B 1508

Kuba Attila:

A KÉT VETÜLETBŐL TÖRTÉNŐ REKONSTRUKCIÓ ALGORITMUSAI

Doktori értekezés

JATE, Kibernetikai Laboratórium
Szeged
1978.

TARTALOM

BEVEZETÉS 1

I. A REKONSTRUKCIÓS PROBLÉMA ÉS AZ ALKALMAZOTT MÓDSZEREK 2

1. A rekonstrukciós probléma 2

2. Iterativ rekonstrukciós módszerek 4

3. Két-dimenziós Fourier-rekonstrukciók 6

4. Konvolúciós filterezés 7

II. HOMOGÉN REKONSTRUKCIÓ KÉT VETÜLETBŐL 10

1. A homogén rekonstrukciós probléma 10

2. Egy rekonstrukciós módszer ismertetése 11

3. Az algoritmus helyességének a bizonyitása 20

4. Implementáció és illusztrációk 23

5. Két vetületnek megfelelő bináris mátrix létezésének szükséges és elégséges feltételei 24

III. MINIMÁLIS TERJEDELMŰ MÁTRIXOK 30

1. A probléma ismertetése 30

2. Tétel a minimális terjedelmü mátrixokról 32

IV. ÖSSZEG ÉS SZORZAT ALAKU MEGOLDÁSOK 36

1. Szorzat alakú megoldás 36

2. Összeg alakú megoldás 37

3, Általános alakú megoldás 39

4. Kisérleti eredmények 42

IRODALOM 45

B E V E Z E T É S

A matematikai és a számitástudományi módszereknek a különféle tudományágakban való alkalmazására egy különösen szép példa a vetületekből történő rekonstrukció problémaköre. Az orvosi diagnosztikában, a molekuláris biológiában és a rádióasztronómiában jelentkezett elsőként gyakorlati igény hatékony rekonstrukció elvégzésére, amihez újszerüsége folytán nemcsak bizonyos technikai kérdéseket kellett megoldani, hanem - mint elméleti problémának - a matematikán belüli tisztázását is. A komplex kutatások eredményeként alakult ki a rekonstrukciós problémakör matematikai eszközöket felhasználó szakirodalma, illetve az 1970-es évek elejétől kezdve az elméletek konkrét megvalósulásaként jelentek meg és terjedtek el a különböző tipusú és fajtájú számitógépes tomográfok /computerized tomograph :CT/, amelyek bevezetése forradalmi változást hozott a Röntgen- és izotóp-diagnosztikában.

A dolgozat - az egyes speciális alkalmazási területektől függetlenül - a két vetület alapján végzett rekonstrukció matematikai módszereivel foglalkozik. Az I. fejezet az irodalom és az alkalmazott módszerek áttekintését tartalmazza. A II. fejezet az un. x- és y-irányú összefüggő alakzatok rekonstrukciójára ad egy algoritmust /ezek az alakzatok az irodalomból ismert rekonstruálható formáknál általánosabb osztályt alkotnak/. Az algoritmusnak megvan az az elvárható tulajdonsága, hogy azokat és csak azokat az alakzatokat állitja elő, amelyek az adott vetületeknek megfelelnek. Ugyanitt definiáljuk az un. piramis-szerü alakzatok fogalmát, amely - az irodalomban található CHANG-féle feltételhez hasonlóan - biztositja a rekonstrukció egyértelmüségét.

A III. és a IV. fejezet speciális tulajdonságokkal rendelkező mátrixok rekonstruálhatóságának a kérdéseivel foglalkozik. Ezen belül a minimális terjedelmü illetve a szétválasztható változójú mátrixok /képfüggvények/ megoldási alakjaira vonatkozó állitásokat bizonyitunk.

I. A REKONSTRUKCIÓS PROBLÉMA ÉS AZ ALKALMAZOTT MÓDSZEREK

1. A rekonstrukciós probléma

A rekonstrukciós problémát az egyes alkalmazási területeken meglévő fizikai háttértől és a különféle torzító hatásoktól elvonatkoztatva a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

Legyen $f(x,y)$ a sik egy véges r_0 sugarú, O középpontú K_{r_0} körén belül értelmezett függvénynek az OXY derékszögü koordináta-rendszerbeli alakja és legyen OUV egy másik koordináta-rendszer, amely az előzőből O körüli ϑ-szögü elforgatással áll elő / $\angle XOU = \vartheta$ /. Ekkor az $f(x,y)$ függvény v -irányú vetületi-függvénye /vagy egyszerüen vetülete/ igy kapható:

$$f_v(u) = \int_{K_{r_0}} f(x,y)\,dv \qquad (1)$$

Természetesen, további vetületeket is előállithatunk megfelelő szögü elforgatás és (1) segitségével.

A rekonstrukciós probléma alapkérdése: Adott véges sok, különböző irányú vetület, $f_{v_1}(u_1)$, $f_{v_2}(u_2)$, ... , $f_{v_N}(u_N)$, keresendő olyan két-változós függvény, amának éppen a megadott egyváltozós függvények a v_1 , v_2 , ... , v_N -irányú vetületei. /Szokás a rekonstrukciós problémát általánosabban, térbeli formák közvetlen jellemzésére alkalmas 3-változós függvényekre kimondani, ezt azonban rögtön vissza is vezetik a 2-dimenziós esetre az által, hogy a térbeli struktúra néhány sikmetszetét rekonstruálják csupán és belőlük állitják vissza a teljes 3-dimenziós alakot./

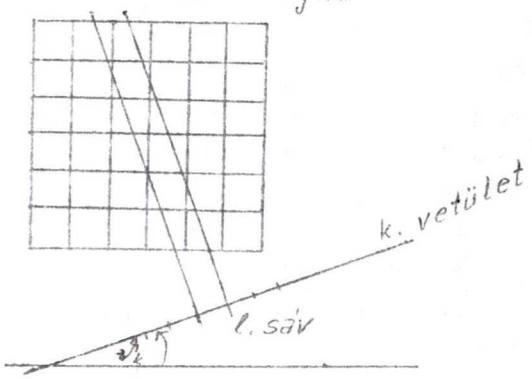
A kérdést matematikai szempontból elsőként RADON [1] vizsgálta meg 1917-ben és egy egzakt megoldást adott rá. A további kutatások - akkor még valószinüleg az alkalmazási lehetőségek hiányában - viszonylag sokáig várattak magukra. 1956-ban BRACEWELL [2] egy olyan eljárást talált, amelyet aztán a mikrohullámú sugárzást kibocsátó Nap-felületek képi rekonstrukciójára alkalmazott. Később jelentős lépéseket tett e témakörben CORMACK [3,4], aki a megoldási módszeren

és annak fizikai kisérlettel való próbáján kivül három lehetséges alkalmazási területet emlitett meg: a radiológiát /az emberi test szövetek Röntgen sugaras abszorpciós együtthatóinak a meghatározására/, az izotóp diagnosztikát /a pozitron megsemmisülések eloszlási képeinek a meghatározására/ és a sürüségmérést /az elektromosan töltött részecskék energia veszteségeiből/. Hasonló matematikai probléma jelentkezett az elektron-mikroszkópoknál a komplex bio-molekulák vizsgálatakor, ahol a molekuláris struktúrákat különböző szögü transzmissziós mikro-fotó felvételekből rekonstruálták /DEROSIER, KLUG [5] /. Ettől kezdve egyre több módszer és kisérlet eredményéről számoltak be. Kialakultak a rekonstrukciós algoritmusok nagy csoportjai: a konvolúciós eljárások /RAMACHANDRAN, LAKSHMINARAYANAN [6] /, az ART - algebrai rekonstrukciós technikák /GORDON, BENDER, HERMAN [7] / és a Fourier-módszerek /MERSEREAU, OPPENHEIM [8] /, majd ezek legkülönfélébb változatai, rendszerezésük és összehasonlitásaik [9-16]. Az irodalomban már nemcsak közvetlenül az algoritmusokkal kapcsolatos kérdések szerepeltek, hanem olyan elvi problémák is, mint pl. egy meghatározott pontosságú rekonstrukcióhoz szükséges vetületek száma [17,18].

A fejlődésnek nagyon lényeges állomását jelentette az első transzmissziós számitógépes tomográf, az EMI Scanner megjelenése [19,20]. Ez a készülék az emberi koponya és agy kb. 1 cm vastag transzverzális rétegének /sikmetszetének/ a képeit állitotta elő 180 különböző irányból felvett vetületi adatok segitségével. Azóta egyre pontosabb rekonstrukcióra képes készülékeket fejlesztettek ki [21,22], egyuttal tovább szélesitették a rekonstrukciós problémakört az egyes sztochasztikus jellemzők hatásának a vizsgálatától kezdve egészen a számitógépes szimuláció kérdéséig [23].

2. Iterativ rekonstrukciós módszerek

A rekonstrukciós módszereknek erre az osztályára az a jellemző, hogy a problémát egy nagy méretü lineáris egyenletrendszer /rendszerint csak közelitő/ megoldására vezetik vissza. Ezt a megoldást speciális alakú függvények, mátrixok formájában keresik, vagyis feltételezik, hogy a rekonstruálandó függvény értelmezési tartamánya lefedhető egy olyan $n \times n$-es négyzethálóval, aminek a négyzetein belül a keresendő $f(x,y)$ függvény konstans, a négyzethálón kivül pedig $f(x,y)=0$ /1. ábra/. Legyen ez a mátrix $\underline{F} = (f_{ij})_{n \times n}$. Egyuttal a vetületek



1. Ábra. A ϑ_k -szögü $\underline{f}^{(k)}$ vetületi vektor ℓ-dik elemének a képzése

(1) szerinti definiciója helyett egy másik vetület fogalomból indulnak ki, amely a tényleges alkalmazásokkal szorosabb összhangban van. Az (1) szerint előállitott $f_{\vartheta_1}(u_1)$, $f_{\vartheta_2}(u_2)$, ... , $f_{\vartheta_N}(u_N)$ vetületi függvényeknek most az $\underline{f}^{(1)}$, $\underline{f}^{(2)}$, ... , $\underline{f}^{(N)}$ vetületi vektorok felelnek meg. A k-dik vetületi vektor, $\underline{f}^{(k)}$ ℓ-dik elemét $f_\ell^{(k)}$ -et úgy kapjuk meg, hogy /1. ábra/

$$f_\ell^{(k)} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(k,\ell)} \cdot f_{ij} \qquad (2)$$

ahol $a_{ij}^{(k,\ell)}$ arányossági tényező azt mutatja meg, hogy az (i,j) négyzetnek hányad része esik a k-dik vetület ℓ-dik sávjába.

Erre a vetület fogalomra ill. definicióra és a (2) által meghatározott lineáris egyenletrendszerre épülnek az un. algebrai rekonstrukciós technikák /röviden: ART/, amelyeket GORDON, BENDER és HERMAN közöltek 1970-ben [7]. (2)-ben az

f_{ij} -k az ismeretlenek, $f_\ell^{(k)}$ -k a mérésekből adottak, $a_{ij}^{(k,\ell)}$ - k a vetületeknek a négyzethálóhoz való geometriai viszonyából kiszámithatók. Az egyik iterációs eljárás rövid ismertetése a következő:

Induljunk ki egy tetszőleges /pl. $\underline{F} = \underline{0}$ / mátrixból. Vegyük a k-dik vetületet, $\underline{f}^{(k)}$-t és a k-dik vetület minden egyes sávjában annyival növeljünk minden egyes mátrix elemet, hogy ezután a sávokban éppen az előirt $f_\ell^{(k)}$ / $\ell = 1,2,\ldots,M$ / legyen a (2) szerint képzett összeg. Például, ha a k-dik vetület ℓ-dik sávjában a vetület értéke $\tilde{f}_\ell^{(k)}$ most, akkor legyen

$$f_{ij}^{(q+1)} = f_{ij}^{(q)} + \frac{f_\ell^{(k)} - \tilde{f}_\ell^{(k)}}{N_\ell^{(k)}} \qquad (3)$$

minden olyan (i,j)-re amely benne van a k-dik vetület ℓ-dik sávjában. (3)-ban $N_\ell^{(k)}$ jelzi a k-dik vetület ℓ-dik sávjában levő négyzetek számát. Utána a $k+1$-dik vetületre végezzük el ugyanezt. Az N-edik vetület után ismét az első vetületet vesszük. Bizonyitható, hogy ez a módszer konvergens [12,15,24], ha létezik a megadott vetületeknek megfelelő mátrix.

Igazolható, hogy ha a (2) egyenletrendszer határozatlan /$N.M < n.n$/, akkor (3) a lehetséges megoldások közül pont a minimális varianciájúhoz fog konvergálni [15,24,25]. Az eljárásnak ez a tulajdonsága adta aztán az ötletet egyéb módszerek kidolgozásához, hogy a (2) egyenletrendszerhez már eleve bizonyos előirt tulajdonságú mátrixokat /mátrix-képeket/ keressenek, mint pl. maximális entrópiájút, "simát", stb. [15,25, 26]. Az ART (3) formáját tovább finomitották azzal, hogy figyelembe vették a rekonstruálandó mátrix nem-negativitását [9] - ART2, a különféle zajok jelenlétét - ART3 [27], a mátrixkép várható "simaságát".[28]

Az ART közé tartozó módszerek száma tovább nőtt, amikor az egyes vetületekhez tartozó sávokban a módositásokat (3) helyett szorzásokkal végezték el:

$$f_{ij}^{(q+1)} = f_{ij}^{(q)} \cdot \frac{f_\ell^{(k)}}{\tilde{f}_\ell^{(k)}} .$$

Ezt nevezik az ART multiplikativ formájának [15], szemben (3)-

mal, amely az ART additiv formáját jelenti.

Az ART módszerekhez hasonlók az ugyancsak iterációs jellegü un. SIRT /szimultán rekonstrukciós technikák/ algoritmusai /GILBERT, 1972 [11]/, amelyek - az ART-től eltérően ä a következő iterációhoz valamennyi vetületet egyidejüleg, egyszerre használják fel. A SIRT-nek is van additiv és multiplikativ változata. /Az iterativ módszerek általános összehasonlitására lásd [12-15]./

3. Két-dimenziós Fourier-rekonstrukciók

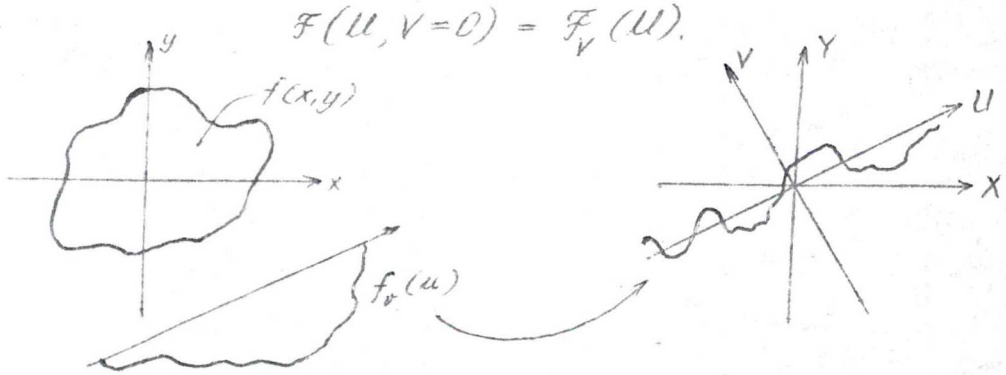
A Fourier-rekonstrukciós módszerek /BRACEWELL, 1956 [2]/ a keresendő $f(x,y)$ függvény Fourier-transzformáltját, $F(X,Y)$-t használják fel a megoldáshoz. Az $f(x,y)$ és az $F(X,Y)$ közötti kapcsolat:

$$F(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int f(x,y)\, e^{2\pi i (xX+yY)}\, dx\,dy. \qquad (4)$$

Az $F(X,Y)$ függvénynek az $f(x,y)$ függvény vetületeiből való meghatározására az un. "vetület-szelet" tétel nyújt lehetőséget.

Vetület-szelet tétel [8,17,29]: Jelöljük az $f_v(u)$ v^h-szögü vetület egy-dimenziós Fourier-transzformáltját $F_v(U)$-val, akkor a Fourier-térben az origón áthaladó v^h-szögü U egyenes mentén, $F(U,V=0)$-ra teljesül /2, ábra/, hogy

$$F(U,V=0) = F_v(U).$$



2. Ábra. Vetület-szelet tétel szemléltetése

Tehát az $f(x,y)$ függvény Fourier-transzformáltjának értékeit egy egyenes mentén megkaphatjuk, ha a megfelelő vetület Fourier-transzformáltját vesszük. Az egyenesek menti ér-

SZEGED

tékekből, szeletekből aztán interpoláció segitségével állithatjuk elő a teljes $F(X,Y)$-t. Végül az inverz Fourier-transzformációt felhasználva kapjuk a keresett függvényt:

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int F(X,Y)\, e^{-2\pi i (Xx+Yy)}\, dX\, dY.$$

Mivel $f(x,y)$ és $F(X,Y)$ között kölcsönösen egyértelmü kapcsolat van, ezért $f(x,y)$ pontos rekonstrukciójához az $F(X,Y)$ teljes Fourier-térbeli alakját ismerni kellene, ami a vetület-szelet tételből láthatóan csak az összes irányú vetületből lenne előállitható. A gyakorlatban azonban csak véges sok vetület áll rendelkezésre.

További nehézséget okoz még az is, hogy a véges sok vetületet csak véges sok pontban ismerjük. Ennek aztán az a következménye, hogy az eredményként kapott kép felbontása romlik és a folytonos Fourier-transzformáltak helyett az un. diszkrét Fourier-transzformációt /DFT/ kell használnunk [8,16,18].

A Fourier-transzformációs módszerek akkor bizonyultak különösen használhatónak, amikor valamilyen szimmetrikus alakzat rekonstrukcióját kellett elvégezni [18], mint pl. különféle biológiai makro-molekulák térbeli formáját elektron-mikroszkópos felvételekből [5,30]. Egyébként, elegendően nagy számú /128-256 db/ és felbontású vetületből akár fénykép finomságú képeket lehet rekonstruálni [8,17] ezzel a módszerrel.

4. Konvolúciós filterezés

Ezt a módszert elsőként BRACEWELL és RIDDLE mutatta meg 1967-ben, később LAKSHMINARAYANAN és RAMACHANDRAN tőlük függetlenül publikálták [6]. A konvolúciós filterezés lényege az eredeti $f(x,y)$ függvény egy filterezett változatának az előállitása.

Válasszuk az egyik legegyszerübb filter-függvényt, aminek a Fourier-térbeli polár-koordinátás alakja:

$$B_p(R,\Phi) = B_p(R) = \begin{cases} 1, & \text{ha } |R| < A/2; \\ 0, & \text{ha } |R| \geq A/2. \end{cases}$$

/A valamilyen előre választott konstans/ és akkor az $f(x,y)$ függvény filterezettjének, $\tilde{f}(x,y)$ -nak a Fourier-térbeli polár-koordinátás alakja:

(5) $$\tilde{F}_p(R,\Phi) = F_p(R,\Phi)\cdot B_p(R).$$

Ebből a filterezett függvény polár-koordinátás alakja igy kapható:

$$\tilde{f}_p(r,\varphi) = \int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}_p(R,\Phi)|R| e^{2\pi i R r\cos(\varphi-\Phi)}\, dR\, d\Phi.$$

(5) behelyettesitésével

$$\tilde{f}_p(r,\varphi) = \int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_p(R,\Phi)\cdot(|R|/B_p(R)) e^{2\pi i R r\cos(\varphi-\Phi)}\, dR\, d\Phi.$$

Itt a belső integrál felfogható úgy is, mint két, Fourier-térben levő függvény / $F_p(R,\Phi)$ és $|R|\cdot B_p(R)$ / szorzatának az inverz Fourier-transzformációja. Ez viszont a konvolúciós tétel szerint egyenlő az azoknak megfelelő normál-térbeli függvények konvolúciójával, vagyis

(6) $$\tilde{f}_p(r,\varphi) = \int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_\Phi(r_1) h(r\cdot\cos(\varphi-\Phi)-r_1)\, dr_1\, d\Phi,$$

ahol

(7) $$h(s) = \int_{-\infty}^{\infty} |R| B_p(R) e^{2\pi i R s}\, dR = \int_{-A/2}^{A/2} |R| e^{2\pi i R s}\, dR.$$

$f_\Phi(r_1)$ pedig a Φ -szögü vetületét jelöli $f(x,y)$ -nak, amire pedig a már emlitett vetület-szelet tétel folytán igaz, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_p(R,\Phi) e^{2\pi i R r_1}\, dR = f_\Phi(r_1).$$

Tehát $f_p(r,\varphi)$ és egyúttal $f(x,y)$ (6) szerinti előállitásához (7)-et kell előre kiszámolni, $f_\Phi(r)$ -ek pedig már adottak. Mivel csak diszkrét pontokban ismerjük /közelitőleg/ a véges sok vetületet, ezért (7) kiszámitásához numerikus matematikai módszereket kell alkalmazni.

Ennek az eljárásnak több olyan tulajdonsága is van, aminek révén a 2. és 3. pontban ismertetett két másik eljárásnál is gyakrabban használják ezt, főleg a transzmissziós számitógépes tomográfoknál [21,16]. Ezek a tulajdonságok:

1/ (7)-ben a belső integrálást minden egyes vetületre külön-külön is el lehet végezni a többitől függetle-

nül /vagyis már az adatok - az egyes vetületek - begyüjtése közben elkezdődhet a feldolgozás/;

2/ az $\tilde{f}_\rho(r,\varphi)$ függvényt tetszőleges rész-területén kiszámithatjuk anélkül, hogy a teljes függvényt rekonstruálnunk kellene;

3/ ez a módszer könnyen kiterjeszthető más tipusú, gyorsabb adat-begyüjtési módokra is /legyező-nyaláb alakú sugárzás/ [31,32].

