de generalizar essa relação.
	Questão 2.5. • Usar a expressão algébrica encontrada na alínea anterior e resolvê-la em ordem ao tempo (x), concluindo que o intervalo de tempo será de 150 segundos e, portanto, 2,5 minutos;		✓ Capacidade de efetuar raciocínio inverso.

	• Recorrer à regra de três simples, justificando que, se para 10 segundos, a distância é de 3,4 km, então para 51 km será 150 segundos. **Dificuldades** ○ Por se tratar de raciocínio inverso, pode ser mais difícil para os alunos perceberem que devem resolver a equação em ordem à variável tempo; ○ A conversão de segundos para minutos.	○ O que pretendes determinar? ○ Existe alguma expressão que possas utilizar? Qual?; ○ Apoiar o aluno na resolução da equação em ordem ao tempo, relembrando o que já trabalharam; ○ Qual é a constante de proporcionalidade? ○ 1 minuto são quantos segundos?	

4. Discussão | 15 min

Após dar por concluído o momento de trabalho autónomo, devo considerar os objetivos que pretendo alcançar nesta fase da aula, de modo a conduzir a discussão no sentido de que fiquem esclarecidos os pontos essenciais da aula.

Assim, devo promover a comunicação escrita e oral, levando o aluno a refletir sobre os conceitos trabalhados e reforçando conhecimentos.

Devo envolver todos os alunos na discussão, recorrendo a questões:

Alguém pensou de outro modo?

Alguém tem dúvidas?

Discussão 2.1.

Um dos alunos é chamado ao quadro para marcar os pontos sobre a projeção do referencial, explicando como procedeu. Deverei sublinhar que cada um dos eixos está associado a cada uma das variáveis, e reforçar a noção de variável dependente e independente.

Questionarei se é ou não possível traçar uma reta que una os pontos e porquê, relacionando a resposta com o domínio da função.

Discussão 2.2.

Solicitar a um aluno que apresente a resolução do par no quadro, preferencialmente uma resposta incompleta, questionando se alguém obteve outra resposta para tentar envolver toda a turma. Este momento terá também como objetivo que os alunos relembrem uma situação de proporcionalidade direta como uma situação em que as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais, estando o aumento de uma relacionada com o aumento da outra. Deve ser enfatizada a noção de constante de proporcionalidade, como resultante do quociente entre os valores de y e de x.

Discussão 2.3.

Solicitarei a um aluno que apresente a resolução do par no quadro, que seja exemplificativa do raciocínio da maior parte dos alunos da turma.

Discussão 2.4.

Para a apresentação da resposta a esta questão, solicitarei a um aluno que apresente a resolução do par no quadro, optando por selecionar um par cuja expressão escolhida não seja a correta, para fomentar a discussão em grande grupo. Neste confronto, devo solicitar a justificação para cada uma das intervenções e sublinhar que o coeficiente de x corresponde à constante de proporcionalidade.

Devo também referir que pode designar-se por função linear e, dependendo as interações dos alunos, solicitar que os alunos dêem outro exemplo de uma função linear.

Discussão 2.5.

Na apresentação de resultados desta alínea, o aluno que apresentar a resolução deve explicar à turma a sua estratégia de resolução. Já que será expectável que esta questão pode ser mais difícil para os alunos devo sublinhar que poderiam recorrer à expressão algébrica determinada na alínea anterior e resolver a equação.

Nesta altura poderá ser oportuno reforçar o conceito de função nas três representações distintas (gráfica, tabular e algébrica), questionando os alunos sobre como se observa tratar-se de uma função de proporcionalidade direta em cada uma delas.

5. Sistematização | 5 min

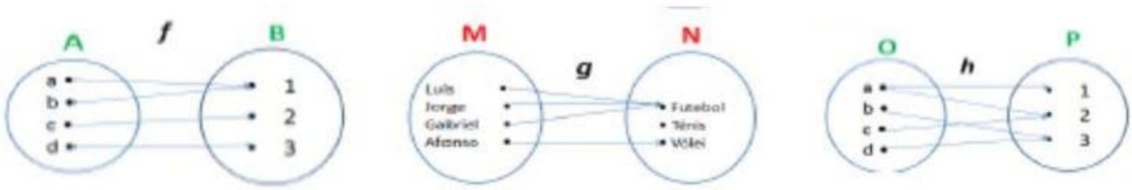
Nos minutos dedicados à síntese, irei questionar os alunos sobre o conceito de função e caso persistam dúvidas deverei apresentar mais exemplos.

Este será o momento oportuno para discutir com os alunos diferentes tipos de representações que conheçam, nomeadamente, o diagrama de setas, a representação gráfica, a tabular e a expressão analítica. Ainda nesta sistematização, a professora deverá recordar o que foi trabalhado, salientando que uma situação de proporcionalidade direta pode ser traduzida por uma função linear.

Como forma de sistematizar o que foi abordado na aula anterior e nesta, deverei fazer alusão aos conceitos do tema "Funções" do 7.º ano.

Neste momento, será projetado um PowerPoint com 3 slides, contendo algumas situações que permitam consolidar as noções de função, domínio e contradomínio, objeto e imagem. A análise dos slides será efetuada e discutida em grande grupo.

Slide 1:

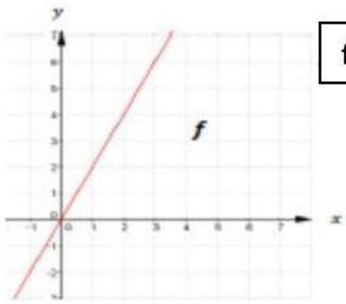


Durante esta projeção, serão colocadas questões aos alunos como:

- Qual das correspondências representa uma função?
- O que representa o conjunto A, e o conjunto B?
- Como distinguem o contradomínio e o conjunto de chegada?

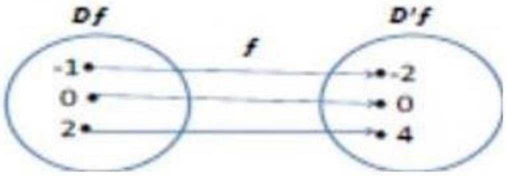
Face às intervenções dos alunos deverei sublinhar que a cada elemento do primeiro conjunto deve corresponder a um e um só elemento do segundo conjunto, concluindo-se que a representação é uma função.

