Análisis de la tasa instantánea de interés a través del análisis de su representación gráfica

Laura S. Bravino, Oscar A. Margaria,
María Valentina Ceballos Salas

Ponencia presentada en XXXV Jornadas Nacionales de Profesores Universitarios de Matemática Financiera realizado en 2014 por la Asociación de Profesores Universitarios de Matemática Financiera. Posadas. Misiones, Argentina

"ANÁLISIS DE LA TASA INSTANTÁNEA DE INTERÉS A PARTIR DE SU REPRESENTACIÓN GRÁFICA"

AUTORES:
Cra. Laura S. BRAVINO
Mgter. Oscar A. MARGARIA
Esp. Valentina CEBALLOS SALAS

Departamento de Estadística y Matemática
Facultad de Ciencias Económicas
Universidad Nacional de Córdoba.
laubravino@hotmail.com
omargaria@hotmail.com
mvaleceballos@gmail.com

RESUMEN

El estudio de la tasa instantánea de interés ha sido abordado en múltiples textos de Matemática Financiera realizándose su análisis con diferentes ópticas y grado de profundidad. Suele ser uno de los contenidos del programa de la asignatura más complejo de abordar en el aula ya que requiere conocimientos de análisis matemático y un mayor nivel de abstracción que el resto de los temas.

Debido a la importancia conceptual del crecimiento del capital en el campo continuo, así como su aplicación al momento del estudio de los modelos de valuación de activos financieros, y por otra parte de tomar conocimiento sobre los temas desarrollados en la asignatura Análisis Matemático, en particular, sobre el concepto de derivada en un punto, se plantea en este trabajo adaptar el desarrollo del tema "Monto en el campo continuo" y la consecuente obtención de la tasa instantánea de interés o tasa de capitalización instantánea, tanto en forma analítica como a través de la representación gráfica, utilizando el software Geogebra.

Este análisis puede resultar de gran ayuda al momento de analizar la tasa instantánea de interés ya que nos permite vincularla con la representación de operaciones a interés compuesto y la posibilidad de observar de manera conjunta el procedimiento de cálculo matemático y gráfico.

PALABRAS CLAVES:
Tasa instantánea de interés; derivada en un punto; representación gráfica.

INTRODUCCIÓN

De acuerdo con el postulado fundamental del campo financiero, el capital crece con el transcurso del tiempo. Ese crecimiento se produce de forma continua pero se mide al final de cada unidad de tiempo.

Es decir, el capital devenga intereses en forma continua pero por razones prácticas, en las operaciones financieras sólo se determina la magnitud de los intereses al final de cierto tiempo.

Se establece entonces, un concepto fundamental dentro del campo financiero: la tasa de crecimiento instantáneo del capital.

Sea $f(t)$ el capital en el momento t y sea t la variable que mide el tiempo en alguna unidad de medida cualquiera (días, meses, trimestres, etc.), el interés producido por el capital $f(t)$ durante n unidades de tiempo, está determinado por el crecimiento del capital en ese lapso. Al final, obtendremos $f(t+n)$.

Si a este valor le restamos el capital $f(t)$:

$$f(t+n) - f(t)$$

El resultado es el interés producido por el capital $f(t)$ en n unidades de tiempo.

Si $n=1$, entonces $f(t+1) - f(t)$ nos indica el interés o incremento de un capital $f(t)$ en una unidad de tiempo.

