Productos generalizados de funciones analíticas

Ileana Castillo-Arias[1] y Joseph C. Várilly[2]

[1] Departamento de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica, 10000 Cartago, Costa Rica

[2] Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, 11501 San José, Costa Rica

Tec. en Marcha (CR) **10** (1990), 76–89

Resumen

Los productos generalizados son de interés en el formalismo de la mecánica cuántica en espacios de fases. En este artículo se analizan las propiedades algebraicas y topológicas de diversos productos definidos en espacios de funciones analíticas. Los productos se definen por núcleos integrales de tres variables complejas. Se analizan las condiciones algebraicas que los productos inducen sobre estos núcleos, con atención al caso en que el núcleo es la exponencial de un polinomio cuadrático. Se estudian las simetrías de algunos productos generalizados. Se obtienen condiciones de continuidad para los productos generalizados, las cuales permiten construir algunas álgebras topológicas de funciones.

Introducción

La teoría convencional que fundamenta la mecánica cuántica de partículas representa los observables principales, como la posición y el momento de una partícula, por operadores autoadjuntos sobre un espacio de Hilbert. Esto hace un contraste con la mecánica clásica, en donde los observables son más bien funciones sobre la variedad de estados puros del sistema en consideración. Una forma de crear un vínculo entre las dos teorías es reformular la mecánica cuántica como una teoría de funciones sobre el espacio de las fases. En 1949, Moyal [1] logró esta reformulación, manteniendo el carácter clásico de los estados y los observables como funciones sobre una variedad; hubo que cambiar solamente la regla de combinación de observables. Concretamente, Moyal reemplazó el producto usual de funciones por el producto cuántico, a veces llamado "producto torcido" o "producto de Moyal".

Moyal usó las variables reales de posición y momento. Bargmann, en dos artículos seminales [2, 3] mostró que los cálculos cuánticos pueden simplificarse usando variables complejas, relacionadas con los operadores de aniquilación y creación. Utilizó un espacio que hemos elegido para realizar nuestro trabajo y que denominamos "espacio de Bargmann".

El objetivo de este artículo es establecer la base teórica de una versión compleja del producto de Moyal. Aunque este producto ha sido estudiado a fondo (vea, por ejemplo, la [4] y las referencias allí citadas), no es vano esperar que la combinación de este producto con las técnicas del espacio de Bargmann (vea [3, 5, 6], por ejemplo) conduzca a nuevos resultados y también a simplificaciones considerables. En efecto, el enfoque aquí adoptado produce un ejemplo interesante de un álgebra topológica (no normada) de funciones con multiplicación conjuntamente continua, el cual permite extender el producto de Moyal a pares de distribuciones temperadas cualesquiera.

En la Sección 1 establecemos un marco teórico para definir los productos generalizados. Obtenemos las condiciones algebraicas sobre el núcleo integral que corresponden a propiedades algebraicas de un producto generalizado. Cuando el núcleo es la exponencial de un polinomio cuadrático, estas condiciones se reducen a relaciones elementales entre las matrices de coeficientes. Ilustramos el procedimiento con varios ejemplos, entre ellos el análogo del producto de Moyal.

En la Sección 2 se investiga la naturaleza de las simetrías de los productos generalizados; como "simetría" entendemos una transformación para la cual el producto es equivariante. De nuevo obtenemos condiciones explícitas de equivariancia para núcleos de exponente cuadrático. En la Sección 3 estudiamos las condiciones bajo las cuales estos productos generalizados son continuos. Encontramos diversos espacios que son álgebras topológicas, o al menos módulos sobre álgebras topológicas, bajo (la versión compleja de) el producto de Moyal.

1. Núcleos integrales para productos generalizados

Este artículo pretende investigar las propiedades algebraicas y topológicas de una familia determinada de productos sobre espacios de funciones analíticas. Comenzamos con un concepto general: la de producto definido por un núcleo integral de tres variables (en adelante llamado "trinúcleo" integral). Intuitivamente, si f, g son funciones reales o complejas sobre un conjunto X, un "producto" de f y g es otra función $f \diamond g$ sobre X, de modo que $(f, g) \mapsto f \diamond g$ sea bilineal (y tenga otras propiedades algebraicas deseables). La bilinealidad se puede expresar mediante la prescripción

$$(f \diamond g)(z) = \int_X \int_X B(z, w, t)\, f(w)\, g(t)\, d\mu(w)\, d\mu(t), \tag{1}$$

donde μ es alguna medida apropiada sobre X y B es, en general, una distribución sobre X^3. Para evitar complicaciones de existencia y convergencia de esta integral distribucional, elegimos un espacio de funciones en donde B sea también una función "bien portada" sobre X^3.

Recordamos que un espacio de Hilbert de funciones posee operadores acotados dados por núcleos integrales si consta de funciones *holomorfas* sobre un abierto de $\mathbb{C}^n$. Elegimos entonces el espacio de Bargmann [2], a veces llamado espacio de Bargmann, Fock y Segal [7, 8]. Este es un espacio de funciones analíticas enteras sobre $\mathbb{C}^n$, con medida gaussiana

$$d\mu(z) := \pi^{-n} \exp(-\bar{z} \cdot z)\, d^n x\, d^n y.$$

El producto interno es

$$(f \mid g) := \int_{\mathbb{C}^n} \overline{f(z)}\, g(z)\, d\mu(z) \tag{2}$$

donde $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) = x + iy \in \mathbb{C}^n$. (Usamos la notación $z \cdot w := \sum_{i=1}^n z_i w_i$ para $z, w \in \mathbb{C}^n$; así, $d\mu(z) = \prod_{i=1}^n \pi^{-1} \exp(-\bar{z}_i z_i)\, dx_i\, dy_i = \prod_{i=1}^n d\mu(z_i)$.

El espacio de Bargmann es entonces

$$\mathcal{F}_n := \{\, f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} \text{ analítica entera } : (f \mid f) < +\infty \,\}.$$

Los espacios $\mathcal{F}_n$ y $L^2(\mathbb{R}^n)$ son isomorfos mediante una transformación integral. Es conveniente normalizar la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^n$ usando

$$\underline{dx} := (4\pi)^{-n/2}\, d^n x$$

donde $d^n x$ es la medida usual de Lebesgue. Esta normalización da lugar a la fórmula

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-q^2 + \sqrt{2}\, q \cdot t)\, \underline{dq} = 2^{-n} \exp(\tfrac{1}{2} t^2), \tag{3}$$

escribiendo $x^2 \equiv x \cdot x = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ para el cuadrado de un vector x en $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$. Introducimos ahora

$$A(z, q) := 2^{n/2} \exp\bigl[-\tfrac{1}{2}(z^2 + q^2) + \sqrt{2}\, z \cdot q\bigr]$$

para $z \in \mathbb{C}^n$, $q \in \mathbb{R}^n$. Entonces el isomorfismo $A\colon L^2(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{F}_n$ se define mediante

$$f(z) := (A\psi)(z) := \int A(z, q)\psi(q)\, \underline{dq}. \tag{4}$$

El isomorfismo inverso es dado por

$$\psi(q) := (Vf)(q) := \int A(\bar{z}, q) f(z)\, d\mu(z). \tag{5}$$

Para los detalles de convergencia de estas integrales, remitimos a [2]. Si definimos los espacios

$$\mathcal{G}_\lambda := \{\, f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} \text{ analítica} : |f(z)| \leqslant C_f \exp(\tfrac{1}{2}\lambda^2 \bar{z} \cdot z) \,\}, \tag{6}$$

entonces $\mathcal{G}_< := \bigcup_{0<\lambda<1} \mathcal{G}_\lambda$ es denso en $\mathcal{F}_n$ y las integrales (4), (5) convergen para $f \in \mathcal{G}_<$; las transformaciones A, V se extienden por densidad a transformaciones unitarias de los espacios de Hilbert.

El *núcleo reproductor* de $\mathcal{F}_n$ es la función $I(z, \bar{w}) = \exp(z \cdot \bar{w})$:

$$\int_{\mathbb{C}^n} \exp(z \cdot \bar{w}) f(w)\, d\mu(w) = f(z), \tag{7}$$

como consecuencia de la identidad

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(z, q) A(\bar{w}, q)\, \underline{dq} = \exp(z \cdot \bar{w}).$$

Citamos un resultado útil de la referencia [2].

