УДК 681.3.06

ОПТИМАЛЬНОСТЬ МАСШТАБИРУЕМЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ КОНКУРИРУЮЩИХ ПРОЦЕССОВ

Павлов Павел Александрович, к.ф.–м.н., доцент
Полесский государственный университет
Pavlov Pavel Aleksandrovich, PhD, pavlov.p@polessu.by
Polessky State University

В статье получены условия и критерии эффективности и оптимальности одинаково распределенных систем конкурирующих взаимодействующих процессов в условиях неограниченного и ограниченного параллелизма.

Введение. Масштабируемость (scalability) является одним из важнейших требований к современным вычислительным системам, вычислительным комплексам, базам данных, маршрутизаторам и т.д. Она подразумевает способность системы увеличивать свою производительность при добавлении аппаратных и программных ресурсов. В настоящее время вопросы масштабирования находятся в поле зрения как разработчиков параллельных многопроцессорных систем (МС), так и распределенной среды метакомпьютинга [1] Общим свойством, обеспечивающим возможность повышения производительности масштабируемых вычислительных систем, является распределенность процессов вычислений и данных с использованием принципов структурирования и конвейеризации [2]. Все это заставляет задуматься над новыми принципами организации вычислений и распределения ресурсов, созданием эффективного аппаратного и программного обеспечения, обеспечением однозначности результата выполнения программ, эффективном планировании и распределении вычислительных процессов [3]. В связи с этим особую актуальность приобретают задачи построения и исследования математических моделей распределенных вычислительных систем, поиска условий оптимальной организации конкурирующих взаимодействующих вычислительных процессов при распределенной обработке.

1. Математическая модель масштабируемой системы распределенных вычислений. Конструктивными элементами для построения математической модели систем распределенных вычислений являются понятия процесса и программного ресурса.

Процесс будем рассматривать как последовательность блоков (команд, процедур) $Q_1, Q_2, \ldots, Q_s$, для выполнения которых используется множество процессоров (процессорных узлов, обрабатывающих устройств, интеллектуальных клиентов). При этом процесс называется *распределённым*, если все блоки или часть из них обрабатываются разными процессорами. Для ускорения выполнения процессы могут обрабатываться параллельно, взаимодействуя путем обмена информацией. Такие процессы называются *кооперативными* или *взаимодействующими* процессами.

Понятие *ресурса* используется для обозначения любых объектов вычислительной системы, которые могут быть использованы процессами для своего выполнения. *Реентерабельные (многократно используемые)* ресурсы характеризуются возможностью одновременного использования несколькими вычислительными процессами. Для параллельных систем характерной является ситуация, когда одну и ту же последовательность блоков или ее часть необходимо процессорам выполнять многократно, такую последовательность будем называть *программным ресурсом* (ПР), а множество соответствующих процессов – *конкурирующими*.

Математическая модель масштабируемой распределенной системы взаимодействующих процессов включает в себя p процессоров МС, n конкурирующих процессов, s блоков $Q_1,\ Q_2,\ \ldots,\ Q_s$ структурированного на блоки программного процесса, матрицу $T_p = [t_{ij}]$ времен выполнения j–х блоков i–ми конкурирующими процессами. Указанные параметры изменяются в пределах $p \geq 2$, $n \geq 2$, $s \geq 2$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq s$. Будем считать, что все n процессов используют одну копию структурированного на блоки ПР, а на множестве блоков установлен линейный порядок их выполнения. Учитывая то, что обменные операции в параллельных распределенных системах происходят, как правило, значительно медленнее арифметических, введем в рассмотрение параметр $\varepsilon > 0$, характеризующий время (накладные расходы), затрачиваемые МС на организацию параллельного выполнения блоков программного ресурса множеством распределенных конкурирующих процессов.

Будем считать, что взаимодействие процессов вычислений, процессоров и блоков структурированного программного ресурса подчинено следующим условиям: 1) ни один из блоков программного ресурса не может обрабатываться одновременно более чем одним процессором; 2) ни один из процессоров не может обрабатывать одновременно более одного блока; 3) обработка каждого блока осуществляется без прерываний; 4) распределение блоков программного ресурса по процессорам МС для каждого из процессов осуществляется циклически по правилу: блок с номером $j = kp + i$, $j = \overline{1,s}$, $i = \overline{1,p}$, $k \geq 0$, распределяется на процессор с номером i.