Slide 2:



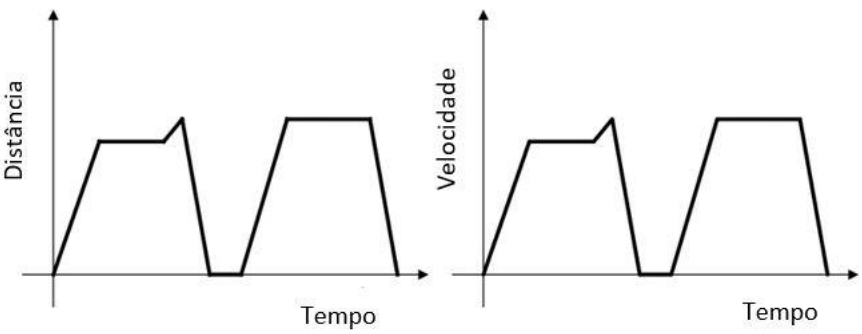
$f(x) = 2x$

x	-1	0	2
$f(x)$	-2	0	4



Neste slide serão recordadas as diferentes formas de representar uma função, sendo usada sempre a mesma função para os diferentes tipos de representação que os alunos devem recordar.

Slide 3:



Será feita a interpretação dos gráficos em grande grupo fazendo questões do género:

- O corredor alguma vez esteve parado?
- A velocidade de corrida foi sempre constante?
- A velocidade foi sempre crescente?
- Os dois gráficos descrevem o percurso do mesmo atleta?
- Quando é que os dois atletas estiveram ambos parados?

Atividades Complementares:

Atendendo à diversidade de ritmos de trabalho dos alunos ou no caso de a aula planeada decorrer num tempo inferior ao esperado, será proposto aos alunos, que interpretem os gráficos preparados para projetar no slide 3 (sistematização), que refiram se podem referir-se à mesma situação, que identifiquem semelhanças e diferenças.

Anexo 2.3 | Planificação da aula 3

Plano de Aula

Professor Orientador: Joana da Mata Pereira

Professor Coorientador: Maria Antónia Duffner

Professor Cooperante: Paulo Alvega

Discente: Susana Filipa Vicente

Data 05.03.2020 | **Turma** 8D | **Duração** 90 minutos

Domínio: Funções, sequências e sucessões

Subdomínio: Gráficos de funções afins

Sumário: Continuação da aula anterior. Introdução à função afim.

Objetivos da aula:

- Declive de uma função;
- Proporcionalidade direta e função linear;
- Ordenada na origem.
- Compreender a função afim como a soma de uma função linear e uma constante;

Conhecimentos prévios dos alunos:

- Conceitos e terminologia associados ao tema das funções: domínio, contradomínio, conjunto de chegada, variável dependente, variável independente, imagem e objeto;
- Reconhecer a função de proporcionalidade direta, a função linear e a função constante;
- Reconhecer diferentes tipos de representações de funções;
- Determinar a constante de proporcionalidade.

Recursos para a aula:

Ficha de trabalho n.º 2, projeção em PowerPoint.

Metodologia de Trabalho:

- Aula estruturada em 6 momentos: Trabalho autónomo na realização de parte da tarefa 2 da ficha n.º 1, Discussão da tarefa 2 da ficha de trabalho n.º 1, sistematização, Introdução da ficha de trabalho n.º 2, Trabalho autónomo (até à questão 1.3. da ficha n.º 2), Discussão.
- Trabalho autónomo realizado a pares.

Momentos da aula / Organização do trabalho	Tempo (min.)
1. Trabalho autónomo para conclusão da ficha de trabalho n. º1	10
2. Discussão da tarefa 2 da ficha de trabalho n.º 1	20
3. Introdução da ficha de trabalho n.º 2	5
4. Trabalho autónomo dos alunos na resolução da ficha de trabalho n.º 2 (até à questão 1.3.)	15
5. Apresentação das resoluções e discussão em grande grupo	20
6. Trabalho autónomo na conclusão da ficha de trabalho n.º 2	20

Desenvolvimento da Aula

1. Trabalho autónomo (terminar a ficha de trabalho n.º 1) | 10 min

Este momento de trabalho autónomo vai ser breve. Servirá para dar oportunidade aos alunos de completarem a ficha de trabalho n. º 1, pois ao observar as fichas em casa, verifiquei que a grande maioria dos alunos não conseguiu terminar.

2. Discussão (da tarefa 2 da ficha de trabalho n.º 1) | 20 min

Esta tarefa foi realizada na aula anterior, mas será discutida apenas nesta aula.

Discussão 2.1.

Projeção de uma das resoluções dos alunos e solicitar à turma que me indique as coordenadas de alguns pontos sobre a projeção do referencial. Deverei sublinhar que cada um dos eixos está associado a cada uma das variáveis, e reforçar a noção de variável dependente e independente.

Questionarei se é ou não possível traçar uma reta que una os pontos e porquê, relacionando a resposta com o domínio da função.

Discussão 2.2.

Projetar algumas das respostas dos alunos, preferencialmente algumas que estejam incompletas, questionando se alguém obteve outra resposta para tentar envolver toda a turma. Este momento terá também como objetivo que os alunos relembrem uma situação de proporcionalidade direta como uma situação em que as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais, estando o aumento de uma relacionada com o aumento da outra. Deve ser enfatizada a noção de constante de proporcionalidade, como resultante do quociente entre os valores de y e de x.

Discussão 2.3.

Solicitarei a um aluno que apresente a resolução do par no quadro, que seja exemplificativa do raciocínio da maior parte dos alunos da turma.

Discussão 2.4.

Para a apresentação da resposta a esta questão, solicitarei a um aluno que apresente a resolução do par no quadro, optando por selecionar um par cuja expressão escolhida não seja a correta, para fomentar a discussão em grande grupo. Neste confronto, devo solicitar a justificação para cada uma das intervenções e sublinhar que o coeficiente de x corresponde à constante de proporcionalidade.

Perguntar: Se t=1, d(t)=0,34, o que é que isso significa no contexto do problema?

Devo também referir que pode designar-se por função linear e, dependendo as interações dos alunos, solicitar que os alunos dêem outro exemplo de uma função linear.

Discussão 2.5.

Na apresentação de resultados desta alínea, o aluno que apresentar a resolução deve explicar à turma a sua estratégia de resolução. Já que será expectável que esta questão pode ser mais difícil para os alunos devo sublinhar que poderiam recorrer à expressão algébrica determinada na alínea anterior e resolver a equação.

