L'incertezza inSegna

Giuseppe Sanfilippo

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Palermo
giuseppe.sanfilippo@unipa.it

Sommario

Traendo spunto dalla manifestazione scientifica *Esperienza inSegna*, dal titolo *Certo è... probabile*, svoltasi a Palermo nel 2014, in questo lavoro dapprima sono richiamati alcuni problemi che diedero la nascita al calcolo delle probabilità e successivamente vengono analizzati due problemi popolari di probabilità che normalmente sono oggetto di dibattito soprattutto tra i non addetti al settore: "Monty Hall" e il "Gratta e Vinci". Nel primo si mostra l'importanza di tradurre correttamente, in termini di evento condizionante, l'informazione acquisita quando si vogliono "aggiornare" le probabilità; nel secondo si mette in guardia il lettore di fronte agli spot televisivi che annunciano vincite facili nelle lotterie a premi.

1 Premessa

Nel mese di Febbraio 2014, presso il Polididattico dell'Università degli Studi di Palermo, si è svolta la manifestazione scientifica *Esperienza inSegna* che nell'edizione 2014 ha avuto come argomento di studio la probabilità (PALERMOSCIENZA, 2014; Grasso, 2014). La manifestazione, costruita attorno a tematiche annuali e organizzata dall'associazione PALERMOSCIENZA, ha come scopo la divulgazione del sapere scientifico attraverso una didattica laboratoriale. Ogni anno, durante la manifestazione, il Polididattico si trasforma in un luogo in cui, tra le altre attività, gli studenti di scuola o università diventano protagonisti e animatori di *exhibit* scientifici realizzati con la supervisione dei loro docenti. L'edizione del 2014 è stata visitata da circa 10.000 persone, in prevalenza studenti di 88 scuole del territorio (10 primarie, 28 medie e 50 superiori), ed ha visto la partecipazione, in qualità di espositori, di 34 scuole (5 primarie, 10 medie e 24 superiori). Tra gli invitati, ricordiamo la presenza del ricercatore Mario Tozzi, noto divulgatore scientifico, che ha parlato di "Benessere dell'Umanità, destino o caso?" e di Fulvia de Finetti, figlia del fondatore della probabilità soggettiva Bruno de Finetti, che ha ripercorso gli episodi più significativi della vita del padre (de Finetti and Nicotra, 2008).

Alcuni mesi prima della manifestazione, diversi docenti di scuola, di università ed alcuni ricercatori del CNR, dell'INGV e dell'INAF si sono incontrati nel tentativo di trovare insieme dei modi semplici e interessanti per far comprendere agli studenti espositori come poter spiegare ai visitatori alcuni *problemi e paradossi* della teoria della probabilità (Székely, 1986; Grinstead and Snell, 2006). Per illustrare uno dei problemi di *de Méré* relativo al gioco dei dadi (Dall'Aglio, 2000) è stato chiesto a due studenti di recitare con abiti d'epoca un dialogo in cui il Cavalier de Méré, accanito giocatore d'azzardo, chiedeva al matematico-filosofo Blaise Pascal come mai, lanciando ventiquattro volte una coppia di dadi, scommettere per l'evento E ="*si presenta almeno una volta il doppio sei*" fosse meno vantaggioso di scommettere per il suo contrario E^c="*non si presenta mai il doppio sei*".

2 Ripartizione della posta

Un altro problema posto dal Cavalier de Méré a Pascal è il problema della suddivisione della posta in un gioco interrotto, cosiddetto *problema delle parti* o *problema dei punti* (David, 1962; Székely, 1986). Nel corso della manifestazione alcuni studenti hanno analizzato il problema nella formulazione seguente: *Due giocatori, diciamo Alice e Bob, mettono in palio un montepremi di sessantaquattro monete (trentadue monete ciascuno) e disputano una serie di lanci di una moneta. Ad ogni lancio, vince Alice, se esce testa, mentre vince Bob, se esce cro-*

ce. Vince la gara, aggiudicandosi l'intero montepremi, chi per primo raggiunge sei vittorie. Per qualche motivo il gioco viene interrotto quando ad Alice manca una vittoria per vincere la gara e a Bob ne mancano tre. Ci si chiede in che modo deve essere divisa la posta tra loro.

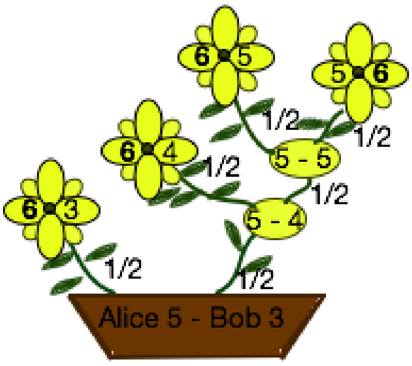

Figura 1: Possibili scenari nel problema della ripartizione della posta.