Lema 1 (Bargmann)**.** *La integral*

$$\int_{\mathbb{C}^n} \exp\bigl[\tfrac{1}{2}(\gamma z^2 + \delta \bar{z}^2 + 2a \cdot z + 2b \cdot \bar{z})\bigr]\, d\mu(z), \tag{8a}$$

donde $\gamma, \delta \in \mathbb{C}$*;* $a, b \in \mathbb{C}^n$*, es convergente si y solo si* $|\gamma + \bar{\delta}|^2 < 4$*. Si así fuera, su valor es*

$$(1 - \gamma\delta)^{-n/2} \exp\biggl[\frac{\delta a^2 + \gamma b^2 + 2a \cdot b}{2(1 - \gamma\delta)}\biggr]. \tag{8b}$$

La prueba emplea la fórmula (3) para el cálculo de integrales gaussianas y se encuentra en [9]. ◻

Denotamos por $f^*(z) := \overline{f(\bar{z})}$ la "doble conjugación", la cual es una isometría antilineal de $\mathcal{F}_n$ tal que $(f^*)^* = f$. La *forma bilineal canónica* sobre $\mathcal{F}_n$ fue introducida en [9] como

$$\langle f, g\rangle := 2^{n/2}(f^* \mid g) = 2^{n/2} \int_{\mathbb{C}^n} f(\bar{z}) g(z)\, d\mu(z). \tag{9}$$

A partir de (3) y (5) se puede verificar que $\langle Vf, Vg\rangle = \langle f, g\rangle$ para $f, g \in \mathcal{F}_n$.

Volvemos ahora a (1), con $X = \mathbb{C}^n$, $f, g \in \mathcal{F}_n$, donde el trinúcleo B es analítico en sus tres variables y es tal que la integral converge para f, g en $\mathcal{F}_n$ o al menos en algún subespacio denso como por ejemplo $\mathcal{G}_<$. Las propiedades algebraicas de este *producto generalizado* son determinadas por condiciones sobre el trinúcleo $B(z, v, w)$. Resumimos estas condiciones en el siguiente teorema.

Teorema 1. (a) *El producto generalizado* (1) *es* ***asociativo*** *si y solo si*

$$\int_{\mathbb{C}^n} B(z, v, w)\, B(\bar{v}, r, s)\, d\mu(v) = \int_{\mathbb{C}^n} B(z, r, v)\, B(\bar{v}, s, w)\, d\mu(v).$$

(b) *La función analítica $e\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ es la identidad para el producto* (1) *si y solo si*

$$\int_{\mathbb{C}^n} B(z, v, w)\, e(\bar{v})\, d\mu(v) = \exp(z \cdot w).$$

(c) *La doble conjugación es una involución (es decir, $(f \diamond g)^* = g^* \diamond f^*$ para $f, g \in \mathcal{F}_n$) si y solo si se cumple*

$$\overline{B(z, w, v)} = B(\bar{z}, \bar{v}, \bar{w}).$$

(d) *El producto* (1) *es conmutativo si y solo si se cumple*

$$B(z, v, w) = B(z, w, v).$$

Las pruebas son cálculos directos y remitimos a [9] para los detalles. Para la (c), debe observarse que las isometrías A y V entrelazan la doble conjugación en $\mathcal{F}_n$ con la conjugación compleja en $L^2(\mathbb{R}^n)$. □

Hay dos propiedades algebraicas más que merecen mención. Postulamos la existencia de una función t tal que:

$$\begin{aligned} \langle f, g\rangle &= 2^{n/2} \int_{\mathbb{C}^n} f(\bar{z}) g(z)\, d\mu(z) \\ &= \int_{\mathbb{C}^n} t(\bar{z})\, (f \diamond g)(z)\, d\mu(z) = \int_{\mathbb{C}^n} t(\bar{z})\, (g \diamond f)(z)\, d\mu(z), \end{aligned} \tag{10}$$

donde $t(\bar{z})$ es una función que depende del trinúcleo B. Obsérvese que la primera integral es simétrica en f y g, así que la tercera igualdad es consecuencia de la segunda. El que t sea función de $\bar{z}$ y no de z nos lo sugieren ejemplos como el producto de Bargmann y Moyal tratado en la [10]. A esta propiedad la denominamos propiedad *semitracial*, ya que la ecuación (10) representa en cierta forma una traza de $f \diamond g$.

Decimos que el producto generalizado (1) es *cíclico* si se cumple la igualdad:

$$\langle f, g \diamond h\rangle = \langle h, f \diamond g\rangle = \langle g, h \diamond f\rangle.$$

Como la forma bilineal es simétrica, esto implica

$$\langle f \diamond g, h\rangle = \langle f, g \diamond h\rangle. \tag{11}$$

Teorema 2. (a) *El producto generalizado* (1) *satisface la propiedad semitracial si y solo si se cumple*

$$\int t(\bar{z})\, B(z, v, w)\, d\mu(z) = 2^{n/2} \exp(v \cdot w).$$

(b) *El producto generalizado es cíclico si y solo si*

$$B(z, v, w) = B(v, w, z) = B(w, z, v).$$

De nuevo remitimos a la referencia [9] para las pruebas. □

Estudiaremos enseguida una clase particular de productos generalizados: los que poseen un trinúcleo que es *exponencial de un polinomio cuadrático*. Los ejemplos que suelen ocurrir tienen trinúcleo de este tipo, debido a su evidente conexión con la forma del núcleo reproductor (7) y con la medida gaussiana $d\mu(z)$.

Sean A, B y C matrices en $\mathbb{C}^{n\times n}$; z, v, w vectores en $\mathbb{C}^n$; y sean $\alpha, \delta, \theta \in \mathbb{R}$. Consideremos el polinomio cuadrático definido por

$$Q(z, v, w) := \tfrac{1}{2}(\alpha z^2 + \delta v^2 + \theta w^2) + (z \cdot Av + v \cdot Bw + w \cdot Cz). \tag{12}$$

Lo elegimos de esta forma porque los términos mixtos son los que juegan el papel principal en determinar las propiedades del producto; α, δ, θ son factores de peso.

A veces conviene usar una notación más abreviada. Escribimos $\zeta := (z, v, w) \in \mathbb{C}^{3n}$. La expresión (12) puede expresarse como $Q(\zeta) = \frac{1}{2}\zeta \cdot Q\zeta$, donde la segunda Q denota la matriz simétrica $3n \times 3n$:

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha\, 1_n & A & C^{\mathrm{t}} \\ A^{\mathrm{t}} & \delta\, 1_n & B \\ C & B^{\mathrm{t}} & \theta\, 1_n \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Definimos el trinúcleo:

$$B(z, v, w) := \kappa \exp[Q(z, v, w)], \tag{14}$$

siendo κ una constante de normalización.

Ahora, las condiciones algebraicas de los Teoremas 1 y 2 se reducen a ciertas relaciones algebraicas entre las entradas (13) de Q. Enseguida indicaremos los resultados; las pruebas son aplicaciones repetidas de la fórmula (8) para evaluar las integrales [9].

Teorema 3. (a) *El producto con trinúcleo dado por* (14) *es asociativo solo si $\delta = \theta$ o bien $\alpha = 0$; en el caso $\delta = \theta$, la asociatividad es equivalente a las siguientes condiciones:*

$$\begin{aligned} \delta A^{\mathrm{t}} A &= \alpha B B^{\mathrm{t}} = \delta C C^{\mathrm{t}}; \\ A^{\mathrm{t}} B &= B C^{\mathrm{t}}; \\ A C^{\mathrm{t}} &= C^{\mathrm{t}} A; \\ (C^{\mathrm{t}})^2 &= (1 - \delta\alpha) C^{\mathrm{t}} + \alpha A B; \\ (A^{\mathrm{t}})^2 &= (1 - \delta\alpha) A^{\mathrm{t}} + \alpha B C; \\ A^{\mathrm{t}} B^{\mathrm{t}} &= (1 - \delta\alpha) B^{\mathrm{t}} + \delta C A. \end{aligned}$$

(b) *El producto definido por* (14) *es cíclico si y solo si*

$$\alpha = \delta = \theta \quad y \quad A = B = C.$$

(c) *La doble conjugación es una involución para este producto generalizado si y solo si*

$$\delta = \theta, \quad A^{\mathrm{t}} = \overline{C}, \quad B^{\mathrm{t}} = \overline{B}.$$

(d) *El producto definido por* (14) *es conmutativo si y solo si*

$$\delta = \theta, \quad A = C^{\mathrm{t}}, \quad B = B^{\mathrm{t}}.$$

Observación. Consideremos, por ejemplo, un trinúcleo de la forma especial:

$$\exp\left[\tfrac{1}{2}\alpha(z^2 + v^2 + w^2) + (z^{\mathrm{t}}Av + v^{\mathrm{t}}Aw + w^{\mathrm{t}}Az)\right].$$

Este producto es cíclico, la doble conjugación es una involución si y solo si A es hermítica, y el producto es conmutativo si y solo si A es simétrica. La asociatividad exige que $A^{\mathrm{t}}A = AA^{\mathrm{t}}$ y $(A^{\mathrm{t}})^2 = (1 - \alpha^2)A^{\mathrm{t}} + \alpha A^2$. En particular, si $\alpha = 0$, la asociatividad es equivalente a $A^{\mathrm{t}}A = AA^{\mathrm{t}}$, $A^2 = A$. En esta forma, se pueden analizar fácilmente diversas clases de trinúcleos para ver cuáles conducen a productos con propiedades interesantes.