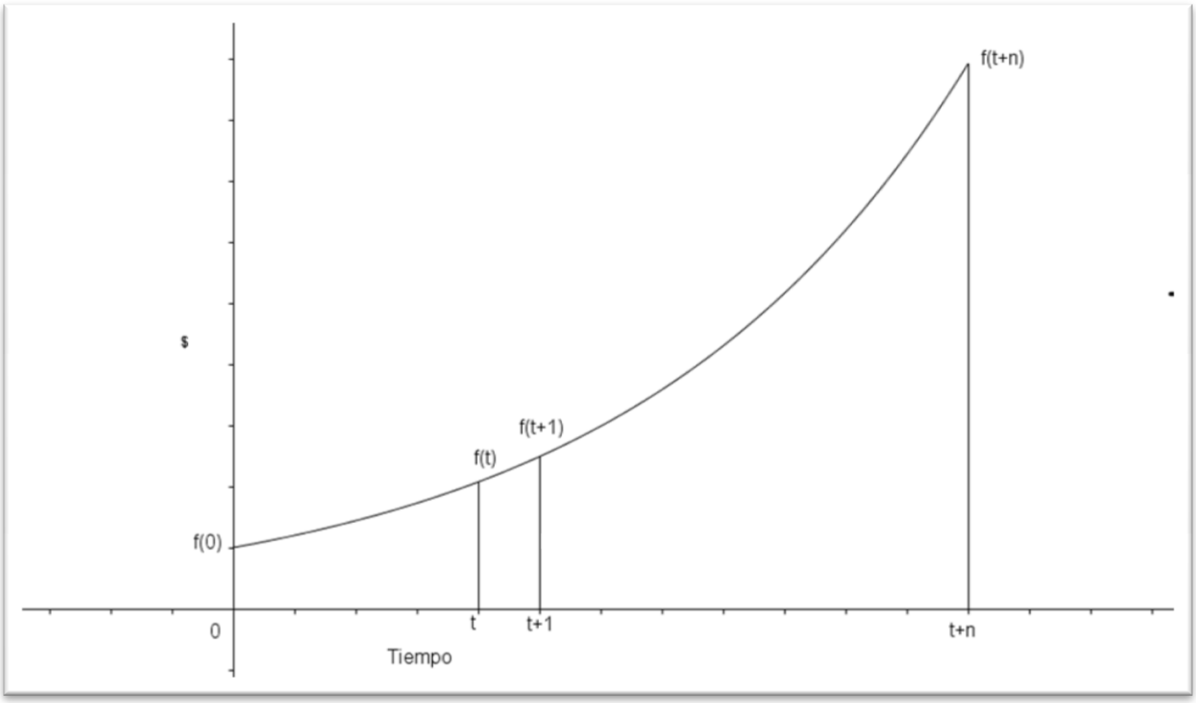

Gráfico 1

En el Gráfico 1 se observa el capital $f(t)$ luego de transcurrida una unidad de tiempo y el capital final luego de transcurridas n unidades de tiempo. En el Gráfico 2, se representa el crecimiento de un capital inicial en una unidad de tiempo.

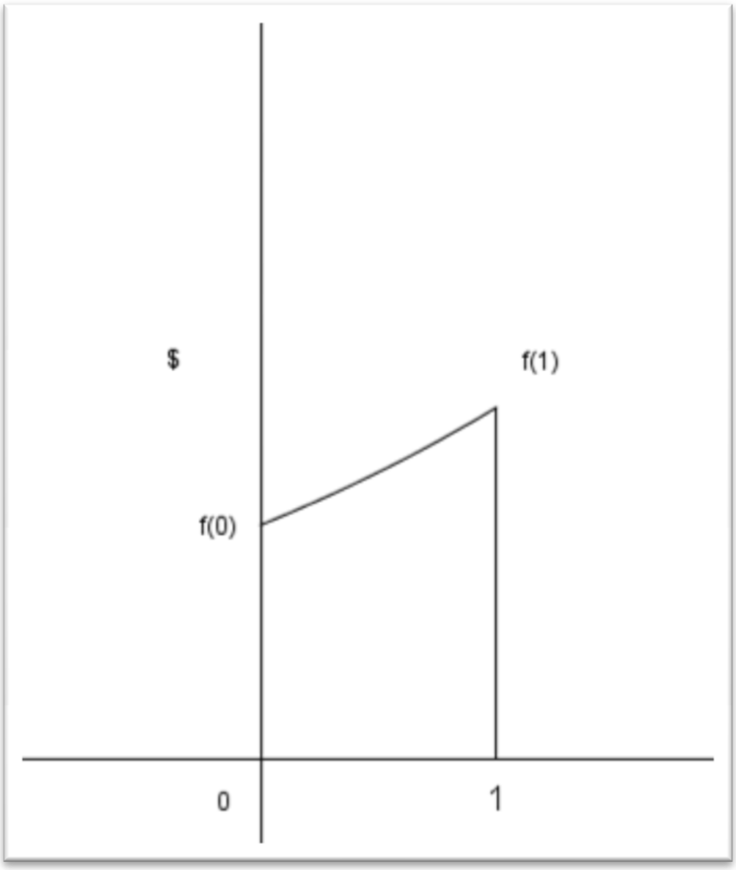

Gráfico 2

Monto en el campo continuo

Sabemos que en el campo discreto el capital al final del plazo de la operación se determina a través de la expresión:

$$f(n) = f(0)(1+i)^n$$

Siendo i la tasa de interés de la unidad de tiempo de la operación.

Si $n = 1$:

$$f(1) = f(0)(1+i)^1$$

Por otra parte, la tasa de interés puede obtenerse a partir de la tasa de interés proporcional:

$$i = \frac{i^{(m)}}{m}$$

Siendo m la cantidad de unidades de tiempo contenidas en el período de la tasa proporcional.

Trabajando con $n = 1$, si a la unidad de tiempo se la divide en m partes iguales, el monto $f(m)$ producido al final de la unidad de tiempo es:

$$f(m) = f(0)(1 + \frac{i^{(m)}}{m})^m \qquad (1)$$

Siendo $\frac{i^{(m)}}{m}$ la tasa de interés para el m-ésimo. Por ejemplo, tomando una tasa de interés de 0,70 anual, si calculamos las sucesivas tasas de interés equivalentes para unidades de tiempo cada vez más pequeñas, se observa en la Tabla 1 que la tasa proporcional anual varía, tendiendo a un valor de 0,530628.

Unidad de tiempo	Tasa de interés	Tasa Proporcional Anual
año	0,70 anual	0,7000000
semestre	0,30384 semestral	0,6076810
mes	0,045211 mensual	0,5425350
día	0,001455 diaria	0,5310141
hora	0,00006 p/1 hora	0,5306443
1 minuto	0,000001 p/ 1 minuto	0,5306285

Tabla 1

En el Gráfico 3 se muestra la tasa equivalente semestral y la proporcional anual.

