

COMPARACIÓN DE MODELOS MATEMÁTICOS PARA ENCONTRAR LA
OPERACIÓN ÓPTIMA DE MICROREDES

JAVIER ANDRÉS DUQUE GIRALDO
YESID LOURIDO QUINTERO

FACULTAD DE INGENIERÍAS
PROGRAMA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
PEREIRA
AGOSTO DE 2022

COMPARACIÓN DE MODELOS MATEMÁTICOS PARA ENCONTRAR LA
OPERACIÓN ÓPTIMA DE MICROREDES

JAVIER ANDRÉS DUQUE GIRALDO
YESID LOURIDO QUINTERO

Proyecto de Grado para optar al título de Ingeniero Electricista
Línea de planeamiento en sistemas eléctricos

Director:

Ph.D. RICARDO ALBERTO HINCAPIÉ ISAZA

FACULTAD DE INGENIERÍAS
PROGRAMA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
PEREIRA
AGOSTO DE 2022

AGRADECIMIENTOS

- En el presente trabajo quiero agradecer a todas las personas que con su incondicional apoyo han sido pilares para lograr todos mis objetivos propuestos, a todos los docentes que supieron orientarme con dedicación, paciencia y esfuerzo, en especial a mi director de tesis Ricardo Alberto Hincapié Isaza quien con su experiencia, profesionalismo y conocimiento fue una guía fundamental para culminar este proceso, a mi familia por brindarme todo su amor y su apoyo en los momentos indicados y a la Universidad Tecnológica de Pereira por haberme abierto las puertas y darme la oportunidad de acceder a una preparación académica profesional de alta calidad.

Javier Andrés Duque Giraldo

- Primeramente, quiero agradecer a Dios y a mi familia quienes han estado presente en todo mi proceso de aprendizaje, me han brindado un apoyo incondicional y me han servido como un motor de motivación e inspiración a lo largo de mi carrera.
- Por otra parte, también quiero agradecer a mi director de tesis Ricardo Alberto Hincapié Isaza, quien con su paciencia y sabiduría nos ha sabido guiar en esta etapa final de la carrera. A mis maestros y compañeros de la Universidad Tecnológica de Pereira por permitirme aprender a su lado y formarme como ingeniero electricista.

Yesid Lourido Quintero

RESUMEN

En este proyecto de grado se presenta la comparación de cinco modelos matemáticos empleados para encontrar la operación óptima de microredes de distribución de energía eléctrica. Los primeros cuatro modelos están basados en algunas formulaciones matemáticas encontradas en la literatura especializada, las cuales fueron modificadas para tener como función objetivo la minimización del costo de compra de energía. Además de los aspectos considerados en un problema de operación tradicional de un sistema eléctrico (ecuaciones de balance nodal, capacidades de elementos y límites operativos), también se considera la penetración de generación distribuida y elementos almacenadores de energía. Adicionalmente, se propone un nuevo modelo del tipo lineal entero mixto, el cual garantiza encontrar la operación óptima de una red con estas características.

Para efectos prácticos se considera el mismo sistema de prueba y la comparación se realiza tanto en el valor de la función objetivo como en aspectos relacionados con el modelo matemático (número de variables y restricciones) y tiempo computacional. Para su solución se emplea el software de optimización comercial GAMS.

Índice general

Índice general	I
Índice de figuras	III
Índice de tablas	IV
1. Introducción	6
2. Operación eficiente de microredes	8
2.1. Operación eficiente de un sistema eléctrico	8
2.2. Operación eficiente de una microred	9
3. Modelos matemáticos	11
3.1. Modelo matemático 1	11
3.2. Modelo matemático 2	13
3.3. Modelo matemático 3	15
3.4. Modelo matemático 4	17
3.5. Modelo matemático 5	20

4. Comparación de los modelos matemáticos **25**

4.1. Sistema de prueba 25

4.2. Resultados obtenidos 29

5. Conclusiones y Recomendaciones **31**

5.1. Conclusiones 31

5.2. Recomendaciones 32

Bibliografía **33**

Índice de figuras

4.1. Sistema de prueba de 21 nodos	26
--	----

Índice de tablas

4.1. Datos del sistema	27
4.2. Curva de carga diaria [pu]	28
4.3. Costo de la energía [USD/kWh]	28
4.4. Curvas de generación [pu]	29
4.5. Comparación de los modelos matemáticos	30

Nomenclatura y Notaciones

Abreviaciones

- AC : Corriente alterna (AC, por sus siglas en inglés).
- AE : Almacenador de energía.
- DC : Corriente continua (DC, por sus siglas en inglés).
- FO : Función objetivo.
- GD : Generador distribuido.
- LP : Programación lineal (LP, por sus siglas en inglés).
- MIP : Programación entera mixta (MIP, por sus siglas en inglés).
- NLP : Programación no lineal (NLP, por sus siglas en inglés).
- s.a. : Sujeto a.

Conjuntos

- ΩA : Conjunto que contiene el número de almacenadores de energía.
- ΩB : Conjunto que contiene todos los nodos del sistema.
- ΩG : Conjunto que contiene los tipos de generadores distribuidos.
- ΩL : Conjunto que contiene todas las líneas del sistema.

- ΩN : Conjunto que contiene las envolturas de McCormick para la multiplicación de dos variables.
- ΩS : Conjunto que contiene el número de fuentes del sistema.
- ΩT : Conjunto que contiene el número de horas de la curva de carga.
- ΩY : Conjunto que contiene los tramos de linealización de la variable P^2 .
- ΩW : Conjunto que contiene los tramos de linealización de la variable Q^2 .

Parámetros

- α_i : Porcentaje de participación de cada nodo en la demanda total del sistema.
- \overline{Bess} : Límite superior de la potencia entregada por el almacenador de energía [kW].
- \underline{Bess} : Límite inferior de la potencia entregada por el almacenador de energía [kW].
- CE_t : Costo de la energía en el periodo t [$\$/kWh$].
- F_{per} : Factor de pérdidas.
- $\overline{F_{ij,n}}$: Límite superior de la corriente por el tramo de red ij , de la envolvente n [A].
- $\underline{F_{ij,n}}$: Límite inferior de la corriente por el tramo de red ij , de la envolvente n [A].
- $\overline{I_{ij}}$: Límite superior de la corriente por el tramo de red ij [A].
- $\underline{I_{ij}}$: Límite inferior de la corriente por el tramo de red ij [A].
- $P_{i,t}^d$: Potencia activa demandada en el nodo i , en el periodo t [kW].
- $\overline{P_{i,g}^{GD}}$: Límite superior del generador distribuido en el nodo i , tipo g [kW].
- $\underline{P_{i,g}^{GD}}$: Límite inferior del generador distribuido en el nodo i , tipo g [kW].
- P_{total}^{GD} : Límite máximo de potencia activa que puede ser inyectada al sistema por los generadores distribuidos [kW].
- $\overline{P_i^S}$: Límite máximo de potencia que puede inyectar la fuente en el nodo i [kW].
- $Q_{i,t}^d$: Potencia reactiva demandada en el nodo i , en el periodo t [$kVAr$].
- $\overline{Q_{i,g}^{GD}}$: Límite superior del generador distribuido en el nodo i , tipo g [$kVAr$].
- $\underline{Q_{i,g}^{GD}}$: Límite inferior del generador distribuido en el nodo i , tipo g [$kVAr$].

- Q_{total}^{GD} : Límite máximo de potencia reactiva que puede ser inyectada al sistema por los generadores distribuidos [$kVAr$].
- R_{ij} : Resistencia del tramo de red ij [Ω].
- Soc_0 : Estado inicial para cada almacenador de energía en el sistema.
- Soc_f : Estado final para cada almacenador de energía en el sistema.
- \bar{V}_i : Límite superior de la tensión en el nodo i [kV].
- \underline{V}_i : Límite inferior de la tensión en el nodo i [kV].
- X_{ij} : Reactancia del tramo de red ij [Ω].
- Z_{ij} : Impedancia del tramo de red ij [Ω].

Subíndices

- a : Índice que recorre los almacenadores de energía del sistema
- g : Índice que recorre los tipos de generadores distribuidos del sistema.
- i : Índice que recorre los nodos del sistema.
- ij : Índice que recorre las líneas del sistema.
- n : Índice que recorre las envolturas de McCormick para la multiplicación de las variables V e I .
- t : Índice que recorre las horas de la curva de carga del sistema.
- w : Índice que recorre las rectas usadas en la linealización de Q^2 .
- y : Índice que recorre las rectas usadas en la linealización de P^2 .