Nesta altura poderá ser oportuno reforçar o conceito de função nas três representações distintas (gráfica, tabular e algébrica), questionando os alunos sobre como se observa tratar-se de uma função de proporcionalidade direta em cada uma delas.

3. Introdução da Ficha de Trabalho n.º 2 | 5 min

Ao distribuir a Ficha de Trabalho, os alunos serão informados que trabalharão a pares e que o trabalho autónomo durará 15 minutos, seguido de discussão em grande grupo. Irei sublinhar a importância de justificarem todas as respostas, destacando que todas as respostas devem ser dadas nessa ficha, que será recolhida no final da aula (para efeitos da investigação que é do conhecimento dos alunos) e devolvida na aula seguinte.

Nesta ocasião, irei reforçar que o registo da discussão deve ser feito sem que apaguem o que escreveram na ficha de trabalho anteriormente. Os alunos serão também informados que o trabalho será realizado a pares.

Nessa altura projeto os gráficos da primeira página da ficha e certifico-me que todos compreendem os gráficos e o que está a ser pedido.

4. Trabalho autónomo | 15 min

Durante o período de trabalho autónomo, irei circular pela sala com o objetivo de apoiar os alunos com eventuais dificuldades, privilegiando o questionamento e a discussão entre o par de alunos, promovendo a sua autonomia e entreajuda.

É também o momento para monitorizar o trabalho desenvolvido pelos alunos e efetuar a seleção e sequência das resoluções que integrarão a discussão posterior, tendo em conta os objetivos da aula.

Tarefas e atividades	Atividade dos alunos e possíveis dificuldades	Respostas do professor e aspetos a ter em atenção	Objetivos e avaliação
Resolução da ficha de trabalho n.º 2 (até à questão 1.3) - 15 min –	**Questão 1.1** • Identificar a situação 2, explicando que é nesse que existe um avanço inicial da Rita em relação à Larissa. **Dificuldades** ○ Considerar a situação 1, por confundir o facto de ambas começarem a correr ao mesmo tempo, com o facto da Rita iniciar a corrida no ponto de distância zero. **Questão 1.2.** • Compreender que a Rita percorre menos 200 metros que a Larissa. Afirmar que a Larissa vence a corrida porque chega aos 2000 metros em 500 segundos enquanto a Rita chega ao mesmo local apenas aos 600 segundos.	○ As duas começam a correr a partir do mesmo local?	✓ Mostrar compreensão na interpretação gráfica: quais as grandezas correspondentes a cada eixo, o significado da ordenada correspondente à abcissa zero. ✓ Mostrar capacidade de justificar a resposta. ✓ Mostrar que entendem porque é que a Larissa ganha a corrida. ✓ Mostrar capacidade de justificação.

	Dificuldades ○ Interpretar o facto do gráfico representante da corrida da Rita, terminar "mais à frente", como sendo resultado dela vencer a corrida. **Questão 1.3.** • Perceber que parte da afirmação é verdadeira (ao dizer que elas se encontram aos 3 min. e 20 seg. mas que até esse ponto, não correram a mesma distância porque a Rita partiu mais à frente. **Dificuldades** ○ Interpretar o gráfico achando que, por estarem no mesmo local, significa que terão percorrido a mesma distância até aí.	○ Quais são as coordenadas do ponto onde a Rita termina a corrida? E do ponto em que a Larissa termina a corrida? ○ Quais são as coordenadas do ponto onde a Rita inicia a corrida? E do ponto em que a Larissa inicia a corrida?	✓ Capacidade de interpretar o ponto de ordenada 200, como sendo o tempo zero para a Rita.

Nota: As dificuldades coletivas e não impeditivas da continuação do trabalho de cada grupo, serão abordadas na fase de discussão coletiva. As dificuldades coletivas impeditivas de progressão da atividade serão esclarecidas, no momento, perante a turma.

5. **Discussão | 20 min**

Após dar por concluído o momento de trabalho autónomo, terei em conta os objetivos a alcançar, de modo a conduzir a discussão no sentido de que fiquem esclarecidos os pontos essenciais da aula.

Pretendo assim, promover a comunicação escrita e oral, levando o aluno a refletir sobre os conceitos trabalhados e reforçando conhecimentos e envolver os alunos na discussão, recorrendo a questões:

Alguém pensou de outro modo?

Alguém tem dúvidas?

Discussão 1.1.

Esta questão será resolvida por mim, recorrendo às respostas dos alunos e promovendo a discussão de ideias e de justificações. Devo sublinhar a diferença entre as sequências B e D, e tentar que verifiquem que apenas a B representa uma relação de proporcionalidade direta. Reforçar a noção de variável dependente e independente.

Discussão 1.2.

Solicitar a um aluno que apresente a resolução do par no quadro. Questionar a existência de outras resoluções e confrontar opiniões.

Discussão 1.3.

A professora solicita a um aluno que apresente a resolução do par no quadro, que seja exemplificativa do raciocínio da maior parte dos alunos da turma.

Perguntar se as sequências representam relações lineares entre as variáveis e o que é que isso significa. Este momento pode ser oportuno para questionar os alunos sobre a possibilidade de traçar uma semi-reta que una os pontos e porquê, relacionando a resposta com a possibilidade de, neste caso estender o domínio da função dos naturais para reais.

6. Trabalho autónomo | 20 min

Tarefas e atividades	Atividade dos alunos e possíveis dificuldades	Respostas do professor e aspetos a ter em atenção	Objetivos e avaliação
Terminar a resolução da ficha de trabalho n.º 2 - 20 min –	**Questão 1.4.** • Escolher um ponto em cada uma das sequências e fazer o quociente entre a distância percorrida e o tempo. No caso da Rita, lembrar-se de subtrair 200 m à distância percorrida. • Obter 4 m/s^{-1}, no caso da Larissa e obter 3 m/s^{-1} no caso da Rita. **Dificuldades** o Não compreender que para determinarem a velocidade têm de fazer a razão entre a distância percorrida e o tempo. **Questão 1.5.** • Designar o tempo por *t* e a função que representa a distância percorrida por *l(t) ou r(t),* respetivamente para a Larissa e para a Rita. Recorrendo à constante de proporcionalidade (distancia percorrida por segundo) e, no caso da Rita, adicionar 200 metros e escrever; $l(t)=4t$ e $r(t)=3t+200$	o Se soubesses a distância que ela corre por segundo, como farias para determinar a distância que ela correria em 100 segundos, por exemplo?	✓ Mostrar compreensão do conceito de velocidade, como sendo a razão entre a distância e o tempo. ✓ Compreensão de qual a variável dependente e independente; ✓ Capacidade de encontrar uma expressão que sirva para todos os casos - generalização; ✓ Compreensão da razão encontrada na alínea anterior como sendo o coeficiente da variável *t*.