Az ismertetett módszerek gyorsaságának az összehasonlitására szolgál a következő táblázat [16]:

a módszer	a szorzások száma
ART	$4.M^2N$ /iterációnként/
Fourier	$1,3(\log_2 M)^2 n^2$
Konvolúciós	$1,6\,N n^2$

Más szempontok szerinti összehasonlitásokat is tárgyalnak még [9-15]-ben.

Az emlitett három alaptipuson kivül még jónéhány rekonstrukciós módszer ismeretes [33-38], azonban a gyakorlatban ezt a hármat használják a legtöbbet.

II. HOMOGÉN REKONSTRUKCIÓ KÉT VETÜLETBŐL

1. A homogén rekonstrukciós probléma

A rekonstruálandó függvény szempontjából az algoritmusokat két osztályba lehet sorolni:

a/ inhomogén rekonstrukciós algoritmusok,

b/ homogén rekonstrukciós algoritmusok.

Az a/ osztályba azok az algoritmusok tartoznak, amelyeknél $f(x,y)$ értékkészlete tetszőleges /általában nem-negativ/ értékekből áll. A b/ osztály algoritmusait az a/ olyan speciális esetének lehet tekinteni, amikor $f(x,y)$ csak 0 vagy 1 értéket vehet fel /karakterisztikus függvény/. Igy a homogén rekonstrukciós algoritmusok homogén anyagú tárgyak sikmetszeteinek a rekonstrukciójára alkalmasak, ahol $f(x,y)$ definiciója:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{, ha } (x,y) \text{ eleme a tárgynak,} \\ 0 & \text{különben.} \end{cases} \tag{8}$$

Kézenfekvő, hogy ezt a függvényt a sikban egy görbe vonal által határolt sikidommal szemléltessük. 1973-ban közölte CHANG és CHOW azt az algoritmust [39], amellyel olyan homogén tárgyak sikmetszetei rekonstruálhatók az

$$f_x(y) = \int_{K_{r_0}} f(x,y)\,dx \tag{9}$$

és az

$$f_y(x) = \int_{K_{r_0}} f(x,y)\,dy \tag{10}$$

vetületekből, amelyek egyenes szakaszokkal határoltak, konvexek és két, egymásra merőleges tengelyre nézve szimmetrikusak. Módszerük - a meglehetősen speciális feltételeket kihasználva - geometriai megfontolásokon alapszik.

A (8) függvény sikidommal való szemléltetése helyett alkalmazzunk most egy $\underline{F} = (f_{ij})_{n\times n}$ bináris mátrixot is. A bináris mátrixok esetében (9) és (10) vetületek éppen a mátrix sor és oszlop-összegeit fogják jelenteni:

$$f_i^{(x)} = \sum_{j=1}^{n} f_{ij} = \text{az } i\text{-dik sorban levő } 1\text{-k száma;} \tag{11}$$

$$f_j^{(y)} = \sum_{i=1}^{n} f_{ij} = \text{a } j\text{-dik oszlopban levő } 1\text{-k száma .} \tag{12}$$

A bináris mátrixoknak (11)-ből és (12)-ből történő rekonstrukciójára több algoritmus is született [40,42]. Felhasználásuknál azonban az a probléma jelentkezik, hogy ugyanahoz a két vetülethez bizonyos esetekben nagyon sok bináris mátrix tartozhat /pl. ha $\underline{f}^{(x)} = \underline{1}$ és $\underline{f}^{(y)} = \underline{1}$, akkor $n!$ különböző lehetséges megoldás van/. Ennek a problémának a kiküszöbölésére két út kínálkozik: vagy további vetületeket is hozzávesszünk (11)-hez és (12)-höz [43,44], vagy pedig valamilyen feltételt kötünk ki a keresendő bináris mátrixra, mint pl. CHANG és CHOW már említett módszerében [39]. A továbbiakban mi kizárólag ezzel az utóbbi lehetőséggel foglalkozunk.

A feltételnek vagy tulajdonságnak a jó megválasztása fontos tényező, mert kettős követelménynek kell megfelelnie. Olyannak kell lennie, hogy a lehetséges megoldások száma gyakorlati szempontból is elfogadható szinten maradjon, de nem szabad leszűkitenie ezzel a speciális tulajdonsággal az alkalmazhatóság körét túlságosan. Egy ilyen algoritmust mutatunk be a következő pontban [45].

Megjegyezzük, hogy a homogén rekonstrukció egy-egy lehetséges általánositására láthatunk példákat [42,44,46]-ban.

2. Egy rekonstrukciós módszer ismertetése

2.1 Definiciók és jelölések

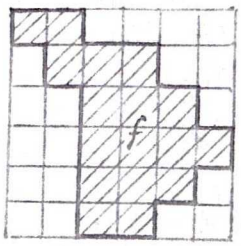
A tárgyalás folyamán az algoritmus lépéseinek a szemléltetéséhez fel fogjuk használni azt a tényt, hogy bármely $n \times n$-es bináris $\underline{F}$ mátrixot egyértelmü módon lehet jellemezni valamely egységnyi négyzetekből felépülő f bináris mintával /3. ábra/. Vagyis ha a bináris mátrix elemeit f_{ij} -vel jelöljük / $i,j = 1,2,\dots,n$ / és az f minta nekik megfelelő egységnyi négyzeteit pedig (i,j) -vel, akkor az f bináris minta definiciója:

$$f = \{(i,j) \mid f_{ij} = 1\}.$$

SZEGED

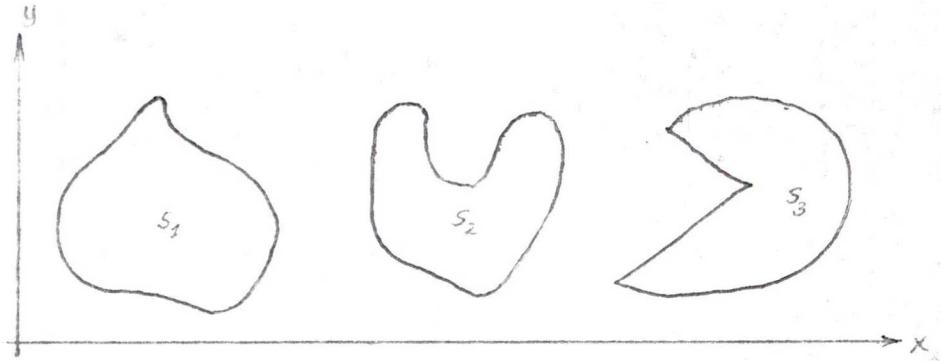
$\underline{F} =$

1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	0	0



3. Ábra. Az $\underline{F}$ bináris mátrix és az egyértelmü módon hozzárendelhető f bináris minta

Egy S sikidom x-irányú összefüggő, ha bárhogyan is húzunk az X tengellyel párhuzamos egyenest, amely metszi S -et, az ilyen egyenesnek a sikidommal közös része vagy csak egyetlen pont vagy csak egyetlen szakasz lesz /4. ábra/. Ugyanigy



4. Ábra. S_1 xy-összefüggő, S_2 nem x-irányú összefüggő, S_3 nem y-irányú összefüggő

definiálhatók az y-irányú összefüggő sikidomok. Egy sikidom pedig akkor kétirányú összefüggő, ha x- és y-irányú összefüggő is. Megjegyezzük, hogy a kétirányú összefüggés a konvexitásnál gyöngébb feltétel.

Ezek után fogalmazhatjuk meg pontosan a feladatot. Keresendő az az f bináris minta /ill. a hozzá tartozó $\underline{F}$ bináris mátrix/, amely kétirányú összefüggő, sorainak és oszlopainak az összege rendre a megadott $\underline{f}^{(x)}$ és $\underline{f}^{(y)}$ vektorok.

Az algoritmus leírásához még két további definicióra lesz szükségünk. Magnak nevezzük és C -vel jelöljük azt a halmazt, amely része a keresendő f -nek,

$$C \subseteq f.$$

Buroknak nevezzük azt a b halmazt, amelyről azt tudjuk, hogy rajta kivül nincs eleme f-nek, vagyis ez a halmaz tartalmazza f-et:

$$b \supseteq f.$$

Az algoritmus iterativ módon közelit az f-hez úgy, hogy egy kezdeti magot minden egyes lépésben bővit, egy kezdeti burkot pedig szükit. A k-dik lépésben kialakult magot c_k-val, a burkot pedig b_k-val fogjuk jelölni.

2.2 A kezdeti mag és a kezdeti burok meghatározása, valamint az iteráció során szükséges halmazok

Nyilvánvaló, hogy az f-nek nem lehet eleme az $\underline{f}^{(x)}$ és az $\underline{f}^{(y)}$ vektorok hossza által meghatározott T négyzeten kivül, ezért legyen

$$b_0 = T, \quad c_0 = \emptyset.$$

A c_1 halmaz konstruálásakor azt használjuk ki, hogy az f feltevés szerint kétirányú összefüggő. Ehhez szükségesek az alábbi halmazok

$$\underline{c}_x = \{(i,j) \mid j \le f_i^{(x)}, (i,j) \in T\},$$

$$\bar{c}_x = \{(i,j) \mid j \ge n - f_i^{(x)} + 1, (i,j) \in T\}$$

és legyen

$$c_x = \underline{c}_x \cap \bar{c}_x.$$

Igy c_x pontosan azokat a négyzeteket fogja tartalmazni, amelyek a feltételezett x-irányú összefüggés miatt biztosan részei f-nek mert $f_i^{(x)}$ számú négyzet az i-dik sorban x-irányi összefüggően csak úgy helyezkedhet el, ha ezek a négyzetek is köztük vannak. Ezért

(13) $$c_x \subseteq f.$$

Hasonló módon

$$c_y = \underline{c}_y \cap \bar{c}_y.$$

ahol

$$\underline{c}_y = \{(i,j) \mid i \le f_j^{(y)}, (i,j) \in T\},$$

$$\bar{c}_y = \{(i,j) \mid i \ge n - f_j^{(y)} + 1, (i,j) \in T\}.$$

Az y-irányú összefüggés feltétele miatt:

(14) $$c_y \subseteq f.$$

(13) és (14)-ből az következik, hogy /5c ábra/

$$c_1' = c_x \cup c_y \subseteq f.$$

Könnyü belátni a fenti definiciók alapján, hogy a $c_1' \neq \phi$ - hoz szükséges és elegendő feltétel, hogy vagy

$$\max_i \{f_i^{(x)}\} > [n/2]$$

vagy

$$\max_j \{f_j^{(y)}\} > [n/2]$$

teljesüljön. Ezek után két eset lehetséges:

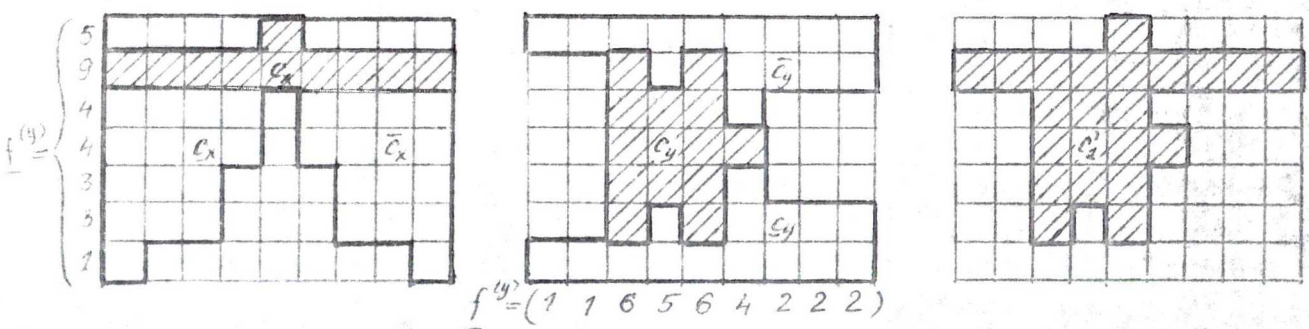
a/ ha $c_1' \neq \phi$, akkor legyen $c_1 = c_1'$.

b/ ha $c_1' = \phi$, akkor válasszunk ki egy tetszőleges $(i,j) \in$ $\in T$-t és legyen

$$c_1 = \{(i,j)\}.$$

/Később még visszatérünk a b/ esettel kapcsolatos problémákhoz./

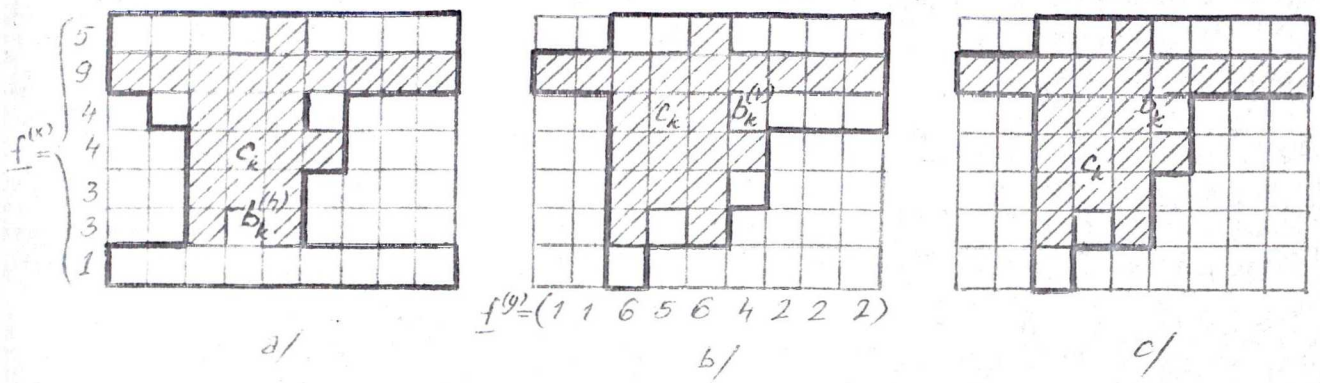
Az iterációs lépések közben a burok halmazok előállitásához még két másik halmaz lesz szükséges. Nevezzük vizszintes buroknak és jelöljük $b_k^{(h)}$-val azt a halmazt, amely a c_k



5. Ábra. a/ c_x előállitása $f^{(x)}$-ből; b/ c_y előállitása $f^{(y)}$-ból; c/ $c_1' = c_x \cup c_y$.

és az $f^{(x)}$ segitségével a következő módon készithető el /6a ábra/:

a/ ha a T i-dik sorában nincs eleme c_k-nak, akkor $b_k^{(h)}$-nak eleme lesz az i-dik sor minden egyes négyzete;



6. Ábra. a/ a vizszintes burok előállitása $\underline{f}^{(x)}$-ből és a magból; b/ a függőleges burok előállitása $\underline{f}^{(y)}$-ból és a magból; c/ a burok előállitása:

$$b_k = b_k^{(h)} \cap b_k^{(v)}.$$

b/ ha a $\top$ i-dik sorában a mag j_1-től j_2-ig tart / $j_1 \le j_2$ /, akkor a $b_k^{(h)}$ halmaz az i-dik sorból azokat az (i,j)-ket tartalmazza, amelyekre

$$j_2 - f_i^{(x)} + 1 \le j \le j_1 + f_i^{(x)} - 1.$$

Ha $c_k \subseteq f$, akkor $b_k^{(h)}$ pontosan azokból a négyzetekből fog felépülni, amelyeken kivül már nem lehet eleme f-nek az x-irányú összefüggés miatt. Tehát

(15) $$b_k^{(h)} \supseteq f.$$

Hasonlóan definiálható c_k és $\underline{f}^{(y)}$ segitségével a függőleges burok, jele: $b_k^{(v)}$, amire az y-irányú összefüggés miatt ugyancsak teljesül

(16) $$b_k^{(v)} \supseteq f,$$

ha $c_k \subseteq f$ volt /6b ábra/. A fent leirt két burok halmaz metszete lesz a k-dik lépésben kapott burok /6c ábra/:

$$b_k = b_k^{(h)} \cap b_k^{(v)}.$$

Ennek megfelelően az első iterációs lépésben előállitható b_1, amelyre $c_1 \subseteq f$ miatt teljesül $b_1 \supseteq f$.

2.3 Képzési esetek

Nézzük meg, hogy a k-dik lépésnél a bináris mintában az eddig kialakult helyzettől függően, hogyan lehet c_k-ból megkapni c_{k+1}-et és b_{k+1}-et. Ehhez tegyük fel azt, hogy

(17) $C_k \subset f$.

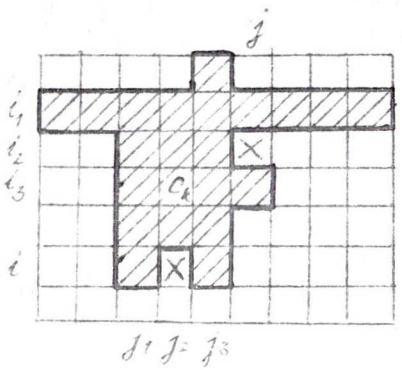
Az alábbiakban a mag bővitésére , illetőleg a burok szükitésére alkalmas lehetőségeket külön-külön megvizsgáljuk.

a/ A mag simitása

Előfordulhat, hogy a mag elemei a sorokban vagy az oszlopokban nem folytonosan követik egymást; vagyis ha van olyan i_1, i_2, i_3 sor T -ben / $1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n$ / és olyan j oszlop / $1 \le j \le n$ /, hogy

$$(i_1,j) \in C_k, \quad (i_2,j) \notin C_k, \quad (i_3,j) \in C_k,$$

akkor (17) és az f y-irányú összefüggés miatt $(i_2,j) \in f$. Ezért legyen $(i_2,j) \in C_{k+1}$ /7. ábra/.



7. Ábra. A mag simitása. Az x-irányú összefüggés miatt (i, j_2) eleme a magnak, az y-irányú összefüggés miatt (i_2, j) eleme a magnak.

Ha több ilyen lehetőség is van, akkor a C_{k+1} halmaz a C_k -ból az összes igy kijelölt elem hozzávételével állítható elő /7. ábra/. Utána a C_{k+1} -ből a 2.2-ben megadott definiciók alapján elkészithető $b_{k+1}^{(h)}$ és $b_{k+1}^{(v)}$ valamint ezekből b_{k+1} is. Nyilvánvaló, hogy

(18) $$C_k \subset C_{k+1} \quad \text{és} \quad b_k \supseteq b_{k+1},$$

mert az új elemek miatt $b_k^{(h)} \supset b_{k+1}^{(h)}$ vagy $b_k^{(v)} \supset b_{k+1}^{(v)}$, és

(19) $$C_{k+1} \subseteq f.$$

b/ A burkok simitása

Lehetséges, hogy a vizszintes vagy a függőleges burok "hullámzó" határvonalai miatt bővithető a mag halmaz: ha van olyan i_1, i_2, i_3 sor T -ben, ahol i_2 az i_1 és az i_3 sorok

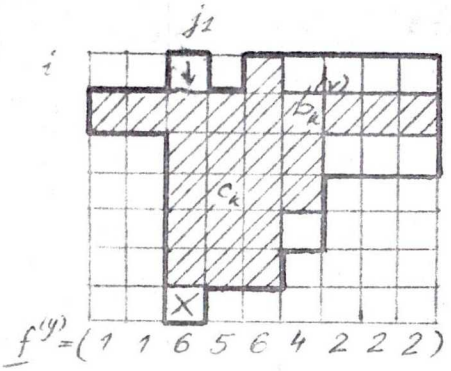
között van, továbbá van olyan j oszlop, hogy

$$(i_1,j)\in c_k\,,\quad (i_2,j)\notin b_k^{(h)}\,,\quad (i_3,j)\in b_k^{(h)}\,,$$

akkor a (15) és az f y-irányú összefüggése miatt $(i_3,j)\notin f$. Ezért legyen

$$(i_3,j)\notin b_{k+1}^{(h)}\,,$$

vagyis szükitsük a burkot /8. ábra/. Ennek az lehet a további következménye, hogy ha az i_3 sorban már van eleme a mag halmaznak, akkor a sor másik oldalán annyi elemet lehet még a maghoz hozzátenni, amennyivel ezen az oldalon a vizszintes burok csökkent.



8. Ábra. A függőleges burok simitása. Az x-irányú összefüggés miatt (i,j_1) nem lehet eleme az f -nek, ezért $(i,j_1)\notin b_k^{(v)}$, amiből következik, hogy a j_1 oszlop alsó végén álló elemmel nő a mag.

Hasonló módon: ha

$$(i,j_1)\in c_k\,,\quad (i,j_2)\notin b_k^{(v)}\,,\quad (i,j_3)\in b_k^{(v)}\,,$$

akkor $(i,j_3)\notin f$ és ezért legyen

$$(i,j)\notin b_{k+1}^{(v)}$$

és esetleg ezzel is növelhető a j_3 oszlopban a mag. Ennél a képzési esetnél is igaz, hogy

(20) $$c_k\subset c_{k+1}\,,\quad b_k\supseteq b_{k+1}\ \text{és}$$

(21) $$c_{k+1}\subseteq f.$$

c/ A burkok összehasonlitása

A két burok halmaz egymáshoz való viszonyából is származhat új mag-elem: ha van olyan i és j , hogy

$$(i,j)\in b_k^{(h)}\quad\text{és}\quad (i,j)\notin b_k^{(v)}\,,$$

akkor (15) szerint $(i,j) \notin f$. Ezért legyen

$$(i,j) \notin b_{k+1}^{(h)},$$

aminek ugyanúgy, mint a b/ esetben az lehet a következménye, hogy az i -dik sorban a másik oldalon bővül a mag halmaza.