Кроме того, введем дополнительные условия, которые определяют режимы взаимодействия процессов, процессоров и блоков ПР: 5) отсутствуют простои процессоров при условии готовности блоков, а также невыполнение блоков при наличии процессоров; 6) для каждого из n процессов момент завершения выполнения j–го блока на i–м процессоре совпадает с моментом начала выполнения следующего $(j+1)$–го блока на $(i+1)$–м процессоре, $i = \overline{1,p-1}$, $j = \overline{1,s-1}$; 7) для каждого из блоков структурированного ПР момент завершения его выполнения l–м процессом совпадает с моментом начала его выполнения $(l+1)$–м процессом на том же процессоре, $l = \overline{1,n-1}$.

Условия 1–5 определяют *асинхронный* режим взаимодействия процессоров, процессов и блоков, который предполагает отсутствие простоев процессоров МС при условии готовности блоков, а также невыполнение блоков при наличии процессоров.

Если к условиям 1–4 добавить условие 6, то получим *первый синхронный* режим, обеспечивающий непрерывное выполнение блоков программного ресурса внутри каждого из вычислительных процессов.

Второй синхронный режим, определяемый условиями 1–4, 7, обеспечивает непрерывное выполнение каждого блока всеми процессами.

Определение 1. Масштабируемая система n распределенных взаимодействующих конкурирующих процессов называется *неоднородной*, если времена выполнения блоков программного ресурса $Q_1,\ Q_2,\ \ldots,\ Q_s$ зависят от объемов обрабатываемых данных и/или их структуры, т. е. разные для разных вычислительных процессов.

Определение 2. Система взаимодействующих конкурирующих процессов называется *одинаково распределенной*, если времена t_{ij} выполнения блоков Q_j, $j = \overline{1,s}$, программного ресурса каждым из *i*–х процессов вычислений совпадают и равны t_i для всех $i = \overline{1,n}$, т. е. справедлива цепочка равенств $t_{i1} = t_{i2} = \ldots = t_{is} = t_i$ для всех $i = \overline{1,n}$.

2. Необходимые и достаточные условия эффективности одинаково распределенных масштабируемых систем. В [2,4,5] исследованы базовые асинхронный и два синхронных режима, возникающие при организации распределенных взаимодействующих процессов в условиях конкуренции за общий программный ресурс. Для вычисления наименьшего общего времени выполнения множества конкурирующих неоднородных и одинаково распределенных процессов в рамках очерченных режимов получены различные математические соотношения. В [6] решена задача сравнительного анализа полученных соотношений для класса одинаково распределенных процессов с учетом дополнительных накладных расходов $\varepsilon > 0$. Доказано, что для одинаково распределенных систем конкурирующих процессов минимальное общее время для всех трех базовых режимов в случае *неограниченного* параллелизма $(s \le p)$ вычисляется по формуле:

$$T(p,n,s,\varepsilon) = T_\varepsilon^n + (s-1)t_{\max}^\varepsilon,$$

а в случае *ограниченного* параллелизма $(s > p)$ для вычисления минимального общего времени в асинхронном и втором синхронном режимах имеют место соотношения:

$$T(p,n,s,\varepsilon) = \begin{cases} kT_\varepsilon^n + (p-1)t_{\max}^\varepsilon, & при \;\; s = kp, \;\; k > 1, \\ (k+1)T_\varepsilon^n + (r-1)t_{\max}^\varepsilon, & при \;\; s = kp + r, \;\; k \ge 1, \;\; 1 \le r < p, \end{cases}$$

где $T_\varepsilon^n = \sum_{i=1}^{n} t_i^\varepsilon$ – суммарное время выполнения каждого из блоков Q_j всеми n процессами с учетом накладных расходов ε, $t_{\max}^\varepsilon = \max\limits_{1 \le i \le n} t_i^\varepsilon$, $t_i^\varepsilon = t_i + \varepsilon$, $i = \overline{1,n}$.

Выделим в классе одинаково распределенных систем взаимодействующих конкурирующих процессов подкласс *стационарных* систем.

Определение 3. Одинаково распределенную масштабируемую систему конкурирующих процессов назовем *стационарной*, если выполняется цепочка равенств $t_1 = t_2 = \ldots = t_n = t$.

Нетрудно показать, что в случае стационарной одинаково распределенной масштабируемой системы конкурирующих процессов минимальное общее время их выполнения при достаточном числе процессоров МС $(s \le p)$ определяется равенством $\overline{T}_\varepsilon = (n + s - 1)t_\varepsilon$, где $t_\varepsilon = T^n / n + \varepsilon$, $T^n = nt$.

Определение 4. Одинаково распределенную систему конкурирующих взаимодействующих процессов будем называть *эффективной* при фиксированных p, $s \ge 2$, если выполняется соотношение $\Delta_\varepsilon(n) = sT^n - T(p,n,s,\varepsilon) \ge 0$, где sT^n – время выполнения блоков Q_j, $j = \overline{1,s}$ всеми *n* процессами в последовательном режиме.