	Dificuldades ○ Não perceber que, apesar de existir uma taxa de variação constante em ambos os casos, na situação da Rita não existe proporcionalidade direta; ○ Utilizar a regra de três simples de forma incorreta, não considerando o avanço inicial.	○ O que significa o *r(t)*? Pensas que o facto de a Rita partir com um avanço de 200 metros não vai influenciar esse resultado?	
	Questão 1.6. • Escrever a expressão para a sequência B: $b(t)=3t$ Indicar que ambas tem o mesmo coeficiente de *t*, mas que não têm a mesma ordenada na origem. Dizer que *b(t)* representa uma relação de proporcionalidade direta e *r(t)* não. **Dificuldades** ○ Indicar que ambas têm a mesma constante de proporcionalidade por terem o mesmo coeficiente de *t*.	○ Se 3 é a constante de proporcionalidade, então se a multiplicares pelo tempo, vais obter a distância nesse momento, já experimentaste se resulta?	✓ Distinguir constante de proporcionalidade direta e coeficiente de t na função afim. ✓ Compreensão do que é uma função de proporcionalidade direta e distingui-la de uma função que não é de proporcionalidade direta.

Nota: As dificuldades coletivas e não impeditivas da continuação do trabalho de cada grupo, serão abordadas na fase de discussão coletiva. As dificuldades coletivas impeditivas de progressão da atividade serão esclarecidas, no momento, perante a turma.

A discussão destas questões será, em princípio, realizada na aula seguinte.

Encerramento da aula:

Distribuição da ficha de trabalho A para realizar como trabalho de casa, a qual deverá ser entregue pelos alunos na segunda feira. Na quarta feira, a ficha de trabalho A será devolvida aos alunos, com feedback escrito por mim.

Anexo 2.4 | Planificação da aula 4

Plano de Aula

Professor Orientador: Joana da Mata Pereira

Professor Coorientador: Maria Antónia Duffner

Professor Cooperante: Paulo Alvega

Discente: Susana Filipa Vicente

Data 05.03.2020 | **Turma** 8D | **Duração** 90 minutos

Domínio: Funções, sequências e sucessões

Subdomínio: Gráficos de funções afins

Sumário: Continuação da aula anterior. Introdução à função afim.

Objetivos da aula:

- Declive de uma função;
- Proporcionalidade direta e função linear;
- Ordenada na origem.
- Compreender a função afim como a soma de uma função linear e uma constante.

Conhecimentos prévios dos alunos:

- Conceitos e terminologia associados ao tema das funções: domínio, contradomínio, conjunto de chegada, variável dependente, variável independente, imagem e objeto;
- Reconhecer a função de proporcionalidade direta, a função linear e a função constante;
- Reconhecer diferentes tipos de representações de funções;
- Determinar a constante de proporcionalidade.

Recursos para a aula:

Ficha de trabalho n.º 2, projeção em PowerPoint.

Metodologia de Trabalho:

- Aula estruturada em 4 momentos: Discussão da Ficha de trabalho 2 (até à questão 1.3.), Trabalho autónomo na realização da segunda parte da ficha de trabalho 2, Discussão, sistematização.
- Trabalho autónomo realizado a pares.

Momentos da aula / Organização do trabalho	Tempo (min.)
1. Discussão da ficha de trabalho n. º 2 (até à questão 1.3.)	10
2. Trabalho autónomo dos alunos na conclusão da resolução da ficha de trabalho n.º 2	15
3. Apresentação das resoluções e discussão em grande grupo	15
4. Sistematização	5

Desenvolvimento da Aula

1. Discussão (da primeira parte da ficha de trabalho n.º 2) | 10 min

Esta tarefa foi realizada na aula anterior, mas será discutida apenas nesta aula.

Após dar por concluído o momento de trabalho autónomo, terei em conta os objetivos a alcançar, de modo a conduzir a discussão no sentido de que fiquem esclarecidos os pontos essenciais da aula.

Pretendo assim, promover a comunicação escrita e oral, levando o aluno a refletir sobre os conceitos trabalhados e reforçando conhecimentos e envolver os alunos na discussão, recorrendo a questões:

Alguém pensou de outro modo?

Alguém tem dúvidas?

Discussão 1.1

Os gráficos serão projetados no quadro e, já que todos os alunos responderam corretamente a esta questão, a resposta será dada no quadro por mim.

Nesta altura, recorrendo à projeção dos gráficos, devo sublinhar a diferença entre as sequências B e D, e tentar que verifiquem que apenas a B representa uma relação de proporcionalidade direta. Reforçar a noção de variável dependente e independente.

Discussão 1.2.

Projetar duas resoluções no quadro. Uma em que a aluna considerou que ambas correram 2000 m e outra em que a aluna percebeu que a Rita apenas correu 1800 m. Solicitar à turma que diga qual a resposta correta.

Discussão 1.3.

Tendo verificado que a grande maioria da turma compreendeu a situação, projetar uma resposta completa de um aluno.

Voltar a projetar os gráficos e perguntar se as sequências representam relações lineares entre as variáveis e o que é que isso significa.

Este momento pode ser oportuno para questionar os alunos sobre a possibilidade de traçar uma semirreta que una os pontos e porquê, relacionando a resposta com a possibilidade de, neste caso estender o domínio da função dos naturais para reais.

Solicitar aos alunos que identifiquem as funções lineares. Relacionar a inclinação das retas, com o declive.

2. **Trabalho autónomo (terminar a ficha de trabalho n.º 2) | 15 min**

Este momento servirá para os alunos terminarem a ficha de trabalho n. º 2. Durante o período de trabalho autónomo, irei circular pela sala com o objetivo de apoiar os alunos com eventuais dificuldades, privilegiando o questionamento e a discussão entre o par de alunos, promovendo a sua autonomia e entreajuda.

É também o momento para monitorizar o trabalho desenvolvido pelos alunos e efetuar a seleção e sequência das resoluções que integrarão a discussão posterior, tendo em conta os objetivos da aula.