Variables

Variables binarias

- Y_n : Variable de activación de las particiones hechas para la relajación por envolventes de McCormick.

VARIABLES CONTINUAS

- $\delta_{i,t}$: Ángulo del voltaje en el nodo i en el periodo t .
 $\delta_{j,t}$: Ángulo del voltaje en el nodo j en el periodo t .
 θ_{ij} : Ángulo de la admitancia en la línea ij .
 $D_{i,n}$: Voltaje en el nodo i , en la envolvente n [kV].
 $D_{i,n,t}^{sqr}$: Variable que representa el cuadrado del voltaje en el nodo i , en la envolvente n , en el periodo t [kV].
 $F_{ij,n}$: Corriente que circula por el tramo de red ij , en la envolvente n [A].
 $F_{ij,n,t}^{sqr}$: Variable que representa el cuadrado de la corriente que circula por el tramo de red ij , en la envolvente n , en el periodo t [A].
 $Fp_{ij,t}$: Flujo de potencia activa que circula por el tramo de red ij , en el tiempo t [kW].
 $Fq_{ij,t}$: Flujo de potencia reactiva que circula por el tramo de red ij , en el tiempo t [kVAr].
 $I_{ij,t}$: Corriente que circula por el tramo de red ij , en el periodo t [A].
 $I_{ij,t}^{sqr}$: Variable que representa el cuadrado de la corriente que circula por el tramo de red ij , en el periodo t [A].
 $P_{ij,t}$: Potencia activa que circula por el tramo de red ij , en el periodo t [kW].
 $P_{g,t}^{GD}$: Potencia activa inyectada por un generador distribuido en el nodo i , en el periodo t [kW].
 $P_{i,t}^S$: Potencia activa inyectada por la fuente en el nodo i , en el periodo t [kW].
 $P_{ki,t}$: Potencia activa que circula por el tramo de red ki , en el periodo t [kW].
 $P_{ij,t}$: Potencia activa que circula por el tramo de red ij , en el periodo t [kW].
 $P_{a,t}^{AE}$: Potencia activa entregada por el almacenador de energía en el nodo i , en el periodo t [kW].
 $Q_{g,t}^{GD}$: Potencia reactiva inyectada por un generador distribuido en el nodo i , en el periodo t [kVAr].
 $Q_{i,t}^S$: Potencia reactiva inyectada por la fuente en el nodo i , en el periodo t [kVAr].
 $Q_{ki,t}$: Potencia reactiva que circula por el tramo de red ki , en el periodo t [kVAr].
 $Q_{ij,t}$: Potencia reactiva que circula por el tramo de red ij , en el periodo t [kVAr].

- $Soc_{i,t}$: Estado de la carga en cada almacenador de energia en el periodo t [kW].
- $V_{i,t}$: Voltaje en el nodo i , en el periodo t [kV].
- $V_{i,t}^{sqr}$: Variable que representa el cuadrado del voltaje en el nodo i , en el periodo t [kV].
- $V_{j,t}$: Voltaje en el nodo j , en el periodo t [kV].
- $V_{j,t}^{sqr}$: Variable que representa el cuadrado del voltaje en el nodo j , en el periodo t [kV].
- $W_{i,ij,t}$: Variable que representa la multiplicación de las variables V e I después de la linealización de McCormick, en el nodo i , en el tramo de red ij , en el periodo t [kW].

Capítulo 1

Introducción

La función principal de un sistema eléctrico es entregar energía eléctrica a diferentes tipos de usuarios (residenciales, comerciales, industriales, etc), en diferentes niveles de tensión a lo largo del sistema eléctrico y garantizando esquemas de calidad, continuidad y confiabilidad, enmarcados dentro de regulaciones o normatividades internacionales (IEEE o IEC), nacionales (Resoluciones CREG, Norma NTC) o regionales (Normas Técnicas de OR).

Dentro de los aspectos operativos cotidianos de un sistema eléctrico se tiene como prioridad garantizar que la frecuencia y las magnitudes de las tensiones estén dentro de valores predefinidos, que los elementos no estén sobrecargados (circuitos, transformadores de distribución o subestaciones) y que las pérdidas técnicas sean lo más bajas posibles. Estos aspectos se logran teniendo adecuados planes de diseño o corrigiendo los problemas en redes ya existentes. Sin embargo, para cualquiera de los dos casos, es necesario contar con herramientas que permitan establecer la condición operativa del sistema eléctrico, con el fin de tomar decisiones acertadas.

Tradicionalmente, estas características operativas han sido consideradas por diversos flujos de potencia tanto en sistemas de transmisión como en distribución para encontrar el punto óptimo operativo, entre los que se destacan los métodos de Gauss-Seidel [1], Newton Raphson [1], barrido iterativo [2] y suma de potencias [3]. Adicionalmente, estas características (o conjunto de ecuaciones) también se han introducido en problemas de despacho económico o para encontrar la operación eficiente de un sistema eléctrico [4].

Por otro lado, en los últimos años han surgido una serie de elementos nuevos conocidos como recursos energéticos distribuidos (DER, por sus siglas en inglés). Dentro de estos elementos se destacan los generadores distribuidos (pequeña generación de energía eléctrica conectada cerca a los centros de consumo y que pueden ser de diferente naturaleza) y los almacenadores de energía (elementos que se comportan como cargas cuando se están cargando y como fuentes cuando inyectan energía a la red). La conexión de estos elementos a una red eléctrica da paso a un nuevo concepto conocido como microredes, las cuales pueden operar conectadas a una red u operar de forma aislada.

Debido a la presencia de los DER en las microredes, su operación ha sido diferente a la de un sistema de distribución convencional debido a la aparición de flujos de potencia en ambos sentidos y a la conexión de nuevas fuentes (GD y AE) y nuevas cargas (AE). De acuerdo a esto, encontrar la operación óptima de una microred ha tomado gran importancia en los últimos años ya que permite conocer que valores de potencias (activa y/o reactiva) deben inyectarse desde los generadores distribuidos y la fuente (transformador de distribución o subestación), y en que momento deben cargarse o descargarse los almacenadores de energía.

Motivados por lo anterior, en este proyecto de grado se pretende realizar una comparación de diversos modelos matemáticos empleados para encontrar la operación óptima de microredes de energía eléctrica, con el fin de verificar cuáles pueden ser más adecuados dependiendo del sistema de distribución o de alguna aplicación en particular. Adicionalmente, en este proyecto se propone un nuevo modelo matemático lineal entero mixto, el cual es una alternativa para solucionar problemas de este tipo, garantizando el hallazgo de la solución óptima y que puede ser usado tanto para microredes en AC o en DC.

Este documento está organizado de la siguiente forma. En el Capítulo 2 se explica el problema asociado a la operación eficiente de un sistema de distribución con y sin penetración de recursos energéticos distribuidos. En el Capítulo 3 se describen los cinco modelos matemáticos empleados para obtener las condiciones operativas de una microred. En el Capítulo 4 se describe el sistema de prueba considerado y se presentan los resultados obtenidos al solucionar los modelos descritos. Finalmente, en el Capítulo 5 se encuentran las conclusiones y recomendaciones derivadas de este proyecto.

Capítulo 2

Operación eficiente de microredes

2.1. Operación eficiente de un sistema eléctrico

La operación de los sistemas eléctricos de potencia tiene como objetivo satisfacer una demanda específica con el menor costo de producción y de forma confiable. Para ello, el despacho económico determina cual central generadora o planta debe salir, con el fin de disminuir el costo total de atender la demanda requerida. Así, el despacho económico se enfoca en la coordinación de los costos de producción de todas las plantas generadoras que operan en el sistema [1].

Los sistemas eléctricos de hoy en día están compuestos de una cantidad apreciable de elementos, los cuales afectan de distintas maneras al sistema por la variedad de acciones y propiedades físicas involucradas en el proceso; esto hace que la red se vuelva compleja de operar y mantener en un estado estable. Cuando se habla de un sistema confiable se hace referencia a la continuidad del servicio garantizando estándares de calidad impuestos por la normatividad vigente [5]. Existen varias situaciones por las cuales el sistema eléctrico carece de eficiencia, algunos de ellas son: niveles de tensión fuera de los límites permitidos, sobrecarga de elementos durante largos periodos de tiempo e indisponibilidad de equipos por falta de mantenimiento preventivo en la red, entre otros [6].