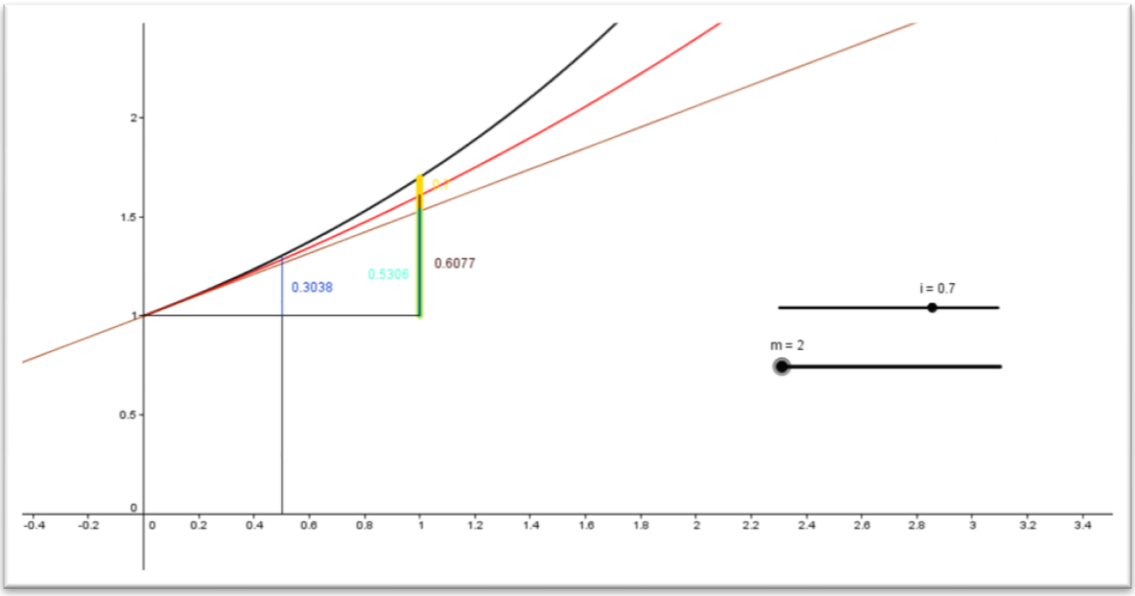

Gráfico 3

En el Gráfico 4, la tasa equivalente mensual y la proporcional anual.

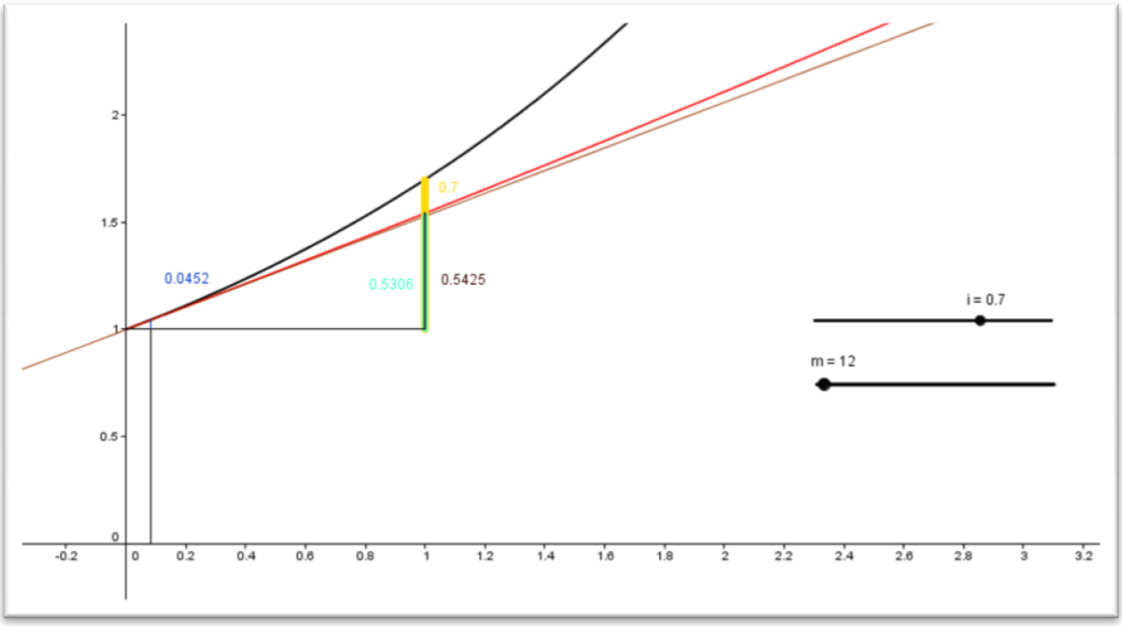

Gráfico 4

En el Gráfico 5, la tasa equivalente diaria y la proporcional anual.