Trabalho autónomo | 15 min

Tarefas e atividades	Atividade dos alunos e possíveis dificuldades	Respostas do professor e aspetos a ter em atenção	Objetivos e avaliação
Terminar a resolução da ficha de trabalho n.º 2 - 15 min –	**Questão 1.4.** • Escolher um ponto em cada uma das sequências e fazer o quociente entre a distância percorrida e o tempo. No caso da Rita, lembrar-se de subtrair 200 m à distância percorrida. • Obter 4 m/s, no caso da Larissa e obter 3 m/s no caso da Rita. **Dificuldades** o Não compreender que para determinarem a velocidade têm de fazer a razão entre a distância percorrida e o tempo; o Dificuldades em selecionar um ponto. **Questão 1.5.** • Designar o tempo por t e a função que representa a distância percorrida por $l(t)$ ou $r(t)$, respetivamente para a Larissa e para a Rita. Recorrendo à constante de proporcionalidade (distância percorrida por segundo) e, no caso da Rita, adicionar 200 metros e escrever; $l(t)=4t$ e $r(t)=3t+200$	o Se soubesses a distância que ela corre por segundo, como farias para determinar a distância que ela correria em 100 segundos, por exemplo? o Sugerir que escolham o ponto para 400 s, já que os valores se identificam facilmente.	✓ Mostrar compreensão do conceito de velocidade, como sendo a razão entre a distância percorrida e o tempo. ✓ Compreensão de qual a variável dependente e independente; ✓ Capacidade de encontrar uma expressão que sirva para todos os casos - generalização; ✓ Compreensão de que a razão encontrada na alínea anterior é o coeficiente da variável t.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

Dificuldades

- Não perceber que, apesar de existir uma taxa de variação constante em ambos os casos, na situação da Rita não existe proporcionalidade direta;
- Utilizar a regra de três simples de forma incorreta, não considerando o avanço inicial da Rita.

Questão 1.6.

- Escrever a expressão para a sequência B: *b(t)*=3*t*

Indicar que ambas tem o mesmo coeficiente de *t*, mas que não têm a mesma ordenada na origem. Dizer que *b(t)* representa uma relação de proporcionalidade direta e *r(t)* não.

Dificuldades

- Indicar que ambas têm a mesma constante de proporcionalidade por terem o mesmo coeficiente de *t*.

</td>
<td>

- O que significa o *r(t)*? Pensas que o facto de a Rita partir com um avanço de 200 metros não vai influenciar esse resultado?

- Se 3 é a constante de proporcionalidade, então se a multiplicares pelo tempo, vais obter a distância nesse momento, já experimentaste se resulta?

</td>
<td>

✓ Distinguir constante de proporcionalidade direta e coeficiente de t na função afim.

✓ Compreensão do que é uma função de proporcionalidade direta e distingui-la de uma função que não é de proporcionalidade direta.

</td>
</tr>
</table>

Nota: As dificuldades coletivas e não impeditivas da continuação do trabalho de cada grupo, serão abordadas na fase de discussão coletiva. As dificuldades coletivas impeditivas de progressão da atividade serão esclarecidas, no momento, perante a turma.

3. Discussão (da segunda parte da ficha de trabalho n.º 2) | 15 min

Discussão 1.4.

Solicitar a um aluno que vá ao quadro resolver a questão. Promover a discussão questionando quem correu mais depressa e como isso se relaciona com a inclinação das retas.

Discussão 1.5.

Solicitar a um aluno que resolva no quadro. Se alguém considerar a corrida da Rita como uma proporcionalidade direta, pedirei a esse aluno para ir ao quadro para que possamos verificar em grupo porque é que uma expressão que traduza uma proporcionalidade direta não resulta para este caso.

Discussão 1.6.

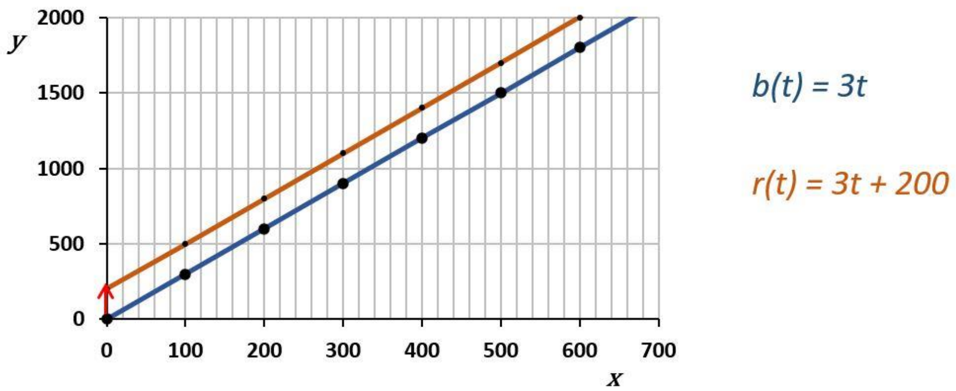
Responderei a esta questão no quadro, solicitando aos alunos que digam a resposta a partir do lugar.

Aproveitarei para mostrar algebricamente que a ordenada na origem da função r(t) é 200. Neste momento introduzirei a designação da função r(t): função afim.

4. Sistematização

Projeção dos gráficos do problema, todos no mesmo referencial e explorar com a turma as suas semelhanças e diferenças.

Explorar a projeção abaixo para definir a função afim como soma da função linear e de uma constante: ***f(x)=ax+b*** e designar ***a*** como declive e ***b*** como a ordenada na origem.



Encerramento da aula:

Entrega das fichas de trabalho 1, com feedback escrito por mim.

Distribuição da ficha de trabalho A para realizar como trabalho de casa, a qual deverá ser entregue pelos alunos e devolvida com feedback escrito por mim.

Anexo 2.5 | Planificação da aula 5

Plano de Aula

Professor Orientador: Joana da Mata Pereira

Professor Coorientador: Maria Antónia Duffner

Professor Cooperante: Paulo Alvega

Discente: Susana Filipa Vicente

Data 11.03.2020 | **Turma** 8D | **Duração** 45 minutos

Domínio: Funções, sequências e sucessões

Subdomínio: Gráficos de funções afins

Sumário: Continuação da aula anterior. Introdução da função afim.

Objetivos da aula:

- Declive de uma função;
- Ordenada na origem;
- Representar algebricamente e graficamente a função afim;
- Relacionar funções lineares e funções afins.
- Compreender a função afim como a soma de uma função linear e uma constante.