Con el fin de que el sistema opere normalmente se debe garantizar la igualdad entre la generación y la demanda, lo que a su vez permite que los valores de frecuencia y tensión se mantengan en sus valores preestablecidos. Dentro de la operación normal del sistema se pueden presentar algunas desigualdades;

sin embargo, si el control preventivo falla, el sistema puede entrar en estado de emergencia. Si las acciones de control de emergencia fallan, el sistema entra en colapso, desconectando partes del sistema y conformando sistemas aislados [7].

Desde el punto de vista del rendimiento económico, se debe hacer uso de los recursos disponibles de forma óptima a través de un sistema completo de supervisión y de adquisición de datos (SCADA) y de los elementos de maniobra con control remoto necesarios para obtener el mejor rendimiento posible, este concepto es denominado gestión de la eficiencia [6]. Sin embargo, el planeamiento de la infraestructura eléctrica juega un papel muy importante en esta operación eficiente, puesto que para obtener resultados en materia de eficiencia y calidad de energía es necesario adentrarse en el campo de la medición inteligente y las microredes.

2.2. Operación eficiente de una microred

De forma genérica, una microred es más que una red eléctrica localizada que puede funcionar tanto en isla como conectada a la red eléctrica principal [8], está asociada a sistemas de distribución de baja tensión y están compuestas principalmente de generadores distribuidos y sistemas de almacenamiento de energía [9]. La confiabilidad junto con la eficiencia son factores fundamentales para tener en cuenta en la operación de las microredes; estas al contener varias fuentes de energía renovable y considerando la potencia inyectada por la red principal, reafirman el despacho económico de generación como un pilar esencial para aumentar la eficiencia de la red a un costo mínimo de operación. La inclusión de sistemas de almacenamiento de energía a su vez contribuyen a mantener la confiabilidad del sistema [10].

Con el fin de mejorar la eficiencia en la operación de una microred, es importante hablar del problema de optimización de recursos energéticos distribuidos de generación. Esta optimización de recursos energéticos es conocida como despacho económico y para implementarlo es necesario programar de manera óptima las diferentes fuentes de energía comprendidas dentro de una microred, con el fin de minimizar el costo operativo del sistema teniendo en cuenta algunas restricciones como ecuaciones de balance de potencia nodal de la red, límites de generación de los generadores distribuidos, límites de carga y descarga de las baterías, y capacidades de elementos, entre otros. Por lo anterior, el problema del

despacho de una red microred debe ser formulado matemáticamente como un problema de optimización para que pueda ser resuelto con algoritmos especializados [9].

Los recursos energéticos distribuidos de generación renovable traen consigo importantes consideraciones debido a las fluctuaciones generadas por su implementación, las cuales son conocidas como incertidumbre e imponen varios desafíos para los operadores de red [11], donde la confiabilidad del sistema se ve comprometida por este y otros varios fenómenos físicos que pueden presentarse. Por otro lado, el almacenador de energía está en la capacidad de impactar de forma positiva en estos fenómenos, proporcionando una reducción de los picos de demanda [12], ya que el sistema de almacenamiento tiene la capacidad de almacenar la energía en periodos de alta generación (alta radiación solar y fuerte vientos), para luego entregarla cuando hay alta demanda y poca generación [13]. El almacenador de energía también puede gestionar la demanda cuando se presentan variaciones rápidas de carga y es capaz de amortiguar las fluctuaciones de energía causadas por la naturaleza intermitente de las fuentes de energía renovable. Por otra parte, dado que las cargas están más cerca de las fuentes de energía, las pérdidas asociadas a la transmisión y distribución también se disminuyen, lo cual trae consigo una reducción en los costos de la operación.

Por lo anterior, existen algunos desafíos que pueden venir ligados cuando se intenta operar de forma eficiente una microred, uno de ellos es que los almacenadores de energía tienden a ser costosos y su eficiencia tiende a reducirse considerablemente con el tiempo de uso [14]. Por otro lado, una inapropiada localización de la generación distribuida puede causar efectos negativos como el aumento de las pérdidas de energía y sobrecargas en tramos de red del sistema [15].

Capítulo 3

Modelos matemáticos

En este capítulo se describen las formulaciones matemáticas empleadas para obtener la operación óptima de microredes. Los primeros dos modelos están basados en la formulación presentada en [13] y el modelo 3 en la formulación de [16]. A pesar de que el artículo base empleado para el modelo 4 no está relacionado con la operación óptima de una red de distribución [17], sus ecuaciones (balance nodal, ley de Ohm, capacidades de elementos y caídas de tensión) son adaptadas a un problema como el tratado en este documento. Finalmente, el modelo 5 es un nuevo modelo propuesto en este proyecto de grado y es una versión lineal del modelo 4.

3.1. Modelo matemático 1

En la referencia base se tiene como función objetivo la minimización de los costos de operación que debe pagar el usuario por la energía proporcionada por las fuentes. Adicionalmente, la función objetivo considera dos penalizaciones: *i*) si la energía generada por recursos renovables no es utilizada y *ii*) si los almacenadores de energía no se cargan en el último instante de tiempo del día.

El conjunto de restricciones lleva en cuenta las ecuaciones de balance nodal, los límites de los generadores distribuidos y aspectos operativos de los almacenadores de energía. Este modelo es lineal y solamente considera las potencias activas de la microred, por lo que puede ser usado en sistemas en DC.

Una de las características de este modelo es que no calcula las pérdidas de la red, por lo que son asumidas por medio de un factor de pérdidas que es previamente conocido. Esta puede ser una desventaja, ya que este factor depende de cada red de distribución en particular y asumirlo puede llevar a encontrar un punto de operación inadecuado. Sin embargo, el hecho de no considerar impedancias resistivas en el modelo, simplifica los datos requeridos para su planteamiento.

El modelo matemático lineal adaptado en este proyecto de grado se presenta en (3.1)-(3.10), donde la función objetivo (ecuación (3.1)) minimiza el costo de compra de energía a la red externa y el conjunto de restricciones de (3.2)-(3.10) está asociado a características técnicas y operativas de un sistema eléctrico y sus elementos conectados.

En (3.2) se garantiza el cumplimiento de las condiciones de balance nodal (primera ley de Kirchhoff). En (3.3)-(3.6) se consideran las características de los almacenadores de energía. En (3.7) y (3.8) se asegura que la fuente y los generadores distribuidos operen dentro de los valores limitados por sus capacidades nominales, respectivamente. En (3.9) se impone el valor máximo de inyección de potencia de todos los generadores distribuidos del sistema. Finalmente, (3.10) expresa la naturaleza positiva de las variables.

$$FO = \sum_{t \in \Omega T} \sum_{i \in \Omega B} CE_t \times P_{i,t}^S \quad (3.1)$$

s.a.

$$P_{i,t}^S + P_{g,t}^{GD} + P_{a,t}^{AE} = \sum_{ij \in \Omega L} (A_{i,ij} \times Fp_{ij,t}) + \alpha_i (P_{i,t}^d + Fper) \quad \forall a \in \Omega A \quad \forall i \in \Omega B; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.2)$$

$$Soc(a, t - 1) + Soc_0 - P_{a,t}^{AE} \varphi_{bat} = Soc_{a,t} \quad \forall a \in \Omega A; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.3)$$

$$Soc_{a,t-1} \leq Soc_{a,t} \quad \forall a \in \Omega A; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.4)$$

$$\underline{Bess} \leq P_{a,t}^{AE} \leq \overline{Bess} \quad \forall a \in \Omega A; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.5)$$

$$Soc_{a,t24} = Soc_f \quad \forall a \in \Omega A; \quad \forall t24 \in \Omega T \quad (3.6)$$

$$P_{i,t}^S \leq \overline{P_i^S} \quad \forall i \in \Omega B; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.7)$$

$$\underline{P_{i,g}^{GD}} \leq P_{g,t}^{GD} \leq \overline{P_{i,g}^{GD}} \quad \forall i \in \Omega B; \quad \forall g \in \Omega G; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.8)$$

$$\sum_{g \in \Omega G} P_{g,t}^{GD} \leq P_{total}^{GD} \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.9)$$

$$P_{g,t}^{GD}, P_{i,t}^S, P_{a,t}^{AE} \geq 0 \quad (3.10)$$

3.2. Modelo matemático 2

Como se mencionó previamente, este modelo está basado en la formulación matemática anterior. Las diferencias radican en la inclusión de las capacidades de las líneas y los reactivos del sistema. Esto se realiza con el fin de permitir que este modelo sea usado en sistemas de distribución en AC. Este modelo (también lineal) se presenta en (3.11)-(3.26), donde la función objetivo (ecuación (3.11)) es la misma del modelo 1.