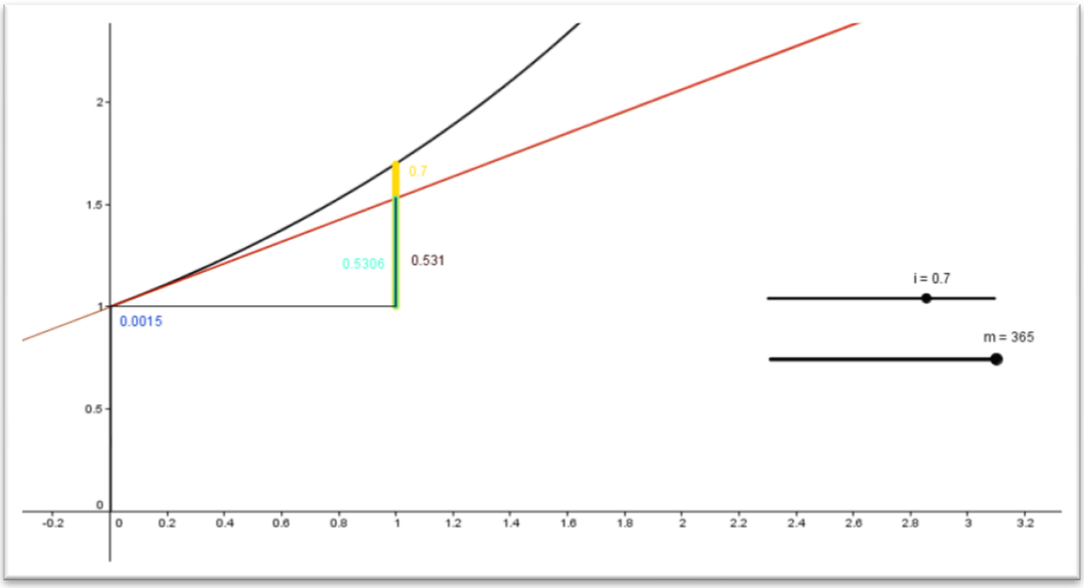

Gráfico 5

El objetivo será demostrar que esta tasa que tiene un número grande de capitalizaciones, cuando capitaliza para una unidad de tiempo cada vez menor se aproxima a la tasa instantánea de interés o la tasa de capitalización instantánea.

Haciendo $f(0) = 1$ y tomando límite en la expresión anterior (1) para cuando m tiende a infinito, el interés se capitalizará continuamente:

$$\lim_{m\to\infty} f(m) = \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$$

Queda una indeterminada del tipo 1^{∞}

Aplicando logaritmo natural en ambos miembros, en la ecuación (1):

$$\ln f(m) = \ln \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$$

Por propiedad de logaritmos:

$$\ln f(m) = m \cdot \ln \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)$$

Tomando límite en ambos miembros para m que tiende a infinito:

$$\lim_{m\to\infty} \ln f(m) = \lim_{m\to\infty} m. \ln \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)$$

En el segundo miembro queda una indeterminada del tipo $\infty. 0$

Para poder obtener una indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$ y poder aplicar la regla de L'Hôpital, se divide numerador y denominador de la fracción por m:

$$\lim_{m\to\infty} \ln f(m) = \lim_{m\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)}{\frac{1}{m}}$$

Aplicando la regla de L'Hôpital[1]:

$$\lim_{m\to\infty} \ln f(m) = \lim_{m\to\infty} \frac{\frac{1}{\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)} \cdot \left(-\frac{i^{(m)}}{m^2}\right)}{\left(-\frac{1}{m^2}\right)}$$

Simplificando:

$$\lim_{m\to\infty} \ln f(m) = \lim_{m\to\infty} \frac{i^{(m)}}{1 + \frac{i^{(m)}}{m}}$$

[1]La regla de L'Hôpital establece que para dos funciones f y g derivables en un entorno reducido del punto a y tal que g'(x)≠0 para todo punto del entorno, si $\lim_{x\to a} f(x) = 0\ y\ \lim_{x\to a} g(x) = 0$ y existe el límite finito $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ entonces será: $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$
Blanco, M. y otros.(2001) "Análisis Matemático I con aplicaciones a las Ciencias Económicas". Ediciones Macchi, Buenos Aires. Argentina

Haciendo paso al límite en el segundo miembro:

$$\lim_{m\to\infty} \ln f(m) = i^{(m)}$$

Aplicando álgebra de límites:

$$\ln \lim_{m\to\infty} f(m) = i^{(m)}$$

Siendo:

$$i^{(m)} = i^{(\infty)} = \delta$$

Utilizando la definición de logaritmo:

$$\lim_{m\to\infty} f(m) = e^{i^{(m)}} = e^{\delta}$$

Se obtiene la tasa instantánea de variación, que se define como *el interés de una unidad de capital en un período de tiempo, bajo el supuesto de que el interés en cada una de los infinitésimos en que se divide el período es igual al interés del primer infinitésimo.*

Por lo tanto el monto en el campo continuo se obtiene:

$$f(m) = e^{\delta}$$

Sabiendo que el monto en el campo discreto para t unidades de tiempo es:

$$f(t) = f(0)(1+i)^t$$

Y el monto en el campo continuo para t unidades de tiempo es:

$$f(t) = f(0)e^{\delta t}$$

Entonces:

$$f(0)(1+i)^t = f(0)e^{\delta t}$$

Para $f(0) = 1$ se obtiene el monto de una unidad de capital inicial en t unidades de tiempo:

$$(1+i)^t = e^{\delta t}$$

Con $t = 1$ se obtiene el monto de una unidad de capital inicial en una unidad de tiempo:

$$(1+i) = e^{\delta}$$

A partir de esta igualdad, se puede expresar la tasa de interés en términos de la tasa instantánea de interés:

$$i = e^{\delta} - 1$$

Y la tasa instantánea de interés en función de la tasa de interés:

$$\delta = \ln(1+i) \qquad (2)$$

Gráficamente:

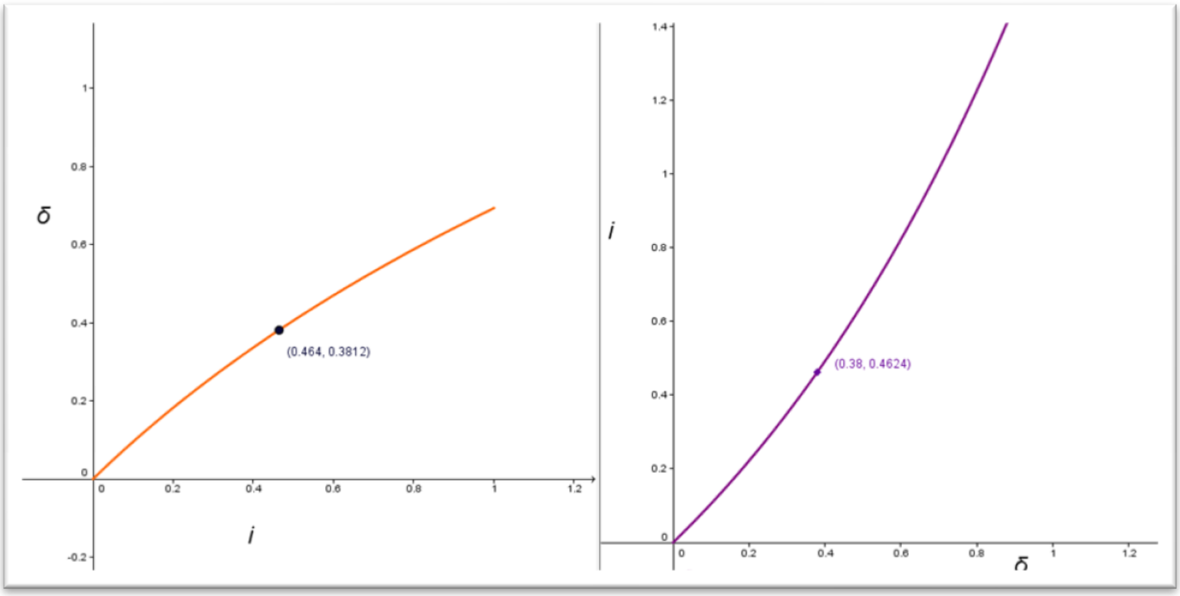

Gráfico 6

Obtención de la tasa instantánea a partir de la representación gráfica

Conociendo que "la derivada de una función en un punto es el valor (número real) del límite del cociente incremental en ese punto cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero"[2], lo que representa geométricamente la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto, es posible obtener la representación gráfica de la tasa instantánea (o de capitalización instantánea):

Para ello se partirá de representar el monto de un peso en t unidades de tiempo, y un punto cualquiera A, perteneciente a la función $f(t) = f(0)(1+i)^t$ (Gráfico 7):

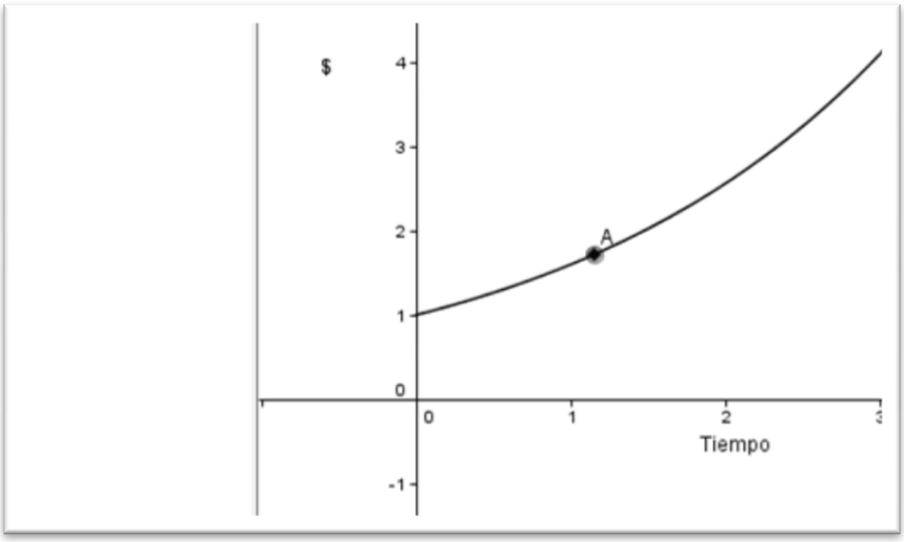

Gráfico 7

[2] Blanco, M. y otros.(2001) "Análisis Matemático I con aplicaciones a las Ciencias Económicas". Ediciones Macchi, Buenos Aires. Argentina

Si consideramos una tasa de interés de 0,70 anual y trazamos la recta tangente al punto A, su pendiente nos indica el valor de la derivada en ese punto (Gráfico 8).