Conhecimentos prévios dos alunos:

- Conceitos e terminologia associados ao tema das funções: domínio, contradomínio, conjunto de chegada, variável dependente, variável independente, imagem e objeto;
- Reconhecer a função de proporcionalidade direta, a função linear e a função constante;
- Reconhecer diferentes tipos de representações de funções;
- Determinar a constante de proporcionalidade.

Recursos para a aula:

Ficha de trabalho n.º 2 e ficha de trabalho n. º 3, projeção em PowerPoint.

Metodologia de Trabalho:

- Aula estruturada em 3 momentos: Discussão da Ficha de trabalho 2 (até ao final), Sistematização, Trabalho autónomo na realização da segunda parte da ficha de trabalho 3 (até 1.5.).
- Trabalho autónomo realizado a pares.

Momentos da aula / Organização do trabalho	Tempo (min.)
1. Discussão da ficha de trabalho n. º 2	15
2. Sistematização	10
3. Trabalho autónomo na resolução da ficha de trabalho n.º 3 (até 1.5.)	20

Desenvolvimento da Aula

1. Discussão (da segunda parte da ficha de trabalho n.º 2) | 20 min

Esta tarefa foi realizada na aula anterior, mas será discutida apenas nesta aula.

Discussão 1.4.

Solicitar a um aluno que vá ao quadro resolver a questão. Promover a discussão questionando quem correu mais depressa e como isso se relaciona com a inclinação das retas.

Discussão 1.5.

Solicitar a um aluno que resolva no quadro. Se alguém considerar a corrida da Rita como uma proporcionalidade direta, pedirei a esse aluno para ir ao quadro para que possamos verificar em grupo porque é que uma expressão que traduza uma proporcionalidade direta não resulta para este caso.

Discussão 1.6.

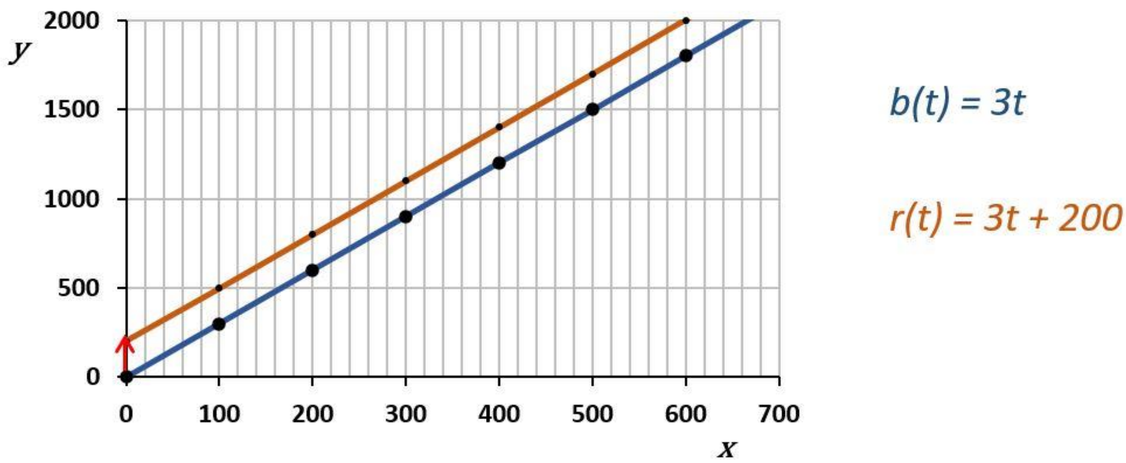
Responderei a esta questão no quadro, solicitando aos alunos que digam a resposta a partir do lugar.

Aproveitarei para mostrar algebricamente que a ordenada na origem da função $r(t)$ é 200. Neste momento introduzirei a designação da função r(t): função afim.

2. Sistematização | 5 min

Projeção dos gráficos do problema, todos no mesmo referencial e explorar com a turma as suas semelhanças e diferenças.

Explorar a projeção abaixo para definir a função afim como soma da função linear e de uma constante: ***f(x)=ax+b*** e designar ***a*** como declive e ***b*** como a ordenada na origem [***f(0)=b***].



3. Trabalho autónomo (ficha de trabalho n.º 3, até 1.5.) | 20 min

Este momento servirá para os alunos iniciarem a ficha de trabalho n.º3. Durante o período de trabalho autónomo, irei circular pela sala com o objetivo de apoiar os alunos com eventuais dificuldades, privilegiando o questionamento e a discussão entre o par de alunos, promovendo a sua autonomia e entreajuda.

É também o momento para monitorizar o trabalho desenvolvido pelos alunos e efetuar a seleção e sequência das resoluções que integrarão a discussão posterior, tendo em conta os objetivos da aula.

4. Trabalho autónomo | 20 min

Tarefas e atividades	Atividade dos alunos e possíveis dificuldades	Respostas do professor e aspetos a ter em atenção	Objetivos e avaliação
Resolução da ficha de trabalho n.º 3 (até à questão 1.5) - 20 min –	**Questão 1.1** • O valor total a pagar obtém-se através da subtração do desconto ao preço do gasóleo por litro: 1,2×20-2,5=21,5 €; 1,2×25-2,5=27,5 € e 1,2×50-2,5=57,5 € **Dificuldades** ○ Não são esperadas grandes dificuldades, já que a resposta resulta de um cálculo direto, de qualquer forma, alguns alunos podem esquecer-se de subtrair o valor do desconto. **Questão 1.2.** • Identificar o eixo das abcissas com a quantidade de gasóleo em litros e o eixo das ordenadas como o valor a pagar. Marcar os pontos e uni-los tendo o cuidado de definir a semirreta apenas para valores positivos. **Dificuldades** ○ Identificar os pontos para traçar a semirreta; ○ Não nomear os eixos; ○ Representar a semirreta para valores negativos. **Questão 1.3.** • O valor total a pagar obtém-se através da subtração do desconto ao preço do gasóleo por litro: 1,2×65,5 -2,5 =76,1 € que corresponde ao preço pago por 65,5 litros de gasóleo com desconto. • Pode surgir a expressão geral.	○ Relembrar: Então e o talão de desconto que o Sr. Moreira tem? ○ Sugerir que nomeiem os eixos de acordo com o observado na tabela ○ Qual é a variável dependente e independente? ○ Neste contexto é possível termos custos ou quantidades negativas?	✓ Mostrar compreensão no cálculo da imagem. ✓ Capacidade de representar graficamente uma função definida por tabela, mostrando facilidade na conversão entre representações. ✓ Mostrarem compreensão do que é a imagem e relacioná-la com o contexto.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
Dificuldades
○ Relacionar f(65,5) com o valor a pagar por 65,5 litros de gasóleo com o desconto.