En (3.12) y (3.13) se garantiza el cumplimiento de las condiciones de balance nodal (tanto para potencia activa como reactiva). En (3.14)-(3.17) se consideran las características de los almacenadores de energía. En (3.18) y (3.19) se garantiza que las líneas no operen bajo sobrecarga. En (3.20)-(3.23) se asegura que la fuente y los generadores distribuidos operen dentro de los valores limitados por sus capacidades nominales (activa y reactiva), respectivamente. En (3.24) y (3.25) se impone el valor máximo de inyección de potencia de todos los generadores distribuidos del sistema (activa y reactiva). Finalmente, (3.26) expresa la naturaleza positiva de las variables.

$$FO = \sum_{t \in \Omega T} \sum_{i \in \Omega B} CE_t \times P_{i,t}^S \quad (3.11)$$

s.a.

$$P_{i,t}^S + P_{g,t}^{GD} + P_{a,t}^{AE} = \sum_{ij \in \Omega L} (A_{i,ij} \times Fp_{ij,t}) + \alpha_i (P_{i,t}^d + Fper) \quad \forall a \in \Omega A \quad \forall i \in \Omega B; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.12)$$

$$Q_{i,t}^S + Q_{g,t}^{GD} = \sum_{ij \in \Omega L} (A_{i,ij} \times Fq_{ij,t}) + \alpha_i (Q_{i,t}^d + Fper) \quad \forall i \in \Omega B; \quad \forall t \in \Omega T \quad \forall s \in \Omega S \quad (3.13)$$

$$Soc(a, t-1) + Soc_0 - P_{a,t}^{AE} \varphi_{bat} = Soc_{a,t} \quad \forall a \in \Omega A; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.14)$$

$$Soc_{a,t-1} \leq Soc_{a,t} \quad \forall a \in \Omega A; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.15)$$

$$-Bess \leq P_{a,t}^{AE} \leq \overline{Bess} \quad \forall a \in \Omega A; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.16)$$

$$Soc_{a,t24} = Soc_f \quad \forall a \in \Omega A; \quad \forall t24 \in \Omega T \quad (3.17)$$

$$-Fmax \leq Fp_{ij,t} \leq Fmax \quad \forall ij \in \Omega B; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.18)$$

$$-Fmax \leq Fq_{ij,t} \leq Fmax \quad \forall ij \in \Omega B; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.19)$$

$$P_{i,t}^S \leq \overline{P_i^S} \quad \forall i \in \Omega B; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.20)$$

$$Q_{i,t}^S \leq \overline{Q_i^S} \quad \forall i \in \Omega B; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.21)$$

$$\underline{P_{i,g}^{GD}} \leq P_{g,t}^{GD} \leq \overline{P_{i,g}^{GD}} \quad \forall i \in \Omega B; \quad \forall g \in \Omega G; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.22)$$

$$\underline{Q_{i,g}^{GD}} \leq Q_{g,t}^{GD} \leq \overline{Q_{i,g}^{GD}} \quad \forall i \in \Omega B; \quad \forall g \in \Omega G; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.23)$$

$$\sum_{g \in \Omega G} P_{g,t}^{GD} \leq P_{total}^{GD} \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.24)$$

$$\sum_{g \in \Omega G} Q_{g,t}^{GD} \leq Q_{total}^{GD} \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.25)$$

$$P_{g,t}^{GD}, P_{i,t}^S, Q_{g,t}^{GD}, Q_{i,t}^S, P_{a,t}^{AE} \geq 0 \quad (3.26)$$

3.3. Modelo matemático 3

En la referencia base se presenta una formulación multi-objetivo, donde las funciones objetivo minimizan la cantidad de emisiones de efecto invernadero y las pérdidas de energía por día. El conjunto de restricciones lleva en cuenta las ecuaciones de balance nodal y los aspectos operativos de los almacenadores de energía. Este modelo es no lineal debido a la multiplicación de las tensiones en la función objetivo y en las ecuaciones de balance nodal. Una de las características de este modelo es que considera las pérdidas del sistema, las admitancias para definir la conectividad de la red y los ángulos de las tensiones nodales.

El modelo matemático no lineal adaptado en este proyecto de grado se presenta en (3.27)-(3.41), donde la función objetivo (ecuación (3.27)) minimiza el costo de compra de energía a la red externa y el conjunto de restricciones de (3.28)-(3.41) está asociado a características técnicas y operativas de un sistema eléctrico y sus elementos conectados.

En (3.28) y (3.29) se garantiza el cumplimiento de las condiciones de balance nodal para potencia activa y reactiva, respectivamente. En (3.30)-(3.34) se consideran las características de los almacenadores de energía. En (3.35)-(3.38) se asegura que la fuente y los generadores distribuidos operen dentro de

los valores limitados por sus capacidades nominales (tanto activa como reactiva), respectivamente. En (3.39) y (3.40) se impone el valor máximo de inyección de potencia de todos los generadores distribuidos del sistema (activa y reactiva), respectivamente. Finalmente, (3.41) expresa la naturaleza positiva de las variables.

$$FO = \sum_{t \in \Omega T} \sum_{i \in \Omega B} CE_t \times P_{i,t}^S \quad (3.27)$$

s.a.

$$P_{a,t}^{AE} + P_{i,t}^S + P_{g,t}^{GD} - \alpha_i P_{i,t}^d = V_{i,t} \sum_{j \in \Omega B} Y b_{ij} V_{j,t} \text{Sin}(\delta_{i,t} - \delta_{j,t} - \theta_{ij}) \quad \forall a \in \Omega A \quad \forall i \in \Omega B; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.28)$$

$$Q_{i,t}^S + Q_{g,t}^{GD} - \alpha_i Q_{i,t}^d = V_{i,t} \sum_{j \in \Omega B} Y b_{ij} V_{j,t} \text{Cos}(\delta_{i,t} - \delta_{j,t} - \theta_{ij}) \quad \forall i \in \Omega B; \quad \forall t \in \Omega T \quad \forall s \in \Omega S \quad (3.29)$$

$$\text{Soc}(a, t - 1) + \text{Soc}_0 - P_{a,t}^{AE} \varphi_{bat} = \text{Soc}_{a,t} \quad \forall a \in \Omega A; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.30)$$

$$\text{Soc}_{a,t-1} \leq \text{Soc}_{a,t} \quad \forall a \in \Omega A; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.31)$$

$$-\overline{\text{Bess}} \leq P_{a,t}^{AE} \leq \overline{\text{Bess}} \quad \forall a \in \Omega A; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.32)$$

$$\text{Soc}_{a,t24} = \text{Soc}_f \quad \forall a \in \Omega A; \quad \forall t24 \in \Omega T \quad (3.33)$$

$$0 \leq \text{Soc}_{a,t} \leq 1 \quad \forall a \in \Omega A; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.34)$$

$$P_{i,t}^S \leq \overline{P}_i^S \quad \forall i \in \Omega B; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.35)$$

$$Q_{i,t}^S \leq \overline{Q_i^S} \quad \forall i \in \Omega B; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.36)$$

$$\underline{P_{i,g}^{GD}} \leq P_{g,t}^{GD} \leq \overline{P_{i,g}^{GD}} \quad \forall i \in \Omega B; \quad \forall g \in \Omega G; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.37)$$

$$\underline{Q_{i,g}^{GD}} \leq Q_{g,t}^{GD} \leq \overline{Q_{i,g}^{GD}} \quad \forall i \in \Omega B; \quad \forall g \in \Omega G; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.38)$$

$$\sum_{g \in \Omega G} P_{g,t}^{GD} \leq P_{total}^{GD} \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.39)$$

$$\sum_{g \in \Omega G} Q_{g,t}^{GD} \leq Q_{total}^{GD} \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.40)$$

$$P_{g,t}^{GD}, P_{i,t}^S, Q_{g,t}^{GD}, Q_{i,t}^S, P_{a,t}^{AE} \geq 0 \quad (3.41)$$

3.4. Modelo matemático 4

Este modelo está basado en las formulaciones matemáticas descritas en [17]. A pesar de que esta referencia presenta un modelo matemático para ubicar y dimensionar generadores distribuidos en sistemas de distribución, las ecuaciones empleadas para el balance nodal, ley de Ohm, las capacidades de los elementos y las caídas de tensión, son adaptadas al problema tratado en este proyecto de grado.