Hasonló módon, ha

$$(i,j) \notin b_k^{(h)} \quad \text{és} \quad (i,j) \in b_k^{(v)},$$

akkor legyen

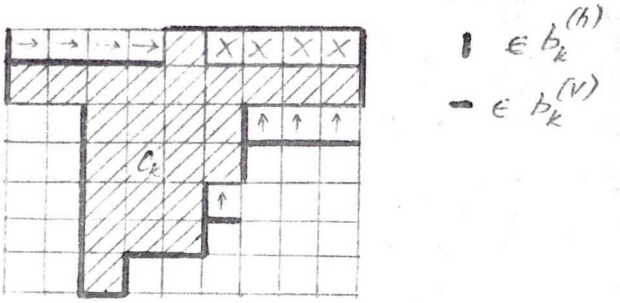
$$(i,j) \notin b_{k+1}^{(v)}.$$

Most is

(22) $$c_k \subset c_{k+1}, \quad b_k \supseteq b_{k+1}$$

/9. ábra/ és

(23) $$c_{k+1} \subseteq f.$$



9. Ábra. A burkok összehasonlitása. A nyillal jelölt elemek nem elemei f -nek, amiből az következik, hogy bővül a mag

d/ Próbálgatás

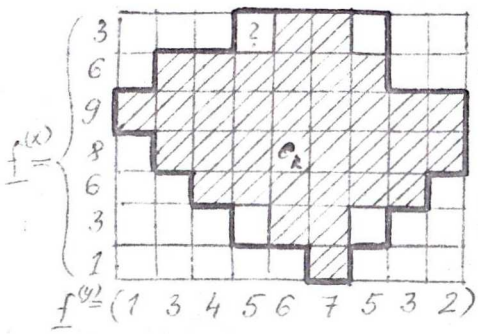
Ha az előbbi képzési esetek egyike sem adna új mag elemet, akkor válasszuk ki a buroknak egy olyan (i,j) elemét, amely még nem része a magnak. Legyen

$$(i,j) \in b_k \setminus c_k, \quad c_{k+1} = c_k \cup \{(i,j)\}.$$

Igy folytassuk tovább az eljárást. Most is

(24) $$c_k \subset c_{k+1}, \quad b_k \supseteq b_{k+1}$$

/10. ábra/.



10. Ábra. Az előző képzési esetek egyike sem tud új magelemet adni, ezért tegyük fel, hogy a ?-es elem része a magnak

2.4 Az algoritmus

Az algoritmus leirásához szükség lesz még egy S veremmemóriára, amelyben olyan helyzetekről tárolunk információkat, amikor nem lehet az algoritmust egyértelmü módon tovább folytatni. S -ben egy-egy elem a következő részekből fog állni:

c_k : az a mag halmaz, amit a k -dik iteráció folyamán az a/, b/ és a c/ képzési esetek egyikével sem lehetett bőviteni;

$t(i,j)$: az az elem T -ből, amit ebben a helyzetben kiválasztottunk + vagy - előjellel ellátva attól függően, hogy (i,j) -ről azt tételeztük fel, hogy eleme f -nek vagy nem eleme f -nek.

1. lépés: $k := 0$; S üres;
Ha $\max_i \{f_i^{(x)}\}$ és $\max_j \{f_j^{(y)}\} \leq \lceil n/2 \rceil$, akkor ugrás az 5. lépésre, különben
$$c_1 := c_1'.$$

2. lépés: $k = k+1$;
Ha az a/ képzési esettel a c_k halmaz bővithető, akkor legyen az igy bővitett halmaz c_{k+1} és legyen $k = k+1$;
készitsük el c_k -ból $b_k^{(h)}$ -t, $b_k^{(v)}$ -t és b_k -t.

3. lépés: Ha $c_k \subset b_k$, akkor ugrás a 4. lépésre;
ha $c_k = b_k$, akkor c_k olyan halmaz, aminek megfelelő F bináris mátrix vetületei éppen a megadott $f^{(x)}$ és $f^{(y)}$, utána ugrás a 6. lépésre
ha $c_k \not\subset b_k$, akkor ellentmondásra jutottunk, ezért ugrás a 6. lépésre.

4. lépés: Ha a b/ vagy a c/ képzési esettel /esetleg mind a kettővel/ c_k bővithető, akkor legyen az igy kibővitett halmaz c_{k+1} és utána ugrás a 2. lépésre;
ha c_k igy nem bővithető, akkor ugrás az 5. lépésre.

5. lépés: Próbálgatással olyan (i,j)-t válasszunk a $b_k - c_k$ halmazból, ami nincs benne S-ben és legyen $c_{k+1} := c_k + \{(i,j)\}$, egyúttal tároljuk el S-ben c_k-t $+(i,j)$-vel, utána ugrás a 2. lépésre;
ha nincs ilyen elem $b_k \setminus c_k$-ban, akkor ugrás a 6. lépésre.

6. lépés: Sorra vegyük ki és hagyjuk el a - előjelü (i,j)-ket S-ből /ha egyáltalán van ilyen/, addig, amig $+(i,j)$ elemet nem találunk;
ha S-ben már nincs elem, akkor STOP;
ha $+(i,j)$ a legfelső + előjelü elem a veremben, akkor legyen $c_{k+1} := c_k$, ahol c_k, az $+(i,j)$-hez tartozó mag halmaz volt S-ben, és egyúttal változtassuk meg $+(i,j)$ előjelét S-ben $-(i,j)$-re;
utána ugrás az 5. lépésre.

3. Az algoritmus helyességének a bizonyitása

A 2.4 pontban leirt algoritmussal halmazok két sorozatát kapjuk:

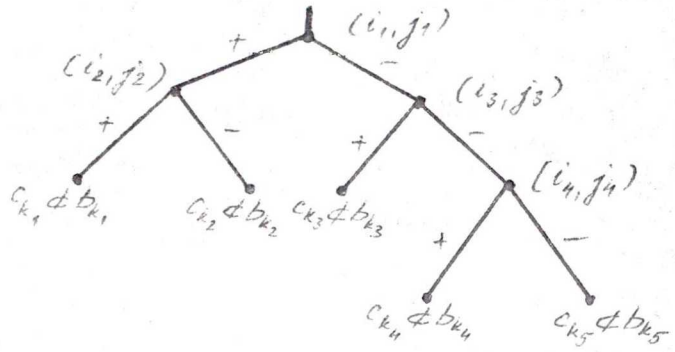
$$c_0, c_1, c_2, \dots$$
$$b_0, b_1, b_2, \dots \tag{25}$$

Az egyes iterációk közben

$$c_k \subset c_{k+1}, \quad b_k \supseteq b_{k+1}$$

mindaddig, amig az algoritmus 3. lépésében leirt $c_k \not\subset b_k$ tel-

jesül /ez biztosan bekövetkezik véges sok lépés után a sorozatok monotonitása, korlátossága / $\emptyset \subseteq c_k, b_k \subseteq T$ / és a T halmaz végessége miatt/. Ez a helyzet egyúttal az algoritmus befejezését jelentheti, ha közben S -be nem került egyetlen elem sem, vagyis nem használtuk a próbálgatás képzési esetét. Ha mégis kellett használni ezt az esetet /esetleg többször is/, akkor az algoritmus végrehajtása közben bekövetkezett változásokat egy bináris fával szemléltethetjük /11. ábra/. Ennek



11. Ábra. Az algoritmussal bejárt bináris fa

a bináris fának az elágazásai jelzik azokat a pontokat, ahol az algoritmust az 5. lépésnek megfelelően két irányba folytathatjuk, attól függően, hogy egy (i,j) elemet hozzávesszünk-e a maghoz vagy pedig kizárjuk abból. A fa levelei pedig a $c_k = b_k$ vagy $c_k \not\subset b_k$ állapotok bekövetkezéseit jelzik. Az algoritmussal ezt a fát járjuk be. Mivel S -be ugyanaz az (i,j) elem többszörösen nem kerülhet be /5, lépés/ és csak véges sok elemünk van, ezért az algoritmus véges sok iterációs lépés után befejeződik.

A következő tétel segitségével belátható, hogy az algoritmussal minden olyan f kétirányú összefüggő bináris minta előállitható, amihez tartozó $\underline{F}$ bináris mátrixnak a vetületei $\underline{f}^{(x)}$ és $\underline{f}^{(y)}$.

1. Tétel: Legyen f kétirányú összefüggő bináris minta, aminek a vetületei $\underline{f}^{(x)}$ és $\underline{f}^{(y)}$. Akkor a 2.4 pontban leirt algoritmushoz lesz olyan M pozitiv egész szám, hogy (25)-ben

$$c_M = f = b_M.$$

A tétel bizonyitásához szükségünk lesz a következő lemmára:

Lemma: Az iterációs lépések közben $c_k \subseteq f$ akkor és csak akkor ha $f \subseteq b_k$.

Bizonyitás: Tegyük fel, hogy $c_k \subseteq f$, akkor a viszzintes burok és a függőleges burok definiciójából (15) és (16) alapján:

$$b_k^{(h)} \supseteq f \quad , \quad b_k^{(v)} \supseteq f,$$

amiből következik, hogy

$$b_k^{(h)} \cap b_k^{(v)} = b_k \supseteq f.$$

Az elegendőség igazolásához tegyük fel, hogy $c_k \not\subseteq f$, akkor van olyan $(i,j) \in c_k$, hogy $(i,j) \notin f$. Ha az i-dik sorban f j_1-től j_2-ig tart / $j_1 \leq j_2$ és $j_2 - j_1 + 1 = f_i^{(x)}$ / és $j > j_2$, akkor a vizszintes burok definiciója szerint $b_k^{(h)}$ ebben a sorban csak $j - f_i^{(x)} + 1$-ig tart, de igy

$$j - f_i^{(x)} + 1 = j - (j_2 - j_1 + 1) + 1 > j_2 - j_2 + j_1 - 1 + 1 = j_1,$$

vagyis $(i,j_1) \notin b_k^{(h)}$, de $(i,j_1) \in f$, amiből $b_k \not\supseteq f$ következik.

Ezek után a tétel bizonyitása:

Bizonyitás: Kezdéskor

$$\phi = c_0 \subseteq f \subseteq b_0 = T.$$

Mind a négy képzési esetre teljesül (18), (20), (22), (24)-ből, hogy

$$c_k \subset c_{k+1} \quad \text{és} \quad b_k \supseteq b_{k+1}.$$

Továbbá az a/, b/, és a c/ képzési esetekre még

$$c_{k+1} \subseteq f$$

is igaz, ha $c_k \subset f$ volt. A d/ képzési eset használatával ez nem fog minden k-ra teljesülni. De mivel tudjuk, hogy létezik $\underline{f}^{(x)}$-hez és $\underline{f}^{(y)}$-hoz megfelelő f, ezért ilyenkor a két lehetőség közül / $(i,j) \in f$ és $(i,j) \notin f$ / az egyik helyesnek bizonyul és ezen helyes döntés után $c_{k+1} \subseteq f$ is érvényes marad. Ha rossz lehetőséget választottunk, akkor innentől kezdve hagyjunk el minden tagot a sorozatból, amig az algoritmusban vissza térünk ismét ehhez a döntési helyhez és a sorozatot innen folytassuk. Igy az eredeti, végeu sorozatból egy másik, rész-sorozatot kapunk:

(26) $$\phi = c_{\ell_1}, c_{\ell_2}, \ldots, c_{\ell_N}$$
$$T = b_{\ell_1}, b_{\ell_2}, \ldots, b_{\ell_N}.$$

(26)-ban mindig teljesülnek a

(27) $$c_{\ell_i} \subset c_{\ell_{i+1}}, \quad b_{\ell_i} \supseteq b_{\ell_{i+1}}$$

és

(28) $$c_{\ell_i} \subseteq f$$

feltételek. (28)-ból a lemma segitségével következik, hogy

(29) $$b_{\ell_i} \supseteq f.$$

(27), (28) és (29)-ből

(30) $$\phi = c_{\ell_1} \subset c_{\ell_2} \subset \ldots \subset c_{\ell_N} \subseteq f \subseteq b_{\ell_N} \subseteq \ldots \subseteq b_{\ell_1} = T.$$

Ugyanakkor azt is tudjuk, hogy a (26) sorozat csak olyan ℓ_N-nél fejeződhet be, amikor vagy $c_{\ell_N} = b_{\ell_N}$ vagy $c_{\ell_N} \not\subseteq b_{\ell_N}$ teljesült. Most azonban (30) miatt csak az előbbi lehetséges, igy

$$c_{\ell_N} = f = b_{\ell_N}.$$

Következmények:

1. Ha f' / $f' \neq f$ / kétirányú összefüggő bináris minta és a hozzá tartozó vetületek $\underline{f}^{(x)}$ és $\underline{f}^{(y)}$, akkor f' is előáll az algoritmussal. A (26) sorozattól csak egy olyan ponttól kezdve fog eltérni, amikor éppen a próbálgatás másik lehetősége lesz a helyes f'-nél, ezért más indexre fog teljesülni:

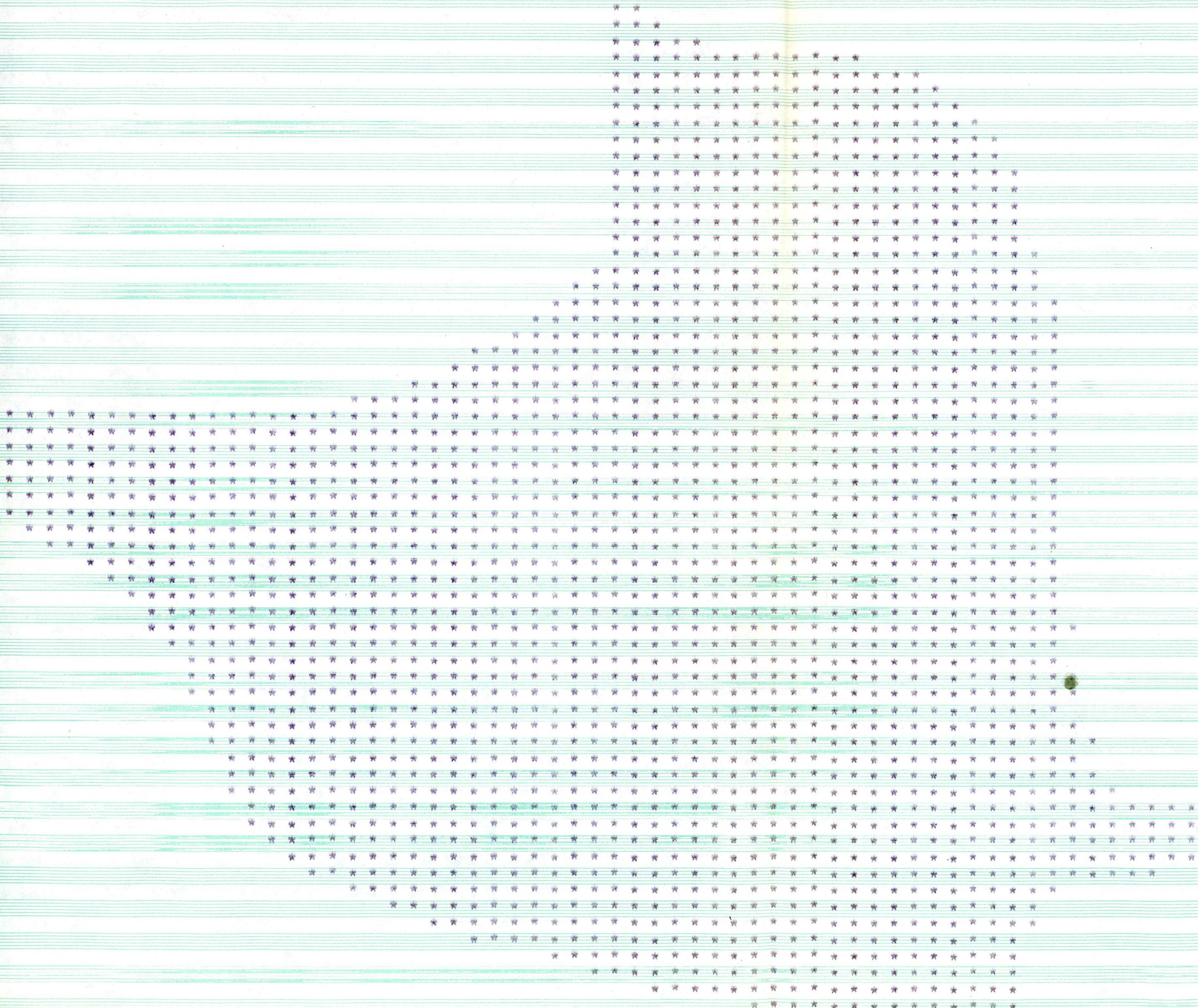
$$c_{\ell'_{N'}} = f' = b_{\ell'_{N'}}.$$

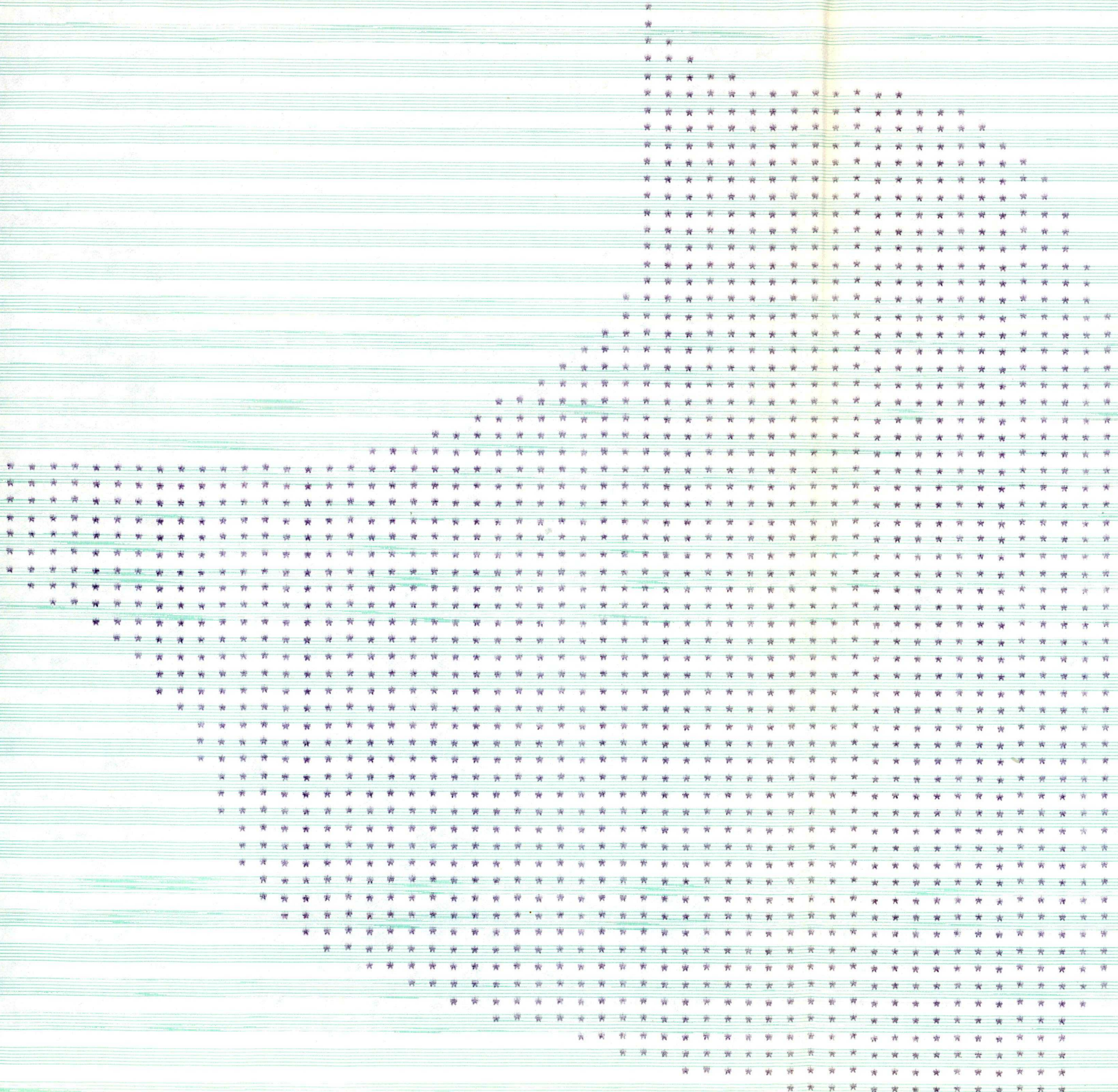
2. Nyilvánvaló, hogy egy c_k akkor és csak akkor lesz $\underline{f}^{(x)}$-nek és $\underline{f}^{(y)}$-nak megfelelő halmaz, ha rá $c_k = b_k$ teljesül. Ugyanis, ha $c_k = b_k$, akkor az azt fogja jelenteni, hogy minden sorban és minden oszlopban éppen $\underline{f}^{(x)}$-nek és $\underline{f}^{(y)}$-nak megfelelő számú elem van c_k-ban. Ezért az algoritmus által szolgáltatott összes megoldás olyan bináris mintákat szolgáltat, amelyek vetületei rendre $\underline{f}^{(x)}$ és $\underline{f}^{(y)}$.

