

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y
MATEMÁTICA
SECCIÓN DE MATEMÁTICA



TRABAJO DE GRADO:

INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA INVERSIVA

PRESENTADO POR:

KAREN ROCÍO GARCÍA GUARDADO

CINDY ASTRID MEDINA CASTILLO

PARA OPTAR AL GRADO DE:

LICENCIADA EN MATEMÁTICA

DOCENTE ASESOR:

LIC. WILLIAM NOÉ MERLOS JUÁREZ

CIUDAD UNIVERSITARIA ORIENTAL, OCTUBRE DE 2019

SAN MIGUEL

EL SALVADOR

CENTROAMÉRICA

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

AUTORIDADES

**MAESTRO ROGER ARMANDO ARIAS
RECTOR**

**DR. MANUEL DE JESÚS JOYA
VICE-RECTOR ACADÉMICO**

**ING. NELSON BERNABÉ GRANADOS
VICE-RECTOR ADMINISTRATIVO**

**LIC. CRISTOBAL HERNÁN RÍOS BENÍTEZ
SECRETARIO GENERAL**

**LIC. RAFAEL HUMBERTO PEÑA MARÍN
FISCAL GENERAL**

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL**

AUTORIDADES

**MAESTRO ROGER ARMANDO ARIAS
DECANO EN FUNCIONES**

**LIC. JORGE ALBERTO ORTEZ HERNÁNDEZ
SECRETARIO**

Agradecimientos

A Dios todopoderoso, por brindarme la capacidad y sabiduría durante todos mis años de estudio. Por permitirme culminar mi carrera universitaria, fortalecerme en los momentos difíciles y permitirme vivir buenos momentos en el proceso.

A mis padres: José Henry García y María Elena Guardado de García, quienes han sido el pilar fundamental en mi vida y, por todo su apoyo incondicional en todas las etapas de mi vida, por darme mucho amor y sobre todo por orientarme.

A mi asesor: Lic. William Noé Merlos Juárez, por el tiempo invertido y los esfuerzos dedicados a guiarnos en nuestro Trabajo de Grado, por compartir sus conocimientos y por la paciencia durante todo el proceso.

A mi novio: Jonathan Javier Granados Fuentes, por su apoyo incondicional, por la paciencia y siempre poder contar con él, por el cariño, y sobre todo por la confianza que obtendría este triunfo.

A mi compañera de tesis: Cindy Astrid Medina Castillo, por la disposición, paciencia y compañerismo que tuvo durante todo el proceso de investigación.

A mis amigas, por brindarme en todo momento su amistad sincera y apoyo. Por estar en buenos y malos momentos, y estar presentes durante todo este proceso.

Karen Rocío García Guardado

Agradezco...

A Dios todopoderoso, por sus múltiples bendiciones, por brindarme salud y permitirme culminar mis estudios universitarios.

A mis padres, Hector Antonio Medina y Estela Marisol Castillo por brindarme su apoyo durante todo el proceso formativo.

A mis hermanas y demás familia, por sus palabras de motivación y apoyo.

A mi compañera de tesis, Karen Rocío García Guardado por la disposición, motivación y paciencia que tuvo durante todo el año de investigación.

A mis compañeros y amigos, porque siempre estuvieron dando su apoyo en los momentos difíciles, dando palabras de aliento.

Cindy Astrid Medina Castillo

Índice general

Resumen	VII
Introducción	VIII
Justificación	IX
Objetivos	X
Simbología	XI
1. Preliminares	1
1.1. Definiciones Básicas	1
1.1.1. Rectas	1
1.1.2. Ángulos	3
1.2. Triángulos	5
1.2.1. Ángulos internos	7
1.2.2. Teorema de Thales	9
1.2.3. Congruencia de triángulos	11
1.2.4. Congruencia de triángulos rectángulos	13

1.2.5.	Semejanza de triángulos	13
1.2.6.	Criterios de semejanza	13
1.3.	Cuadriláteros	14
1.3.1.	Clasificación de los cuadriláteros	14
1.4.	Circunferencia	15
1.4.1.	Ángulos en la circunferencia	17
1.4.2.	Circunferencia circunscrita de triángulos	21
1.4.3.	Cuadriláteros concíclicos	21
1.4.4.	Circunferencia de los nueve puntos	25
1.5.	Transformaciones	30
1.5.1.	Traslación	30
1.5.2.	Rotación	31
1.5.3.	Simetría central	32
1.5.4.	Simetría axial	33
1.5.5.	El problema de Fagnano	34
1.5.6.	El problema de las tres jarras	36
1.6.	Potencia de punto	41
1.6.1.	Potencia interior	41
1.6.2.	Potencia exterior	43
1.6.3.	La recta tangente	44
2.	Inversión geométrica	45
2.1.	Inversión	45

2.2.	Propiedades de la inversión	47
2.3.	Inversor de Peaucellier	56
2.4.	Ejercicios	57
3.	Inversión y circunferencias	61
3.1.	Circunferencias Ortogonales	61
3.2.	Circunferencias Concéntricas	66
3.2.1.	Inversión que pone concéntricas dos circunferencias	66
3.2.2.	Producto inversivo de circunferencias	69
3.2.3.	Distancia inversiva entre circunferencias	72
3.2.4.	Distancia inversiva en función de los radios y distancia entre centros. Relación distancia - producto	73
3.3.	Circunferencias tangentes	76
3.3.1.	El Teorema de Feuerbach	79
3.3.2.	El Teorema de Arbelos	90
3.3.3.	Circunferencia tangente a dos circunferencias dadas y que pasa por un punto dado	91
3.4.	Porisma de Steiner	92
3.5.	El problema de Apolonio	101
3.6.	Ejercicios	104
4.	Reciprocidad y el plano extendido	110
4.1.	Conjugados armónicos	110
4.1.1.	El círculo de Apolonio	113
4.2.	El plano proyectivo y reciprocidad	124

4.2.1. Reciprocidad	125
4.2.2. Dualidad	132
4.3. Puntos Conjugados y Rectas	138
4.3.1. Triángulos Autopolares	143
4.4. Cónicas	146
4.4.1. Teorema del Hexágono Místico de Pascal	154

Bibliografía	159
---------------------	------------

Resumen

Presentamos una de las herramientas de las que dispone la matemática, que nos permite resolver problemas que, sin ella, serían muy difíciles, y es la inversión geométrica. La inversión geométrica es una aplicación que establece una correspondencia biunívoca entre los puntos exteriores y los puntos interiores de una circunferencia dada en un plano; este procedimiento, cuando se aplica a distintas clases de líneas (como rectas o circunferencias), permite generar imágenes inversas de estas líneas con propiedades geométricas reseñables, es por eso que se profundizará en ésta área, y se construirá una teoría sólida con algunos ejemplos y la aplicación de algunas propiedades de inversión. Además veremos que las inversiones se pueden relacionar en áreas, como por ejemplo en geometría analítica, proyectiva, etc. Para ello se hace uso de fuentes bibliográficas confiables escritas y virtuales.

Palabras clave: geometría inversiva, transformaciones geométricas, circunferencia de inversión, puntos inversivos.

Introducción

A continuación se presenta el informe final del trabajo de investigación titulado: Introducción a la geometría inversiva. Damos a conocer los objetivos que se persiguieron a lo largo del proceso, junto con la justificación del estudio. Detallamos brevemente el contenido de cada capítulo.

En el **Capítulo I** presentamos las definiciones y propiedades básicas de la geometría que son necesarias para el estudio de la geometría inversiva. Estos contenidos son los conceptos básicos de geometría, las transformaciones en el plano y algunas aplicaciones de éstas.

En el **Capítulo II** se introduce el término inversión geométrica, y se demuestran las propiedades generales con las que cuenta, y las formas de representación.

En el **Capítulo III** se analizan las propiedades de la inversión geométrica sobre las circunferencias, y como se puede hacer uso de la inversión para resolver problemas como lo son el Porisma de Steiner y el problema de Apolonio. Además, se presenta la definición, propiedades y representación de la distancia inversiva.

En el **Capítulo IV** se aplica la teoría de la inversión en diferentes áreas de la geometría para la realización de demostraciones.

Y al final del documento aparece la bibliografía.

Justificación

Esta investigación trata sobre una Introducción a la Geometría Inversiva, la cual surge con el objeto de dar a conocer sobre Geometría Inversiva en la Facultad Multidisciplinaria Oriental de la Universidad de El Salvador, ya que captó nuestro interés que en dicha Facultad no se encuentren investigaciones previas en esta área de la geometría debido a que es un tema no considerado en la currícula actual. Así mismo, se busca cumplir los requerimientos del trabajo de grado para optar al título de Licenciatura en Matemática; formando una bibliografía práctica y completa para temas relacionados a la Geometría Inversiva, y que ésta sirva como base para futuras investigaciones que amplíen esta área de geometría.

Se pretende presentar un documento en el cual el lector pueda comprender como funciona la Geometría Inversiva y algunas de sus aplicaciones.

La geometría se relaciona con otras áreas como por ejemplo Física, como se da en las transformaciones, por lo que interesante profundizar en ésta, debido a que con teoremas de geometría común se puede dar solución a problemas que, sin estos, sería muy difícil. Uno de los resultados al desarrollar esta teoría es poder demostrar teoremas como el Porisma de Steiner, el círculo de Apolonio y el Teorema del hexágono místico de Pascal, para los cuales es de gran utilidad la inversión y como esta funciona para poder desarrollar su demostración.

Objetivos

General

- Desarrollar una teoría introductoria de la Geometría Inversiva con bases de la geometría euclidiana.

Específicos

- Proveer una lista de temáticas básicas para el desarrollo de la teoría de geometría inversiva.
- Enunciar y demostrar las propiedades con las que cuenta la inversión geométrica.
- Proporcionar ejemplos de algunas aplicaciones de la geometría inversiva.

Simbología

f	: Recta f .
\vec{g}	: Semirrecta g , vector g .
\overline{AB}	: Segmento AB .
\sphericalangle	: Ángulo.
\triangle	: Triángulo.
\parallel	: Paralelo.
\perp	: Perpendicular.
\cong	: Congruencia.
\sim	: Semejanza.
\widehat{AB}	: Arco AB .
\cap	: Intersección.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Definiciones Básicas

Definición 1.1. Un **punto** es un objeto que no tiene dimensiones que indica una posición en el espacio. Se suelen designar con letras mayúsculas.

1.1.1. Rectas

Definición 1.2. Una **recta** es una sucesión infinita de puntos que tienen la misma dirección. La recta no tiene ni principio ni fin. Por dos puntos del plano pasa una única recta. Se nombra por medio de una letra minúscula. En la Figura 1.1 representamos una recta por la letra f .

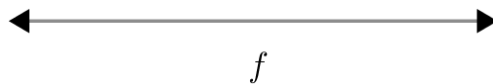


Figura 1.1: Recta f

Definición 1.3. Una **semirrecta** se define como un subconjunto de puntos de una recta, también infinito (y alineado en una misma dirección), del cual se conoce un primer punto considerado su inicio u origen y a partir del cual, la sucesión de puntos es infinita en el sentido indicado. Por este motivo, y como parte de una definición menos académica pero muy clara, se suele decir que una semirrecta siempre tiene principio pero no tiene fin. Su representación en la Figura 1.2.

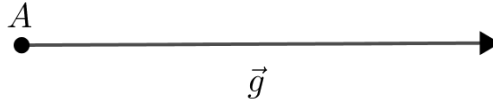


Figura 1.2: Semirrecta \vec{g}

Definición 1.4. Un **segmento** es la porción de recta limitada por dos puntos de la misma. A estos dos puntos se les llama extremos del segmento. Su representación en la Figura 1.3.

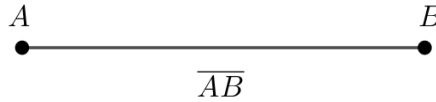


Figura 1.3: Segmento \overline{AB}

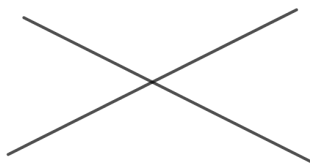
Relaciones entre rectas:

- Rectas paralelas: Son las rectas situadas en el mismo plano que por mucho que se prolonguen nunca se cortan. (Figura 1.4 a)).
- Rectas secantes: Son las rectas situadas en un mismo plano que se cortan en un punto. (Figura 1.4 b)).
- Rectas perpendiculares: Son las rectas secantes que dividen al plano en cuatro partes iguales formando cuatro ángulos rectos. (Figura 1.4 c)).

Rectas paralelas



Rectas secantes



Rectas perpendiculares

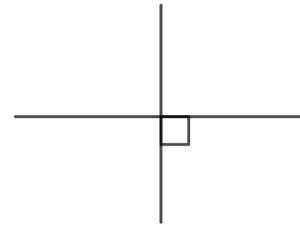


Figura 1.4: Relación entre rectas

Definición 1.5. La **Mediatriz de un segmento** es la recta perpendicular al segmento en su punto medio. Divide al segmento en dos partes iguales.

1.1.2. Ángulos

Definición 1.6. Un **ángulo** es la región del plano comprendida entre dos semirrectas que tienen el mismo origen. Usamos como notación $\angle AOB$ para referirnos al ángulo representado en la Figura 1.5.

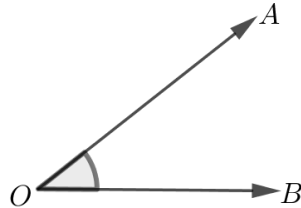


Figura 1.5: Ángulo AOB

Elementos de los ángulos

- Vértice: Punto en común que tienen sus lados.
- Lados: Cada uno de las semirrectas que lo forman.
- Amplitud: Es la apertura de sus lados y se mide en grados o radianes .

Definición 1.7. La **bisectriz de un ángulo** es la semirrecta con origen en el vértice del ángulo y que lo divide en dos ángulos de igual medida.

Clasificación de los ángulos

- Ángulo agudo: Aquel cuya medida es $0 < \alpha < 90^\circ$.
- Ángulo recto: Aquel cuya medida es igual a 90° .
- Ángulo obtuso: Aquel cuya medida es $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.
- Ángulo llano: Aquel que mide 180° (dos ángulos rectos).
- Ángulo completo: Aquel que mide 360° (cuatro ángulos rectos).
- Ángulo nulo: Es el ángulo que mide 0° .

Relación entre ángulos.

- Complementarios: Son los que sus medidas suman 90° .

- **Suplementarios:** Son los que sus medidas suman 180° .
- **Consecutivos:** Dos ángulos que tienen un lado y el vértice en común.
- **Adyacentes:** Son dos ángulos que tienen un lado y el vértice comunes, y el otro lado en la misma línea recta.
- **Opuestos por el vértice:** Si los lados de uno son prolongación de los del otro ángulo.

Teorema 1.1. *Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.*

Demostración.

Sean los ángulos opuestos por el vértice que se muestran en la Figura 1.6, y notan que:

$$\begin{aligned}
 a + b = 180^\circ \wedge b + c = 180^\circ &\implies a + b = b + c = 180^\circ \\
 &\implies a = c
 \end{aligned}$$

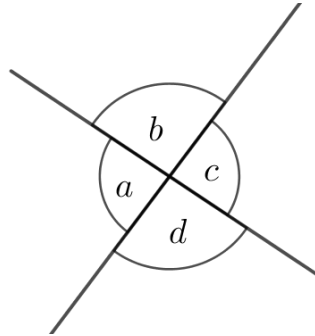


Figura 1.6: Ángulos opuestos por el vértice

■

Ángulos entre paralelas

Al intersecar un par de rectas paralelas por una recta llamada transversal o secante, se forman los siguientes pares de ángulos.

- Ángulos Correspondientes:** Son dos ángulos no adyacentes situados en el mismo lado de la secante, uno en el interior y otro en el exterior de las paralelas. En la Figura 1.7 tenemos los ángulos correspondientes: (β, ψ) , (ϕ, θ) , (α, ϵ) y (γ, η) .
- Ángulos Alternos Internos:** Son dos ángulos no adyacentes situados en el interior de las paralelas, y en distintos lados de la secante. En la Figura 1.7 tenemos los ángulos alternos internos: (ϕ, ϵ) y (γ, ψ) .

- c) **Ángulos Alternos Externos:** Son dos ángulos no adyacentes situados en el exterior de las paralelas, y en distintos lados de la secante. En la Figura 1.7 tenemos los ángulos alternos externos: (β, η) y (α, θ) .
- d) **Ángulos Conjugados:** Son dos ángulos internos o externos, no adyacentes y situados del mismo lado de la secante. En la Figura 1.7 tenemos los ángulos conjugados: (ϕ, ψ) , (γ, ϵ) , (β, θ) y (α, η) .

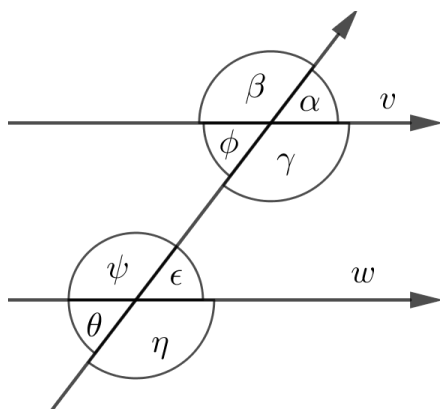


Figura 1.7: Ángulos entre paralelas

Si v y w son paralelas (Figura 1.7) se cumple que:

1. Ángulos alternos son congruentes

$$\gamma = \psi, \phi = \epsilon, \beta = \eta, \text{ y } \alpha = \theta$$

2. Ángulos correspondientes son congruentes

$$\beta = \psi, \phi = \theta, \alpha = \epsilon, \gamma = \eta$$

3. Ángulos conjugados son suplementarios

$$\phi + \psi = 180^\circ, \gamma + \epsilon = 180^\circ, \beta + \theta = 180^\circ, \text{ y } \alpha + \eta = 180^\circ$$

1.2. Triángulos

Definición 1.8. Si A, B y C son tres puntos cualesquiera no colineales, entonces la reunión de los segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}$ y \overline{AC} se llama **triángulo** ABC y se denota así: $\triangle ABC$. Los puntos A, B y C se llaman **vértices** y los segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}$ y \overline{AC} se llaman **lados**. Todo triángulo ABC determina tres ángulos $\angle BAC, \angle ABC$ y $\angle ACB$, a los que llamaremos **ángulos del $\triangle ABC$** . (Ver Figura 1.8)

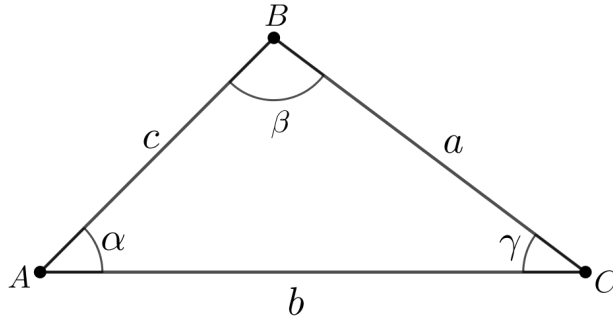


Figura 1.8: Representación del Triángulo ABC

Líneas notables de un triángulo

A) **Altura.** En un triángulo es el segmento que parte de uno de sus vértices y llega en forma perpendicular al lado opuesto o a su prolongación. En la Figura 1.9 a) y b), \overline{BF} y \overline{BL} , son respectivamente las alturas. Todo triángulo tiene tres alturas las cuales concurren en un punto llamado *ortocentro* H (Figura 1.9 c)).

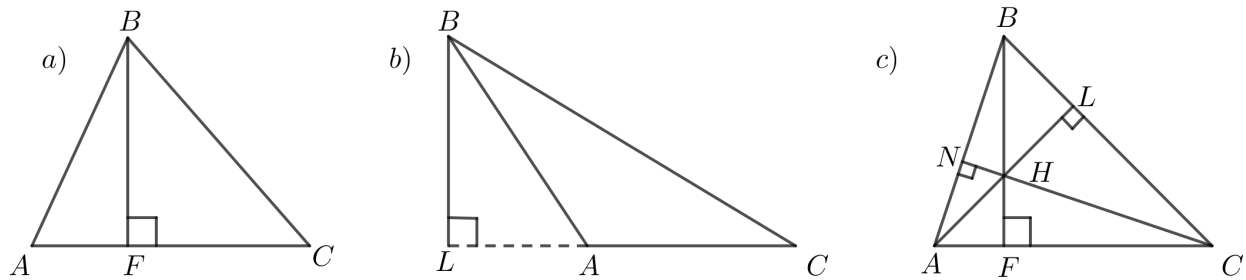


Figura 1.9: Representación de alturas y ortocentro

B) **Mediana.** En un triángulo, esta línea notable se define como el segmento determinado por un vértice y el punto medio del lado opuesto, tal como \overline{BM} lo es en el $\triangle ABC$ en la Figura 1.10 a). Además, al punto donde concurren las medianas se le llama *Baricentro* o *Centroide* G , Figura 1.10 b).

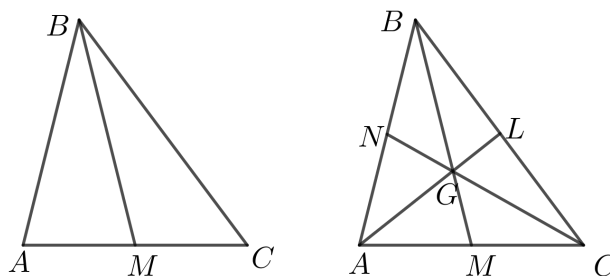


Figura 1.10: Representación de medianas y centroide

C) Mediatriz. Esta línea se define para cada lado del triángulo, y es la recta perpendicular al lado en su punto medio, l , lo es para \overline{AC} en el $\triangle ABC$ (Figura 1.11 a)). Las mediatrices relativas a los tres lados de un triángulo son concurrentes, en un punto llamado *circuncentro* O (Figura 1.11 b)). La característica de este punto es el de equidistar de los vértices del triángulo.

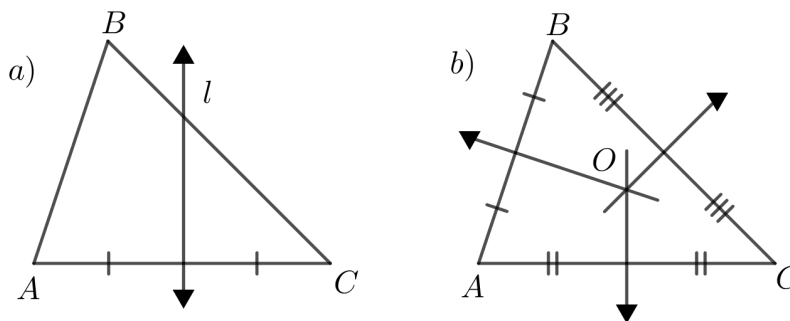


Figura 1.11: Representación de las mediatrices y circuncentro

D) Bisectriz. Definiremos bisectriz de un triángulo como la línea notable que es parte de la bisectriz de uno de sus ángulos, limitado por el lado opuesto o por su prolongación, tal como sucede con la bisectriz interior \overline{BD} y la bisectriz exterior \overline{BE} del $\triangle ABC$ (Figura 1.12 a)). El punto donde concurren las tres bisectrices interiores de un triángulo se llama *Incentro* I (Figura 1.12 b)).

El punto donde concurren las bisectrices de dos ángulos exteriores con la bisectriz del tercer ángulo interior se conoce con el nombre de *Excentro* E (Figura 1.12 c)).

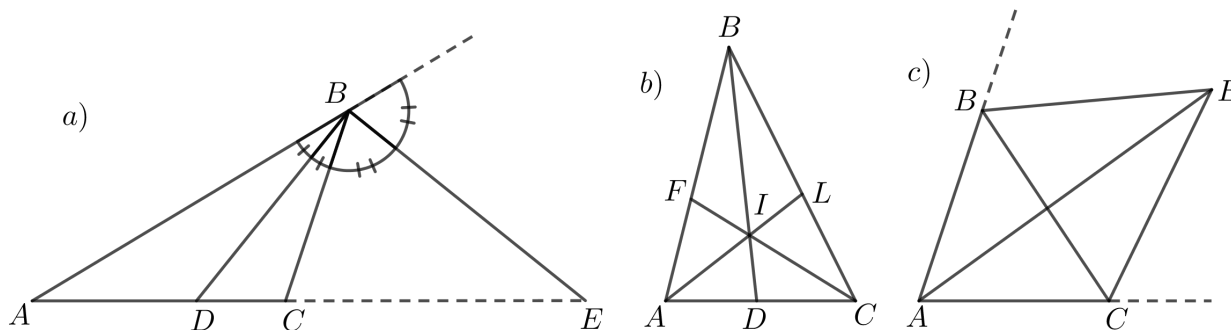


Figura 1.12: Representación de bisectrices, incentro y excentro

1.2.1. Ángulos internos

Teorema 1.2. *La suma de los ángulos internos de un triángulo es 180° .*

Demostración.

Sea ABC el triángulo, tracemos una recta paralela a \overline{BC} que será \overline{DE} la cual pasa por el punto A . (Figura 1.13)

Por ángulos alternos internos tenemos que $\angle ABC = \angle BAD$ (1) y $\angle ACB = \angle CAE$ (2)

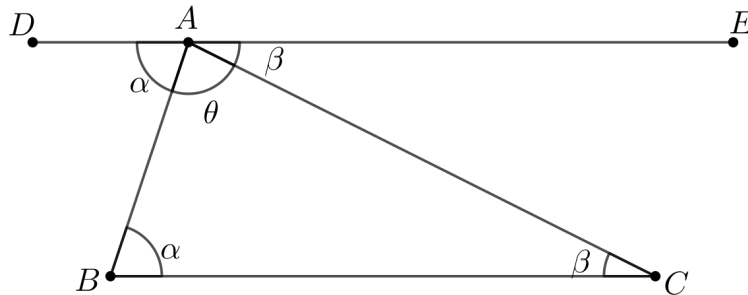


Figura 1.13: Suma de ángulos internos

Como D, A y E son colineales, entonces $\angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180^\circ$
De (1) y (2), tenemos que $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180^\circ$. ■

Teorema 1.3. *El ángulo externo de un triángulo es la suma de los ángulos internos de los vértices no adyacentes.*

Demostración.

Sea ABC el triángulo y D un punto en la prolongación del segmento \overline{BC} . (Figura 1.14)
Sea $\angle BAC = \alpha$, $\angle ACB = \gamma$ y $\angle ABC = \beta$. Y sea $\angle ACD = \theta$

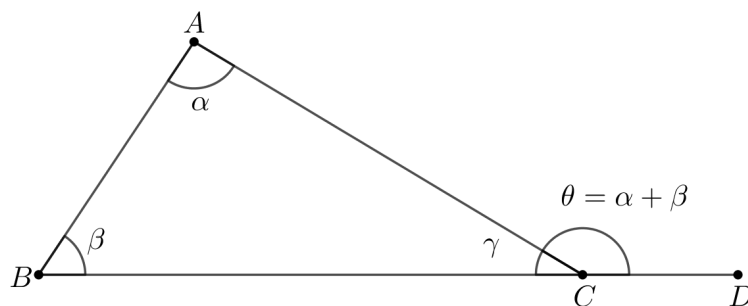


Figura 1.14: Ángulo externo de un triángulo

Por el Teorema 1.2 tenemos que la suma de ángulos internos de un triángulo es de 180° , es decir, $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$; además, por ángulos suplementarios tenemos que:

$$\begin{aligned} \theta + \gamma = 180^\circ &\implies \theta + \gamma = \alpha + \beta + \gamma \\ &\implies \theta = \alpha + \beta \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Los triángulos se clasifican según dos criterios, uno es con respecto a sus lados y, el otro es con respecto a sus ángulos:

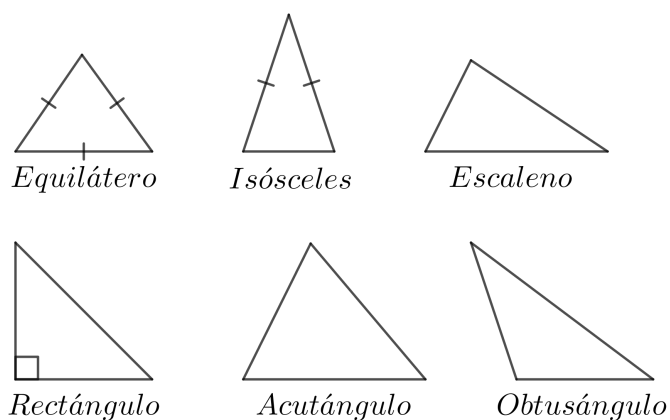


Figura 1.15: Clasificación de triángulos

a) Con relación a sus lados

- Equilátero. Si sus tres lados son congruentes.
- Isósceles. Si por lo menos dos de sus lados son congruentes.
- Escaleno. Si sus tres lados no son congruentes.

b) Con relación a sus ángulos

- Acutángulo. Si sus tres ángulos son agudos.
- Rectángulo. Si uno de sus ángulos es recto.
- Obtusángulo. Si uno de sus ángulos es obtuso.

1.2.2. Teorema de Thales

Primero demostraremos algunas propiedades:

1. La magnitud de la altura entre dos rectas paralelas es constante.

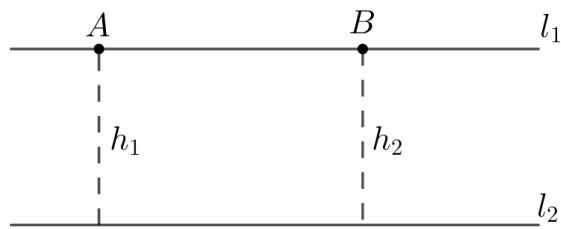


Figura 1.16: Propiedad 1

Sean l_1 y l_2 rectas paralelas (Figura 1). Tomamos los puntos A y B en l_1 y trazamos sus alturas hacia l_2 , así los puntos A y B tienen sus alturas h_1 y h_2 , respectivamente; y así observamos que se forma un rectángulo, y como sus lados opuestos son iguales entonces h_1 y h_2 son iguales.

Por lo tanto, la distancia entre paralelas se debe mantener constante. ■

2. En todo trapecio $ABCD$ con $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ se cumple que $(ABC) = (BCD)$, donde (ABC) y (BCD) denotan el área del polígono determinado por los puntos involucrados.

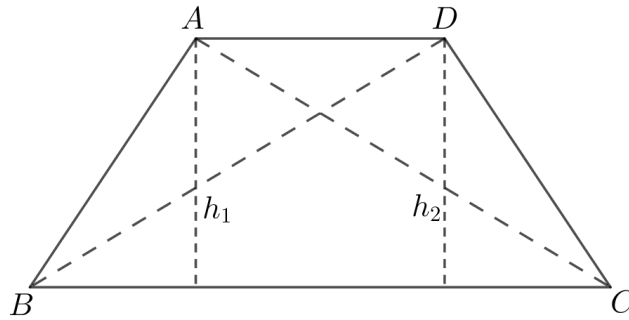


Figura 1.17: Propiedad 2

Por la propiedad 1, la altura bajada de A y D , h_1 y h_2 , respectivamente (Figura 1.17); son iguales ya que $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, además, $\triangle ABC$ y $\triangle BCD$ comparten su base \overline{BC} y como sabemos la fórmula de área de un triángulo es $\frac{b \times h}{2}$. Ahora ya tenemos que tienen la misma base y que sus alturas son iguales, por lo tanto $(ABC) = (BCD)$. ■

3. Si en el segmento \overline{BC} del triángulo ABC se toma un punto arbitrario P , entonces $\frac{BP}{CP} = \frac{(ABP)}{(ACP)}$.

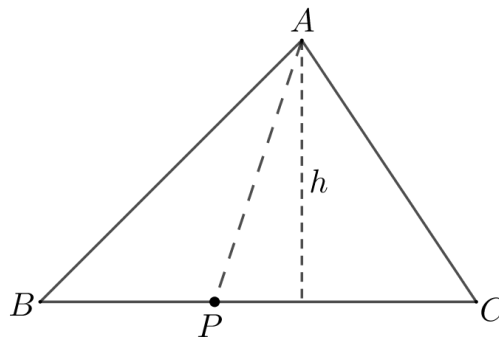


Figura 1.18: Propiedad 3

Tenemos por la fórmula del área del triángulo que:

$$(ABP) = \frac{BP \cdot h}{2} \text{ y } (ACP) = \frac{CP \cdot h}{2} \implies \frac{(ABP)}{(ACP)} = \frac{\frac{BP \cdot h}{2}}{\frac{CP \cdot h}{2}} = \frac{BP}{CP}. \blacksquare$$

Teorema 1.4. Teorema de Thales. Si tres paralelas cortan a dos secantes entonces los segmentos que determinan en ellas son proporcionales.

Demostración.

Sean $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ rectas paralelas que cortan a dos secantes en los puntos A, A', B, B', C, C' , respectivamente. (Figura 1.19).

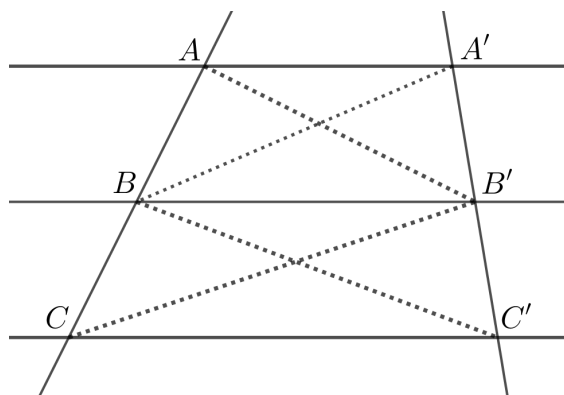


Figura 1.19: Teorema de Thales

Por la propiedad 3 tenemos que $\frac{AB}{BC} = \frac{(ABB')}{(BB'C)}$. Además, $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{(A'BB')}{(BB'C')}$.

Consideremos el trapecio $ABB'A'$, así tenemos que $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'}$, por lo que por propiedad 2, se cumple que $(ABB') = (A'BB')$.

Ahora, consideremos el trapecio $CBB'C'$, así tenemos que $\overline{CC'} \parallel \overline{BB'}$, así por propiedad 2, se cumple que $(BB'C) = (BB'C')$.

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{AB}{BC} &= \frac{(ABB')}{(BB'C)} \\ &= \frac{(A'BB')}{(BB'C')} \\ &= \frac{A'B'}{B'C'} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

1.2.3. Congruencia de triángulos

Dados dos triángulos ABC y $A'B'C'$, en donde sus vértices se corresponden biunívocamente, entonces existe una correspondencia entre los lados y los ángulos de dichos triángulos.

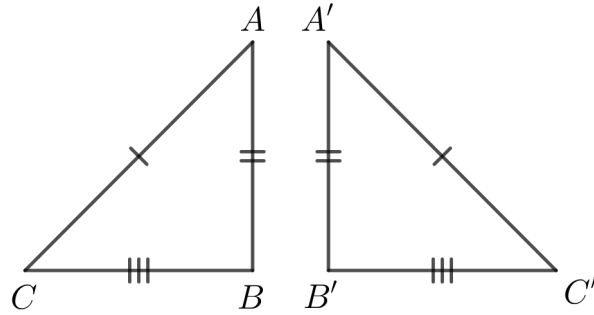


Figura 1.20: Triángulos Congruentes

Además, si los elementos se corresponden, entonces dichos elementos son congruentes, y como tal los triángulos son congruentes. Luego podemos decir (Figura: 1.20): Dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si y sólo si:

$$\begin{aligned} \overline{AB} &\cong \overline{A'B'}, & \angle A &\cong \angle A' \\ \overline{AC} &\cong \overline{A'C'}, & \angle B &\cong \angle B' \\ \overline{BC} &\cong \overline{B'C'}, & \angle C &\cong \angle C' \end{aligned}$$

Se denota: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ y se lee:

«El triángulo ABC es congruente al triángulo $A'B'C'$ »

- Postulado I. ALA (ángulo – lado – ángulo)

Dos triángulos son congruentes, si tienen congruentes un lado y los ángulos adyacentes a él.
Si: $\angle A \cong \angle A'$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, $\angle C \cong \angle C' \implies \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

- Postulado II. LAL (lado – ángulo – lado)

Dos triángulos son congruentes, si tienen congruentes dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

$$\text{Si: } \overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \angle A \cong \angle A', \overline{AC} \cong \overline{A'C'} \implies \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

- Postulado III. LLL (lado – lado – lado)

Dos triángulos son congruentes si los tres lados del primer triángulo son congruentes con los tres lados correspondientes del segundo.

$$\text{Si: } \overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \overline{AC} \cong \overline{A'C'}, \overline{BC} \cong \overline{B'C'} \implies \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

1.2.4. Congruencia de triángulos rectángulos

- Postulado I. Dos triángulos rectángulos son congruentes, si tienen sus catetos congruentes.
- Postulado II. Dos triángulos rectángulos son congruentes, si tienen congruentes la hipotenusa y un ángulo agudo.
- Postulado III. Dos triángulos rectángulos son congruentes, si tienen congruentes la hipotenusa y un cateto.

1.2.5. Semejanza de triángulos

La semejanza de triángulos es una generalización de la congruencia de triángulos, y describe como se mantienen constante las propiedades entre dos figuras que cumplen con cierta similitud, o en figuras que están a escala. Decimos que el $\triangle ABC$ es semejante al $\triangle A'B'C'$, lo cual se denota como $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, si:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

$$\angle BAC = \angle B'A'C', \quad \angle ABC = \angle A'B'C' \quad \text{y} \quad \angle ACB = \angle A'C'B'$$

1.2.6. Criterios de semejanza

- Criterio I. (A – A).

Si dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos ángulos de otro triángulo, entonces los dos triángulos son semejantes.

- Criterio II. (L – A – L).

Si un ángulo de un triángulo es congruente con el de otro triángulo y los lados que comprenden al ángulo en el primer triángulo son respectivamente proporcionales a los lados que comprende al ángulo en el segundo triángulo, entonces los dos triángulos son semejantes.

- Criterio III. (L – L – L).

Si los tres lados de un triángulo son respectivamente proporcionales a los tres lados de otro triángulo, entonces los dos triángulos son semejantes.

1.3. Cuadriláteros

Definición 1.9. *Dados los puntos coplanares A, B, C y D , donde cualquier terna de puntos tiene la característica de no ser colineal, entonces a la reunión de los segmentos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} y \overline{AD} se denomina cuadrilátero $ABCD$. Los puntos A, B, C y D se llaman vértices y los segmentos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} y \overline{AD} se llaman lados.*

En todo cuadrilátero se pueden trazar en total dos diagonales y las sumas de las medidas de sus ángulos internos es siempre 360° .

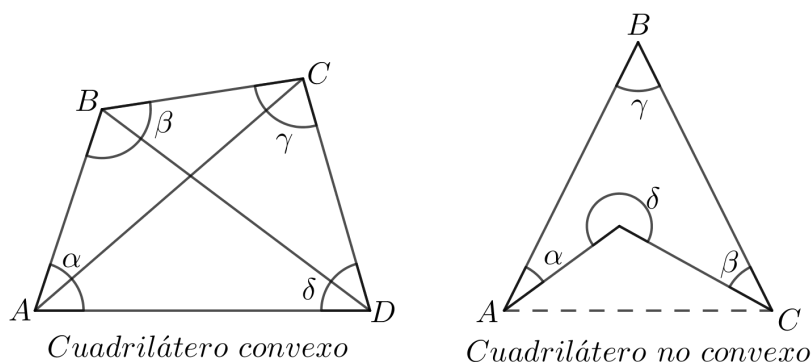


Figura 1.21: Representación de cuadriláteros y sus diagonales y suma $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$

1.3.1. Clasificación de los cuadriláteros

1. Trapezoide. Es un cuadrilátero que no tiene lados paralelos, al que también se denomina cuadrilátero asimétrico (Figura 1.22 a)). Un cuadrilátero donde una diagonal es mediatriz de la otra se llama trapezoide simétrico (Figura 1.22 b)), trapezoide bisósceles o contraparalelogramo. En todo trapezoide simétrico dos pares de lados consecutivos son siempre congruentes.

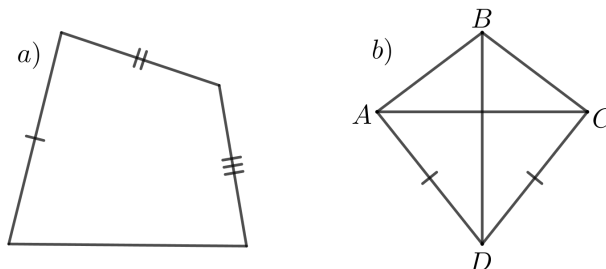


Figura 1.22: Trapezoides

2. Trapecio. Llamamos así al cuadrilátero que tiene dos lados paralelos denominados bases y los otros dos no son paralelos. La distancia entre sus bases se llama altura y el

segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos se denomina mediana. Un trapecio cuyos lados no paralelos son diferentes se llama *trapecio escaleno* (Figura 1.23 a)). Si los lados no paralelos son congruentes llama *trapecio isósceles* (Figura 1.23 b)), y si uno de los lados no paralelos es perpendicular a las bases se llama *trapecio rectángulo* (Figura 1.23 c)).

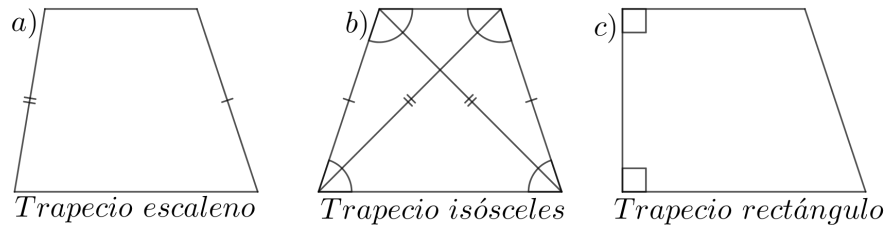


Figura 1.23: Clases de trapecios

3. Paralelogramo. Aquel cuadrilátero que tiene sus lados opuestos paralelos y congruentes. En todo paralelogramo se cumple que sus ángulos opuestos son congruentes y sus diagonales se bisecan (Figura 1.24). Todo paralelogramo tiene dos alturas.

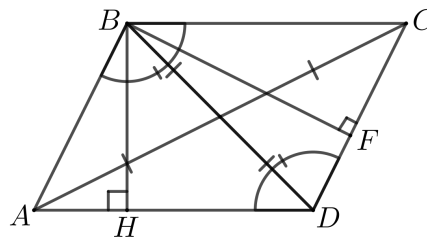


Figura 1.24: Paralelogramo

1.4. Circunferencia

Definición 1.10. Sea O un punto de un plano, y R un número positivo. La circunferencia con centro O y radio R es el conjunto de todos los puntos del plano que están a la misma distancia R del punto O . Todo punto que pertenece a la circunferencia se llamará *aferente*.

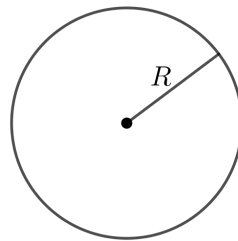


Figura 1.25: Circunferencia con centro O y radio R

Líneas de la circunferencia

En la Figura 1.26, se han representado las siguientes líneas sobre la circunferencia.

- Radio \overline{OR} . Es el segmento que une cualquier punto de la circunferencia con su centro, la notación R indica la longitud del radio.
- Cuerda \overline{MN} . Es el segmento que une dos puntos de la circunferencia.
- Diámetro \overline{AB} . Es toda cuerda que pasa por el centro de la circunferencia. La medida del diámetro equivale a $2R$.
- Arco \widehat{MN} . Es la porción de circunferencia limitada por dos puntos.
- Flecha o sagita \overline{CF} . Segmento de recta determinado al trazar un radio que es perpendicular a una cuerda y que queda comprendido entre la cuerda y el arco que subtiende.
- Recta tangente l . Recta coplanar que tiene un punto D , en común con la circunferencia.
- Secante f . Es aquella recta que tiene dos puntos E y F , comunes con la circunferencia.

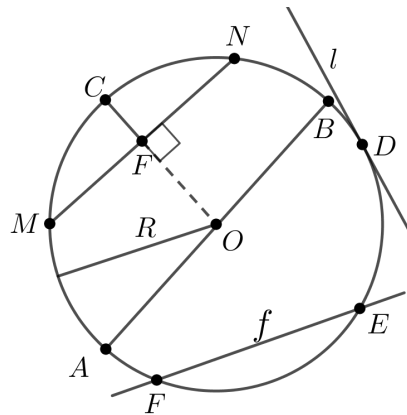


Figura 1.26: Líneas de la circunferencia

Ecuación de la circunferencia. Forma ordinaria

Teorema 1.5. *La circunferencia cuyo centro es el punto (h, k) y cuyo radio es la constante r , tiene por ecuación*

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad (1.1)$$

Demostración.

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la circunferencia (Figura 1.27) de centro $C(h, k)$ y radio r . Por Definición 1.10, el punto P debe satisfacer la condición geométrica

$$|\overline{CP}| = r \quad (1.2)$$

la cual, por ecuación de distancia entre dos puntos, tenemos:

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r,$$

de donde,

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad (1.3)$$

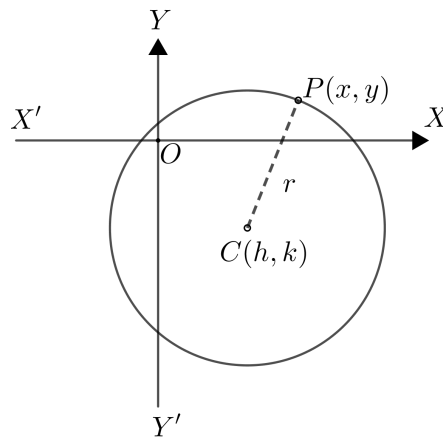


Figura 1.27: Ecuación Ordinaria de la Circunferencia

■

Para el caso particular en que el centro C está en el origen, $h = k = 0$, y tenemos:

Corolario 1.1. *La circunferencia de centro en el origen y radio r tiene por ecuación*

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (1.4)$$

1.4.1. Ángulos en la circunferencia

Dentro de la circunferencia podemos distinguir los siguientes tipos de ángulos:

- **Ángulo central:** Ángulo que tiene como vértice el centro de la circunferencia. En la Figura 1.28 el ángulo central es el $\angle AOB$.
- **Ángulo inscrito:** Ángulo formado por dos cuerdas con un vértice en común, es decir, los tres puntos están en la circunferencia. En la Figura 1.28 el ángulo inscrito es el $\angle CDE$.
- **Ángulo seminscrito:** Ángulo formado por una cuerda y una recta tangente en alguno de los extremos de la cuerda. En la Figura 1.28 el ángulo seminscrito es el $\angle FGH$.
- **Ángulo ex-inscrito:** Ángulo formado por una secante y una cuerda, y su vértice es uno de los puntos en común. En la Figura 1.28 el ángulo ex-inscrito es $\angle JKL$.

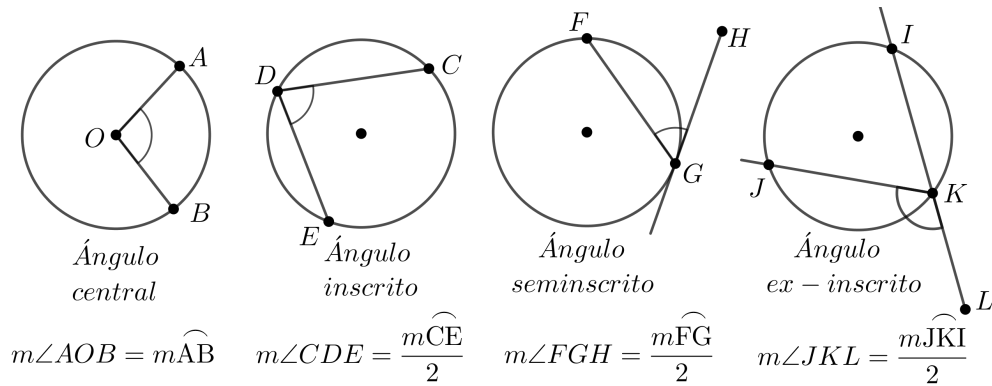


Figura 1.28: Ángulos en una circunferencia

Teorema 1.6. *El ángulo inscrito es igual a la mitad del ángulo central.*

Demostración.

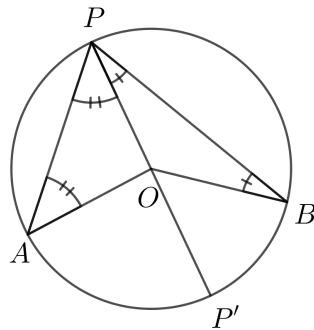


Figura 1.29: Construcción de Teorema 1.6

Sea A , P y B tres puntos en una circunferencia de centro O (Figura 1.29). Siendo el $\angle APB$ el ángulo inscrito y el $\angle AOB$ el ángulo central. Sea P' el punto diametralmente

opuesto a P . Tenemos que $\triangle AOP$ y $\triangle BPO$ son isósceles ya que los lados \overline{PO} , \overline{OA} , y \overline{OB} son radios. Ahora por ángulos externos tenemos:

$$\begin{aligned}\angle AOB &= \angle AOP' + \angle BOP' \\ &= (\angle APO + \angle OAP) + (\angle BPO + \angle OBP) \\ &= 2\angle APO + 2\angle BPO \\ &= 2(\angle APO + \angle BPO) \\ &= 2\angle APB \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Por lo que podemos afirmar que todos los ángulos inscritos que subtienden un mismo arco son iguales.