Questão 1.4.
• O valor a pagar depende da quantidade de gasóleo colocada.
• A variável dependente é o valor a pagar e a independente é a quantidade de gasóleo colocada.
Dificuldades
○ Trocar as duas variáveis.

Questão 1.5.
• A quantidade de litros de gasóleo colocados é a soma do desconto com os 117,5 euros, dividido pelo preço por litro do gasóleo:
$(2{,}5+117{,}5)\div 1{,}2=100$ litros.
Dificuldades
○ Efetuar o raciocínio inverso;
○ Não entender que ao valor pago tem de somar o desconto, para poder dividir pelo preço por litro.
○ Não relacionarem o preço variável com a (coeficiente de x) e o desconto fixo com b (termo independente).
</td>
<td>
○ Qual é a função f? O que representa?
○ O que representa f(65,5)?

○ O que significa ser variável independente? E dependente?
○ O que vamos pagar depende de quê?

○ Os 117,5€ pagos correspondem ao produto da quantidade de litros pelo preço do litro? E o desconto?
○ Como fizeste na alínea anterior?
○ Qual é a diferença agora?
○ Qual é a operação inversa da multiplicação?
</td>
<td>
✓ Mostrar que entendem as noções de variável dependente e independente.
✓ Mostrar entendimento da noção de função.
✓ Mostrar capacidade de justificar as respostas.

✓ Mostrarem capacidade de efetuar o raciocínio inverso.
</td>
</tr>
</table>

Nota: As dificuldades coletivas e não impeditivas da continuação do trabalho de cada grupo, serão abordadas na fase de discussão coletiva. As dificuldades coletivas impeditivas de progressão da atividade serão esclarecidas, no momento, perante a turma.

Anexo 2.6 | Planificação da aula 6

Plano de Aula

Professor Orientador: Joana da Mata Pereira

Professor Coorientador: Maria Antónia Duffner

Professor Cooperante: Paulo Alvega

Discente: Susana Filipa Vicente

Data 12.03.2020 | **Turma** 8D | **Duração** 90 minutos

Domínio: Funções, sequências e sucessões

Subdomínio: Gráficos de funções afins

Sumário: Consolidação dos conceitos introduzidos na aula anterior. Questão de aula.

Objetivos da aula:

- Representar algebricamente, graficamente e por tabela a função afim;
- Relacionar funções lineares e funções afins.

Conhecimentos prévios dos alunos:

- Conceitos e terminologia associados ao tema das funções: domínio, contradomínio, conjunto de chegada, variável dependente, variável independente, imagem e objeto;
- Reconhecer a função de proporcionalidade direta, a função linear, a função constante e a função afim;
- Reconhecer diferentes tipos de representações de funções;
- Determinar a constante de proporcionalidade.

Recursos para a aula:

Ficha de trabalho n.º 3.

Metodologia de Trabalho:

- Aula estruturada em cinco momentos: Introdução da aula, Trabalho autónomo, Discussão, Sistematização e Realização da Questão de Aula.
- Trabalho autónomo realizado a pares.

Momentos da aula / Organização do trabalho	Tempo (min.)
1. Introdução da aula, relembrando os conceitos aprendidos e relembrados até ao momento	15
2. Continuação do trabalho autónomo iniciado na aula anterior (ficha de trabalho n.º 3, até à questão 1.6.)	25
3. Apresentação das resoluções e discussão em grande grupo	25
4. Sistematização	5
5. Realização da Questão de Aula	20

Desenvolvimento da Aula

1. **Introdução da aula | 15 min**

Distribuição da Ficha de Trabalho n. º 3 para que os alunos possam tomar notas da introdução, na mesma.

Devo iniciar a aula invocando os conhecimentos trabalhados nas últimas aulas. Questionar os alunos sobre os tipos de função já trabalhados e quais as suas características.

Escrever no quadro (com a indicação que devem passar para a ficha), a expressão geral da função constante, linear e afim, chamando a atenção para a representação gráfica de cada uma delas.

Com a ajuda dos alunos, escrever no quadro os termos relembrados e aprendidos nesta unidade temática, nomeadamente: imagem, objeto, variável dependente e independente, domínio, contradomínio, declive e ordenada na origem. À medida que os termos forem surgindo, solicitar aos alunos que deem exemplos ou expliquem os significados.

2. Trabalho autónomo | 25 min

Durante o período de trabalho autónomo, irei circular pela sala com o objetivo de apoiar os alunos com eventuais dificuldades, privilegiando o questionamento e a discussão entre o par de alunos, promovendo a sua autonomia e entreajuda.

É também o momento para monitorizar o trabalho desenvolvido pelos alunos e efetuar a seleção e sequência das resoluções que integrarão a discussão posterior, tendo em conta os objetivos da aula.

Tarefas e atividades	Atividade dos alunos e possíveis dificuldades	Respostas do professor e aspetos a ter em atenção	Objetivos e avaliação
Resolução da ficha de trabalho n.º 3 (até à questão 1.5) - 25 min –	**Questão 1.1** • O valor total a pagar obtém-se através da subtração do desconto ao preço do gasóleo por litro: 1,2×20-2,5=21,5 €; 1,2×25-2,5=27,5 € e 1,2×50-2,5=57,5 € **Dificuldades** ○ Não são esperadas grandes dificuldades, já que a resposta resulta de um cálculo direto, de qualquer forma, alguns alunos podem esquecer-se de subtrair o valor do desconto. **Questão 1.2.** • Identificar o eixo das abcissas com a quantidade de gasóleo em litros e o eixo das ordenadas como o valor a pagar. Marcar os pontos e uni-los tendo o cuidado de definir a semirreta apenas para valores positivos. **Dificuldades** ○ Identificar os pontos para traçar a semirreta; ○ Não nomear os eixos; ○ Representar a semirreta para valores negativos. **Questão 1.3.** • O valor total a pagar obtém-se através da subtração do desconto ao preço do gasóleo por litro: 1,2×65,5 -2,5 =76,1 € que corresponde ao preço pago por 65,5 litros de gasóleo com desconto. • Pode surgir a expressão geral.	○ Relembrar: Então e o talão de desconto que o Sr. Moreira tem? ○ Sugerir que nomeiem os eixos de acordo com o observado na tabela ○ Qual é a variável dependente e independente? ○ Neste contexto é possível termos custos ou quantidades negativas?	✓ Mostrar compreensão no cálculo da imagem. ✓ Capacidade de representar graficamente uma função definida por tabela, mostrando facilidade na conversão entre representações. ✓ Mostrarem compreensão do que é a imagem e relacioná-la com o contexto.