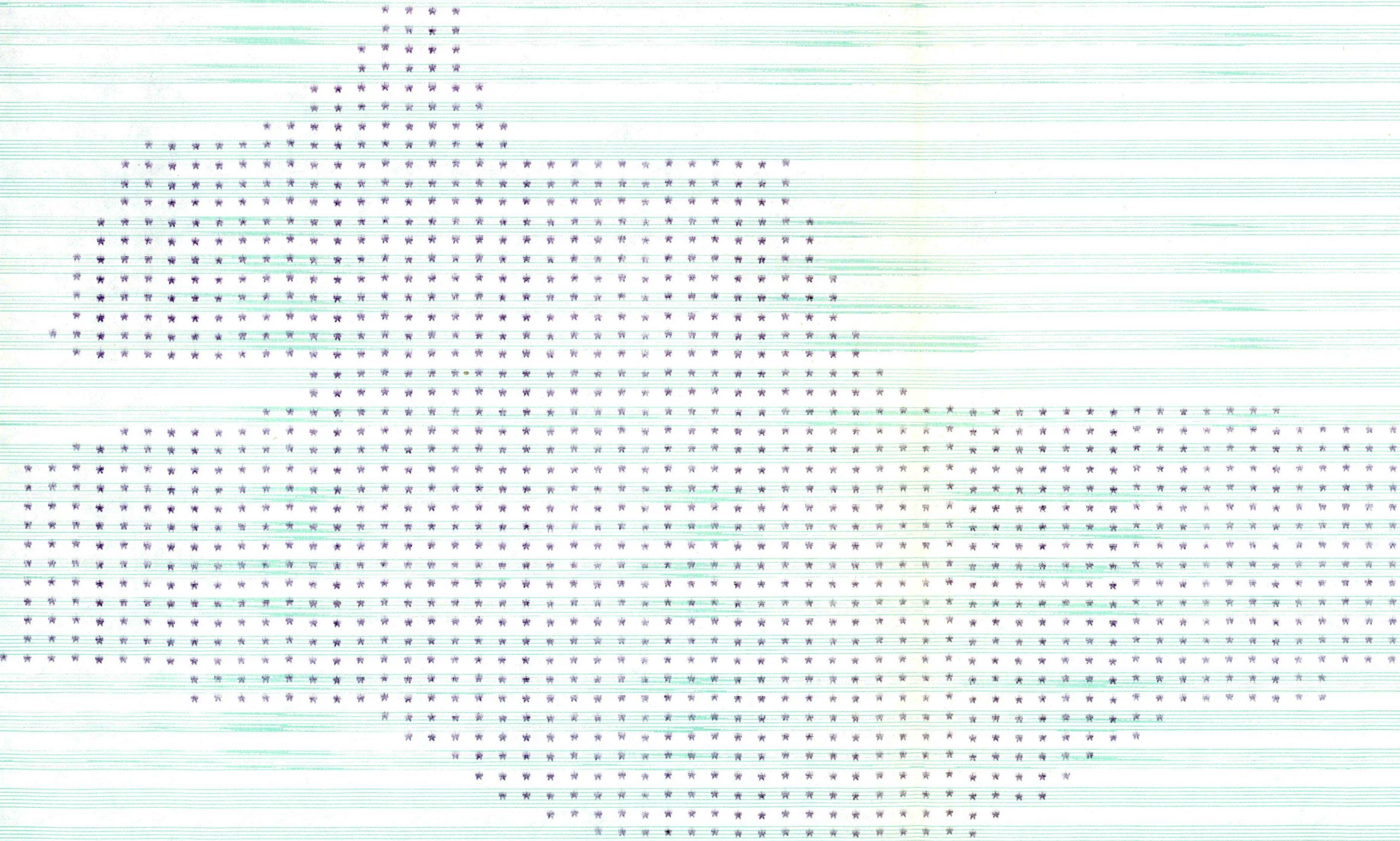
4. Implementáció és illusztrációk

A kétirányú összefüggő bináris minták rekonstrukciójára szolgáló algoritmus egyik leglényegesebb tulajdonsága, hogy

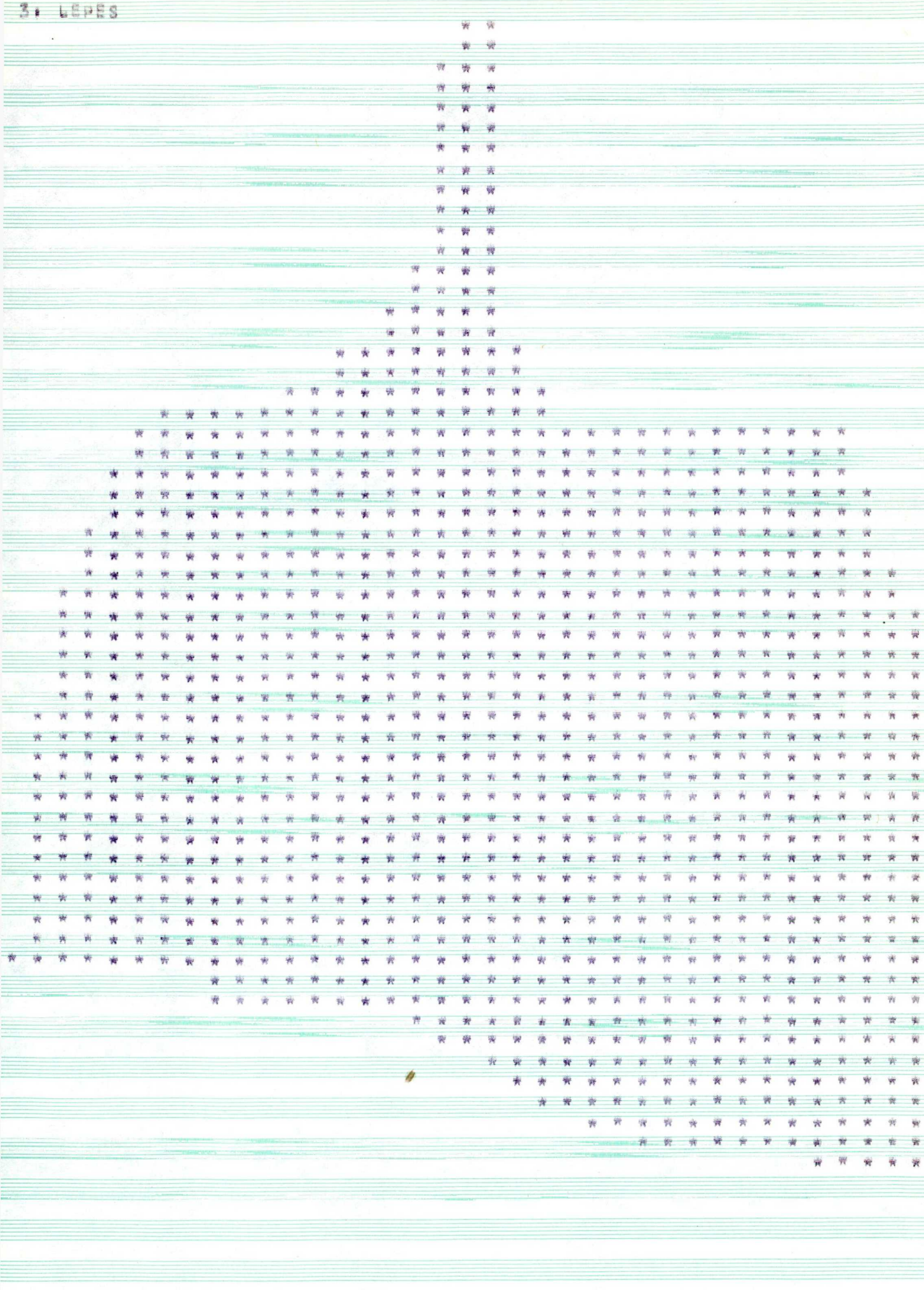
1. LÉPÉS



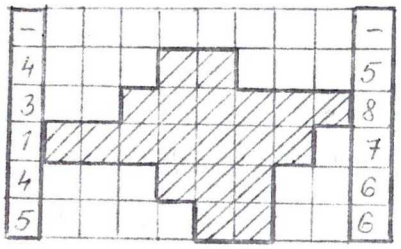




3. LEPES



nincs szükség a memóriában egy teljes $n \times n$ -es bináris mátrixnak helyet foglalnunk. Ugyanis a kétirányú összefüggés feltételét kielégitő bináris minták egyértelmü módon jellemezhetők két vektorral /12. ábra/. Ez a két vektor azt mutatja meg, hogy az f minta egyes soraiban hol kezdődnek és hol érnek véget a halmaz elemei. Ez az észrevétel azért fontos, mert az ismertetett képzési esetek mindegyike elvégezhető ezeken a vektorokon, anélkül, hogy a teljes mátrixot használnánk. Például a mag simi-



12. Ábra. Az xy-összefüggő bináris mintát egyértelmü módon meghatározó két vektor. A bal oldali vektor a sorok bal végének indexeit tartalmazza, a jobb oldali vektor a jobb végek indexeit

tása azt fogja jelenteni, hogy a c -t jelölő vektorok közül az egyiknek csak egyetlen helyi minimuma lehet, a másik vektornak pedig csak egyetlen helyi maximuma.

A 2.4 pontban bemutatott algoritmus egy leegyszerüsitett változatának elkészült a FORTRAN nyelvü implementációja. Ez a változat nem tartalmazza az 5. és a 6. lépéseket, ezért olyan bináris minták rekonstrukciójára alkalmas, amelyek az a/, b/ és a c/ képzési esetekkel előállithatók. Ilyen eredmények láthatók a mellékelt illusztráción, bemutatva az egyes iterációs ciklusok végén kialakult képeket.

5. Két vetületnek megfelelő bináris mátrix létezésének szükséges és elégséges feltételei

A következőkben azt vizsgáljuk meg, mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy a megadott két vetülethez létezzen

megfelelő bináris mátrix, illetve, hogy az egyértelmü is legyen, vagyis ne lehessen találni másik olyan bináris mátrixot, aminek ugyanezek a vetületei.

Ezzel kapcsolatban CHANG bizonyitotta [40,42]:
Egy bináris mátrix egyértelmüségéhez szükséges és elegendő, hogy ne tartalmazzon un. áthelyezhető komponenst.
Definició: Egy bináris mátrix áthelyezhető komponenst tartalmaz, ha található benne ilyen rész-mátrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ vagy } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

/Rész-mátrixnak tekintve azt is, ha nem két szomszédos sorból és oszlopból választjuk ki a rész-mátrixot./

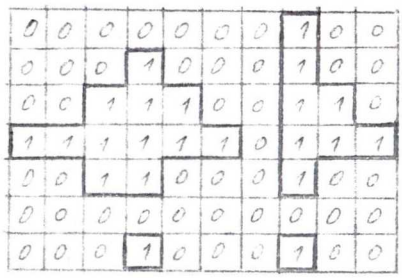
WANG [42,41] olyan feltételt adott meg, amely már a vetületekből választ tud adni mindkét kérdésre, tehát anélkül, hogy a mátrixot ismernénk:
Készitsük el az $\underline{f}^{(x)}$ vetületi vektorhoz azt a bináris mátrixot, aminek az i-dik sorában $f_i^{(x)}$ darab 1-es áll a bal oldalon tömöritve és jelöljük az igy kapott bináris mátrix y-irányú vetületét $\underline{f}^{*(y)}$ -nal. Majd rendezzük az eredeti $\underline{f}^{(y)}$ vektor elemeit nagyság szerint csökkenő sorrendbe: $f_1'^{(y)}$, $f_2'^{(y)}$, ..., $f_n'^{(y)}$.
Vizsgáljuk a következő összegeket: $\sum_{i=1}^{k} f_i^{*(y)}$ és $\sum_{i=1}^{k} f_i'^{(y)}$ / $k = 1, 2$, ..., n /.

a/ Egy bináris mátrix akkor és csak akkor egyértelmü, ha
$$\sum_{i=1}^{k} f_i^{*(y)} = \sum_{i=1}^{k} f_i'^{(y)} \quad \text{minden } k\text{-ra.}$$
b/ Akkor és csak akkor létezik bináris mátrix a megadott két vetülethez, ha $\sum_{i=1}^{k} f_i^{*(y)} \geq \sum_{i=1}^{k} f_i'^{(y)}$ minden k-ra.
c/ Akkor és csak akkor nem létezik avetületekhez megfelelő bináris mátrix, ha egyetlen k-ra is $\sum_{i=1}^{k} f_i^{*(y)} < \sum_{i=1}^{k} f_i'^{(y)}$. .

Először a Chang-féle feltételhez keresünk egy vele ekvivalens állitást, amit aztán többször is fel fogunk használni a későbbiekben.
Definició: Egy bináris mátrix soraiban az 1-esek piramis-szerü elrendeződést mutatnak, ha a kevesebb 1-est tartalmazó sorok 1-esei a több 1-est tartalmazó sorok 1-eseinek az oszlopaiban ta-

lálhatók; és az azonos számú *1*-est tartalmazó sorokban az *1*-esek ugyanazokban az oszlopokban állnak /13. ábra/.

Megjegyzés: A "piramis-szerü" elnevezést az indokolja, hogy ha egy ilyen mátrix sorait a bennük levő *1*-ek száma szerint növekvő sorba rendezzük, akkor az *1*-ek piramis-szerü formát adnak.



13. Ábra. Piramis-szerü elrendeződést mutató bináris mátrix

Továbbá, egyszerüen belátható, pl. indirekt módon, hogy az x- és y-irányú összefüggő mátrix piramis-szerü elrendeződésü is. A megforditás természetesen nem igaz.

2. Tétel: Egy bináris mátrix akkor és csak akkor nem tartalmaz áthelyezhető komponenst, /tehát egyértelmü/ ha sorai piramis-szerü elrendeződést mutatnak.

Bizonyitás: Először tegyük fel, hogy az *1*-esek a mátrix soraiban nem mutatnak piramis-szerü elrendeződést. Akkor van olyan i_1 sor, amely több, vagy ugyanannyi *1*-est tartalmaz, mint egy i_2 sor, és mégis van olyan j_1 oszlop, hogy $f_{i_1 j_1} = 0$ és $f_{i_2 j_1} = 1$. Mivel i_1-ben több, vagy legalább ugyanannyi *1*-es van, mint i_2-ben, ezért kell lennie olyan j_2-nek is, hogy $f_{i_1 j_2} = 1$, $f_{i_2 j_1} = 0$. Ez viszont pont azt jelenti, hogy a mátrixban van áthelyezhető komponens:

$$\begin{pmatrix} f_{i_1 j_1} = 0 & f_{i_1 j_2} = 1 \\ f_{i_2 j_1} = 1 & f_{i_2 j_2} = 0 \end{pmatrix}.$$

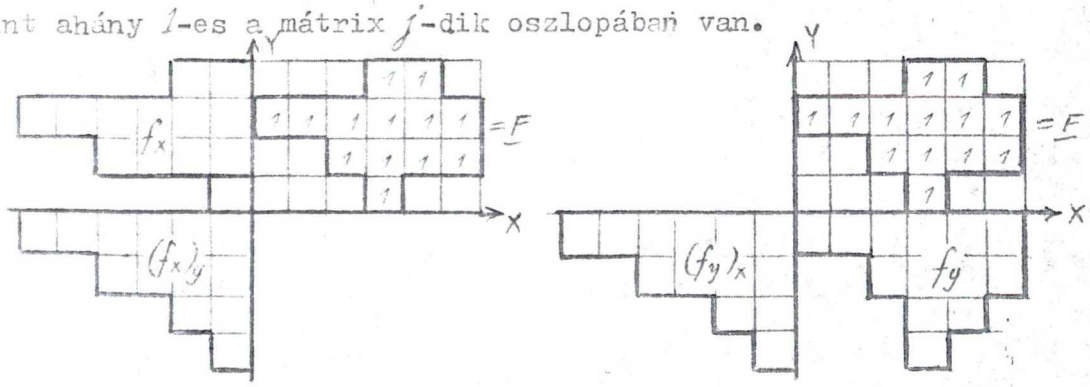
Most tegyük fel, hogy a mátrixban van áthelyezhető komponens és mégis piramis-szerü a mátrix sorainak az elrendeződése.

Ebből az következik, hogy a két sor közül egyik sem tartalmazhat több, vagy azonos számú *1*-est, mint a másik /hiszen egyik sorban sem állnak az *1*-esek a másik sor *1*-eseivel azonos oszlopokban/, ami viszont lehetetlenség.

Ha a bináris mátrix oszlopaira mondjuk ki a piramis-szerü elrendeződés definicióját, akkor a tételt oszlopokra is be tudjuk bizonyitani ugyanilyen módon. Ebből mostmár az adódik, hogy ha egy mátrix sorai piramis-szerü elrendeződést mutatnak, akkor oszlopai is; és forditva.

Emlitettük, hogy módunk van a bináris mátrix unicitásának a kérdését a mátrix tényleges ismerete nélkül, csupán két vetülete alapján eldönteni /Wang-féle feltétel/. A gyakorlatban ennek a segitségével a legkönnyebb az unicitás kérdésére válaszolni. Most egy olyan feltételt mutatunk, amely szintén a vetületek alapján dönti el, hogy a megadott bináris mátrix egyértelmü-e, de ezen kivül szemléletes jelentését is adja a Wang-féle feltételben szereplő összegeknek.

Definició: Egy bináris mátrix x-irányú vetületi alakzatának nevezzük /jele: f_x / azt az egységnyi négyzetekből álló alakzatot, amelynek az i-dik sora annyi négyzetet tartalmaz az Y tengelyhez tömöritve, mint ahány *1* -es a mátrix i-dik oszlopában van /14. ábra/ - a vetületi alakzat lényegében megfelel a korábbi vetület fogalomnak. Ugyanigy, az y-irányú vetületi alakzat, f_y j-dik oszlopa annyi négyzetet tartalmaz az X tengelyhez tömöritve, mint ahány *1*-es a mátrix j-dik oszlopában van.



14. Ábra. Az x- és y-irányú vetületi alakzatok és azok további vetitése

SZEGED

Ezek után f_x y-irányú vetülete, $(f_x)_y$ értelemszerüen állitható elő a definició alapján, mint ahogy $(f_y)_x$ az f_y -ból, mint x-irányú vetület.

3. Tétel: Az f_x és az f_y vetületi alakzatokhoz tartozó bináris mátrix akkor és csak akkor egyértelmü, ha

$$(f_x)_y = (f_y)_x .$$

Bizonyitás: Tegyük fel, hogy a megadott bináris mátrix egyértelmü. Akkor nem tartalmazhat áthelyezhető komponenst. Miután ez a feltétel a korábbi tétel szerint a sorok piramis-szerü elrendeződését fogja jelenteni, ezért a mátrix y-irányú vetülete egyszerüen a mátrix sorainak a nagyság szerinti rendezését fogja jelenteni. Vagyis az f_y vetület pont a mátrix soraiból áll. Ha most f_y-t még x-irányba is vetitjük, akkor csupán az történik, hogy a sorok az Y tengely irányában tömörülnek.

Az előző gondolatmenethez hasonlóan belátható, hogy a mátrix sorainak y-irányú tömörítését fogja jelenteni f_x, $(f_x)_y$ pedig f_x sorainak rendezését jelenti, vagyis $(f_y)_x$ és $(f_x)_y$ is a tömöritett sorok nagyság szerinti rendezését adják meg mindketten. Ezért $(f_x)_y = (f_y)_x$.

Az elegendőség igazolásához tegyük fel, hogy a megadott két vetületre $(f_x)_y = (f_y)_x$ teljesül; akkor f_x ugyanolyan számú négyzetet tartalmazó sorokból áll, mint f_y , legföljebb f_x -ben azok más sorrendben következnek, mint f_y -ban. Akkor egyértelmü módon tudunk konstruálni egy bináris mátrixot, aminek a vetületi halmazai f_x és f_y . Oly módon, hogy az i -dik sorban annyi 1-est helyezünk el, amennyi négyzetet az f_x i-dik sora tartalmaz és ezeket a négyzeteket azokba az oszlopokba helyezzük, ahol f_y -nak az ugyanilyen számú négyzetből álló sorai vannak. Az igy kapott mátrix f_y -tól csak a sorok sorrendjében különbözik. Mivel f_y a korábbi definiciók alapján könnyen belátható módon piramis-szerü elrendeződést mutat, ezért az, mint bináris mátrix, egyértelmü, ezen az egyértelmüségen pedig a sorok permutációja nem változtat, tehát az előállitott bináris mátrix egyértelmü.

Egyszerűen belátható, hogy a Wang-féle feltételben megadott $\sum_{i=1}^{k} f_i^{*(y)}$ összegeknek $(f_x)_y$, a $\sum_{i=1}^{k} f_i^{(y)}$ összegeknek pedig $(f_y)_x$ felel meg.

Megjegyzés: Nem nehéz azt sem bebizonyitani, hogy f_x -hez és f_y -hoz akkor és csak akkor létezik kétirányú összefüggő bináris mátrix /ami egyuttal egyértelmü is/, ha f_x y-irányú összefüggő, f_y x-irányú összefüggő és teljesül $(f_x)_y = (f_y)_x$ is.

III; MINIMÁLIS TERJEDELMŰ MÁTRIXOK

1. A probléma ismertetése

Térjünk át az inhomogén rekonstrukció témakörére, ahol tehát a keresendő mátrix elemei tetszőleges nem-negativ számok lehetnek. Adott két vetülethez, $\underline{f}^{(x)}$ -hez és $\underline{f}^{(y)}$ -hoz mindig létezik ilyen mátrix /ennek konstruktiv igazolására szolgál a IV. fejezet első algoritmusa/. Könnyü bizonyitani, hogy ha n , $m \geq 2$, akkor végtelen sok, nem-negativ elemekből álló mátrix felelhet meg a két vetületnek. Ehhez kell a következő definició:

Definició: Nevezzük négyes-cserének azt a müveletet, amikor egy mátrix két-két különböző sorának / $i_1 \neq i_2$ / és oszlopának / $j_1 \neq j_2$ / a találkozásában álló elemeket igy változtatjuk:

$$\begin{pmatrix} f_{i_1 j_1} & f_{i_1 j_2} \\ f_{i_2 j_1} & f_{i_2 j_2} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{csere}]{\text{négyes-}} \begin{pmatrix} f_{i_1 j_1} - x & f_{i_1 j_2} + x \\ f_{i_2 j_1} + x & f_{i_2 j_2} - x \end{pmatrix}$$

ahol x tetszőleges pozitiv szám lehet.