Teorema 1.7. *Toda recta tangente a una circunferencia es perpendicular al segmento que une el centro de la circunferencia con el punto de tangencia.*

Demostración.

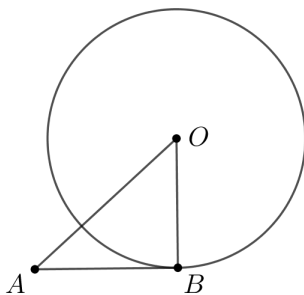


Figura 1.30: Construcción de Teorema 1.7

(Razonando por contradicción.)

Sea O el centro de la circunferencia y B el punto de tangencia (Figura 1.30). Supongamos que \overline{OB} no es perpendicular a la recta tangente en el punto de tangencia. Supongamos entonces que una recta trazada desde O corta a la tangente en un punto A perpendicularmente.

$$\begin{aligned}\implies |OA| &< |OB| \\ \implies |OA| &< r\end{aligned}$$

Entonces A debe ser un punto interior, pero A pertenece a la recta tangente y el único punto que pertenece a la circunferencia es el punto de tangencia B ($\rightarrow\leftarrow$). Por lo tanto, \overline{OB} es perpendicular a la recta tangente \overline{AB} . \blacksquare

Teorema 1.8. *El ángulo seminscritos es igual al ángulo inscrito.*

Demostración.

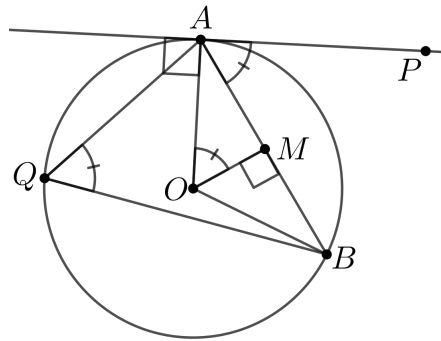


Figura 1.31: Construcción de Teorema 1.8

Sean O el centro de la circunferencia, \overline{AB} una cuerda de la circunferencia (Figura 1.31), y, M el punto medio de \overline{AB} y P un punto sobre la tangente en A . Sea $\angle AQB$ el ángulo inscrito.

Tenemos que: $\triangle OAB$ es isósceles, ya que \overline{AO} y \overline{OB} son radios, además, la bisectriz \overline{OM} del ángulo opuesto a la base \overline{AB} , corta a la base en su punto medio que coincide con la mediana del lado \overline{AB} , entonces $\overline{AB} \perp \overline{OM}$.

Luego, por Teorema 1.7 tenemos que:

$$\begin{aligned} \angle PAO = 90^\circ &\implies \angle PAB = 90^\circ - \angle OAB \\ &= 90^\circ - (90^\circ - \angle AOM) \\ &= \angle AOM \\ &= \frac{\angle AOB}{2} \\ &= \angle AQB \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 1.9. *Dos rectas tangentes desde un mismo punto exterior hacia una misma circunferencia tienen igual longitud.*

Demostración.

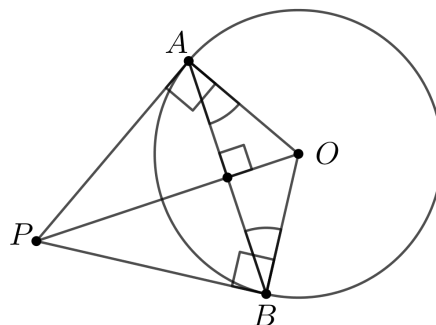


Figura 1.32: Construcción de Teorema 1.9

Sea P el punto exterior a una circunferencia de centro O del cual se trazan dos rectas tangentes \overline{PA} y \overline{PB} (Figura 1.9).

Como $OA = OB$ por ser radios, entonces $\angle OAB = \angle OBA$.

Por Teorema 1.7, $\angle PAO = \angle PBO = 90^\circ$, por tanto $\angle ABP = \angle BAP$, por lo que $\triangle ABP$ es isósceles con $PA = PB$. ■

1.4.2. Circunferencia circunscrita de triángulos

Como sabemos, el circuncentro es el punto en el que se intersecan las tres mediatrices de un triángulo, pero además, es el centro de la circunferencia circunscrita. Entre los vértices de un triángulo, como extremos de cada lado, existe la misma distancia que la que hay entre los vértices y sus mediatrices, luego el punto donde estas se cortan, será equidistante de los tres vértices: el circuncentro.

Hay tres casos de triángulos que se representan en la Figura 1.33:

- a) Triángulo rectángulo, circuncentro en el punto medio de la hipotenusa.
- b) Triángulo obtusángulo, circuncentro en el exterior del triángulo.
- c) Triángulo acutángulo, circuncentro en interior del triángulo.

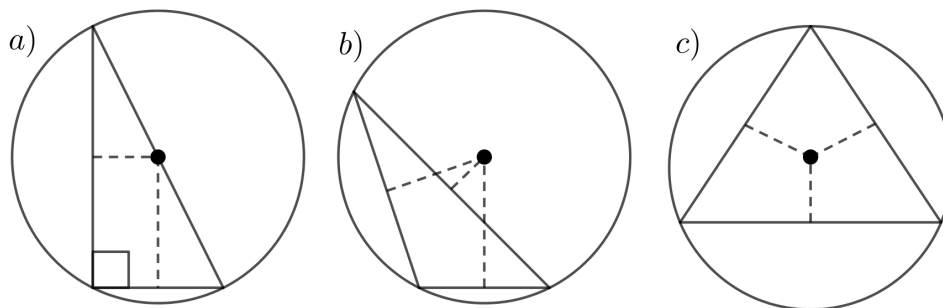


Figura 1.33: Circunferencias circunscritas

1.4.3. Cuadriláteros concíclicos

Algunos cuadriláteros especiales tienen como cualidad la existencia de una circunferencia que pasa por cada uno de sus cuatro vértices, a dichos cuadriláteros se les denomina *cuadriláteros concíclicos*.

Una de las propiedades de los cuadriláteros concíclicos es:

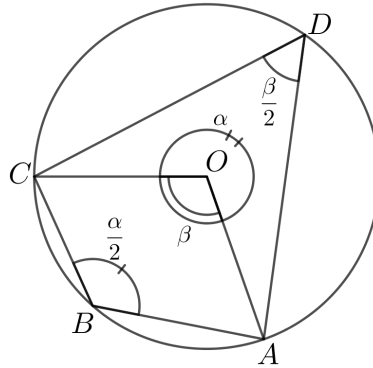


Figura 1.34: Cuadrilátero concíclico

Sean A, B, C y D puntos en una circunferencia de centro O , los cuales determinan un cuadrilátero convexo $ABCD$ (Figura 1.34). Notemos que $\angle ABC + \angle CDA = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}$, pero como $\alpha + \beta = 360^\circ$ entonces $\angle ABC + \angle CDA = 180^\circ$.

Análogamente $\angle BCD + \angle BAD = 180^\circ$. Así podemos concluir que en todo cuadrilátero concíclico sus ángulos opuestos son suplementarios.

Las dos condiciones mínimas para establecer que un cuadrilátero es concíclico son:

1. Si en un cuadrilátero convexo $ABCD$ se cumple que $\angle B + \angle D = 180^\circ$ entonces $ABCD$ es concíclico. (Ver Figura 1.35)

Demostración.

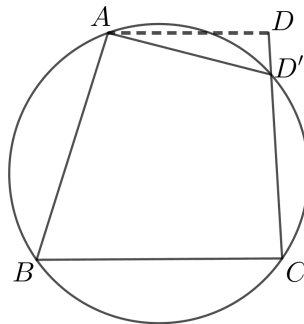


Figura 1.35: Condición 1

(Razonando por contradicción.)
Suponemos que $ABCD$ no es concíclico.

Sea el cuadrilátero $ABCD$ tal que $\angle B + \angle D = 180^\circ$ (1)

Sea D' el punto entre \overline{CD} que se interseca con el circuncírculo de $\triangle ABC$, lo cual hace que el cuadrilátero $ABCD'$ sea concíclico, por consiguiente $\angle B + \angle D' = 180^\circ$ (2)

De (1) y (2), tenemos que $\angle B + \angle D = \angle B + \angle D'$, por lo tanto $\angle D = \angle D'$, implicando que $\overline{AD} \parallel \overline{AD'}$ ($\rightarrow \leftarrow$)

Ya que los segmentos \overline{AD} y $\overline{AD'}$ se cortan en el punto A .

Por lo tanto lo supuesto es falso, entonces el cuadrilátero $ABCD$ es concíclico. ■

2. Si en un cuadrilátero convexo $ABCD$ se cumple que $\angle ABD = \angle DCA$ entonces $ABCD$ es concíclico. (Ver Figura 1.36)

Demostración.

Sea E la intersección de las diagonales del cuadrilátero.

Por hipótesis tenemos que $\angle ABD = \angle DCA = \alpha$ y $\angle AEB = \angle DEC$, por ser ángulos opuestos por el vértice, por lo que los triángulos ABE y CDE son semejantes (por el criterio I de semejanza), entonces $\angle BAE = \angle CDE = \theta$, y así $\frac{AE}{DE} = \frac{BE}{CE}$.

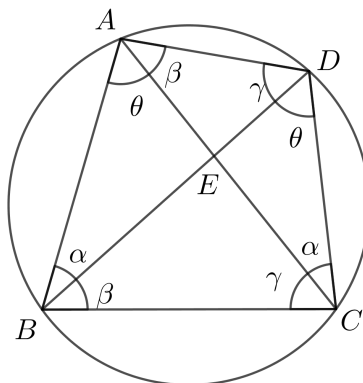


Figura 1.36: Condición 2

Además, $\angle AED = \angle BEC$, por ser ángulos opuestos por el vértice, entonces por lo anterior tenemos que los triángulos ADE y BCE son semejantes.

Así, $\angle EAD = \angle EBC = \beta$ y $\angle EDA = \angle ECB = \gamma$.

Luego, sumamos los ángulos internos y tenemos:

$$\begin{aligned} \angle A + \angle B + \angle C + \angle D &= \theta + \beta + \gamma + \theta + \alpha + \gamma + \beta + \alpha \\ &= 2(\alpha + \beta + \theta + \gamma) \\ &= 2(\angle A + \angle C) \\ &= 360^\circ \end{aligned}$$

Entonces, $\angle A + \angle C = 180^\circ$, lo cual probamos en la condición anterior.

Por lo tanto el cuadrilátero $ABCD$ es concíclico. ■

Propiedades

Teorema 1.10. *Un cuadrilátero concíclico con dos lados paralelos es un trapecio isósceles.*

Demostración.

Sea $ABCD$ un cuadrilátero con $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ (Figura 1.37).

Como $ABCD$ es un cuadrilátero concíclico, por la condición 1 tenemos que:

$$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ \implies \angle ABC = 180^\circ - \angle ADC$$

Además, $\angle ADC + \angle DCB = 180^\circ$, por ser ángulos entre paralelas

$$\implies \angle DCB = 180^\circ - \angle ADC$$

$$\implies \angle DCB = \angle ABC$$

Por lo tanto, los lados \overline{AB} y \overline{CD} son iguales, entonces el cuadrilátero $ABCD$ es un trapecio isósceles.

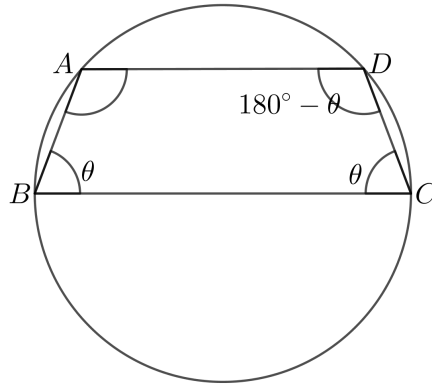


Figura 1.37: Cuadrilátero concíclico con lados paralelos

■

Teorema 1.11. Teorema de Reim. *Sean A, B y C ; y D, E y F , dos ternas de puntos colineales, tales que $ABED$ y $BCFE$ son cuadriláteros concíclicos. Entonces se cumple que $\overline{AD} \parallel \overline{CF}$.*

Demostración.

(Ver Figura 1.38). Como $ABED$ y $BCFE$ son cuadriláteros concíclicos, entonces $\alpha + \beta = 180^\circ$ (1)

Sea G un punto en la prolongación de \overline{FD}

$$\implies \angle ADG = \gamma, \text{ pero } \gamma + \beta = 180^\circ, \text{ por ser ángulos suplementarios}$$

$$\implies \gamma + \beta = \alpha + \beta, \text{ por (1)}$$

$$\implies \gamma = \alpha$$

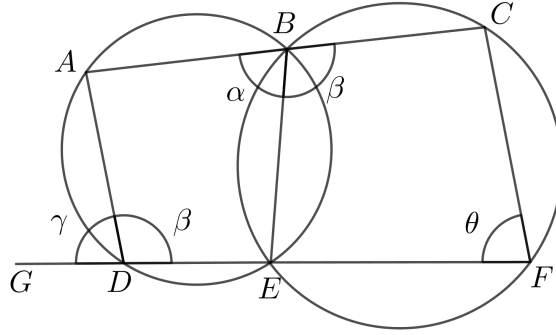


Figura 1.38: Teorema de Reim

Por ser ángulos suplementarios $\angle CBE = \beta$, además como el cuadrilátero $BCFE$ es concíclico, entonces $\theta + \beta = 180^\circ$,
 Pero ya tenemos que:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta = 180^\circ &\implies \alpha + \beta = \theta + \beta \\ &\implies \alpha = \theta \\ &\implies \angle ADG = \angle CFE \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\overline{AD} \parallel \overline{CF}$. ■

1.4.4. Circunferencia de los nueve puntos

Antes de definir la circunferencia de los nueve puntos, definiremos la **Recta de Euler**.

Teorema 1.12. Recta de Euler. Sea ABC un triángulo, con O , H y G el circuncentro, ortocentro y centroide, respectivamente. Sean D y E los pies de las alturas desde A y B respectivamente, y sean L y M los puntos medios de \overline{BC} y \overline{AC} respectivamente, entonces O , H y G son colineales, y forman la **recta de Euler**.

Demostración.

Por definición tenemos: $\overline{AD} \perp \overline{BC} \implies \overline{AH} \perp \overline{BC} \wedge \overline{BE} \perp \overline{AC} \implies \overline{BH} \perp \overline{AC}$.
 Además, $\overline{OL} \perp \overline{BC} \wedge \overline{MO} \perp \overline{AC}$. (Ver Figura 1.39)

Entonces $\triangle ABH$ y $\triangle OML$ tienen lados paralelos, pues $\overline{AH} \parallel \overline{OL}$, $\overline{BH} \parallel \overline{MO}$ y $\overline{AB} \parallel \overline{ML}$, es decir, como $\triangle ABH$ y $\triangle OML$ tienen sus lados respectivamente paralelos entonces los dos triángulos son semejantes.

$$\text{Así, } \triangle ABH \sim \triangle OML \text{ y } \frac{AH}{OL} = \frac{BH}{OM} = \frac{AB}{ML} = 2, \text{ ya que por Teorema de la base media}^1$$

¹ *Geometría Primer nivel*, Ernesto Quispe Rodríguez, pág. 55

de un triángulo, $AB = 2ML$ entonces $\frac{AB}{ML} = 2$.

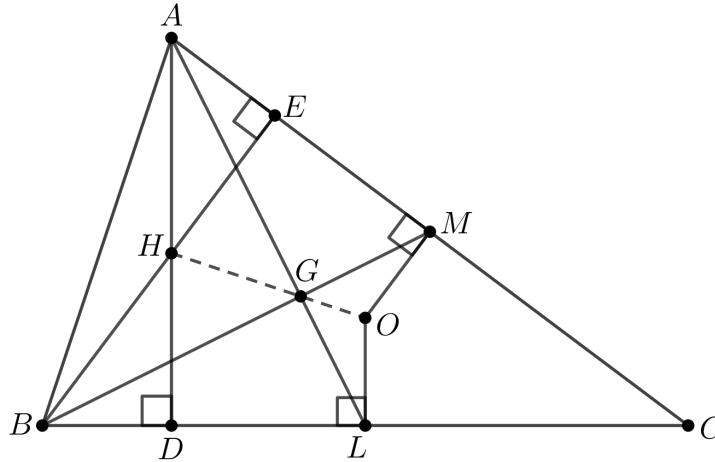


Figura 1.39: Recta de Euler

Como $\overline{AH} \parallel \overline{OL}$, entonces $\angle HAG = \angle OLG$ por ser ángulos alternos internos. Además el centroide divide cada mediana en dos segmentos de modo que la distancia del centroide al vértice es el doble de la distancia del centroide al punto medio del lado opuesto. Entonces $AG = 2GL$, por lo que $\frac{AG}{GL} = 2$. Así, $\triangle AHG \sim \triangle OLG$, y por tanto $\angle AGH = \angle LGO$.

Por lo tanto O, H, G son colineales. ■

Se tienen entonces dos propiedades:

- a) La distancia del vértice al ortocentro es el doble que la del punto medio al circuncentro.
- b) El ortocentro, circuncentro y baricentro son colineales.

Circunferencia de los nueve puntos

En todo triángulo, los pies de las alturas, los puntos medios de los lados, y los puntos medios de los segmentos que van del vértice al ortocentro están en una misma circunferencia, ésta es conocida como la **circunferencia de los nueve puntos** o circunferencia de Euler.

Teorema 1.13. Circunferencia de los nueve puntos. Sea el $\triangle ABC$ con ortocentro H . Sean D, E y F los pies de las alturas desde A, B y C respectivamente, sean L, M y N los puntos medios de $\overline{BC}, \overline{CA}$ y \overline{AB} , y sean P, Q y R los puntos medios de los segmentos $\overline{AH}, \overline{BH}$ y \overline{CH} respectivamente, entonces los puntos D, E, F, L, M, N, P, Q y R se encuentran en una misma circunferencia.

Demostración.

(Ver Figura 1.40). Por Teorema de la base media de un triángulo, en el $\triangle ABC$, $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ y $BC = 2MN$. Además, en el $\triangle BHC$, Q es punto medio del lado \overline{BH} y R es punto medio del lado \overline{CH} , por Teorema de la base media nuevamente, $\overline{QR} \parallel \overline{BC}$ y $BC = 2QR$.

Por lo anterior, $\overline{MN} \parallel \overline{BC} \wedge \overline{QR} \parallel \overline{BC}$, entonces $\overline{MN} \parallel \overline{QR}$, además $2MN = BC = 2QR$ entonces $MN = QR$.

En el $\triangle ACH$, M es punto medio del lado \overline{AC} y R es punto medio del lado \overline{CH} , por lo que por el Teorema de la base media de un triángulo $\overline{MR} \parallel \overline{AH}$ y $MR = \frac{AH}{2}$. También en el $\triangle ABH$, N es punto medio del lado \overline{AB} y Q es punto medio del lado \overline{BH} , por Teorema de la base media para un triángulo, $\overline{NQ} \parallel \overline{AH}$ y $NQ = \frac{AH}{2}$.

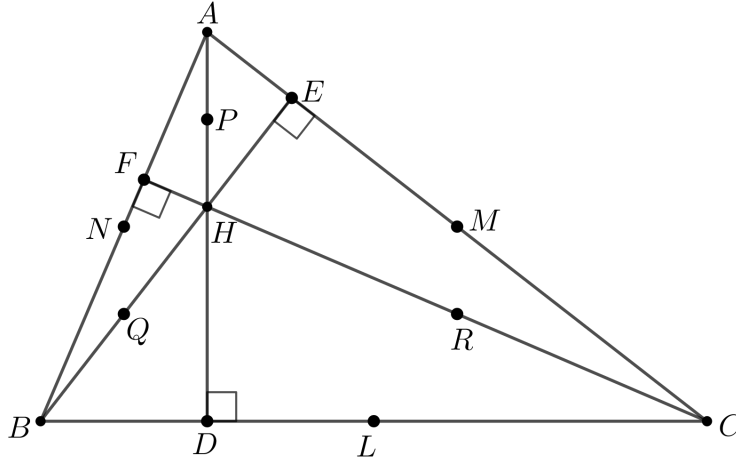


Figura 1.40: Circunferencia de los nueve puntos

Así, $\overline{MR} \parallel \overline{AH} \wedge \overline{NQ} \parallel \overline{AH}$, entonces $\overline{MR} \parallel \overline{AH} \parallel \overline{NQ}$ y $MR = NQ = \frac{AH}{2}$. Como $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ por ser altura, entonces $\overline{AH} \perp \overline{BC}$. Así $\overline{NQ} \perp \overline{BC} \wedge \overline{MR} \perp \overline{BC}$, por ser \overline{NQ} y \overline{MR} paralelas a \overline{AH} , es decir, $\overline{MN} \parallel \overline{QR}$, $MN = QR$, $\overline{MR} \parallel \overline{NQ}$, $MR = NQ$ por lo que $MRQN$ es un rectángulo.

Por condiciones mínimas para establecer que un cuadrilátero es concíclico tenemos que $MRQN$ es concíclico.

En el $\triangle ACH$, P es el punto medio del lado \overline{AH} y M es el punto medio del lado \overline{AC} , entonces por Teorema de la base media para un triángulo $\overline{PM} \parallel \overline{HC}$ y $HC = 2PM$. También en el $\triangle BCH$, Q es el punto medio del lado \overline{BH} y L es el punto medio del lado \overline{BC} , por Teorema de la base media para un triángulo $\overline{QL} \parallel \overline{HC}$ y $HC = 2QL$. Así, como $\overline{PM} \parallel \overline{HC} \wedge \overline{QL} \parallel \overline{HC}$, entonces $\overline{PM} \parallel \overline{QL}$ y $2PM = HC = 2QL$, por tanto,

$$PM = QL.$$

En el $\triangle ABH$, P es punto medio del lado \overline{AH} y Q es punto medio del lado \overline{BH} , por Teorema de la base media para un triángulo $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$ y $AB = 2PQ$. Además, en el $\triangle ABC$, M es punto medio del lado \overline{AC} y L es punto medio del lado \overline{BC} , por Teorema de la base media para un triángulo, $\overline{ML} \parallel \overline{AB}$ y $AB = 2ML$. Así, como $\overline{PQ} \parallel \overline{AB} \wedge \overline{ML} \parallel \overline{AB}$, tenemos que $\overline{PQ} \parallel \overline{ML}$ y $2PQ = AB = 2ML$, entonces $PQ = ML$.

Es decir, $\overline{PM} \parallel \overline{QL}$, $PM = QL$, $\overline{PQ} \parallel \overline{ML}$, $PQ = ML$, por lo que $PMLQ$ es un rectángulo.

Por condiciones mínimas para establecer que un cuadrilátero es concíclico tenemos que $PMLQ$ es concíclico.

Así, el hexágono $PMRLQN$ es concíclico. (Figura 1.41)

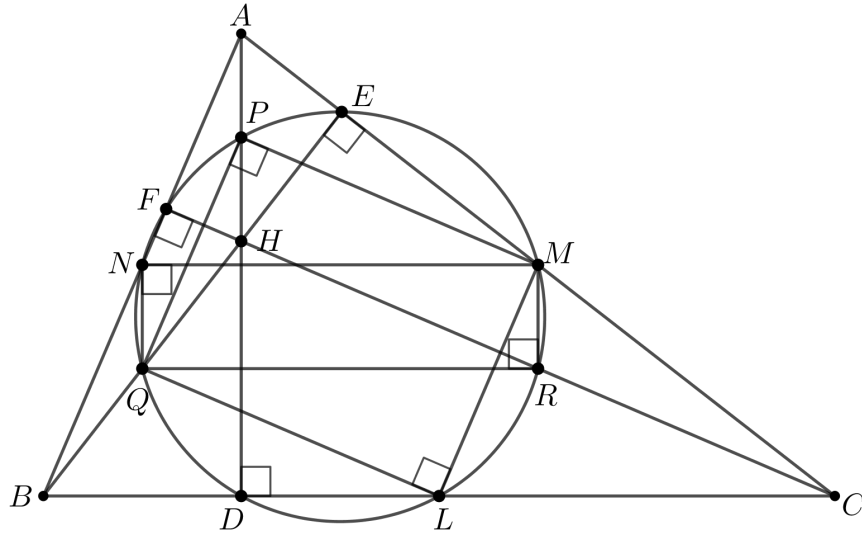


Figura 1.41: Circunferencia de los nueve puntos

Además, como \overline{BE} es altura, el $\angle QEM = 90^\circ$ y el $\angle QRM = 90^\circ$ ya que $MNQR$ es un rectángulo, entonces $\angle QEM = \angle QRM = 90^\circ$, por lo que por condiciones mínimas para establecer que un cuadrilátero es concíclico, el cuadrilátero $EMRQ$ es concíclico, también como \overline{AD} es altura, el $\angle PDL = 90^\circ$ y el $\angle PML = 90^\circ$ ya que $PMLQ$ es rectángulo, por lo que por condiciones mínimas para establecer que un cuadrilátero es concíclico, el cuadrilátero $MLDP$ es concíclico. De igual manera como \overline{CF} es altura, el $\angle RFN = 90^\circ$ y el $\angle NMR = 90^\circ$ ya que $MNQR$ es rectángulo, por lo que por condiciones mínimas para establecer que un cuadrilátero es concíclico, el cuadrilátero $MNFR$ es concíclico.

Así, podemos afirmar que el polígono $PEMRLDQNF$ es concíclico. ■

Teorema 1.14. *El centro de la circunferencia de los nueve puntos de $\triangle ABC$ pertenece a*

la recta de Euler y es el punto medio entre el circuncentro y el ortocentro.

Demostración.

Consideremos la circunferencia de los nueve puntos del $\triangle ABC$. Encontramos el circuncentro O (Figura 1.42). Por otro lado, el centro O' de la circunferencia es la intersección de las mediatrices de \overline{EM} y \overline{DL} , ya que \overline{OL} es mediatriz entonces $\overline{OL} \perp \overline{BC}$ y $\overline{HD} \perp \overline{BC}$ por ser altura, entonces $\overline{HD} \parallel \overline{OL}$, esto es O' es el punto medio de la recta \overline{HO} , es decir O' pertenece a la recta de Euler.

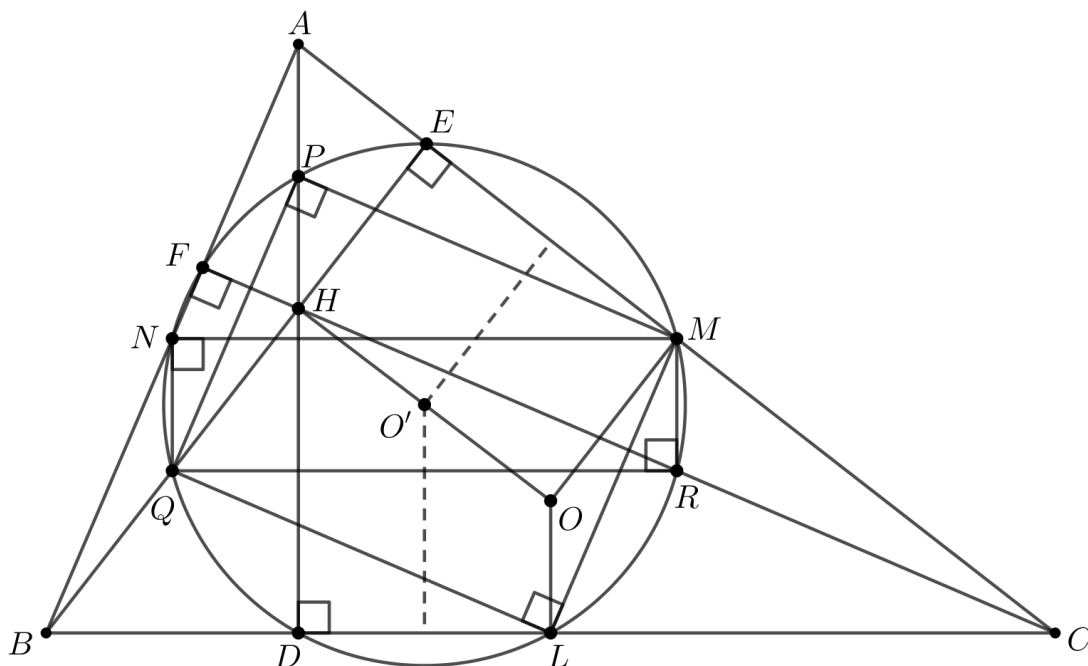


Figura 1.42: Circunferencia de los nueve puntos



De este modo se tienen las propiedades:

- a) Los pies de las alturas, los puntos medios de los segmentos que van del vértice al ortocentro son concíclicos.
- b) El centro de dicha circunferencia pertenece a la recta de Euler y el punto medio entre el circuncentro y el ortocentro.

1.5. Transformaciones

1.5.1. Traslación

Aparte de la identidad, que deja a todos los puntos justo donde estaban antes, la transformación más familiar es la traslación, que preserva la distancia entre dos puntos y la dirección de la recta a través de ellos.

Si $\overline{A'B'}$ es la imagen trasladada de un segmento de recta \overline{AB} , entonces A, B, A', B' se encuentran en una recta, como en la Figura 1.43, o $AA'B'B$ es un paralelogramo, como en la Figura 1.44 (En el primer caso, naturalmente, hablamos de un paralelogramo degenerado $AA'B'B$).

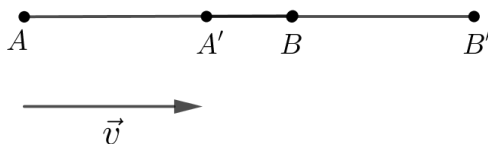


Figura 1.43: Segmento de recta \overline{AB}

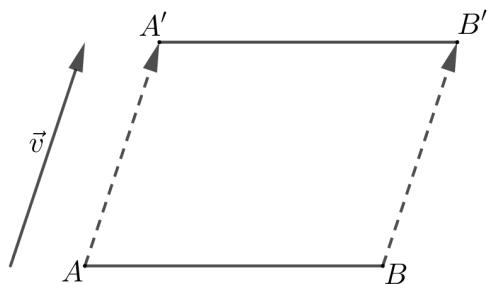


Figura 1.44: Traslación de \overline{AB}

Por lo tanto, la traslación está determinada por el vector de traslación \vec{v} , o igualmente bien determinada por un número infinito de otros segmentos, que tienen la misma distancia y dirección. Otro nombre para una traslación es un segmento dirigido. En particular, la identidad puede considerarse como una traslación a través de ninguna distancia, o como el vector cero.

El hecho de que una traslación conserve la forma y el tamaño de cualquier figura se utiliza en las pruebas de varios teoremas sobre el área de un polígono.

1.5.2. Rotación

Otro tipo de transformación que preserva la distancia es la rotación. Aquí todo el plano gira alrededor de algún punto a través de un ángulo dado. Por lo tanto, el tamaño y la forma de cualquier figura se mantiene invariante, pero todos sus puntos se mueven a lo largo de arcos de circunferencias concéntricas. El centro (que puede o no “pertenecer” a la figura que se está rotando) es el único punto que permanece fijo.

Como ejemplo del uso de una rotación, consideremos $\triangle ABC$ (Figura 1.45) con triángulos equiláteros BPC, CQA, ARB construidos (externamente) en los tres lados. Después de dibujar las rectas \overline{BQ} y \overline{CR} , que se encuentran en F , observamos que una rotación de 60° sobre A lleva a $\triangle ARC$ a $\triangle ABQ$.

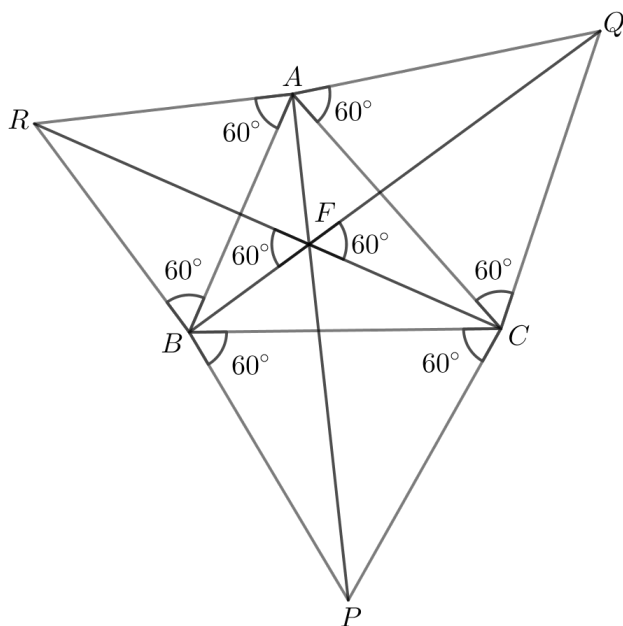


Figura 1.45: Rotación

Por lo tanto, $\angle RFB = 60^\circ$, ya que se hizo una rotación de 60° , y, $RC = BQ$. Un razonamiento similar considerando $\triangle ABP$ y rotándolo 60° , muestra que $PA = CR$. Así $AP = BQ = CR$.

Además, ya que $\angle RFB = 60^\circ = \angle RAB$ y $\angle CFQ = 60^\circ = \angle CAQ$, los cuadriláteros $ARBF$ y $CQAF$ son concíclicos, y como $\angle BFC = 120^\circ$ mientras que $\angle CPB = 60^\circ$, $BPCF$ es un tercer cuadrilátero concíclico, ya que cumplen con una de las condiciones mínimas para ser cuadrilátero concíclico. Por lo tanto, los circuncírculos de los tres triángulos BPC, CQA, ARB pasan a través del punto F . Esto se denomina punto Fermat de $\triangle ABC$. Habiéndolo definido como el punto de intersección de \overline{BQ} y \overline{CR} , ahora vemos que también debe estar en \overline{PA} .

1.5.3. Simetría central

Un tipo de rotación comparte con las traslaciones la propiedad de transformar cada recta en una recta paralela. Esta es la simetría central o rotación de 180° , que transforma cada rayo en un rayo dirigido de forma opuesta. Claramente, la simetría central está completamente determinada por su centro. Como una traslación transforma cada rayo en un rayo paralelo, el efecto de dos simetrías centrales aplicadas sucesivamente es el mismo que el efecto de una traslación, es decir, la composición de dos simetrías centrales es una traslación (que se reduce a identidad si las dos simetrías centrales tienen el mismo centro). Más precisamente, si los puntos A, B, C están espaciados uniformemente a lo largo de una recta, de modo que B es el punto medio de \overline{AC} , la simetría central sobre A deja a A invariante y la simetría central sobre B lleva a A a C ; por lo tanto, la suma de estas dos simetrías centrales es A , la traslación \overline{AC} , y es la misma que la suma de las simetrías centrales sobre B y C .

La Figura 1.46 ilustra la suma de las simetrías centrales sobre O_1 y O_2 . El segmento de recta \overline{AB} se transforma primero en $\overline{A'B'}$ (dirigido de forma opuesta) y luego en $\overline{A''B''}$; por lo tanto, la suma es la traslación $\overline{AA''} = \overline{BB''}$.

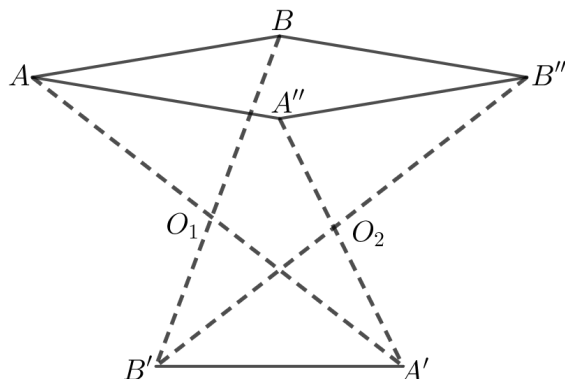


Figura 1.46: Suma de simetrías centrales

En la Figura 1.47, O es el punto medio común de los dos segmentos \overline{AC} y \overline{BD} . La simetría central O , tomando \overline{AB} en el \overline{CD} , muestra que $ABCD$ es un paralelogramo.

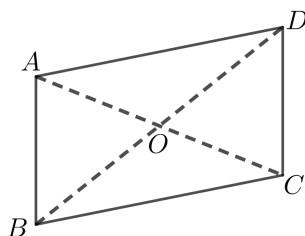


Figura 1.47: Paralelogramo $ABCD$

1.5.4. Simetría axial

Un tercer tipo de transformación que preserva la distancia es la simetría axial en una recta l , llamada espejo o eje de simetría. Cada punto en el eje de simetría (como H o K , Figura 1.48) es invariante, es decir, su propia imagen. La imagen reflejada de un punto A que no está en el eje de simetría es el punto A' en la recta que pasa por A perpendicular al eje de simetría, de modo que $\overline{AA'}$ está bisecado por el eje de simetría. En la Figura 1.48, el segmento $\overline{A'B'}$ es la imagen del segmento \overline{AB} .

Mostraremos que, si C es un punto en \overline{AB} , su imagen C' debe estar en $\overline{A'B'}$.

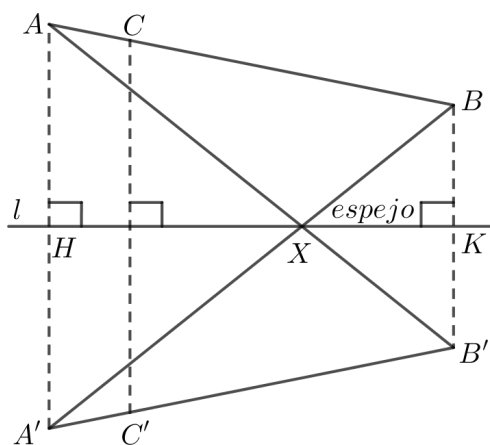


Figura 1.48: Simetría axial

Consideremos, el trapecioide $AA'B'B$ tiene diagonales $\overline{AB'}$ y $\overline{A'B}$ que son imágenes entre sí, además, su punto común X , al ser su propia imagen, se encuentra en el eje de simetría l . Por ser ángulos opuestos por el vértice, $\angle AXH = \angle B'XK$ (1)

Como B es un punto que no se encuentra en el eje de simetría, entonces su imagen que es B' preserva la misma distancia, por lo que $BK = B'K$, además de compartir el lado XK , así por congruencia de triángulos, tenemos que $\triangle B'XK \cong \triangle B'XK$ lo que implica que $\angle B'XK = \angle KXB$ (2)

Así, por (1) y (2) tenemos que $\angle AXH = \angle B'XK = \angle KXB$, por lo tanto, $\angle AXH = \angle KXB$. Además $XB = XB'$ y $AX = A'X$, así por congruencia de triángulos, $\triangle AXB \cong \triangle A'XB'$, y como están ubicados bajo la misma posición sobre el espejo, entonces $AB = A'B'$. Por lo tanto, todo punto C sobre \overline{AB} estará en $\overline{A'B'}$. ■

De ello se deduce que el camino más corto desde un punto arbitrario A hasta el eje de simetría (Ver Figura 1.49), y desde allí hasta un punto dado B en el mismo lado del eje de simetría, es la recta AXB discontinua. Porque, como vemos en la Figura 1.49, si se tomara cualquier otro punto Y en el espejo, la ruta $AY + YB = A'Y + YB$ sería más larga que el segmento recto $A'B = AX + XB$.

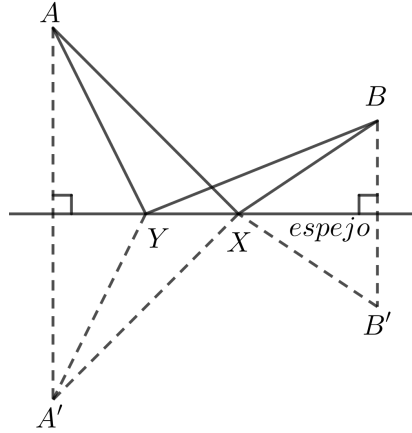


Figura 1.49: Camino más corto de la simetría axial

Esto, incidentalmente, nos muestra cómo resolver geoméricamente un problema extremo famoso sin recurrir al cálculo. Los físicos nos dicen que un rayo de luz que viaja desde un punto A a un espejo y de allí a otro punto B , lo hará por un camino que minimiza el tiempo de viaje. En un medio homogéneo, este tiempo es proporcional a la distancia recorrida. Entonces, un rayo de luz que va de A a B a través de un espejo y que se encuentra con el espejo en un ángulo a , lo deja formando un ángulo igual; pero este es el resultado de requerir un camino de longitud mínima. Los físicos habitualmente miden ángulos desde lo normal, una recta perpendicular al espejo, en lugar de hacerlo desde el espejo mismo. En la Figura 1.50, $\angle i$ se denomina ángulo de incidencia y $\angle r$ se denomina ángulo de reflexión.

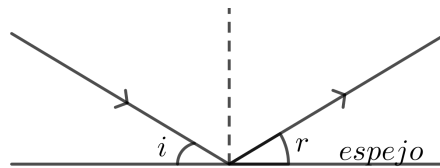


Figura 1.50: Espejo

1.5.5. El problema de Fagnano

Usando las propiedades de la imagen de espejo resolveremos el problema de encontrar el triángulo de perímetro mínimo inscrito en un triángulo de ángulo agudo dado. Esto se conoce como **El problema de Fagnano**.

Para una solución (ver Figura 1.51), comenzamos con el triángulo ABC de ángulo agudo arbitrario, en el que hemos inscrito dos triángulos: el triángulo órtico (líneas discontinuas largas), el cual sus vértices están dados por los pies de las alturas del $\triangle ABC$, y cualquier otro triángulo (líneas discontinuas cortas). Aplicamos la simetría axial a $\triangle ABC$, con su

contenido, en sus lados $\overline{AC}, \overline{CB'}, \overline{B'A'}, \overline{A'C'}, \overline{C'B''}$ en sucesión. Ahora inspeccionamos el diagrama para ver lo que esta secuencia continua de simetrías axiales ha hecho a nuestros triángulos.

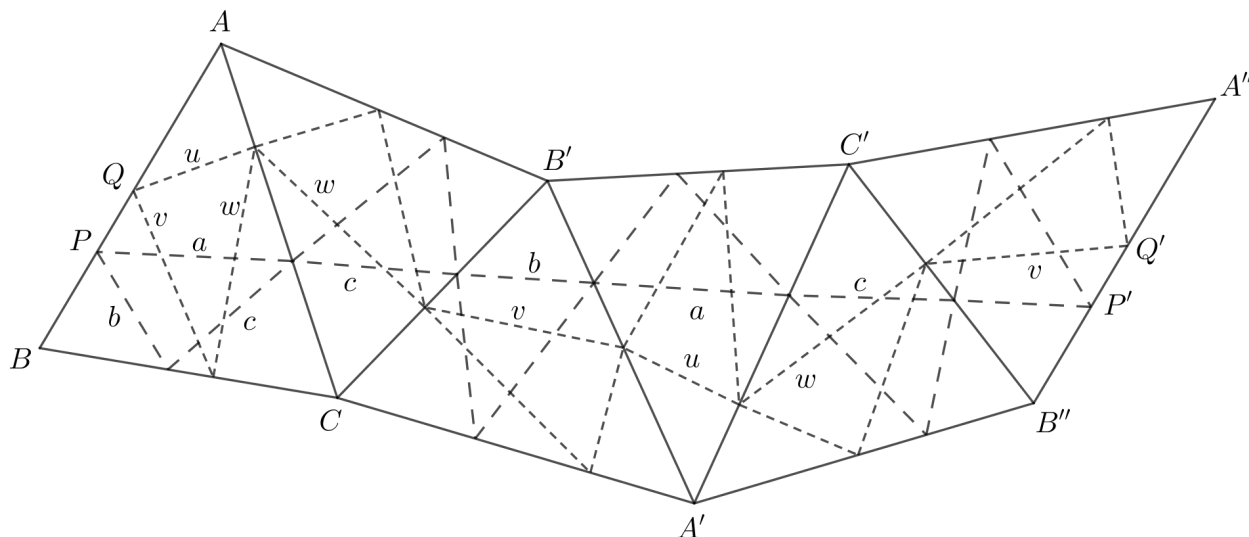


Figura 1.51: El problema de Fagnano

Sin tener en cuenta los dos puntos marcados con C y C' , observamos una recta discontinua $BAB'A'B''A''$, con ángulos (medidos en sentido antihorario) $2A$ en el punto A (arriba a la izquierda), $2B$ en el punto B' (en el punto intermedio), $-2A$ en el punto A' (en la parte inferior), y $-2B$ en el punto B'' (a la derecha). La suma cero de estos cuatro ángulos indica que el lado final $\overline{B''A''}$ es congruente por la traslación al lado original \overline{BA} , y que los pares de puntos correspondientes en estos dos lados formarán un paralelogramo tal como $PP'Q'Q$.

Ahora recordamos que las alturas de $\triangle ABC$ bisecan los ángulos de su triángulo órtico. De ello se deduce que, después de las simetrías axiales aplicadas, los lados del triángulo órtico estarán, en orden, en la línea recta $\overline{PP'}$, que se muestra en la Figura 1.51.

Análogamente, los lados de cualquier otro triángulo, como el triángulo de líneas cortas en la figura formará una recta discontinua que se extiende desde Q (en el \overline{AB} original) hasta Q' (en el $\overline{A''B''}$ final). Como \overline{PQ} es igual y paralelo a $\overline{P'Q'}$, el segmento recto es igual a $\overline{PP'}$, que es el doble del perímetro del triángulo órtico. Esto es claramente más corto que la recta discontinua de Q a Q' , que es el doble del perímetro del otro triángulo. Por lo tanto, el triángulo de perímetro mínimo es el triángulo órtico.

1.5.6. El problema de las tres jarras

Una aplicación de la simetría axial es la solución de problemas que requieren la división de un líquido en partes establecidas con lo que parecen ser dispositivos de medición inadecuados. Se requiere una cuenta preliminar de coordenadas trilineales, que ahora presentamos. Como un alivio del papel cuadrado ordinario, utilizado para trazar puntos con coordenadas cartesianas dadas, a veces se puede comprar papel “triangulado”, regido por tres sistemas de rectas paralelas que dividen el plano en una teselación de pequeños triángulos equiláteros. Dicho papel es conveniente para trazar puntos que han dado coordenadas trilineales con respecto a un triángulo equilátero (grande). En el plano de dicho triángulo ABC , con el lado a y la altitud h , las coordenadas trilineales de un punto P se definen como las distancias x , y , z de P de los tres lados \overline{BC} , \overline{CA} , \overline{AB} , consideradas positivas cuando P está dentro del triángulo. Llamamos a P el punto (x, y, z) y (PBC) el área de $\triangle PBC$. Ya que

$$\frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}ay + \frac{1}{2}az = (PBC) + (PCA) + (PAB) = (ABC) = \frac{1}{2}ah$$

Tenemos,

$$x + y + z = h$$

Estas coordenadas son ideales para representar cualquier situación en la que tres cantidades variables tienen una suma constante. Cuando una de las cantidades permanece fija mientras que las otras dos varían (con una suma constante), el punto (x, y, z) se mueve a lo largo de una recta paralela a un lado del triángulo. En particular, los propios lados tienen las ecuaciones $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, y los vértices A , B , C tienen las coordenadas $(h, 0, 0)$, $(0, h, 0)$, $(0, 0, h)$. Una situación de este tipo surge cuando las h pintas (u onzas) de un líquido se distribuyen en tres recipientes, de modo que hay x pintas en la primera, y en la segunda, y z en la tercera. La operación de verter líquido gradualmente desde el segundo recipiente hasta el tercero se representa mediante un movimiento del punto (x, y, z) a lo largo de una recta $x = \text{constante}$ en la dirección en la que y disminuye mientras que z (correspondientemente) aumenta. Si cada embarcación puede contener h pintas, cada coordenada puede tomar cualquier valor de 0 a h , y tenemos el problema (trivial) $[h; h, h, h]$, en el que el dominio de operaciones es la región triangular completa

$$0 \leq x \leq h, 0 \leq y \leq h, 0 \leq z \leq h$$

De mucho mayor interés es el problema $[h; a, b, c]$, donde $h \geq a > b > c$. Ahora los tres recipientes dados tienen capacidades a , b , c , y el problema es medir una cantidad declarada d de líquido vertiendo repetidamente de un recipiente a otro, vaciando el primero o llenando el segundo (o posiblemente haciendo ambas cosas en una vez). El dominio de operación ahora está restringido a la región

$$0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$$

que puede ser un hexágono (regular o irregular) limitado por las seis rectas

$$x = 0, x = a, y = 0, y = b, z = 0, z = c,$$

pero puede, en circunstancias especiales, reducir a un pentágono, trapecio, paralelogramo o (como ya hemos visto) todo el triángulo equilátero. Por ejemplo, las Figuras 1.52 y 1.53 ilustran el problema [8;7,6,3] en el que 8 pintas de líquido se distribuyen de una manera determinada en recipientes de capacidad 7, 6, 3, y deseamos medir (digamos) 4 pintas. Ahora el dominio de operación es la región hexagonal

$$0 \leq x \leq 7, 0 \leq y \leq 6, 0 \leq z \leq 3$$

el cual, estando delimitado por las seis rectas

$$x = 7, z = 0, y = 6, x = 0, z = 3, y = 0$$

tiene los vértices (7, 1, 0), (2, 6, 0), (0, 6, 2), (0, 5, 3), (5, 0, 3), (7, 0, 1), o, en una notación abreviada, 710, 260, 062, 053, 503, 701.