Ejemplo 1. El producto ordinario de funciones sobre $\mathbb{C}^n$ es dado por

$$(fg)(z) = \iint B(z, v, w) f(\bar{v}) g(\bar{w})\, d\mu(v)\, d\mu(w),$$

donde $B(z, v, w) = \exp[z \cdot (v + w)]$ evidentemente, en vista de la forma del núcleo reproductor (7). Este es un trinúcleo de la forma (14), con $\alpha = \delta = \theta = 0$, $A = C = 1$ y $B = 0$. Es inmediato del Teorema 3, si no fuera ya evidente, que este producto es asociativo y conmutativo pero que no es cíclico. La falta de ciclicidad se debe a la introducción de una conjugación compleja en la definición de la forma bilineal canónica (9). Por el Teorema 1(b) y la identidad $\int \exp(z \cdot \bar{v})\, d\mu(v) = 1$, se ve que la función constante 1 es (¡por supuesto!) la identidad para el producto ordinario.

Ejemplo 2. El *producto nuclear* de funciones en $\mathbb{C}^{2n}$ se define mediante

$$(f \circ g)(z_1, z_2) := \iint f(z_1, z')\, g(\bar{z}', z_2)\, d\mu(z').$$

Entonces se ve de (7) que posee el trinúcleo

$$B(z, v, w) := \exp(z_1 v_1 + v_2 w_1 + w_2 z_2),$$

el cual es de la forma (14) con $\alpha = \delta = \theta = 0$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Otra vez, el Teorema 1 indica que este producto es asociativo pero no cíclico y no conmutativo; la doble conjugación no es una involución para este producto. El Teorema 1(b) muestra que la función $e(z) := \exp(z_1 \cdot z_2)$ es la identidad para el producto nuclear.

Ejemplo 3. El **producto de Bargmann y Moyal** fue introducido [10] como la imagen en el espacio de Bargmann del producto de Moyal [1, 4] en $L^2(\mathbb{R}^{2n})$, el cual juega un papel fundamental en el formalismo de la mecánica cuántica en espacios de fases [11, 12]. El *producto de Moyal* se define por:

$$(\psi \times \varphi)(x) := 4^n \int_{\mathbb{R}^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \exp\big[i(x \cdot Jy + y \cdot J\xi + \xi \cdot Jx)\big] \psi(y)\varphi(\xi)\, \underline{dy}\, \underline{d\xi},$$

con $\psi, \varphi \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$ y $J = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}$. El producto de Bargmann y Moyal es entonces

$$(f \diamond g)(z) := A(Vf \times Vg)(z), \quad \text{con} \quad f, g \in \mathcal{F}_{2n}.$$

El trinúcleo de este producto es [9]:

$$\begin{aligned} B(z, v, w) &:= 4^n \iiint A(z, x)\, A(\bar{v}, y)\, A(\bar{w}, \xi)\, \exp\big[i(x \cdot Jy + y \cdot J\xi + \xi \cdot Jx)\big]\, \underline{dx}\, \underline{dy}\, \underline{d\xi} \\ &= \exp\big[\tfrac{1}{2}(z^{\mathrm{t}}v + v^{\mathrm{t}}w + w^{\mathrm{t}}z) + \tfrac{i}{2}(z^{\mathrm{t}}Jv + v^{\mathrm{t}}Jw + w^{\mathrm{t}}Jz)\big]. \end{aligned} \tag{15}$$

Introducimos la notación $K := \frac{1}{2}(1 + iJ)$. Nótese que $K^{\mathrm{t}} = \overline{K} = \frac{1}{2}(1 - iJ)$, pues $J^{\mathrm{t}} = -J$. Entonces el trinúcleo (15) se escribe

$$B(z, v, w) = \exp\big[z \cdot Kv + v \cdot Kw + w \cdot Kz\big].$$

Luego tenemos otro trinúcleo de la forma (14), con

$$\alpha = \delta = \theta = 0, \qquad A = B = C = K.$$

De acuerdo con la observación después del Teorema 3, el producto de Bargmann y Moyal es asociativo (pues $K^{\mathrm{t}}K = KK^{\mathrm{t}} = 0$, $K^2 = K$); además es cíclico, no conmutativo (pues $K^{\mathrm{t}} \neq K$), y tiene la doble conjugación como una involución (pues $K^{\mathrm{t}} = \overline{K}$). A partir de los Teoremas 1 y 2, se ve que la identidad es $e(z) := \exp(\frac{1}{2}z^2)$ y que $t(\bar{z}) := 2^{n/2} \exp(\frac{1}{2}\bar{z}^2)$ es una función que hace válida la propiedad semitracial.

2. Simetrías de productos generalizados

Si $f \mapsto f^g$ denota una transformación invertible de un espacio de funciones, decimos que un producto generalizado $f \diamond h$ es *equivariante* bajo esta transformación si

$$(f \diamond h)^g = f^g \diamond h^g. \tag{16}$$

Si g parametriza un *grupo* de transformaciones G, decimos que el producto generalizado es invariante bajo el grupo G cuando (16) se cumple para todo $g \in G$. A modo de ejemplo, el producto ordinario $(fh)(z) := f(z)\, h(z)$ es equivariante bajo las traslaciones $f^w(z) := f(z - w)$, pues $(fh)(z - w) = f(z - w)\, h(z - w)$.

Debido al origen común del espacio de Bargmann [2] y del producto de Moyal [1] en el formalismo de relaciones canónicas de conmutación [13], el primer grupo de interés es el grupo de Heisenberg [14]. En $L^2(\mathbb{R}^n)$, este grupo es generado por las traslaciones $T_\alpha\psi(q) := \psi(q - \alpha)$ y las modulaciones $M_\beta\psi(q) := e^{-i\beta q}\psi(q)$.

Transferidas a $\mathcal{F}_n$, estas transformaciones son [2]:

$$
\begin{aligned}
T_a f(z) &:= \exp[a \cdot (z - \tfrac{1}{2}a)]\, f(z - a), \\
M_b f(z) &:= \exp[-ib \cdot (z - \tfrac{1}{2}ib)]\, f(z - ib),
\end{aligned}
\tag{17}
$$

donde $a, b \in \mathbb{R}^n$.

De (17) se ve que $M_b^{-1} T_a^{-1} M_b T_a f = e^{-2ia\cdot b} f$, así que los T_a, M_b y los escalares $e^{i\theta}$ generan una representación (sobre $\mathcal{F}_n$) del grupo de Heisenberg. Los operadores T_a, M_b poseen núcleos integrales que denotaremos con los mismos nombres:

$$
\begin{aligned}
T_a(z, \bar{w}) &:= \exp[a \cdot (z - \tfrac{1}{2}a) + \bar{w} \cdot (z - a)] = \exp[\bar{w} \cdot z + a \cdot z - a \cdot \bar{w} - \tfrac{1}{2}a^2], \\
M_b(z, \bar{w}) &:= \exp[-ib \cdot (z - \tfrac{1}{2}ib) + \bar{w} \cdot (z - ib)] = \exp[\bar{w} \cdot z - ib \cdot z - ib \cdot \bar{w} - \tfrac{1}{2}b^2].
\end{aligned}
$$

Para ver si estas transformaciones representan simetrías del producto de Bargmann y Moyal (o de cualquier otro producto generalizado), debemos transformar la fórmula (16) en una relación entre núcleos integrales. Si $G(z, \bar{w})$ denota el núcleo de la transformación $f \mapsto f^g$, entonces (16) se expande a:

$$
\begin{aligned}
&\iiint G(z, \bar{w})\, B(w, u, v)\, f(\bar{u}) g(\bar{v})\, d\mu(u)\, d\mu(v)\, d\mu(w) \\
&= \iiiint B(z, r, s)\, G(\bar{r}, u)\, G(\bar{s}, v)\, f(\bar{u}) g(\bar{v})\, d\mu(u)\, d\mu(v)\, d\mu(r)\, d\mu(s)
\end{aligned}
$$

lo cual implica que

$$
\int G(z, \bar{w})\, B(w, u, v)\, d\mu(w) = \iint B(z, r, s)\, G(\bar{r}, u)\, G(\bar{s}, v)\, d\mu(r)\, d\mu(s) \tag{18}
$$

para todo $z, u, v \in \mathbb{C}^n$. Esta condición es suficiente para comprobar que el producto de Bargmann y Moyal es equivariante bajo las T_a:

$$
\begin{aligned}
\int T_a(z, \bar{w})\, B(w, u, v)\, d\mu(w) &= \int \exp\big[\bar{w} \cdot (z - a) + a \cdot z - \tfrac{1}{2}a^2 + w \cdot (Ku + \overline{K}v) + u \cdot Kv\big]\, d\mu(w) \\
&= \exp[(z - a) \cdot (Ku + \overline{K}v) + a \cdot z + u \cdot Kv - \tfrac{1}{2}a^2] \\
&= B(z, u, v) \exp[a \cdot (z - Ku - \overline{K}v) - \tfrac{1}{2}a^2],
\end{aligned}
$$