Nyilvánvaló, hogy a négyes-csere úgy módositja a mátrix elemeit, hogy közben a sor és oszlop összegek változatlanul maradnak. Vagyis ha egy megfelelő mátrixunk már van, akkor mindössze arra kell vigyázni, hogy a müvelet előtti nem-negativ mátrix elemek továbbra is nem-negativ értéküek maradjanak. Ami azáltal érhető el, ha az x a kiválasztott rész-mátrix főátlójában álló kisebbik elemnél sem nagyobb - ekkor $f_{i_1 j_1} - x$ és $f_{i_2 j_2} - x$ is nem-negativ marad. Ilyen rész-mátrix mindig van, ha $\underline{f}^{(x)}$ -ben és $\underline{f}^{(y)}$ -ban is legalább 2-2 elem pozitiv. Vagyis egyetlen ilyen rész-mátrixban az változtatásával végtelen sok mátrix állitható elő. Ezzel igazoltuk, hogy ha $n, m \geq 2$, akkor végtelen sok, $\underline{f}^{(x)}$ -nek és $\underline{f}^{(y)}$ -nak megfelelő, nem-negativ értékekből álló mátrix létezik.

Az utóbbi gondolatsor alapján világos, hogy a homogén rekonstrukcióval szemben itt a két vetületnek megfelelő mátrix létezése mindig biztositott, de az unicitásról általában szó

sem lehet /néhány elfajult esetet kivéve, pl. $n=1$ vagy $m=1$ /. Ez azzal is magyarázható, hogy ha a feladatot mint lineáris egyenletrendszert akarjuk megoldani, akkor egy határozatlan rendszerrel kerülünk szembe, mert ha $n, m \geq 2$, akkor

az ismeretlenek száma: $n \cdot m$ > a felirható független egyenletek száma: $n + m - 1$

Két lehetőség közül választhatunk ahhoz, hogy a megoldások számát gyakorlatilag is elfogadható véges szintre csökkentsük:

a/ Több vetületet veszünk a már meglévő $f^{(x)}$ -hez és $f^{(y)}$ -hoz úgy, ahogy azt az I. fejezetben emlitett valamennyi inhomogén rekonstrukciós algoritmus igényli is.

b/ A keresendő mátrixnak ismerjük valamilyen tulajdonságát és azt ki is használjuk a rekonstrukció közben.

Az a/ lehetőség - bár nem igényli a tárgy előzetes vizsgálatát -, de nagyon költséges algoritmusokat kiván és alkalmazásuk technikailag is komoly problémát jelent. A b/ változat mellett az szól, hogy általában nem teljesen ismeretlenek a rekonstruálandó képek. Például egy izotóppal készitett vizsgálati felvételen nem fordulhat elő, hogy amátrix két szomszédos eleme nagyon nagy különbséget mutasson.

A b/ változat legfontosabb része a tulajdonság megválasztása. Most egy matematikailag könnyen leirható feltételt válasszunk: keressük a két vetületnek megfelelő, nem-negativ elemekből álló mátrixok közül azt /vagy azokat/, amelyekben a maximális és a minimális elem különbsége - nevezzük ezt a mátrix terjedelmének - a lehető legkisebb. Formálisan:

$$f_{ij} \geq 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} f_{ij} = f_j^{(y)} \quad j = 1, 2, \ldots, m \qquad \sum_{j=1}^{m} f_{ij} = f_i^{(x)} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\max_{ij}\{f_{ij}\} - \min_{ij}\{f_{ij}\} \longrightarrow \min!$$

/Természetesen még $T = \sum_{i=1}^{n} f_i^{(x)} = \sum_{j=1}^{m} f_j^{(y)}$-nek is teljesülnie kell./

Ez a tulajdonság mint simasági feltétel szerepelhet a mátrixnak megfelelő képben és hasonló a több vetületet felhasználó ART által előállitott képek azon tulajdonságához, hogy az minimális varianciájú a többi képhez viszonyitva [9].

2. Tétel a minimális terjedelmü mátrixokról

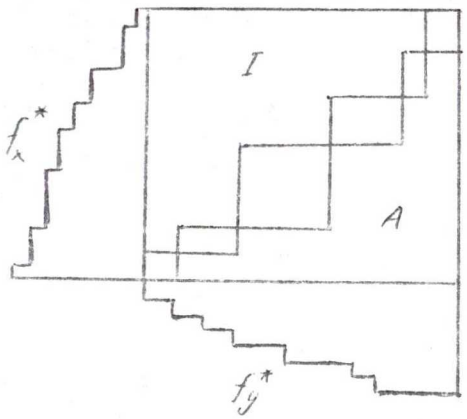
A minimális terjedelmü mátrixok keresésében hasznos lehet a következő tétel:

4. Tétel: Ha a megadott $f^{(x)}$ -hez és $f^{(y)}$ -hoz létezik minimális terjedelmü mátrix, akkor az a következő átalakitásokkal:

a/ a maximum és a minimum nagyságának megváltoztatása nélküli négyes-cserékkel,

b/ olyan sor- és oszlop-cserékkel, amelyekkel a vetületi vektorok elemei nagyság szerint rendeződnek;

ilyen formára hozható:



ahol az I -vel jelölt részben a minimális elemek, az A -val jelölt részben a maximális elemek vannak, a kimaradó rész-mátrixokban pedig a többi érték található /köztük esetleg még maximum is /.

Megjegyzés: A maximum és a minimum változtatása nélküli négyes-csere alatt azt kell érteni, hogy a mátrixban csak a minimumok vagy a maximumok száma változhat, de a teljes mátrixra vonatkozó szélsőértékek nem. Ilyen négyes-csere akkor végezhető, ha

$$f_{i_1 j_1} - x,\ f_{i_2 j_2} - x \geq \min_{ij} \quad \text{és}$$

$$f_{i_1 j_2} + x,\ f_{i_2 j_1} + x \leq \max_{ij} .$$

Ehhez szükséges és elégséges, hogy

$$\min\{f_{i_1 j_1}, f_{i_2 j_2}\} - \min_{ij} \geq x \quad \text{és}$$

$$\max_{ij} - \max\{f_{i_1 j_2}, f_{i_2 j_1}\} \geq x$$

is teljesüljön. Ilyen pozitiv x pedig akkor és csak akkor létezik, ha

(31) $\min\{f_{i_1j_1}, f_{i_2j_2}\} - \min_{ij} > 0$ és $\min_{ij}\{f_{i_1j_1}, f_{i_2j_2}\} \geq \min_{ij}$

vagyis $f_{i_1j_1}$, $f_{i_2j_2}$ nem minimális;
továbbá, ha

(32) $\max_{ij} - \max\{f_{i_1j_2}, f_{i_2j_1}\} > 0$; $\max_{ij} > \max\{f_{i_1j_2}, f_{i_2j_1}\}$,

vagyis $f_{i_1j_2}$, $f_{i_2j_1}$ nem maximális elem.

Tehát mindaddig, amig ilyen rész- mátrix kiválasztható, addig a teljes mátrix maximuma és minimuma változtatása nélkül végezhetők négyes-cserék.

Egyúttal azt is észrevehetjük, hogy ha az x-et úgy választjuk, hogy

(33) $\min\{f_{i_1j_1}, f_{i_2j_2}\} - \min_{ij} > x$ és $\max_{ij} - \max\{f_{i_1j_2}, f_{i_2j_1}\} > x$

akkor új maximum és új minimum sem keletkezhet egyetlen ilyen négyes-cserével sem.

Bizonyitás: Először azt nézzük meg a feltevés szerint létező minimális terjedelmü mátrixban, hogy a mátrix minimumának és maximumának a változtatása nélkül - megjegyzésben mutatott négyes-cserék segitségével -, a maximumok vagy a minimumok száma csökkenthető-e. Ha igen, akkor végezzük el ezeket a négyes-cseréket. Ehhez a következőket kell leszögezni:

1/ Sem a minimumok, sem a maximumok számának a csökkentése közben nem keletkeznek új maximumok vagy új minimumok, ha a megjegyzés szerinti (33) négyes-cseréket használjuk.

2/ Véges sok ilyen négyes-csere után a csökkentés már nem folytatható tovább, mert csak véges sok maximum és minimu van, minden lépéssel csökken a szélsőértékek száma és mindkét szélsőértékből legalább egynek maradnia kell.

Ha már nem tudunk több ilyen négyes-cserét végezni, akkor tekintsük a minimális elemek igy redukált halmazát és vizsgáljuk meg, hogyan helyezkednek el ezek egymáshoz képest. Segit-

ségként készitsük el a következő mátrixot:

$$f^*_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha } f_{ij} \text{ minimális elem;} \\ 1 & \text{különben.} \end{cases}$$

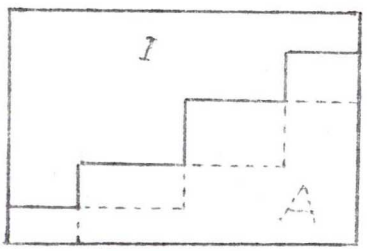
Az első megállapitásunk az lehet, hogy az F^* -ban nem lehet találni áthelyezhető komponenst. Ha ugyanis $f^*_{i_1j_1}$, $f^*_{i_1j_2}$, $f^*_{i_2j_1}$ és $f^*_{i_2j_2}$ áthelyezhető komponenst alkotna, akkor $f_{i_1j_1}$, $f_{i_1j_2}$, $f_{i_2j_1}$ és $f_{i_2j_2}$ -re alkalmazni lehetne a négyes-csere müveletét:

ha
$$f^*_{i_1j_1} = 1 \qquad f^*_{i_1j_2} = 0$$
$$f^*_{i_2j_1} = 0 \qquad f^*_{i_2j_2} = 1 ,$$

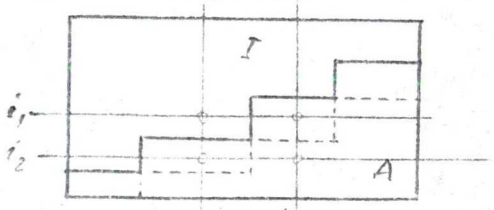
akkor
$$f_{i_1j_1} - x \qquad f_{i_1j_2} + x$$
$$f_{i_2j_1} + x \qquad f_{i_2j_2} - x ,$$

ahol x olyan, hogy (33) teljesül rá /ilyen x most biztosan van, mert (31) és 32 is teljesül/. Ezzel csökkenthetnénk a minimumok számát, ez pedig ellentmondana a korábbiaknak.

Ha viszont a minimumok nem alkotnak áthelyezhető komponenst, akkor piramis-szerü elrendeződést mutatnak /2. tétel/. A piramis-szerü elrendeződést mutató minimumok pedig sor- és oszlopcserékkel ilyen alakra hozhatók:



Most azt nézzük meg, hogy hova kerületekezekkel a sor- és oszlop-cserékkel a maximumok. Ha az A -val jelölt részben valahol nem maximum állna, akkor az egy alkalmas négyes-cserével egy minimális elem megszüntethetőségét jelentené:



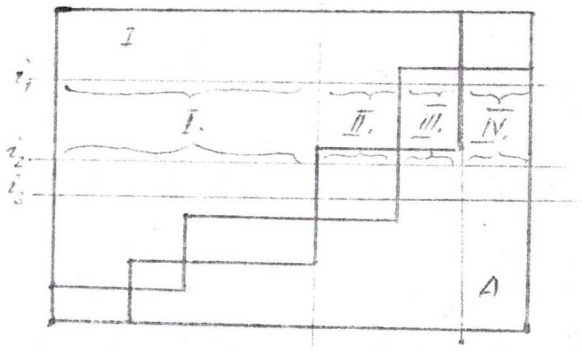
Az $f_{i_1j_1}$ minimum megszüntethető, mert $f_{i_1j_2}$ és $f_{i_2j_1}$ sem minimális és a feltevés szerint $f_{i_2j_2}$ nem maximális, igy érvényes (31),(32).

SZEGED

Tehát a maximális elemeknek kell állni az A -val jelölt részben.

Másfelöl a maximumoknak is piramis-szerü elrendeződést kell mutatni /ez ugyanúgy látható be, mint a minimumoknál/. Tehát a kimaradó rész-mátrixokban az esetleges további maximumoknak úgy kell elhelyezkedni, hogy a piramis-szerü elrendeződésnek megfeleljenek.

Végül annak az igazolása következzen, hogy ilyen mátrix forma mellett a sor és oszlop összegek nagyság szerint rendezhetők. Tekintsünk két sort az $\underline{F}$ mátrixban. Ha különböző rész-mátrixokon haladnak át ezek a sorok, mint pl. i_1 és i_2, akkor a mátrix felépitéséből következően $f_{i_1}^{(\alpha)} \leq f_{i_2}^{(\alpha)}$ /15. ábra/. Mert az I. és a IV. szakaszokon i_1 és i_2 azonos elemeket tartalmaz, II. és III.-nál viszont az i_2 sorban nagyobb vagy egyenlő elemek állnak, mint i_1 -ben. Ha két sor azonos rész-mátrixokon halad át, i_2 és i_3, akkor a sorok felcserélhetők - anélkül, hogy az eddigi felépitést elrontanánk -, ha nem megfelelő sorrendben voltak.



15. Ábra.

IV. ÖSSZEG ÉS SZORZAT ALAKU MEGOLDÁSOK

Ebben a fejezetben egyaránt használjuk a függvény és a mátrix szerinti irásmódot. A feladat most az lesz, hogy keressünk olyan $f(x,y) \geq 0 \; / 0 \leq x \leq a \; , \; 0 \leq y \leq b \; /$ függvényt, aminek a vetületei $f_x(y)$ és $f_y(x)$ adottak:

$$f_x(y) = \int_0^a f(x,y)\,dx \quad ,$$

$$f_y(x) = \int_0^b f(x,y)\,dy \quad .$$

Ezekből a feltételekből következik, hogy a feladat csak úgy korrekt kitüzésü, ha

$$T := \int_0^a f_y(x)\,dx = \int_0^b f_x(y)\,dy \quad \text{és}$$

$$f_x(y), \; f_y(x) \geq 0 \; .$$

A mátrixokra megfogalmazott diszkrét változat egyszerüen igy irható:

$$f_i^{(x)} = \sum_{j=1}^{m} f_{ij} \qquad / i = 1, 2, \ldots, n /$$

$$f_j^{(y)} = \sum_{i=1}^{n} f_{ij} \qquad / j = 1, 2, \ldots, m /,$$

ahol $f_{ij} \geq 0$, $f_i^{(x)} \geq 0$, $f_j^{(y)} \geq 0$ és

$$T := \sum_{j=1}^{m} f_j^{(y)} = \sum_{i=1}^{n} f_i^{(x)} \; .$$

1. Szorzat alakú megoldás

Elsőként olyan $f(x,y)$ függvényt próbáljunk keresni a megadott $f_x(y)$ és $f_y(x)$-hez, amely az alábbi szorzat alakjában előállitható:

$$f(x,y) = g(x) \cdot h(y), \tag{34}$$

ahol $g(x) \; /0 \leq x \leq a \; /$ és $h(y) /0 \leq y \leq b/$ az értelmezési tartományukon integrálható függvények. Igaz a következő állitás:

5. Tétel: Ha $f(x,y)$ felirható (34) alakban, akkor az csak

$$f(x,y) = \frac{f_x(y) \cdot f_y(x)}{T}$$

lehet.

Bizonyitás: Ha $f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$, akkor

$$f_x(y) = \int_0^a f(x,y)\,dx = \int_0^a g(x) \cdot h(y)\,dx = h(y) \int_0^a g(x)\,dx = G \cdot h(y), \tag{35}$$

ahol

$$G = \int_0^a g(x)\,dx \; .$$

Hasonlóképp

(36) $$f_y(x) = \int_0^b f(x,y)dy = \int_0^b g(x)\cdot h(y)dy = g(x)\cdot\int_0^b h(y)dy = H\cdot g(x),$$

ahol

$$H = \int_0^b h(y)dy .$$

(35) és (36)-ból következik, hogy

$$h(y) = f_x(y)/G , \qquad g(x) = f_y(x)/H .$$

Vagyis $f(x,y)$-t most már a következő formában kell keresni:

(37) $$f(x,y) = A\cdot f_x(y)\cdot f_y(x),$$

ahol A valamilyen konstans. Ennek alapján

$$f_x(y) = \int_0^a A\cdot f_x(y)\cdot f_y(x)dx = A\cdot f_x(y)\int_0^a f_y(x)dx = A\cdot f_x(y)\cdot T$$

és

$$f_y(x) = \int_0^b A\cdot f_x(y)\cdot f_y(x)dy = A\cdot f_y(x)\int_0^b f_x(y)dy = A\cdot f_y(x)\cdot T,$$

ahonnan következik:

(38) $$A = 1/T.$$

Vagyis (37)-ből és (38)-ból adódik, hogy

$$f(x,y) = \frac{f_x(y)\cdot f_y(x)}{T}$$

lehet /feltéve, ha $T \neq 0$ /. Ez valóban megoldás is, hiszen

$$\int_0^a \frac{f_x(y)\cdot f_y(x)}{T}dx = \frac{f_x(y)}{T}\int_0^a f_y(x)dx = \frac{f_x(y)}{T}\cdot T = f_x(y),$$

$$\int_0^b \frac{f_x(y)\cdot f_y(x)}{T}dy = \frac{f_y(x)}{T}\int_0^b f_x(y)dy = \frac{f_y(x)}{T}\cdot T = f_y(x)$$

és az $f(x,y) \geq 0$ $/0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ / feltétel is teljesül.

A mátrixokra vonatkozó megoldás analóg módon kapható:

$$f_{ij} = \frac{1}{T} f_i^{(x)}\cdot f_j^{(y)} \qquad /1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m/.$$

A szorzat alakú megoldás tehát arra is bizonyiték, hogy mindig létezik $\underline{f}^{(x)}$ -hez és $\underline{f}^{(y)}$ -hoz megfelelő nem-negativ megoldás.

2. Összeg alakú megoldás

Hasonló gondolatmenet segitségével láthatjuk be az összeg-

re vonatkozó alábbi állitást:

6. Tétel: Ha $f(x,y)$ felirható az

(39) $$f(x,y) = g(x) + h(y)$$

összeg alakjában, akkor az csak

$$f(x,y) = \frac{1}{b} f_y(x) + \frac{1}{a} f_x(y) - \frac{T}{a \cdot b}$$

lehet.

Bizonyitás:

$$f_x(y) = \int_0^a f(x,y)dx = \int_0^a g(x)dx + a \cdot h(y) = G + a \cdot h(y)$$

$$/G = \int_0^a g(x)dx /$$

és

$$f_y(x) = \int_0^b f(x,y)dy = b \cdot g(x) + \int_0^b h(y)dy = b \cdot g(x) + H$$

$$/H = \int_0^b h(y)dy /,$$

ahonnan az következik, hogy

(40) $$h(y) = \frac{1}{a} f_x(y) - \frac{G}{a}, \quad g(x) = \frac{1}{b} f_y(x) - \frac{H}{b}.$$

(39) és (40)-ből az következik, hogy

$$f(x,y) = A \cdot f_y(x) + B \cdot f_x(y) + C$$

formában kereshető, ahol A, B és C alkalmas konstansokat jelölnek.

$f_x(y)$ és $f_y(x)$ definiciója alapján:

(41) $$f_x(y) = A \cdot T + B \cdot f_x(y) \cdot a + C a$$

és

(42) $$f_y(x) = A \cdot f_y(x) \cdot b + B \cdot T + C \cdot b.$$

(41) és (42) csak úgy teljesülhet minden x, y -ra, ha

$$1 = B \cdot a \qquad 1 = A \cdot b$$

$$0 = A \cdot T + C \cdot a \qquad 0 = B \cdot T + C \cdot b,$$

Ezt az egyenletrendszert megoldva:

$$A = \frac{1}{T}, \quad B = \frac{1}{a}, \quad C = -\frac{T}{a \cdot b}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy

(43) $$f(x,y) = \frac{1}{b} f_y(x) + \frac{1}{a} f_x(y) - \frac{T}{a \cdot b}.$$

Ennek a függvénynek valóban $f_x(y)$ és $f_y(x)$ a két vetülete:

$$\int_0^a f(x,y)dx = \frac{1}{a} \int_0^a f_x(y)dx + \frac{1}{b} \int_0^a f_y(x)dx - \frac{T}{a \cdot b} \cdot a = f_x(y) + \frac{T}{b} - \frac{T}{b} = f_x(y),$$

$$\int_0^b f(x,y)dy = \frac{1}{b} f_y(x) \cdot b + \frac{1}{a} \int_0^b f_x(y)dy - \frac{T}{a \cdot b} \cdot b = f_y(x) + \frac{1}{a} T - \frac{T}{a} = f_y(x).$$

(43) alapján a mátrix megoldás:

$$f_{ij} = \frac{1}{m} f_i^{(x)} + \frac{1}{n} f_j^{(y)} - \frac{T}{n \cdot m} \tag{44}$$

Vizsgáljuk meg, hogy ez a megoldás mikor lesz nem-negativ:

minden i-re és j-re. Ehhez szükséges és elégséges, hogy $\frac{1}{m} f_i^{(x)} + \frac{1}{n} f_j^{(y)} - \frac{T}{n \cdot m} \geq 0$

azaz

$$\min_{ij} \left\{ \frac{1}{m} f_i^{(x)} + \frac{1}{n} f_j^{(y)} \right\} \geq \frac{T}{n \cdot m},$$

$$\frac{1}{m} \cdot \min_i \left\{ f_i^{(x)} \right\} + \frac{1}{n} \min_j \left\{ f_j^{(y)} \right\} \geq \frac{T}{n \cdot m},$$

$$n \cdot \min_i \left\{ f_i^{(x)} \right\} + m \cdot \min_j \left\{ f_j^{(y)} \right\} \geq T \tag{45}$$

teljesüljön. Tehát ha a vetületekre (45) teljesül, akkor létezik összeg alakú, nem-negativ megoldás.