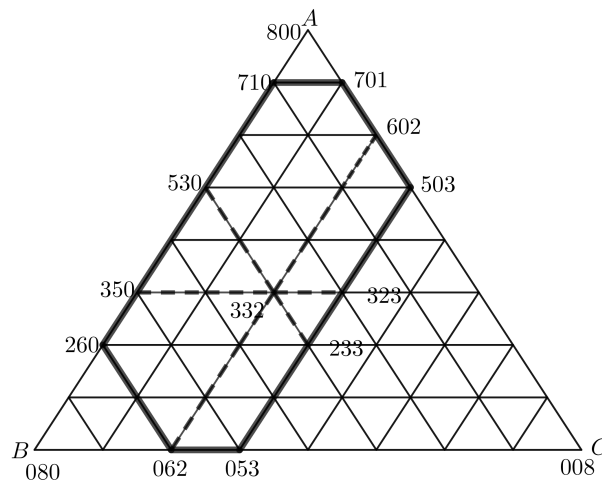


Figura 1.52: Problema [8;7,6,3]

La Figura 1.52 el punto 332, representa un estado típico: 3 pintas en el primer recipiente, 3 en el segundo y 2 en el tercero. Las rectas discontinuas que irradian desde este punto

representan las seis operaciones posibles de vertido. El camino de 332 a 530 representa el acto de vaciar el último recipiente en el primero; el camino opuesto de 332 a 233 representa el acto de llenar el tercer recipiente con el primero; y el camino de 332 a 062 representa el acto de vaciar el primer recipiente en el segundo, que por lo tanto se llena.

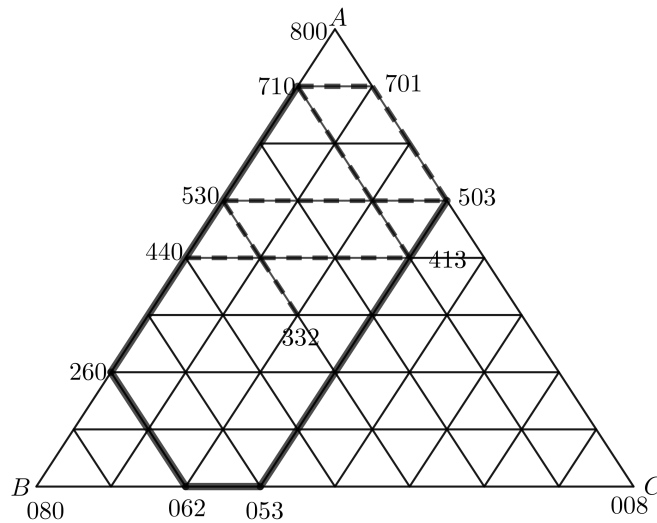


Figura 1.53: Problema [8;7,6,3]

Las rectas rayadas en la Figura 1.53 muestran una de las varias formas de pasar de 332 a 440 y, por lo tanto, dividir las 8 pintas en dos porciones iguales. Todo el camino es una recta discontinua, que procede siempre a lo largo de una dirección paralela a un lado del triángulo de referencia y se dobla solo cuando alcanza un lado o vértice del hexágono que limita el dominio de operación. Continuando este camino, siguiendo las mismas reglas, más allá de 440, eventualmente alcanzaremos todos los puntos con coordenadas trilineales en el límite del dominio; se deduce que, en el problema [8; 7, 6, 3], cualquier número total de pintas (menos de 8) se puede medir.

La Figura 1.54 ilustra el problema [10; 8, 7, 6], en el que 10 pintas de líquido deben dividirse por medio de recipientes que contienen 8, 7 y 6 pintas, respectivamente. Ahora podemos medir fácilmente 1 pinta, o 2 o 3 o 4. Pero nunca podemos lograr 5 (a menos que se sepa que uno de los recipientes contiene 5 inicialmente), porque los tres puntos 055, 505, 550 forman un triángulo, camino que gira y gira como un círculo vicioso y no se puede ingresar desde ningún otro camino. Este tipo de fenómeno surge en cualquier problema $[h; a, b, c]$ con

$$h = 2d \geq a > b > c > d$$

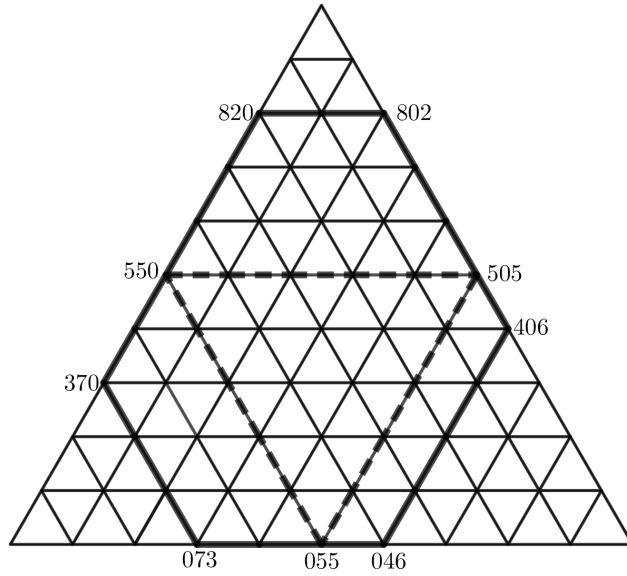


Figura 1.54: Problema $[10;8,7,6]$

Un tipo de anomalía ligeramente diferente ocurre en el problema $[10; 8, 6, 4]$ (Figura 1.55), en la que los caminos que visitan 550 forman un patrón de pequeños triángulos equiláteros y hexágonos regulares. Esto ilustra el hecho obvio de que un número impar de pintas nunca puede medirse con recipientes cuyas capacidades son todas iguales. Tales problemas pueden esperarse para cualquier problema $[h; a, b, c]$ en el que los números a, b, c tienen un divisor común mayor que 1.

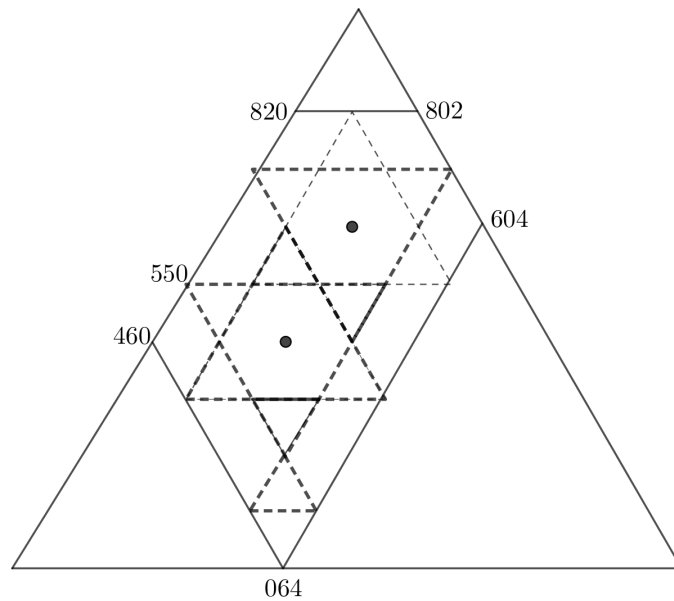


Figura 1.55: Problema $[10;8,6,4]$

Los problemas más famosos $[h; a, b, c]$ son aquellos en los que $h = a = 2d = b + c$, de modo que el dominio de operación está limitado por el paralelogramo cuyos vértices son $a00$, $cb0$, $0bc$, $b0c$.

Las Figuras 1.56 y 1.57 muestran las soluciones de siete pasos y ocho pasos del problema $[8; 8, 5, 3]$, que puede expresarse de la siguiente manera: dos hombres tienen un recipiente lleno con 8 pintas de algún líquido, y dos recipientes vacíos con capacidades de 5 pintas y 3 pintas.

Desean dividir las ocho pintas de líquido por igual. El primer movimiento debe ser para llenar el recipiente de 5 pintas, como en la Figura 1.56, o el recipiente de 3 pintas, como en la Figura 1.57. De ahí en adelante, cuando el camino alcance una de las cuatro rectas

$$y = 0, y = 5, z = 0, z = 3$$

que son los lados de nuestro paralelogramo (el dominio de operación), consideramos esa recta como un espejo. En otras palabras, seguimos el camino de una bola de billar que se golpea para comenzar a lo largo de un borde de una mesa que tiene esta forma un tanto inusual. (La regla de las reflexiones sucesivas se justifica por el hecho de que cada parte de la recta discontinua, paralela a un lado del triángulo de referencia, representa el acto de verter líquido desde un recipiente en otro mientras el tercero permanece intacto). Así obtenemos la solución de siete pasos

800, 350, 323, 620, 602, 152, 143, 440

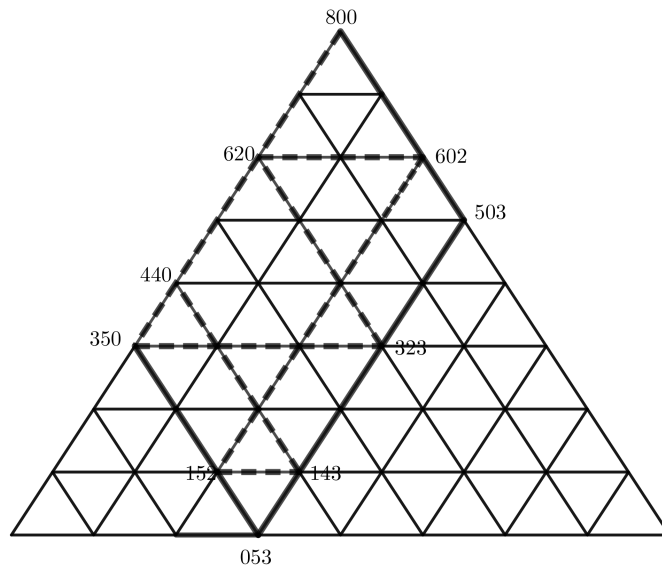


Figura 1.56: Problema $[8; 8, 5, 3]$

y la solución de ocho pasos

800, 503, 530, 233, 251, 701, 710, 413, 440

Claramente, este problema (con $a = b + c$) se puede resolver siempre que los enteros b y c son coprimos, es decir, no tengan un divisor común mayor que 1.

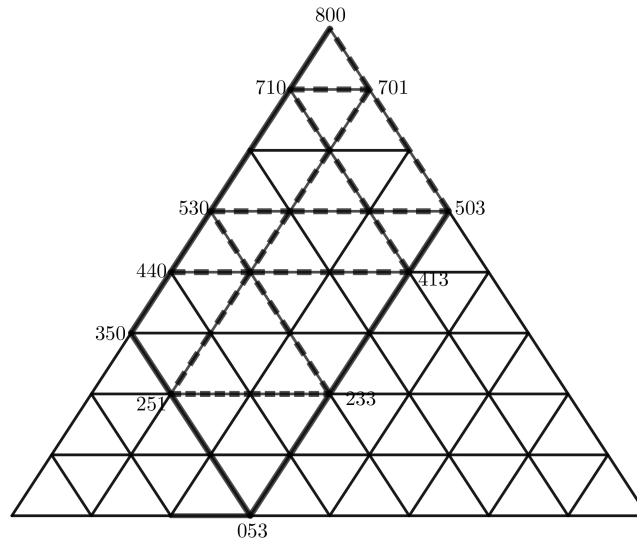


Figura 1.57: Problema [8;8,5,3]

1.6. Potencia de punto

1.6.1. Potencia interior

Teorema 1.15. *Sea una circunferencia S de centro O , y un punto P interior a S , sea d la distancia de O a P y r el radio de S , entonces se cumple $r^2 - d^2 = PX \cdot PY$, donde X e Y son los puntos donde corta la prolongación de \overline{OP} a la circunferencia S .*

Demostración.

Sea P un punto al interior de una circunferencia S . Por P se trazan dos cuerdas \overline{AC} y \overline{BD} (Ver Figura 1.58).

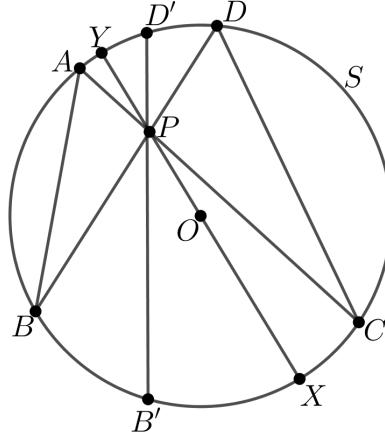


Figura 1.58: Potencia interior

Como sabemos que dos ángulos inscritos que subtenden el mismo arco, entonces las medidas de los ángulos son iguales, así $\angle BAC = \angle CDB \wedge \angle ABD = \angle ACD$, por lo tanto:

$\angle BAP = \angle CDP \wedge \angle ABP = \angle PCD \implies \triangle ABP \sim \triangle CDP$, por criterio I de semejanza

$$\implies \frac{PA}{PB} = \frac{PD}{PC}$$

$$\implies PA \cdot PC = PB \cdot PD$$

Dejamos fijos A y C , mientras hacemos variar B y D . Supongamos que movemos el punto B y lo sustituimos por B' , y al mismo tiempo D se convierte en D' . Análogamente llegaríamos a que $\triangle AB'P \sim \triangle CD'P$, y por lo tanto, $PA \cdot PC = PB' \cdot PD'$. Entonces los puntos pueden variar, pero como podemos fijar una cuerda de puntos siempre hay un valor (hasta el momento intangible) que estará asociado únicamente a la posición del punto y el tamaño de la circunferencia.

Para encontrar el valor escondido detrás de esta multiplicación, tracemos el diámetro \overline{XY} que pasa por P . Como r es el radio y d a la distancia \overline{OP} .

La potencia P es:

$$\begin{aligned} PX \cdot PY &= (OX + PO) \cdot (OY - PO) \\ &= (r + d) \cdot (r - d) \\ &= r^2 - d^2 \blacksquare \end{aligned}$$

Y entonces, cualquiera de los productos iguales asociados al punto P se traduce numéricamente en términos de r y d como $r^2 - d^2$.

Este producto se conoce como **potencia del punto P con respecto a la circunferencia S** , el cual se simboliza como $pot_s(P)$ o $p_s(P)$ o $pot(s, P)$, y es un valor asociado a todo punto interior de una circunferencia.

1.6.2. Potencia exterior

Teorema 1.16. *Sea una circunferencia S de centro O , y un punto P exterior a S , sea d la distancia de O a P y r el radio de S , entonces se cumple $d^2 - r^2 = PX \cdot PY$, donde X e Y son los puntos donde la recta \overline{OP} corta a la circunferencia S .*

Demostración.

Sea P un punto exterior a la circunferencia S . Por P se trazan dos cuerdas \overline{AB} y \overline{CD} (Figura 1.59).

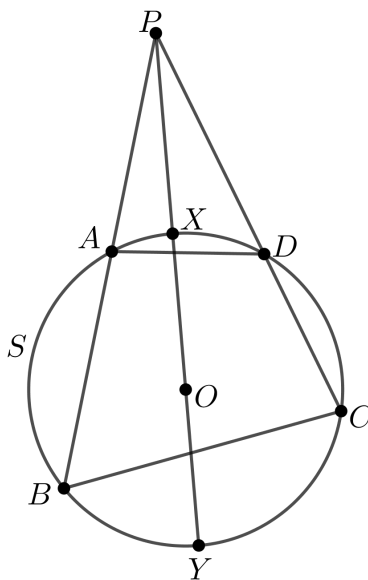


Figura 1.59: Potencia exterior

Por ser $\angle PAD$ un ángulo ex-inscrito y $\angle DCB$ un ángulo inscrito, entonces:
 $\angle PAD = \angle DCB \wedge \angle APD = \angle BPC$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \angle PAD = \angle PCB \wedge \angle APD = \angle BPC &\implies \triangle PAD \sim \triangle PBC, \text{ por criterio I de semejanza} \\ &\implies \frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB} \\ &\implies PA \cdot PB = PC \cdot PD \end{aligned}$$

Dejamos fijos A y B , mientras hacemos variar C y D . Supongamos que movemos el punto C y lo sustituimos por C' , y al mismo tiempo D se convierte en D' . Análogamente llegaríamos a que $\triangle PAD' \sim \triangle PBC'$, y por lo tanto, $PA \cdot PB = PC' \cdot PD'$.

Tracemos el diámetro \overline{XY} que pasa por P . Sea r el radio de la circunferencia S y d la distancia \overline{PO} .

La potencia P es:

$$\begin{aligned} PX \cdot PY &= (PO - OX) \cdot (PO + OY) \\ &= (d - r) \cdot (d + r) \\ &= d^2 - r^2 \blacksquare \end{aligned}$$

Este producto se conoce como **potencia de punto exterior**.

1.6.3. La recta tangente

Teorema 1.17. *Sea una circunferencia S de centro O , y un punto P exterior a S , sea d la distancia de O a P y r el radio de S . Los puntos A , B , y C en S son tal que P , A y B son colineales y \overline{PC} es tangente a S , entonces se cumple $PC^2 = PB \cdot PA$.*

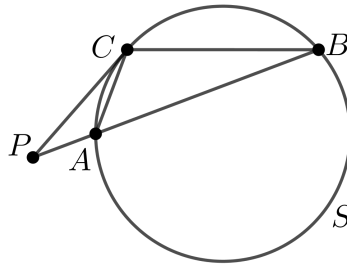


Figura 1.60: Potencia de punto tangencial

Demostración.

Sea P un punto exterior a la circunferencia S . (Figura 1.60)

Por Teorema 1.8 tenemos que $\angle ACP = \angle ABC$, así:

$$\begin{aligned} \angle ACP = \angle PBC \wedge \angle APC = \angle BPC &\implies \triangle PCA \sim \triangle PBC; \text{ por criterio I de semejanza} \\ &\implies \frac{PC}{PA} = \frac{PB}{PC} \\ &\implies PC \cdot PC = PB \cdot PA \\ &\implies PC^2 = PB \cdot PA = Pot_s(P) \blacksquare \end{aligned}$$

Entonces la potencia de punto tiene el mismo valor de la tangente elevada al cuadrado, es decir, cuando dos puntos C y B se acercan lo suficiente entonces $C = B$ y el producto $PC \cdot PB$ se vuelve PC^2 .

Capítulo 2

Inversión geométrica

2.1. Inversión

Definición 2.1. Dada una circunferencia de centro O y radio k , la **inversión** de centro O y radio k es una transformación del plano que a cada punto A distinto de O , le asocia otro punto A' de la semirrecta \overrightarrow{OA} cumpliendo la relación $OA \cdot OA' = k^2$.

La Figura 2.1 muestra la manera de construir el punto inverso A' del punto A cuando éste es interior a la circunferencia.

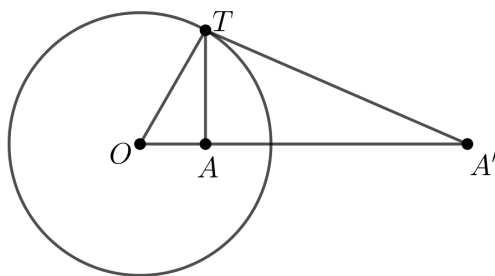


Figura 2.1: Inversión del punto A

La perpendicular a la semirrecta \overrightarrow{OA} determina el punto T en la circunferencia. Por este punto trazamos una tangente que corta a la semirrecta \overrightarrow{OA} en el punto A' , inverso de A . En efecto, los triángulos OTA y $OA'T$ son semejantes. Entonces,

$$\frac{OA}{OT} = \frac{OT}{OA'} \implies OA \cdot OA' = OT^2 = k^2$$

Usando la Figura 2.1, si el punto A' está fuera de la circunferencia, trazamos una tangente a la circunferencia desde A' y, siendo T el punto de tangencia, por T trazamos una perpendicular a la recta $\overline{OA'}$ que cortaría ésta en el punto A , simétrico del punto A' .

Vemos entonces que un punto exterior a la circunferencia se transforma en un punto interior y un punto interior a la circunferencia se transforma en un punto exterior. Los puntos de la circunferencia de inversión se invierten en sí mismos, es decir, son puntos fijos de la transformación.

Es conveniente observar que hay exactamente un punto del plano, el centro de inversión O , que se queda sin imagen por la transformación. Cuando se trabaja con inversión se supone que a todos los puntos del plano se le añade un “punto ideal” o “punto del infinito” con lo que obtenemos el plano inversivo. Dicho punto ideal será la imagen del centro de inversión.

Definición 2.2. *Un plano inversivo es una geometría con tres nociones no definidas: puntos, circunferencias y una relación de incidencia entre puntos y circunferencias, que satisface los siguientes tres axiomas:*

1. *A través de tres puntos distintos, hay exactamente una circunferencia.*
2. *Si P y Q son puntos, y C es una circunferencia que pasa por P pero no Q , entonces hay una circunferencia única C' que pasa por Q de tal manera que $C \cap C' = P$.*
3. *Existen cuatro puntos que no se encuentran en una circunferencia común.*

Teorema 2.1. *Sean A y B puntos distintos y sean A' y B' los inversos respecto de una circunferencia de centro O y radio k , entonces $\triangle OAB \sim \triangle OA'B'$.*

Demostración.

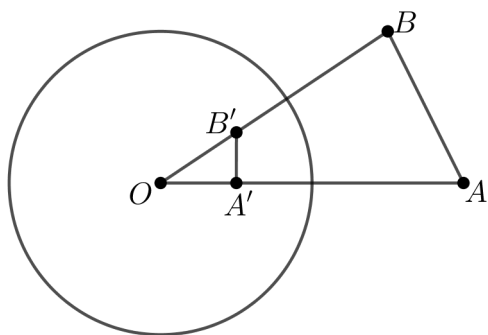


Figura 2.2: Semejanza de triángulos

Por definición tenemos que: $OA \cdot OA' = k^2 = OB \cdot OB' \implies OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{OA}{OB} &= \frac{OB'}{OA'} \\ \Rightarrow \triangle OAB &\sim \triangle OA'B' \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.2. Propiedades de la inversión

La inversión y las distancias

Teorema 2.2. Sean A y B puntos distintos y sean A' y B' los inversos respecto de una circunferencia de centro O y radio k . Entonces

$$A'B' = \frac{AB \cdot k^2}{OA \cdot OB}$$

Demostración.

Caso 1: El segmento de recta \overline{AB} no pasa por O , Figura 2.3

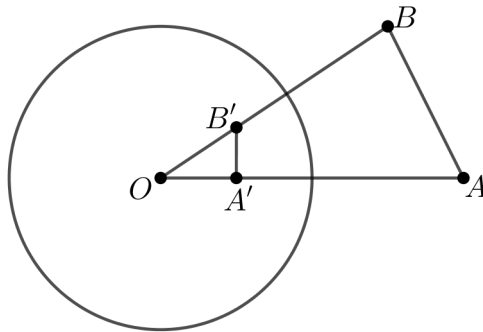


Figura 2.3: Inversión y distancias

Por Teorema 2.1 tenemos que:

$$\begin{aligned} \triangle ABO \sim \triangle A'B'O &\Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{OB'}{OA} \\ \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} &= \frac{k^2}{OA \cdot OB}; \quad \frac{OB'}{OA} = \frac{OB \cdot OB'}{OB \cdot OA} \wedge OB \cdot OB' = k^2 \\ \Rightarrow A'B' &= \frac{AB \cdot k^2}{OA \cdot OB} \end{aligned}$$

Caso 2: Los puntos O , A y B están alineados, A' y B' estarán en la misma recta. (Figura 2.4)

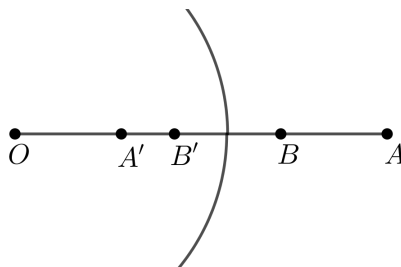


Figura 2.4: Inversión con A y B alineados

Observamos que: $A'B' = OB' - OA'$

Además por definición de inversión tenemos que:

$$OB \cdot OB' = k^2 \implies OB' = \frac{k^2}{OB} \quad \wedge \quad OA \cdot OA' = k^2 \implies OA' = \frac{k^2}{OA}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} A'B' &= OB' - OA' \\ &= \frac{k^2}{OB} - \frac{k^2}{OA} \\ &= \frac{OA \cdot k^2 - OB \cdot k^2}{OB \cdot OA} \\ &= \frac{(OA - OB)k^2}{OB \cdot OA} \\ &= \frac{AB \cdot k^2}{OA \cdot OB}, \quad AB = OA - OB \quad \blacksquare \end{aligned}$$

La inversión y las rectas

Teorema 2.3. *La imagen de una recta que pasa por el centro de inversión es ella misma.*

Demostración.

Dada una circunferencia de centro O (Figura 2.5). Por la Definición 2.1, sabemos que si tenemos un punto A distinto de O , su punto inverso será A' que se encontrará en la prolongación de \overline{OA} , así como A es un punto arbitrario, podemos decir que todo punto en una recta tendrá su inverso en la misma recta.

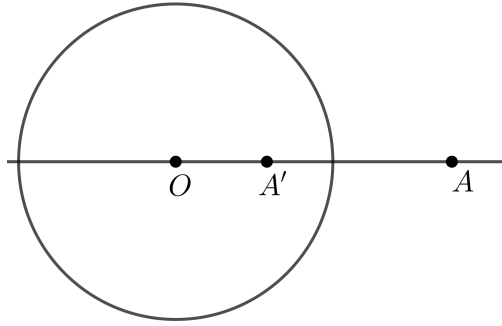


Figura 2.5: Inversión de una recta que pasa por el centro de inversión

■

Teorema 2.4. *La imagen de una recta que no pasa por el centro de inversión, es una circunferencia que si pasa por este centro.*

Demostración.

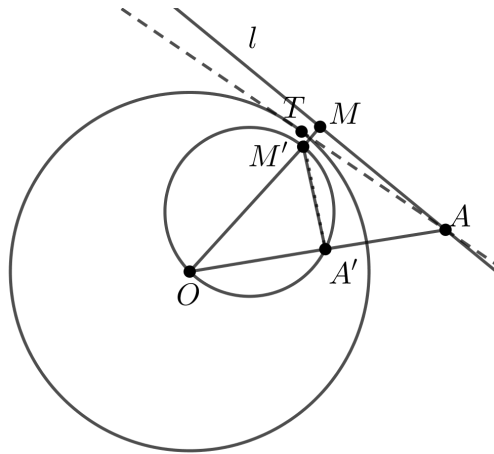


Figura 2.6: Inversión de una recta que no pasa por el centro

Si una recta l no pasa por el centro de inversión O , dicha recta se transforma en una circunferencia con diámetro $\overline{OM'}$, siendo M la proyección ortogonal de O sobre l y M' el inverso de M (Figura 2.6).

Sea A un punto cualquiera en l y sea A' su inverso, con T el punto donde toca la tangente a la circunferencia.

Así, por Teorema 2.1 tenemos que: $\triangle OAM \sim \triangle OA'M'$, y como M es proyección ortogonal de O sobre l entonces $\angle AMO = 90^\circ$, pero como son triángulos semejantes entonces

$\angle OA'M' = \angle AMO = 90^\circ$. Como $\overline{OM'}$ es diámetro entonces divide a la circunferencia en dos arcos de 180° cada uno y como $\angle OA'M' = 90^\circ$, por Teorema 1.6, $\angle OA'M'$ debe estar inscrito en la circunferencia, así A' está en la circunferencia de diámetro $\overline{OM'}$. ■

Teorema 2.5. *Si una recta l que no contiene al centro de inversión O , corta a la circunferencia de inversión en los puntos A y B , entonces la inversa de l es el circuncírculo del $\triangle OAB$.*

Demostración.

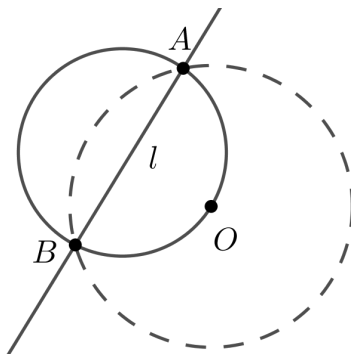


Figura 2.7: Inversión de l

(Ver Figura 2.7). Por el Teorema 2.4, tenemos que la inversión de l será una circunferencia que sí pasa por O , los puntos de inversión de A y B son ellos mismos puesto que pertenecen a la circunferencia de inversión, así el inverso de l deberá ser una circunferencia que pase por los puntos O , A , B , es decir, el circuncírculo del $\triangle OAB$. ■

La inversión y las circunferencias

Teorema 2.6. *La imagen de una circunferencia que pasa por el centro de inversión es una recta que no pasa por el centro.*

Demostración.

(Ver Figura 2.8). Si \overline{OM} es un diámetro, entonces esa circunferencia se transforma en la recta l perpendicular a \overline{OM} por el punto M' , inverso de M . Sea A un punto cualquiera en la circunferencia de diámetro \overline{OM} . Por Teorema 2.1 tenemos que: $\triangle OAM \sim \triangle OA'M' \implies \angle OMA = \angle OA'M'$

Por lo tanto, A' se encuentra en la recta $\overline{A'M'}$.

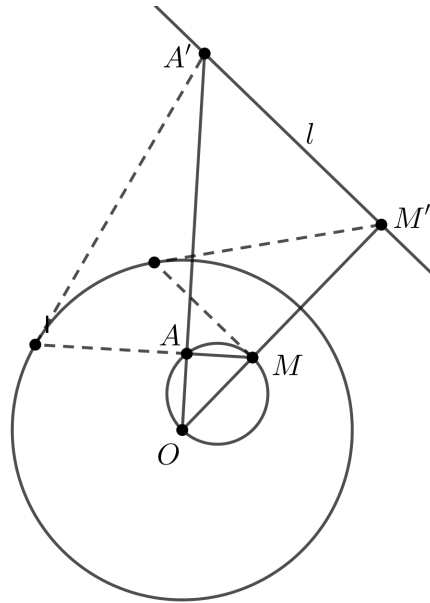


Figura 2.8: Inversión de circunferencia que pasa por el centro de inversión



Podemos observar que el Teorema 2.6 es el regreso del Teorema 2.4. Además, de igual forma, una circunferencia que corta a la circunferencia de inversión en dos puntos y pasa por su centro, su inversión será una recta que pasa por los dos puntos donde la circunferencia corta a la circunferencia de inversión, que sería el regreso del Teorema 2.5.

Teorema 2.7. *La imagen de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión es una circunferencia que tampoco pasa por el centro de inversión.*

Demostración.

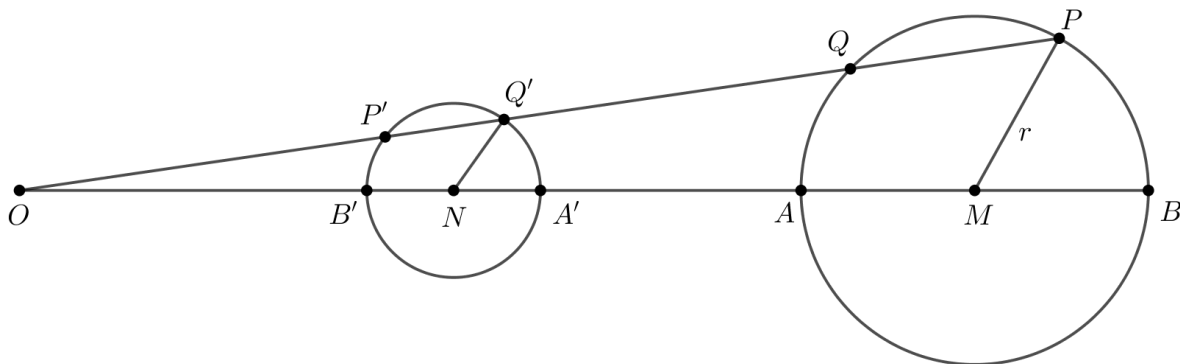


Figura 2.9: Inversión y circunferencias

Supongamos que una circunferencia dada tiene radio r y sean P y Q los puntos de intersección de una recta que pasa por O y dicha circunferencia. Sean P' y Q' los puntos inversos de P y Q . Sea k el radio de la circunferencia de inversión.

Por la definición de inversión tenemos que $OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ' = k^2$ y por potencia de punto exterior, tenemos: $OP \cdot OQ = |OM^2 - r^2|$.

Como tenemos que

$$\begin{aligned} OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ' &\implies \frac{OP'}{OQ} = \frac{OQ'}{OP} \\ &= \frac{OQ' \cdot OQ}{OP \cdot OQ} \\ &= \frac{k^2}{|OM^2 - r^2|} \\ &= \text{constante} \end{aligned}$$

Trazamos una paralela a \overline{PM} que será $\overline{Q'N}$, donde N será la intersección con \overline{OM} . Además, $\triangle NOQ' \sim \triangle MOP$, ya que $\angle NOQ' = \angle MOP \wedge \angle ONQ' = \angle OMP$, por ser $\overline{Q'N} \parallel \overline{PM}$. Así, como $\triangle NOQ' \sim \triangle MOP \implies \frac{OQ'}{OP} = \frac{Q'N}{PM} = \frac{NO}{MO}$.

Despejamos NO , tenemos

$$\begin{aligned} NO &= \frac{MO \cdot OQ'}{OP} \\ &= \frac{MO \cdot OQ'}{OP} \cdot \frac{OQ}{OQ} \\ &= \frac{MO \cdot k^2}{|OM^2 - r^2|} \\ &= \text{constante} \end{aligned}$$

Ahora despejamos $Q'N$, tenemos

$$\begin{aligned} Q'N &= \frac{PM \cdot OQ'}{OP} \\ &= \frac{PM \cdot OQ'}{OP} \cdot \frac{OQ}{OQ} \\ &= \frac{r \cdot k^2}{|OM^2 - r^2|}, \quad PM = r \\ &= \text{constante} \end{aligned}$$

Análogamente, pueden intercambiarse los puntos P y Q , para concluir que los puntos P' y Q' estarán en una circunferencia de centro N y radio constante siempre que P y Q estén en la circunferencia de centro M y radio r . ■

La inversión y los ángulos

El ángulo de intersección de dos curvas en un punto de intersección se define como el ángulo formado por las rectas tangentes (cuando estas tangentes existen). Esto se aplica a rectas, circunferencias o a cualquier otra curva.

Teorema 2.8. *La inversión conserva los ángulos.*

Demostración.

Caso 1: La inversión conserva el ángulo entre una curva y una recta que pase por el centro de inversión y el punto de tangencia. (Figura 2.10)

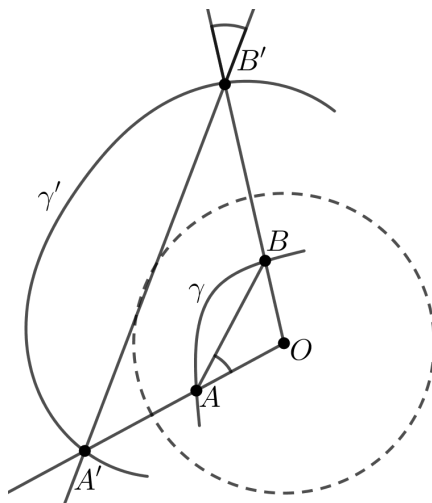


Figura 2.10: Inversión y ángulos

En la Figura 2.10, γ es una curva, A y B son puntos sobre γ , y γ' , A' y B' son los correspondientes inversos. Como $\triangle AOB$ y $\triangle B'OA'$ son semejantes, entonces $\angle A'B'O = \angle BAO$, así los ángulos marcados en la Figura 2.10 son iguales.

Ahora, suponiendo que B es un punto móvil sobre la curva y que B se va aproximando a A , las rectas \overline{AB} y $\overline{A'B'}$ tienden a las tangentes en A y A' a las curvas γ y γ' . Uno de los ángulos marcados tiende al ángulo entre γ y \overline{OA} , mientras que el otro tiende al ángulo inverso.

Caso 2: La inversión conserva el ángulo entre dos curvas. (Figura 2.11)

Sean A, A' y B, B' dos pares de puntos correspondientes en dos curvas inversas γ y γ' .

Primero probaremos que las tangentes de las curvas γ y γ' en los puntos A y A' , respectivamente, son simétricas al mediador del segmento determinado por los puntos de contacto.

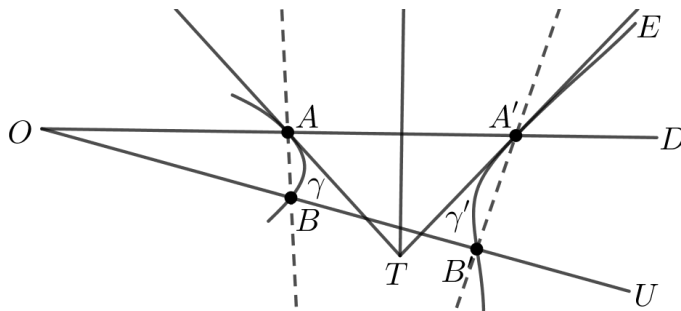


Figura 2.11: Ángulos entre curvas

Sea el cuadrilátero $AA'B'B$ concíclico, por Teorema 2.1 $\triangle OAB \sim \triangle OA'B'$, por lo que $\angle OAB = \angle OB'A'$, entonces $\angle A'AB = \angle A'B'U$, por ser respectivamente los ángulos suplementarios.

Ahora, si B se acerca a A , las posiciones límite de las curvas AB , y $A'B'$ son las tangentes \overline{AT} , y $\overline{A'T}$ respectivamente de γ y γ' y la posición límite de la recta OBB' es la recta OAA' . Así, los valores limitantes de los ángulos $A'AB$ y $A'B'U$ son los ángulos $AA'T$ y $EA'D$, respectivamente, donde $\angle EA'D = \angle AA'T$, por ser ángulos opuestos por el vértice.

Así, concluimos que las tangentes de las curvas γ y γ' en los puntos A y A' , respectivamente, son simétricas.

Ahora volviendo al teorema, suponiendo que B es un punto móvil sobre la curva y que B se va aproximando a A generando el ángulo entre la recta $\overline{AA'}$ y la tangente \overline{AT} , pero como sabemos que las tangentes son simétricas, por lo tanto $\angle A'AT = \angle AA'T$. ■

Razón doble en inversión

Definición 2.3. Sean A, B, C y D puntos distintos alineados. Llamaremos **razón doble**

de los puntos A, B, C y D al número $r = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{BD}}$

Teorema 2.9. La razón doble es invariante por inversiones.

Demostración.

Sea la circunferencia ω con centro en O y sean A, B, C y D puntos interiores a ω (pueden ser exteriores y sus inversos interiores), sean A', B', C' y D' , sus inversos respectivamente, y sea r el radio de inversión. Como $\triangle OAC \sim \triangle OA'C'$, $\triangle OCB \sim \triangle OC'B'$, $\triangle OBD \sim \triangle OB'D'$ y $\triangle OAD \sim \triangle OA'D'$, por semejanza de triángulos tenemos respectivamente:

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{OC'}{OC} \quad (2.1)$$

$$\frac{OC'}{OC} = \frac{C'B'}{CB} = \frac{OB'}{OB} \quad (2.2)$$

$$\frac{OB'}{OB} = \frac{B'D'}{BD} = \frac{OD'}{OD} \quad (2.3)$$

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{A'D'}{AD} = \frac{OD'}{OD} \quad (2.4)$$

De 2.1:

$$AC = A'C' \cdot \frac{OC}{OC'} \quad (2.5)$$

De 2.2:

$$CB = C'B' \cdot \frac{OB}{OB'} \quad (2.6)$$

De 2.3:

$$BD = B'D' \cdot \frac{OD}{OD'} \quad (2.7)$$

De 2.4:

$$AD = A'D' \cdot \frac{OD}{OD'} \quad (2.8)$$

Por definición de razón doble: $r = \frac{\frac{AC}{CB}}{\frac{AD}{BD}}$

Entonces,

$$\begin{aligned} r &= \frac{\frac{AC}{CB}}{\frac{AD}{BD}} \\ &= \frac{A'C' \cdot \frac{OC}{OC'}}{C'B' \cdot \frac{OC}{OC'}} \cdot \frac{A'D' \cdot \frac{OD}{OD'}}{B'D' \cdot \frac{OD}{OD'}} \quad ; \text{ por ecuaciones 2.5, 2.6, 2.7, 2.8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r &= \frac{\overline{A'C'} \cdot \overline{OC} \cdot \overline{OC'}}{\overline{C'B'} \cdot \overline{OC} \cdot \overline{OC'}} \\
&= \frac{\overline{A'D'} \cdot \overline{OD} \cdot \overline{OD'}}{\overline{B'D'} \cdot \overline{OD} \cdot \overline{OD'}} \\
&= \frac{\overline{A'C'}}{\overline{C'B'}} \\
&= \frac{\overline{A'D'}}{\overline{B'D'}}
\end{aligned}$$

Por lo que, $r = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'D'}}$. Es decir, la razón doble es invariante por inversiones. ■

2.3. Inversor de Peaucellier

El mecanismo de Peaucellier es un conjunto de barras articuladas que transforma un movimiento circular en un movimiento rectilíneo. Las barras se mueven en planos paralelos muy cercanos y se considera que se mueven en un solo plano. Según la Figura 2.12 hay seis barras rígidas (de longitud constante): \overline{OA} , \overline{OC} , \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} y \overline{DA} .

Donde las longitudes de las barras cumplen que: $OA = OC$, $AB = BC = CD = DA$. Si el punto O es fijo y el punto B se mueve siguiendo una circunferencia que pasa por O , entonces el punto D se moverá según una línea recta. Las longitudes OA y AB son fijas, D es el inverso de B en una inversión de una circunferencia de radio $r = \sqrt{AO^2 - AB^2}$ a través de O . Por Teorema de Pitágoras¹ tenemos:

$$\begin{aligned}
OB \cdot OD &= (OM - BM)(OM + MD) \\
&= (OM - BM)(OM + BM) \\
&= OM^2 - BM^2 \\
&= (AO^2 - AM^2) - (AB^2 - AM^2) \\
&= AO^2 - AB^2 \\
&= r^2
\end{aligned}$$

Como los puntos O , B y D están alineados, concluimos que $OB \cdot OD = r^2$.

Sabemos, por Teorema 2.6, que el inverso de una circunferencia que pasa a través del centro de inversión es una línea recta que no pasa por el centro de inversión. Por lo tanto, si podemos hacer que B viaje en una circunferencia que también pasa a través de O , entonces D viajará en línea recta, esto se puede lograr fácilmente agregando una barra \overline{BP} y fijando

¹Recursos básicos en geometría plana, Rodolfo Larrea Tomás, pág. 4

la posición de P tal que $OP = BP$. Entonces, B gira en un ciclo que pasa a través de O , por lo que D viajará en línea recta.

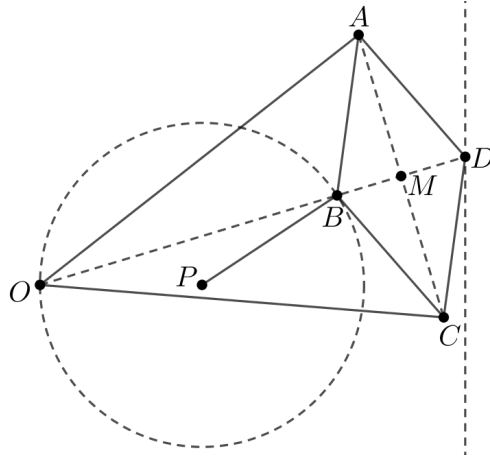


Figura 2.12: Inversor de Peaucellier

2.4. Ejercicios

Ejercicios resueltos

Ejercicio Resuelto 2.1. Sea una semicircunferencia con diámetro \overline{AB} y centro O , y una recta que corta a la semicircunferencia en los puntos C y D , y a la recta \overline{AB} en el punto M (siendo $MD < MC$ y $MB < MA$). Sea K el segundo punto de intersección de las circunferencias que pasan por OAC la primera y por OBD la segunda. Demostrar que $\angle MKO = 90^\circ$.

Demostración.

Consideremos la inversión de centro O y radio \overline{OA} , la recta \overline{AB} es fija. Por Teorema 2.6, las circunferencias ACO y BDO se transforman en las rectas \overline{AC} y \overline{BD} respectivamente.

Sea K' el punto en que se cortan \overline{AC} y \overline{BD} , con K' el inverso de K . Por Teorema 2.5, la recta \overline{CD} se transforma en una circunferencia que pasa por C, D, O , y esta circunferencia corta a la recta \overline{AB} en el punto M' , inverso de M .

Como $\overline{AD} \perp \overline{BK'}$ y $\overline{BC} \perp \overline{AK'}$, ya que $\angle ACB$ y $\angle ADB$ son ángulos inscritos, por lo tanto son ángulos de 90° . Además, como \overline{AB} es el diámetro y O es el centro, entonces O es el punto de medio de \overline{AB} .

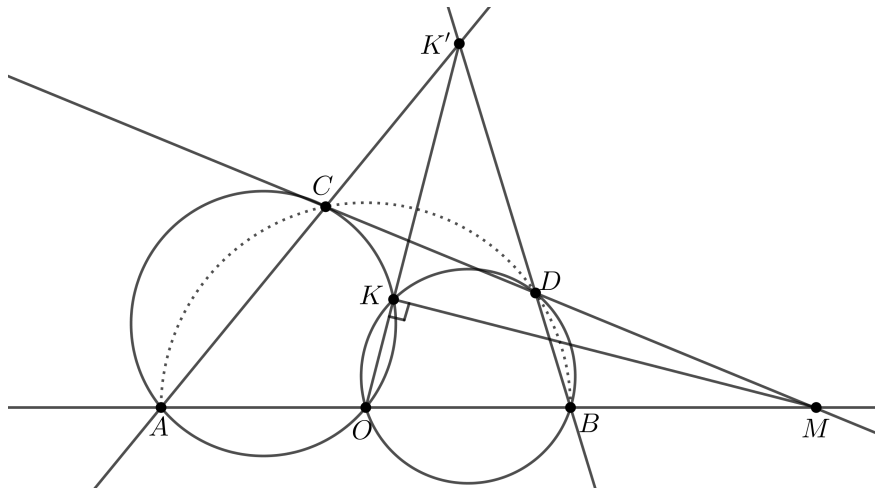


Figura 2.13: Ejercicio 1

Como \overline{BC} y \overline{AD} son alturas de $\triangle ABK'$ y O es punto medio de \overline{AB} entonces C, D y O deben ser parte de la circunferencia de los nueve puntos de $\triangle ABK'$, y como existe una única circunferencia que pasa por tres puntos, entonces la circunferencia que pasa por C, D, O es la circunferencia de los nueve puntos de $\triangle ABK'$, así también $\overline{K'M'}$ es perpendicular a \overline{AB} , por ser una altura de $\triangle ABK'$, por lo que $\angle K'M'O = 90^\circ$, así $\angle MKO = 90^\circ$, ya que por Teorema 2.1 $\triangle K'M'O \sim \triangle KMO$.

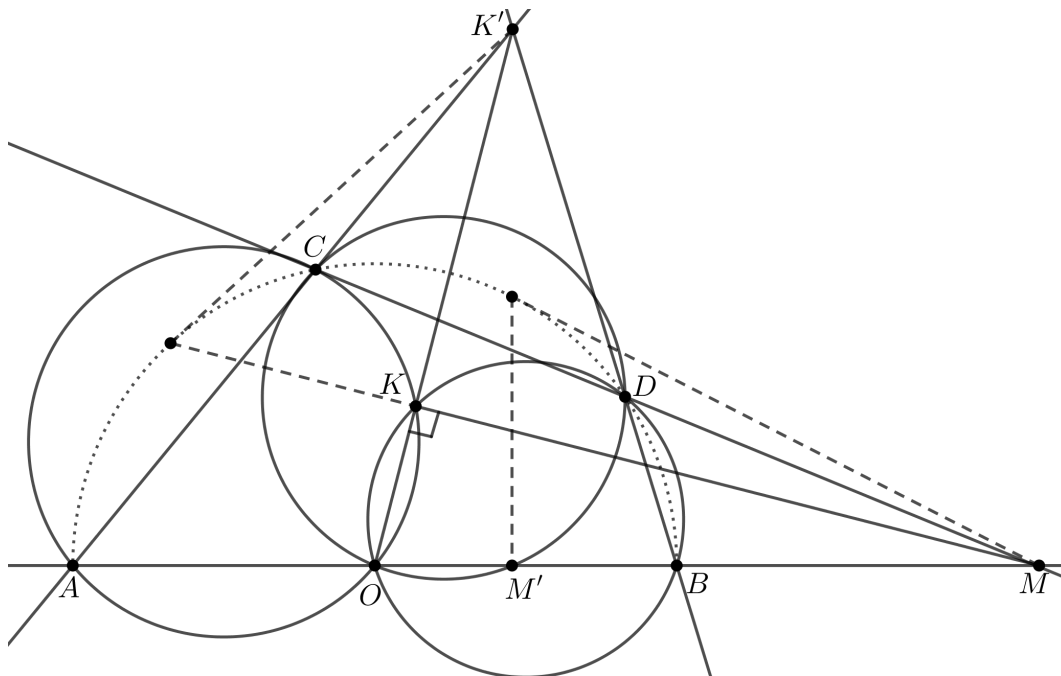


Figura 2.14: Solución ejercicio 1

■

Ejercicio Resuelto 2.2. Sean el $\triangle ABC$ y D, E, F los puntos de contacto de la circunferencia inscrita con los lados \overline{BC} , \overline{CA} y \overline{AB} , respectivamente. Demostrar que la inversión respecto de la circunferencia inscrita transforma la circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$ en la circunferencia de los nueve puntos del $\triangle DEF$.