mientras que

$$
\begin{aligned}
&\iint T_a(\bar{r}, u)\, T_a(\bar{s}, v)\, B(z, r, s)\, d\mu(r)\, d\mu(s) \\
&= \iint \exp[\bar{r} \cdot (u + a) - a \cdot u + \bar{s} \cdot (v + a) - a \cdot v - a^2 + r \cdot (\overline{K}z + Ks) + s \cdot Kz]\, d\mu(r)\, d\mu(s) \\
&= \int \exp[(u + a) \cdot (\overline{K}z + Ks) - a \cdot (u + v) - a^2 + \bar{s} \cdot (v + a) + s \cdot Kz]\, d\mu(s) \\
&= \exp[(u + a) \cdot \overline{K}z - a \cdot (u + v) - a^2 + (v + a) \cdot (Kz + \overline{K}u + \overline{K}a)] \\
&= B(z, u, v)\ \exp[a \cdot (z - Ku - \overline{K}v) - \tfrac{1}{2}a^2],
\end{aligned}
$$

donde se ha usado las identidades $1 - K = \overline{K}$, $a \cdot \overline{K}a = \frac{1}{2}a^2$, y

$$\int_{\mathbb{C}^n} \exp[w \cdot u + \bar{w} \cdot v]\, d\mu(w) = \exp[u \cdot v], \tag{19}$$

el cual es un caso particular de (7).

Es casi inmediato que el resultado análogo no es cierto para M_b en lugar de T_a (las transformaciones M_b dejan equivariante al producto generalizado cuyo trinúcleo es

$$B(z, v, w) = \exp[-z \cdot Kv - v \cdot Kw - w \cdot Kz],$$

lo cual es la "transformada de Fourier" del producto de Bargmann y Moyal [10]). Interesa, entonces, saber si hay algunas otras simetrías del producto de Bargmann y Moyal cuyos núcleos cumplen (18). Un estudio de las "funciones de evolución" y su cálculo por el producto de Moyal [15] señala que los únicos candidatos razonables son transformaciones cuyos núcleos son exponenciales de polinomios cuadráticos. Más precisamente, sus imágenes bajo V son distribuciones en $\mathbb{R}^{2n}$ que representan funciones generatrices de Poincaré [15]; los hamiltonianos correspondientes, si son polinomios, son necesariamente de grado dos a lo sumo.

Para poder comprobar (18) cuando G es la exponencial de un polinomio cuadrático, es necesario generalizar el Lema 1 para integrar formas cuadráticas más generales en $(z, \bar{z})$. La generalización adecuada fue encontrada por Itzykson [5].

Lema 2. *Sean M, N dos matrices simétricas en $\mathbb{C}^{n\times n}$, y sean $u, v \in \mathbb{C}^n$. La integral*

$$\int_{\mathbb{C}^n} \exp\bigl\{\tfrac{1}{2}\bigl[z \cdot Mz + \bar{z} \cdot N\bar{z} + 2z \cdot u + 2\bar{z} \cdot v\bigr]\bigr\}\, d\mu(z) \tag{20a}$$

converge absolutamente si y solo si

$$4\,1_n - (\overline{M} + N)(M + \overline{N}) > 0,$$

en cuyo caso su valor es

$$(\det(1 - MN))^{-1/2} \exp\bigl\{\tfrac{1}{2}\bigl[u \cdot N(1 - MN)^{-1}u + 2v \cdot (1 - MN)^{-1}u + v \cdot (1 - MN)^{-1}Mv\bigr]\bigr\}. \tag{20b}$$

Para la prueba, remitimos a [5]. (Hay una ambigüedad en la determinación del signo de la raíz del determinante en (20b) que se elimina por continuación analítica; en este trabajo los determinantes que aparecen son positivos, y tomamos la raíz cuadrada positiva.)

Ahora consideramos núcleos integrales de la forma

$$G(z, \bar{w}) := \gamma \exp\bigl\{\tfrac{1}{2}\bigl[z \cdot Pz + 2z \cdot Q\bar{w} + \bar{w} \cdot R\bar{w}\bigr]\bigr\}, \tag{21}$$

donde $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y P, R son matrices complejas simétricas. La composición de dos núcleos de este tipo se obtiene de (20):

$$\begin{aligned}
&\int G(z, \bar{w})\, G'(w, u)\, d\mu(w) \\
&= \gamma\gamma' \int \exp\bigl\{\tfrac{1}{2}\bigl[z \cdot Pz + 2z \cdot Q\bar{w} + \bar{w} \cdot R\bar{w} + \bar{w} \cdot P'\bar{w} + 2\bar{w} \cdot Q'\bar{u} + 2\bar{u} \cdot R'\bar{u}\bigr]\bigr\}\, d\mu(w) \\
&= \gamma\gamma' [\det(1 - P'R)]^{-1/2} \exp\bigl\{\tfrac{1}{2}\bigl[z \cdot (P + Q^{\mathrm{t}}S^{-1}P'Q)z + 2z \cdot QQ'\bar{u} + \bar{u} \cdot (R' + Q'^{\mathrm{t}}RS^{-1}Q')\bar{u}\bigr]\bigr\},
\end{aligned}$$

donde $S := 1 - P'R$ (obsérvese que S es invertible cuando la integral converge [5]). Como la identidad corresponde al caso $P = R = 0$, $Q = 1$, un núcleo $G(z, \bar{w})$ pertenece a un *grupo* (bajo composición) solo si Q es invertible.

Un grupo de transformaciones de tipo (21) es el grupo metapléctico $\mathrm{Mp}^{\mathrm{c}}(2n; \mathbb{R})$, una extensión del grupo simpléctico $\mathrm{Sp}(2n; \mathbb{R})$ [6]. En la parametrización de Itzykson [5], los elementos de este grupo tienen núcleos de la forma (21), donde

$$Q = L^{-1}, \quad R = L^{-1}\overline{M}, \quad P = -ML^{-1},$$

con

$$\overline{L}^{\mathrm{t}} L - \overline{M}^{\mathrm{t}} M = 1, \quad L^{\mathrm{t}} M = M^{\mathrm{t}} L, \quad |\gamma^2 \det L| = 1.$$

Teorema 4. *Una transformación de tipo* (21) *deja el producto de Bargmann y Moyal equivariante si y solo si:*

$$\begin{aligned} P &= \overline{K}PK + \widehat{P}PS^{-1}\widehat{P}^{\mathrm{t}}, \\ \overline{K}RK &= R + Q^{\mathrm{t}}S^{-1}KP\overline{K}Q, \\ KR\overline{K} &= R + Q^{\mathrm{t}}\overline{K}PS^{-1}KQ, \\ QK &= \widehat{P}(S^{\mathrm{t}})^{-1}Q, \\ Q\overline{K} - \overline{K}Q &= \widehat{P}(S^{\mathrm{t}})^{-1}PKQ, \\ K + \overline{K}R\overline{K} &= Q^{\mathrm{t}}S^{-1}KQ, \\ \gamma &= (\det S)^{1/2}, \end{aligned} \tag{22}$$

donde $S := 1 - KP\overline{K}P$ *y* $\widehat{P} := K + \overline{K}P\overline{K}$.

Demostración. Usando la fórmula (20), calculamos (18) donde $G(z, \bar{w})$ es dado por (21):

$$\begin{aligned} &\int G(z, \bar{w})\, B(w, u, v)\, d\mu(w) \\ &= \gamma \int \exp\left\{\tfrac{1}{2}\left[z \cdot Pz + 2z \cdot Q\bar{w} + \bar{w} \cdot R\bar{w} + 2w \cdot Ku + 2u \cdot Kv + 2v \cdot Kw\right]\right\} d\mu(w) \\ &= \gamma \exp\left\{\tfrac{1}{2}\left[z \cdot Pz + 2u \cdot Kv + (Ku + \overline{K}v) \cdot R(Ku + \overline{K}v) + 2z \cdot Q(Ku + \overline{K}v)\right]\right\}, \end{aligned} \tag{23}$$