El modelo matemático no lineal presentado en este proyecto de grado se presenta en (3.42)-(3.59), donde la función objetivo (ecuación (3.42)) minimiza el costo de compra de energía a la red externa y el conjunto de restricciones de (3.43)-(3.59) está asociado a características técnicas y operativas de un sistema eléctrico y sus elementos conectados.

Este modelo es no lineal debido a que en (3.46) se presenta: *i*) la multiplicación de la corriente y la tensión y *ii*) el cuadrado de las potencias activa y reactiva. Una de las características de este modelo es que considera las pérdidas del sistema, la conectividad de la red, y las resistencias y reactancias

del sistema, por lo que puede ser usado en sistemas en AC. Sin embargo, puede ser adaptado para emplearlo en redes en DC.

En (3.43) y (3.44) se garantiza el cumplimiento de las condiciones de balance nodal para potencia activa y reactiva, respectivamente. En (3.45) se evalúa la caída de tensión en todos los tramos de red del sistema. En (3.46) se obtiene el flujo de potencia en todos los tramos de red del sistema. En (3.47)-(3.48) se garantiza que las corrientes en los tramos de red y las tensiones nodales estén dentro de los límites permitidos, respectivamente. En (3.49)-(3.53) se consideran las características de los almacenadores de energía. En (3.54)-(3.56) se asegura que la fuente y los generadores distribuidos operen dentro de los valores limitados por sus capacidades nominales (tanto activa como reactiva), respectivamente. En (3.57) y (3.58) se impone el valor máximo de inyección de potencia de todos los generadores distribuidos del sistema (activa y reactiva). Finalmente, (3.59) expresa la naturaleza positiva de las variables.

$$FO = \sum_{t \in \Omega T} \sum_{i \in \Omega B} CE_t \times P_{i,t}^S \quad (3.42)$$

s.a.

$$\sum_{ki \in \Omega L} P_{ki,t} - \sum_{ij \in \Omega L} (P_{ij,t} + I_{ij,t}^{sqr} R_{ij}) + P_{i,t}^S + P_{g,t}^{GD} + P_{a,t}^{AE} = P_{i,t}^d \quad \forall a \in \Omega A \quad \forall i \in \Omega B; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.43)$$

$$\sum_{ki \in \Omega L} Q_{ki,t} - \sum_{ij \in \Omega L} (Q_{ij,t} + I_{ij,t}^{sqr} X_{ij}) + Q_{i,t}^S + Q_{g,t}^{GD} = P_{i,t}^d \quad \forall i \in \Omega B; \quad \forall t \in \Omega T \quad \forall s \in \Omega S \quad (3.44)$$

$$V_{i,t}^{sqr} - 2(R_{ij}P_{ij,t} + X_{ij}Q_{ij,t}) - (R_{ij}^2 + X_{ij}^2)I_{ij,t}^{sqr} - V_{j,t}^{sqr} = 0 \quad \forall ij \in \Omega L; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.45)$$

$$I_{ij,t}^{sqr} V_{j,t}^{sqr} = P_{ij,t}^2 + Q_{ij,t}^2 \quad \forall ij \in \Omega L; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.46)$$

$$\underline{I_{ij}}^2 \leq I_{ij,t}^{sqr} \leq \overline{I_{ij}}^2 \quad \forall ij \in \Omega L; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.47)$$

$$\underline{V}_i^2 \leq V_{i,t}^{sqr} \leq \overline{V}_i^2 \quad \forall i \in \Omega B; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.48)$$

$$Soc(a, t - 1) + Soc_0 - P_{a,t}^{AE} \varphi_{bat} = Soc_{a,t} \quad \forall a \in \Omega A; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.49)$$

$$0 \leq Soc_{a,t} \leq 1 \quad \forall a \in \Omega A; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.50)$$

$$Soc_{a,t-1} \leq Soc_{a,t} \quad \forall a \in \Omega A; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.51)$$

$$\underline{-Bess} \leq P_{a,t}^{AE} \leq \overline{Bess} \quad \forall a \in \Omega A; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.52)$$

$$Soc_{a,t24} = Soc_f \quad \forall a \in \Omega A; \quad \forall t24 \in \Omega T \quad (3.53)$$

$$P_{i,t}^S \leq \overline{P}_i^S \quad \forall i \in \Omega B; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.54)$$

$$\underline{P}_{i,g}^{GD} \leq P_{g,t}^{GD} \leq \overline{P}_{i,g}^{GD} \quad \forall i \in \Omega B; \quad \forall g \in \Omega G; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.55)$$

$$\underline{Q}_{i,g}^{GD} \leq Q_{g,t}^{GD} \leq \overline{Q}_{i,g}^{GD} \quad \forall i \in \Omega U; \quad \forall g \in \Omega G; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.56)$$

$$\sum_{g \in \Omega G} P_{g,t}^{GD} \leq P_{total}^{GD} \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.57)$$

$$\sum_{g \in \Omega G} Q_{g,t}^{GD} \leq Q_{total}^{GD} \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.58)$$

$$V_{i,t}^{sqr}, V_{j,t}^{sqr}, P_{ij,t}, P_{ki,t}, Q_{ij,t}, Q_{ki,t}, P_{g,t}^{GD}, Q_{g,t}^{GD}, P_{i,t}^S, Q_{i,t}^S, I_{ij,t}^{sqr}, P_{a,t}^{AE} \geq 0 \quad (3.59)$$

3.5. Modelo matemático 5

Con el fin de garantizar encontrar la solución óptima del problema tratado, en este numeral se presenta un nuevo modelo el cual es una versión linealizada del modelo matemático anterior (modelo 4). Como se mencionó anteriormente, dicho modelo presenta dos no linealidades en (3.46): en el término del lado izquierdo se encuentra una multiplicación de dos variables continuas (voltaje y corriente) y en el lado derecho dos variables al cuadrado (potencia activa y reactiva).

Para linealizar la multiplicación de dos variables continuas se emplea una relajación de McCormick por envolventes. Por otro lado, la linealización de los términos al cuadrado (potencias activa y reactiva) se lleva a cabo usando un método que considera rectas tangentes por medio de diferentes intervalos. Dado que el objetivo de este proyecto no es detallar estas linealizaciones, se invita al lector a consultar las referencias [18], [19] y [20] para la relajación por McCormick, y las referencias [17], [20] y [21] para la linealización de los términos al cuadrado.

El modelo matemático propuesto en este numeral es del tipo lineal entero mixto, debido a la presencia de variables continuas (potencias, corrientes y tensiones) y variables binarias (aparecen con las linealizaciones empleadas). Este modelo tiene como función objetivo (ecuación (3.60)) la minimización del costo de compra de energía a la red externa. El conjunto de restricciones está dado por (3.61)-(3.96).

En (3.61) y (3.62) se garantiza el cumplimiento de las condiciones de balance nodal para potencia activa y reactiva, respectivamente. En (3.63) se evalúa la caída de tensión en todos los tramos de red del sistema. En (3.64)-(3.75) se presentan las ecuaciones asociadas a la linealización por McCormick para la multiplicación de la corriente y la tensión. En (3.76)-(3.78) y (3.79)-(3.81) se detallan las ecuaciones asociadas a la linealización del cuadrado de la potencia activa y reactiva, respectivamente. En (3.82)-(3.83) se garantiza que las corrientes en los tramos de red y las tensiones nodales estén dentro de los límites permitidos, respectivamente. En (3.84)-(3.87) se asegura que la fuente y los generadores distribuidos operen dentro de los valores limitados por sus capacidades nominales (tanto activa como reactiva), respectivamente. En (3.88)-(3.92) se consideran las características de los almacenadores de energía. En (3.93) y (3.94) se impone el valor máximo de inyección de potencia de todos los generadores distribuidos del sistema (activa y reactiva). Finalmente, (3.95) y (3.96) expresan la naturaleza positiva y binaria de las variables.

$$FO = \sum_{t \in \Omega T} \sum_{i \in \Omega B} CE_t \times P_{i,t}^S \quad (3.60)$$

s.a.