Demostración.

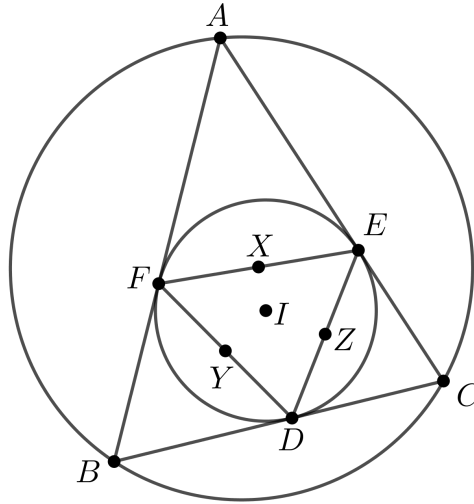


Figura 2.15: Ejercicio 2.2

Sea I y r el centro y el radio de la circunferencia inscrita al $\triangle ABC$ (Figura 2.15). Consideremos la inversión respecto de esta circunferencia. Sean X, Y, Z los puntos medios de los lados \overline{EF} , \overline{FD} , \overline{DE} respectivamente, del $\triangle DEF$.

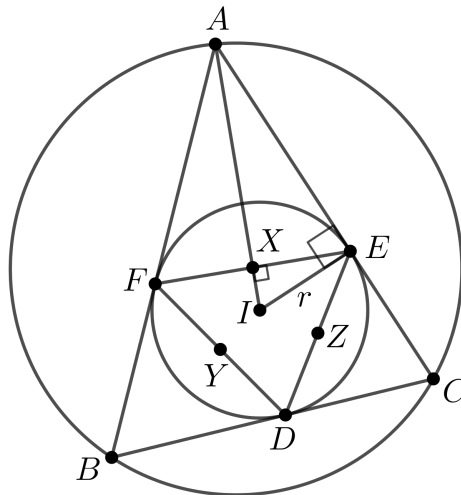


Figura 2.16: Ejercicio 2.2

Por ser E y F los puntos de tangencia de las rectas tangentes desde A a la circunferencia inscrita, ambos puntos son simétricos respecto de la bisectriz \overline{AI} , por Teorema 1.9 (Figura 2.16).

Por lo que el $\triangle AEF$ es isósceles y la perpendicular a \overline{EF} por A pasa por su punto medio X , es decir $\angle IXE = 90^\circ$. También $\angle IEA = 90^\circ$ por Teorema 1.7. Como en los $\triangle IEA$ e $\triangle IXE$, $\angle AIE = \angle XIE$ y $\angle IXE = \angle IEA = 90^\circ$, por criterio I (A-A) de semejanza de triángulos, $\triangle IEA \sim \triangle IXE$. Entonces tenemos:

$$\frac{IX}{IE} = \frac{IE}{IA} \implies IX \cdot IA = IE^2 = r^2$$

Esto quiere decir que A y X son puntos inversos. Análogamente, B y Y son puntos inversos y C y Z son puntos inversos.

Por lo que la circunferencia ABC se transforma en la circunferencia XYZ que es la circunferencia de los nueve puntos. (Figura 2.17)

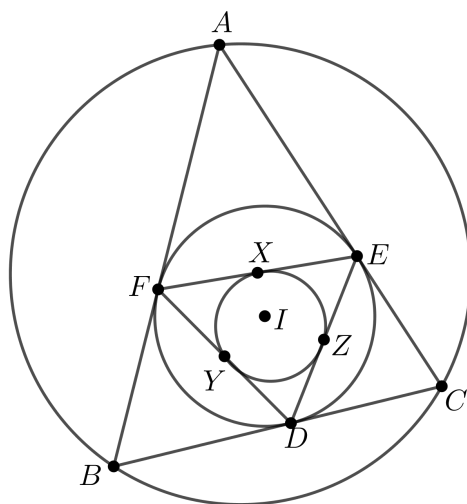


Figura 2.17: Ejercicio 2.2



Ejercicio Propuesto 2.1. *El incírculo C_1 del $\triangle ABC$ es tangente a \overline{BC} , \overline{AC} y \overline{AB} en D , E y F , respectivamente. Sea C_2 una segunda circunferencia tangente a \overline{BC} en D . Las rectas \overline{BP} y \overline{CQ} son tangentes a C_2 en P y Q , con $P \neq D$ y $Q \neq D$. Demostrar que los puntos E , F , P y Q son concíclicos.*

Capítulo 3

Inversión y circunferencias

3.1. Circunferencias Ortogonales

Definición 3.1. *Dos circunferencias secantes son **ortogonales** cuando se cortan formando un ángulo recto, es decir, cuando los radios en ambos puntos de intersección son perpendiculares.*

Así, las circunferencias con centros A y B son ortogonales, ya que $\angle BTA = 90^\circ$. (Figura 3.1)

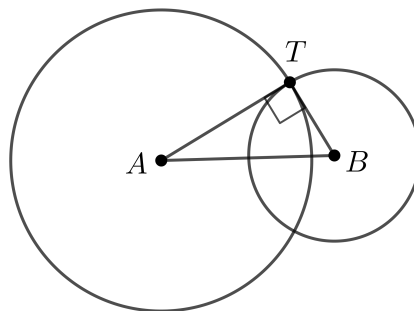


Figura 3.1: Circunferencias Ortogonales

Si r y s son los radios de las circunferencias con centro en A y B respectivamente, la condición de ortogonalidad equivale a que $AB^2 = r^2 + s^2$

Teorema 3.1. *Si dos circunferencias son ortogonales, entonces:*

a) *Las tangentes en cada punto de intersección pasan por el centro de la otra circunferencia.*

b) Una inversión deja fija una circunferencia ortogonal a la circunferencia de inversión.

Demostración.

a) Sean α y β circunferencias ortogonales, entonces los radios en uno de los puntos de intersección son perpendiculares, la recta tangente a β por el punto de intersección de α y β , es perpendicular al segmento que es el radio de β , por lo que la recta tangente debe pasar por el centro de α , de forma semejante para la tangente a α . (Figura 3.2)

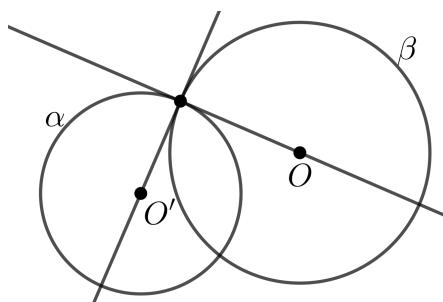


Figura 3.2: Teorema 3.1 a)

b) Supongamos que las circunferencias C_1 con centro en A y radio r y C_2 con centro en B son ortogonales, y si P y P' son dos puntos de intersección de una recta que pasa por A con la circunferencia C_2 , la potencia del punto A con respecto de C_2 es $AP \cdot AP' = AT^2 = r^2$, por lo que P' es el punto inverso de P respecto de la inversión definida por la circunferencia C_1 , es decir la inversión con respecto a C_1 deja fija a la circunferencia ortogonal C_2 (Figura 3.3).

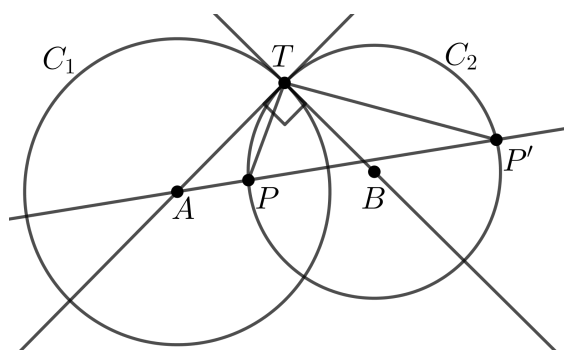


Figura 3.3: Inversión que deja fija a una circunferencia

■

Teorema 3.2. *Dos circunferencias secantes α y β son ortogonales si alguna de las siguientes afirmaciones es verdadera:*

1. La tangente a una circunferencia en un punto de intersección pasa por el centro de la otra circunferencia.
2. Una de las circunferencias pasa a través de dos puntos distintos que son inversos con respecto a la otra circunferencia.

Demostración.

1. Sean α y β dos circunferencias secantes, con centro O y O' respectivamente, sea a la tangente a α que pasa por O' y sea T el punto de intersección de α y β por el cual pasa a . (Ver Figura 3.4). Entonces la tangente b a β en T es perpendicular a $\overline{O'T}$ por Teorema 1.7, por lo que las dos tangentes en el punto de intersección deben ser perpendiculares, es decir \overline{OT} es perpendicular a a , esto es, $\overline{OT} \perp \overline{O'T}$, por lo que α y β son ortogonales.

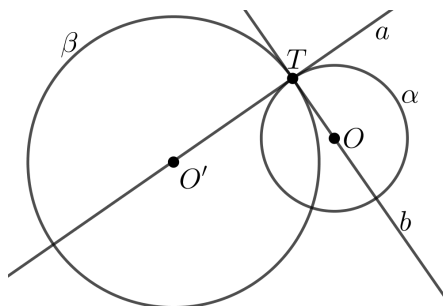


Figura 3.4: Teorema 3.2 (1)

2. Supongamos que la circunferencia β pasa a través de P y P' , los cuales son inversos respecto a α . Sea O el centro de α y sea \overline{OX} la tangente a β en X (Ver Figura 3.5). Por potencia de punto de O respecto a β tenemos:

$$OP \cdot OP' = OX^2$$

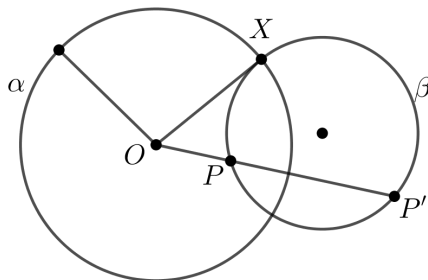


Figura 3.5: Teorema 3.2 (2)

Además, sea r el radio de α , entonces:

$$OP \cdot OP' = r^2$$

por ser P y P' puntos inversos. Por lo que $\overline{OX} = r$, entonces X debe estar tanto en α como en β , es decir, X es un punto de intersección de α y β , y la tangente a β en este punto pasa por el centro de α , por lo que por inciso 1 las circunferencias α y β son ortogonales. ■

Lema 3.1. *Sea C una circunferencia y sea P un punto fuera de C , consideremos una tangente \overline{PT} a C , una secante que pasa por P , A y A' , con A y A' puntos en C . Entonces $PA \cdot PA' = PT^2$.*

Demostración.

Sea O el centro de C y r su radio. Trazamos una perpendicular \overline{OB} a $\overline{AA'}$ (Figura 3.6). Como los triángulos $\triangle ABO$ y $\triangle A'BO$ son rectángulos, y ya que $AO = A'O$ por ser radios, además comparten el lado \overline{OB} , entonces $\triangle ABO \cong \triangle A'BO$ por Postulado I de congruencia de triángulos rectángulos. Entonces:

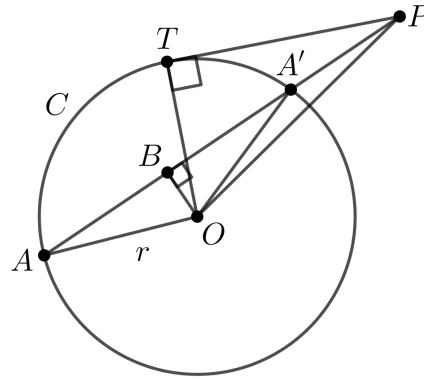


Figura 3.6: Lema 3.1

$$\begin{aligned}
 PT^2 &= OP^2 - OT^2 && ; \text{ Por Teorema de Pitágoras} \\
 &= OP^2 - OA^2 && ; OT = OA \\
 &= OP^2 - (OB^2 + AB^2) && ; \text{ Por Teorema de Pitágoras} \\
 &= (OP^2 - OB^2) - AB^2 \\
 &= PB^2 - AB^2 && ; \text{ Por Teorema de Pitágoras} \\
 &= (PB + AB)(PB - AB) \\
 &= (PB + AB)(PB - A'B) && ; AB = A'B, \text{ ya que } \triangle ABO \cong \triangle A'BO \\
 &= PA \cdot PA' \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Teorema 3.3. *Sea C una circunferencia, P y P' puntos inversos respecto a C . Cada circunferencia que pase por P y P' será ortogonal a C .*

Demostración.

Sea C' cualquier circunferencia que pasa por P y P' , T el centro de C' , S el punto de intersección de C y C' y r el radio de C . (Ver Figura 3.7)

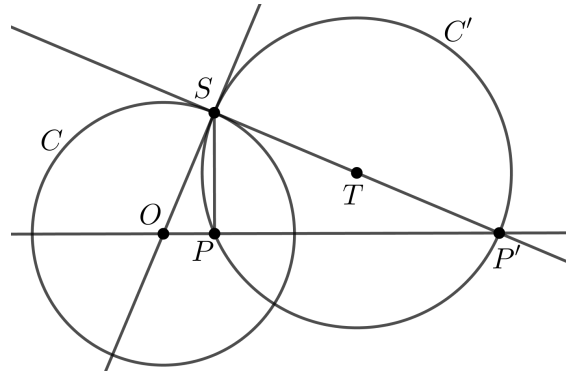


Figura 3.7: Teorema 3.3

Para probar que C y C' son ortogonales, necesitamos probar que \overline{OS} es tangente a C' . Ya que P y P' son inversos en C tenemos:

$$OP \cdot OP' = OS^2$$

$$OS = \sqrt{OP \cdot OP'}$$

$$r = \sqrt{OP \cdot OP'}$$

Por Lema 3.1 es exactamente la longitud de la tangente de O a C' . Por lo que \overline{OS} es tangente a C' . Por lo tanto, cada circunferencia que pase por P y P' será ortogonal a C . ■

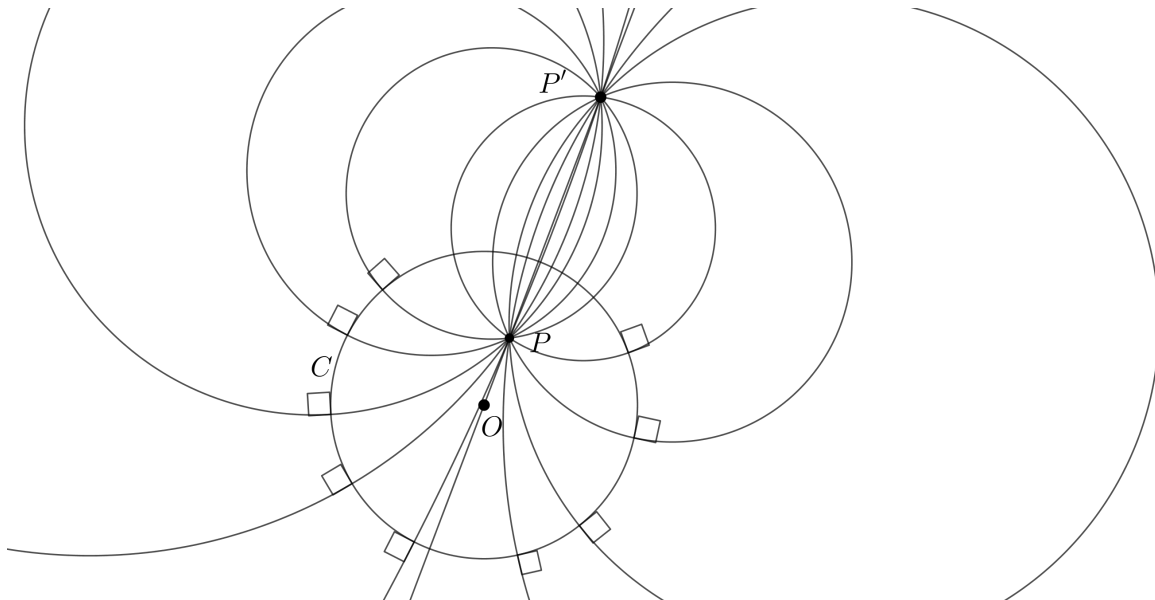


Figura 3.8: Circunferencias ortogonales a C

3.2. Circunferencias Concéntricas

Definición 3.2. *Dos circunferencias son **concéntricas** si sus centros coinciden, es decir si $OO' = 0$.*

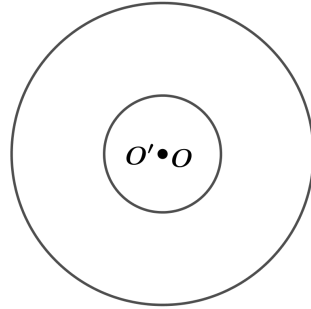


Figura 3.9: Circunferencias Concéntricas

3.2.1. Inversión que pone concéntricas dos circunferencias

Sean C_1 y C_2 dos circunferencias no concéntricas, de manera que la segunda está contenida en la región acotada determinada por la primera. Si hacemos una inversión con centro un punto cualquiera $P \in C_1$ la pareja de circunferencias se transforman respectivamente en una recta C'_1 y una circunferencia C'_2 . (Ver Figura 3.10)

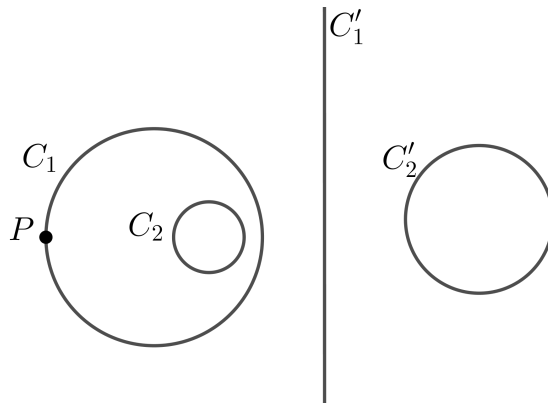


Figura 3.10: Primer paso: Inversión de centro P

Dibujamos a continuación dos circunferencias ortogonales a la vez a C'_1 y C'_2 . Para ello tomamos $T, T' \in C'_2$ con la precaución que no pertenezcan al diámetro de C'_2 perpendicular a C'_1 , ya que al trazar las tangentes por T y T' , éstas serían paralelas a C'_1 y no tendríamos intersección entre ellas. Ahora, sean U y U' respectivamente los puntos de intersección con C'_1 de las tangentes a C'_2 por T y T' . (Ver Figura 3.11)

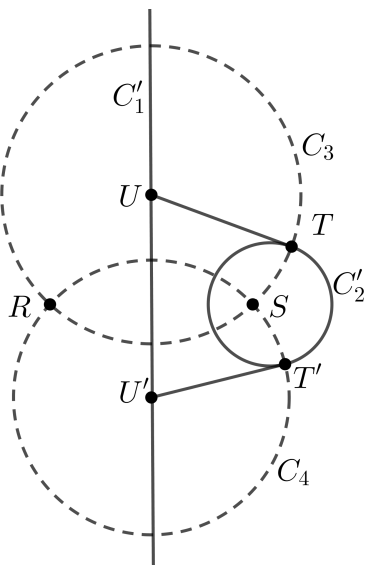


Figura 3.11: Segundo paso

Entonces las circunferencias C_3 (de centro U y radio \overline{UT}) y C_4 (de centro U' y radio $\overline{U'T'}$) son ortogonales a C'_1 y C'_2 y se cortan en dos puntos R y S . Considerando una inversión de centro en R , C_3 y C_4 pasan a ser rectas C'_3 y C'_4 que se cortan en un punto S' imagen de S (Figura 3.12).

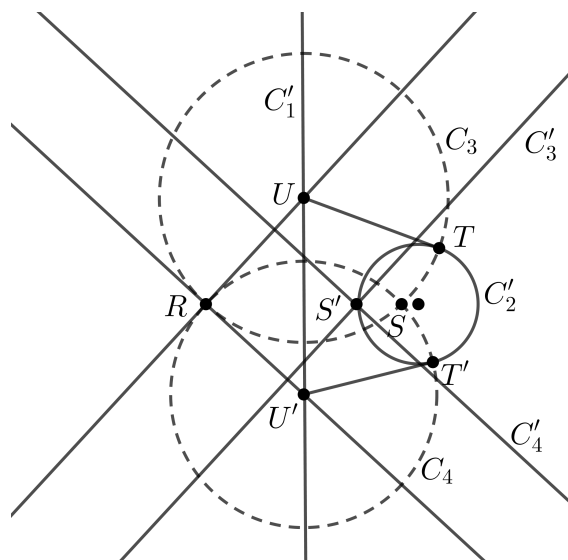


Figura 3.12: Punto S'

La recta C'_1 se transforma en una circunferencia por R ortogonal a C'_3 y C'_4 . Por lo tanto, el punto S' de intersección de C'_3 y C'_4 es su centro (Figura 3.13).

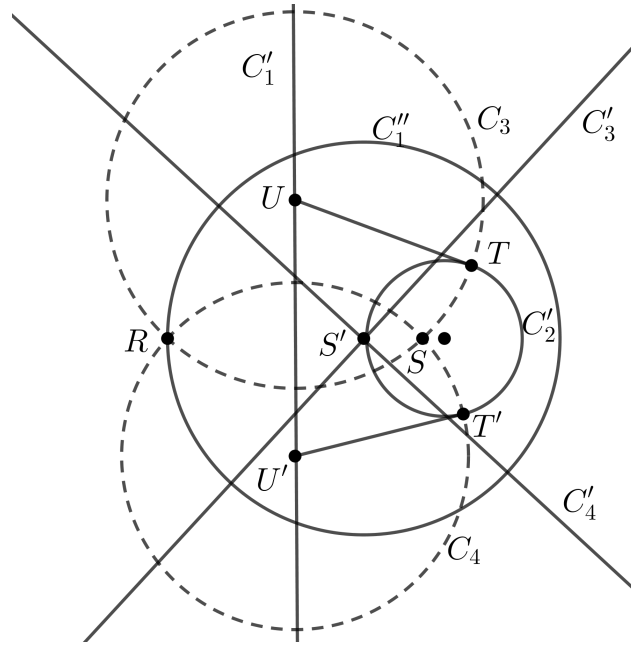


Figura 3.13: Circunferencia C_1''

Además, C_2' se transforma en una circunferencia ortogonal a C_3' y C_4' . Por lo tanto, el punto S' de intersección de C_3' y C_4' es su centro (Figura 3.14).

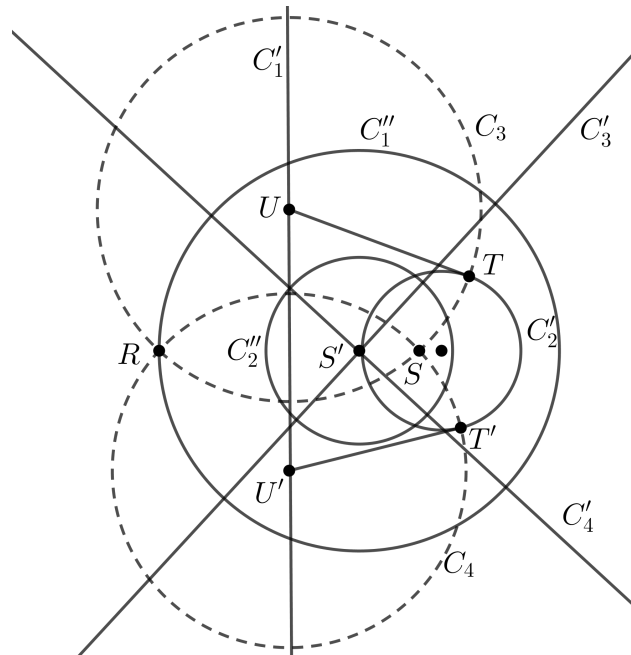


Figura 3.14: Circunferencia C_2''

Así pues, las transformadas C_1'' y C_2'' de C_1' y C_2' son circunferencias concéntricas como

queríamos (Figura 3.15).

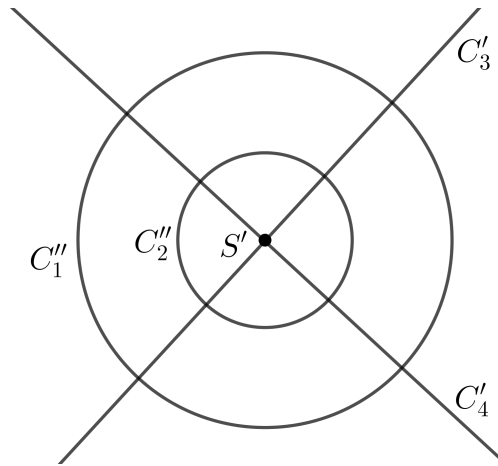


Figura 3.15: Circunferencias C_1'' y C_2''

3.2.2. Producto inversivo de circunferencias

Supongamos que las circunferencias C_1 y C_2 se cortan formando en uno de los puntos de intersección (y por lo tanto también en el otro) un ángulo α (Ver Figura 3.1). Entonces definimos: $C_1 * C_2 = |\cos \alpha|$.

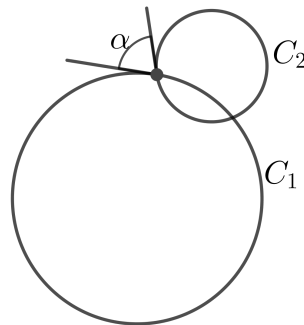


Figura 3.16: Ángulo entre dos circunferencias

Si las ecuaciones de las circunferencias dadas son

$$C_1 : (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

$$C_2 : (x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2$$

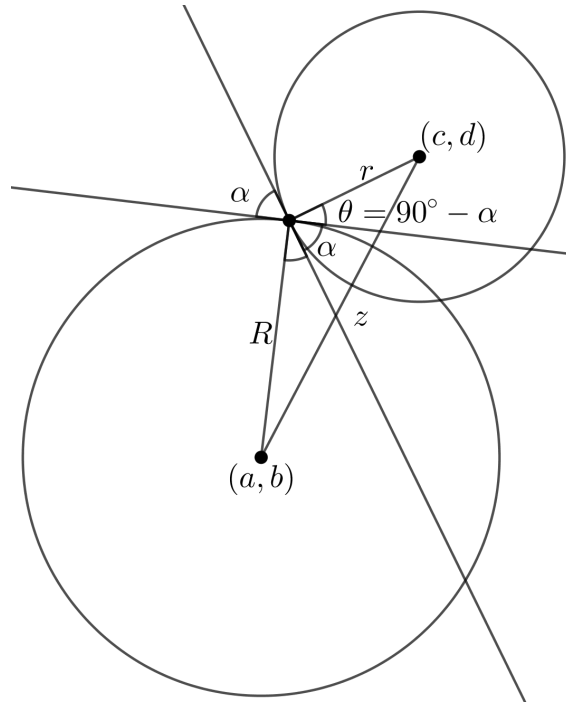


Figura 3.17: Ángulos entre circunferencias

Observando en la Figura 3.17, por distancia entre dos puntos tenemos:

$$z = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2} \quad (3.1)$$

Además, tenemos:

$$z^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta + \theta + \alpha) \quad ; \text{ Por Teorema del Coseno}^1$$

$$z^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos(90 - \alpha + 90 - \alpha + \alpha)$$

$$z^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos(180 - \alpha)$$

$$2Rr \cos(180 - \alpha) = R^2 + r^2 - z^2$$

$$2Rr \cos(180 - \alpha) = R^2 + r^2 - [(a - c)^2 + (b - d)^2] \quad ; \text{ Por ecuación 3.1}$$

$$2Rr \cos(180 - \alpha) = R^2 + r^2 - [a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bd + d^2]$$

$$2Rr \cos(180 - \alpha) = 2ac + 2bd - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 + R^2 + r^2$$

$$\cos(180 - \alpha) = \frac{1}{Rr} \left(ac + bd - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - R^2 - r^2) \right)$$

$$-\cos \alpha = \frac{1}{Rr} \left(ac + bd - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - R^2 - r^2) \right) \quad ; \cos(180 - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$|\cos \alpha| = \frac{1}{Rr} \left(ac + bd - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - R^2 - r^2) \right)$$

Por lo que:

$$C_1 * C_2 = \frac{1}{rR} \left(ac + bd - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - R^2 - r^2) \right) \quad (3.2)$$

El segundo término de esta igualdad tiene sentido tanto si las circunferencias se cortan como si no se cortan. Por lo tanto podemos tomar la anterior expresión 3.2 como definición de producto inversivo de dos circunferencias cualesquiera C_1 y C_2 . Cuando C_1 y C_2 se cortan es claro que $C_1 * C_2$ es invariante por inversiones, ya que los ángulos se conservan. Pero se produce el siguiente hecho.

Teorema 3.4. *El número $C_1 * C_2$ definido por la ecuación 3.2 es invariante por inversiones, tanto si las circunferencias se cortan como si no se cortan.*

Teorema 3.5. *Si C_1 y C_2 son dos circunferencias concéntricas de radios R y r , tenemos*

$$C_1 * C_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} + \frac{r}{R} \right) \quad (3.3)$$

Demostración.

Sean C_1 y C_2 dos circunferencias concéntricas, cuyo centro está en (a, b) . (Ver Figura 3.18)

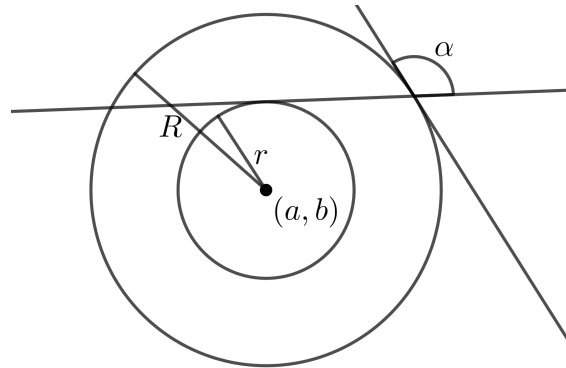


Figura 3.18: Teorema 3.5

Sustituimos las coordenadas del centro de C_2 en ecuación 3.2:

$$\begin{aligned} C_1 * C_2 &= \frac{1}{rR} \left(aa + bb - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + a^2 + b^2 - R^2 - r^2) \right) \\ &= \frac{1}{rR} \left(a^2 + b^2 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + a^2 + b^2 - R^2 - r^2) \right) \\ &= \frac{1}{rR} \cdot \frac{1}{2}(R^2 + r^2) \end{aligned}$$

Por lo que:

$$C_1 * C_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} + \frac{r}{R} \right)$$

Observemos finalmente que, para cualquiera dos circunferencias:

$$C_1 * C_2 < 1 \iff \text{se cortan}$$

$$C_1 * C_2 = 1 \iff \text{son tangentes}$$

$$C_1 * C_2 > 1 \iff \text{no se cortan}$$

3.2.3. Distancia inversiva entre circunferencias

La distancia entre circunferencias concéntricas de radios r y R , donde $R \geq r$ se define como

$$\delta(C_1, C_2) = \ln \frac{R}{r}; \quad \ln \frac{R}{r} \geq 0$$

. De esta manera, si tenemos tres circunferencias concéntricas con $s \leq r \leq R$ tenemos:

$$\begin{aligned} \delta(C_1, C_2) + \delta(C_2, C_3) &= \ln \frac{R}{r} + \ln \frac{r}{s} \\ &= \ln R - \ln r + \ln r - \ln s \\ &= \ln R - \ln s \\ &= \ln \frac{R}{s} \\ &= \delta(C_1, C_3) \end{aligned}$$

que es una propiedad que se ha de esperar de cualquier función distancia sobre “puntos alineados”.

Definición 3.3. Si C_1 y C_2 son dos circunferencias arbitrarias se define su distancia por $\delta(C_1, C_2) = \delta(\varphi C_1, \varphi C_2)$ donde φ es una inversión que las pone concéntricas.

Esta definición no depende de la inversión o composición de inversiones usadas para poner concéntricas las dos circunferencias dadas. En efecto, si φ y Ψ son composiciones de inversiones que ponen concéntricas las dos circunferencias dadas entonces $\Phi = \varphi \circ \Psi^{-1}$ es una composición de inversiones que lleva circunferencias concéntricas de radios $r' \leq R'$ a circunferencias concéntricas de radios $r \leq R$.

Pero el producto de circunferencias concéntricas, que es invariante por inversiones, vale $C_1 * C_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} + \frac{r}{R} \right)$ de manera que la igualdad $C_1 * C_2 = \Phi C_1 * \Phi C_2$, implica que

$\frac{R}{r} + \frac{r}{R} = \frac{R'}{r'} + \frac{r'}{R'}$ que es una igualdad de la forma $x + \frac{1}{x} = y + \frac{1}{y}$ que implica $x = y$ o $x = \frac{1}{y}$ y por tanto, $\ln \frac{R}{r} = \ln \frac{R'}{r'}$.

Como $\delta(\varphi C_1, \varphi C_2) = \ln \frac{R}{r}$ y $\delta(\Psi C_1, \Psi C_2) = \ln \frac{R'}{r'}$, la definición de distancia no depende de la inversión o composición de inversiones que se usen para poner las circunferencias concéntricas.

3.2.4. Distancia inversiva en función de los radios y distancia entre centros. Relación distancia - producto

Supongamos C_1 y C_2 , dos circunferencias no concéntricas, de manera que la primera está contenida en la región acotada determinada por la segunda. Queremos calcular la distancia inversiva δ entre C_1 y C_2 sin necesidad de ponerlas concéntricas, es decir, directamente a partir de sus radios y la distancia entre los centros.

Sean A, B, C, D puntos sobre un diámetro común, de la siguiente manera:

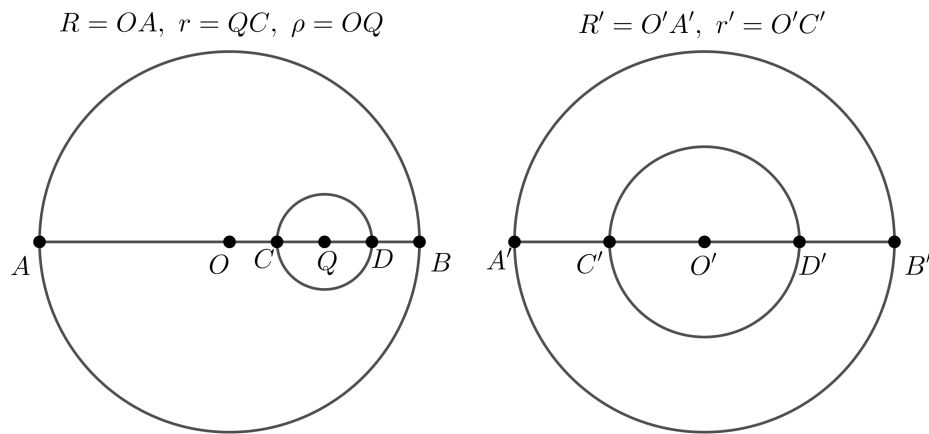


Figura 3.19: Distancia inversiva

Los radios y la distancia son entonces $R = OA, r = QC, \rho = OQ$.

Tenemos:

$$(A, B, C, D) = \frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AD}{BD}}$$

$$\begin{aligned}
(A, B, C, D) &= \frac{AO + OQ - QC}{AO - OQ + QC} \\
&= \frac{AO + OQ - QC}{AO + OQ + QC} \\
&= \frac{AO - OQ - QC}{R + \rho - r} \\
&= \frac{R - \rho + r}{R + \rho + r} \\
&= \frac{R - \rho - r}{R - \rho - r} \\
&= \frac{(R + \rho - r)(R - \rho - r)}{(R - \rho + r)(R + \rho + r)} \\
&= \frac{R^2 - R\rho - Rr + R\rho - \rho^2 - r\rho - Rr + r\rho + r^2}{R^2 + R\rho + Rr - R\rho - \rho^2 - r\rho + Rr + r\rho + r^2} \\
&= \frac{R^2 + r^2 - \rho^2 - 2Rr}{R^2 + r^2 - \rho^2 + 2Rr} \\
&= \frac{R^2 + r^2 - \rho^2 - 2Rr}{R^2 + r^2 - \rho^2 - 2Rr} \\
&= \frac{2Rr}{R^2 + r^2 - \rho^2 + 2Rr} \\
&= \frac{2Rr}{R^2 + r^2 - \rho^2} - \frac{2Rr}{2Rr} \\
&= \frac{2Rr}{R^2 + r^2 - \rho^2} + \frac{2Rr}{2Rr} \\
&= \frac{R^2 + r^2 - \rho^2}{2Rr} - 1 \\
&= \frac{2Rr}{R^2 + r^2 - \rho^2} + 1 \\
&= \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \quad \gamma = \frac{R^2 + r^2 - \rho^2}{2Rr}
\end{aligned}$$

Si por una inversión ponemos las circunferencias concéntricas, el diámetro va al diámetro y los puntos A, B, C, D van a los puntos A', B', C', D' , como se indica en la Figura 3.19. Los nuevos radios son entonces $R' = O'A', r' = O'C'$ y en particular la distancia inversiva es $\delta = \ln \frac{R'}{r'}$.

Tenemos:

$$\begin{aligned}
(A', B', C', D') &= \frac{A'C'}{B'C'} \\
&= \frac{B'D'}{A'D'} \\
&= \frac{R' - r'}{R' + r'} \\
&= \frac{R' + r'}{R' - r'}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(A', B', C', D') &= \frac{(R' - r')(R' - r')}{(R' + r')(R' + r')} \\
&= \frac{(R' - r')^2}{(R' + r')^2} \\
&= \frac{R'^2 - 2R'r' + r'^2}{R'^2 + 2R'r' + r'^2} \\
&= \frac{R'^2 - 2R'r' + r'^2}{R'^2 + 2R'r' + r'^2} \\
&= \frac{R'r'}{R'^2 + 2R'r' + r'^2} \\
&= \frac{\frac{R'^2}{R'r'} + \frac{r'^2}{R'r'} - \frac{2R'r'}{R'r'}}{\frac{R'^2}{R'r'} + \frac{r'^2}{R'r'} + \frac{2R'r'}{R'r'}} \\
&= \frac{\frac{R'}{r'} + \frac{r'}{R'} - 2}{\frac{R'}{r'} + \frac{r'}{R'} + 2} \\
&= \frac{\frac{R'}{r'} + \frac{r'}{R'} - 2}{\frac{R'}{r'} + \frac{r'}{R'} + 2} \\
&= \frac{2}{\frac{R'}{r'} + \frac{r'}{R'} + 2} \\
&= \frac{\frac{R'}{r'} + \frac{r'}{R'} - 1}{\frac{R'}{r'} + \frac{r'}{R'} + 1} \\
&= \frac{e^{\ln \frac{R'}{r'}} + e^{-\ln \frac{R'}{r'}} - 1}{e^{\ln \frac{R'}{r'}} + e^{-\ln \frac{R'}{r'}} + 1} \\
&= \frac{\cosh \delta - 1}{\cosh \delta + 1}; \quad \delta = \ln \frac{R'}{r'}
\end{aligned}$$

Como la razón doble es invariante por inversiones podemos igualar las dos expresiones anteriores y obtenemos $\cosh \delta = \gamma$, es decir, $\cosh \delta = \frac{R^2 + r^2 - \rho^2}{2Rr}$.

Con la notación de la sección anterior tenemos $\rho^2 = (c - a)^2 + (d - b)^2$, que sustituyendo

en la anterior fórmula y comparando con la ecuación 3.2 de la sección anterior, nos dice

Teorema 3.6. *Sea δ la distancia inversiva entre C_1 y C_2 . Entonces $\cosh \delta = C_1 * C_2$.*

Demostración.

Sea $\delta = \ln \frac{R'}{r'}$, entonces

$$\begin{aligned} \cosh \delta &= \frac{e^{\ln \frac{R'}{r'}} + e^{-\ln \frac{R'}{r'}}}{2} \\ &= \frac{\frac{R'}{r'} + \frac{r'}{R'}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{R'}{r'} + \frac{r'}{R'} \right) \\ &= C_1 * C_2 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3.3. Circunferencias tangentes

Definición 3.4. *Dos circunferencias son tangentes entre si cuando tienen sólo un punto en común (Ver Figura 3.20). La ubicación de los demás puntos de una con respecto a los demás de la otra, definen si son tangentes exteriores o interiores.*

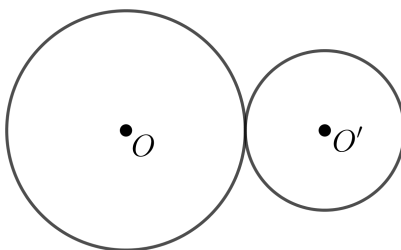


Figura 3.20: Circunferencias tangentes

Tangentes exteriores

Dos circunferencias son **tangentes exteriores** cuando la distancia entre los centros es igual a la suma de los radios. El centro de cada circunferencia es exterior a la otra y tienen un punto en común, punto de tangencia (Figura 3.21).

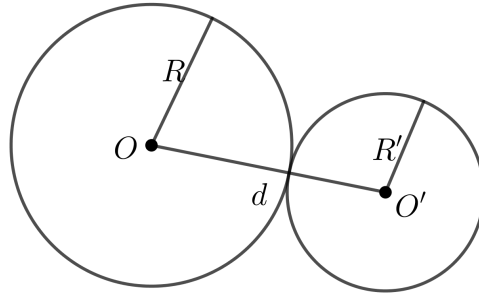


Figura 3.21: Circunferencias tangentes exteriores

Tangentes interiores

Dos circunferencias son **tangentes interiores** cuando la distancia entre los centros es igual a la diferencia entre los radios. El centro de una de las circunferencias está dentro de la otra (Figura 3.22). Tienen un punto en común.

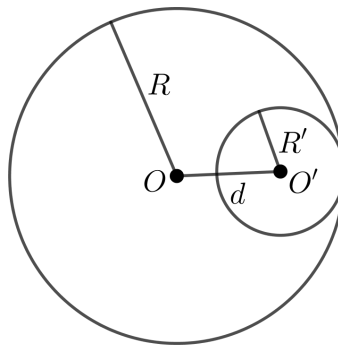


Figura 3.22: Circunferencias tangentes interiores

La inversión y la tangencia

Teorema 3.7. *Las inversiones conservan la tangencia.*

Demostración.

Caso 1: Inversión de una recta tangente a la circunferencia de inversión (Figura 3.23).

Por Teorema 2.4, tenemos que el inverso de l será una circunferencia que pase por O , pero por definición de inversión tenemos que A al ser un punto en la circunferencia de inversión, su inverso será el mismo, por lo tanto la circunferencia que pasa por O también debe de pasar por A' , por lo tanto la inversión de l será la circunferencia de diámetro $\overline{OA'}$.

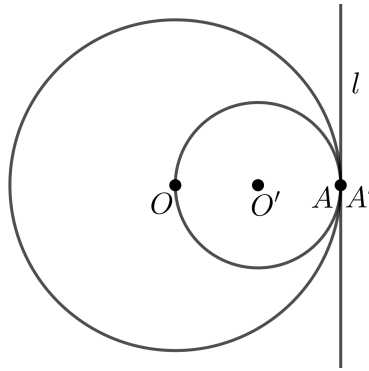


Figura 3.23: Inversión de l

Caso 2: Inversión de una circunferencia tangente a la circunferencia de inversión y que pasa por el centro de inversión (Figura 3.24).

Por Teorema 2.6, tenemos que el inverso de la circunferencia que pase por O es una recta l que no pasa por el centro de inversión, pero por definición tenemos que A al ser un punto en la circunferencia de inversión, su inverso será el mismo, por lo tanto la recta l también debe de pasar por A' , por lo tanto la inversión de la circunferencia de diámetro \overline{OA} será la recta l que pasa por A' .

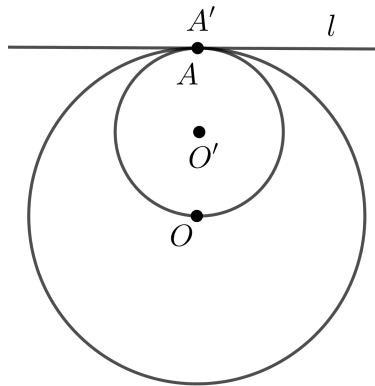


Figura 3.24: Inversión de la circunferencia de diámetro \overline{OA}

Caso 3: Inversión de una circunferencia tangente a la circunferencia de inversión y que no pasa por el centro de inversión (Figura 3.25).

Por Teorema 2.7, tenemos que la inversión de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión será otra circunferencia que tampoco pasa por el centro de inversión. Además como el inverso del punto A es el mismo y el punto A se encuentra en la circunferencia de radio \overline{AM} , entonces su inversión deberá pasar por A . Por lo tanto, la inversión de la circunferencia tangente exterior a la circunferencia de inversión será una circunferencia tangente interior que no pasa por el centro de inversión, y viceversa.

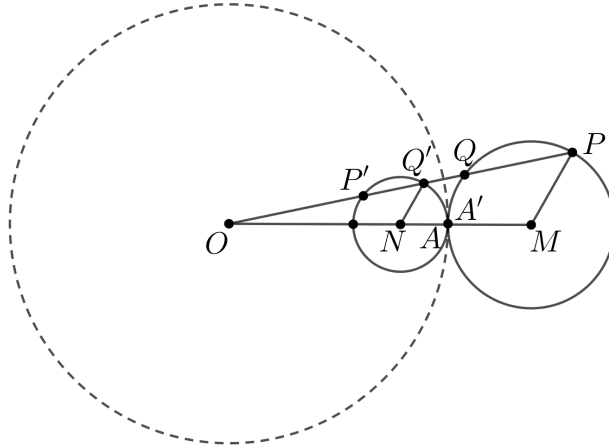


Figura 3.25: Inversión de una circunferencia tangente a la circunferencia de inversión



3.3.1. El Teorema de Feuerbach

Los puntos de tangencia del incírculo y excírculo

Los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita y la circunferencia exinscrita cumplen con una relación métrica muy particular relacionada con el semiperímetro del triángulo, lo cual lleva a una relación aún más particular: son isotómicas. El término isotómicos se refiere a la condición de que estos coinciden al ser reflejados por el punto medio del segmento al que pertenecen.

Sea el $\triangle ABC$ con incentro I , llamemos D , E y F a los puntos de tangencia del incírculo con \overline{BC} , \overline{CA} y \overline{AB} respectivamente.

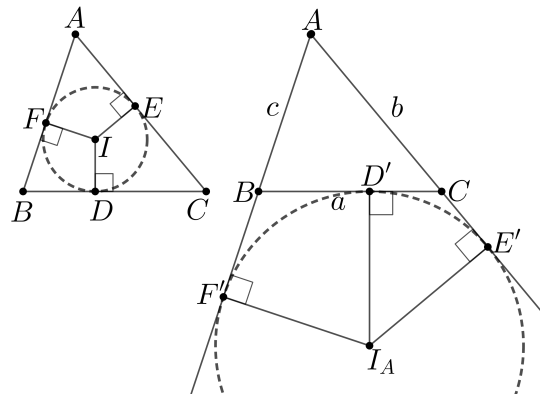


Figura 3.26: Incentro y Excentro

Se denota por I_A al excentro relativo al vértice A . Sean D' , E' y F' los puntos de tangencia del excírculo con \overline{BC} , \overline{CA} y \overline{AB} respectivamente (Figura 3.26). Llamemos a , b y c a las medidas de \overline{BC} , \overline{CA} y \overline{AB} respectivamente. El perímetro del triángulo se determina por $p = a + b + c$. Y el semiperímetro por $s = \frac{a + b + c}{2}$.

Como $AF = AE = x$, ya que $\triangle AFI \cong \triangle AEI$, $BF = BD = y$ ya que $\triangle BFI \cong \triangle BDI$ y $CD = CE = z$, ya que $\triangle CDI \cong \triangle CEI$.