mientras

$$\begin{aligned} &\int B(z, r, s)\, G(\bar{s}, v)\, d\mu(s) \\ &= \gamma \int \exp\left\{\tfrac{1}{2}\left[2z \cdot Kr + 2r \cdot Ks + 2s \cdot Kz + \bar{s} \cdot P\bar{s} + 2\bar{s} \cdot Qv + v \cdot Rv\right]\right\} d\mu(s) \\ &= \gamma \exp\left\{\tfrac{1}{2}\left[2z \cdot Kr + v \cdot Rv + (Kz + \overline{K}r) \cdot P(Kz + \overline{K}r) + 2v \cdot Q^{\mathrm{t}}(Kz + \overline{K}r)\right]\right\}, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$
\begin{aligned}
&\iint B(z,r,s)\,G(\bar r,u)\,G(\bar s,v)\,d\mu(s)\,d\mu(r) \\
&= \gamma^2 \int \exp\bigl\{\tfrac12\bigl[z\cdot \overline{K}PKz + v\cdot Rv + 2v\cdot Q^{\mathrm t}Kz + u\cdot Ru + r\cdot KP\overline{K}r \\
&\qquad + \bar r\cdot P\bar r + 2r\cdot(\widehat{P}^{\mathrm t}z + KQv) + 2\bar r\cdot Qu\bigr]\bigr\}\,d\mu(r) \\
&= \gamma^2\sigma\exp\bigl\{\tfrac12\bigl[z\cdot(\overline{K}PK + \widehat{P}PS^{-1}\widehat{P}^{\mathrm t})z + u\cdot(R + Q^{\mathrm t}S^{-1}KP\overline{K}Q)u + v\cdot(R + Q^{\mathrm t}\overline{K}PS^{-1}KQ)v \\
&\qquad + 2z\cdot\widehat{P}(S^{\mathrm t})^{-1}Qu + 2u\cdot Q^{\mathrm t}S^{-1}KQv + 2v\cdot Q^{\mathrm t}(K + \overline{K}PS^{-1}\widehat{P}^{\mathrm t})z\bigr]\bigr\},
\end{aligned}
\tag{24}
$$

con $\sigma = (\det S)^{-1/2}$. Comparando coeficientes en los exponentes de (23) y (24), obtenemos las condiciones (22). □

Este Teorema da un criterio general para averiguar equivariancia bajo subgrupos particulares de $\mathrm{Mp^c}(2n;\mathbb{R})$. Por ejemplo, si tomamos $P = R = 0$, $\gamma = 1$ (y $Q \in \mathrm{GL}(2n,\mathbb{C})$), las condiciones (22) se reducen a $QJ = JQ$, $Q^{\mathrm t}JQ = J$, así que hay equivariancia del producto de Bargmann y Moyal bajo transformaciones del tipo $f(z) \mapsto f(Qz)$ si y solo si $Q \in \mathrm{SO}(2n,\mathbb{C}) \cap \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$. En particular, el caso $Q = i\,1_{2n}$ incumple (22), lo cual refleja el hecho de que la transformación de Fourier no deja el producto de Moyal – en $L^2(\mathbb{R}^n)$ – equivariante, sino que lo transforma en la “convolución torcida” [4, 16].

3. Continuidad de productos generalizados

Hasta ahora, los cálculos algebraicos con los núcleos integrales han sido algo formales; es decir, hemos supuesto tácitamente que todas las integrales calculadas convergen (absolutamente), con lo cual los cambios del orden de integración se justifican automáticamente. En general, esto se verifica en una clase de funciones que es al menos densa en el espacio de todas las funciones en juego, y se puede extender la validez de los resultados de las integraciones mediante diversos procesos de paso al límite. Esto sucede aun con el establecimiento del isomorfismo unitario $A\colon L^2(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{F}_n$; para definir A con todo rigor, Bargmann [2] define Af para $f \in \mathcal{G}_\lambda$ (6) mediante una integración y extiende a $L^2(\mathbb{R}^n)$ por densidad. Un estudio detallado de los espacios $\mathcal{G}_\lambda$ y su relación con las distribuciones temperadas sobre $\mathbb{R}^n$ se encuentra en la [3]. Veremos en esta sección que estos espacios proveen una herramienta para estudiar a fondo las propiedades de continuidad del producto de Bargmann y Moyal.

Un producto generalizado $\diamond$ definido en un espacio normado E es *continuo* en la topología de la norma si hay alguna constante $C > 0$ tal que

$$\|f \diamond g\| \leqslant C\,\|f\|\,\|g\| \quad \text{para} \quad f, g \in E.$$

Esto dice que la aplicación $(f,g) \mapsto f \diamond g : E \times E \to E$ es continua en el sentido usual. Sucede, sin embargo, que en general debemos considerar casos en que f, g y $f \diamond g$ viven en espacios distintos de funciones, que no son siempre espacios normados. Por ejemplo, podemos buscar valores positivos de λ, σ, τ tales que la aplicación $(f,g) \mapsto f \diamond g : \mathcal{G}_\sigma \times \mathcal{G}_\tau \to \mathcal{G}_\lambda$ sea continua. Definimos la norma $\|\cdot\|_\lambda$ en $\mathcal{G}_\lambda$ por

$$\|f\|_\lambda := \sup_{z\in\mathbb{C}^n} \exp(-\tfrac12\lambda^2|z|^2)\,|f(z)|.$$

Tenemos una desigualdad del tipo

$$\|f \diamond g\|_\lambda \leqslant C^\lambda_{\sigma\tau}\, \|f\|_\sigma\, \|g\|_\tau \tag{25}$$

toda vez que

$$C^\lambda_{\sigma\tau} := \sup_{z\in\mathbb{C}^n} \iint |B(z,v,w)|\, \exp\bigl\{\tfrac12\bigl[-\lambda^2|z|^2 + \sigma^2|v|^2 + \tau^2|w|^2\bigr]\bigr\}\, d\mu(v)\, d\mu(w) \tag{26}$$

sea finita. Nuestra estrategia será, entonces, buscar condiciones sobre $B(z,v,w)$ que garanticen que el lado derecho de (26) sea finito.

Supongamos, de nuevo, que B es la exponencial de un polinomio cuadrático homogéneo en $\zeta \equiv (z,v,w) \in \mathbb{C}^{3n}$. Escribimos

$$B(\zeta) := \kappa \exp \tfrac12 \zeta\cdot Q\zeta,$$

donde $Q = Q_R + iQ_I$, con $Q_R,\ Q_I \in \mathbb{R}^{3n\times 3n}$. Denotamos la parte simétrica de una matriz A por $\widehat{A} := \frac12(A + A^{\mathrm t})$. También, escribimos $\zeta =: \xi + i\eta$ con $\xi,\eta \in \mathbb{R}^{3n}$; $z =: \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$ con $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \in \mathbb{R}^n$; y denotamos $\underline{dz} := \underline{d\operatorname{Re} z}\,\underline{d\operatorname{Im} z}$.

Usando estas notaciones, el integrando en el lado derecho de (26) tiene la forma

$$\kappa \exp\bigl\{-\tfrac12\bigl[\xi\cdot(D - \widehat{Q}_R)\xi + 2\xi\cdot\widehat{Q}_I\eta + \eta\cdot(D + \widehat{Q}_R)\eta\bigr]\bigr\} \tag{27}$$

donde D es una matriz diagonal en $\mathbb{R}^{3n\times 3n}$ con entradas diagonales λ^2, $2-\sigma^2$, $2-\tau^2$ (cada una repetida n veces).

Como debemos integrar (26) respecto de v y w pero no respecto de z, conviene reacomodar esta última matriz: permutamos la base canónica en $\mathbb{C}^{3n} \simeq \mathbb{R}^{6n}$ para que las coordenadas $(\xi,\eta) = (\operatorname{Re} z, \operatorname{Re} v, \operatorname{Re} w, \operatorname{Im} z, \operatorname{Im} v, \operatorname{Im} w)$ se reordenen como $(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, \operatorname{Re} v, \operatorname{Im} v, \operatorname{Re} w, \operatorname{Im} w)$. Entonces la expresión (27) se escribe en la forma

$$\kappa \exp\bigl\{-\tfrac12\bigl[z\cdot Pz + 2\omega\cdot Rz + \omega\cdot S\omega\bigr]\bigr\} \tag{28}$$

donde $\omega := (v,w) \in \mathbb{C}^{2n} \simeq \mathbb{R}^{4n}$. Aquí $P \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ y $S \in \mathbb{R}^{4n\times 4n}$ son matrices simétricas reales.