$$\sum_{ki \in \Omega L} P_{ki,t} - \sum_{ij \in \Omega L} (P_{ij,t} + I_{ij,t}^2 R_{ij}) + P_{i,t}^S + P_{g,t}^{GD} + P_{a,t}^{AE} = P_{i,t}^d \quad \forall i \in \Omega B; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.61)$$

$$\sum_{ki \in \Omega L} Q_{ki,t} - \sum_{ij \in \Omega L} (Q_{ij,t} + I_{ij,t}^2 X_{ij}) + Q_{i,t}^S + Q_{g,t}^{GD} = Q_{i,t}^d \quad \forall i \in \Omega B; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.62)$$

$$V_{i,t}^{sqr} - 2(R_{ij} P_{ij,t} + X_{ij} Q_{ij,t}) - Z_{ij}^2 I_{ij,t}^{sqr} - V_{j,t}^{sqr} = 0 \quad \forall ij \in \Omega L; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.63)$$

$$W_{i,ij,t} \geq \sum_{n=1}^N (F_{ij,n,t}^{sqr} \underline{V}_i^2 + \underline{F}_{ij,n} D_{i,n,t}^{sqr} - \underline{F}_{ij,n} \underline{V}_i^2 Y_n) \quad \forall ij \in \Omega L; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.64)$$

$$W_{i,ij,t} \geq \sum_{n=1}^N (F_{ij,n,t}^{sqr} \overline{V}_i^2 + \overline{F}_{ij,n} D_{i,n,t}^{sqr} - \overline{F}_{ij,n} \overline{V}_i^2 Y_n) \quad \forall ij \in \Omega L; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.65)$$

$$W_{i,ij,t} \leq \sum_{n=1}^N (F_{ij,n,t}^{sqr} \overline{V}_i^2 + \underline{F}_{ij,n} D_{i,n,t}^{sqr} - \underline{F}_{ij,n} \overline{V}_i^2 Y_n) \quad \forall ij \in \Omega L; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.66)$$

$$W_{i,ij,t} \leq \sum_{n=1}^N (F_{ij,n,t}^{sqr} \underline{V}_i^2 + \overline{F}_{ij,n} D_{i,n,t}^{sqr} - \overline{F}_{ij,n} \underline{V}_i^2 Y_n) \quad \forall ij \in \Omega L; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.67)$$

$$\sum_{n=1}^N Y_n = 1 \quad (3.68)$$

$$\sum_{n=1}^N D_{i,n,t}^{sqr} = V_{i,t}^{sqr} \quad \forall i \in \Omega B; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.69)$$

$$\sum_{n=1}^N F_{ij,n,t}^{sqr} = I_{ij,t}^{sqr} \quad \forall ij \in \Omega L; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.70)$$

$$Y_n \underline{F}_{ij,n} \leq F_{ij,n,t}^{sqr} \leq Y_n \overline{F}_{ij,n} \quad \forall ij \in \Omega L; \quad \forall n \in \Omega N; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.71)$$

$$Y_n \underline{V}_i^2 \leq D_{i,n,t}^{sqr} \leq Y_n \overline{V}_i^2 \quad \forall i \in \Omega B; \quad \forall n \in \Omega N; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.72)$$

$$\underline{F}_{ij,n} = \underline{I}_{ij}^2 + \frac{(\overline{F}_{ij,n}^2 - F_{ij,n}^2)(n-1)}{N} \quad \forall ij \in \Omega L; \quad \forall n \in \Omega N \quad (3.73)$$

$$\overline{F}_{ij,n} = \underline{I}_{ij}^2 + \frac{(\overline{F}_{ij,n}^2 - F_{ij,n}^2)(n)}{N} \quad \forall ij \in \Omega L; \quad \forall n \in \Omega N \quad (3.74)$$

$$W_{i,ij,t} = \left(\sum_{y=1}^Y m_y^s \Delta_{ij,y}^P + \sum_{r=1}^R m_r^s \Delta_{ij,r}^Q \right) \quad \forall ij \in \Omega L; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.75)$$

$$P_{ij,t}^+ - P_{ij,t}^- = P_{ij,t} \quad \forall ij \in \Omega L; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.76)$$

$$P_{ij,t}^+ + P_{ij,t}^- = \sum_{y=1}^Y \Delta_{ij,y}^P \quad \forall ij \in \Omega L; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.77)$$

$$0 \leq \Delta_{ij,y}^P \leq \overline{\Delta}_{ij}^s \quad \forall ij \in \Omega L; \quad \forall y \in \Omega Y; \quad (3.78)$$

$$Q_{ij,t}^+ - Q_{ij,t}^- = Q_{ij,t} \quad \forall ij \in \Omega L; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.79)$$

$$Q_{ij,t}^+ + Q_{ij,t}^- = \sum_{r=1}^R \Delta_{ij,r}^Q \quad \forall ij \in \Omega L; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.80)$$

$$0 \leq \Delta_{ij,r}^Q \leq \overline{\Delta}_{ij}^s \quad \forall ij \in \Omega L; \quad \forall r \in \Omega R; \quad (3.81)$$

$$\underline{I_{ij}}^2 \leq I_{ij,t}^{sqr} \leq \overline{I_{ij}}^2 \quad \forall ij \in \Omega L; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.82)$$

$$\underline{V_i}^2 \leq V_{i,t}^{sqr} \leq \overline{V_i}^2 \quad \forall i \in \Omega B; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.83)$$

$$P_{i,t}^S \leq \overline{P_i^S} \quad \forall i \in \Omega B; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.84)$$

$$Q_{i,t}^S \leq \overline{Q_i^S} \quad \forall i \in \Omega B; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.85)$$

$$\underline{P_{i,g}^{GD}} \leq P_{g,t}^{GD} \leq \overline{P_{i,g}^{GD}} \quad \forall i \in \Omega U; \quad \forall g \in \Omega G; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.86)$$

$$\underline{Q_{i,g}^{GD}} \leq Q_{g,t}^{GD} \leq \overline{Q_{i,g}^{GD}} \quad \forall i \in \Omega U; \quad \forall g \in \Omega G; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.87)$$

$$0 \leq Soc_{a,t} \leq 1 \quad \forall a \in \Omega A; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.88)$$

$$Soc(a, t-1) + Soc_0 - P_{a,t}^{AE} \varphi_{bat} = Soc_{a,t} \quad \forall a \in \Omega A; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.89)$$

$$Soc_{a,t-1} \leq Soc_{a,t} \quad \forall a \in \Omega A; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.90)$$

$$\underline{-Bess} \leq P_{a,t}^{AE} \leq \overline{Bess} \quad \forall a \in \Omega A; \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.91)$$

$$Soc_{a,t24} = Soc_f \quad \forall a \in \Omega A; \quad \forall t24 \in \Omega T \quad (3.92)$$

$$\sum_{g \in \Omega G} P_{g,t}^{GD} \leq P_{total}^{GD} \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.93)$$

$$\sum_{g \in \Omega G} Q_{g,t}^{GD} \leq Q_{total}^{GD} \quad \forall t \in \Omega T \quad (3.94)$$

$$V_{i,t}^{sqr}, V_{j,t}^{sqr}, P_{ij,t}, P_{ki,t}, Q_{ij,t}, Q_{ki,t}, P_{g,t}^{GD}, Q_{g,t}^{GD}, P_{a,t}^{AE}, P_{i,t}^S, Q_{i,t}^S, I_{ij,t}^{sqr}, P_{ij,t}^+, P_{ij,t}^-, Q_{ij,t}^+, Q_{ij,t}^- \geq 0 \quad (3.95)$$

$$Y_n \in [0, 1] \quad \forall n \in \Omega N \quad (3.96)$$

Capítulo 4

Comparación de los modelos matemáticos

4.1. Sistema de prueba

Con el fin de observar el efecto de cada uno de los modelos matemáticos presentados en este documento, se emplea el sistema de distribución de 21 nodos de la Figura 4.1 [22], el cual ha sido levemente modificado para propósitos de este estudio. Este sistema tiene una tensión nominal de 1000 V y es alimentado por un transformador de distribución de 600 kVA. Los datos del sistema de prueba, de los generadores distribuidos y del almacenador de energía se presentan a continuación, donde los valores base empleados son 1 kV y 100 kVA.