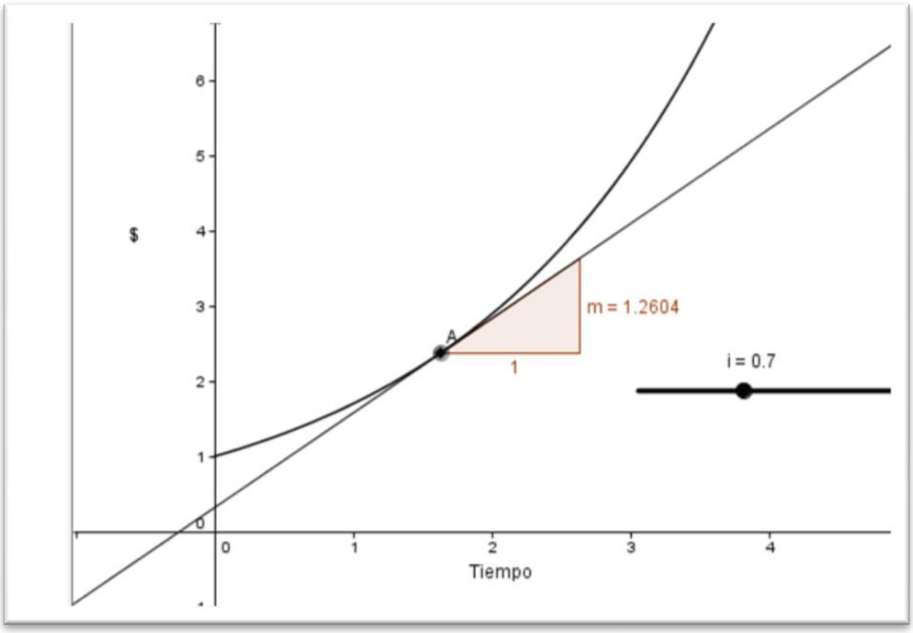

Gráfico 8

Como nos interesa saber el valor de la derivada del punto A en el primer infinitésimo del tiempo, desplazamos dicho punto, obteniendo así el valor de la pendiente, que corresponde al valor que asume la tasa instantánea de interés.

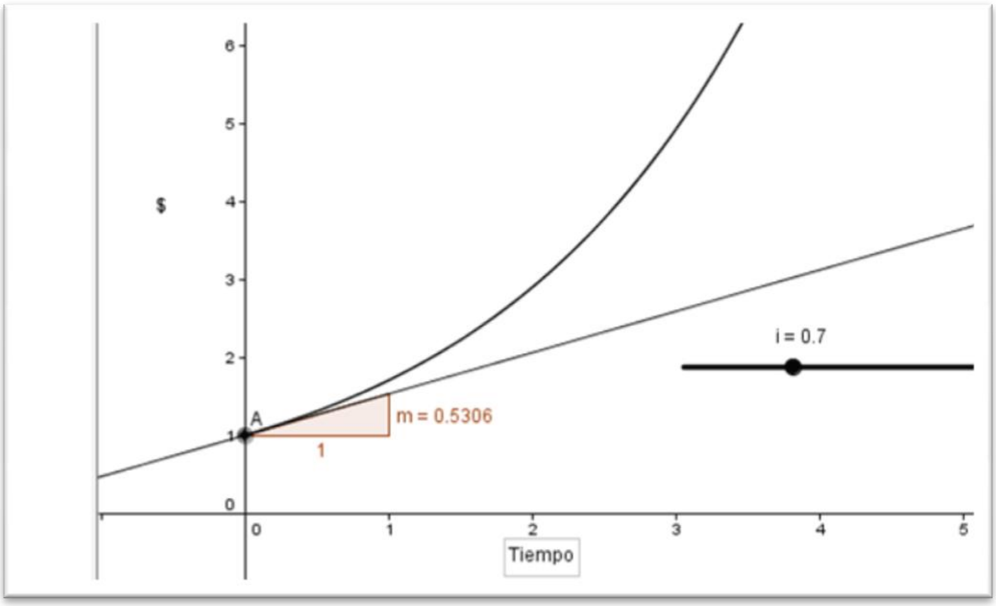

Gráfico 9

Otra forma de obtener el valor de la derivada de la función en el punto A, es creando un punto B, con abscisa igual a la abscisa de A, y como ordenada la pendiente de la recta tangente al punto A:

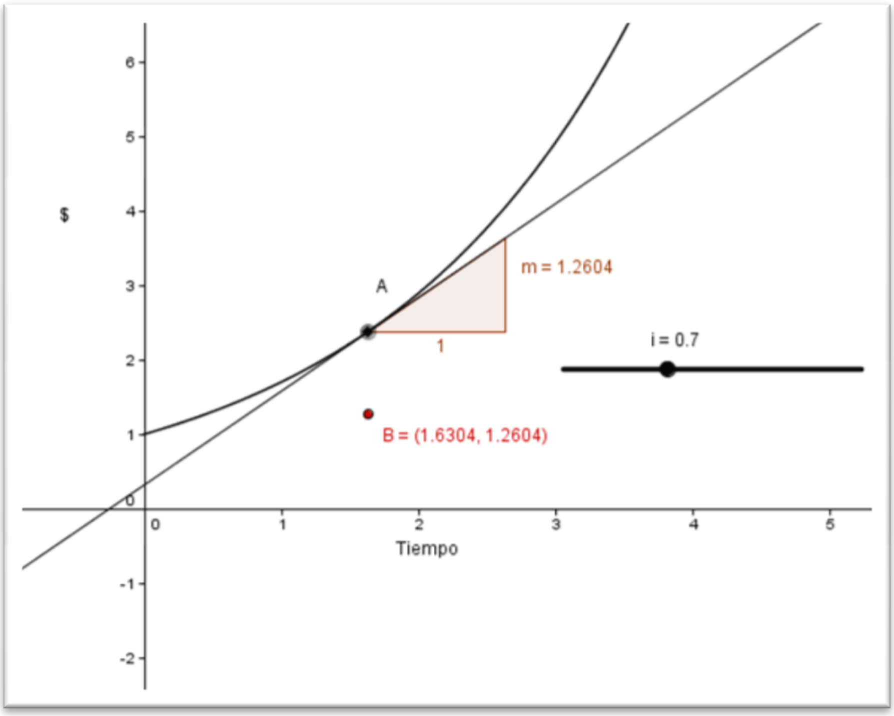

Gráfico 10

Al desplazar el punto A hacia el primer infinitésimo, el punto B se traslada, obteniéndose también el valor de la pendiente (recordemos que la ordenada del punto B es igual a dicha pendiente).

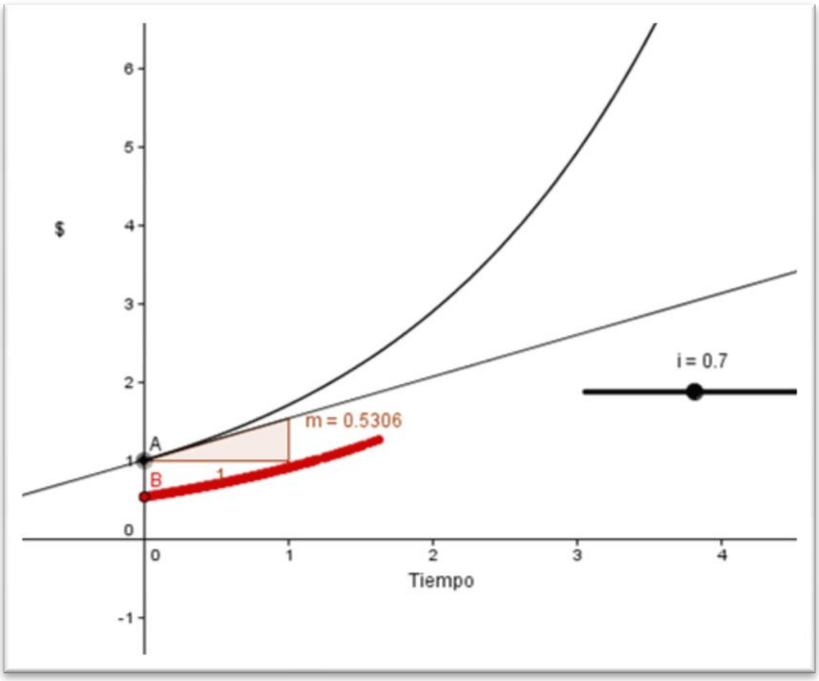

Gráfico 11

Si directamente se grafica la derivada de la función original, se observa que la derivada de la función en el punto A es el punto B, que obtuvimos anteriormente.

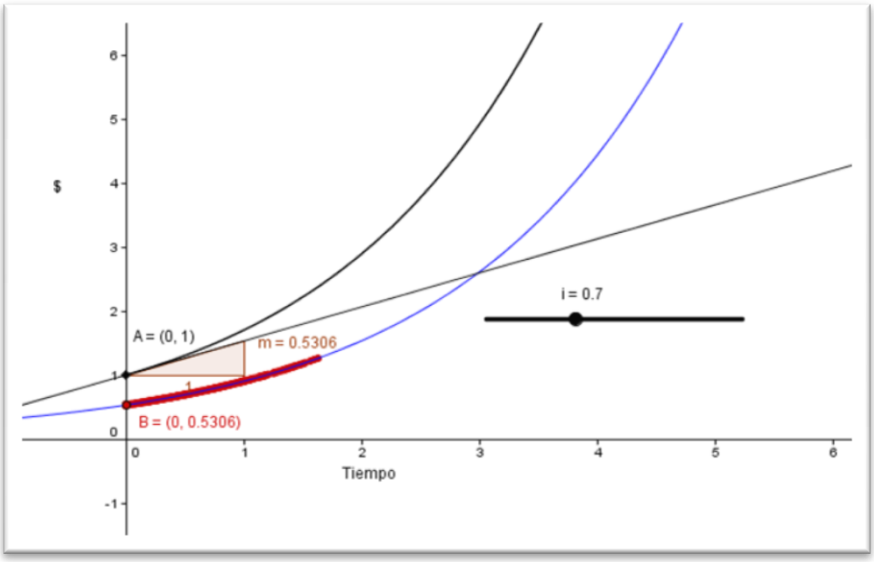

Gráfico 12

Siguiendo con el ejemplo de la tasa de interés de 0,70 anual, si calculamos su correspondiente tasa instantánea con la fórmula obtenida en (2):

$$\delta = \ln(1 + 0{,}70) = 0{,}530628\ anual$$

Recordemos que esta tasa instantánea de interés representa una tasa proporcional anual (porque la obtenemos a partir de una tasa de interés anual) con intereses calculados instantáneamente.