3. Általános alakú megoldás

Végül keressük a megoldást ilyen formában:

$$f(x,y) = g(x) + g(x) \cdot h(y) + h(y) + D, \tag{46}$$

ahol D valamilyen konstans. Ekkor

$$\int_0^a f(x,y)\,dx = \int_0^a g(x)\,dx + h(y) \int_0^a g(x)\,dx + a \cdot h(y) + Da =$$

$$= G + G \cdot h(y) + a \cdot h(y) + a \cdot D = f_x(y),$$

$$\int_0^b f(x,y)\,dy = b \cdot g(x) + g(x) \int_0^b h(y)\,dy + \int_0^b h(y)\,dy + D \cdot b =$$

$$= b \cdot g(x) + H \cdot g(x) + H + b \cdot D = f_y(x),$$

ahonnan

$$h(y) = \frac{1}{G + a} f_x(y) - \frac{G + a \cdot D}{G + a},$$

$$g(x) = \frac{1}{H + b} f_y(x) - \frac{H + b \cdot D}{H + b}.$$

Ebből látható, hogy csak

$$f(x,y) = A \cdot f_x(y) + B \cdot f_x(y) \cdot f_y(x) + C \cdot f_y(x) + D \tag{47}$$

alakban lehet tovább keresni $f(x,y)$-t.

(47)-ből képezve a vetületeket:

$$\begin{cases} f_x(y) = A \cdot f_x(y) \cdot a + B \cdot T \cdot f_x(y) + C \cdot T + D \cdot a = \\ = f_x(y)(A \cdot a + B \cdot T) + C \cdot T + D \cdot a, \end{cases} \tag{48}$$

$$(48)\quad \left.\begin{aligned} f_y(x) &= A\cdot T + B\cdot f_y(x)\cdot T + C\cdot f_y(x)\cdot b + b\cdot D = \\ &= f_y(x)\left(C\cdot b + B\cdot T\right) + b\cdot D + A\cdot T \end{aligned}\right\}$$

(48) csak akkor teljesülhet minden x, y -ra, ha

$$\begin{cases} 1 = A\cdot a + B\cdot T \\ 0 = D\cdot a + C\cdot T \\ 1 = C\cdot b + B\cdot T \\ 0 = D\cdot B + A\cdot T \end{cases}$$

Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a fenti egyenletrendszer lineárisan függő, aszabadsági fokok száma:1. D -t jelölve szabad változónak a következő kifejezéseket kapjuk:

$$A = -\frac{D\cdot b}{T}\,,\quad B = \frac{1}{T} + \frac{D}{T^2}a\cdot b\,,\quad C = -\frac{Da}{T}\,.$$

Vagyis

$$f(x,y) = -\frac{D\cdot b}{T}f_x(y) + \left(\frac{1}{T} + \frac{D}{T^2}ab\right)f_x(y)f_y(x) - \frac{Da}{T}f_y(x) + D =$$

$$= \frac{1}{T}f_x(y)\cdot f_y(x) + D\left(\frac{b}{T}f_x(y) - 1\right)\left(\frac{a}{T}f_y(x) - 1\right).$$

Ez valóban megoldás is, hiszen

$$\int_0^a f(x,y)\,dx = \frac{1}{T}f_x(y)\cdot T + D\left(\frac{b}{T}f_x(y) - 1\right)\left(\frac{a}{T}T - a\right) = f_x(y),$$

$$\int_0^b f(x,y)\,dy = \frac{1}{T}f_y(x)\cdot T + D\left(\frac{b}{T}T - b\right)\left(\frac{a}{T}f_y(x) - 1\right) = f_y(x)$$

Látható egyébként, hogy ez az eredménny $D = 0$ -ra a szorzat alakú, $D = -T/(a\cdot b)$-re pedig az összeg alakú megoldást foglalja magában.

Itt a mátrix alakú megoldás:

$$(49)\qquad f_{ij} = \frac{1}{T}f_i^{(x)}\cdot f_j^{(y)} + D\left(\frac{n}{T}f_i^{(x)} - 1\right)\left(\frac{m}{T}f_j^{(y)} - 1\right).$$

Vizsgáljuk meg, hogy a (49)-cel kapott megoldások milyen D mellett lesznek nem-negativok. Ehhez az kell, hogy minden i -re és j -re:

$$(50)\qquad \frac{1}{T}f_i^{(x)}f_j^{(y)} + D\left(\frac{n}{T}f_i^{(x)} - 1\right)\left(\frac{m}{T}f_j^{(y)} - 1\right) \geq 0$$

Azokra az i-kre, amelyekre $f_i^{(x)} = 0$:

$$-D\left(\frac{m}{T}f_j^{(y)} - 1\right) \geq 0$$

-nak kell teljesülnie. Ami, ha minden j -re $f_j^{(y)} = \frac{T}{m}$, akkor tetszőleges D-re teljesül; ha viszont nem minden j-re áll fenn az $f_j^{(y)} = \frac{T}{m}$ feltétel, akkor csak a $D = 0$ ad nem-negativ

megoldást. Hasonló állitás igaz $f_j^{(y)} = 0$ esetén az oszlopokra is.

Most azt nézzük meg, amikor $f_i^{(x)}, f_j^{(y)} \neq 0$. Akkor (50) átirható igy:

(51) $$\frac{1}{T} \geq -D\left(\frac{n}{T} - \frac{1}{f_i^{(x)}}\right)\left(\frac{m}{T} - \frac{1}{f_j^{(y)}}\right).$$

Legyen

$$m_x = \min_i \{f_i^{(x)}\}, \qquad M_x = \max_i \{f_i^{(x)}\},$$

$$m_y = \min_j \{f_j^{(y)}\}, \qquad M_y = \max_j \{f_j^{(y)}\},$$

ha $D \leq 0$, akkor minden i-re és j-re

$$-D\left(\frac{n}{T} - \frac{1}{f_i^{(x)}}\right)\left(\frac{m}{T} - \frac{1}{f_j^{(y)}}\right) \leq -D\left(\frac{n}{T} - \frac{1}{M_x}\right)\left(\frac{m}{T} - \frac{1}{M_y}\right),$$

vagy

$$-D\left(\frac{n}{T} - \frac{1}{f_i^{(x)}}\right)\left(\frac{m}{T} - \frac{1}{f_j^{(y)}}\right) \leq -D\left(\frac{n}{T} - \frac{1}{m_x}\right)\left(\frac{m}{T} - \frac{1}{m_y}\right)$$

egyenlőtlenségek közül az egyik biztosan teljesül. Legyen

$$k' = \left(\frac{n}{T} - \frac{1}{M_x}\right)\left(\frac{m}{T} - \frac{1}{M_y}\right), \quad k'' = \left(\frac{n}{T} - \frac{1}{M_x}\right)\left(\frac{m}{T} - \frac{1}{M_y}\right)$$

és

$$k = \max\{k', k''\}$$

akkor a megoldás nem-negativitásának egyik feltétele (51)-ből következően az lesz, hogy

$$\frac{1}{T} \geq -D.k$$

teljesüljön, ami ekvivalens a feltétellel. $$D_a := -\frac{1}{T.k} \leq D$$

Ha $D > 0$, akkor minden i-re és j-re

$$-D\left(\frac{n}{T} - \frac{1}{f_i^{(x)}}\right)\left(\frac{m}{T} - \frac{1}{f_j^{(y)}}\right) \leq -D\left(\frac{n}{T} - \frac{1}{m_x}\right)\left(\frac{m}{T} - \frac{1}{M_y}\right),$$

vagy

$$-D\left(\frac{n}{T} - \frac{1}{f_i^{(x)}}\right)\left(\frac{m}{T} - \frac{1}{f_j^{(y)}}\right) \leq -D\left(\frac{n}{T} - \frac{1}{M_x}\right)\left(\frac{m}{T} - \frac{1}{m_y}\right)$$

közül valamelyiknek teljesülnie kell. Legyen

$$K' = \left(\frac{n}{T} - \frac{1}{m_x}\right)\left(\frac{m}{T} - \frac{1}{M_y}\right), \quad K'' = \left(\frac{n}{T} - \frac{1}{M_x}\right)\left(\frac{m}{T} - \frac{1}{m_y}\right)$$

és

$$K = \min\{K', K''\} < 0,$$

akkor az újabb feltétel:

$$\frac{1}{T} \geq -DK$$

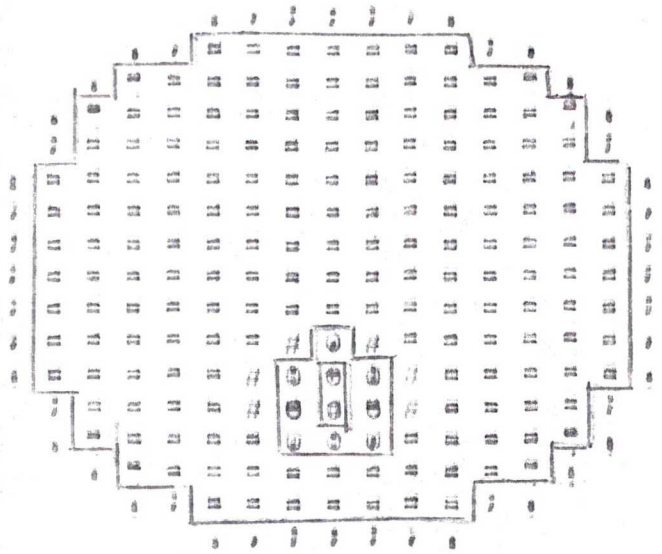
azaz

lesz. $$D_f := -\frac{1}{T.K} \geq D$$

Tehát azt kaptuk, hogy

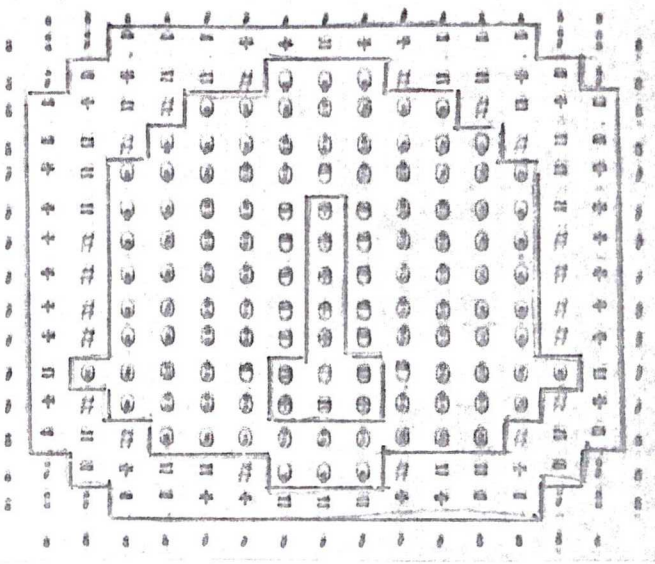
(52) $$D_a \leq D \leq D_f$$

-nek teljesülnie kell a megoldási mátrix nem-negativitásához. Az nyilvánvaló, hogy ha (52) teljesül, akkor (50) is. Vagyis (50) ekvivalens (52)-vel.