Los datos generales del sistema se presentan en la Tabla 4.1. En esta tabla, los datos de las últimas dos columnas corresponden a la demanda máxima (presentada a las 20 horas), de la curva de carga de la Tabla 4.2. Para efectos comparativos, se emplea la misma curva de carga diaria durante todos los días del año. Adicionalmente, se emplea el mismo esquema horario para el costo de la energía (C_e) durante todo el año (ver Tabla 4.3). En este sistema el transformador de distribución se encuentra ubicado en el nodo 1, los generadores distribuidos fotovoltaico (GD_F), eólico (GD_E) y pequeñas centrales hidroeléctricas (GD_{PCH}) en los nodos 7, 12 y 16 respectivamente, y el almacenador de energía en el nodo 19. Para este almacenador se empleó un SoC_{min} , SoC_{max} , SoC_0 y $SoCF$ de 1,

2, 0.5 y 0.5, respectivamente. Las curvas de generación empleadas para los generadores distribuidos se presentan en la Tabla 4.4.

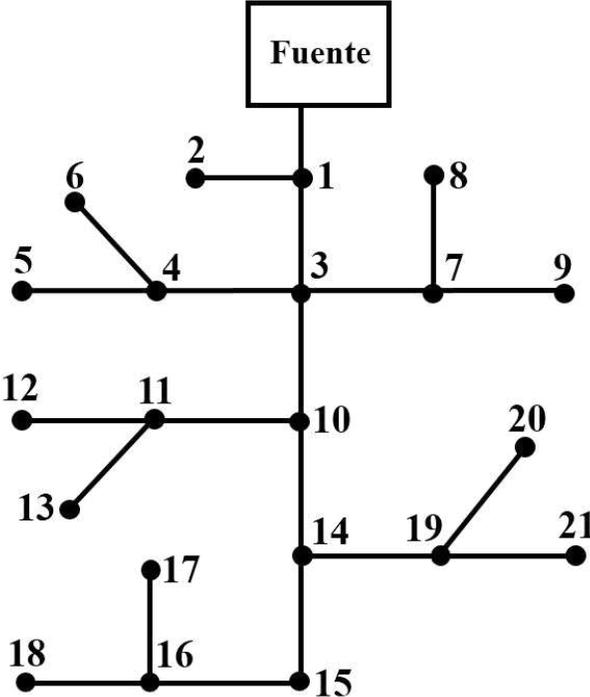


Figura 4.1: Sistema de prueba de 21 nodos

Fuente: [22].

Tabla 4.1: Datos del sistema

Nodo de envío	Nodo de recibo	R [pu]	X [pu]	P [pu]	Q [pu]
1	2	0.0053	0.0023	0.7000	0.3390
1	3	0.0054	0.0023	0.0000	0.0000
3	4	0.0054	0.0023	0.3600	0.1744
4	5	0.0063	0.0027	0.0400	0.0194
4	6	0.0051	0.0022	0.3600	0.1744
3	7	0.0037	0.0016	0.0000	0.0000
7	8	0.0079	0.0034	0.3200	0.1550
7	9	0.0072	0.0031	0.8000	0.3875
3	10	0.0053	0.0023	0.0000	0.0000
10	11	0.0038	0.0016	0.4500	0.2179
11	12	0.0079	0.0034	0.6800	0.3293
11	13	0.0078	0.0034	0.1000	0.0484
10	14	0.0083	0.0036	0.0000	0.0000
14	15	0.0065	0.0028	0.2200	0.1066
15	16	0.0064	0.0028	0.2300	0.1114
16	17	0.0074	0.0032	0.4300	0.2083
16	18	0.0081	0.0035	0.3400	0.1647
14	19	0.0078	0.0034	0.0900	0.0436
19	20	0.0084	0.0036	0.2100	0.1017
19	21	0.0082	0.0035	0.2100	0.1017

Tabla 4.2: Curva de carga diaria [pu]

Hora	Demanda	Hora	Demanda	Hora	Demanda
1	0.49	9	0.61	17	0.59
2	0.42	10	0.65	18	0.70
3	0.42	11	0.67	19	0.98
4	0.40	12	0.72	20	1.00
5	0.40	13	0.72	21	0.93
6	0.40	14	0.65	22	0.87
7	0.50	15	0.63	23	0.83
8	0.52	16	0.61	24	0.54

Tabla 4.3: Costo de la energía [USD/kWh]

Hora	C_e	Hora	C_e	Hora	C_e
1	0.084	9	0.105	17	0.098
2	0.080	10	0.135	18	0.175
3	0.080	11	0.145	19	0.305
4	0.075	12	0.185	20	0.325
5	0.075	13	0.185	21	0.285
6	0.075	14	0.135	22	0.275
7	0.085	15	0.125	23	0.265
8	0.090	16	0.105	24	0.100

Tabla 4.4: Curvas de generación [pu]

Hora	GD_F	GD_E	GD_{PCH}	Hora	GD_F	GD_E	GD_{PCH}
1	1.080	0.000	1.200	13	1.050	1.500	0.825
2	1.200	0.000	1.470	14	1.500	1.050	0.840
3	1.125	0.000	1.500	15	1.380	0.825	0.825
4	1.275	0.000	1.125	16	1.200	0.750	0.750
5	1.260	0.000	1.200	17	1.230	0.450	0.600
6	1.290	0.000	1.230	18	1.260	0.300	0.750
7	1.125	0.000	0.780	19	1.350	0.000	0.720
8	0.945	0.300	0.765	20	1.275	0.000	0.705
9	0.855	0.600	0.750	21	0.975	0.000	0.735
10	0.900	0.900	0.750	22	0.825	0.000	0.720
11	0.870	1.350	0.600	23	0.900	0.000	0.735
12	1.230	1.380	0.735	24	0.750	0.000	0.750

4.2. Resultados obtenidos

A continuación, en la Tabla 4.5 se presenta la comparación de los resultados obtenidos después de implementar los modelos matemáticos descritos en el Capítulo 3. Todos los modelos matemáticos fueron solucionados en GAMS usando los solvers Cplex y DICOPT, en un computador Intel®Core i5-3470 y 8 GB RAM. En todos los modelos se encontró la solución óptima del problema.

De los resultados obtenidos en la Tabla 4.5, se tienen los siguientes comentarios:

- Los modelos 1, 2, 4 y 5 tienen un valor similar de la función objetivo, donde la desviación estandar entre estos es 0.3405 USD. El valor de la función objetivo del modelo 3 es el más diferente de todos, el cual tiene un valor de diferencia en promedio con las otras soluciones de 23 USD aproximadamente.
- Los modelos 1, 2 y 5 al ser modelos lineales garantizan el hallazgo del valor óptimo del problema, a diferencia de los modelos 3 y 4, los cuales son del tipo no lineal. A pesar de los valores similares encontrados por estos últimos dos modelos, el valor de la función objetivo puede cambiar frente

Tabla 4.5: Comparación de los modelos matemáticos

Modelo matemático	FO [USD]	Número de Variables	Número de Restricciones	Tiempo de cómputo [s]	Tipo de modelo
1	933.3898	624	1105	0.49	LP
2	933.3700	1200	3553	0.43	LP
3	910.6348	1248	2113	1.04	NLP
4	933.9641	2184	2616	3.63	NLP
5	933.9750	37779	43585	7.47	MIP

a los otros modelos cuando se empleen sistemas de dimensiones mayores.

- El modelo 2 es el que tiene un menor tiempo de ejecución (0.43 segundos), al contrario del modelo 5 el cual tiene un valor de 7.47 segundos. A pesar de esto, al ser un valor en segundos, se puede decir que los tiempos de respuesta de los modelos son muy similares.
- El modelo 1 es el que menor número de variables y restricciones tiene. Esto se debe a que no considera cálculo de pérdidas, valores de reactivos, capacidades de elementos ni impedancias del sistema. A pesar de esto, su valor es similar a la mayoría de los modelos.
- El modelo 5 es el que presenta un mayor número tanto de variables como de restricciones, lo cual se debe a la linealización de los dos términos del modelo no lineal. De igual forma, como se dijo previamente, es el que mayor tiempo computacional posee. A pesar de esto, este modelo es más completo que los modelos 1 y 2 al considerar las pérdidas del sistema, y las reactancias y reactivos en el sistema. Adicionalmente, tiene una ventaja sobre los modelos 3 y 4 al ser un modelo lineal, lo cual garantiza la solución óptima del problema.
- Teniendo en cuenta que el modelo 5 es el que tiene mayor tiempo de ejecución (7.47 segundos), se podría pensar que el modelo es ineficiente en comparación con los modelos 1 y 2 que presentan tiempos de ejecución de 0.49 segundos y 0.43 segundos, respectivamente. Pero, realizando un balance de tiempos de cómputo sobre número de variables para los modelos 1, 2 y 5; presentan un balance de 0.0785 s/variable, 0.0358 s/variable y 0.0197 s/variable, respectivamente. Se puede observar que los tiempos de ejecución por variable son cercanos; por ende, la eficiencia de los modelos no disminuye cuando se tienen modelos más complejos.