При наличии двух эффективных одинаково распределенных масштабируемых систем взаимодействующих конкурирующих процессов будем считать, что первая более эффективна, чем вторая, если величина $\Delta_\varepsilon(n)$ первой системы не меньше соответствующей величины второй. Для введенного подмножества одинаково распределенных систем справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Для любой эффективной одинаково распределенной системы конкурирующих процессов при $s \le p$ и $\varepsilon > 0$ существует более эффективная стационарная одинаково распределенная система.

Следующее утверждение устанавливает достаточное условие эффективности одинаково распределенной системы в случае неограниченного параллелизма.

Теорема 2. Если параметры p, n, s, ε одинаково распределенной масштабируемой системы взаимодействующих конкурирующих процессов удовлетворяют соотношениям:

$$3 \le s \le p,\ n = s \ne 3,\ sn \ge 2(n+s-1),\ 0 < \varepsilon \le \min_{1 \le i \le n} t_i,$$

то такая система является эффективной.

Ниже формулируется и доказывается необходимое и достаточное условие существования эффективной системы одинаково распределенных конкурирующих процессов при достаточном числе процессоров в зависимости от величины накладных расходов ε.

Теорема 3. Для существования эффективной одинаково распределенной масштабируемой системы конкурирующих взаимодействующих процессов с заданными параметрами $p \ge 3,\ s \le p$, $\varepsilon > 0$ и T^n необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\varepsilon \le \begin{cases} \varphi(1+\sqrt{s}), & \text{если } \sqrt{s} \text{ — целое,} \\ \max\{\varphi(1+[\sqrt{s}]),\ \varphi(2+[\sqrt{s}])\}, & \text{если } \sqrt{s} \text{ — нецелое,} \end{cases}$$

где $\varphi(x) = \dfrac{(s-1)T^n(x-1)}{x(x+s-1)}$, *[x]* – наибольшее целое, не превосходящее *x*.

Замечание. При $p = s = 2$ одинаково распределенная масштабируемая система конкурирующих процессов будет эффективной, если выполняется неравенство $\dfrac{\varepsilon}{T^n} \le \dfrac{n-1}{n(n+1)}$.

3. Эффективность одинаково распределенных систем в условиях ограниченного параллелизма.

Теорема 4. Если параметры одинаково распределенной системы $n \ge 3$ конкурирующих процессов в многопроцессорной системе с p процессорами удовлетворяют соотношениям $s \ge 3$, $n = s \ne 3$ и $0 < \varepsilon \le \min\limits_{1 \le i \le n} t_i$, то рассматриваемая система будет эффективной, если выполняются условия:

$$sn \ge \begin{cases} 2(kn + p - 1), & \text{если } s = kp,\ k > 1, \\ 2((k+1)n + r - 1), & \text{если } s = kp + r,\ k \ge 1,\ 1 \le r < p. \end{cases}$$

Ниже для асинхронного и второго синхронного режимов формулируется и доказывается необходимое и достаточное условие существования эффективной системы одинаково распределенных конкурирующих процессов в случае ограниченного параллелизма в зависимости от величины накладных расходов ε.

Теорема 5. Для существования эффективной одинаково распределенной системы конкурирующих процессов с заданными параметрами $p \ge 3$, T^n, $\varepsilon > 0$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) при $s = kp, \quad k > 1$,

$$\varepsilon \le \begin{cases} \varphi_1\left(\dfrac{1+\sqrt{p}}{k}\right), & \textit{если} \quad \dfrac{1+\sqrt{p}}{k} \quad - \quad \textit{целое}, \\ \max\left\{\varphi_1\left(\left[\dfrac{1+\sqrt{p}}{k}\right]\right), \ \varphi_1\left(\left[\dfrac{1+\sqrt{p}}{k}\right]+1\right)\right\}, & \textit{если} \quad \dfrac{1+\sqrt{p}}{k} \quad - \quad \textit{нецелое}, \end{cases}$$

где $\varphi_1(x) = (p-1)T^n (kx-1)\big/x(kx+p-1)$, а *[x]* – наибольшее целое, не превосходящее *x*;

2) при $s = kp + r, \quad k \ge 1, \ 1 \le r < p$,

$$\varepsilon \le \begin{cases} \varphi_2(x), & \textit{если} \ x \ - \ \textit{целое}, \\ \max\{\varphi_2([x]), \ \varphi_2([x]+1)\}, & \textit{если} \ x \ - \ \textit{нецелое}, \end{cases}$$

где $\varphi_2(x) = \dfrac{\left[(p-1)kx + (r-1)(x-1)\right] \ T^n}{x \ \left[(k+1)x + r - 1\right]}$, *[x]* – наибольшее целое, не превосходящее *x*, где $x = \dfrac{r-1}{(p-1)k+r-1}\left(1+\sqrt{1+\dfrac{(p-1)k+r-1}{k+1}}\right)$.