Lema 3. *La integral de* (28) *respecto de ω converge y representa una función acotada (de z) si y solo si se cumplen:*

$$S > 0 \quad en \quad \mathbb{R}^{4n\times 4n}, \qquad P - R^{\mathrm t}S^{-1}R \geqslant 0 \quad en \quad \mathbb{R}^{2n\times 2n}.$$

Demostración. Calculamos que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{4n}} \exp\bigl\{-\tfrac12\bigl[z\cdot Pz + 2\omega\cdot Rz + \omega\cdot S\omega\bigr]\bigr\}\, \underline{d\omega} \\
&= (\det S)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^{4n}} \exp\bigl\{\tfrac12\bigl[-z\cdot Pz + z\,.R^{\mathrm t}S^{-1}Rz - t^2\bigr]\bigr\}\, \underline{dt} \\
&= \det(2S)^{-1/2} \exp\bigl\{\tfrac12\bigl[-z\cdot Pz + z\cdot R^{\mathrm t}S^{-1}Rz\bigr]\bigr\}
\end{aligned}$$

toda vez que $S > 0$; hemos hecho la sustitución lineal $t := S^{1/2}\omega + S^{-1/2}Rz$ para simplificar la integral. (Si S no es definida positiva, posee un autovalor no positivo y la integral de (28) diverge). Basta notar entonces que $\exp(-\frac12 z\cdot Tz)$ es acotada si y solo si $T \geqslant 0$. □

Podemos ahora ejemplificar la condición de continuidad (25) en diversos casos particulares. Para el producto ordinario de funciones con $n = 1$, por ejemplo, obtenemos $\widehat{Q}_I = 0$,

$$\widehat{Q}_R = Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y luego

$$P = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 2-\sigma^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\tau^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\tau^2 \end{pmatrix}.$$

La condición $S > 0$ es equivalente a $\sigma < \sqrt{2}$, $\tau < \sqrt{2}$. Además,

$$R^{\mathrm{t}} S^{-1} R = \left\{(2-\sigma^2)^{-1} + (2-\tau^2)^{-1}\right\} 1_2\,,$$

así que las condiciones de continuidad (25) son, en este caso:

$$\sigma < \sqrt{2}, \quad \tau < \sqrt{2}, \quad \lambda^2 \geqslant \frac{1}{2-\sigma^2} + \frac{1}{2-\tau^2}. \tag{29}$$

(Notemos que en espacios $\mathcal{G}_\lambda$ con $\lambda \geqslant \sqrt{2}$, el producto ordinario es a veces continuo; sin embargo, no puede expresarse mediante el núcleo $\exp[z(v+w)]$, porque las integrales gaussianas anteriores divergen. Esta restricción no es de mayor importancia, pues cualquier espacio $\mathcal{G}_\lambda$ con $\lambda > 1$ incluye todas las funciones que corresponden, por (5), a distribuciones temperadas sobre $\mathbb{R}^n$.)

Como segundo ejemplo, tomamos de nuevo el producto de Bargmann y Moyal. Obtenemos

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & K & \overline{K} \\ \overline{K} & 0 & K \\ K & \overline{K} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \widehat{Q}_R = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \widehat{Q}_I = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & J & -J \\ -J & 0 & J \\ J & -J & 0 \end{pmatrix},$$

(con $2K = 1 + iJ$ como antes); luego

$$S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b\,1 & -1 & 0 & J \\ -1 & c\,1 & -J & 0 \\ 0 & J & b\,1 & 1 \\ -J & 0 & 1 & c\,1 \end{pmatrix}, \qquad R = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -J \\ -1 & J \\ -J & 1 \\ J & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} \lambda^2\,1 & 0 \\ 0 & \lambda^2\,1 \end{pmatrix}$$

con $b := 2(2-\sigma^2)$, $c := 2(2-\tau^2)$.

En este caso S es una matriz simétrica, y por lo tanto es definida positiva si y solo si sus menores principales básicos son todos positivos. Por cálculo directo, se obtiene que esto sucede si y solo si $b > 0$, $c > 0$ y $bc > 4$. Luego, la condición $S > 0$ se cumple si y solo si

$$\sigma < \sqrt{2}, \quad \tau < \sqrt{2}, \quad (2-\sigma^2)(2-\tau^2) > 1. \tag{30}$$

La matriz

$$P - R^{\mathrm{t}} S^{-1} R = \begin{pmatrix} \lambda^2\,1 & 0 \\ 0 & (\lambda^2 - b^{-1} - c^{-1})1 \end{pmatrix}$$

es positiva si y solo si $\lambda^2 \geqslant b^{-1} + c^{-1}$, así que la condición de continuidad (29) en este caso se reduce a:

$$\lambda^2 \geqslant \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2-\sigma^2} + \frac{1}{2-\tau^2}\right\}. \tag{31}$$

La desigualdad (31) nos permite ahondar en las propiedades de continuidad del producto de Bargmann y Moyal. Cuando variamos σ y τ, cambiamos el dominio de definición de este producto. Conviene entonces introducir los espacios

$$\mathcal{G}_< := \bigcup_{\lambda<1} \mathcal{G}_\lambda\,, \quad \mathcal{G}_> := \bigcap_{\lambda>1} \mathcal{G}_\lambda\,.$$

Si $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathbb{C}^{2n}) = A(\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}))$ denota el espacio de funciones analíticas [3] en $\mathbb{C}^{2n}$ que corresponde a las funciones de Schwartz en $\mathbb{R}^{2n}$, tenemos

$$\mathcal{G}_< \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{G}_1 \subset \mathcal{E}' \subset \mathcal{G}_>\,. \tag{32}$$

Todas estas inclusiones son continuas respecto de las topologías apropiadas. Más precisamente, si $\lambda < 1$, $\rho > 1$, se pueden encontrar en [3] las pruebas de que

$$\mathcal{G}_\lambda \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{G}_1 \subset \mathcal{E}' \subset \mathcal{G}_\rho \tag{33}$$

es una cadena de inclusiones continuas. Ahora definimos sobre $\mathcal{G}_<$ la topología inductiva [17], es decir, la topología localmente convexa más fuerte tal que todas las inclusiones $\mathcal{G}_\lambda \subset \mathcal{G}_<$ sean continuas, y sobre $\mathcal{G}_>$ definimos la topología proyectiva, es decir, la topología localmente convexa más débil tal que todas las inclusiones $\mathcal{G}_> \subset \mathcal{G}_\rho$ sean continuas. La continuidad de las inclusiones primera y última en (32) es consecuencia de la continuidad de las inclusiones correspondientes en (33).

Obsérvese que $\mathcal{G}_>$ es un espacio de Fréchet porque su topología está determinada por la familia de seminormas $\|\cdot\|_{(n+1)/n}$, mientras que $\mathcal{E}'$ no es de Fréchet, así que $\mathcal{E}' \neq \mathcal{G}_>$; también, $\mathcal{E} \neq \mathcal{G}_<$ ya que $\mathcal{E}$ es de Fréchet pero $\mathcal{G}_<$ no lo es.

Teorema 5. *El producto de Bargmann y Moyal es continuo como aplicación bilineal de $\mathcal{G}_< \times \mathcal{G}_<$ en $\mathcal{G}_<$.*

Demostración. Sean $f, g \in \mathcal{G}_<$. Entonces hay $\sigma < 1$ tal que $f, g \in \mathcal{G}_\sigma$. (Tomamos $\tau = \sigma$.) Si $\sigma = \sqrt{1-\varepsilon}$, tenemos $2 - \sigma^2 = 1 + \varepsilon$, así que la condición de continuidad (31) es $\lambda^2 \geqslant 1/(1+\varepsilon)$. Elige λ tal que

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} \leqslant \lambda < 1. \tag{34}$$

Entonces $f \diamond g \in \mathcal{G}_\lambda \subset \mathcal{G}_<$.

Si $\lambda < 1$, elegimos ε para que (34) se cumpla con igualdad. Si tomamos $\sigma = \tau = \sqrt{1-\varepsilon}$, como antes, entonces el producto de Bargmann y Moyal es una aplicación bilineal y continua de $\mathcal{G}_\sigma \times \mathcal{G}_\sigma$ en $\mathcal{G}_\lambda$, por (25), y por ende continua de $\mathcal{G}_\sigma \times \mathcal{G}_\sigma$ en $\mathcal{G}_<$. Por un teorema de Mallios [17], esto es suficiente para que esta aplicación bilineal $\mathcal{G}_< \times \mathcal{G}_< \to \mathcal{G}_<$ sea (conjuntamente) continua, ya que $\mathcal{G}_< = \bigcup_{\sigma<1} \mathcal{G}_\sigma$ con la topología inductiva; note que $\varepsilon \downarrow 0$ y $\sigma \uparrow 1$ cuando $\lambda \uparrow 1$. □

El espacio de funciones $\mathcal{G}_<$ es entonces un álgebra topológica con el producto de Bargmann y Moyal. Este es un ejemplo interesante de un álgebra topológica, ya que tiene producto conjuntamente continuo; las álgebras que no son de Banach suelen ser separadamente continuas, sin más [17]. Sin embargo, la clase de funciones en $\mathcal{G}_<$ es pequeña y conviene ampliarla. Veremos ahora que los espacios $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_>$, aunque no son álgebras, sí son módulos para $\mathcal{G}_<$.