Capítulo 5

Conclusiones y Recomendaciones

5.1. Conclusiones

- En este proyecto de grado se solucionó el problema de la operación óptima de microredes, usando cinco modelos matemáticos diferentes. Todos los modelos consideran la conexión de generación distribuida de diferentes tecnologías y elementos almacenadores de energía. Adicionalmente, para efectos comparativos, en todos los modelos se consideró en la función objetivo la minimización del costo de la energía entregada por la red externa. En el conjunto de restricciones se tuvieron en cuenta diversos aspectos técnicos y operativos tanto de la red de distribución como de los elementos del sistema (fuentes, tramos de red, generadores distribuidos y almacenadores de energía).
- Se realizó la comparación de cinco modelos matemáticos empleados para encontrar la operación óptima de una microred. Los primeros cuatro modelos están basados en formulaciones presentadas en la literatura especializada. El quinto modelo es propuesto en este proyecto de grado y es una versión linealizada del modelo 4.

Con la comparación de estos modelos se proporcionan herramientas para la toma de la decisión de que modelo es más adecuado emplear. Por ejemplo, el modelo 1 puede ser empleado para la operación de redes en DC y con pequeñas modificaciones puede ser usado en sistemas en AC (modelo 2). Los modelos 3, 4 y 5 son usados para sistemas en AC, pero eliminando aspectos relacionados con reactivos y reactancias, pueden ser adaptados para redes en DC.

- A partir de la observación de los resultados obtenidos se puede inferir que cualquiera de los modelos puede ser usado en sistemas pequeños, como el usado en este proyecto de grado. Sin embargo, si el sistema es de dimensiones reales, se recomienda usar el quinto modelo, ya que: *i*) considera aspectos más cercanos a los sistemas reales que los modelos 1 y 2 (cálculo de pérdidas, reactivos e impedancias) y *ii*) al ser un modelo lineal garantiza encontrar el óptimo del problema, a diferencia de los modelos 3 y 4.
- A pesar de que la aplicación de microredes en DC no es muy generalizado a nivel mundial, su uso es cada vez más creciente, por lo que contar con modelos como los presentados en este proyecto de grado facilita su análisis e inclusión en los sistemas convencionales.

5.2. Recomendaciones

- Para futuros proyectos se pueden considerar diferentes técnicas de linealización y la operación integrada con otros sistemas como redes de gas natural o transporte.
- Integrar en un solo modelo la operación de redes de distribución en AC y en DC, considerando el modelo del inversor.
- Incluir un flujo de carga usando la topología de la red (Ybus) antes de ejecutar el algoritmo de optimización para incluir más variables del estado del sistema, como las tensiones y sus ángulos respectivos.

Bibliografía

- [1] J. Grainger and W. Stevenson, “Análisis de sistemas de potencia,” *Editorial Mc Graw Hill*, 1998.
- [2] C. Cheng and D. Shirmohammadi, “A three-phase power flow method for real-time distribution system analysis,” *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 10, no. 2, pp. 671–679, 1995.
- [3] R. Cespedes, “New method for the analysis of distribution networks,” *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 5, no. 1, pp. 391–396, 1990.
- [4] E. Castillo, A. J. Conejo, P. Pedregal, R. García, and N. Alguacil, “Formulación y resolución de modelos de programación matemática en ingeniería y ciencia,” *Universidad de Castilla-La Mncha*, 2002.
- [5] F. A. Zuloaga, “Modelos de optimización para la operación eficiente de sistemas eléctricos de potencia bajo criterios probabilísticos y determinísticos de seguridad de suministro,” *Proyecto de Grado de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Chile*, 2015.
- [6] R. C. Vilcahuamán, “Análisis interactivo gráfico de sistemas eléctricos,” *Tesis de Maestría en Ciencias de la Ingeniería, Pontifica Universidad Católica de Chile*, 1993.
- [7] R. A. Gallego, A. H. Escobar, and M. Granada, “Flujo de carga en sistemas de transmisión,” *Editorial UTP*, 2016.
- [8] B. Dey, S. K. Roy, and B. Bhattacharyya, “Neighborhood based differential evolution technique to perform dynamic economic load dispatch on microgrid with renewables,” *4th International Conference on Recent Advances in Information Technology (RAIT)*, pp. 1–6, 2018.

- [9] M. A. Ramli, H. Boucekara, and A. S. Alghamdi, “Efficient energy management in a microgrid with intermittent renewable energy and storage sources,” *Sustainability*, vol. 11, pp. 1–28, 2019.
- [10] G. C. Cho, I. D. Vitlinsky, V. A. Menshov, D. Z. Isaev, A. A. Konstantinova, Y. Bubnov, and A. Poluektov, “Dynamic economic dispatch in isolated microgrids incorporating the energy storage system,” in *2021 3rd International Youth Conference on Radio Electronics, Electrical and Power Engineering (REEPE)*, 2021, pp. 1–5.
- [11] S. Rezaeeian, N. Bayat, A. Rabiee, S. Nikkhah, and A. Soroudi, “Optimal scheduling of reconfigurable microgrids in both grid-connected and isolated modes considering the uncertainty of ders,” *Energies*, vol. 15, no. 15, 2022.
- [12] M. Faisal, M. A. Hannan, P. J. Ker, A. Hussain, M. B. Mansor, and F. Blaabjerg, “Review of energy storage system technologies in microgrid applications: Issues and challenges,” *IEEE Access*, vol. 6, pp. 35 143–35 164, 2018.
- [13] A. Luna, N. Diaz, F. Andrade, M. Graells, J. Guerrero, and J. Vasquez, “Economic power dispatch of distributed generators in a grid-connected microgrid,” *9th International Conference on Power Electronics and ECCE Asia*, pp. 1161–1168, 2015.
- [14] M. Alramlawi, A. Femi Timothy, A. Gabash, E. Mohagheghi, and P. Li, “Optimal operation of pv-diesel microgrid with multiple diesel generators under grid blackouts,” in *2018 IEEE International Conference on Environment and Electrical Engineering and 2018 IEEE Industrial and Commercial Power Systems Europe (EEEIC / ICPS Europe)*, 2018, pp. 1–6.
- [15] L. A. Rojas-Martinez, O. Montoya, J. A. Martinez-Trespalcacios, C. Rojas, C. Pacheco, and John R. Castro-Suarez, “Radial distribution systems solving in GAMS - practice implementation,” *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, vol. 1154, no. 1, p. 012046, jun 2021.
- [16] O. D. Montoya, F. M. Serra, and C. H. De Angelo, “On the efficiency in electrical networks with ac and dc operation technologies: A comparative study at the distribution stage,” *Electronics*, vol. 9, no. 9, pp. 1–23, 2020.
- [17] A. C. Rueda-Medina, J. F. Franco, M. J. Rider, A. Padilha-Feltrin, and R. Romero, “A mixed-integer linear programming approach for optimal type, size and allocation of distributed

- generation in radial distribution systems,” *Electric Power Systems Research*, vol. 97, pp. 133–143, 2013.
- [18] S. Goodarzi, M. Gitizadeh, and A. R. Abbasi, “Efficient linear network model for tep based on piecewise mccormick relaxation,” *IET Generation, Transmission Distribution*, vol. 13, no. 23, pp. 5404–5412, 2019.
- [19] G. McCormick, “Computability of global solutions to factorable nonconvex programs: Part i” convex underestimating problems,” *Mathematical Programming*, vol. 10, pp. 147–175, 1976.
- [20] J. A. Cardona, “Ubicación y dimensionamiento de generadores distribuidos en redes dc,” *Proyecto de Grado de Ingeniería Eléctrica, Universidad Tecnológica de Pereira*, 2022.
- [21] N. Alguacil, A. Motto, and A. Conejo, “Transmission expansion planning: a mixed-integer lp approach,” *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 18, no. 3, pp. 1070–1077, 2003.
- [22] O. D. Montoya, W. Gil-González, and L. Grisales-Noreña, “Relaxed convex model for optimal location and sizing of dgs in dc grids using sequential quadratic programming and random hyperplane approaches,” *International Journal of Electrical Power Energy Systems*, vol. 115, p. 105442, 2020.