4. Оптимальность одинаково распределенных систем конкурирующих процессов

Определение 5. Эффективная одинаково распределенная система называется *оптимальной*, если величина Δ_ε достигает наибольшего значения.

В силу теоремы 1 оптимальную одинаково распределенную систему следует искать среди стационарных одинаково распределенных систем. Тогда имеем:

$$\overline{\Delta}_\varepsilon(s \le p) = (s-1)T^n(1-1/n) - (n+s-1)\varepsilon.$$

Введем функцию действительного аргумента x вида:

$$\overline{\Delta}_\varepsilon(x) = (s-1)T^n\left(1-\frac{1}{x}\right) - (x+s-1)\varepsilon, \quad x \ge 1.$$

Решение задачи об оптимальности одинаково распределенной системы, состоящей из *n* конкурирующих процессов, для достаточного числа процессоров для всех трех базовых режимов следует из теоремы.

Теорема 6. Для того, чтобы эффективная одинаково распределенная система конкурирующих процессов была оптимальной при заданных $2 \le s \le p$, T^n, $\varepsilon > 0$, необходимо и достаточно, чтобы она была стационарной и число процессов n_0 в системе равнялось одному из чисел

$$\left[\left[\sqrt{\frac{(s-1)T^n}{\varepsilon}}\right], \left[\sqrt{\frac{(s-1)T^n}{\varepsilon}}\right]+1\right] \cap [2,n],$$

в котором функция $\overline{\Delta}_{\varepsilon}(x)$ достигает наибольшего значения. Здесь $[x]$ означает наибольшее целое, не превосходящее x, n – заданное число.

Теорема 7. Для того, чтобы эффективная одинаково распределенная система конкурирующих процессов в случае ограниченного параллелизма в асинхронном и втором синхронном режимах была оптимальной при заданных $p \geq 2$, T^n, $\varepsilon > 0$, необходимо и достаточно, чтобы она была стационарной и число процессов n_0 в системе равнялось одному из чисел:

1) $\left[\left[\sqrt{\frac{(p-1)T^n}{k\varepsilon}}\right], \left[\sqrt{\frac{(p-1)T^n}{k\varepsilon}}\right]+1\right] \cap [2,n]$, при $s = kp$, $k > 1$,

2) $\left[\left[\sqrt{\frac{(r-1)T^n}{(k+1)\varepsilon}}\right], \left[\sqrt{\frac{(r-1)T^n}{(k+1)\varepsilon}}\right]+1\right] \cap [2,n]$, при $s = kp + r$, $k \geq 1$, $1 \leq r < p$,

в котором функция $\overline{\Delta}_{\varepsilon}(x)$ достигает наибольшего значения, где *[x]* –наибольшее целое, не превосходящее *x*, *n* – заданное число.

Заключение. Полученные условия эффективности и оптимальности одинаково распределенных масштабируемых систем конкурирующих взаимодействующих процессов имеют многочисленные области применения. В частности, они могут быть использованы при проектировании системного и прикладного программного обеспечения, ориентированного на масштабируемые многопроцессорные системы, вычислительные сети, а также при решении проблем оптимального использования вычислительных ресурсов. Полученные формулы также служат основой для решения задач оптимизации числа блоков при заданных остальных параметрах МС, нахождения оптимального числа процессоров при заданных объемах вычислений и (или) директивных сроках реализации вычислительных процессов, исследования всевозможных смешанных режимов организации выполнения параллельных процессов при распределенной обработке, в том числе с учетом ограниченного числа копий структурированного программного ресурса.

Список использованных источников

1. Воеводин В.В., Воеводин Вл.В. Параллельные вычисления. СПб., 2002. 608 с.

2. Коваленко Н.С., Самаль С.А. Вычислительные методы реализации интеллектуальных моделей сложных систем. Мн., 2004. 166 с.

3. Топорков В.В. Модели распределенных вычислений. М., 2004. 320 с.

4. Иванников В.П., Коваленко Н.С., Метельский В.М. О минимальном времени реализации распределенных конкурирующих процессов в синхронных режимах // Программирование. 2000. №5. С. 44–52.

5. Коваленко Н.С., Самаль С.А. Минимизация общего времени выполнения заданных объемов вычислений в синхронных режимах // Кибернетика и системный анализ. 2003. №6. С. 39–47.

6. Павлов П.А. Сравнительный анализ одинаково распределенных конкурирующих процессов с учетом дополнительных системных расходов // Вестник фонда фундаментальных исследований. 2006. №1. С. 55–58.