Al calcular el valor final de una capital inicial de $25.000, obtendremos:

- ✓ Con la fórmula correspondiente al campo discreto:

$$f(n) = f(0)(1 + i)^n$$

$$f(n) = 25000(1 + 0{,}70)^1 = 42500$$

- ✓ Con la fórmula de monto en el campo continuo:

$$f(t) = f(0)e^{\delta t}$$

$$f(t) = 25000e^{0{,}530628} = 42500$$

Gráficamente:

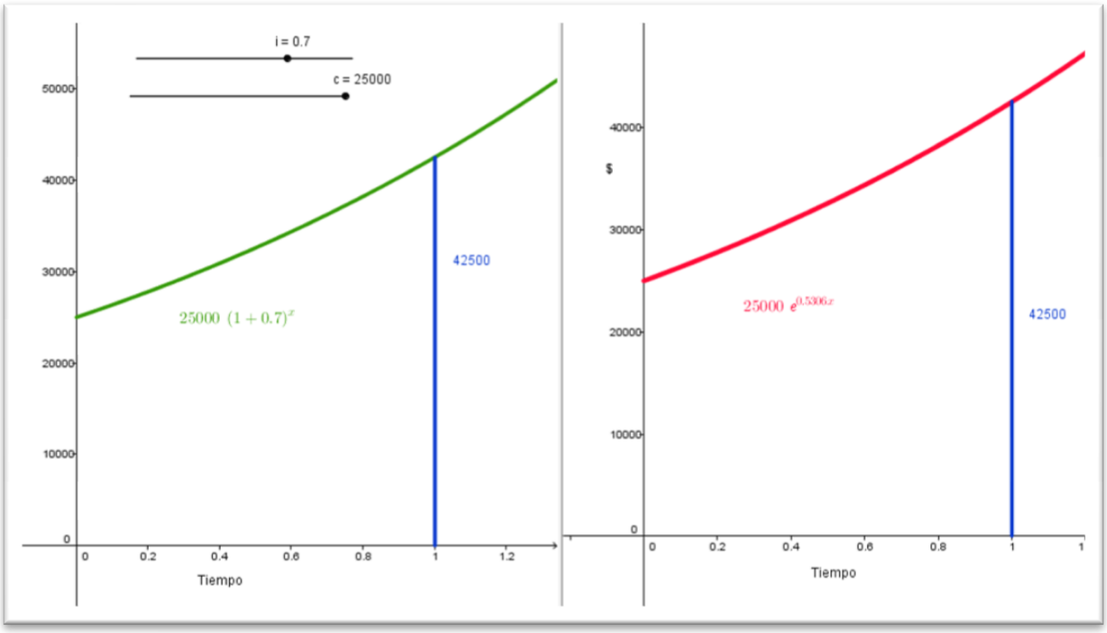

Gráfico 13

De esta manera, se puede concluir que la tasa instantánea de interés se refiere a la derivada de la función $f(m)$ en un punto, cuando el incremento de la variable independiente (m) tiende a cero. Es posible a partir de las infinitas tasas equivalentes a la tasa de interés, obtener dicha tasa instantánea, pero siempre considerando que lo que se obtiene es *el interés de una unidad de capital en un período de tiempo, bajo el supuesto de que el interés en cada una de los infinitésimos en que se divide el período es igual al interés del* ***primer infinitésimo***.

Observando nuevamente el Gráfico 9, la recta tangente a la función es la que representa también el incremento de una unidad de moneda inicial en un período de tiempo, en donde el interés en cada una de las m partes en que se divide el período es igual al incremento del primer m-ésimo, es decir, corresponde a la representación gráfica de la tasa proporcional de interés. En definitiva, para una tasa de interés dada, la tasa instantánea de interés correspondiente es una tasa proporcional con capitalización instantánea.

CONCLUSIÓN

Utilizando los conocimientos de Análisis Matemático, y valiéndonos del software Geogebra, fue posible demostrar que la tasa instantánea de interés se refiere a la derivada de la función $f(m)$ en un punto cuando el incremento de la variable independiente (m) tiende a cero, representado gráficamente por la pendiente de la recta tangente a la función $f(m)$, es decir, la tasa instantánea de interés se refiere *al interés de una unidad de capital en un período de tiempo, bajo el supuesto de que el interés en cada una de los infinitésimos en que se divide el período es igual al interés del* ***primer infinitésimo***. Por lo tanto, para una tasa de interés equivalente anual, la tasa instantánea de interés correspondiente es una tasa proporcional con capitalización instantánea.

BIBLIOGRAFÍA:

Blanco, M. y otros.(2001) *Análisis Matemático I con aplicaciones a las Ciencias Económicas*. Ediciones Macchi, Buenos Aires. Argentina.

Margaría O. y Bravino L. (2014) *Matemática Financiera*. 1ª edición. Córdoba. Universidad Nacional de Córdoba. E-book.