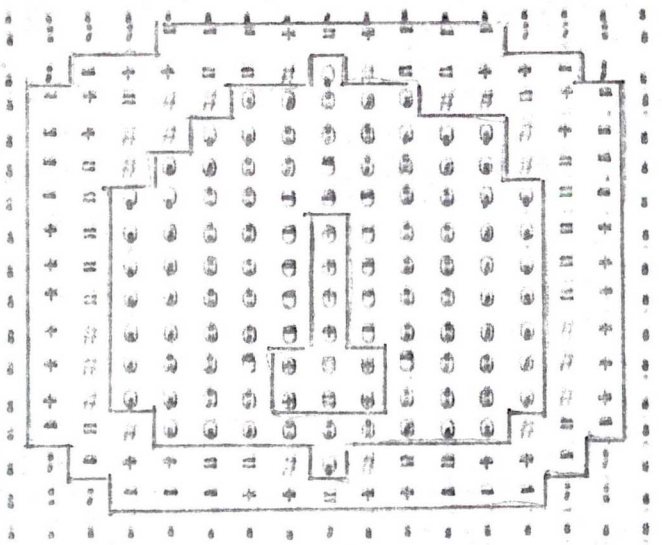


EREDETI FORMA

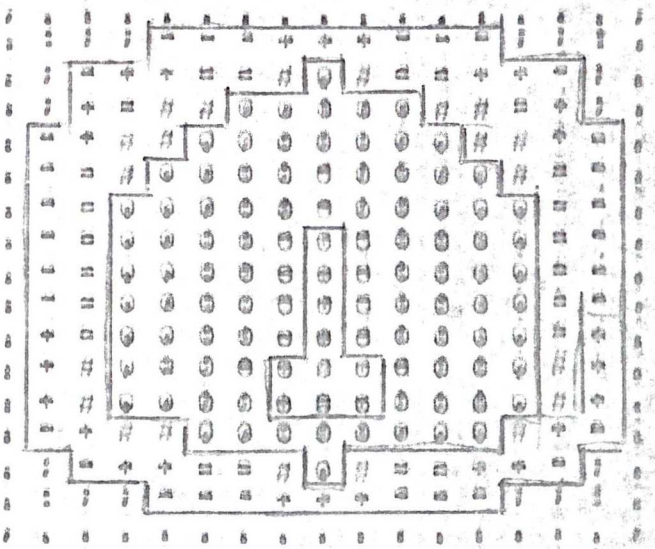
D = 0,02516
MAX = 8,00



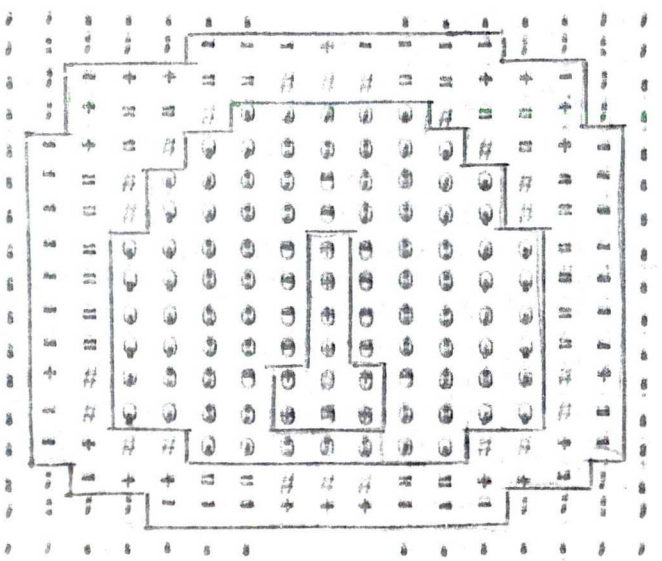
D = 0,77691
MAX = 8,15



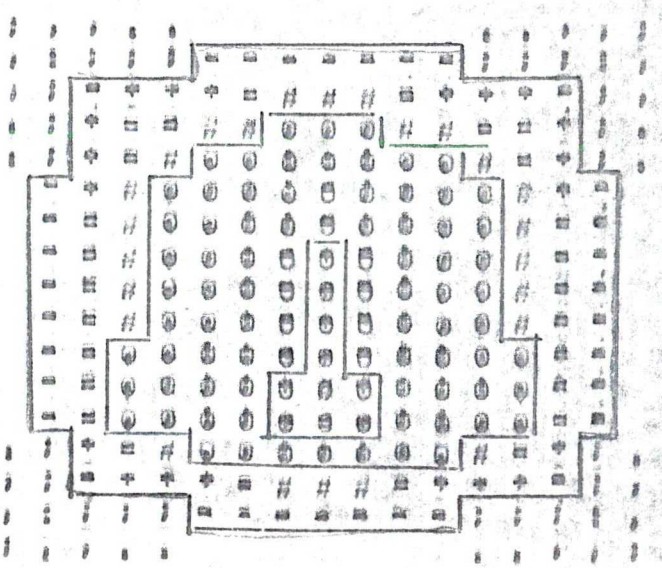
D = 1,52866
MAX = 8,31

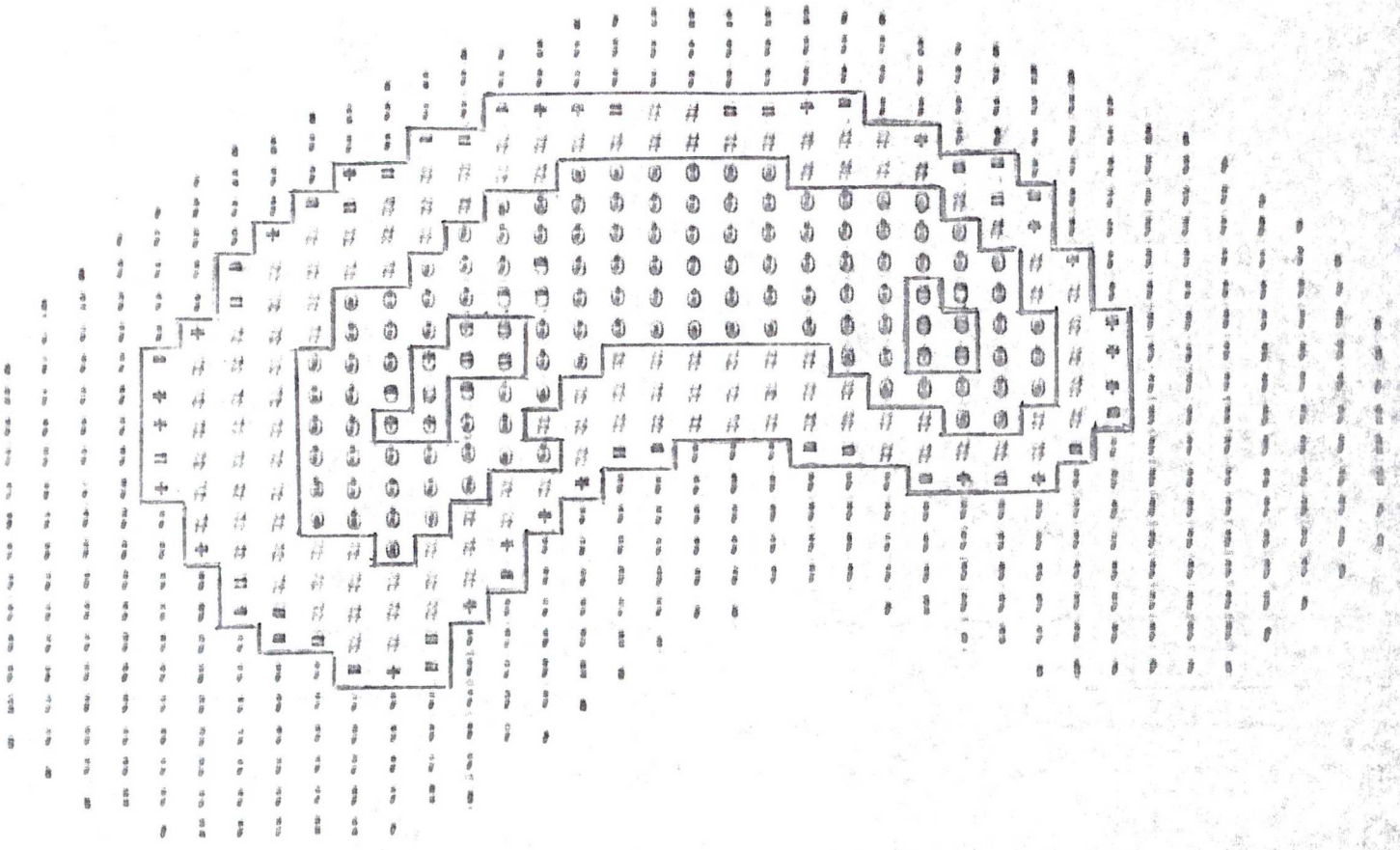


D = 2,28041
MAX = 8,40



D = 3,40804
MAX = 8,69

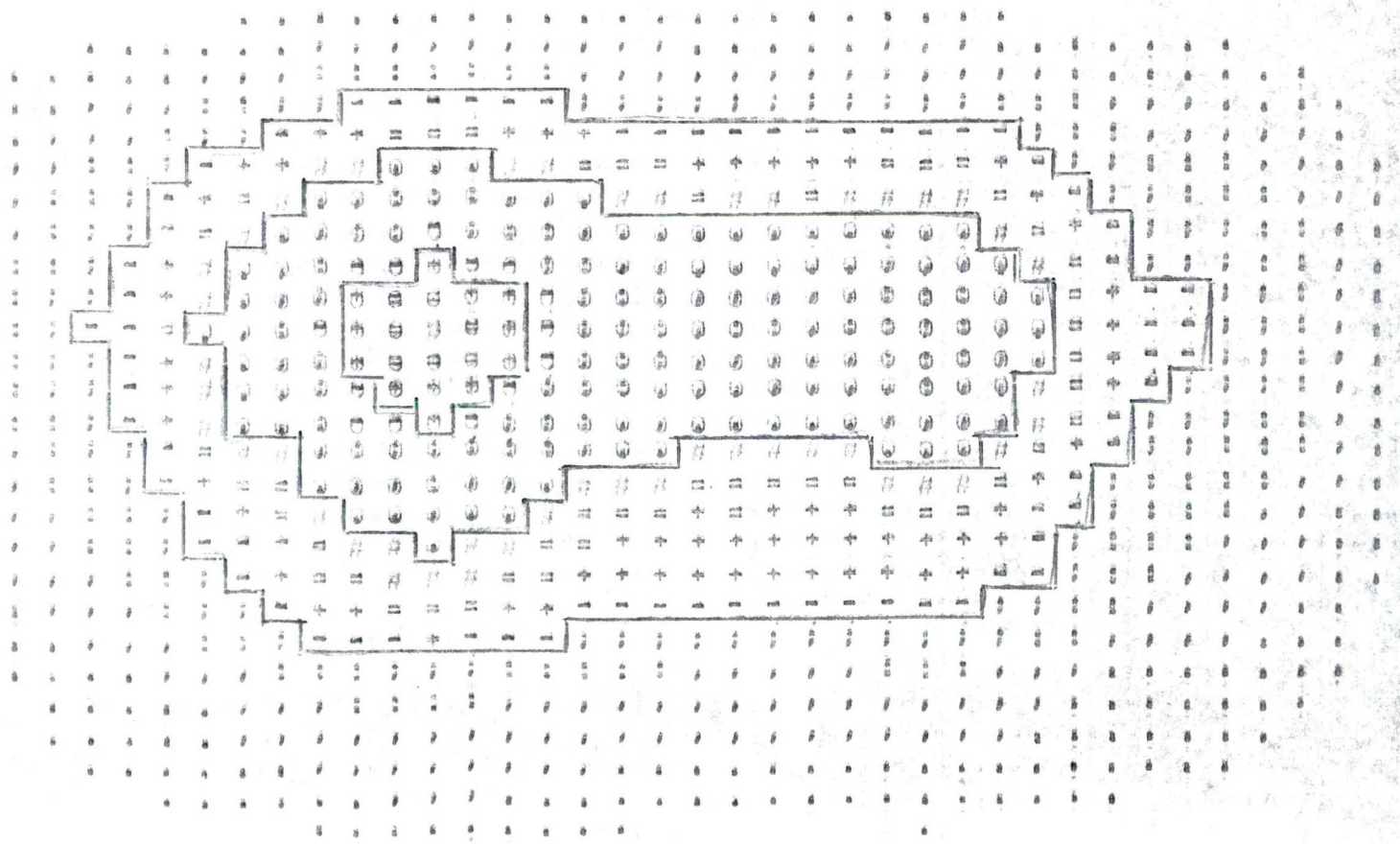




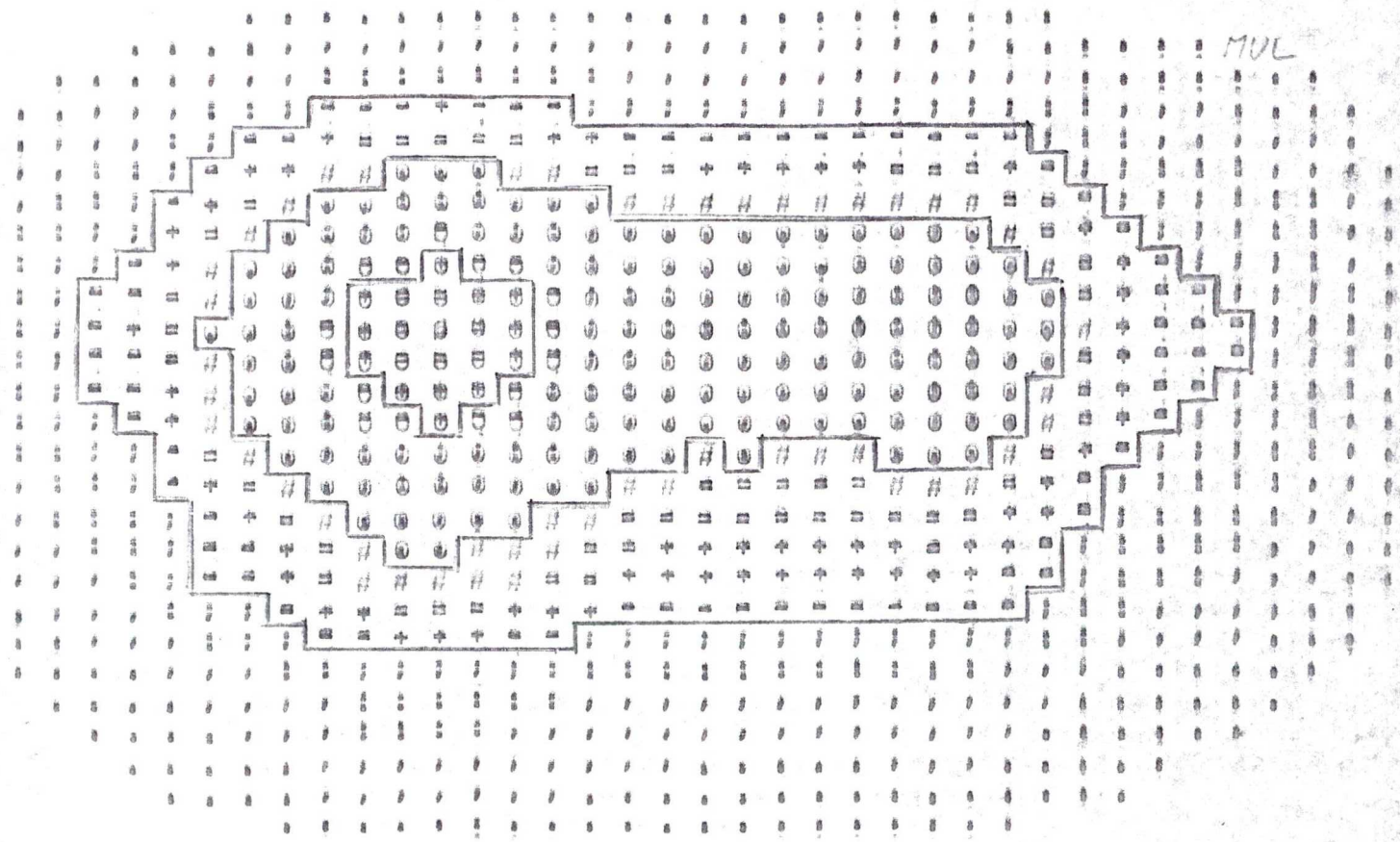
EREDETI FORMA

$\varphi = 0.1222$

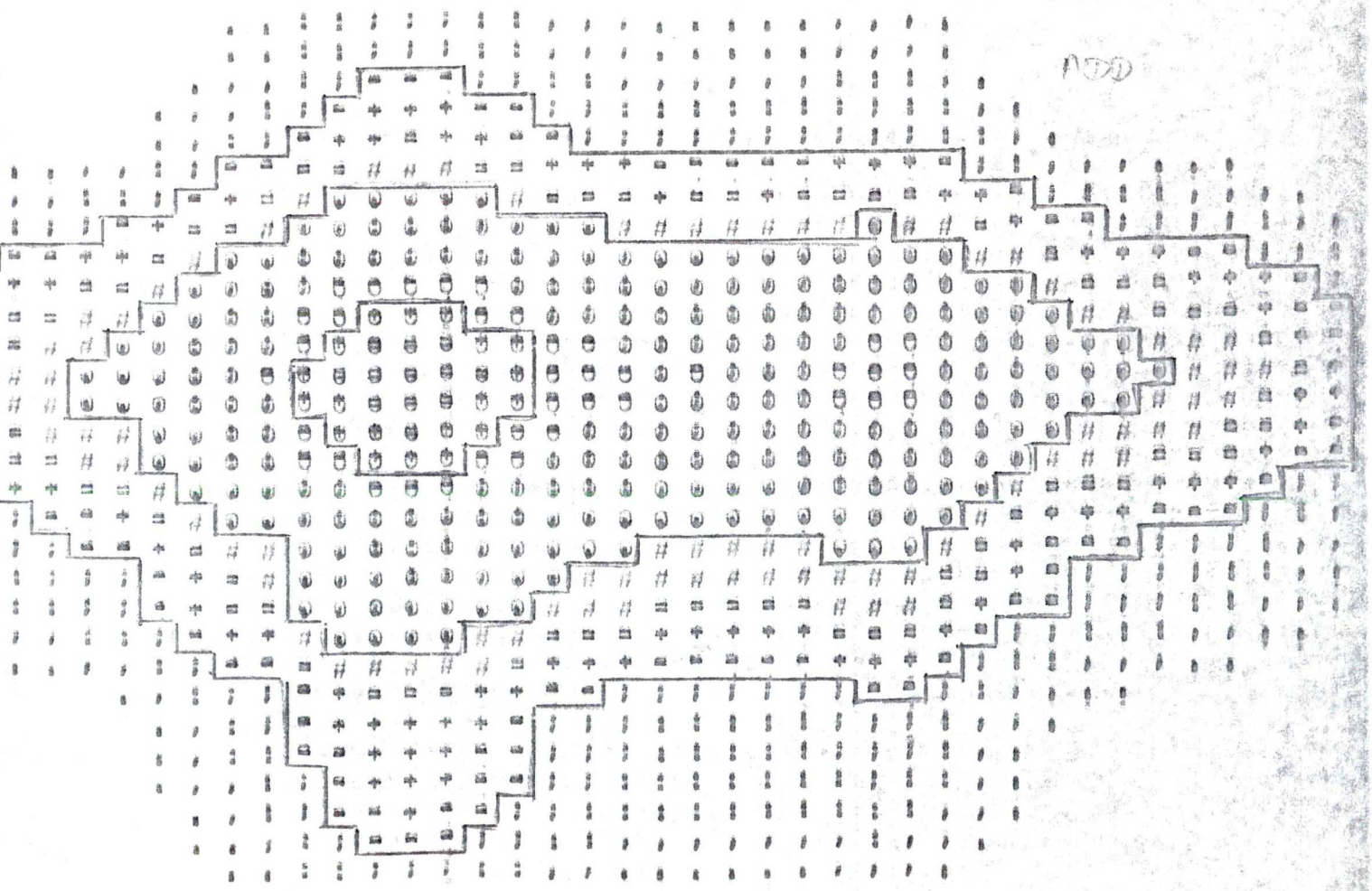
$\frac{1}{\varphi} = 8.63$



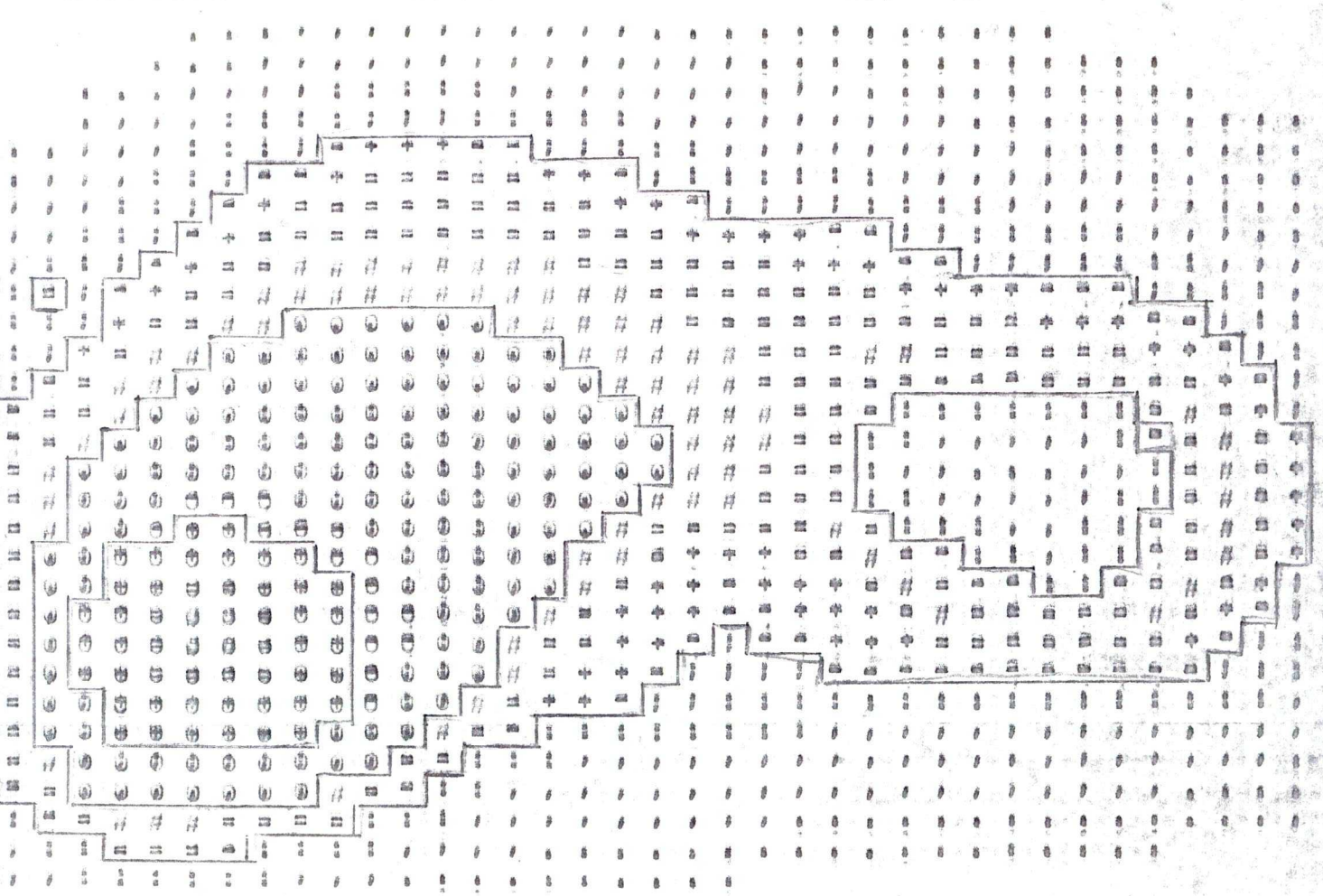
ÁTALAKÍTOTT MEGOLDÁS



SZORZAT ALAKÚ MEGOLDÁS

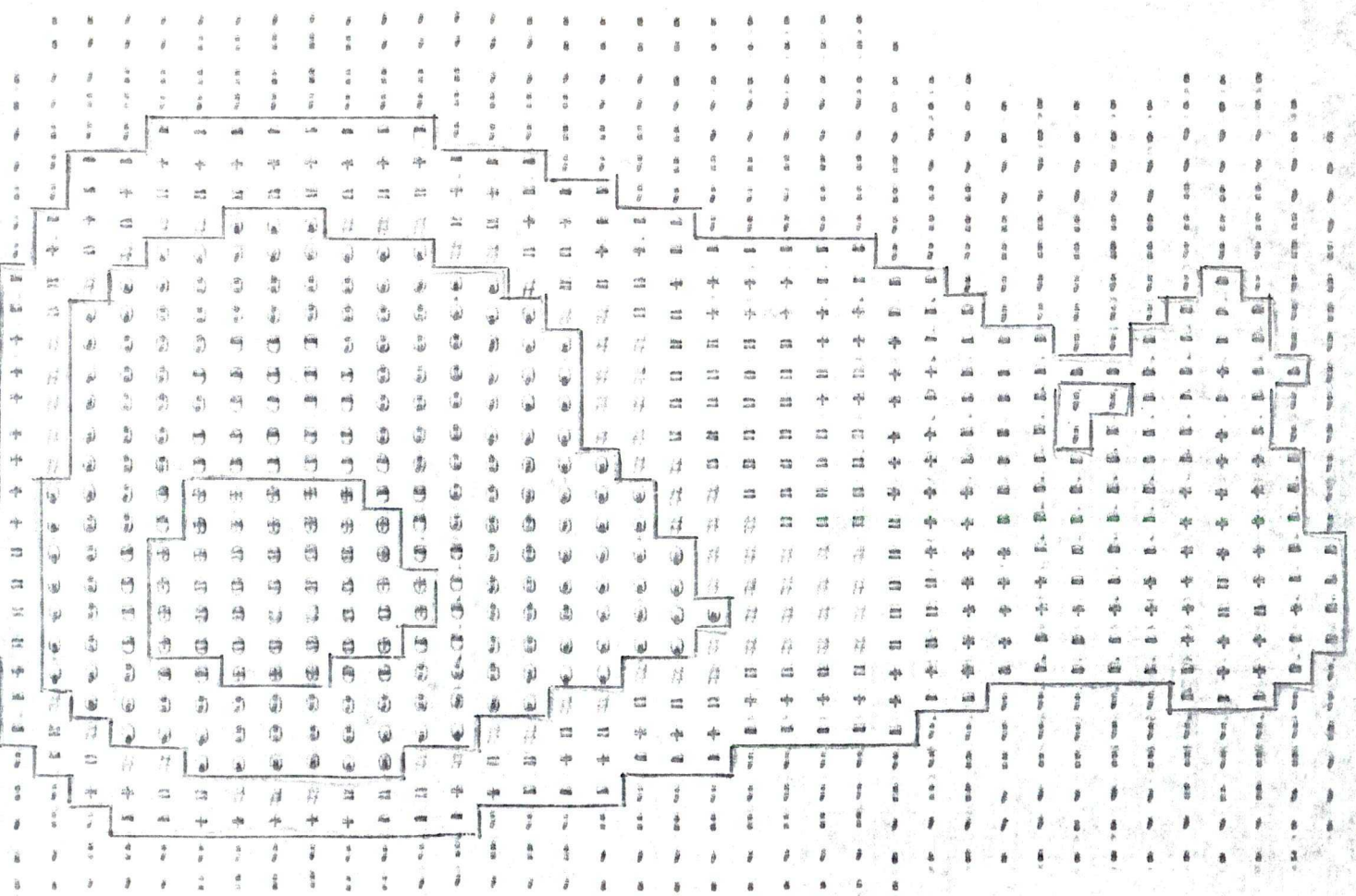


ÖSSZEG ALAKÚ MEGOLDÁS



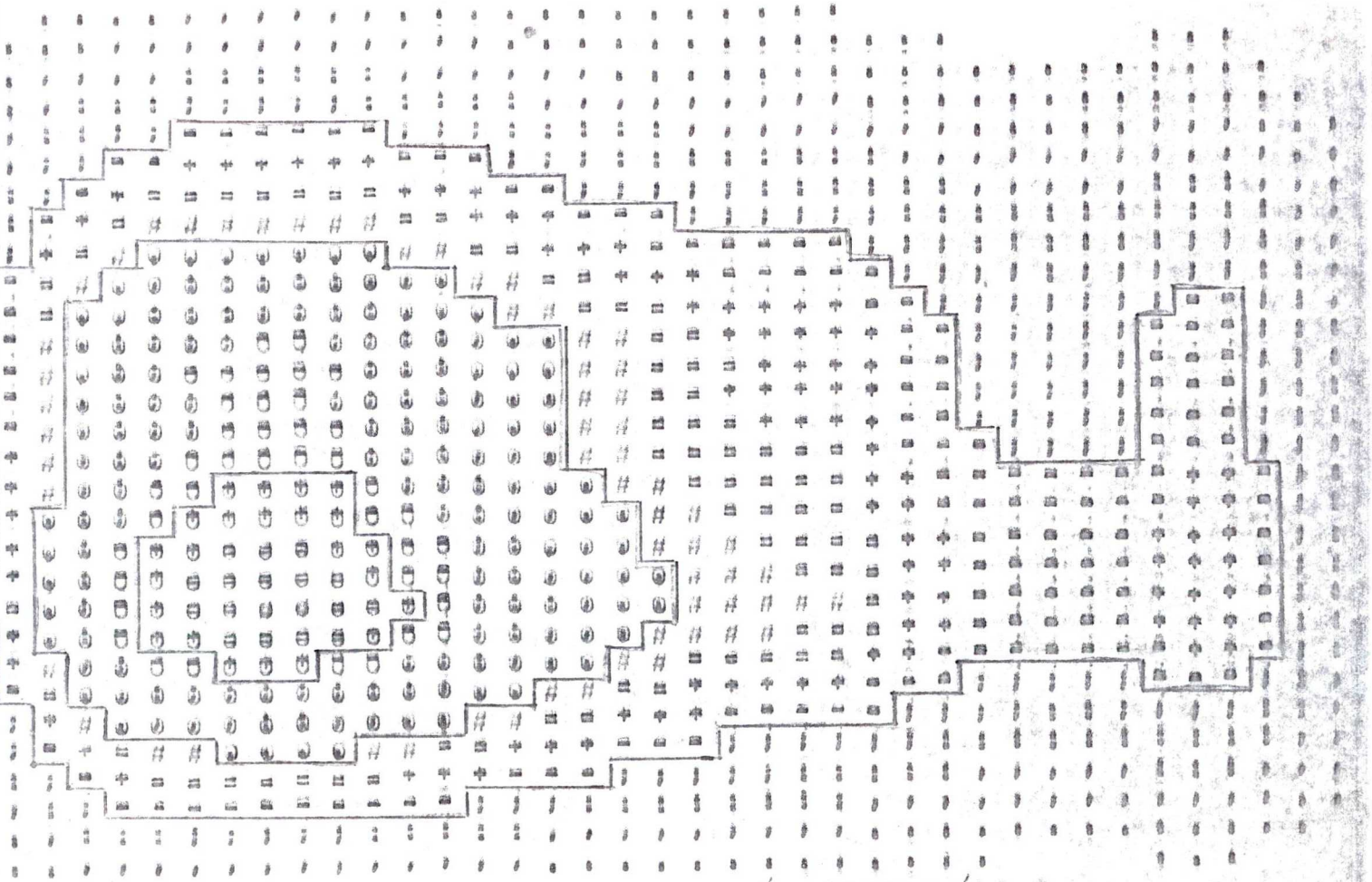
EREDETI FORMA

$$\frac{\text{...} = 40,27746}{\text{MAX} = 4,75}$$



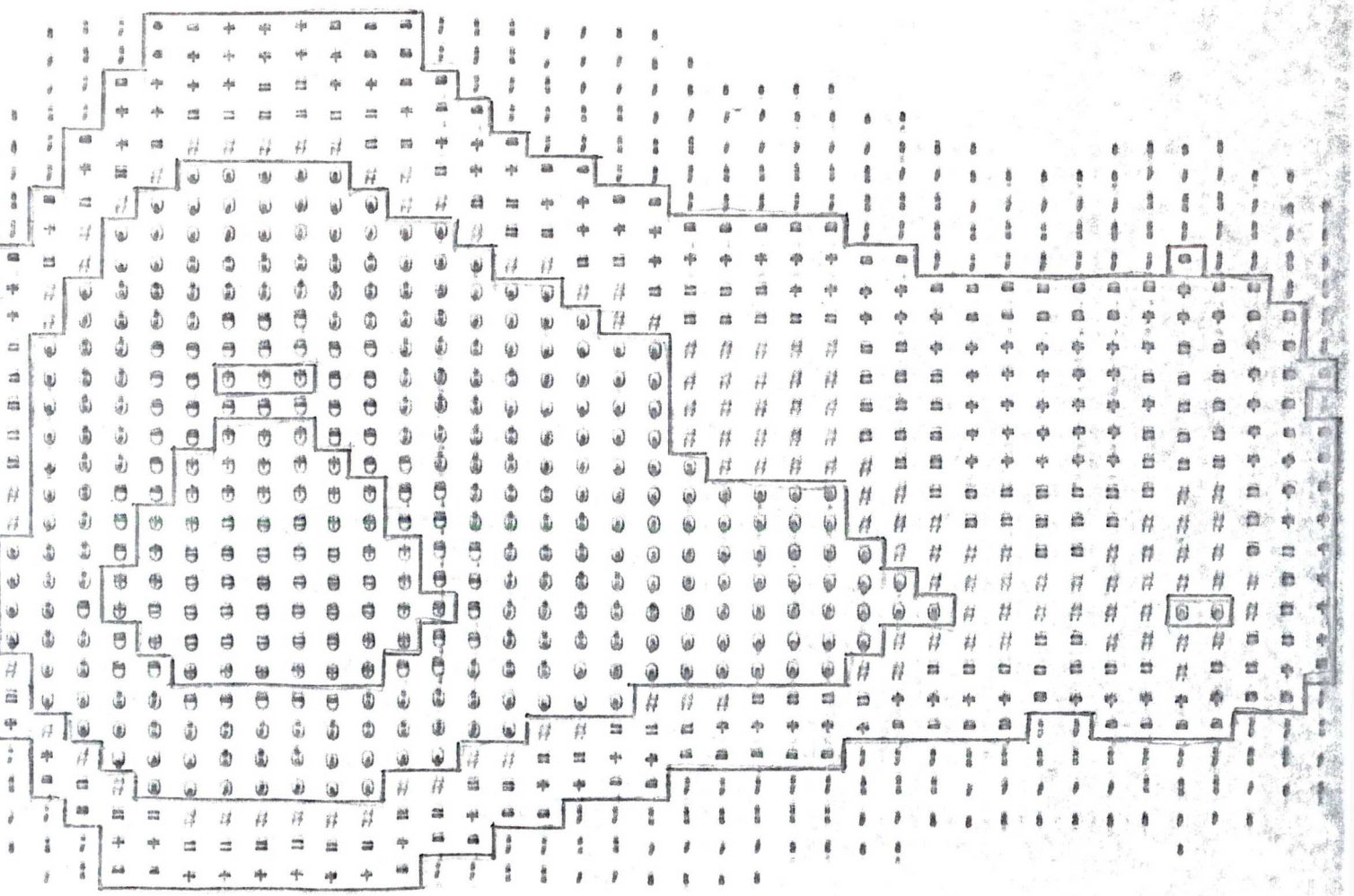
ÁLTALÁNOS ALAKÚ MEGOLDÁS

MUL



SZORZAT ALAKÚ MEGOLDÁS

HÚZ

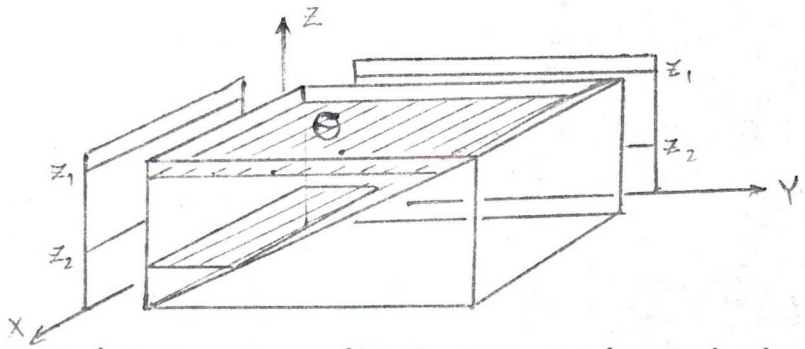


ÖSSZEG ALAKÚ MEGOLDÁS

4. Kisérleti eredmények

A korábban bemutatott három módszer használhatóságát elsősorban az dönti el, hogy a rekonstruálandó mátrix /képfüggvény/ eleget tesz-e a három módszer valamelyikének alkalmazásához szükséges feltételnek. Ha igen, akkor a rekonstrukció pontosan elvégezhető a megadott két vetületből is. Egy fontos kérdés lehet ezen módszerek vizsgálatánál, hogy amennyiben nem teljesül egyik feltétel sem, akkor milyen képeket kapunk ezekkel a módszerekkel, illetve, hogy azok mennyire hasonlitanak az eredeti képhez. Ezzel kapcsolatosak a mellékelt ábrák, amelyeken bizonyos egyszerübb formák mátrix-képe látható és külön-külön az egyes módszerekkel rekonstruált képek. Az ábrázolásnál a megjelenitéshez 16 szürkeségi szintü kijelzést alkalmaztunk. Egy példán keresztül pedig azt követhetjük nyomon, hogy az általános formájú megoldás hogyan változik a D paraméter változtatásával.

A szorzat alakú megoldást még egy módon kipróbáltuk. A SZOTE Központi Izotópdiagnosztikai Laboratóriumban rendelkezésre állt a 16. ábrán látható izotópos fantom. A kád felső részé-



16. Ábra. A kisérlethez használt fantom. A kád alsó része viasszal volt kiöntve, igy a felső részét foglalta el az izotópos oldat. A gömb aktivitása kb. négyszerese az oldatának.

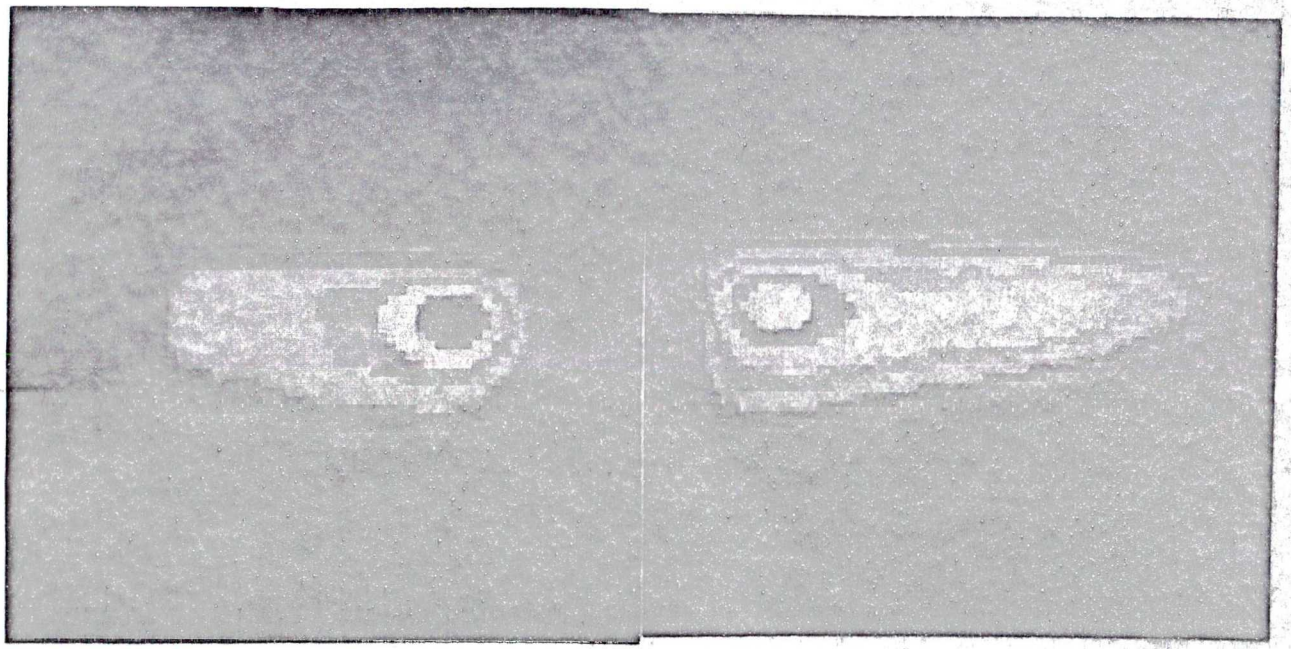
be rádióaktiv sugárzást kibocsátó izotóp oldata került, amibe az ábra szerinti helyen egy még erősebben sugárzó gömböt helyeztünk el. Feladatként azt tüztük ki, hogy a fantom két vizszin-

tes metszetének a képét elkészitsük. Ehhez két, egymásra merőleges irányú Anger-kamerás felvétel /17. ábra/ készült a fantomról. Ha a különféle zavaró tényezőktől eltekintünk, akkor ezek a felvételek megfelelnek az ilyen irányú vetületeknek:

$$f_x(y,z) = \int f(x,y,z)\,dx,$$

$$f_y(x,z) = \int f(x,y,z)\,dy,$$

ahol $f(x,y,z)$ a tér (x,y,z) pontjában levő sugárzás aktivitását jelzi, $f_x(y,z)$ és $f_y(x,z)$ pedig az x- és az y-irányból mért összaktivitásokat az (y,z) és az (x,z) pontokban. Ebből



17. Ábra. A fantomról készült két felvétel.

nyilvánvaló, hogy a feladat rekonstrukció segitségével oldható meg. Itt próbáltuk a szorzat alakú megoldást alkalmazni. Az első sikmetszet vetületei:

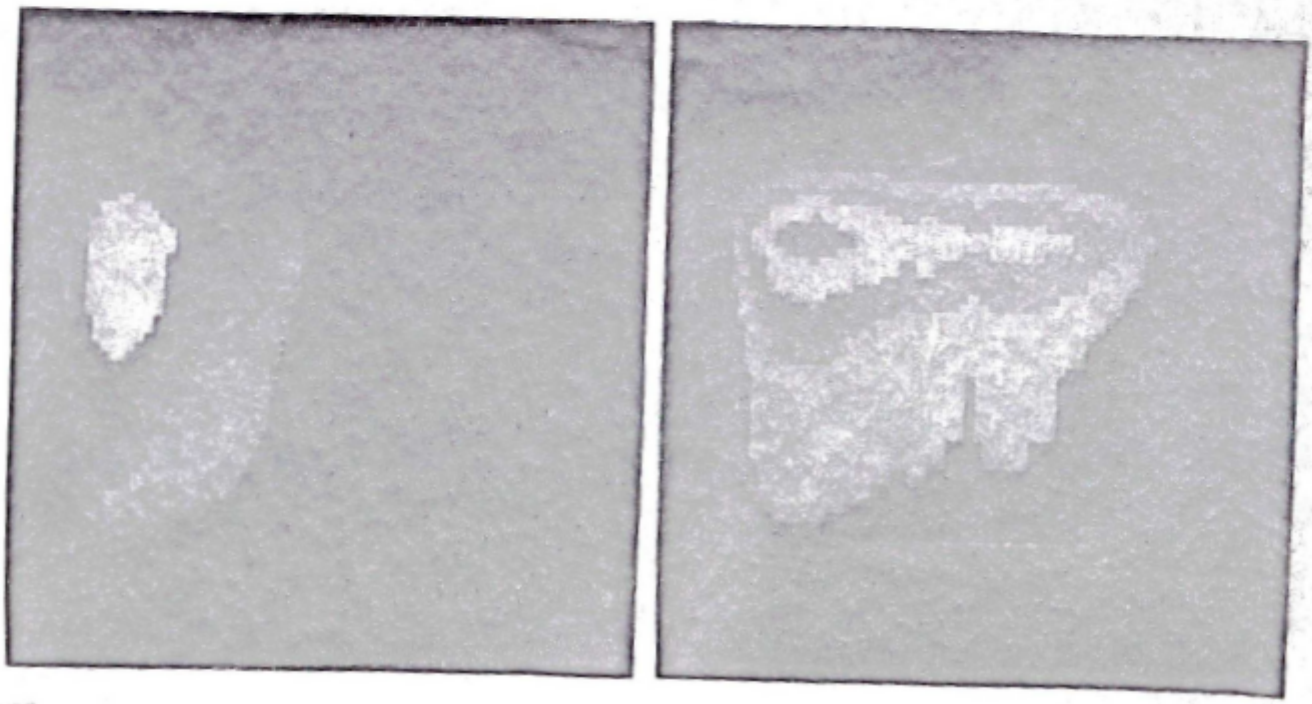
$$f_x(y, z=z_1) \quad , \quad f_y(x, z=z_1)$$

a másodok sikmetszet vetületei pedig:

$$f_x(y, z=z_2) \quad , \quad f_y(x, z=z_2)$$

A két vetületből rekonstruált képek a 18. ábrán láthatók; jól megfigyelhető a nagyobb aktivitású gömb jelenléte a második metszetben.

József Attila Tudományegyetem Könyvtára SZEGED



18. Ábra. A rekonstruált két metszet képe

IRODALOM

1. J. RADON: Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Uannigfaltigkeiten; Berechte Sächsische Acad. der Wissensch. /Leipzig/ Math.-Phys. Klasse, 69, 262-277 /1917/.
2. R. N.BRACEWELL: Strip integration in radio astronomy Aust. J. Phys., 9, 198-217 /1956/.
3. A.M.CORMACK: Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications; J. of Applied Phys., 34, 2722-2727 /1963/.
4. A.M.CORMACK: Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications II; J. of Applied Phys., 35, 2908-2913 /1964/.
5. D.J.DEROSIER, A.KLUG: Reconstruction of three dimensional structures from electron micrographs; Nature, 217, 130-134 /1968/.
6. G;N.RAMACHANDRAN, A.V.LAKSHIMINARAYANAN: Three-dimensional reconstruction from radiographs and electron micrographs I; Proc. of Nat. Acad. of Sci. USA, 68, 2236-2240 /1971/.
7. R.GORDON, R.BENDER, G.T.HERMAN: Algebraic reconstruction techniques /ART/ for three-dimensional electron microscopy and X-ray photography; J. Theor. Biol., 29, 471-481 /1970/.
8. R.M.MERSEREAU, D.E.OPPENHEIM: Digital reconstruction of multidimensional signals from their projections; Proc. IEEE-62 /1974/ 1319-1338.
9. G.T.HERMAN, S.W.ROWLAND: Three methods for reconstructing objects from X-rays: A comparative study; Comp. Graph. and Image Proc., 2, 151-178 /1973/.
10. H.H.BARRETT, W.SWINDELL: Analog reconstruction methods for transaxial tomography; Proc. IEEE, 65, 89-107 /1977/.