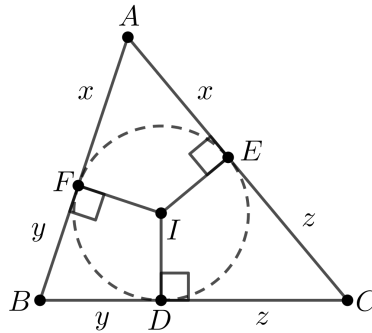


Figura 3.27: Incírculo

Tenemos que: (Ver Figura 3.27)

$$\begin{aligned} BC &= a = y + z \\ CA &= b = x + z \\ AB &= c = x + y \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} s &= \frac{a + b + c}{2} \\ &= \frac{(y + z) + (x + z) + (x + y)}{2} \\ &= \frac{2(x + y + z)}{2} \\ &= x + y + z \end{aligned}$$

Incírculo (Ver Figura 3.28):

Como $s = x + y + z$, entonces $AF + BD + CE = s$, por lo que:

$$\begin{aligned} AE &= AF \\ &= s - (BD + CE) && ; AF + BD + CE = s \\ &= s - (BD + DC) && ; CE = DC \\ &= s - BC && ; BC = BD + DC \\ &= s - a && ; BC = a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
BF &= BD \\
&= s - (AF + CE) && ; AF + BD + CE = s \\
&= s - (AE + CE) && ; AF = AE \\
&= s - CA && ; CA = AE + CE \\
&= s - b && ; CA = b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CD &= CE \\
&= s - (AF + BD) && ; AF + BD + CE = s \\
&= s - (AF + BF) && ; BD = BF \\
&= s - AB && ; AB = AF + BF \\
&= s - c && ; AB = c
\end{aligned}$$

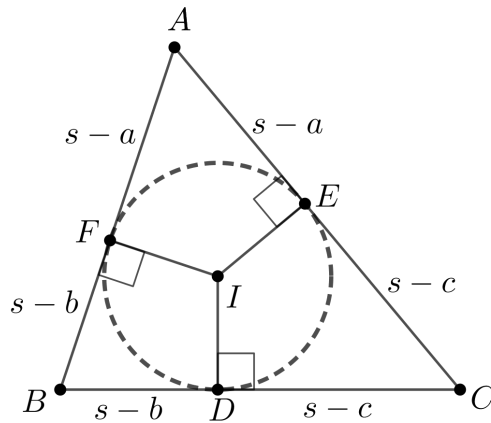


Figura 3.28: Incírculo

Excírculo (Ver Figura 3.29):

Tenemos que $AF' = AE'$, ya que $\triangle AF'I_A \cong \triangle AE'I_A$, además, $BF' = BD'$, ya que $\triangle BF'I_A \cong \triangle BD'I_A$ y $CE' = CD'$ ya que $\triangle CE'I_A \cong \triangle CD'I_A$.

Como

$$\begin{aligned}
AB + BD' &= AB + BF' && ; BD' = BF' \\
&= AF' \\
&= AE' \\
&= AC + CE' \\
&= AC + CD' && ; CE' = CD'
\end{aligned}$$

Además $AB + BD' + AC + CD' = p$ entonces $AB + BD' = AC + CD' = s$. Así,

$$\begin{aligned}
 AB + BD' &= s \\
 BD' &= s - AB \\
 BD' &= s - c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 AC + CD' &= s \\
 CD' &= s - AC \\
 CD' &= s - b
 \end{aligned}$$

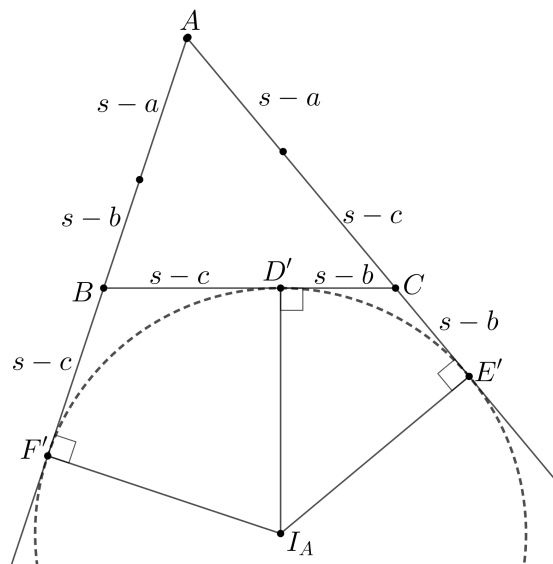


Figura 3.29: Excentro

Entonces hemos demostrado que $BD = CD'$, así que los puntos D y D' están a la misma distancia del punto medio de \overline{BC} . De manera semejante se observa para los demás segmentos.

Ahora enunciaremos el Teorema de Feuerbach.

Teorema 3.8. Teorema de Feuerbach. *La circunferencia de los nueve puntos, es tangente al incírculo y a los tres excírculos.*

Demostración.

En la Figura 3.30 mostramos el $\triangle ABC$ con su triángulo medial $\triangle A'B'C'$, su incírculo con centro en I tocando a \overline{BC} en X , su primer excírculo con centro en I_A tocando \overline{BC} en X_a , tanto el incírculo como el excírculo tocando los 3 lados del $\triangle ABC$ o sus prolongaciones, y la tangente a estos dos círculos $\overline{B_1C_1}$. Así como la circunferencia ω que tiene por diámetro

$\overline{XX_a}$, en el cual $\overline{B_1C_1}$ se interseca con \overline{BC} , $\overline{A'B'}$ y $\overline{A'C'}$ respectivamente. Ya que ω es ortogonal al incírculo C_2 y el primer excírculo C_3 , la inversión en ω deja ambos círculos invariantes. (Teorema 3.1b).

Procedemos a probar que ω invierte a la circunferencia de los nueve puntos $A'B'C'$ en la recta $\overline{B_1C_1}$. Por la sección de los puntos de tangencia del incírculo y excírculo, sabemos que $s = \frac{a+b+c}{2}$ y $BX = X_aC = s - b$.

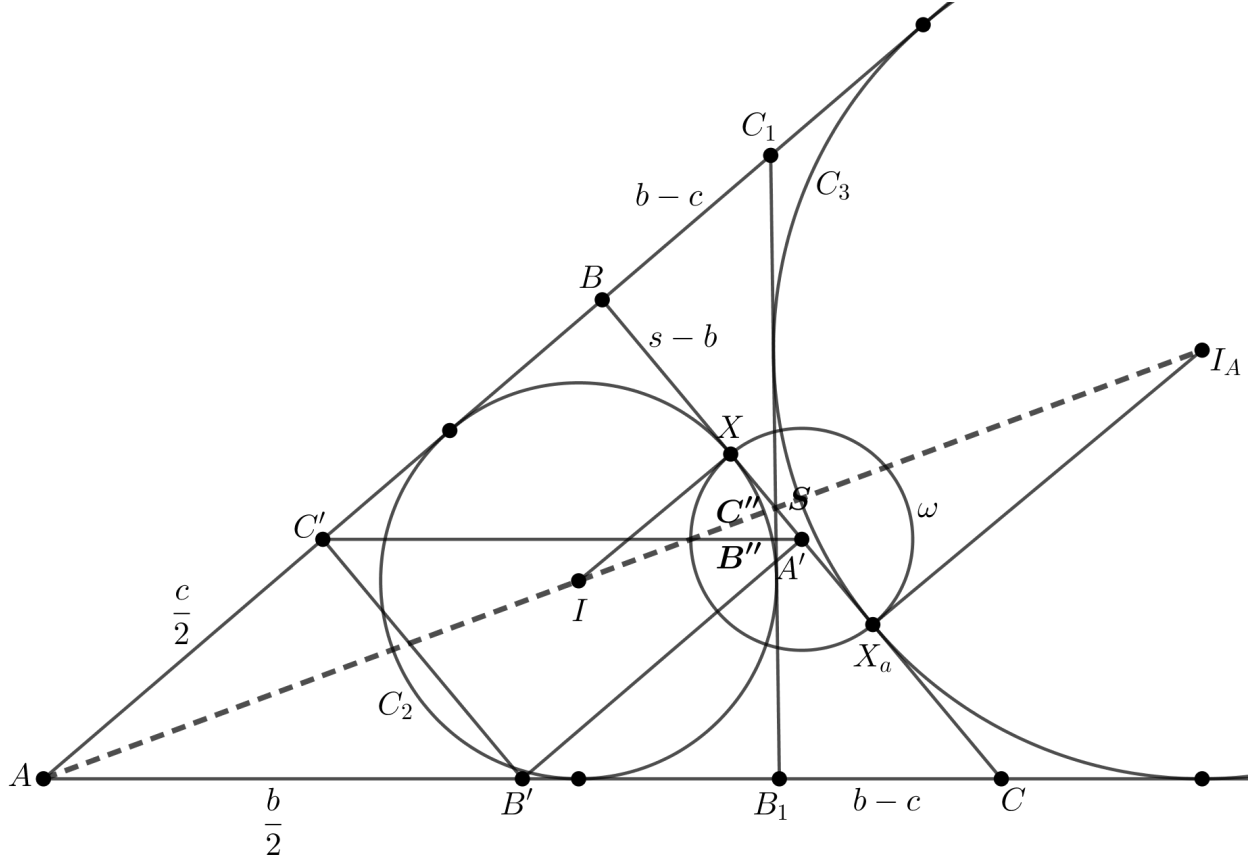


Figura 3.30: Teorema de Feuerbach

Ya que el centro de ω es A' el punto medio de $\overline{B_1C_1}$ y el diámetro de ω es

$$\begin{aligned}
 XX_a &= a - 2(s - b) \\
 &= a - 2\left(\frac{a+b+c}{2} - b\right) \\
 &= a - 2\left(\frac{a+b+c-2b}{2}\right) \\
 &= a - a - b - c + 2b \\
 &= b - c
 \end{aligned}$$

La circunferencia de los nueve puntos pasa por el centro A' de ω , por Teorema 2.6 ω la invierte en una recta que no pasa por centro de inversión. Mostraremos que esta recta pasa por B'' y C'' (y por lo tanto a través de B_1 y C_1), probando que B'' y C'' son inversos en ω de los puntos B' y C' en la circunferencia de los nueve puntos. Ya que S se encuentra en la bisectriz del ángulo A , por Teorema de la bisectriz, que dice: “Cada bisectriz de un ángulo de un triángulo, divide el lado opuesto en segmentos proporcionales en longitud a los lados adyacentes”, tenemos que S divide a \overline{CB} (de longitud a) en la proporción $b : c$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{AB}{AC} &= \frac{BS}{CS} \\
AB \cdot CS &= BS \cdot AC \\
CS \cdot AC + AB \cdot CS &= BS \cdot AC + CS \cdot AC \\
CS \cdot (AC + AB) &= AC \cdot (BS + CS) \\
CS(b + c) &= b(a) \\
CS &= \frac{ab}{b + c}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
\frac{AB}{AC} &= \frac{BS}{CS} \\
AB \cdot CS &= AC \cdot BS \\
AB \cdot BS + AB \cdot CS &= AC \cdot BS + AB \cdot BS \\
AB \cdot (BS + CS) &= BS \cdot (AC + AB) \\
c(a) &= BS(b + c) \\
BS &= \frac{ac}{b + c}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Y la diferencia media de estas dos longitudes es

$$SA' = \frac{a(b - c)}{2(b + c)} \tag{3.6}$$

Observando la Figura 3.31:

Como $\overline{C_1D_1}$ y $\overline{C_1D_2}$ son tangentes a C_3 , por Teorema 1.9:

$$C_1D_1 = C_1D_2 = m \tag{3.7}$$

Además, $D_1I_A = D_2I_A$ por ser radios de C_3 , en los triángulos $\triangle C_1D_1I_A$ y $\triangle C_1D_2I_A$, vemos que comparten el lado $\overline{C_1I_A}$, así, por postulado LLL de congruencia de triángulos, $\triangle C_1D_1I_A \cong \triangle C_1D_2I_A$, y tenemos:

$$\angle C_1I_AD_1 = \angle C_1I_AD_2 = \alpha \tag{3.8}$$

Como $\overline{D_2S}$ y $\overline{SX_a}$ son tangentes a C_3 , por Teorema 1.9 $D_2S = SX_a$, además, $D_2I_A = I_AX_a$ por ser radios de C_2 , en los triángulos $\triangle D_2I_AS$ y $\triangle SI_AX_a$, vemos que comparten el lado $\overline{I_AS}$, así, por postulado LLL de congruencia de triángulos, $\triangle D_2I_AS \cong \triangle SI_AX_a$, y tenemos:

$$\angle D_2I_AS = \angle SI_AX_a = \gamma \tag{3.9}$$

Como $\overline{CX_a}$ y \overline{CE} son tangentes a C_3 , por Teorema 1.9:

$$CX_a = CE \quad (3.10)$$

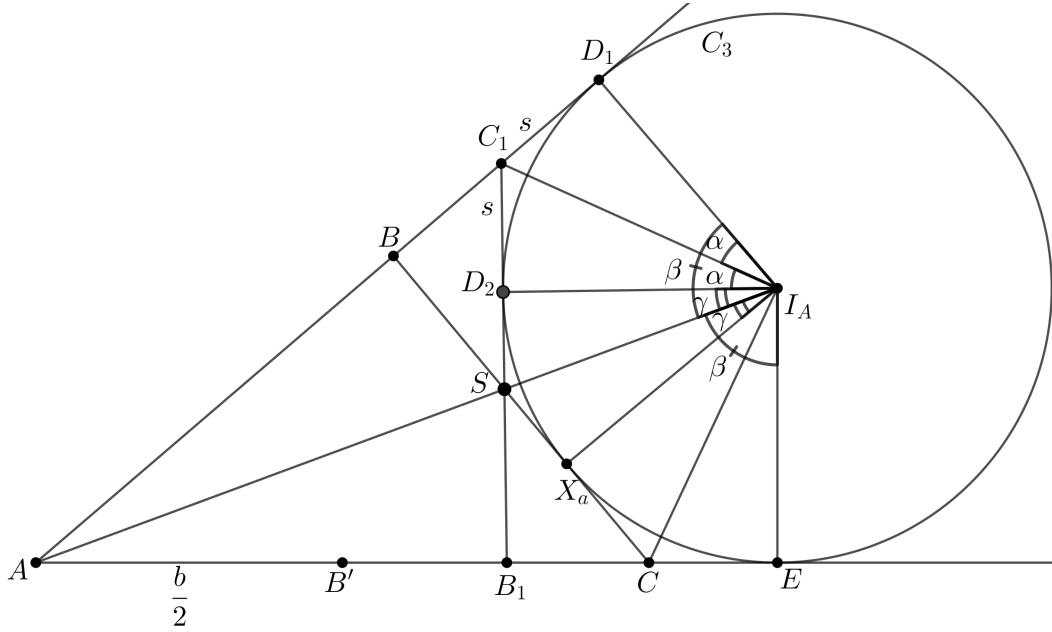


Figura 3.31: Construcción del Teorema de Feuerbach

Además, $I_A X_a = EI_A$, por ser radios de C_3 , en los triángulos $\triangle CI_A X_a$ y $\triangle CEI_A$, ahora, vemos que comparten el lado $\overline{CI_A}$, así por el postulado LLL de congruencia de triángulos, $\triangle CI_A X_a \cong \triangle CEI_A$ y tenemos:

$$\angle CI_A X_a = \angle CI_A E \quad (3.11)$$

Como $\overline{AD_1}$ y \overline{AE} son tangentes a C_3 , por Teorema 1.9:

$$AD_1 = AE = l \quad (3.12)$$

Además, $D_1 I_A = EI_A$ por ser radios de C_3 , en los triángulos $\triangle AD_1 I_A$ y $\triangle AEI_A$, ahora, vemos que comparten el lado $\overline{AI_A}$, así por postulado LLL de congruencia de triángulos, $\triangle AD_1 I_A \cong \triangle AEI_A$ y tenemos:

$$\angle AI_A D_1 = \angle AI_A E = \beta \quad (3.13)$$

Así,

$$\begin{aligned} \angle D_1 I_A D_2 &= \angle AI_A D_1 - \angle D_2 I_A S \\ &= \beta - \gamma \end{aligned} \quad ; \text{ Por ecuaciones 3.13 y 3.9}$$

$$\begin{aligned} \angle EI_A X_a &= \angle AI_A E - \angle SI_A X_a \\ &= \beta - \gamma \end{aligned} \quad ; \text{ Por ecuaciones 3.13 y 3.9}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\angle D_1 I_A D_2 &= \angle E I_A X_a \\
\angle D_1 I_A D_2 &= \angle C I_A E + \angle C I_A X_a \\
\angle D_1 I_A D_2 &= \angle C I_A E + \angle C I_A E && ; \text{ Por ecuación 3.11} \\
\angle D_1 I_A D_2 &= 2(\angle C I_A E) \\
\angle C_1 I_A D_1 + \angle C_1 I_A D_2 &= 2(\angle C I_A E) \\
\alpha + \alpha &= 2(\angle C I_A E) && ; \text{ Por ecuación 3.8} \\
2\alpha &= 2(\angle C I_A E) \\
\alpha &= \angle C I_A E
\end{aligned}$$

Por lo que,

$$\angle C I_A E = \angle C I_A X_a = \angle C_1 I_A D_1 = \angle C_1 I_A D_2 = \alpha \quad (3.14)$$

Ahora, como $\overline{D_1 I_A}$ es radio y $\overline{C_1 D_1}$ es tangente a C_3 , por Teorema 1.7 $\angle C_1 D_1 I_A = 90^\circ$, también por ser $\overline{E I_A}$ radio y $\overline{C E}$ tangente a C_3 , por Teorema 1.7 $\angle C E I_A = 90^\circ$. Para los triángulos $\triangle C_1 D_1 I_A$ y $\triangle C E I_A$, $\angle C_1 D_1 I_A = \angle C E I_A = 90^\circ$, $D_1 I_A = E I_A$ por ser radios y $\angle C_1 I_A D_1 = \angle C I_A E = \alpha$ por ecuación 3.14, por lo que, por postulado ALA, de congruencia de triángulos, $\triangle C_1 D_1 I_A \cong \triangle C E I_A$, y por ecuaciones 3.7 y 3.10:

$$m = C_1 D_1 = C E = C X_a \quad (3.15)$$

Como

$$\begin{aligned}
AC &= AE - CE \\
&= l - m && ; \text{ Por ecuaciones 3.12 y 3.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
AC_1 &= AD_1 - C_1 D_1 \\
&= l - m && ; \text{ Por ecuaciones 3.12 y 3.15}
\end{aligned}$$

Así, $AC = AC_1$, y tenemos:

$$\begin{aligned}
BC_1 &= AC_1 - AB \\
&= AC - AB && ; AC = AC_1 \\
&= b - c && ; AC = b, AB = c
\end{aligned}$$

Ahora, observando la Figura 3.32:

Como $\overline{B Y}$ y $\overline{B X}$ son tangentes a C_2 , por Teorema 1.9:

$$B Y = B X = m \quad (3.16)$$

Además, $I Y = I X$ por ser radios de C_2 , en los triángulos $\triangle B I Y$ y $\triangle B I X$, vemos que comparten el lado $\overline{B I}$, así por postulado LLL de congruencia de triángulos, $\triangle B I Y \cong \triangle B I X$ y,

$$\angle B I Y = \angle B I X = \alpha' \quad (3.17)$$

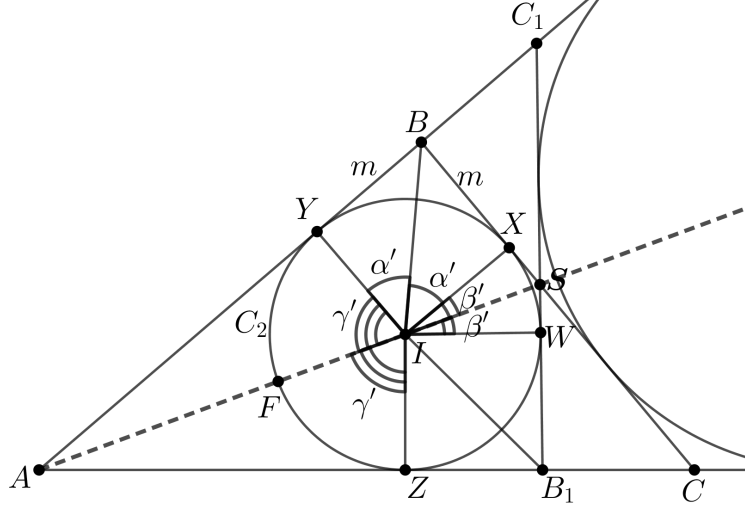


Figura 3.32: Construcción del Teorema de Feuerbach

Como \overline{SX} y \overline{SW} son tangentes a C_2 , por Teorema 1.9 $SX = SW$, $IX = IW$ por ser radios de C_2 y en los triángulos $\triangle ISX$ y $\triangle ISW$, vemos que comparten el lado \overline{IS} , por lo que, por postulado LLL de congruencia de triángulos, $\triangle ISX \cong \triangle ISW$ y tenemos:

$$\angle SIX = \angle SIW = \beta' \quad (3.18)$$

Como $\overline{B_1W}$ y $\overline{B_1Z}$ son tangentes a C_2 , por Teorema 1.9:

$$B_1W = B_1Z \quad (3.19)$$

Además, $IZ = IW$ por ser radios de C_2 , en los triángulos $\triangle IB_1Z$ y $\triangle IB_1W$, vemos que comparten el lado $\overline{B_1I}$, por lo que, por postulado LLL de congruencia de triángulos, $\triangle IB_1Z \cong \triangle IB_1W$ y tenemos:

$$\angle B_1IW = \angle B_1IZ \quad (3.20)$$

Como \overline{AY} y \overline{AZ} son tangentes a C_2 , por Teorema 1.9:

$$AY = AZ = z \quad (3.21)$$

Además, $IY = IZ$ por ser radios de C_2 , en los triángulos $\triangle AIY$ y $\triangle AIZ$, vemos que comparten el lado \overline{AI} , así, por postulado LLL de congruencia de triángulos $\triangle AIY \cong \triangle AIZ$ y tenemos:

$$\angle AIY = \angle AIZ = \gamma' \quad (3.22)$$

Ahora, como $\angle FIS = \angle SIF$, tenemos:

$$\angle FIS = \angle SIF$$

$$\angle FIY + \angle YIX + \angle SIX = \angle SIW + \angle WIZ + \angle FIZ$$

$$\angle AIY + \angle YIX + \angle SIX = \angle SIW + \angle WIZ + \angle AIZ \quad ; \angle FIY = \angle AIY, \angle FIZ = \angle AIZ$$

$$\angle AIY + \angle YIX + \angle SIX = \angle SIX + \angle WIZ + \angle AIY \quad ; \text{ Por ecuaciones 3.18 y 3.22}$$

$$\angle YIX = \angle WIZ$$

$$\angle BIY + \angle BIX = \angle B_1IW + \angle B_1IZ$$

$$\alpha' + \alpha' = \angle B_1IW + \angle B_1IW \quad ; \text{ Por ecuaciones 3.17 y 3.20}$$

$$2\alpha' = 2(\angle B_1IW)$$

$$\alpha' = \angle B_1IW$$

$$\angle B_1IW = \angle B_1IZ = \angle BIY = \angle BIX = \alpha' \quad (3.23)$$

Ahora, como \overline{IY} es radio de C_2 con \overline{YB} tangente a C_2 , por Teorema 1.7 $\angle BYI = 90^\circ$, también como \overline{IZ} es radio de C_2 con $\overline{B_1Z}$ tangente a C_2 , por Teorema 1.7 $\angle B_1ZI = 90^\circ$. Para los triángulos $\triangle BIY$ y $\triangle B_1IZ$, $\angle BYI = \angle B_1ZI = 90^\circ$, $IY = IZ$ por ser radios de C_2 y por ecuación 3.23 $\angle BIY = \angle B_1IZ = \alpha'$, así por postulado ALA de congruencia de triángulos, $\triangle BIY \cong \triangle B_1IZ$, por lo que $BY = B_1Z$ y por ecuaciones 3.16 y 3.19:

$$BX = BY = B_1Z = B_1W = m \quad (3.24)$$

Así,

$$AB_1 = AZ + B_1Z$$

$$= z + m \quad ; \text{ Por ecuaciones 3.21 y 3.24}$$

$$AB = AY + BY$$

$$= z + m \quad ; \text{ Por ecuaciones 3.21 y 3.24}$$

Así, $AB_1 = AB$, por lo que:

$$CB_1 = AC - AB_1$$

$$= AC - AB$$

$$= b - c$$

Como $\angle B''SA' = \angle BSC_1$ por ser opuestos por el vértice y como $\overline{B'A'} \parallel \overline{AB}$ por Teorema de la base media de un triángulo y \overline{CB} es secante, entonces por ángulos alternos internos $\angle B''A'B = \angle SBC_1$, por lo que por criterio I (A-A) de semejanza de triángulos tenemos que $\triangle SA'B'' \sim \triangle SBC_1$.

Además, como $\angle C''SA' = \angle B_1SC$ y como $\overline{C'A'} \parallel \overline{AC}$ por Teorema de la base media de un triángulo, así $\angle CB_1S = \angle B_1C''C'$ por ser ángulos alternos internos entre paralelas pero $\angle CB_1S = \angle B_1C''C' = \angle A'C''S$ por ser opuestos por el vértice, entonces por criterio I (A-A) de semejanza de triángulos $\triangle SA'C'' \sim \triangle SCB_1$. (Ver Figura 3.33)

Tenemos que $\triangle SA'B'' \sim \triangle SBC_1$, por lo que

$$\begin{aligned} \frac{A'B''}{b-c} &= \frac{A'B''}{BC_1} \\ &= \frac{SA'}{SB} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{A'B''}{b-c} &= \frac{\frac{a(b-c)}{2(b+c)}}{\frac{ac}{b+c}} && \text{; por ecuaciones 3.6 y 3.5} \\ &= \frac{a(b-c)(b+c)}{2ac(b+c)} \\ &= \frac{b-c}{2c} \end{aligned}$$

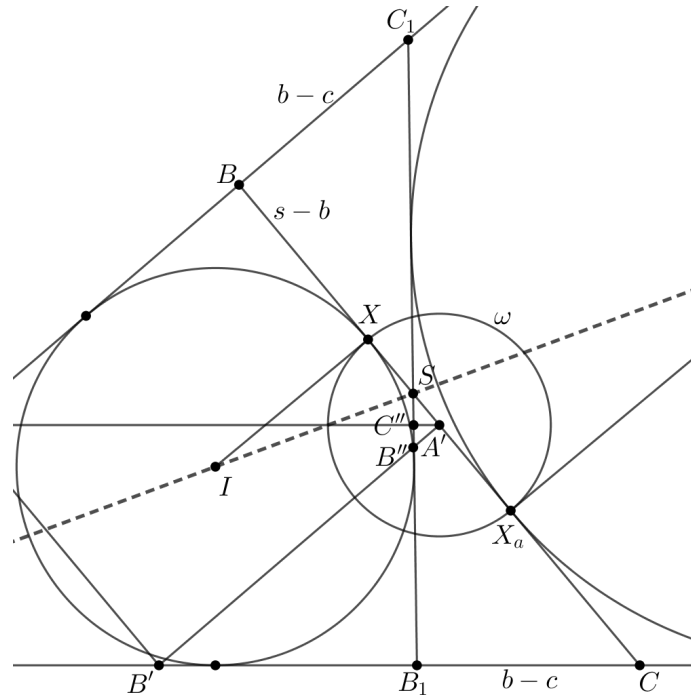


Figura 3.33: Teorema de Feuerbach

Además, $\triangle SA'C'' \sim \triangle SCB_1$, por lo que

$$\begin{aligned} \frac{A'C''}{b-c} &= \frac{A'C''}{CB_1} \\ &= \frac{SA'}{CS} \\ &= \frac{\frac{a(b-c)}{2(b+c)}}{\frac{ab}{b+c}} && \text{; por ecuaciones 3.6 y 3.4} \\ &= \frac{a(b-c)(b+c)}{2(b+c)(ab)} \\ &= \frac{b-c}{2b} \end{aligned}$$

Ahora, por Teorema de la base media para un triángulo tenemos

$$A'B' = \frac{AB}{2} = \frac{c}{2} \text{ y } A'C' = \frac{AC}{2} = \frac{b}{2}. \text{ Entonces,}$$

$$\begin{aligned} A'B' \cdot A'B'' &= \frac{c}{2} \frac{(b-c)^2}{2c} \\ &= \left(\frac{(b-c)}{2}\right)^2 \\ &= r_{A'}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A'C' \cdot A'C'' &= \frac{b}{2} \frac{(b-c^2)}{2b} \\ &= \left(\frac{(b-c)}{2}\right)^2 \\ &= r_{A'}^2 \end{aligned}$$

Así, ω cuyo radio es $r_{A'} = \frac{b-c}{2}$, invierte B' en B'' y C' en C'' , como se deseaba. Por lo que ω invierte el incírculo y el primer excírculo en ellos mismos y su común tangente $\overline{B_1C_1}$ en la circunferencia de los nueve puntos. Como $\overline{B_1C_1}$ es la inversa de la circunferencia de los nueve puntos con respecto a ω , C_2 y C_3 son tangentes a $\overline{B_1C_1}$ por Teorema 3.7 la inversa conserva la tangencia. Por lo tanto, la circunferencia de los nueve puntos, al igual que la recta, los toca a ambos, y de manera similar toca a los otros dos excírculos restantes. ■

3.3.2. El Teorema de Arbelos

Teorema 3.9. Teorema de Arbelos. *Supongamos que P , Q y R son tres puntos colineales, con C , D y K_0 que son semicircunferencias en \overline{PQ} , \overline{PR} y \overline{QR} , respectivamente. Sea K_1, K_2, \dots, K_n , circunferencias tangentes a C y D , con K_1 tangente a K_0 , K_2 tangente a K_1 , y así sucesivamente. Sea h_n la distancia del centro de K_n de \overline{PR} y sea r_n el radio de K_n . Entonces $h_n = 2nr_n$. (Ver Figura 3.34)*

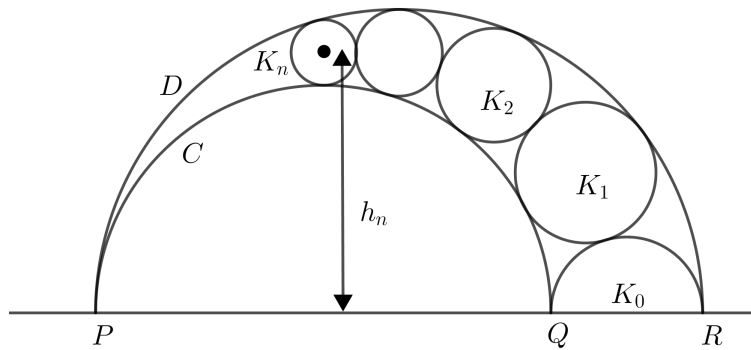


Figura 3.34: Teorema de Arbelos

Demostración.

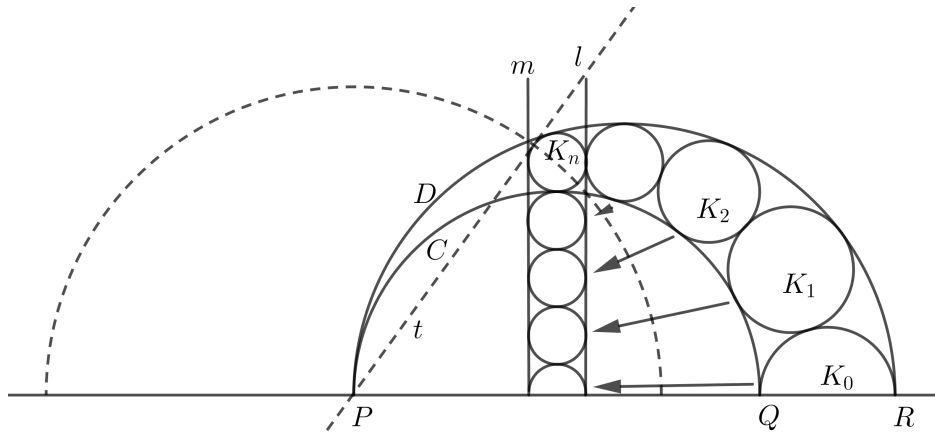


Figura 3.35: Construcción del Teorema de Arbelos

En la Figura 3.35, sea t la distancia tangencial desde P a la circunferencia K_n y aplique $I(P, t^2)$, con I la inversión de radio t y centro de inversión P .

K_n es ortogonal a la circunferencia de inversión, por lo que es su propio inverso.

C se invierte en una recta l .

D se invierte en una recta m paralela a l .

K_0 se invierte en una semicircunferencia K'_0 tangente a la recta m , ya que la inversión preserva las tangencias.

K_i se invierte en una circunferencia K'_i tangente a l y m . Por lo tanto, como todos los K_i son tangentes a l y m entonces tienen el mismo radio, es decir, r_n .

Por lo tanto, $h_n = 2nr_n$. ■

3.3.3. Circunferencia tangente a dos circunferencias dadas y que pasa por un punto dado

Dadas dos circunferencias exteriores hay cuatro tangentes, dos exteriores (l_1 y l_2) y dos interiores (t_1 y t_2). Las tangentes exteriores dejan las circunferencias a un mismo lado y las tangentes interiores las dejan una a cada lado.

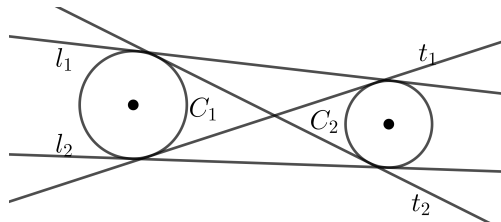


Figura 3.36: Tangentes comunes a dos circunferencias

Para realizar la inversión de la Figura 3.36, supondremos que el centro no pertenece ni a las circunferencias ni a las tangentes. Las cuatro rectas tangentes se transforman en cuatro circunferencias que pasan por el centro de inversión y que son tangentes a las transformadas de las dos circunferencias dadas. En la Figura 3.37, observamos la inversión de C_1, C_2 y l_1 .

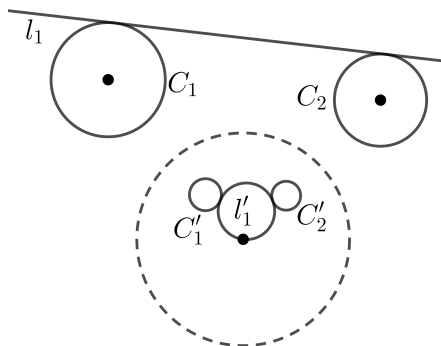


Figura 3.37: Inversión de las circunferencias y su tangente l_1 de la Figura 3.36

Como las inversiones son involutivas, para construir una circunferencia que pase por un punto dado P y sea tangente a dos circunferencias dadas C_1 y C_2 hemos de proceder así:

1. Hacemos una inversión de dos circunferencias no secantes C_1 y C_2 , respecto a la circunferencia de centro P y radio arbitrario (con P que no está en ninguna de las tangentes de C_1 y C_2 , ni en las circunferencias).
2. Construimos las cuatro rectas tangentes a C'_1 y C'_2 , que son las inversiones de C_1 y C_2 , respectivamente.
3. Seleccionamos una de las tangente de C'_1 y C'_2 , y se invierte la tangente, respecto a la circunferencia de centro P y radio arbitrario.

3.4. Porisma de Steiner

Dado un punto P fuera de una circunferencia α , se dice que un punto X de α es visible desde P si \overline{PX} se interseca con α sólo en X (Figura 3.38 a)).

La Figura 3.38 (b), muestra el conjunto de puntos que son visibles desde P , es decir, los dos puntos tangentes y los puntos en el arco entre los puntos tangentes. En otras palabras, un punto X de α es visible desde P si y sólo si:

- \overline{PX} es tangente a α

- o la tangente a α en X tiene a α y P en lados opuestos.

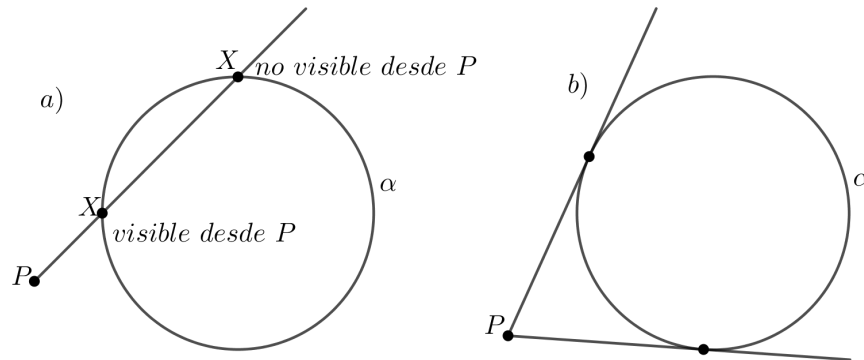


Figura 3.38: Punto visible y no visible

Tenga en cuenta también que si una recta m es tangente a α en X , y si P está en el mismo lado de m que α , pero no en la recta m , entonces X no es visible desde P . (Ver Figura 3.39)

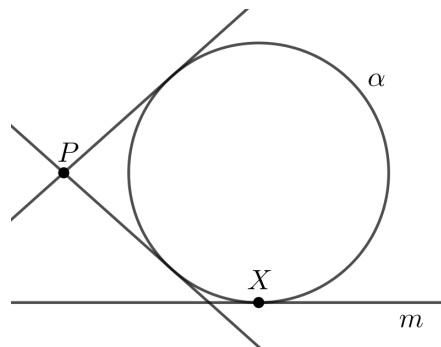


Figura 3.39: Punto visible de m pero no de P

Lema 3.2. *Suponga que la recta \overline{PQ} no corta a la circunferencia α . Entonces*

1. *Hay un punto X visible desde P y Q .*
2. *Hay un punto Y visible desde P pero no desde Q .*
3. *Hay un punto Z visible desde Q pero no desde P .*

Demostración.

La Figura 3.40 ilustra cómo encontrar los puntos X , Y y Z .

Sea m una recta paralela a \overline{PQ} y tangente a α , X es el punto de tangencia de m con α .

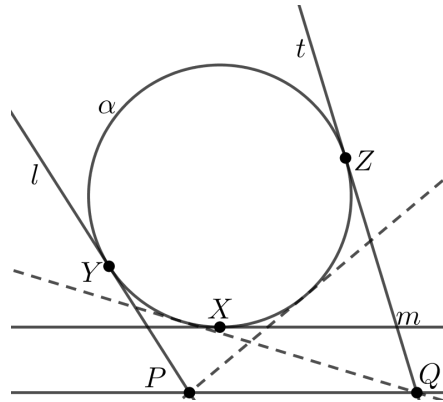


Figura 3.40: Puntos X , Y y Z

Hay dos rectas de P tangente a α . Sea l la recta tangente de modo que α y Q estén ambos en el mismo lado de l . Entonces Y es el punto donde l es tangente a α .

Hay dos rectas de Q tangente a α . Sea t la recta tangente de modo que α y P estén ambos en el mismo lado de t . Entonces Z es el punto donde t es tangente a α . ■

Lema 3.3. *Dadas dos circunferencias α y β y dado un punto P que no está en ninguna de las circunferencias, hay una circunferencia a través de P ortogonal a ambas α y β .*

Demostración.

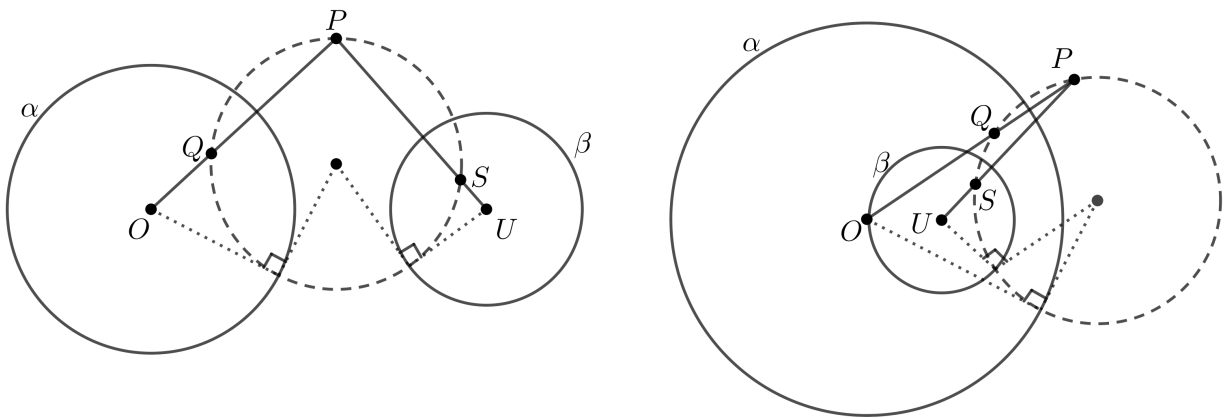


Figura 3.41: Circunferencias α y β

(Ver Figura 3.41) Sea Q el inverso de P con respecto a α , y sea S el inverso de P con respecto a β , con α y β no intersecantes, entonces hay una circunferencia única a través de P , Q y S , y ésta debe ser ortogonal a ambas α y β según el Teorema 3.2 inciso 2). ■

Nota. Si O, U y P son colineales, entonces la “circunferencia” ortogonal es una recta. Si O, U y P no son colineales, entonces la circunferencia ortogonal es una circunferencia verdadera.

Lema 3.4. Sea α y β dos circunferencias no intersecantes con centros O y U , $O \neq U$. Entonces podemos encontrar puntos X e Y que son inversos entre sí con respecto a ambas α y β .

Demostración.

Sea γ cualquier circunferencia que no sea una recta que sea ortogonal a ambas α y β . Afirmamos que la recta \overline{OU} interseca a γ en dos puntos. En este caso, los dos puntos son X e Y y son inversos entre sí con respecto a ambas α y β . (Figura 3.42)

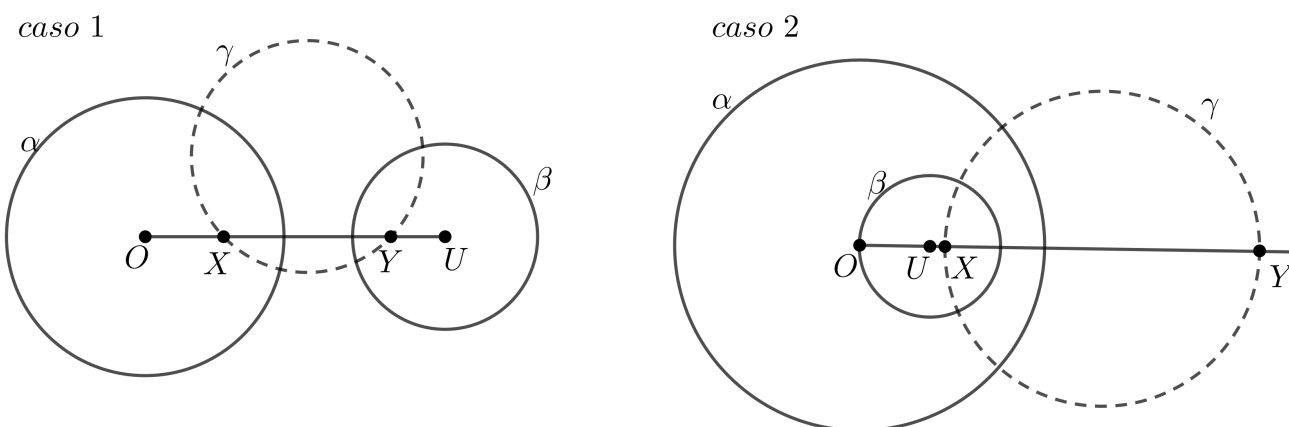


Figura 3.42: Puntos inversos X e Y

Caso 1: Cuando las circunferencias son exteriores entre sí.

(Razonando por contradicción.)

Sea γ una circunferencia ortogonal a α y β . Supongamos que \overline{OU} no corta a γ , entonces hay un punto Z en γ que es visible tanto desde O como desde U . Dado que Z es visible desde O , está dentro o sobre α y dado que Z es visible desde U , está dentro o sobre β . Entonces Z está dentro o sobre ambas α y β . Lo que contradice el hecho de que las circunferencias α y β son exteriores entre sí. Así, \overline{OU} corta a γ , por lo tanto, por Teorema 3.1 b) X e Y son inversos entre sí.

Caso 2: Cuando una circunferencia está dentro de la otra.

Sea γ una circunferencia ortogonal a α y β . Además, como \overline{OU} corta a γ , por Teorema 3.1 b) X e Y son inversos entre sí. ■

Definición 3.5. Sea α y β dos circunferencias no intersecantes. Sea γ_1 una circunferencia tangente a ambas α y β .

Sea γ_2 una circunferencia tangente a γ_1, α y β .

Sea γ_3 una circunferencia tangente a γ_2, α y β .

Continuando de esta manera, si en algún punto γ_k es tangente a γ_1 , entonces decimos que $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ es una **cadena de Steiner** de k circunferencias.

Observación. Dadas dos circunferencias α y β . No hay garantía de que exista una cadena Steiner para α y β .

Teorema 3.10. Dos circunferencias C_1 y C_2 admiten una cadena de circunferencias tangentes, entonces:

$$C_1 * C_2 = 1 + 2 \tan^2 \frac{\pi}{n}$$

. Para un cierto n , que es el número de circunferencias de la cadena.

Demostración.

Primero demostraremos que dos circunferencias concéntricas de radios R y r admiten una cadena de n circunferencias tangentes entonces:

$$\text{sen} \frac{\pi}{n} = \frac{R - r}{R + r}$$

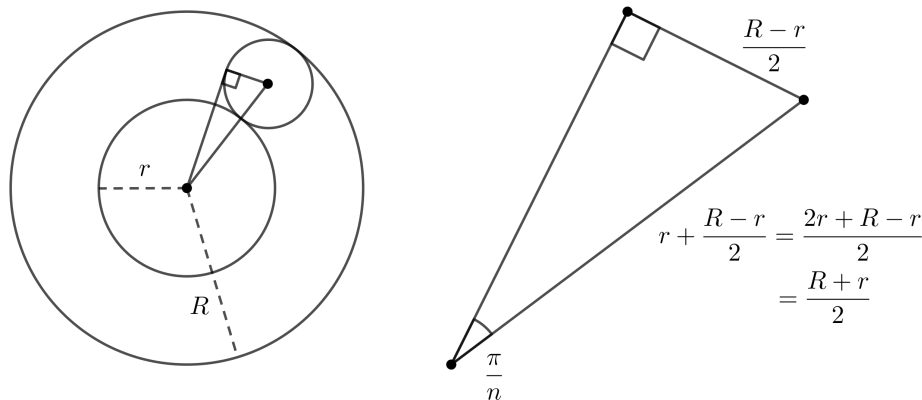


Figura 3.43: Steiner concéntrico

Si una cadena de circunferencias existen se forman triángulos rectángulos como indica la Figura 3.43.

Así,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} &= \frac{\frac{R-r}{2}}{R+r} \\ \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} &= \frac{R-r}{R+r} \end{aligned}$$

De lo anterior podemos deducir,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} &= \frac{R-r}{R+r} \\ R+r &= \frac{R-r}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n}} \\ r &= \frac{R-r}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n}} - R \\ r &= \frac{R-r - R \left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \right)}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n}} \\ r &= \frac{R \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \right) - r}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n}} \\ r \left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \right) &= R \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \right) - r \\ r + r \left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \right) &= R \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \right) \\ r \left(1 + \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \right) &= R \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \right) \\ \frac{r}{R} &= \frac{1 - \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}{1 + \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}} \end{aligned}$$

Ahora, sea φ una inversión que pone las dos circunferencias dadas concéntricas. Tenemos $C_1 * C_2 = \varphi C_1 * \varphi C_2$, por Teorema 3.4, además $C_1 * C_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} + \frac{r}{R} \right)$, por Teorema 3.5, entonces $\varphi C_1 * \varphi C_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} + \frac{r}{R} \right)$, donde R y r son los radios de las circunferencias concéntricas.

Sustituimos $\frac{r}{R} = \frac{1 - \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}{1 + \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}$ en $C_1 * C_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} + \frac{r}{R} \right)$

$$\begin{aligned}
C_1 * C_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} + \frac{r}{R} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}{1 + \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}} + \frac{1 + \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}{1 - \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\left(1 - \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}\right) \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}\right) + \left(1 + \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}\right) \left(1 + \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}\right)}{\left(1 + \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}\right) \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}\right)} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\left(1 - \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}\right)^2 + \left(1 + \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}\right)^2}{1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{n}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - 2\operatorname{sen} \frac{\pi}{n} + \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{n} + 1 + 2\operatorname{sen} \frac{\pi}{n} + \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{n}}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{2 + 2\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{n}}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{2 \left(1 + \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{n}\right)}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} \right) \\
&= \frac{1 + \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{n}}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} \\
&= \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} + \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{n}}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} \\
&= \sec^2 \frac{\pi}{n} + \tan^2 \frac{\pi}{n} \\
&= 1 + \tan^2 \frac{\pi}{n} + \tan^2 \frac{\pi}{n} \\
&= 1 + 2\tan^2 \frac{\pi}{n} \blacksquare
\end{aligned}$$

Teorema 3.11. Porisma de Steiner. *Suponga que dos circunferencias no intersecantes γ y δ tienen una cadena de Steiner de k circunferencias. Entonces, cualquier circunferencia tangente a γ y δ es miembro de alguna cadena de Steiner de k circunferencias.*

Demostración.

En la Figura 3.44, invertimos γ y δ en circunferencias concéntricas. La inversión conserva la cadena de Steiner de k circunferencias.

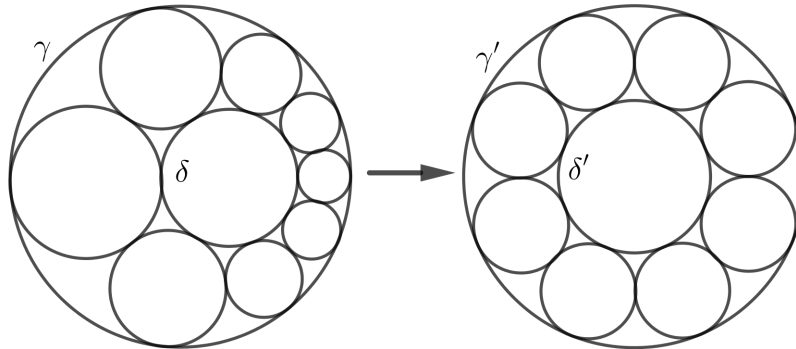


Figura 3.44: Porisma de Steiner

Usando la misma inversión, transformamos β en una circunferencia β' , como en la Figura 3.45.