	Dificuldades ○ Relacionar *f*(65,5) com o valor a pagar por 65,5 litros de gasóleo com o desconto. **Questão 1.4.** • O valor a pagar depende da quantidade de gasóleo colocada. • A variável dependente é o valor a pagar e a independente é a quantidade de gasóleo colocada. **Dificuldades** ○ Trocar as duas variáveis. **Questão 1.5.** • A quantidade de litros de gasóleo colocados é a soma do desconto com os 117,5 euros, dividido pelo preço por litro do gasóleo: $(2,5+117,5)\div 1,2=100$ litros. **Dificuldades** ○ Efetuar o raciocínio inverso; ○ Não entender que ao valor pago tem de somar o desconto, para poder dividir pelo preço por litro. ○ Não relacionarem o preço variável com *a* (coeficiente de *x*) e o desconto fixo com *b* (termo independente).	○ Qual é a função *f*? O que representa? ○ O que representa *f*(65,5)? ○ O que significa ser variável independente? E dependente? ○ O que vamos pagar depende de quê? ○ Os 117,5€ pagos correspondem ao produto da quantidade de litros pelo preço do litro? E o desconto? ○ Como fizeste na alínea anterior? ○ Qual é a diferença agora? ○ Qual é a operação inversa da multiplicação?	✓ Mostrar que entendem as noções de variável dependente e independente. ✓ Mostrar entendimento da noção de função. ✓ Mostrar capacidade de justificar as respostas. ✓ Mostrarem capacidade de efetuar o raciocínio inverso.

Nota: As dificuldades coletivas e não impeditivas da continuação do trabalho de cada grupo, serão abordadas na fase de discussão coletiva. As dificuldades coletivas impeditivas de progressão da atividade serão esclarecidas, no momento, perante a turma.

3. Discussão | 25 min

Após dar por concluído o momento de trabalho autónomo, terei em conta os objetivos a alcançar, de modo a conduzir a discussão no sentido de que fiquem esclarecidos os pontos essenciais da aula.

Pretendo assim, promover a comunicação escrita e oral, levando o aluno a refletir sobre os conceitos trabalhados e reforçando conhecimentos e envolver os alunos na discussão, recorrendo a questões:

Alguém pensou de outro modo?

Alguém tem dúvidas?

Discussão 1.1.

A resolução será projetada e brevemente discutida, visto que, verifiquei em casa, que todos os alunos completaram corretamente a tabela.

Devo chamar a atenção para o valor do desconto ser fixo e o valor a pagar por litro ser variável.

Discussão 1.2.

Um aluno apresentará a representação gráfica do par no quadro. Neste momento, em colaboração com a turma, devo destacar a importância da nomeação dos eixos (o que representa o eixo das abcissas e das ordenadas).

Posso aproveitar o momento para questionar os alunos: "*o que precisamos conhecer para traçar uma reta?", "Como podemos representar graficamente uma função*?". A ideia é levar os alunos a entenderem que necessitam de determinar a imagem de dois pontos distintos, obtendo dois pares ordenados. Ao marcar os pontos no referencial, devem uni-los tendo em conta o domínio da função que estão a representar.

Discussão 1.3.

Um aluno apresentará a resolução do par no quadro e explicará como procedeu. Neste momento devo certificar-me que toda a turma entende a nomenclatura utilizada e o significado de $f(65,5)$.

Se neste momento da aula, se surgir a expressão geral, não será um problema. Nesse caso, farei a discussão pensada para a questão 1.6, neste momento.

Discussão 1.4.

Solicitar a um aluno que responda oralmente e justifique. Questionar se alguém deu outra resposta e clarificar os conceitos de variável dependente e independente.

Discussão 1.5.

Preferencialmente escolherei um par de alunos que não tenha efetuado corretamente o raciocínio inverso de modo a fomentar a discussão em grande grupo. No final devo garantir que toda a turma entendeu o que foi corrigido e porquê.

Na discussão poderei aproveitar para explorar as questões da tarefa e fazer perguntas ao grupo. Por exemplo:

- *Se dividirem o preço a pagar, após o desconto, por x litros de gasóleo adquiridos pelo Sr. Moreira, que valor obtêm? Se a quantidade de gasóleo colocada for outra, esse valor mantém-se? No contexto atual, qual o significado destes valores?*
- *Quantos litros de gasóleo deverá colocar o Sr. Moreira, para que seja mais vantajoso ir à área de serviço onde o seu talão de desconto não é aceite? Expliquem como pensaram.*

4. Sistematização | 5 min

Relembrar a importância de considerar o domínio na representação das funções, dando como exemplo o caso concreto da aula.

Chamar a atenção que no caso da aula $f(1)$ não faz sentido: Observem o gráfico que traçaram na pergunta 1.2., relativo à situação do Sr. Moreira. Que significado tem, na realidade, o valor que marcariam, correspondente a 1 litro adquirido?

5. Realização da Questão de Aula | 20 min

Distribuição da questão de aula que os alunos realizarão com os pares habituais, durante cerca de 20 minutos.

Atividades Complementares:

Atendendo à diversidade de ritmos de trabalho dos alunos ou no caso de a aula planeada decorrer num tempo inferior ao esperado, proponho que continuem a resolução da ficha de trabalho 3.

Anexo 3 | Diário de bordo

Anexo 3 - Guião do diário de bordo

Aula:

Data:

Tarefas:

Expectativas para a aula

Introdução da aula

Reação inicial às tarefas propostas

Dificuldades e comentários durante o trabalho autónomo

Questões colocadas | Respostas obtidas | Atitudes do professor

Estratégias utilizadas pelos alunos | Atitudes dos alunos

Aprendizagens realizadas pelos alunos

Conceitos sistematizados

Comentários | Aspetos positivos | Aspetos a melhorar