11. P.GILBERT: Iterative methods for the three-dimensional reconstruction of an object from projections; J. Theor. Biol., 36, 105-117 /1972/.

12.G.T.HERMAN, A.LENT, S.W.ROWLAND: ART: Mathematics and applications;
J. Theor. Biol; 42, 1-32 /1973/.

13.B.E.OPPENHEIM, P.V.HARPER: Iterative three-dimensional reconstruction: a search for a better algorithm;
21st Ann. Meet. Soc. Nucl. Med. 1974.

14.B.E.OPPENHEIM: A study of parameters affecting transaxial reconstruction by iterative techniques;
22nd. Ann. Meet. on Nucl. Sci., 1975.

15.G.T.HERMAN, A.LENT: Iterative reconstruction algorithms;
Comp. Biol. Med., 6, 273-294 /1976/.

16.R.A.BROOKS, G.DICHIRO: Principles of computer assisted tomography /CAT/ in radiographic and radioisotopic imaging;
Phys, Med. and Biol., 21, 689-732 /1976/.

17.R.M.MERSEREAU: Recovering multidimensional signals from their projections;
Comp. Graph. and Image Proc., 1, 179-195 /1973/.

18.R.A.CROWTHER, D.J.DEROSIER, A.KLUG: The reconstruction of a three-dimensional structure from projections and its application to electron microscopy;
Proc. Roy. Soc. Lond, A-317, 319-340 /1970/.

19.G.N.HOUNSFIELD: Computerized transverse axial scanning /tomography/:PartI. Description of system;
British J. of Radiology, 46, 1016-1022 /1973/.

20,J.AMBROSE: Computerized transverse axial scanning /tomography/ :Part 2. Clinical application;
British J. of Radiology, 46, 1023-1047 /1973/.

21.R.S.LEDLEY: Introduction to computerized tomography;
Comp. Biol. Med., 6, 239-246 /1976/.

22.R.S.LEDLEY, J.B.WILSON, T.GOLAB,...: The ACTA-Scanner: the Whole body computerized transaxial tomograph;
Comp. Biol. Med., 4, 145-155 /1974/.

23. Reconstruction Tomography in Radiology and Nuclear Medicin
University Park Press, 1977.

24.G.T.HERMAN: Two direct methods for reconstructing pictures from their projections: A comparative study;

Comp. Graph. and Image Proc., 1, 123-144 /1972/.

25.N.T.GAARDER, G.T.HERMAN: Algorithms for reproducing objects from their X-rays;
Comp. Graph. and Image Proc., 1, 97-106 /1972/.

26.R.L.KASHYAP, M.C.MITTAL: Picture reconstruction from projections;
IEEE Trans. on Comp., C-24, 915-924 /1975/.

27.G.T.HERMAN: A relaxation methodsfor reconstructing objects from noisy X-rays;
Math. Prog., 8, 1-19 /1975/.

28.G.T.HERMAN, A.V.LAKSHMINARAYANAN, S.W.ROWLAND: The reconstruction of objects from shadowgraphs with high contrasts;
Pattern Recongnition, 7, 157-165 /1975/.

29.R.M.MERSEREAU: Direct Fourier transform techniques in 3-D image reconstruction;
Comp. Biol. Med., 6, 247-258 /1976/.

30.A.M.MIKHAILOV, B.K.VAINSHTEIN: Electron microscope determination of the three-dimensional structure of the extended tail of the T6 bakteriophage;
Soviet Phys. - Crystall., 16, 428-436 /1971/.

31.L.WANG: Cross-section reconstruction with a fan-beam scanning geometry;
IEEE Trans. on Comp., C-26, 264-268 /1977/.

32.G.T.HERMAN, A.V.LAKHSMINARAYANAN, A.NAPARSTEK: Convolution reconstruction techniques for divergent beam;
Comp. Biol. Med;, 6, 259-271 /1976/.

33.Z.H.CHO, I.AHN: Computer algorithm for the tomographic image reconstruction with X-ray transmission scan;
Comp. Biomed. Res., 8, 8-25 /1976/.

34.S.S.SANDLER: Direct three-dimensional analysis of electron micrographs pictures;
Pattern Recognition, 4, 353-359 /1972/.

35.E.V.KRISHNAMURTHY, TM.RAO, K.SUBRAMANIAN: Reconstruction of objects from their projections using generalised inverses;
Comp. Gaph. and Image Proc., 3, 336-345 /1974/.

Acad. Tehnologiczna

36.C.M.VEST: Formation of images from projections: Radon and Abel transforms;
J. of the Opt. Soc. of Amer., 64, 1215-1218 /1974/.

37. G.T.GULLBERG: Entropy and transverse section reconstruction In Information Processing in Scintigraphy, Int. Conf., Orsay /1975/ 325-332.

38.S.J.WERNECKE, L.R.DADDARIO: Maximum entropy image reconstruction;
IEEE Trans. on Comput. C-26, 351-364 /1977/.

39. S.K.CHANG, C.K.CHOW: The reconstruction of three-dimensional objects from two orthogonal projections and its application to cardiac cineangiography;
IEEE Trans. on Comput., C-22, 18-28 /1973/.

40.S.K.CHANG: Reconstruction of binary patterns from their projections;
Comm. Ass. Comp. Mach., 14, 21-25 /1971/.

41. Y.R.WANG: Characterization of binary patterns and their projections;
IEEE Trans. on Comput., C-24, 1032-1035 /1975/.

42.S.K.CHANG, Y.R.WANG: Three-dimensional object reconstruction from orthogonal projections;
Pattern Recognition, 7, 167-176 /1975/.

43.S.K.CHANG, SHELTON: Two algorithms for multiple-view binary pattern reconstruction;
IEEE Trans. Syst. Man., SMC-1, 90-94 /1971/.

44.S.KRISHNAN, S.S.PRABHU, E.V.KRISHNAMURTHY: Probabilistic reinforcement algorithms for the reconstruction of pictures;
Int. J. Syst. Sci., 4, 661-670 /1973/.

45.KUBA A.:Térbeli tárgyak rekonstrukciója sikbeli vetületeikből;
Számitástechnikai és kibernetikai módszerek alkalmazása az orvostudományban és a biológiában - Kollokvium, Szeged, 1975.

46.C.K.WONG, P.C.YUE: Reconstruction of patterns by block-projection;
Information Sciences, 4, 357-366 /1976/.