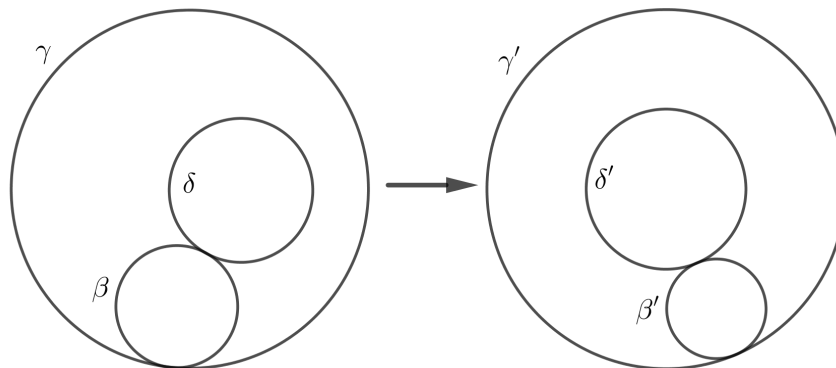


Figura 3.45: Transformación de β

Por hipótesis tenemos que γ y δ tienen una cadena de Steiner de k circunferencias, en la Figura 3.45 la circunferencia β' es parte de una cadena de Steiner de k circunferencias, así que por el reverso de inversión, β también debe ser parte de una cadena de Steiner de k circunferencias. Además como la cadena de circunferencias entre γ' y δ' posee el mismo radio para todas las circunferencias tangentes, si vamos rotando estas circunferencias la cadena se mantiene y al regresar la inversión que las puso concéntricas tendremos que nos dará otra cadena de Steiner. Por lo tanto, cualquier circunferencia tangente a γ y δ es miembro de alguna cadena de Steiner de k circunferencias. ■

Porisma de Steiner para $n = 3$

Dados tres puntos se pueden considerar siempre tres circunferencias con centro en estos puntos y tangentes entre ellas. Si a, b, c son las distancias entre estos puntos, los radios de las circunferencias son $p - a, p - b, p - c$ con $2p = a + b + c$. Existen entonces dos circunferencias tangentes a las tres circunferencias anteriores. Estas circunferencias no se cortan y se llaman **circunferencias de Soddy** (Figura 3.46).

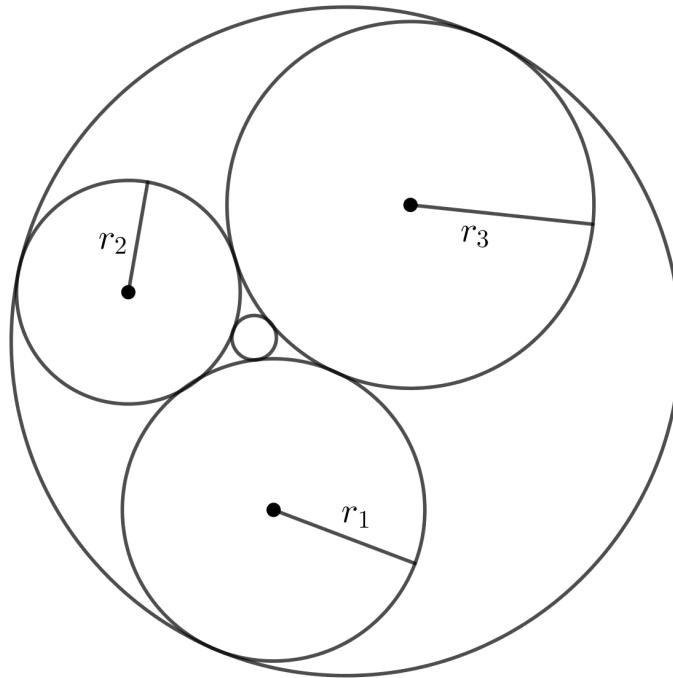


Figura 3.46: Circunferencias de Soddy

Si r_i , con $i = 1, 2, 3$, son los radios de las tres circunferencias tangentes, denotemos $k_i = \frac{1}{r_i}$, con $i = 1, 2, 3$, sus curvaturas. Denotemos por k_4 , el inverso del radio de la circunferencia tangente interior, o bien, menos el inverso del radio de la circunferencia tangente exterior.

Entonces Descartes demuestra que se cumple:

$$2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2) = (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2$$

Observemos que las inversiones, por ejemplo la que pone las circunferencias de Soddy concéntricas, no conservan las distancias y por lo tanto tampoco las curvaturas pero en cambio siempre se cumple que el cuadrado de la suma es el doble de la suma de los cuadrados de dichas curvaturas.

3.5. El problema de Apolonio

El problema de Apolonio consiste en construir todas las circunferencias tangentes a tres circunferencias dadas. Cada una de estas circunferencias podrá ser en principio interior o exterior a la circunferencia tangente que buscamos de manera que tenemos $2^3 = 8$ posibles soluciones. Veremos que genéricamente hay ocho soluciones, que pueden ser menos en función de la posición relativa de las tres circunferencias iniciales.

Construcción final del problema de Apolonio

Construimos ahora una de las circunferencias tangentes a tres circunferencias dadas C_1 , C_2 , C_3 . Supongamos que los radios respectivos cumplen $r_1 \leq r_2 \leq r_3$. (Ver Figura 3.47)

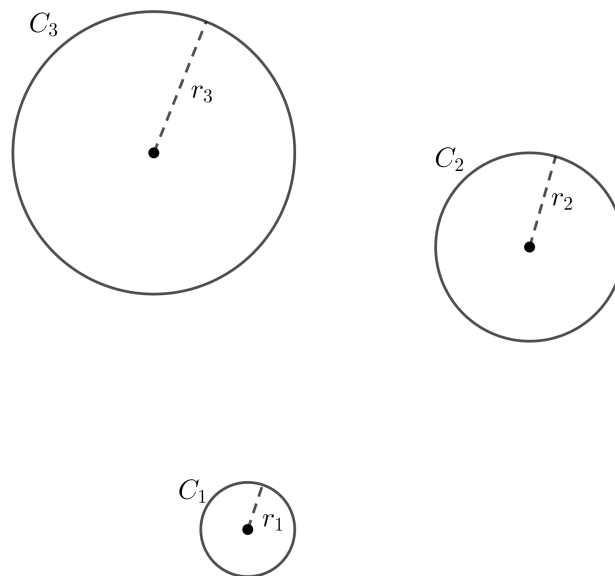


Figura 3.47: Paso 1

Construimos a continuación C'_2 y C'_3 con el mismo centro respectivamente que C_2 y C_3 y radios $r_2 - r_1$ y $r_3 - r_1$. (Ver Figura 3.48)

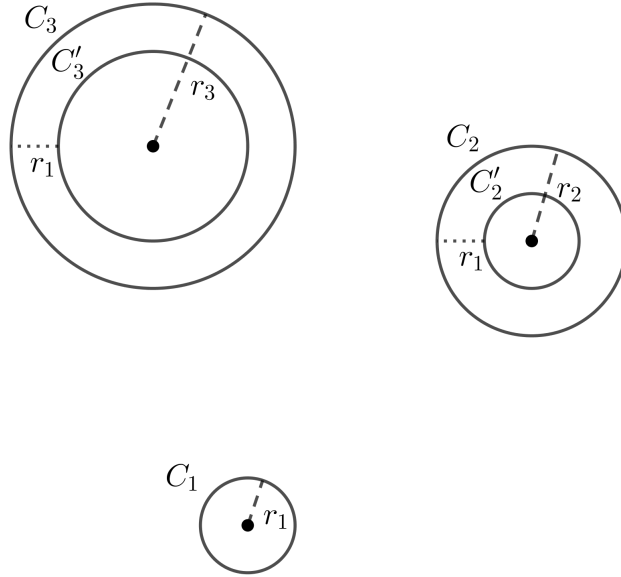


Figura 3.48: Paso 2

Construimos una de las circunferencias que pasa por el centro O_1 de C_1 y es tangente a C'_2 y C'_3 . (Ver Figura 3.49)

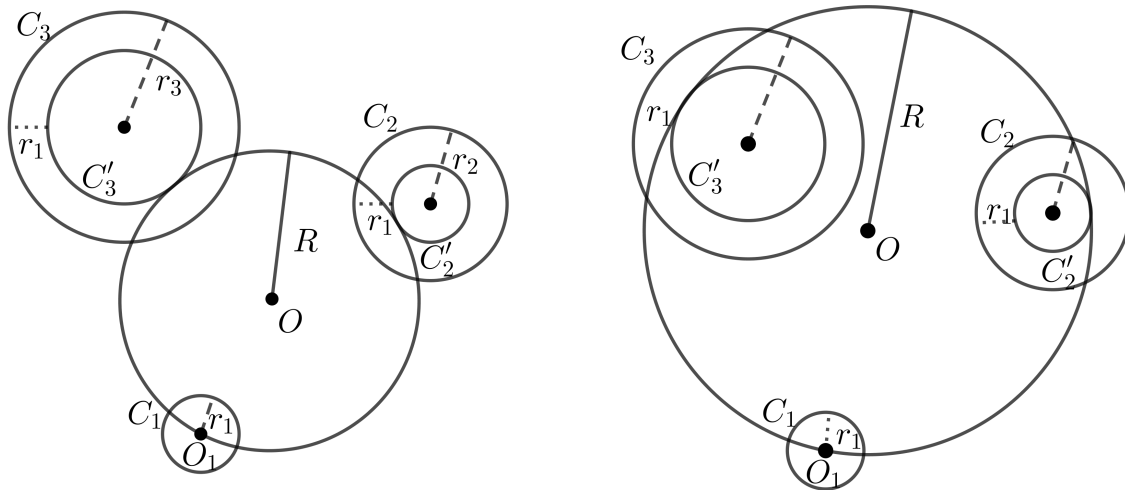


Figura 3.49: Paso 3

Hay cuatro posibilidades, pero sólo son de interés dos.

La primera es cuando la circunferencia que construimos C es tal que C'_2 y C'_3 son exteriores a ella. Sea O su centro y R su radio. Entonces la circunferencia de centro O y radio $R - r_1$

es la circunferencia buscada tangente a C_1 , C_2 y C_3 . (Ver Figura 3.50)

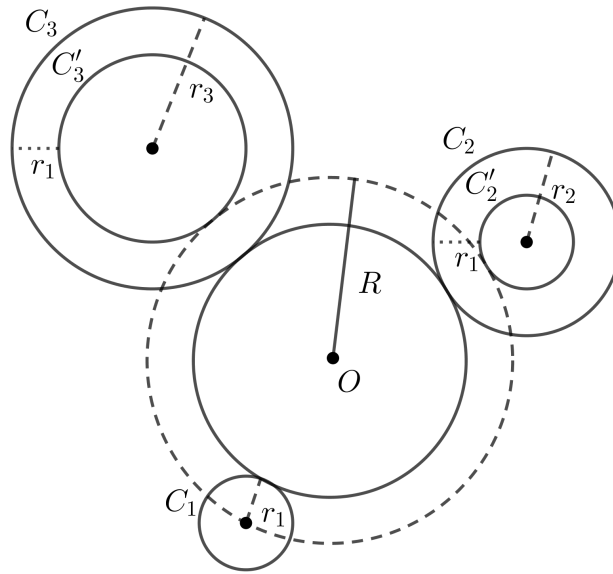


Figura 3.50: Paso 4 a)

La segunda posibilidad es cuando la circunferencia que construimos C es tal que C'_2 y C'_3 son interiores a ella. Entonces la circunferencia de centro O y radio $R+r_1$ es la circunferencia buscada tangente a C_1 , C_2 y C_3 . (Ver Figura 3.51)

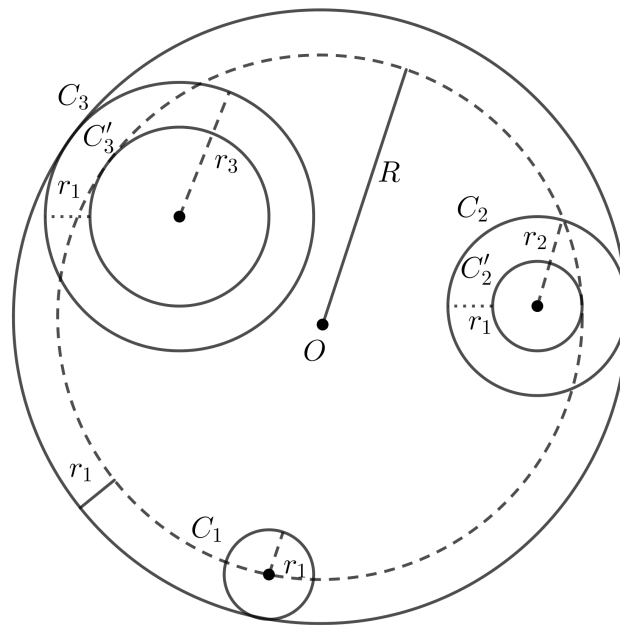


Figura 3.51: Paso 4 b)

3.6. Ejercicios

Ejercicios resueltos

Ejercicio Resuelto 3.1. *Sea un triángulo ABC y un punto D sobre \overline{BC} . Dos circunferencias son tangentes exteriormente a \overline{AD} en el mismo punto M y cada una de ellas es tangente a la circunferencia circunscrita de $\triangle ABC$ y al lado \overline{BC} , la primera sobre el segmento \overline{BD} y la otra sobre el segmento \overline{DC} . Demostrar que \overline{AD} es la bisectriz del ángulo A .*

Demostración.

Supongamos que la recta que une los centros de las dos circunferencias corta a la recta \overline{BC} en T . Consideremos la inversión de centro A y radio \overline{AM} . Esta inversión deja fijas a las dos circunferencias y por Teorema 3.7, la circunferencia circunscrita a $\triangle ABC$ se transforma en una recta tangente común a las dos circunferencias.

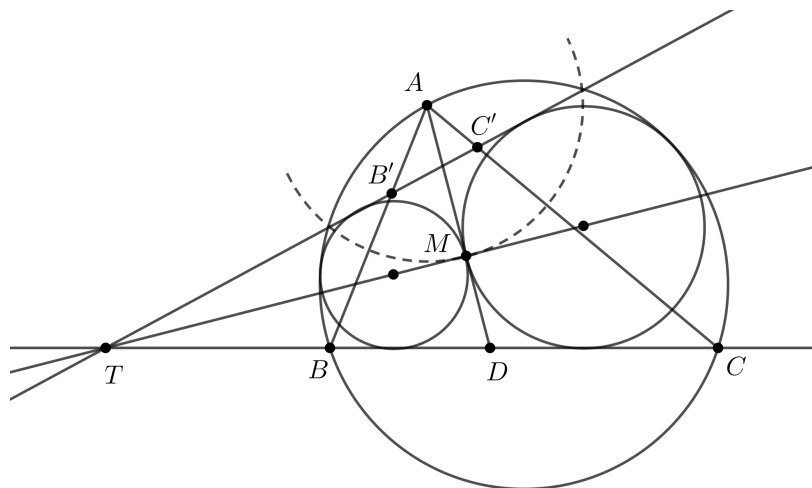


Figura 3.52: Ejercicio 2

El cuadrilátero $BCC'B'$ formado por los vértices B y C y sus inversos B' y C' es concíclico, ya que por Teorema 2.1, $\triangle ABC \sim \triangle AB'C'$, entonces $\angle AC'B' = \angle ABC$, así $\angle B'C'C$ es el ángulo suplementario de $\angle AC'B'$, por lo que $\angle B'C'C + \angle AC'B' = 180^\circ$, pero como $\angle AC'B' = \angle ABC$, así $\angle B'C'C + \angle ABC = 180^\circ$, por lo tanto cumple con la condición para ser concíclico.

Ahora probaremos que las bisectrices de $\angle BTB'$ y $\angle BAC$ son perpendiculares.

Sea \overline{TM} la bisectriz de $\angle BTB'$. Supongamos que \overline{AR} es la bisectriz de $\angle BAC$, sea

$\angle B'AC' = \alpha, \angle AB'C' = \theta$ y $\angle AC'B' = \psi$, entonces $\angle B'AS = \angle C'AS = \frac{\alpha}{2}$ (Figura 3.53).

$$\begin{aligned} \angle B'AS = \frac{\alpha}{2} &\implies \angle ASB' = \psi + \frac{\alpha}{2} \\ &\implies \angle RSC' = \angle ASB' = \psi + \frac{\alpha}{2}; \text{ por ser ángulos opuestos por el vértice} \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \angle C'AS = \frac{\alpha}{2} &\implies \angle ASC' = \theta + \frac{\alpha}{2} \\ &\implies \angle RSB' = \angle ASC' = \theta + \frac{\alpha}{2}; \text{ por ser ángulos opuestos por el vértice} \end{aligned}$$

Luego, $\angle BB'S = 180^\circ - \psi - \alpha$, por ser ángulo suplementario de $\angle AB'S$, y como B' y C' son los inversos de B y C , respectivamente, entonces por Teorema 2.1 $\triangle ABC \sim \triangle AB'C'$, por lo tanto, $\angle ABC = \angle AC'B' = \psi$. Así $\angle BRA = \theta + \frac{\alpha}{2}$.

Ahora, como $\angle TSR = \angle TRS$, entonces $\triangle TSR$ es un triángulo isósceles. Esto implica, que la bisectriz de $\angle RTS$, también es una altura y por lo que, $\overline{TM} \perp \overline{SR}$. Por lo tanto, las bisectrices de $\angle BTB'$ y $\angle BAC$ son perpendiculares.

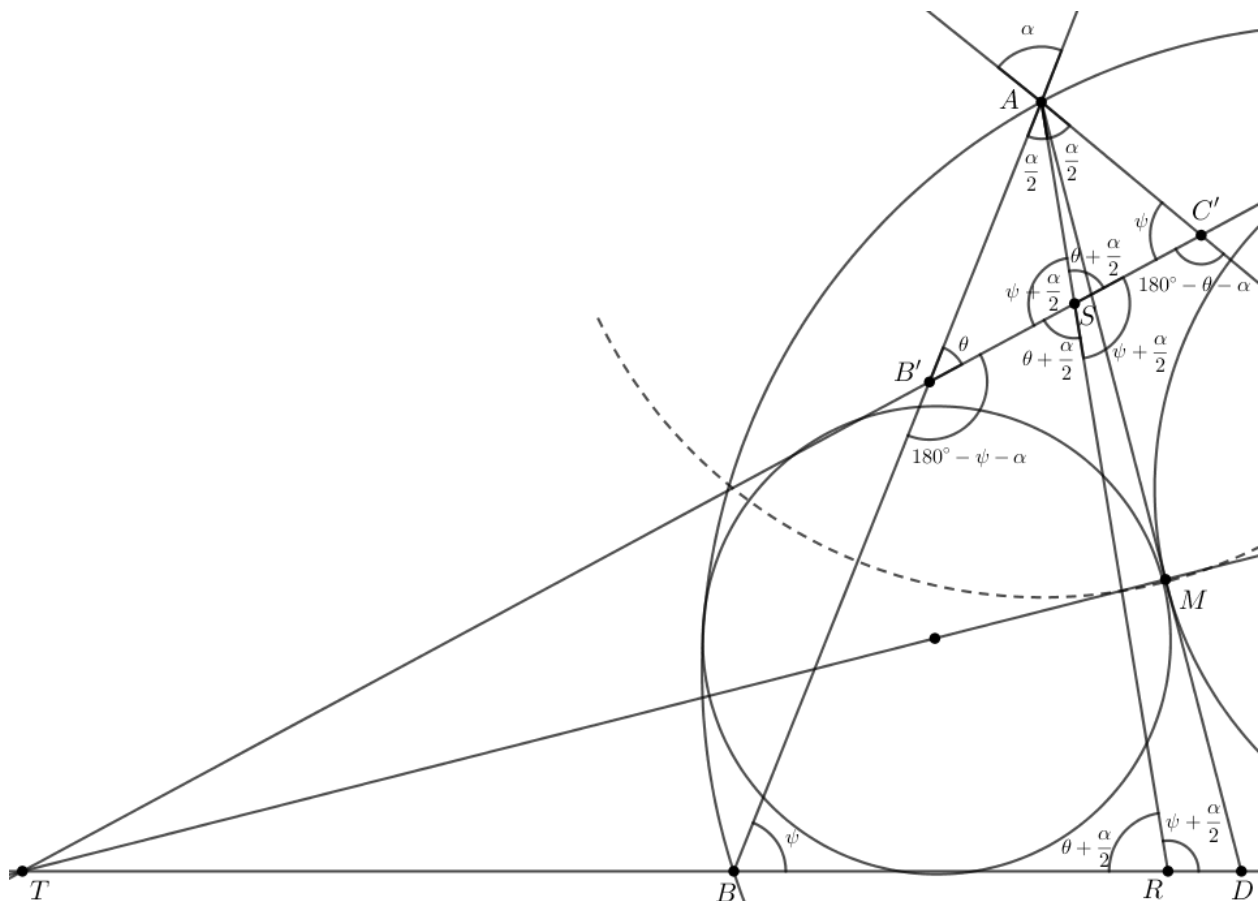


Figura 3.53: Bisectrices de $\angle BTB'$ y $\angle BAC$

Pero si \overline{TM} es la bisectriz de $\angle BTB'$, y \overline{AR} es la bisectriz de $\angle BAC$, y $\overline{AM} \perp \overline{TM}$, esto implica que \overline{AM} debe ser la bisectriz de $\angle BAC$, ya que desde A no existen dos rectas perpendiculares a \overline{TM} . Por lo tanto, \overline{AD} es la bisectriz de $\angle A$. ■

Ejercicio Resuelto 3.2. *Dados un punto y dos circunferencias, trazar una circunferencia que pase por el punto y que sea tangente a las dos circunferencias.*

Solución.

En la Figura 3.54, A es el punto dado y las circunferencias dadas tienen centros B y C . Consideramos como circunferencia de inversión la que está centrada en A y es ortogonal a B .

Como las circunferencias centradas en A y B respectivamente son ortogonales, la circunferencia centrada en B se mantendrá fija. Ahora encontremos la circunferencia inversa de la circunferencia centrada en C .

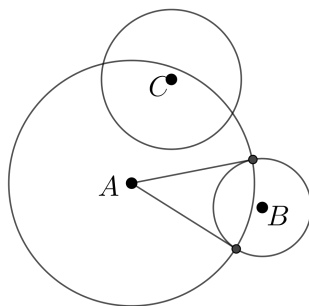


Figura 3.54: Figura Inicial de Ejercicio 3.2

1. Trazamos una semirrecta del centro de la circunferencia con el centro de inversión, es decir la circunferencia centrada en A . Sobre esta semirrecta estará el centro de la circunferencia inversa (Figura 3.55).

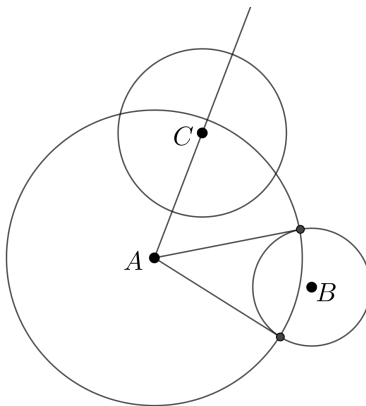


Figura 3.55: Construcción de circunferencia inversa

2. Ahora trazamos la recta tangente a la circunferencia centrada en C , desde el centro de inversión A (Figura 3.56).

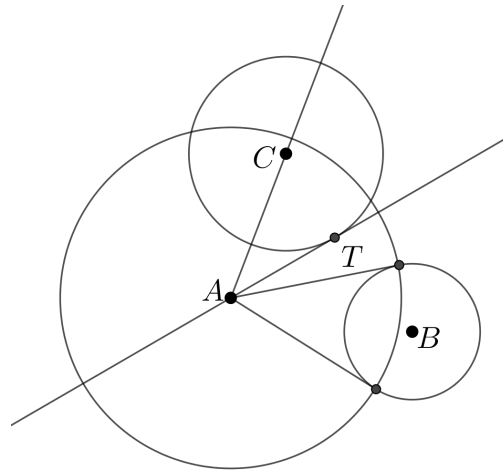


Figura 3.56: Construcción de circunferencia inversa

3. Hallamos el inverso T' del punto de tangencia T . Por el punto T' , pasa una perpendicular a la recta \overline{AC} y esto definirá el centro de la circunferencia inversa. En la Figura 3.57 mostramos la circunferencia inversa de la circunferencia centrada en C .

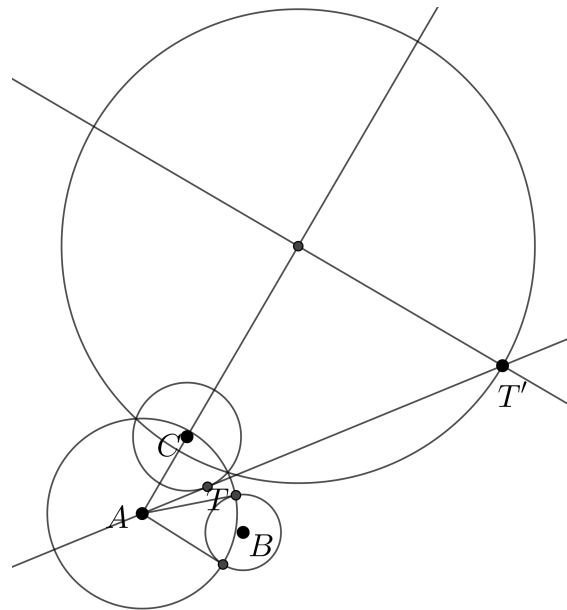


Figura 3.57: Construcción de circunferencia inversa

Tenemos la circunferencia inversa de la circunferencia centrada en C , trazamos una tangente común a dicha circunferencia inversa y a la circunferencia centrada en B . (Figura 3.58)

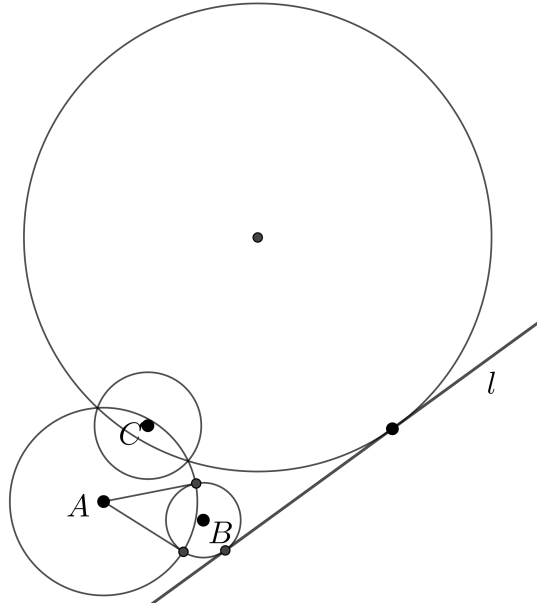


Figura 3.58: Tangente

Debemos invertir la recta l , para encontrar la circunferencia buscada. (Figura 3.59)

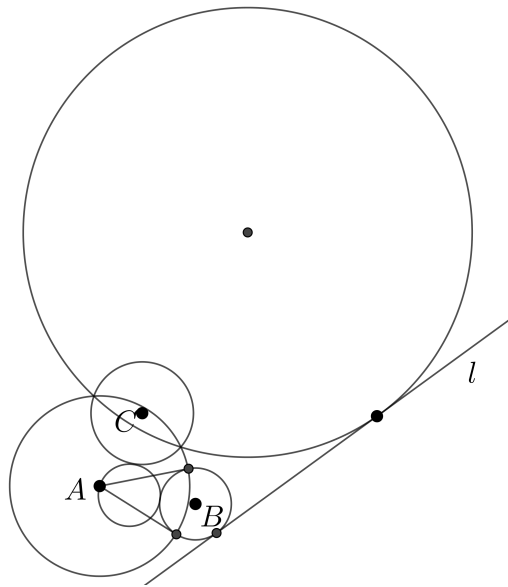


Figura 3.59: Circunferencia buscada

Ejercicios propuestos

Ejercicio Propuesto 3.1. *Dado un $\triangle ABC$ y su circunferencia circunscrita γ , sea κ la circunferencia tangente a γ en A y tangente a \overline{BC} en un punto F . Sea E el otro punto de intersección de κ con el lado \overline{CA} (aparte de A). Si U y V son los dos puntos de γ que cumplen $CF = CU = CV$, demostrar que \overline{UV} es tangente a la circunferencia κ en el punto E .*

Capítulo 4

Reciprocidad y el plano extendido

4.1. Conjugados armónicos

Definición 4.1. Si A y B son dos puntos en una recta (Ver Figura 4.1), cualquier par de puntos C y D en la recta para los cuales se cumpla $\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB}$ se dice que divide \overline{AB} armónicamente. Se dice entonces que los puntos C y D son **conjugados armónicos** respecto a A y B .



Figura 4.1: Conjugados armónicos

Lema 4.1. Dados los puntos ordinarios A y B , y dado un número positivo k , donde $k \neq 1$, hay dos puntos ordinarios C y D tales que $\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB} = k$. Uno de los puntos C y D está entre A y B , mientras que el otro es exterior a \overline{AB} .

Demostración.

Escogemos un punto C en \overline{AB} , tal que $CB = \frac{AB}{1+k}$

Como $k > 0$, entonces $CB < AB$, y podemos suponer que C se encuentra entre A y B . (Ver Figura 4.1)

$$\text{Por lo que, } \frac{AB}{k+1} = \frac{AC+CB}{1+k} \implies CB = \frac{AC+CB}{1+k}$$

$$\begin{aligned}
&\implies CB(1+k) = AC + CB \\
&\implies CB + kCB = AC + CB \\
&\implies kCB = AC \\
&\implies k = \frac{AC}{CB}
\end{aligned}$$

Ahora encontramos el punto D , que será exterior a \overline{AB} , más allá de B si $k > 1$ y más allá de A si $0 < k < 1$. (Ver Figura 4.1)

Suponiendo que $k > 1$, establecemos $k = \frac{AD}{DB}$, como,

$$\begin{aligned}
\frac{AD}{DB} = \frac{AD}{AD - AB} &\implies k = \frac{AD}{AD - AB} \\
&\implies k(AD - AB) = AD \\
&\implies kAD - kAB = AD \\
&\implies kAD - AD = kAB \\
&\implies AD(k - 1) = kAB \\
&\implies AD = \frac{k}{k - 1} \cdot AB
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si k es un número positivo tal que $k > 1$ y C satisface $k = \frac{AC}{CB}$, entonces siempre existe un punto $D \neq C$ tal que $k = \frac{AD}{DB}$.

Simplemente elegimos D tal que $AD = \frac{k}{k - 1} \cdot AB$.

De igual manera se encuentra D cuando $0 < k < 1$. (Ver Figura 4.2).



Figura 4.2: Recta \overline{AB}

Suponiendo que $0 < k < 1$, establecemos $k = \frac{AD}{DB}$, como,

$$\begin{aligned}
\frac{AD}{DB} = \frac{AD}{AD + AB} &\implies k = \frac{AD}{AD + AB} \\
&\implies k(AD + AB) = AD
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\implies kAD + kAB = AD \\
&\implies kAD - AD = -kAB \\
&\implies AD(k - 1) = -kAB \\
&\implies AD = \frac{-k}{-(1 - k)} \cdot AB \\
&\implies AD = \frac{k}{1 - k} \cdot AB
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si k es un número positivo tal que $0 < k < 1$ y C satisface $k = \frac{AC}{CB}$, entonces siempre existe un punto $D \neq C$ tal que $k = \frac{AD}{DB}$.

Simplemente elegimos D tal que $AD = \frac{k}{1 - k} \cdot AB$. ■

Cuando C es punto medio de \overline{AB} satisface $\frac{AC}{CB} = 1$. Adoptaremos la convención que $\frac{AI}{IB} = 1$, donde I es el punto ideal o punto del infinito en el plano inverso.

Usando esta convención, dados dos puntos ordinarios A y B , para cada número positivo k hay conjugados armónicos C y D respecto a A y B para los cuales $\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB} = k$.

Recuerde que tres números positivos a , b y c forman una progresión armónica si y sólo si $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ y $\frac{1}{c}$ forma una progresión aritmética. Una definición similar es válida para una secuencia infinita de números positivos.

Teorema 4.1. *Dados cuatro puntos ordinarios A , B , C y D , si \overline{AB} se divide armónicamente por C y D , entonces \overline{CD} se divide armónicamente por A y B .*

Demostración.

Si \overline{AB} se divide armónicamente por C y D se cumple que $\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB}$, pero esto es, $\frac{AC}{AD} = \frac{CB}{DB}$, que equivale a $\frac{CA}{AD} = \frac{CB}{BD}$, así \overline{CD} se divide armónicamente por A y B . ■

Teorema 4.2. *Supongamos que P , Q , R y S son puntos ordinarios consecutivos en una recta y que Q y S dividen armónicamente \overline{PR} . Luego, la secuencia de distancias \overline{PQ} , \overline{PR} y \overline{PS} forma una progresión armónica. (Ver Figura 4.3)*

Demostración.

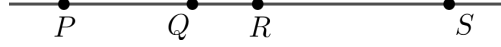


Figura 4.3: Recta \overline{PR}

Por Definición 4.1, tenemos $\frac{PQ}{QR} = \frac{PS}{SR}$, pero esto es $\frac{QR}{PQ} = \frac{SR}{PS}$, y queremos demostrar que $\frac{1}{PQ}$, $\frac{1}{PR}$, $\frac{1}{PS}$ están en una progresión aritmética; eso es, $\frac{1}{PQ} - \frac{1}{PR} = \frac{1}{PR} - \frac{1}{PS}$.

Multiplicamos $\frac{QR}{PQ} = \frac{SR}{PS}$ por $\frac{1}{PR}$ y tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{QR}{PQ \cdot PR} = \frac{SR}{PS \cdot PR} &\implies \frac{PR - PQ}{PQ \cdot PR} = \frac{PS - PR}{PS \cdot PR} \\ &\implies \frac{PR}{PQ \cdot PR} - \frac{PQ}{PQ \cdot PR} = \frac{PS}{PS \cdot PR} - \frac{PR}{PS \cdot PR} \\ &\implies \frac{1}{PQ} - \frac{1}{PR} = \frac{1}{PR} - \frac{1}{PS} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la secuencia de distancias \overline{PQ} , \overline{PR} y \overline{PS} forma una progresión armónica. ■

4.1.1. El círculo de Apolonio

Si se nos dan los puntos A y B , y un número positivo $k \neq 1$, podemos encontrar precisamente dos puntos ordinarios X en la recta \overline{AB} , de manera que $\frac{AX}{XB} = k$.

Sin embargo, también hay puntos X que no están en la recta \overline{AB} para los cuales $\frac{AX}{XB} = k$ y de hecho, como mostramos en el siguiente teorema, el conjunto de todos esos puntos X se encuentra en una circunferencia.

Teorema 4.3. Círculo de Apolonio. *Dados dos puntos ordinarios A y B , y un número positivo $k \neq 1$, el conjunto de todos los puntos X en el plano para el cual $\frac{AX}{XB} = k$, forma un círculo llamado **Círculo de Apolonio** para A , B y k .*

Demostración.

Sean C y D los puntos en \overline{AB} para los cuales $\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB} = k$ y sea ξ el círculo con diámetro \overline{CD} (Figura 4.4). Primero mostramos que cada punto X para el cual $\frac{AX}{CB} = \frac{AD}{DB} = k$ está en ξ .

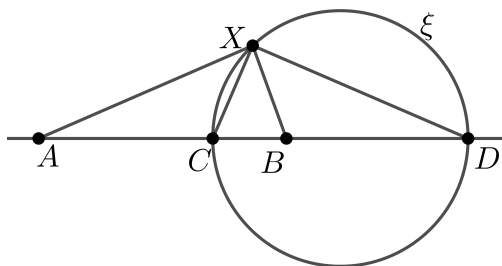


Figura 4.4: Círculo ξ

Dado que $\frac{AC}{CB} = k$ y $\frac{AD}{DB} = k$, por la ley de los senos¹ tenemos:

$$\text{Para } \triangle AXC : \frac{AX}{\text{sen}\angle ACX} = \frac{AC}{\text{sen}\angle AXC} = \frac{CX}{\text{sen}\angle CAX}$$

$$\text{Para } \triangle CXB : \frac{CX}{\text{sen}\angle CBX} = \frac{XB}{\text{sen}\angle XCB} = \frac{CB}{\text{sen}\angle BXC}$$

$$\text{Ahora, tenemos: } \frac{AX}{\text{sen}\angle ACX} = \frac{AC}{\text{sen}\angle AXC} \quad \wedge \quad \frac{CB}{\text{sen}\angle BXC} = \frac{XB}{\text{sen}\angle XCB}$$

$$\text{Despejando } AC \text{ y } CB, \text{ tenemos: } AC = AX \cdot \frac{\text{sen}\angle AXC}{\text{sen}\angle ACX} \quad \wedge \quad CB = XB \cdot \frac{\text{sen}\angle BXC}{\text{sen}\angle XCB}$$

$$\text{Así, } \frac{AC}{CB} = \frac{AX \cdot \frac{\text{sen}\angle AXC}{\text{sen}\angle ACX}}{XB \cdot \frac{\text{sen}\angle BXC}{\text{sen}\angle XCB}}$$

Además tomemos en cuenta, que:

$$\begin{aligned} \frac{\text{sen } x}{\text{sen}(180^\circ - x)} &= \frac{\text{sen } x}{\text{sen } 180^\circ \cdot \cos x - \text{sen } x \cdot \cos 180^\circ} \\ &= \frac{\text{sen } x}{(0)\cos x - \text{sen } x(-1)} \\ &= \frac{\text{sen } x}{\text{sen } x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{Entonces, } \frac{AC}{CB} = \frac{AX \cdot \frac{\text{sen}\angle AXC}{\text{sen}\angle ACX}}{XB \cdot \frac{\text{sen}\angle BXC}{\text{sen}\angle XCB}}$$

¹Recursos básicos en geometría plana, Rodolfo Larrea Tomás, pág. 14

$$k = k \cdot \frac{(\text{sen}\angle AXC)(\text{sen}\angle XCB)}{(\text{sen}\angle ACX)(\text{sen}\angle BXC)}; \quad \frac{AC}{CB} = k \quad \wedge \quad \frac{AX}{XB} = k$$

$$k = k \cdot \frac{\text{sen}\angle AXC}{\text{sen}\angle BXC}; \quad \frac{\text{sen}\angle XCB}{\text{sen}\angle ACX} = 1$$

$$k \cdot \text{sen}\angle BXC = k \cdot \text{sen}\angle AXC$$

$$\text{sen}\angle BXC = \text{sen}\angle AXC$$

$$\angle BXC = \angle AXC$$

Por lo que, \overline{XC} es una bisectriz interna.

Ahora,

$$\text{Para } \triangle AXD : \frac{AD}{\text{sen}\angle AXD} = \frac{AX}{\text{sen}\angle ADX} = \frac{XD}{\text{sen}\angle XAD}$$

$$\text{Para } \triangle XBD : \frac{BD}{\text{sen}\angle BXD} = \frac{XB}{\text{sen}\angle XDB} = \frac{XD}{\text{sen}\angle XBD}$$

$$\text{Ahora, tenemos: } \frac{AD}{\text{sen}\angle AXD} = \frac{AX}{\text{sen}\angle ADX} \quad \wedge \quad \frac{BD}{\text{sen}\angle BXD} = \frac{XB}{\text{sen}\angle XDB}$$

Despejando AD y BD , tenemos:

$$AD = AX \cdot \frac{\text{sen}\angle AXD}{\text{sen}\angle ADX} \quad \wedge \quad BD = XB \cdot \frac{\text{sen}\angle BXD}{\text{sen}\angle XDB}$$

Entonces,

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AX \cdot \frac{\text{sen}\angle AXD}{\text{sen}\angle ADX}}{XB \cdot \frac{\text{sen}\angle BXD}{\text{sen}\angle XDB}}$$

$$k = k \cdot \frac{(\text{sen}\angle AXD)(\text{sen}\angle XDB)}{(\text{sen}\angle ADX)(\text{sen}\angle BXD)}; \quad \frac{AD}{BD} = k \quad \wedge \quad \frac{AX}{XB} = k$$

$$k = k \cdot \frac{\text{sen}\angle AXD}{\text{sen}\angle BXD}; \quad \frac{\text{sen}\angle XDB}{\text{sen}\angle ADX} = 1$$

$$k \cdot \text{sen}\angle BXD = k \cdot \text{sen}\angle AXD$$

$$\text{sen}\angle BXD = \text{sen}\angle AXD$$

$$\text{sen}\angle BXD = \text{sen}(180^\circ - \angle DXL)$$

$$\text{sen}\angle BXD = \text{sen}\angle DXL$$

$$\angle BXD = \angle DXL$$

Por lo que, \overline{XD} es una bisectriz externa.

En la Figura 4.5, vemos que $\alpha + \beta = 90^\circ$, ya que:

$$\begin{aligned} \alpha + \alpha + \beta + \beta &= 180^\circ \implies 2\alpha + 2\beta = 180^\circ \\ &\implies 2(\alpha + \beta) = 180^\circ \\ &\implies \alpha + \beta = \frac{180^\circ}{2} \\ &\implies \alpha + \beta = 90^\circ \end{aligned}$$

Es decir, $\angle CXD$ es un ángulo recto, además \overline{CD} es el diámetro de ξ , es decir el $\angle CXD$ es un ángulo inscrito, esto significa que X está en el círculo ξ . (Ver Figura 4.5)

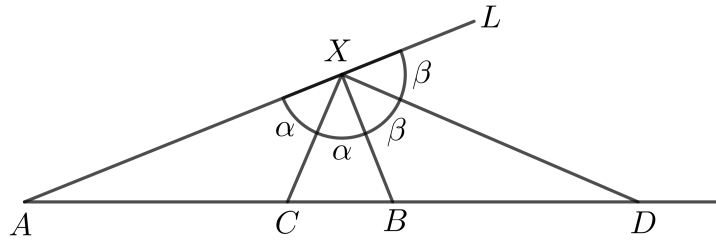


Figura 4.5: Triángulo AXB y sus bisectrices \overline{XC} y \overline{XD}

A continuación mostramos que cada punto X en el círculo ξ satisface $\frac{AX}{XB} = k$. Sea X un punto en el círculo ξ y dibujamos $\overline{BP} \parallel \overline{DX}$ y $\overline{BQ} \parallel \overline{CX}$, como se muestra en la Figura 4.6.

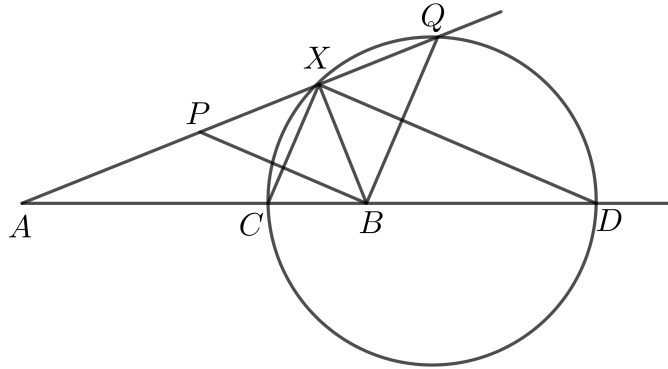


Figura 4.6: Círculo de Apolonio

Además, como $\overline{BP} \parallel \overline{DX}$ y $\overline{BQ} \parallel \overline{CX}$, por Teorema de Tales tenemos lo siguiente:

$$\frac{AX}{XP} = \frac{AD}{DB}, \text{ y } \frac{AX}{XQ} = \frac{AC}{CB}.$$

Como $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB} = k$, tenemos que $\frac{AX}{XP} = \frac{AX}{XQ}$, de donde $XP = XQ$.

Dado que X está en el círculo, entonces $\angle CXD = 90^\circ$, por Teorema 1.6 y por lo tanto $\angle PBQ = 90^\circ$, por lo que el punto B está en el círculo centrado en X con radio \overline{XP} , por ser ángulo inscrito. Así, $XB = XP$ por ser radios, por lo que $\frac{AX}{XB} = \frac{AX}{XP} = \frac{AD}{DB} = k$ ■

Teorema 4.4. Sean O el centro y r el radio del círculo de Apolonio para A, B y k . Entonces:

- 1) O está en la recta \overline{AB} .
- 2) Los puntos A y B están para el mismo lado que O .
- 3) A y B son inversos con respecto del círculo.
- 4) Si el círculo interseca a \overline{AB} en C y D , entonces C y D divide armónicamente a \overline{AB} en el radio k .

Demostración.

- 1) O está en la recta \overline{AB}

Sean C y D los dos puntos en \overline{AB} para los cuales $\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB} = k$ y sea el círculo de Apolonio con diámetro \overline{CD} , entonces como \overline{CD} es el diámetro del círculo entonces O está en \overline{CD} y \overline{CD} está en \overline{AB} . Por lo tanto, O está en \overline{AB} .

- 2) Los puntos A y B están para el mismo lado que O .

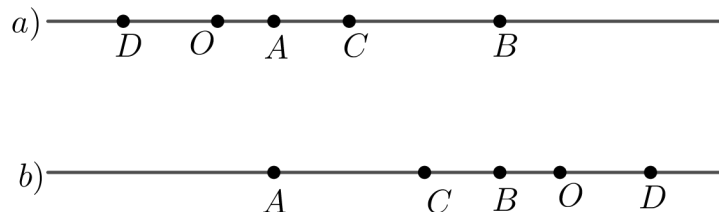


Figura 4.7: Recta \overline{AB}

Suponemos que la recta \overline{AB} es horizontal, que A está a la izquierda de B y que C está entre A y B , pero que D no lo está.

Por lo tanto, D se encuentra a la izquierda de A como en la Figura 4.7 a) o a la derecha de B como en la Figura 4.7 b). Mostraremos que la afirmación es verdadera para ambos casos.

Para el caso a), tenemos que $CB < DB$, y como C y D están en el círculo de Apolonio, también tenemos que $\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB}$, de modo que, $\frac{AC}{CB} \cdot CB < \frac{AD}{DB} \cdot DB \implies AC < AD$. Por lo tanto, el punto medio O de \overline{CD} está a la izquierda de A y por lo tanto a la izquierda de A y B .

Para el caso b), tenemos que $AD > AC$, y como C y D están en el círculo de Apolonio, también tenemos que $\frac{DB}{AD} = \frac{CB}{AC}$, de modo que, $\frac{DB}{AD} \cdot AD > \frac{CB}{AC} \cdot AC \implies DB > CB$. Por lo tanto, el punto medio O de \overline{CD} está a la derecha de B y por lo tanto a la derecha de A y B .

3) A y B son inversos con respecto del círculo.

Sea O el centro del círculo de Apolonio, y sea A un punto dentro del círculo.

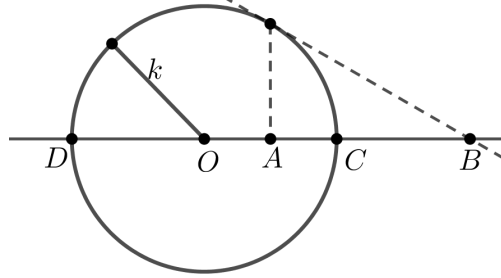


Figura 4.8: Círculo de diámetro \overline{CD}

Observando la Figura 4.8 vemos que:

$$AC = k - OA, \quad AD = k + OA, \quad CB = OB - k, \quad BD = k + OB$$

$$\text{Como } C \text{ y } D \text{ están en el círculo, tenemos: } \frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB} \implies \frac{k - OA}{OB - k} = \frac{k + OA}{k + OB}$$

$$\frac{k - OA}{OB - k} = \frac{k + OA}{k + OB}$$

$$(k - OA)(k + OB) = (OB - k)(k + OA)$$

$$k \cdot k + k \cdot OB - k \cdot OA - OA \cdot OB = k \cdot OB + OA \cdot OB - k \cdot k - k \cdot OA$$

$$k^2 + k \cdot OB - k \cdot OA - OA \cdot OB = k \cdot OB + OA \cdot OB - k^2 - k \cdot OA$$

$$k^2 + k^2 = k \cdot OA + OA \cdot OB - k \cdot OB + k \cdot OB + OA \cdot OB - k \cdot OA$$

$$2k^2 = 2(OA \cdot OB)$$

$$k^2 = OA \cdot OB$$

Por lo tanto, por definición de inversión, A y B son inversos con respecto del círculo de Apolonio.

4) Si el círculo interseca a \overline{AB} en C y D , entonces C y D divide armónicamente a \overline{AB} en el radio k .

Como los puntos C y D pertenecen al círculo de Apolonio, se cumple que $\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB}$, así por Definición 4.1, tenemos que C y D divide armónicamente a \overline{AB} . ■

Conjugados armónicos e inversiones

Teorema 4.5. *A y B son conjugados armónicos respecto a C y D si y sólo si A y B son inversos con respecto a la circunferencia con diámetro \overline{CD} .*

Demostración.

“ \implies ”

Supongamos que A y B son conjugados armónicos para \overline{CD} , entonces C y D son conjugados armónicos para \overline{AB} , es decir, $\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB}$.