Teorema 6. *El producto de Bargmann y Moyal es una aplicación bilineal de $\mathcal{G}_< \times \mathcal{G}_1$ en $\mathcal{G}_<$ y de $\mathcal{G}_< \times \mathcal{G}_>$ en $\mathcal{G}_<$; en el primer caso, esta aplicación bilineal es continua.*

Demostración. Si en (30) se toma $\tau = 1$, se obtiene $\sigma < 1$ como condición necesaria para la convergencia del producto. Si $\sigma = \sqrt{1-\varepsilon}$, tenemos que $2 - \sigma^2 = 1 + \varepsilon$, y (31) queda $\lambda^2 \geqslant (2+\varepsilon)/(2+2\varepsilon)$. Elegimos λ tal que $(2+\varepsilon)/(2+2\varepsilon) \leqslant \lambda^2 < 1$. Entonces, $\{\, f \diamond g : f \in \mathcal{G}_\sigma,\ g \in \mathcal{G}_1 \,\} \subset \mathcal{G}_\lambda$; en consecuencia, $\{\, f \diamond g : f \in \mathcal{G}_<,\ g \in \mathcal{G}_1 \,\} \subset \mathcal{G}_<$.

Si tomamos $\lambda = (1+\varepsilon)^{-1/2}$ con $\tau = 1$, obtenemos $\sigma^2 = (1-3\varepsilon)/(1-\varepsilon)$ en (31); entonces $\lambda \uparrow 1 \implies \varepsilon \downarrow 0 \implies \sigma \uparrow 1$. Argumentando como en el Teorema 5, con $\mathcal{G}_\sigma \times \mathcal{G}_1$ en vez de $\mathcal{G}_\sigma \times \mathcal{G}_\sigma$, se obtiene que el producto de Bargmann y Moyal $\mathcal{G}_< \times \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_<$ es continuo.

Por otra parte, podemos elegir $\sigma < 1$ y τ con $1 < \tau < \sqrt{2}$. Para que el producto de Bargmann y Moyal esté definido en $\mathcal{G}_\sigma \times \mathcal{G}_\tau$, por (30) se tiene que la media geométrica de $(2-\sigma^2)^{-1}$ y $(2-\tau^2)^{-1}$ debe ser menor que 1, lo cual sería inmediato si la media *aritmética* fuera menor que 1. Por (31), bastaría entonces tomar $\lambda < 1$. En particular, si $\tau = \sqrt{1+\varepsilon}$ y $\sigma = \sqrt{1-3\varepsilon}$, la fórmula (31) se convierte en

$$\lambda^2 \geqslant \frac{1}{1+3\varepsilon}$$

y basta tomar λ con $(1+3\varepsilon)^{-1} \leqslant \lambda < 1$. Cuando $\varepsilon \downarrow 0$, obtenemos

$$f \in \mathcal{G}_<,\ g \in \mathcal{G}_> \implies f \diamond g \in \mathcal{G}_< . \qquad \square$$

Para el producto de Moyal en $\mathbb{R}^{2n}$, el resultado análogo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$, $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n}) \implies f \times g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ es *falso*: $f \times g$ es una función suave pero no necesariamente declinante [4]. El Teorema 6 proporciona entonces un espacio de funciones de prueba $V(\mathcal{G}_<)$, pues $V(\mathcal{G}_<) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ densamente por (32), que es estable bajo el producto de Moyal a la derecha (o a la izquierda) por distribuciones temperadas cualesquiera.

No sabemos si el producto $(f,g) \mapsto f \diamond g$ es (separadamente) continuo de $\mathcal{G}_< \times \mathcal{G}_>$ en $\mathcal{G}_<$; por la naturaleza de las topologías de estos espacios, es poco probable que así sea. A pesar de esta posible falta de continuidad, podemos aprovechar la "estructura fina" de los espacios $\mathcal{G}_\lambda$ para extender el producto de Bargmann y Moyal por dualidad a $\mathcal{G}_> \times \mathcal{G}_>$. Recordamos de [4, 18] que el *álgebra de Moyal* $\mathcal{M}(\mathbb{R}^{2n})$ consta de las distribuciones temperadas $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ tales que $T \times f$ y $f \times T$ quedan en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ para todo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$. Por el Teorema 6, el análogo en nuestro caso es el espacio $\mathcal{G}_>$. Tenemos el siguiente resultado.

Teorema 7. *El espacio $\mathcal{G}_>$ es un álgebra bajo el producto de Bargmann y Moyal.*

Demostración. Por la ecuación (30), el producto $f \diamond g$ no se define directamente por la integral (1) si $f \in \mathcal{G}_\sigma$, $g \in \mathcal{G}_\tau$ con $\sigma > 1$ y $\tau > 1$. No obstante, podemos definir el producto de Bargmann y Moyal *por dualidad*, siguiendo el procedimiento desarrollado en [4]. Definimos, para todo $h \in \mathcal{G}_<$,

$$\langle f \diamond g, h \rangle := \langle f, g \diamond h \rangle, \tag{35}$$

donde el lado derecho denota la forma bilineal canónica (9). La *ciclicidad* del producto de Bargmann y Moyal garantiza que esta definición es consistente con las fórmulas anteriores, debido a (11).

Notamos que, en general,

$$|\langle f, h\rangle| \leqslant A_{\lambda\mu}\, \|f\|_\lambda\, \|h\|_\mu \quad \text{si} \quad \lambda^2 + \mu^2 < 2,$$

donde $A_{\lambda\mu} = (1 - \frac{1}{2}(\lambda^2 + \mu^2))^{-n}$. En particular, la expresión $\langle f, h\rangle$ converge si $f \in \mathcal{G}_>$ y $h \in \mathcal{G}_<$ o viceversa; luego el lado derecho de (35) tiene sentido.

Si $\varepsilon > 0$, tomamos $\tau^2 := 1 - 3\varepsilon$, $\sigma^2 := 1 + \varepsilon$, $\lambda^2 := 1/(1 + 3\varepsilon)$ y $\mu^2 := 1 + 2\varepsilon$. Si $h \in \mathcal{G}_\tau$, para $g \in \mathcal{G}_\sigma$, $f \in \mathcal{G}_\mu$ obtenemos

$$|\langle f, g \diamond h\rangle| \leqslant A_{\lambda\mu}\, C^\lambda_{\sigma\tau}\, \|f\|_\mu\, \|g\|_\sigma\, \|h\|_\tau \tag{36}$$

así que $h \mapsto \langle f, g \diamond h\rangle$ es continua de $\mathcal{G}_\tau$ en $\mathbb{C}$. Como $\mathcal{G}_> \subset \mathcal{G}_\sigma$, $\mathcal{G}_> \subset \mathcal{G}_\mu$ para todo ε, y como $\mathcal{G}_<$ tiene la topología inductiva como unión de los $\mathcal{G}_\tau$ con $\tau < 1$, vemos que $h \mapsto \langle f, g \diamond h\rangle$ es un funcional lineal continuo sobre $\mathcal{G}_<$, toda vez que $f, g \in \mathcal{G}_>$.

El espacio dual de $\mathcal{G}_<$, respecto de la forma lineal canónica (9), es precisamente el espacio $\mathcal{G}_>$; para ver eso, podemos considerar los espacios de Hilbert

$$\mathcal{H}_\lambda := \left\{ f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} \text{ analítica} : \int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2\, d\mu(\lambda z) < +\infty \right\}$$

para $\lambda > 0$. Por estimación de normas, es fácil comprobar [3] que $\mathcal{G}_\mu \subset \mathcal{H}_\lambda \subset \mathcal{G}_\lambda$ con inclusiones continuas, cuando $\mu < \lambda$. Concluimos que

$$\mathcal{G}_< = \bigcup_{\lambda<1} \mathcal{H}_\lambda\,, \qquad \mathcal{G}_> = \bigcap_{\lambda>1} \mathcal{H}_\lambda\,.$$

Ahora el espacio dual de $\mathcal{H}_\lambda$ respecto de la dualidad (9) es $\mathcal{H}_{1/\lambda}$. Entonces $\mathcal{G}_>$ es un espacio de Fréchet reflexivo cuyo dual (fuerte) es $\mathcal{G}_<$; debido a esa reflexividad, el espacio dual (fuerte) de $\mathcal{G}_<$ es $\mathcal{G}_>$.

En consecuencia, hay un único $k \in \mathcal{G}_>$ con $\langle k, h\rangle = \langle f, g \diamond h\rangle$. Definimos $f \diamond g := k$. De esta manera, vemos que (35) tiene sentido y que $\mathcal{G}_>$ es cerrado bajo este producto.

Para comprobar la asociatividad del producto extendido en $\mathcal{G}_>$, solo hay que notar que las identidades

$$\begin{aligned} \langle (f \diamond g) \diamond h, k\rangle &= \langle f \diamond g, h \diamond k\rangle = \langle f, g \diamond (h \diamond k)\rangle \\ &= \langle f, (g \diamond h) \diamond k\rangle = \langle f \diamond (g \diamond h), k\rangle \end{aligned}$$

se verifican si:

(a) $f \in \mathcal{G}_>$ y $g, h, k \in \mathcal{G}_<$;

(b) $f, g \in \mathcal{G}_>$ y $h, k \in \mathcal{G}_<$;

(c) $f, g, h \in \mathcal{G}_>$ y $k \in \mathcal{G}_<$.