Sea r el radio de la circunferencia γ , de diámetro \overline{CD} . Queremos demostrar que $OA \cdot OB = r^2$, tenemos que (Ver Figura 4.9):

$$\begin{aligned} \frac{AC}{CB} &= \frac{AD}{DB} \\ AC \cdot BD &= AD \cdot CB \\ (OA - r)(r + OB) &= (r + OA)(r - OB) \\ r \cdot OA + OA \cdot OB - r \cdot r - r \cdot OB &= r \cdot r - r \cdot OB + r \cdot OA - OA \cdot OB \\ r \cdot OA + OA \cdot OB - r^2 - r \cdot OB &= r^2 - r \cdot OB + r \cdot OA - OA \cdot OB \\ r \cdot OA + OA \cdot OB - r \cdot OB + r \cdot OB - r \cdot OA + OA \cdot OB &= r^2 + r^2 \\ 2(OA \cdot OB) &= 2r^2 \\ OA \cdot OB &= r^2 \end{aligned}$$

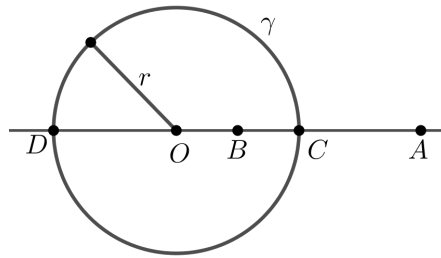


Figura 4.9: Circunferencia de diámetro \overline{CD}

“ \Leftarrow ”

Supongamos que A y B son inversos con respecto a la circunferencia γ con diámetro \overline{CD} , esto es, $OA \cdot OB = r^2$. Asumiendo que A esta fuera de γ , como se observa en la Figura 4.9, ahora, para demostrar que A y B son conjugados armónicos para \overline{CD} , probaremos que $\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{BD}$, ya que por Teorema 4.1, si \overline{AB} se divide armónicamente por C y D entonces \overline{CD} se divide armónicamente por A y B , es decir A y B son conjugados armónicos para C y D .

Consideremos,

$$\begin{aligned} \frac{AC}{CB} = \frac{AD}{BD} &\implies AC \cdot BD = AD \cdot CB \\ &\implies \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot CB} = 1 \end{aligned}$$

Así, bastará probar $\frac{AC \cdot BD}{AD \cdot CB} = 1$. Tomando de referencia la Figura 4.9, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot CB} &= \frac{(OA - r)(r + OB)}{(r + OA)(r - OB)} \\ &= \frac{r \cdot OA + OA \cdot OB - r \cdot r - r \cdot OB}{r \cdot r - r \cdot OB + r \cdot OA - OA \cdot OB} \\ &= \frac{r \cdot OA + r^2 - r^2 - r \cdot OB}{r^2 - r \cdot OB + r \cdot OA - r^2} \\ &= \frac{r(OA - OB)}{r(OA - OB)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, A y B son conjugados armónicos para \overline{CD} . ■

La relación entre conjugados armónicos e inversos nos permite mostrar como una regla se puede usar por si misma para encontrar el inverso de un punto P que esta fuera de la circunferencia de inversión.

Ejemplo 4.1. *Dado un punto P fuera de la circunferencia con centro en O , construya su inverso usando sólo una regla.*

Construcción (Figura 4.10):

1. Dibuje la recta \overline{OP} intersecando a la circunferencia en C y D .

2. Dibuje una segunda recta a través de P , intersecando a la circunferencia en A y B .
3. Dibuje \overline{AC} y \overline{BD} , intersecándose en X .
4. Dibuje \overline{AD} y \overline{BC} , intersecándose en Y .
5. Dibuje la recta a través de X e Y , intersecando a \overline{OP} en Q .

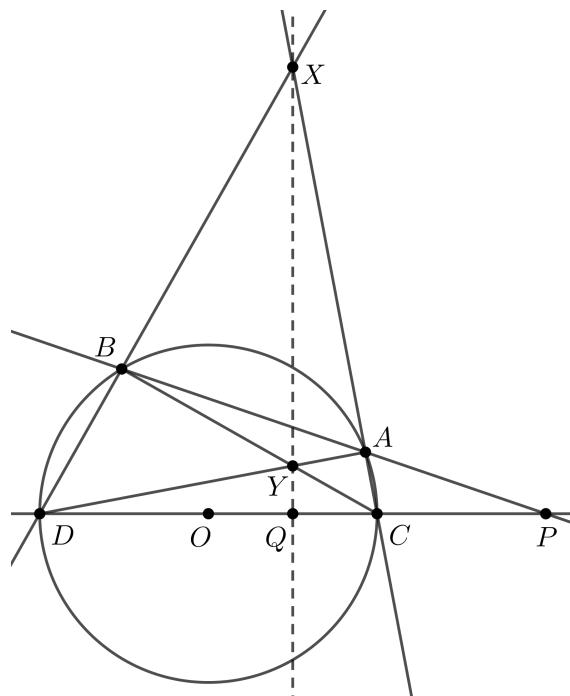


Figura 4.10: Inversión del punto P

Luego Q es el inverso de P .

Justificación:

- a) Aplicamos el Teorema de Ceva² a $\triangle XCD$ y a las cevianas \overline{XC} , \overline{BC} y \overline{AD} . Las cevianas concurren en Y , de modo que: $\frac{XA}{AC} \cdot \frac{CQ}{QD} \cdot \frac{DB}{BX} = 1$.
- b) Aplicamos el Teorema de Menelao³ a $\triangle XCD$ con los puntos de Menelao P, A y B . Los puntos P, A y B son colineales de modo que: $\frac{XA}{AC} \cdot \frac{CP}{PD} \cdot \frac{DB}{BX} = 1$.
- c) De a) y b) tenemos: $\frac{CQ}{QD} = \frac{CP}{PD}$.

² *Classical Geometry*, I. E. Leonard, J. E. Lewis, A. C. F. Liu, G. W. Tokarsky, pág. 97

³ *Classical Geometry*, I. E. Leonard, J. E. Lewis, A. C. F. Liu, G. W. Tokarsky, pág. 98

d) Por lo tanto, de c) vemos que P y Q son los conjugados armónicos con respecto a \overline{CD} .

Así, por el Teorema 4.5, esto significa que P y Q son inversos con respecto a la circunferencia con centro en O .

Inversión y el círculo de Apolonio

Hasta el momento hemos visto algunas de las propiedades del círculo de Apolonio, como lo es, si γ es el círculo de Apolonio para A , B y k , entonces A y B son inversos con respecto a γ . A continuación detallaremos algunas más, en los siguientes teoremas.

Teorema 4.6. *El círculo de Apolonio para A , B y k , es el mismo que el círculo de Apolonio para B , A y $\frac{1}{k}$.*

Demostración.

Sea el círculo de Apolonio para A , B y k , entonces se cumple que $\frac{AX}{XB} = k$, pero esto es equivalente a $\frac{1}{\frac{AX}{XB}} = \frac{1}{k}$, y esto es $\frac{XB}{AX} = \frac{1}{k}$. Por lo tanto, el círculo de Apolonio para A , B y k , es el mismo que el círculo de Apolonio para B , A y $\frac{1}{k}$.

Teorema 4.7. *Si A y B son puntos inversos para el círculo γ , entonces γ es el círculo de Apolonio para A , B y algún número positivo k .*

Demostración.

Por Teorema 4.5, como A y B son inversos respecto a la circunferencia de diámetro \overline{CD} , entonces A y B son conjugados armónicos respecto a C y D , así $\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB} = k$, queremos probar $\frac{AX}{XB} = k$, para $X \in \gamma$.

Trazamos $\overline{BP} \parallel \overline{DX} \wedge \overline{BQ} \parallel \overline{CX}$. (Figura 4.11)

Ahora, por Teorema de Tales,

$$\begin{aligned} \frac{AX}{XP} = \frac{AD}{DB} = k \quad \wedge \quad \frac{AX}{XQ} = \frac{AC}{CB} = k &\implies \frac{AX}{XP} = \frac{AX}{XQ} \\ &\implies XP = XQ \end{aligned}$$

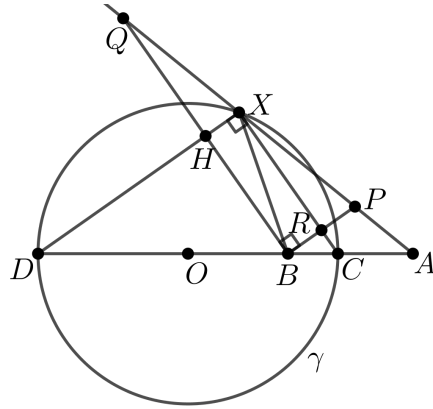


Figura 4.11: Círculo de Apolonio para A, B y algún k

Así observemos, $HXR B$ es un rectángulo, y \overline{XB} será mediana de $\triangle BPQ$ rectángulo, recto en B por Teorema de la mediana⁴ $XB = XP = XQ$, entonces $\frac{AX}{XP} = k \implies \frac{AX}{XB} = k$. Por lo tanto, γ es el círculo de Apolonio para A, B y algún número positivo k . ■

Teorema 4.8. Si α y β son circunferencias ortogonales, entonces cada vez que una circunferencia interseca el diámetro de la otra divide ese diámetro armónicamente.

Demostración.

Tomando de referencia la Figura 4.12, por Teorema 3.1 b), tenemos que si β corta el diámetro \overline{AB} de α , en P y Q en β , entonces P y Q son puntos inversos con respecto de α .

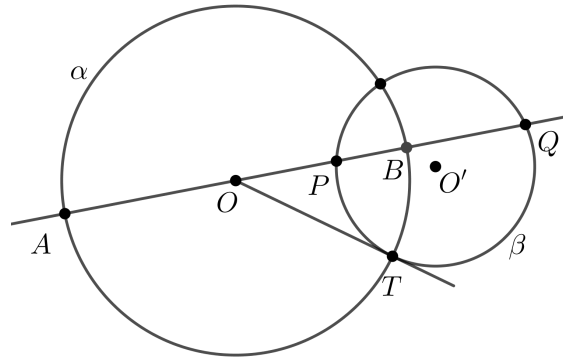


Figura 4.12: Circunferencias ortogonales

Por lo tanto, por Teorema 4.5, como P y Q son inversos con respecto de la circunferencia de diámetro \overline{AB} , entonces P y Q son conjugados armónicos con respecto de A y B . ■

⁴Geometría Primer nivel, Ernesto Quispe Rodriguez, pág. 55

Teorema 4.9. Si α y β son dos circunferencias y β divide un diámetro de α armónicamente, entonces las dos circunferencias son ortogonales.

Demostración.

Sea \overline{CD} el diámetro de α y sean A y B los puntos en β que dividen armónicamente a α , por Teorema 4.5 A y B son inversos respecto de la circunferencia de diámetro \overline{CD} , es decir, α . Por lo tanto por Teorema 3.2 2), α y β son circunferencias ortogonales. ■

4.2. El plano proyectivo y reciprocidad

Aumentamos el plano euclidiano con infinitos puntos ideales, o puntos del infinito, en este caso:

1. Todas las rectas paralelas a una recta dada (incluyendo la recta dada) pasan a través del mismo punto ideal.
2. Las rectas que no son paralelas no pasan por el mismo punto ideal.

Colectivamente, los puntos ideales forman la recta ideal, o recta del infinito.

La estructura resultante es llamada el *plano extendido* o el *plano proyectivo*.

Los puntos no ideales y las rectas no ideales se denominan *puntos ordinarios* y *rectas ordinarias*, respectivamente. Las palabras “punto” y “recta” por sí mismas pueden referirse a un punto y recta ordinaria o ideal.

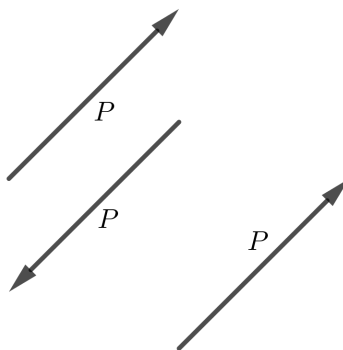


Figura 4.13: Vectores paralelos indicando el punto ideal P

A diferencia de la situación en geometría inversa, podemos ilustrar puntos ideales usando flechas o vectores para indicar el punto ideal. Los vectores paralelos indican el mismo punto

ideal. En la Figura 4.13, los tres vectores indican el mismo punto ideal y cualquier recta paralela a estos vectores pasa a través de ese punto ideal.

Las consecuencias inmediatas de las definiciones en el plano proyectivo son las siguientes:

1. Cada recta ordinaria contiene exactamente un punto ideal.
2. Cada dos rectas se encuentran exactamente en un punto.
3. Cada dos puntos determinan una recta única.

4.2.1. Reciprocidad

Definición 4.2. Dado una circunferencia γ centrada en un punto ordinario O y dado un punto ordinario $P \neq O$, el **polar** de P es la recta p que es perpendicular a \overline{OP} que pasa a través del inverso P' de P . La circunferencia γ es llamada **circunferencia de reciprocidad**. El centro O se llama **centro de reciprocidad**. (Ver Figura 4.14)

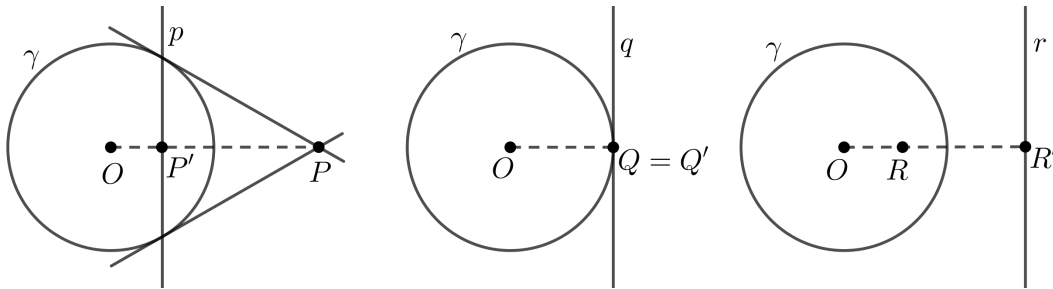


Figura 4.14: Circunferencias de reciprocidad

Nota. Usamos la convención de que las letras mayúsculas denotan puntos y sus correspondientes letras minúsculas denotan las polares de esos puntos.

- La recta polar de O se define como la recta ideal.
- Si P es un punto ideal, entonces su polar es una recta a través de O perpendicular a \overline{OP} , es decir, perpendicular al vector que apunta a P , como en la Figura 4.15.

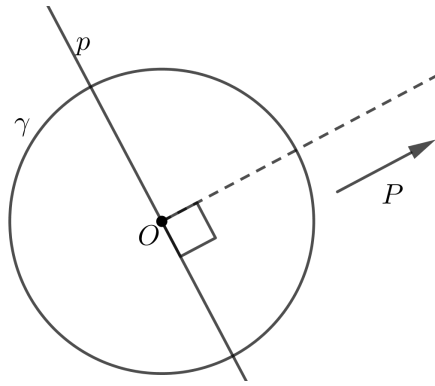


Figura 4.15: Recta polar de P

Definición 4.3. Si m es una recta, entonces el **polo** de m es el punto M , tal que m es la polar de M .

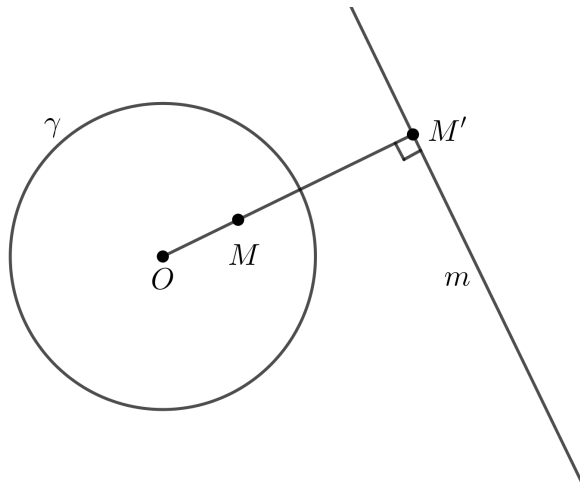


Figura 4.16: Polo de m

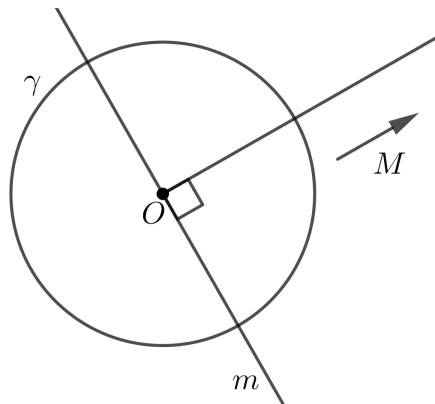


Figura 4.17: Polo de m

- El polo de la recta ideal es el centro O de la circunferencia γ .
- Si m es una recta a través del centro O de la circunferencia γ , entonces el polo de m es el punto ideal M en cualquier recta perpendicular a m , como en la Figura 4.17.

El teorema más útil sobre polos y polares es el siguiente:

Teorema 4.10. Teorema de reciprocidad. P está en q si y sólo si Q está en p .

Demostración.

Mostraremos que si P está en q , Q está en p , y el inverso puede ser obtenido mediante el intercambio de P y Q . Consideramos tres casos:

Caso 1: Sea P un punto ordinario y q una recta ordinaria.

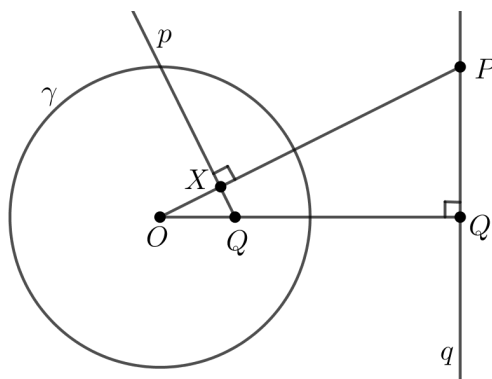


Figura 4.18: Caso 1

Supongamos que P está en q y sea Q' el inverso de Q , donde Q es el polo de q y sea r el radio de γ

En \overline{OP} , sea X el pie de la perpendicular de Q , como en la Figura 4.18. Entonces de la condición de semejanza de triángulos (ángulo - ángulo), tenemos que $\triangle OXQ \sim \triangle OQ'P$. Por lo que, $\frac{OX}{OQ} = \frac{OQ'}{OP} \implies OX \cdot OP = OQ \cdot OQ' = r^2$, ya que Q y Q' son puntos inversos.

Así, X es el inverso de P , ya que $OX \cdot OP = r^2$. Ahora, por definición de polar, p es la recta \overline{XQ} , por lo tanto si P está en q , entonces Q está en p .

Caso 2: P es un punto ideal y q es la recta ideal.

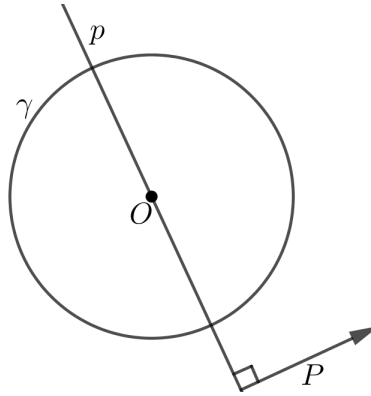


Figura 4.19: Caso 2

Como q es la recta ideal, Q es el centro de la circunferencia de reciprocidad, es decir, $Q = O$. Por lo tanto, p es la recta a través de O perpendicular a cualquier recta que sea paralela a P , como en la Figura 4.19. Así, Q está en la recta p .

Caso 3: P es un punto ideal y q es una recta ordinaria.

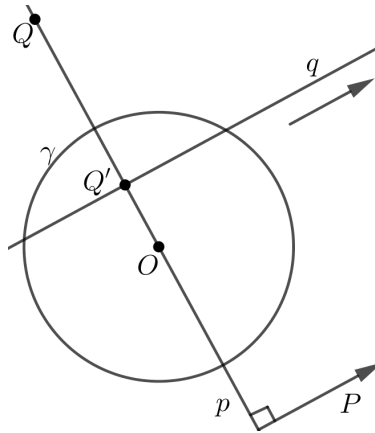


Figura 4.20: Caso 3

Sea Q el polo de q . Como q es una recta ordinaria, podemos dibujar la recta \overline{OQ} tal que \overline{OQ} es perpendicular a q , como en la Figura 4.20.

Por lo tanto, la recta \overline{OQ} es la polar de P , es decir, $p = \overline{OQ}$ y Q está en p . ■

El Teorema 4.10 puede enunciarse de diferentes maneras:

- P está en el polar de Q si y sólo si Q está en el polar de P .
- p pasa por el polo de q si y sólo si q pasa por el polo de p .

Definición 4.4. Un **rango** de puntos es un conjunto de puntos colineales, y un **haz** de rectas es un conjunto de rectas concurrentes.

Corolario 4.1. Las polares de un rango de puntos en una recta m son un haz de rectas concurrentes en M , y viceversa, es decir, los polos de un haz de rectas son un rango de puntos.

Demostración.

Caso 1: Las polares de un rango de puntos en una recta m son un haz de rectas concurrentes en M .

Por Teorema 4.10 sabemos que P está en q si y sólo si Q está en p . Por lo tanto, si m es la recta donde está un rango de puntos, entonces la recta polar m tendrá un polo M , pero como todos los puntos pasan por m entonces todas las polares deberán pasar por el polo de m , es decir, por M , así, las polares de un rango de puntos en una recta m son un haz de rectas concurrentes en M .

Caso 2: Los polos de un haz de rectas son un rango de puntos.

Por Teorema 4.10 sabemos que P está en q si y sólo si Q está en p . Por lo tanto, si las polares de un rango de puntos pasan por un punto M , entonces m , la polar de M pasará por el polo de cada recta cuya polar pasa por M , así, el polo de un haz de rectas es un rango de puntos. (Ver Figura 4.21) ■

Ejemplo 4.2. Dada una circunferencia, con centro O , supongamos que P , Q y R son un rango de puntos que se encuentran en la recta m , y sea M el polo de m . Represente las polares p , q , y r que concurren en M .

Tenemos que:

1. P está en m , por lo que M está en p .
2. Q está en m , por lo que M está en q .
3. R está en m , por lo que M está en r .

Por lo tanto, las polares p , q y r de P , Q y R , respectivamente, son concurrentes en el punto M , es decir, los polares p , q y r forman un haz de rectas a través de M , como en la Figura 4.21.

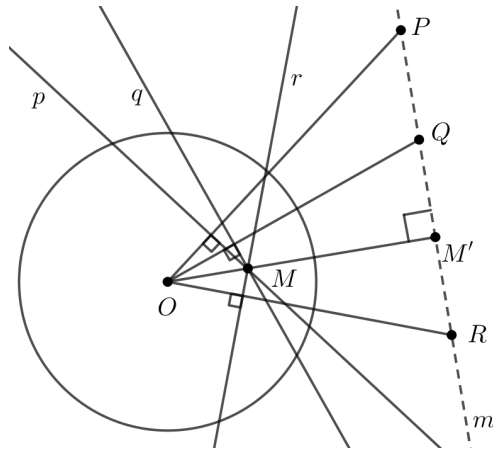


Figura 4.21: Circunferencia con centro O

En la situación extrema donde todos los puntos son puntos ideales, tenemos un rango de puntos en la recta ideal, y sus polares forman un haz de rectas a través del centro de la circunferencia de reciprocidad, como en la Figura 4.22, donde se nos dan los puntos ideales P, Q, R y S .

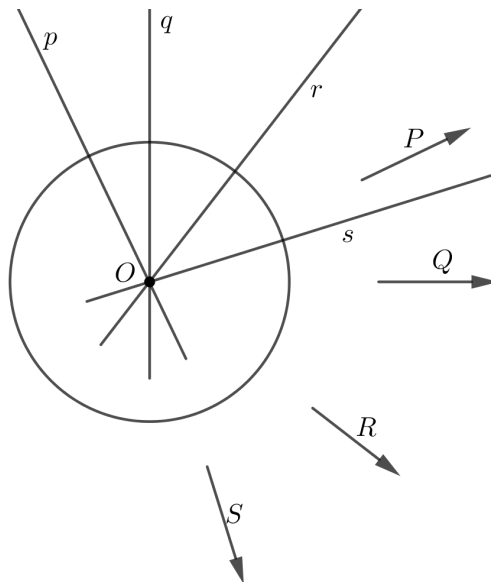


Figura 4.22: Circunferencia de reciprocidad

Teorema 4.11. *Sea γ la circunferencia de reciprocidad. Entonces:*

1. *A está fuera de γ si y sólo si a corta γ .*
2. *A está en γ si y sólo si a es tangente a γ .*
3. *A está dentro de γ si y sólo si a no corta a γ .*

4. El polo de \overline{AB} es $a \cap b$.

5. La polar de $a \cap b$ es \overline{AB} .

Demostración.

1. A está fuera de γ si y sólo si a corta γ .

“ \implies ”

Por Definición 4.2 tenemos que dado un punto ordinario A , la polar de A es la recta a que es perpendicular a \overline{OA} que pasa a través del inverso A' de A , pero por definición de inversión, sabemos que el inverso de un punto exterior es un punto interior, y como a es perpendicular a A' entonces a cortará a la circunferencia γ .

” \impliedby ”

Por Definición 4.2 tenemos que si a es una recta polar, es perpendicular a \overline{OA} y pasa por A' , donde A será el polo de a . Pero si a corta a γ entonces A' deberá estar dentro de γ y su inverso A será un punto exterior, es decir, estará fuera de γ .

2. A está en γ si y sólo si a es tangente a γ .

“ \implies ”

Por definición de inversión, sabemos que el inverso de A es sí mismo, y por definición de polar a que es perpendicular a \overline{OA} y pasa a través del inverso de A , es decir, pasa por A , entonces a será tangente a γ en A .

“ \impliedby ”

Sea a una recta polar, entonces es perpendicular a \overline{OA} y pasa por el inverso de A , donde A es el polo de a , además por hipótesis tenemos que a es tangente a γ , entonces toca a γ en un punto, entonces A será el punto donde a toca a γ .

3. A está dentro de γ si y sólo si a no corta a γ .

“ \implies ”

Por Definición 4.2 tenemos que dado un punto ordinario A , la polar de A es la recta a que es perpendicular a \overline{OA} que pasa a través del inverso A' de A , pero por definición de inversión, sabemos que el inverso de un punto interior es un punto exterior, y como a es perpendicular a \overline{OA} y pasa por A' entonces a no cortará a la circunferencia γ .

“ \Leftarrow ”

Por definición tenemos que si a es una recta polar, es perpendicular a \overline{OA} y pasa por A' , donde A será el polo de a . Pero si a no corta a γ entonces A' deberá estar fuera de γ y su inverso A será un punto interior, es decir, estará dentro de γ .

4. El polo de \overline{AB} es $a \cap b$.

Sea $m = \overline{AB}$ y sea M el polo de m . Como A está en m entonces M está en a y como B está en m entonces M está en b , por Teorema 4.10. Como M está en a y en b , entonces M está en $a \cap b$.

5. La polar de $a \cap b$ es \overline{AB} .

Sea $P = a \cap b$, entonces P está en a y P está en b . Ahora, como P está en a entonces A está en p y como P está en b entonces B está en p , por Teorema 4.10. Por lo tanto $p = \overline{AB}$. ■

4.2.2. Dualidad

Dada una figura \mathcal{F} que consiste en rectas (rectas completas, no solo segmentos) y puntos (que pueden estar o no en las rectas), entonces el dual de \mathcal{F} es la figura que se obtiene al tomar los polos de las rectas de \mathcal{F} y las polares de los puntos de \mathcal{F} . Por ejemplo, dibujemos el dual de la Figura 4.23.

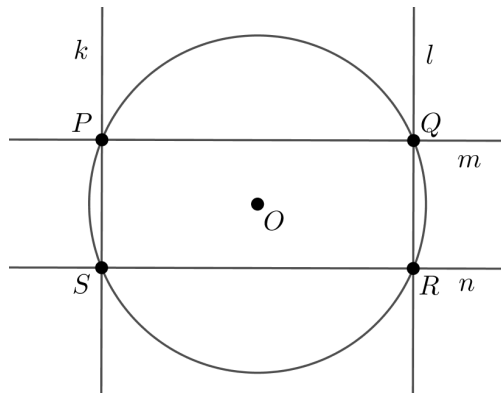


Figura 4.23: Figura \mathcal{F}

Solución:

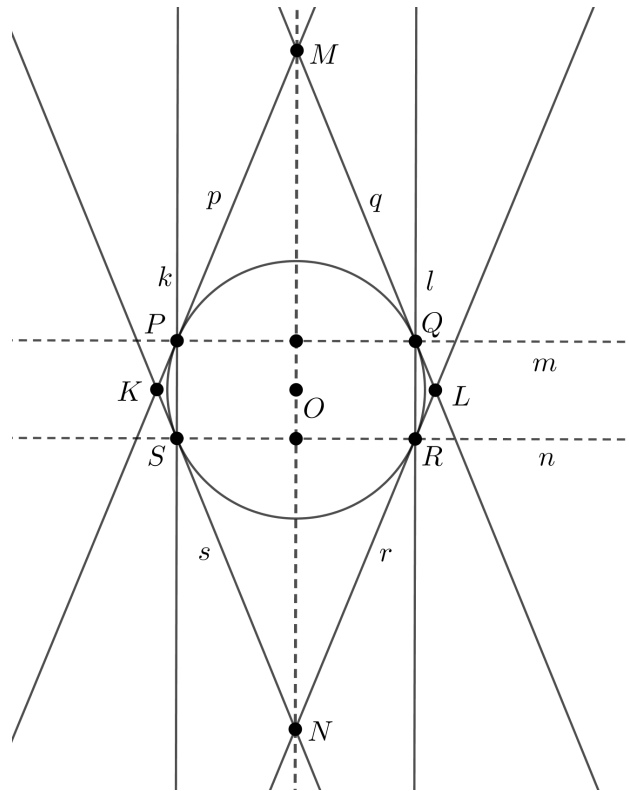


Figura 4.24: Dual de figura \mathcal{F}

La siguiente es una tabla para obtener el dual de la figura o el dual de una declaración.

- Para obtener el dual cualquier palabra o frase que aparece en una columna debe ser reemplazada por la palabra o frase correspondiente en la otra columna.
- El símbolo ω es la circunferencia de reciprocidad.

Punto	Recta
Marcar punto	Pasa a través del punto
ω	ω
Concurrente	Colineal
Polo	Polar
Lugar geométrico	Envoltura
Punto en una curva	Recta tangente a una curva
Inscrito en ω	Circunscrito a ω
Hexágono	Hexágono

Tabla 4.1: Tabla para obtener dual

La traducción de la tabla es una consecuencia directa del Teorema de reciprocidad.

Principio de dualidad

Si una declaración que involucra solo puntos, rectas y su propiedad de incidencia es verdadera, entonces la declaración dual es automáticamente cierta.

Teorema 4.12. Teorema de Pappus. *En todo hexágono (no necesariamente convexo) en el que sus vértices no consecutivos están alineados, las intersecciones de sus lados opuestos son colineales.*

Demostración.

Formemos el hexágono no convexo $ABCDEF$, donde A, C y E son tres puntos colineales y B, D y F son otros tres puntos colineales (Figura 4.25).

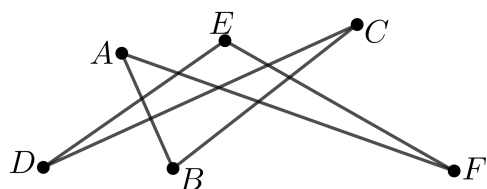


Figura 4.25: Hexágono $ABCDEF$

Tenemos que las rectas \overline{AB} , \overline{CD} y \overline{EF} cortan a las rectas \overline{DE} , \overline{FA} y \overline{BC} , en los puntos P , Q y R respectivamente. Sea UVW el triángulo formado por las intersecciones de las rectas \overline{AB} , \overline{CD} y \overline{EF} . (Ver Figura 4.26)

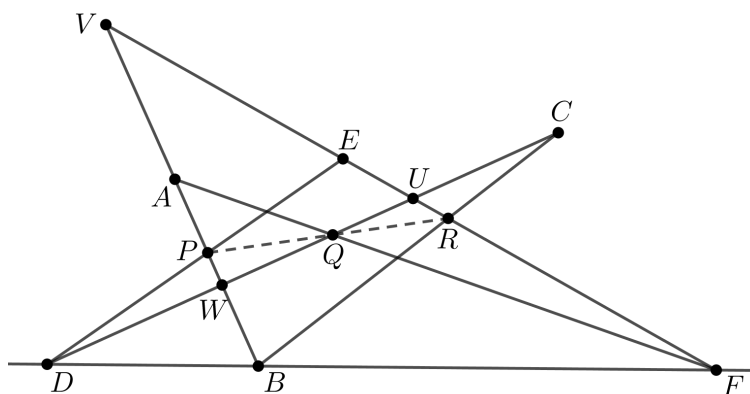


Figura 4.26: Hexágono $ABCDEF$

Ahora, las transversales \overline{DE} , \overline{AF} , \overline{BC} , \overline{AC} y \overline{DF} cortan los lados del $\triangle UVW$. Aplicando el Teorema de Menelao al $\triangle UVW$ con respecto a esas transversales tenemos:

Transversal \overline{DE} :

$$\frac{WD}{DU} \cdot \frac{UE}{EV} \cdot \frac{VP}{PW} = 1 \quad (4.1)$$

Transversal \overline{AF} :

$$\frac{UF}{FV} \cdot \frac{VA}{AW} \cdot \frac{WQ}{QU} = 1 \quad (4.2)$$

Transversal \overline{BC} :

$$\frac{UR}{RV} \cdot \frac{VW}{WB} \cdot \frac{WC}{CU} = 1 \quad (4.3)$$

Transversal \overline{AC} :

$$\frac{UC}{CW} \cdot \frac{VE}{EU} \cdot \frac{WA}{AV} = 1 \quad (4.4)$$

Transversal \overline{DF} :

$$\frac{UD}{DW} \cdot \frac{WB}{BV} \cdot \frac{VF}{FU} = 1 \quad (4.5)$$

Multiplicando ecuaciones 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 y 4.5 tenemos:

$$\frac{WD}{DU} \cdot \frac{UE}{EV} \cdot \frac{VP}{PW} \cdot \frac{UF}{FV} \cdot \frac{VA}{AW} \cdot \frac{WQ}{QU} \cdot \frac{UR}{RV} \cdot \frac{VW}{WB} \cdot \frac{WC}{CU} \cdot \frac{UC}{CW} \cdot \frac{VE}{EU} \cdot \frac{WA}{AV} \cdot \frac{UD}{DW} \cdot \frac{WB}{BV} \cdot \frac{VF}{FU} = 1$$

$$\frac{VP}{PW} \cdot \frac{WQ}{QU} \cdot \frac{UR}{RV} = 1$$

Nuevamente, por Teorema de Menelao P, Q y R son colineales. ■

Algunas configuraciones

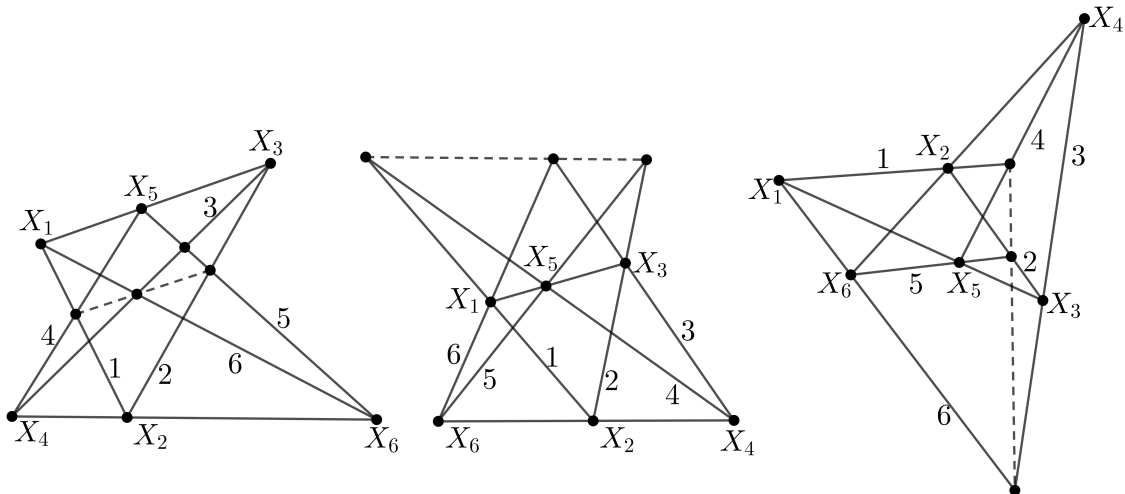


Figura 4.27: Configuraciones del hexágono $X_1X_2X_3X_4X_5X_6$

Para poder observar la colinealidad del Teorema de Pappus sólo se necesita identificar el hexágono a utilizar, pues ya definido éste, los puntos que serán colineales serán las intersecciones de los lados opuestos. Para todo hexágono $X_1X_2X_3X_4X_5X_6$, con X_1, X_3 y X_5 colineales, y X_2, X_4 y X_6 colineales, y lados $1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6$, las intersecciones de $1 - 4$, $2 - 5$ y $3 - 6$ serán colineales. Sin embargo, existen muchas configuraciones a parte de las mostradas en la Figura 4.27, pero estas tres son las que más comúnmente pueden encontrarse en un problema.

Teorema 4.13. Teorema de Pascal. *En todo hexágono concíclico, las intersecciones de los lados opuestos son colineales.*

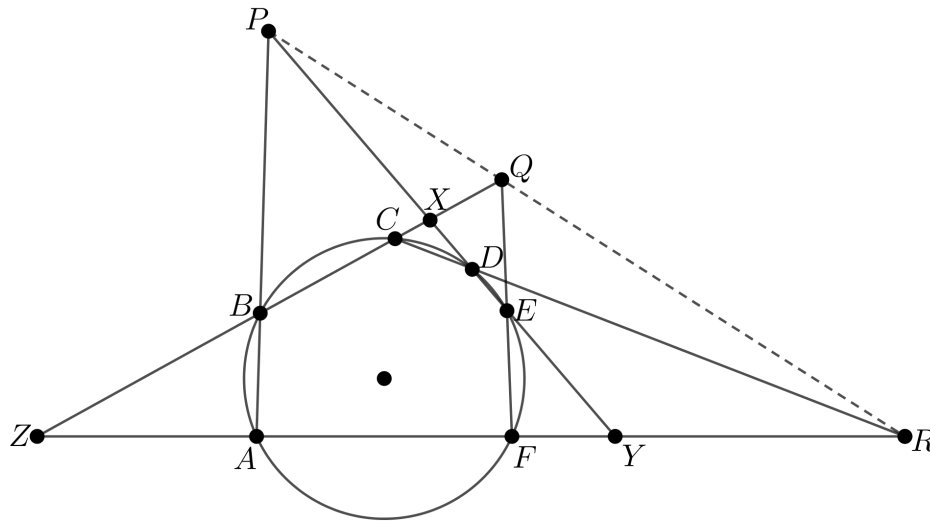


Figura 4.28: Teorema de Pascal

Demostración.

Sea $ABCDEF$ un hexágono concíclico (Ver Figura 4.28). Sea P el punto de corte de las rectas \overline{AB} y \overline{DE} , Q el punto de corte de las rectas \overline{BC} y \overline{EF} y R el punto de corte de las rectas \overline{CD} y \overline{FA} . Habrá que probar que P, Q y R están alineados. Llamemos X el punto de corte de las rectas \overline{BC} y \overline{DE} , Y el punto de corte de las rectas \overline{DE} y \overline{FA} y Z el punto de corte de las rectas \overline{FA} y \overline{BC} . En el $\triangle XYZ$ tenemos las transversales \overline{AP} , \overline{CR} y \overline{FQ} que cortan a los lados \overline{XZ} , \overline{XY} y \overline{YA} respectivamente.

Por Teorema de Menelao:

Transversal \overline{AP} :

$$\frac{XP}{YP} \cdot \frac{BZ}{XB} \cdot \frac{AY}{ZA} = 1 \quad (4.6)$$

Transversal \overline{CR} :

$$\frac{YR}{ZR} \cdot \frac{DX}{YD} \cdot \frac{CZ}{XC} = 1 \quad (4.7)$$

Transversal \overline{FQ} :

$$\frac{ZQ}{XQ} \cdot \frac{EX}{YE} \cdot \frac{FY}{ZF} = 1 \quad (4.8)$$

Multiplicando ecuaciones 4.6, 4.7 y 4.8:

$$\begin{aligned} & \frac{XP}{YP} \cdot \frac{BZ}{XB} \cdot \frac{AY}{ZA} \cdot \frac{YR}{ZR} \cdot \frac{DX}{YD} \cdot \frac{CZ}{XC} \cdot \frac{ZQ}{XQ} \cdot \frac{EX}{YE} \cdot \frac{FY}{ZF} = 1 \\ \Rightarrow & \left(\frac{XP}{YP} \cdot \frac{YR}{ZR} \cdot \frac{ZQ}{XQ} \right) \left(\frac{BZ}{XB} \cdot \frac{AY}{ZA} \cdot \frac{DX}{YD} \cdot \frac{CZ}{XC} \cdot \frac{EX}{YE} \cdot \frac{FY}{ZF} \right) = 1 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Ahora, por potencia de punto:

Para $\triangle XCD$ y $\triangle XBE$:

$$XC \cdot XB = EX \cdot DX \quad (4.10)$$

Para $\triangle ADY$ y $\triangle EFY$:

$$YE \cdot YD = AY \cdot FY \quad (4.11)$$

Para $\triangle CZF$ y $\triangle ABZ$:

$$ZA \cdot ZF = CZ \cdot BZ \quad (4.12)$$

Entonces en ecuación 4.9:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{XP}{YP} \cdot \frac{YR}{ZR} \cdot \frac{ZQ}{XQ} \right) \left(\frac{BZ}{XB} \cdot \frac{AY}{ZA} \cdot \frac{DX}{YD} \cdot \frac{CZ}{XC} \cdot \frac{EX}{YE} \cdot \frac{FY}{ZF} \right) = 1 \\ & \left(\frac{XP}{YP} \cdot \frac{YR}{ZR} \cdot \frac{ZQ}{XQ} \right) \left(\frac{EX \cdot DX}{XC \cdot XB} \cdot \frac{AY \cdot FY}{YE \cdot YD} \cdot \frac{CZ \cdot BZ}{ZA \cdot ZF} \right) = 1 \\ & \left(\frac{XP}{YP} \cdot \frac{YR}{ZR} \cdot \frac{ZQ}{XQ} \right) (1) = 1 \quad ; \text{ Por ecuaciones 4.10, 4.11 y 4.12} \end{aligned}$$

Por lo que: $\left(\frac{XP}{YP} \cdot \frac{YR}{ZR} \cdot \frac{ZQ}{XQ} \right) = 1$.

Nuevamente por Teorema de Menelao, P , Q y R están alineados. ■

En la columna izquierda establecemos el Teorema 4.13 (Teorema de Pascal) utilizando sólo las propiedades de incidencia de puntos y rectas. La columna de la derecha es la traducción obtenida utilizando la tabla 4.1.

Teorema de Pascal	Teorema de Brianchon
Sean A, B, C, D, E y F los vértices de un hexágono inscrito en ω entonces los puntos $\overline{AB} \cap \overline{DE}$, $\overline{BC} \cap \overline{EF}$ y $\overline{CD} \cap \overline{FA}$ son colineales.	Si a, b, c, d, e y f son los lados de un hexágono circunscrito a ω entonces las rectas a través de $a \cap b$ y $d \cap e$, a través de $b \cap c$ y $e \cap f$ y a través de $c \cap d$ y $f \cap a$ son concurrentes.

Tabla 4.2: Dual del Teorema de Pascal

Los puntos $a \cap b$, $b \cap c$, $c \cap d$, $d \cap e$, $e \cap f$ y $f \cap a$, son los vértices del hexágono, en un lenguaje más familiar enunciamos el Teorema de Brianchon.

Teorema 4.14. Teorema de Brianchon. *Las rectas que unen los pares de vértices opuestos de un hexágono circunscrito a una circunferencia (hexágono inscribible) son concurrentes.*

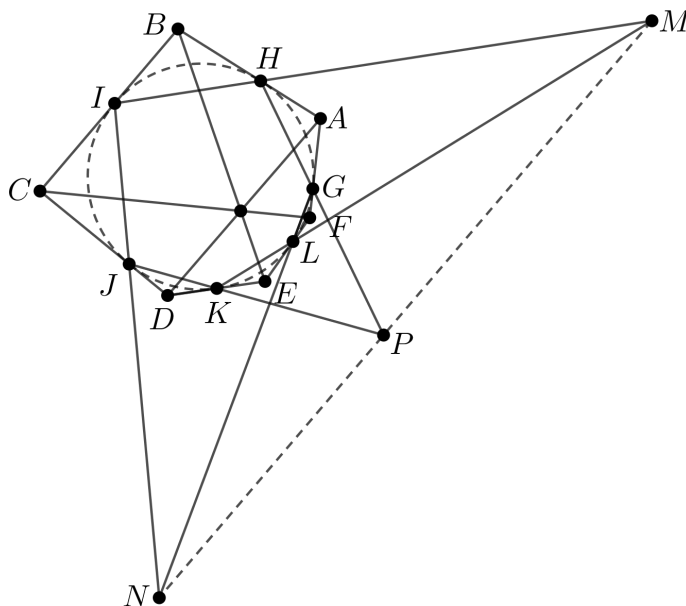


Figura 4.29: Teorema de Brianchon

Demostración.

Sean I, J, K, L, G y H , los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita al hexágono $ABCDEF$ con los lados \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{DE} , \overline{EF} , \overline{FA} y \overline{AB} respectivamente. (Ver Figura 4.29) Sea $M = \overline{IH} \cap \overline{KL}$. La polar de B es \overline{IH} y la polar de E es \overline{KL} , entonces el polo de la recta \overline{BE} es M por Teorema 4.11 4), de igual manera N y P son los polos de \overline{CF} y \overline{AD} respectivamente. Ahora, por Teorema 4.13 (Teorema de Pascal), para el hexágono $HIJKLG$, los puntos M, N y P son colineales, por tanto el polo de \overline{MN} es la intersección de sus polares \overline{BE} , \overline{AD} y \overline{CF} respectivamente. ■

Nota: El punto de concurrencia es llamado el punto de Brianchon del hexágono. Es así como tenemos dos teoremas duales: Teorema de Pascal y Teorema de Brianchon.

4.3. Puntos Conjugados y Rectas

Sea ω una circunferencia fija con centro en O .

Definición 4.5. Dos puntos A y B son **puntos conjugados** con respecto a ω si cada uno está sobre el polar del otro (es decir, si A está sobre b y B está sobre a).

Definición 4.6. Dos rectas a y b son **rectas conjugadas** con respecto a ω si cada una pasa por el polo de la otra.

Definición 4.7. Se dice que un punto o una recta que se conjuga a sí mismo es **auto-conjugado**.

Propiedades de puntos y rectas conjugadas

Las siguientes propiedades en relación con los puntos conjugados y las rectas conjugadas con respecto a una circunferencia ω se ilustran en la siguiente Figura 4.30 y se prueban fácilmente.

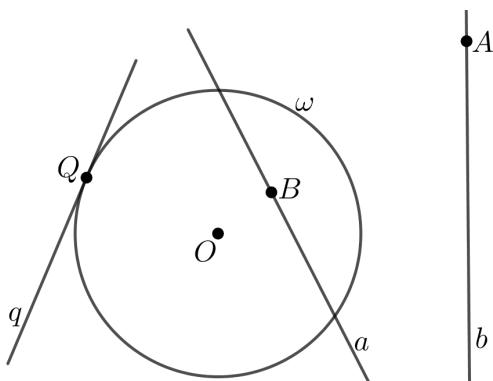


Figura 4.30: Propiedades de puntos conjugados y rectas conjugadas

Donde:

A y B son puntos conjugados.

a y b son rectas conjugadas.

Q y q son auto-conjugados.

1. A y B son puntos conjugados si y sólo si a y b son rectas conjugadas.

Demostración.

“ \implies ”

Sean A y B son puntos conjugados con A el polo de a y B el polo de b , por Definición 4.5, A está sobre b , el polar de B , y B está sobre a , el polar de A . Entonces b pasa por el polo de a y a pasa por el polo de b , por lo que, por Definición 4.6, a y b son rectas conjugadas.

“ \impliedby ”

Sean a y b rectas conjugadas con a la polar de A y b la polar de B . Por Definición 4.6, a pasa por el polo de b y b pasa por el polo de a , es decir, B está sobre el polar de A

que es a y A está sobre el polar de B que es b , por lo que, por Definición 4.5, A y B son puntos conjugados. ■

2. B es conjugado a A si y sólo si B se encuentra en a .

Demostración.

“ \implies ”

Sea a el polar de A . Como B es conjugado a A , B está sobre el polar de A , por Definición 4.5, es decir B está sobre a .

“ \impliedby ”

Sea a el polar de A y sea B que está sobre a , por Definición 4.5, B es conjugado a A . ■

3. b es conjugado a a si y sólo si b pasa a través de A .

Demostración.

“ \implies ”

Sea A el polo de a . Como b es conjugado de a , pasa por el polo de a por Definición 4.6, es decir b pasa por A .

“ \impliedby ”

Sea A el polo de a . Como b pasa a través de A , es decir b pasa por el polo de a , por Definición 4.6, b es conjugado de a . ■

4. El conjunto de rectas conjugadas a a es el haz de rectas a través de A .

Demostración.

Cada recta del conjunto de rectas conjugadas a a pasa por el polo de a y a pasa por el polo de cada recta conjugada, por Definición 4.6. Sea A el polo de a y b_1, b_2, \dots, b_n el conjunto de rectas conjugadas a a , donde B_1, B_2, \dots, B_n son sus polos respectivamente. Como a pasa por el polo de cada recta b_1, b_2, \dots, b_n , a pasa a través de B_1, B_2, \dots, B_n , por Corolario 4.1 las polares de B_1, B_2, \dots, B_n son concurrentes. Asimismo, como A es el punto donde concurren las rectas b_1, b_2, \dots, b_n , ya que éstas pasan por el polo de a , las rectas conjugadas a a es el haz de rectas a través de a . ■

5. El conjunto de puntos conjugados a B es el rango de puntos en b .

Demostración.

Cada punto del conjunto de puntos conjugados a B está sobre la polar de B y B está sobre cada una de las polares de los puntos conjugados, por Definición 4.5. Sea b la polar de B y sean A_1, A_2, \dots, A_n el conjunto de puntos conjugados a B , donde a_1, a_2, \dots, a_n son sus respectivas polares. Entonces cada punto A_1, A_2, \dots, A_n está sobre b , por lo que el conjunto de puntos conjugados a B es el rango de puntos en b . ■

6. Las siguientes son equivalentes:

a) A es auto-conjugado.

- b) A está en ω .
- c) a es tangente a ω .

Demostración.

“a) \implies b)”

Debemos probar que si A es auto-conjugado entonces A está en ω . Como A es auto-conjugado, por Definición 4.7 A está sobre la polar de A , es decir A está sobre a , donde a es la polar de A . Ahora por Definición 4.2, sea O el centro de ω y supongamos que A' es el inverso de A respecto a ω con $A \neq O$, entonces la recta a pasa por A' y es perpendicular a \overline{OA} que es la polar de A , pero A está sobre la polar de A , entonces A está sobre la misma recta que pasa por A' , pero como $a \perp \overline{OA}$, A debe ser el mismo punto A' y si el inverso de A es el mismo punto, por definición de inversión, A es punto fijo de transformación, es decir que A debe pertenecer a ω .

“b) \implies c)”

Probaremos que si A está en ω entonces a es tangente a ω . Si A está en ω , su polar a debe ser perpendicular a \overline{OA} donde O es el centro de ω , por Teorema 1.7, por lo que la polar a debe ser una recta tangente a ω .

“c) \implies a)”

Debemos probar que si a es tangente a ω entonces A es auto-conjugado. Sea O el centro de ω y sea a la polar de A , por hipótesis a es tangente a ω y por Definición 4.2, a debe ser perpendicular a \overline{OA} , ahora por Teorema 1.7, A debe ser el punto de tangencia a ω , es decir A debe estar en la polar a , por lo que A es conjugado a A , por lo tanto A es auto-conjugado. ■

Ejemplo 4.3. *Cada punto en una recta tiene un punto conjugado en esa recta.*

Solución.

Sea A en l y sea $B = a \cap l$ (Ver Figura 4.31). Si l y a son paralelas, entonces B es un punto ideal. Si l y a no son paralelas, entonces B está en a y por Teorema 4.10, A está en b , así por el regreso de la Propiedad 2 de puntos y rectas conjugados, entonces A es conjugado a B .

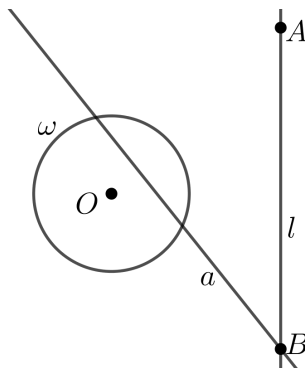


Figura 4.31: Ejemplo 4.3

Ejemplo 4.4. Cada recta a a través de un punto A tiene una recta conjugada a través de A .

Solución.

Este es el dual del ejemplo 4.3. Sea b una recta a través de A , por Teorema 4.10, B está en a que es la polar de A , ahora el polo de la recta \overline{BA} es $a \cap b$ por Teorema 4.11 4), es decir el polo de \overline{BA} está en b y el polo de b está en \overline{BA} es decir \overline{BA} es una recta conjugada a b .

Ejemplo 4.5. De dos puntos conjugados distintos en una recta que corta la circunferencia de reciprocidad, uno está dentro o sobre la circunferencia y el otro punto está fuera de la circunferencia.

Solución.

Sea ω la circunferencia de reciprocidad y supongamos que A y B son puntos conjugados distintos en la recta l que corta a ω .

Si A está dentro de ω , entonces a no toca a ω y dado que B está en a por ser conjugado con A , B debe estar fuera de ω .

Si A está en ω , entonces a es tangente a ω en A por propiedad 6 de puntos y rectas conjugadas, y ya que B está en a y es diferente de A , entonces B debe estar fuera de ω .

Si A está fuera de ω , entonces a corta a ω . Supongamos por contradicción que B también está fuera de ω , y sea L el polo de l , dado que se nos dice que l corta a ω , L está fuera de ω , la situación es como se muestra en cualquiera de los dos diagramas de la Figura 4.32.

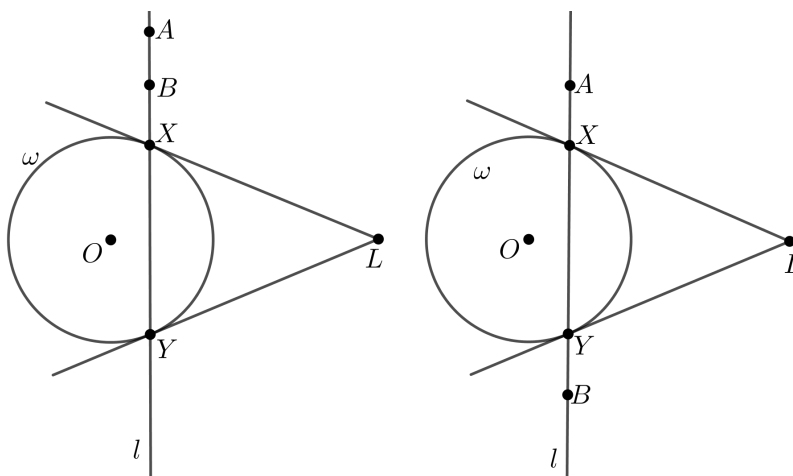


Figura 4.32: A fuera de ω

Ahora, como A está en l por el regreso de la propiedad 2 de puntos y rectas conjugadas, A es conjugado a L , entonces por Definición 4.5, L está en a , además dado que B está conjugado

con A, B está en a , juntos implican que $a = \overline{LB}$. Sean X e Y los puntos de tangencia de L a ω . Entonces B está fuera del segmento \overline{XY} y \overline{LB} no toca a ω . Sin embargo esto contradice el hecho de que b corta a ω . Por lo tanto B está sobre o dentro de ω .

El siguiente ejemplo es el dual del Ejemplo 4.5.

Ejemplo 4.6. *De dos rectas conjugadas distintas que se intersecan fuera de una circunferencia ω , una corta la circunferencia, y la otra no toca la circunferencia.*

Solución.

Sea ω la circunferencia de reciprocidad y supongamos que a y b son rectas conjugadas distintas que se intersecan en L un punto fuera de ω .

Sea a que toca a ω en dos puntos y sea A su polo, el cual estará fuera de ω . Como a y b son rectas conjugadas, por Definición 4.6, b pasa por el polo de a , es decir b no toca a ω .

Sea a que no toca a ω , como a y b son rectas conjugadas, a pasa por el polo de b , sea éste B . Es decir, B está fuera de ω , por lo que b debe cortar a ω en dos puntos.

4.3.1. Triángulos Autopolares

Definición 4.8. *Un triángulo es **autopolar**, si cada vértice es el polo del lado opuesto. (Ver Figura 4.33)*

Aquí, los lados son considerados como rectas.

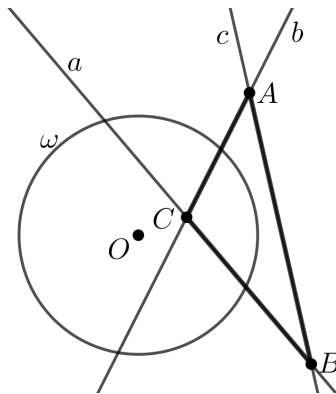


Figura 4.33: Triángulo autopolar ABC

Donde a, b, c son polares de A, B, C respectivamente.

Observación. Para un triángulo autopolar:

- Cualesquiera dos vértices son puntos conjugados.
- Cualesquiera dos lados son rectas conjugadas.
- Dados dos puntos conjugados, $A \neq B$, son los vértices de algún triángulo autopolar, y el tercer vértice es $C = a \cap b$, es decir, $c = \overline{AB}$.

Para enunciar el siguiente ejemplo daremos la definición de triángulo degenerado.

Definición 4.9. Un *triángulo degenerado* tiene sus vértices colineales o coincidentes.

Teorema 4.15. Todo triángulo autopolar no degenerado es obtuso, con el ángulo obtuso dentro de la circunferencia de reciprocidad ω .

Demostración.

Sea el $\triangle ABC$ autopolar no degenerado. Probemos que exactamente un vértice debe estar dentro de ω .

Supongamos que un vértice (digamos A), está dentro de ω . Entonces a no toca a ω , con a la polar de A , pero los otros dos vértices están en a , entonces B y C están fuera de ω . Esto muestra que hay como máximo un vértice dentro de ω .

Es imposible que A esté en ω , porque B y C tendrían que estar en a , en cuyo caso A , B , y C estarían en a , es decir $\triangle ABC$ estaría degenerado, por Definición 4.9.

Supongamos A , B y C están afuera de ω , entonces a corta a ω , B y C están en a , por Ejemplo 4.5, uno de B o C está dentro de ω y el otro está afuera. Esto prueba que exactamente un vértice está dentro de ω .

Supongamos que A está dentro de ω , queda por demostrar que $\angle BAC$ es obtuso.

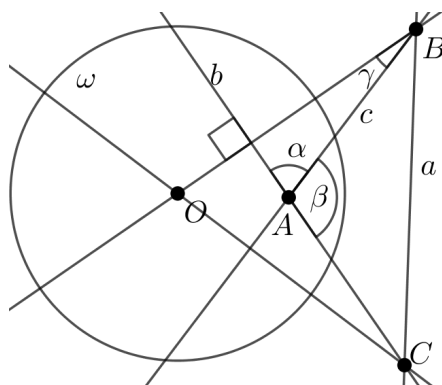


Figura 4.34: Triángulo autopolar ABC

En la Figura 4.34, A está en b , unamos \overline{OB} . Entonces b es la recta a través de A perpendicular a \overline{OB} . Teniendo en cuenta que C está en b y B está en c , ya que C y B son conjugados por ser vértices de un triángulo autopolar. También A está en c , unamos \overline{OC} . Entonces c es la recta a través de A perpendicular a \overline{OC} . Refiriéndose a la Figura 4.34, para los ángulos α , β y γ , tenemos:

$$\beta = 180 - \alpha = 180 - (90 - \gamma) = 90 + \gamma$$

Probando que β es obtuso. ■

Teorema 4.16. *Cada triángulo obtuso ABC es autopolar con respecto a una circunferencia única ω , que se llama la **circunferencia polar** para el triángulo.*

Demostración.

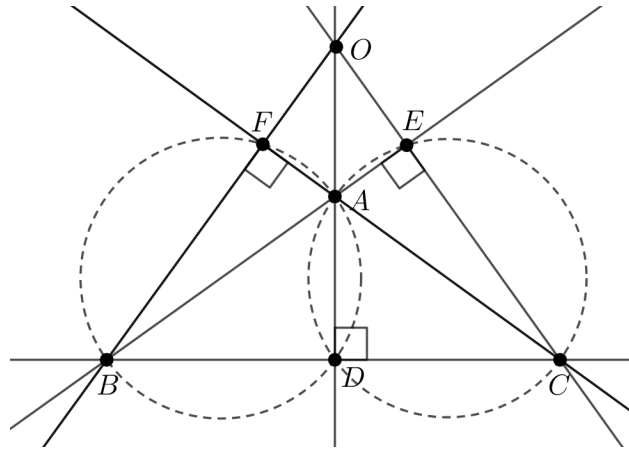


Figura 4.35: Triángulo ABC

En la Figura 4.35, sea O el ortocentro del $\triangle ABC$. Refiriéndonos a la Figura 4.35:

$$\angle AEC = 90^\circ = \angle ADC$$

Por lo que el cuadrilátero $AECD$ es concíclico y por potencia de punto O con respecto al circuncírculo del cuadrilátero $AECD$, tenemos:

$$OA \cdot OD = OE \cdot OC$$

Similarmente, como $\angle AFB = 90^\circ = \angle ADB$ el cuadrilátero $ADBF$ es concíclico y por potencia de punto O con respecto al circuncírculo de $ADBF$, tenemos:

$$OA \cdot OD = OF \cdot OB$$

Sea $OA \cdot OD = k^2$. Entonces $OE \cdot OC = k^2$ y $OF \cdot OB = k^2$. Ahora, sea ω una circunferencia con centro O y radio k . Además, $OA \cdot OD = k^2$, es decir $D = A'$, así $\overline{BC} = a$, (con respecto a ω), $OE \cdot OC = k^2$ es decir $E = C'$, así $\overline{AB} = c$ y $OF \cdot OB = k^2$ es decir $F = B'$ así $\overline{AC} = b$. Entonces ω es la circunferencia polar para el $\triangle ABC$ y cada vértice es el polo del lado opuesto, el triángulo obtuso ABC es autopolar con respecto a ω . ■

4.4. Cónicas

Definición 4.10. Un **cuadrángulo completo** consta de cuatro puntos, A, B, C y D , de los cuales tres son no colineales y seis uniones o rectas determinadas por estos puntos. (Ver Figura 4.36 a))

Definición 4.11. Un **cuadrilátero completo** consta de cuatro rectas, a, b, c y d , de las cuales tres no son concurrentes, y seis puntos determinados por estas rectas. (Ver Figura 4.36 b))

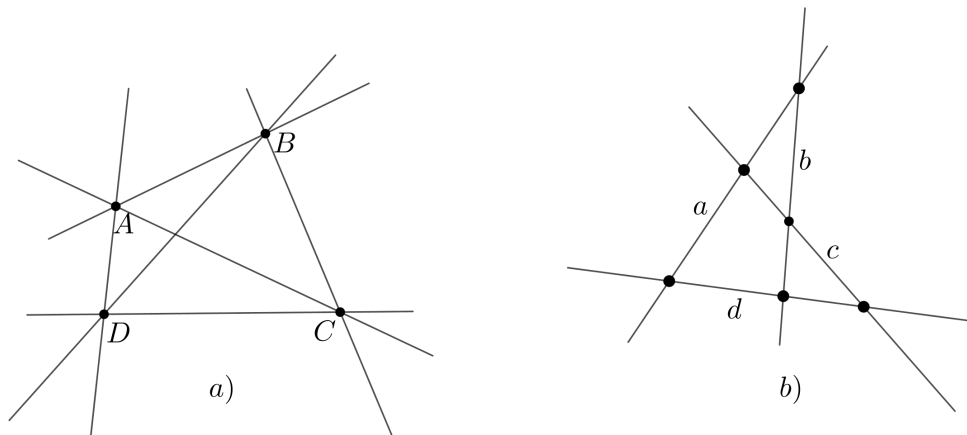


Figura 4.36: Cuadrángulo y Cuadrilátero Completo

Ejemplo 4.7. Demuestre que el recíproco del cuadrángulo completo es un cuadrilátero completo, y viceversa.

Podemos pensar en un polígono de n lados como compuesto por n puntos y las rectas sucesivas entre estos puntos, o, en el aspecto opuesto, como n rectas y los puntos sucesivos de intersecciones de estas rectas. En general, el dual o recíproco de un polígono de n lados es otro polígono de n lados del aspecto opuesto.

Recíprocos de Circunferencias

El problema que nos preocupa aquí es este: ¿cuál es la imagen de una circunferencia bajo reciprocidad?

Podemos ver una circunferencia como un lugar geométrico de puntos o como una envoltura de rectas, como en las de la Figura 4.37, y de hecho, cada curva suave puede verse en estos dos aspectos.

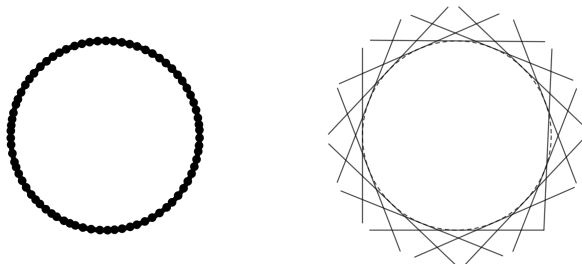


Figura 4.37: Lugar geométrico de puntos o envoltura de rectas

Para encontrar el recíproco de la circunferencia, visualice la circunferencia en un aspecto y vea qué curva genera el aspecto recíproco. Usaremos ω en todas partes para denotar la circunferencia recíproca.

Casos Especiales

El recíproco de la circunferencia recíproca ω es ω misma.

Si la circunferencia α es concéntrica con ω (Figura 4.38), como la directriz de la cónica recíproca de α será la polar de A , pero como α y ω son concéntricas, el inverso de A será un punto al infinito, es decir, la directriz de la cónica será recta del infinito. Además si la excentricidad $\epsilon = \frac{OA}{s}$ entonces como α y ω son concéntricas $OA = 0$ por lo que $\epsilon = \frac{OA}{s} = \frac{0}{s} = 0$. Es decir el recíproco de α será una circunferencia también concéntrica.

Sea s el radio de α y r el radio de ω . Como P y P' son puntos inversos con respecto a ω

$$\begin{aligned} OP \cdot OP' &= r^2 \\ OP \cdot s &= r^2 \quad ; OP' = s \\ OP &= \frac{r^2}{s} \end{aligned}$$

Entonces el radio de la circunferencia β es $\frac{r^2}{s}$.

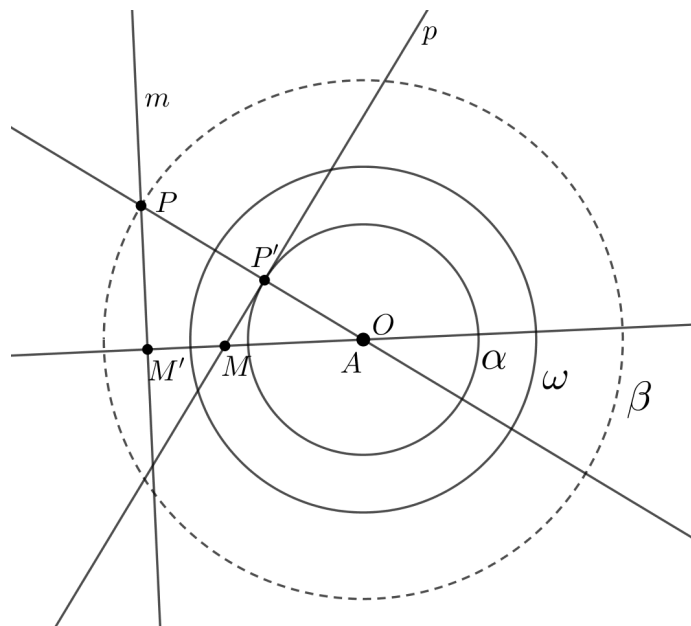


Figura 4.38: Circunferencia β recíproco de α

Definición de foco-directriz de una cónica

Sea l una recta fija, sea F un punto fijo que no está en la recta, y sea $d(X, l)$ la distancia perpendicular desde el punto X a la recta l . Si ϵ es una constante positiva fija, entonces el conjunto de todos los puntos X para los cuales

$$\frac{FX}{d(X, l)} = \epsilon$$

es una sección cónica. El punto F es el foco de la cónica y la recta l es la directriz de la cónica. La constante positiva ϵ es llamada excentricidad de la cónica, y:

- Si $\epsilon = 1$, la cónica es una parábola.
- Si $0 < \epsilon < 1$, la cónica es una elipse.
- Si $\epsilon > 1$, la cónica es una hipérbola.
- Si $\epsilon = 0$, la cónica es una circunferencia.

Teorema 4.17. *Sea α y ω dos circunferencias no concéntricas con centros A y O , respectivamente. El recíproco de α con respecto a ω es*

(1) *Una elipse, si O está dentro de α ;*

- (2) Una parábola, si O está en α ;
 (3) Una hipérbola, si O está fuera de α .

En cada caso, el foco de la sección cónica es O y la directriz es la polar de A . Si el radio de α es s , la excentricidad ϵ de la cónica está dado por $\epsilon = \frac{OA}{s}$.

Demostración.

- (1) Sea α y ω dos circunferencias no concéntricas con centro en A y O respectivamente. Sea a la polar de A la cual será la directriz de la cónica y O el foco de la cónica. Por hipótesis O está dentro de la región acotada por α .

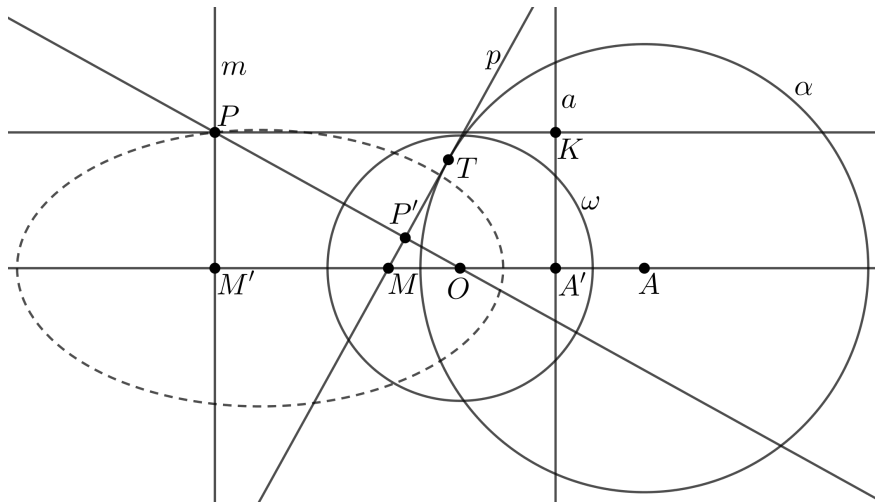


Figura 4.39: Recíproco de α

Como muestra la Figura 4.39, sea p tangente a α , sea P su polo y sea P' el inverso de P . Sea $M = p \cap \overline{OA}$, sea M' el inverso de M y sea m la polar de M . Como M está en p , entonces P está en m . Como $m \perp \overline{MO}$ y $a \perp \overline{OA}$, $m \parallel a$ entonces $PK = M'A' = M'O + OA'$.

Con respecto a ω , P y P' son puntos inversos así como M y M' , A y A' , por lo que, respectivamente tenemos:

$$\begin{aligned} PO \cdot P'O &= r^2 \\ PO \cdot P'O &= r \cdot r \\ \frac{P'O}{r} &= \frac{r}{PO} \end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned} MO \cdot M'O &= r^2 \\ MO \cdot M'O &= r \cdot r \\ \frac{M'O}{r} &= \frac{r}{MO} \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
AO \cdot A'O &= r^2 \\
AO \cdot A'O &= r \cdot r \\
\frac{A'O}{r} &= \frac{r}{AO}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Además, como $\angle P'MO = \angle TMA$, $\angle MP'O = 90^\circ$ ya que $p \perp \overline{PO}$ y $\angle MTA = 90^\circ$ ya que por Teorema 1.7 el radio \overline{TA} es perpendicular a la tangente en T , por lo que $\angle MP'O = \angle MTA$, entonces por Criterio A-A de semejanza de triángulos $\triangle MP'O \sim \triangle MTA$ y tenemos:

$$\frac{P'O}{MO} = \frac{TA}{MA} \tag{4.16}$$

Probaremos que $\frac{PK}{OP} = \frac{1}{\epsilon}$. Donde $\epsilon = \frac{OA}{s}$, $0 < \epsilon < 1$.

$$\begin{aligned}
\frac{PK}{PO} &= \frac{M'O + OA'}{PO} && ; \text{Ya que } PK = M'O + OA' \\
&= \frac{r}{r} \left(\frac{M'O + OA'}{PO} \right) \\
&= \frac{r}{PO} \left(\frac{M'O + OA'}{r} \right) \\
&= \frac{r}{PO} \left(\frac{M'O}{r} + \frac{OA'}{r} \right) \\
&= \frac{P'O}{r} \left(\frac{r}{MO} + \frac{r}{OA} \right) && ; \text{Por ecuaciones 4.13, 4.14, 4.15} \\
&= P'O \left(\frac{r}{rMO} + \frac{r}{rOA} \right) \\
&= P'O \left(\frac{1}{MO} + \frac{1}{OA} \right) \\
&= P'O \left(\frac{OA + MO}{MO \cdot OA} \right) \\
&= P'O \left(\frac{MA}{MO \cdot OA} \right) && ; MO + OA = MA \\
&= \frac{P'O}{MO} \cdot \frac{MA}{OA} \\
&= \frac{TA}{MA} \cdot \frac{MA}{OA} && ; \text{Por ecuación 4.16} \\
&= \frac{TA}{OA} \\
&= \frac{s}{OA} && ; TA = s \\
&= \frac{1}{\frac{OA}{s}} \\
&= \frac{1}{\epsilon} && ; \epsilon = \frac{OA}{s}
\end{aligned}$$

Ahora, como $OA < s$ entonces $0 < \epsilon < 1$, por lo que la cónica recíproca de α con respecto a ω es una elipse. ■

- (2) Sea α y ω dos circunferencias no concéntricas con centro en A y O respectivamente. Sea a la polar de A la cual será la directriz de la cónica y O el foco de la cónica. Por hipótesis O está en α .

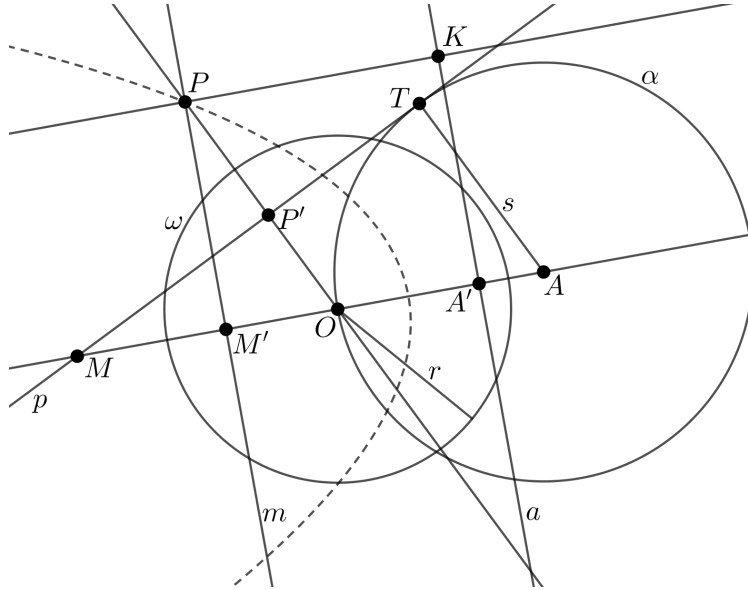


Figura 4.40: Recíproco de α

Como muestra la Figura 4.40, sea p tangente a α , sea P su polo y sea P' el inverso de P . Sea $M = p \cap \overline{OA}$, sea M' el inverso de M y sea m la polar de M . Como M está en p , entonces P está en m .

Como $m \perp \overline{MO}$ y $a \perp \overline{OA}$, $m \parallel a$ entonces $PK = M'A' = M'O + OA'$.

Con respecto a ω , P y P' son puntos inversos así como M y M' , A y A' , por lo que, respectivamente tenemos:

$$\begin{aligned} PO \cdot P'O &= r^2 \\ PO \cdot P'O &= r \cdot r \\ \frac{P'O}{r} &= \frac{r}{PO} \end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned} MO \cdot M'O &= r^2 \\ MO \cdot M'O &= r \cdot r \\ \frac{M'O}{r} &= \frac{r}{MO} \end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned} AO \cdot A'O &= r^2 \\ AO \cdot A'O &= r \cdot r \\ \frac{A'O}{r} &= \frac{r}{AO} \end{aligned} \tag{4.19}$$

Además, como $\angle P'MO = \angle TMA$, $\angle MP'O = 90^\circ$ ya que $p \perp \overline{PO}$ y $\angle MTA = 90^\circ$ ya que por Teorema 1.7 el radio \overline{TA} es perpendicular a la tangente en T , por lo que $\angle MP'O = \angle MTA$, entonces por Criterio A-A de semejanza de triángulos $\triangle MP'O \sim \triangle MTA$ y tenemos:

$$\frac{P'O}{MO} = \frac{TA}{MA} \quad (4.20)$$

Probaremos que $\frac{PK}{PO} = \frac{1}{\epsilon}$. Donde $\epsilon = 1$

$$\begin{aligned} \frac{PK}{PO} &= \frac{M'O + OA'}{PO} && ; \text{Ya que } PK = M'O + OA' \\ &= \frac{r}{r} \left(\frac{M'O + OA'}{PO} \right) \\ &= \frac{r}{PO} \left(\frac{M'O + OA'}{r} \right) \\ &= \frac{r}{PO} \left(\frac{M'O}{r} + \frac{OA'}{r} \right) \\ &= \frac{P'O}{r} \left(\frac{r}{MO} + \frac{r}{OA} \right) && ; \text{Por ecuaciones 4.17, 4.18, 4.19} \\ &= P'O \left(\frac{r}{rMO} + \frac{r}{rOA} \right) \\ &= P'O \left(\frac{1}{MO} + \frac{1}{OA} \right) \\ &= P'O \left(\frac{OA + MO}{MO \cdot OA} \right) \\ &= P'O \left(\frac{MA}{MO \cdot OA} \right) && ; MO + OA = MA \\ &= \frac{P'O}{MO} \cdot \frac{MA}{OA} \\ &= \frac{TA}{MA} \cdot \frac{MA}{OA} && ; \text{Por ecuación 4.20} \\ &= \frac{TA}{OA} \\ &= \frac{s}{s} && ; TA = s, OA = s \\ &= 1 \\ &= \frac{1}{1} \\ &= \frac{1}{\epsilon} && ; \epsilon = 1 \end{aligned}$$

Por lo que el recíproco de α con respecto a ω es una parábola. ■

- (3) Sea α y ω dos circunferencias no concéntricas con centro en A y O respectivamente. Sea a la polar de A la cual será la directriz de la cónica y O el foco de la cónica. Por hipótesis O está fuera de α .

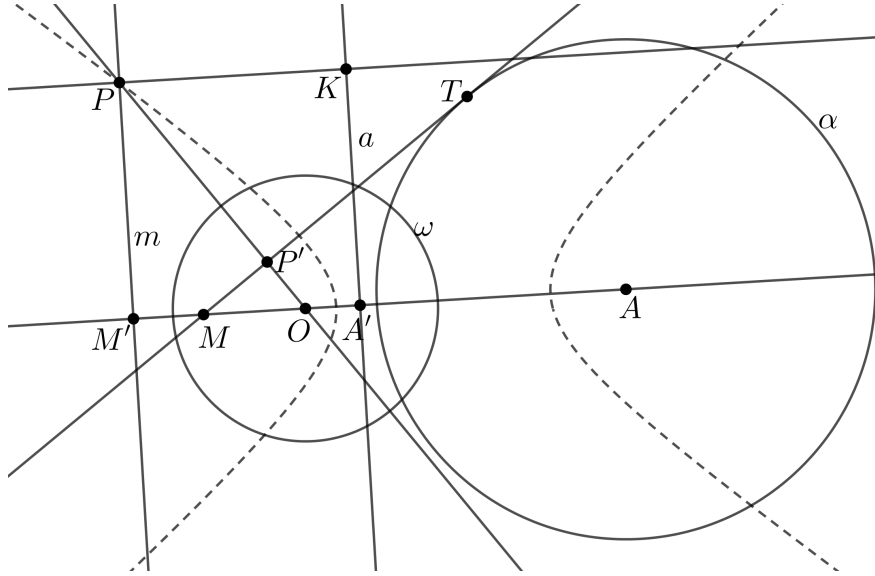


Figura 4.41: Recíproco de α

Como muestra la Figura 4.41, sea p tangente a α , sea P su polo y sea P' el inverso de P . Sea $M = p \cap \overline{OA}$, sea M' el inverso de M y sea m la polar de M . Como M está en p , entonces P está en m .

Como $m \perp \overline{MO}$ y $a \perp \overline{OA}$, $m \parallel a$ entonces $PK = M'A' = M'O + OA'$.

Con respecto a ω , P y P' son puntos inversos así como M y M' , A y A' , por lo que, respectivamente tenemos:

$$\begin{aligned} PO \cdot P'O &= r^2 \\ PO \cdot P'O &= r \cdot r \\ \frac{P'O}{r} &= \frac{r}{PO} \end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned} MO \cdot M'O &= r^2 \\ MO \cdot M'O &= r \cdot r \\ \frac{M'O}{r} &= \frac{r}{MO} \end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned} AO \cdot A'O &= r^2 \\ AO \cdot A'O &= r \cdot r \\ \frac{A'O}{r} &= \frac{r}{AO} \end{aligned} \tag{4.23}$$

Además, como $\angle P'MO = \angle TMA$, $\angle MP'O = 90^\circ$ ya que $p \perp \overline{PO}$ y $\angle MTA = 90^\circ$ ya que por Teorema 1.7 el radio \overline{TA} es perpendicular a la tangente en T , por lo que $\angle MP'O = \angle MTA$, entonces por Criterio A-A de semejanza de triángulos $\triangle MP'O \sim \triangle MTA$ y tenemos:

$$\frac{P'O}{MO} = \frac{TA}{MA} \tag{4.24}$$

Probaremos que $\frac{PK}{PO} = \frac{1}{\epsilon}$. Donde $\epsilon > 1$

$$\begin{aligned}
 \frac{PK}{PO} &= \frac{M'O + OA'}{PO} && ; \text{Ya que } PK = M'O + OA' \\
 &= \frac{r}{r} \left(\frac{M'O + OA'}{PO} \right) \\
 &= \frac{r}{PO} \left(\frac{M'O + OA'}{r} \right) \\
 &= \frac{r}{PO} \left(\frac{M'O}{r} + \frac{OA'}{r} \right) \\
 &= \frac{P'O}{r} \left(\frac{r}{MO} + \frac{r}{OA} \right) && ; \text{Por ecuaciones 4.21, 4.22, 4.23} \\
 &= P'O \left(\frac{r}{rMO} + \frac{r}{rOA} \right) \\
 &= P'O \left(\frac{1}{MO} + \frac{1}{OA} \right) \\
 &= P'O \left(\frac{OA + MO}{MO \cdot OA} \right) \\
 &= P'O \left(\frac{MA}{MO \cdot OA} \right) && ; MO + OA = MA \\
 &= \frac{P'O}{MO} \cdot \frac{MA}{OA} \\
 &= \frac{TA}{MA} \cdot \frac{MA}{OA} && ; \text{Por ecuación 4.24} \\
 &= \frac{TA}{OA} \\
 &= \frac{s}{OA} && ; TA = s \\
 &= \frac{1}{\frac{OA}{s}} \\
 &= \frac{1}{\epsilon}
 \end{aligned}$$

Ahora como $OA > s$ entonces $\epsilon > 1$, por lo que el recíproco de α con respecto a ω es una hipérbola. ■

4.4.1. Teorema del Hexágono Místico de Pascal

Este teorema es una generalización del Teorema del hexágono de Pappus, y además los teoremas de Pascal y Brianchon ocupan una posición clave en el estudio de las cónicas desde el punto de vista proyectivo. Forman, también, el primer ejemplo claro de un par de teoremas duales importantes.

Dos teoremas se llaman duales si se transforma uno en el otro cuando todos los elementos y todas las operaciones se sustituyen por sus duales correspondientes. En la geometría plana el punto y la línea recta se denominan elementos duales. Dibujar una recta a través de un punto y marcar un punto en una recta son operaciones duales. Por lo que enunciamos ambos teoremas.

Teorema 4.18. Teorema del hexágono místico de Pascal válido para cónicas. Si un hexágono arbitrario $ABCDEF$ se encuentra inscrito en alguna sección cónica, y se extienden los pares de lados opuestos hasta que se cruzan, los tres puntos P, Q, R en los que se intersectan se encontrarán ubicados sobre una línea recta, denominada la recta de Pascal de esta configuración.

Demostración.

Sean los vértices del hexágono inscrito en la cónica A, B, C, D, E y F , sea α y ω dos circunferencias, tal que la cónica es el recíproco de α con respecto a ω , entonces α es el recíproco de la cónica.

Los puntos A, B, C, D, E y F en la cónica tienen las polares a, b, c, d y f respectivamente, que son tangentes a la circunferencia α , como observamos en la Figura 4.42.

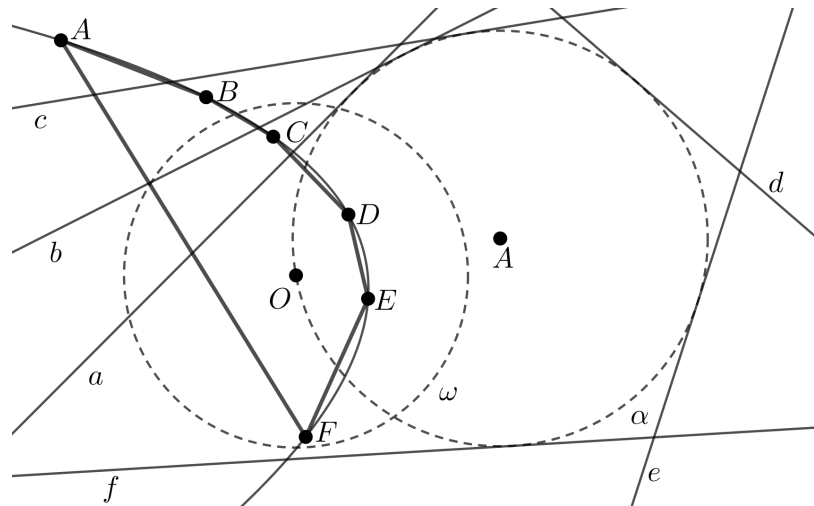


Figura 4.42: Hexágono $ABCDEF$

En la circunferencia α tenemos el hexágono circunscrito $GHIJKL$ donde $G = a \cap b$, $H = b \cap c$, $I = c \cap d$, $J = d \cap e$, $K = e \cap f$ y $L = f \cap a$, por Teorema de Brianchon, las uniones de G y J , H y K , I y L son concurrentes (punto T), como observamos en la Figura 4.43.

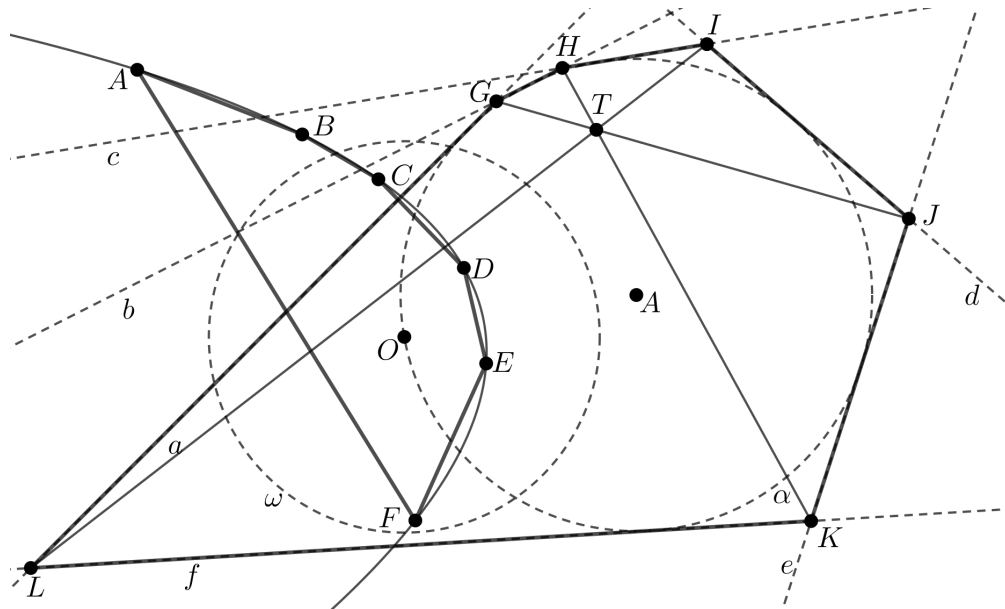


Figura 4.43: Punto de concurrencia T

Ahora tomando los recíprocos, los puntos $P = \overline{AB} \cap \overline{DE}$, $Q = \overline{BC} \cap \overline{EF}$ y $R = \overline{CD} \cap \overline{AF}$ son colineales. (Ver Figura 4.44). ■

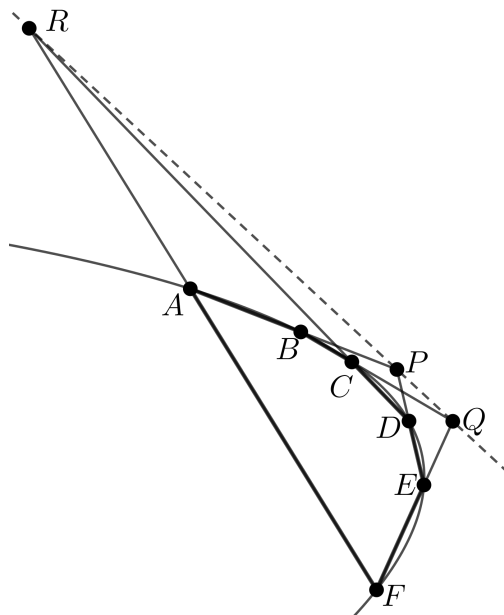


Figura 4.44: Recta \overline{RQ}

Teorema 4.19. Teorema de Brianchon válido para cónicas. Sea $ABCDEF$ un hexágono formado por seis rectas tangentes de una sección cónica. Entonces, los segmentos \overline{AD} , \overline{BE} , \overline{CF} se intersecan en un solo punto P .

Demostración.

Sean A, B, C, D, E y F los vértices del hexágono formado por las seis rectas tangentes a la cónica. Sean α y ω dos circunferencias no concéntricas, tal que la cónica es el recíproco de α con respecto a ω . Sean I, J, K, L, G y H los puntos de tangencia de la cónica inscrita al hexágono con lados $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EF}$ y \overline{FA} (Figura 4.45).

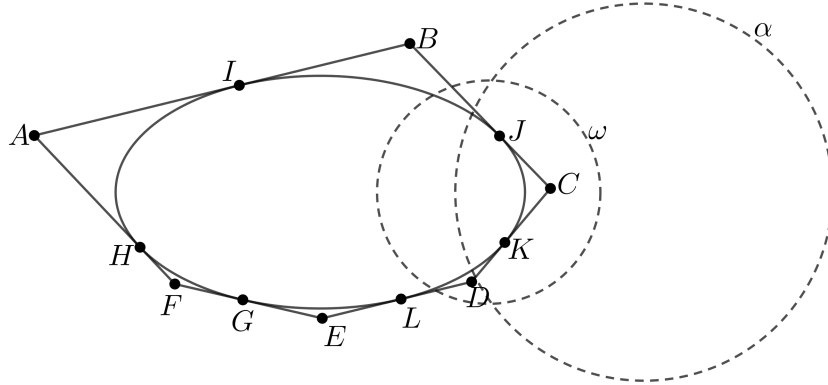


Figura 4.45: Hexágono $ABCDEF$

Por Teorema del Hexágono Místico de Pascal para el hexágono $IJKLGH$ inscrito a la cónica $M = \overline{IJ} \cap \overline{GL}$, $Q = \overline{JK} \cap \overline{GH}$ y $R = \overline{KL} \cap \overline{HI}$ están alineados (Figura 4.46)

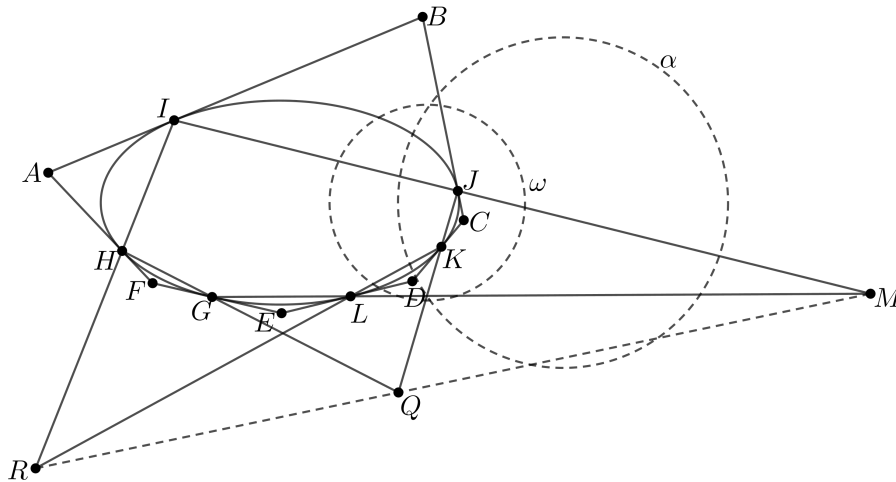


Figura 4.46: Recta \overline{MR}

Ahora la polar de B es \overline{IJ} y la polar de E es \overline{GL} , entonces por Teorema 4.11 4), el polo de la recta \overline{BE} es M , además la polar de A es \overline{HI} y la polar de D es \overline{KL} , entonces por Teorema 4.11 4), el polo de \overline{AD} es R , también la polar de C es \overline{JK} y la polar de F es \overline{GH} entonces por Teorema 4.11 4), el polo de la recta \overline{CF} es Q . Por lo que el polo de la recta

que pasa por M , Q y R es la intersección de sus polares \overline{BE} , \overline{CF} y \overline{AD} , es decir concurren en el polo P . (Ver Figura 4.47)

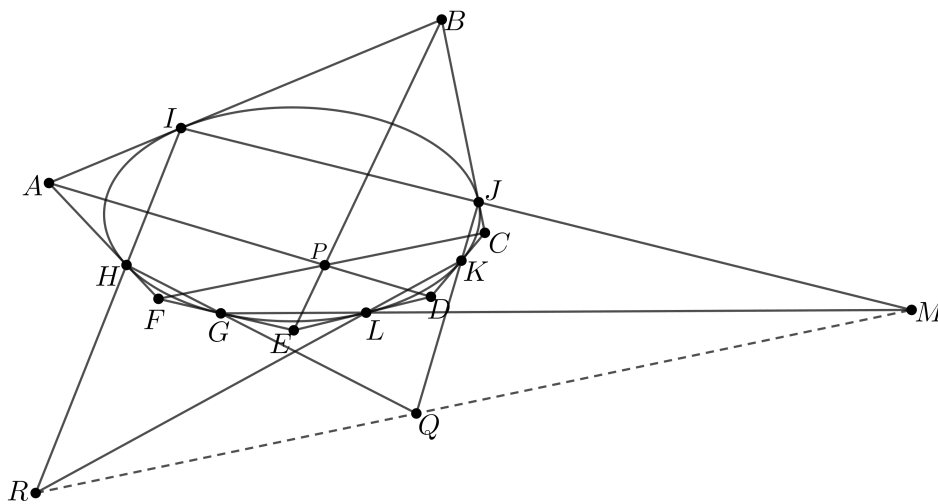


Figura 4.47: Punto de concurrencia P



Bibliografía

- [1] I. E. LEONARD, J. E. LEWIS, A. C. F. LIU, G. W. TOKARSKY, *Classical Geometry*, Wiley. University of Alberta, Canada. 2014. [Libro]
- [2] H. S. M. COXETER, S. L. GREITZER, *Geometry Revisited*, The Mathematical Association of America. Washington D. C., U.S.A. 1967.[Libro]
- [3] NATHAN ALTSHILLER-COURT, *College Geometry Second Edition*, Dover Publications. New York, U.S.A. 1952. [Libro]
- [4] EDUARDO AGUILAR, *Estrategias en Geometría Sintética*. Universidad de El Salvador. [Folleto]
- [5] FRANCISCO J. GARCÍA CAPITÁN, *Inversión en Olimpiadas*. 2005. [Folleto]
- [6] RODOLFO LARREA TOMÁS, *Recursos básicos en geometría plana*. [Folleto]
- [7] AGUSTÍ REVENTÓS TARRIDA, *Geometría Inversiva*. Barcelona. [Folleto]
- [8] CHARLES H. LEHMANN, *Analytic Geometry*, Limusa. New York, U.S.A. 1980. [Libro]
- [9] ERNESTO QUISPE RODRIGUEZ, *Geometría Primer Nivel*, Colección Racso. Lima, Perú. 1995. [Libro]