Luego $\mathcal{G}_>$ es un álgebra asociativa bajo el producto definido por (35). Observe que la identidad $\exp(\frac{1}{2}z^2)$ para este producto pertenece a $\mathcal{G}_>$.

Para cada $h \in \mathcal{G}_<$, el lado izquierdo de (36) es $p_h(f \diamond g)$, donde $\{\, p_h : h \in \mathcal{G}_< \,\}$ es una familia de seminormas que definen la topología de $\mathcal{G}_>$; luego la desigualdad (36) expresa que el producto en $\mathcal{G}_>$ es (conjuntamente) continuo. Concluimos que $\mathcal{G}_>$ es un álgebra de Fréchet bajo el producto de Bargmann y Moyal. □

Es interesante notar que $V(\mathcal{G}_>)$ es un espacio de funciones generalizadas que forman un álgebra bajo una extensión del producto de Moyal, y que contiene a todas las distribuciones temperadas $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$. Este hecho da sustento a una reciente afirmación de Narcowich [19] que se puede formar el producto de Moyal de distribuciones temperadas; pero en general el producto ya no es una distribución temperada. Para productos de Moyal de distribuciones no temperadas, consúltese [19].

Finalmente, debemos observar que el espacio de Hilbert $\mathcal{F}_{2n}$ es un álgebra de Banach – de hecho, un álgebra de Hilbert [20] – bajo el producto de Bargmann y Moyal. Este resultado es consecuencia inmediata del hecho de que $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ es un álgebra bajo el producto de Moyal. Pero también podemos obtenerlo directamente mediante nuestro formalismo. Indicaremos el procedimiento brevemente, remitiendo a [9] para el detalle de los cálculos. Tomamos $n = 1$ para mayor sencillez.

Si $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ y $f(z) := z_1 + iz_2$, entonces $f \in \mathcal{F}_2$ y $\|f\| \equiv (f \mid f)^{1/2} = \sqrt{2}$ por (2). Si colocamos

$$z_\sharp := \frac{z_1 + iz_2}{\sqrt{2}}, \quad z_\flat := \frac{z_1 - iz_2}{\sqrt{2}}, \quad z' := (z_\sharp, z_\flat),$$

entonces $d\mu(z') = d\mu(z)$. Usando este cambio de variable, se verifica que los polinomios

$$u_{mn}(z) := \frac{z_\flat^m z_\sharp^n}{\sqrt{m!\,n!}}$$

forman una base ortonormal de $\mathcal{F}_2$.

El trinúcleo del producto de Bargmann y Moyal puede reacomodarse como

$$B(z, v, w) = \exp\bigl[z_\flat v_\sharp + v_\flat w_\sharp + w_\flat z_\sharp\bigr]$$

y obtenemos, al aplicar (19) repetidamente:

$$\begin{aligned}
(u_{mn} \diamond u_{rs})(z) &= \iint B(z, v, w)\, u_{mn}(\bar{v})\, u_{rs}(\bar{w})\, d\mu(v)\, d\mu(w) \\
&= \iiiint \frac{\bar{v}_\sharp^m \bar{v}_\flat^n \bar{w}_\sharp^r \bar{w}_\flat^s}{\sqrt{m!\,n!\,r!\,s!}} \exp\bigl[z_\flat v_\sharp + v_\flat w_\sharp + w_\flat z_\sharp\bigr]\, d\mu(v_\sharp)\, d\mu(v_\flat)\, d\mu(w_\sharp)\, d\mu(w_\flat) \\
&= \iint \frac{z_\flat^m \bar{v}_\flat^n \bar{w}_\sharp^r z_\sharp^s}{\sqrt{m!\,n!\,r!\,s!}} \exp[v_\flat w_\sharp]\, d\mu(v_\flat)\, d\mu(w_\sharp) \\
&= u_{ms}(z) \iint \frac{\bar{v}_\flat^n \bar{w}_\sharp^r}{\sqrt{n!\,r!}} \exp[v_\flat w_\sharp]\, d\mu(v_\flat)\, d\mu(w_\sharp) \\
&= u_{ms}(z) \int \frac{\bar{v}_\flat^n v_\flat^r}{\sqrt{n!\,r!}}\, d\mu(v_\flat) = u_{ms}(z)\, \delta_{nr}.
\end{aligned}$$

La continuidad del producto de Bargmann y Moyal en $\mathcal{F}_2$ es ahora inmediata.

Teorema 8. *El espacio $\mathcal{F}_2$ es un álgebra de Banach bajo el producto de Bargmann y Moyal.*

Demostración. Sean f, g dos funciones en $\mathcal{F}_2$ con $f = \sum_{m,n} \alpha_{mn} u_{mn}$ y $g = \sum_{r,s} \beta_{rs} u_{rs}$. Entonces

$$f \diamond g = \sum_{m,n,r,s} \alpha_{mn}\beta_{rs}\, u_{mn} \diamond u_{rs} = \sum_{m,n,r,s} \alpha_{mn}\beta_{rs}\, \delta_{nr}\, u_{ms} = \sum_{m,n,s} \alpha_{mn}\beta_{ns}\, u_{ms}.$$

Por lo tanto,

$$\|f \diamond g\|^2 = \Big\| \sum_{m,n,s} \alpha_{mn}\beta_{ns}\, u_{ms} \Big\|^2 \leqslant \sum_{m,n,s} |\alpha_{mn}\beta_{ns}|^2 \leqslant \Big(\sum_{m,n} |\alpha_{mn}|^2 \Big) \Big(\sum_{n,s} |\beta_{ns}|^2 \Big) = \|f\|^2\, \|g\|^2. \qquad \square$$

Agradecimientos

Algunos resultados de este trabajo se encuentran en la tesis de licenciatura de la primera autora ICA, quien agradece el apoyo del Departamento de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica durante el desarrollo de esa tesis. JCV agradece el apoyo de la Vicerrectoría de Investigación de la Universidad de Costa Rica.

Referencias

[1] J. E. Moyal, "Quantum mechanics as a statistical theory", Proc. Cambridge Philos. Soc. **45** (1949), 99–124.

[2] V. Bargmann, "On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform. I", Commun. Pure Appl. Math. **14** (1961), 187–214.

[3] V. Bargmann, "On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform. II", Commun. Pure Appl. Math. **20** (1967), 1–101.

[4] J. M. Gracia-Bondía and J. C. Várilly, "Algebras of distributions suitable for phase-space quantum mechanics. I", J. Math. Phys. **29** (1988), 869–879.

[5] C. Itzykson, "Remarks on boson commutation rules", Commun. Math. Phys. **4** (1967), 92–122.

[6] P. L. Robinson and J. H. Rawnsley, *The Metaplectic Representation, Mp^c Structures and Geometric Quantization*, Memoirs of the AMS **410**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1989.

[7] V. Fock, "Verallgemeinerung und Lösung der Diracschen statistischen Gleichung", Z. Physik **49** (1928), 339–357.

[8] I. E. Segal, *Mathematical Problems of Relativistic Physics*, Lectures in Applied Mathematics **2**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1963.

[9] I. Castillo-Arias, "Productos cuánticos en espacios de funciones analíticas", tesis de licenciatura, Universidad de Costa Rica, San José, 1988.

[10] J. C. Várilly, E. de Faría and J. M. Gracia-Bondía, "Algunas fórmulas útiles para productos torcidos", Cienc. Tec. (CR) **10** (1986), 81–90.

[11] J. C. Várilly and J. M. Gracia-Bondía, "The Moyal representation for spin", Ann. Phys. **190** (1989), 107–148.

[12] J. F. Cariñena, J. M. Gracia-Bondía and J. C. Várilly, "Relativistic quantum kinematics in the Moyal representation", J. Phys. A **23** (1990), 901–933.

[13] J. von Neumann, "Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren", Math. Ann. **104** (1931), 570–578.

[14] R. Howe, "On the role of the Heisenberg group in harmonic analysis", Bull. Amer. Math. Soc. **3** (1980), 821–843.

[15] M. Gadella, J. M. Gracia-Bondía, L. M. Nieto-Calzada y J. C. Várilly, "Quadratic Hamiltonians in phase space quantum mechanics", J. Phys. A **22** (1989), 2709–2738.

[16] D. Kastler, "The C^*-algebras of a free boson field", Commun. Math. Phys. **1** (1965), 14–48.

[17] A. Mallios, *Topological Algebras: Selected Topics*, North-Holland, Amsterdam, 1986.

[18] M. A. Antonets, "The classical limit for Weyl quantization", Lett. Math. Phys. **2** (1978), 241–245.

[19] F. J. Narcowich, "Distributions of $\hbar$-positive type and applications", J. Math. Phys. **30** (1989), 2565–2573.

[20] J. A. Dieudonné, *Éléments d'Analyse*, tomo 2, Gauthier-Villars, Paris, 1969.