Per poter spiegare ai visitatori come dividere equamente la posta è stato chiesto agli studenti coinvolti di realizzare un cartellone con un diagramma, simile a quello in Figura 1, in cui vengono rappresentati i possibili scenari futuri della gara interrotta con le rispettive probabilità (si suppone che in ogni lancio i due giocatori abbiano la stessa probabilità di vincere e che le vittorie relative a lanci distinti siano tra loro stocasticamente indipendenti). Nel diagramma i fiori rappresentano i nodi terminali della gara e consentono di dedurre che se si fosse continuato a giocare, Bob avrebbe vinto la gara con probabilità $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ e Alice con probabilità $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$. Pertanto, gli studenti potevano motivare la seguente ripartizione del montepremi: 7 parti su 8, pari a 56 monete, per Alice e 1 parte su 8, pari a 8 monete, per Bob. Questa risoluzione del problema, che tiene conto del numero dei lanci rimanenti, avvenne nella famosa corrispondenza tra Blaise Pascal e Pierre Fermat (1654). Per tale motivo Pascal e Fermat vengono riconosciuti da molti come i fondatori del calcolo delle probabilità (Devlin, 2008) . A tal proposito, come documentato in (Barra, 2005; Marchini, 2010), va ricordato che indagini di carattere storico (Toti Rigatelli, 1985; Franci, 2002) hanno riconosciuto la risoluzione del problema delle parti in alcuni trattati di studiosi anonimi italiani, rispettivamente, del XIV e del XV secolo e che quindi in entrambi i casi la soluzione degli studiosi italiani è precedente alla risoluzione formulata da Pascal e Fermat.

Molto utili sono stati gli stand in cui le classiche macchine di Galton (quincunx), costruite interamente dagli studenti di alcune scuole, sono state utilizzate per giustificare ai visitatori l'approssimazione normale della distribuzione binomiale facendo osservare che, lasciando cadere dall'alto della macchina un numero elevato di palline, la distribuzione in basso delle palline cadute assumeva una forma (quasi) a campana. Alcuni visitatori spiegavano un tale risultato osservando, giustamente, che nella macchina di Galton il numero di percorsi distinti che conducono una pallina in una casella terminale è massimo se questa casella si trova al centro, mentre decresce man mano che la casella si allontana dal centro.

3 Monty Hall

Particolare attenzione è stata dedicata da alcuni espositori sia al problema di Monty Hall (Savant, 1990; Grinstead and Snell, 2006) che ad altri problemi simili. Questo problema, legato al gioco a premi americano *Let's Make a Deal*, prende il nome del conduttore dello show, Maurice Halprin, noto con lo pseudonimo di Monty Hall e suscitò un'accesa controversia sulla rivista "Parade" nel 1990. Un exhibit ha preferito proporre ai visitatori il problema Monty Hall con delle scatole contenente dei biglietti premio al posto delle ben note porte: *Al concorrente vengono mostrate tre scatole chiuse; dentro ad una si trova un biglietto premio con il quale si vince un'automobile, mentre ciascuna delle altre due nasconde un biglietto premio con il quale si riceve una capra. Il concorrente può scegliere a caso una delle tre scatole vincendo il premio in essa contenuto. Dopo che il concorrente ha selezionato una scatola senza aprirla, diciamo la* scatola *1, il conduttore – che conosce ciò che si trova dentro ad ogni scatola – seleziona ed apre una delle altre due, diciamo la scatola 2, rivelando un biglietto con premio una capra. Quindi, il conduttore offre al concorrente la possibilità di cambiare la propria scelta iniziale, passando all'unica scatola restante, ovvero alla scatola 3. Cambiare la scatola 1 con la scatola 3 aumenta la probabilità che il concorrente possa vincere l'automobile?* (Savant, 1990). A tale domanda si potrebbe essere tentati di rispondere che risulta indifferente cambiare scatola sulla base del seguente ragionamento. Posto A_j=

"*la scatola j contiene il biglietto con premio l'automobile*", $j = 1, 2, 3$, si considera A_2^c ="*la scatola 2 non contiene il biglietto con premio l'automobile*" come evento condizionante e di conseguenza si valutano equiprobabili le due possibilità rimaste, cioè $P(A_1 \mid A_2^c) = \frac{P(A_1)}{P(A_1 \vee A_3)} = \frac{1/3}{1/3+1/3} = 1/2$ e $P(A_3 \mid A_2^c) = 1/2$. Se l'evento A_2^c fosse l'evento condizionante corrispondente all'informazione acquisita, allora la valutazione precedente sarebbe corretta. In realtà, per *aggiornare* le probabilità[1] occorre considerare come evento condizionante corrispondente all'informazione acquisita l'evento I_2 ="*il conduttore mostra che la scatola 2 non contiene il biglietto con premio l'automobile*" e non l'evento A_2^c. Gli eventi A_2^c e I_2 non sono logicamente equivalenti; infatti, anche se I_2 *vero* implica A_2^c *vero* (e quindi $P(A_2 \mid I_2) = 0$), si ha che A_2^c *vero* non implica I_2 *vero*. Ad esempio, nel caso in cui il biglietto con premio l'automobile si trovasse dentro la scatola 1, si avrebbe che la scatola 2 non conterrebbe come premio l'automobile (A_2^c vero) e che il conduttore potrebbe decidere di mostrare il biglietto contenuto nella scatola 3, non mostrando quello contenuto nella scatola 2 (I_2 falso). Pertanto, per stabilire se conviene cambiare scatola occorre verificare se $P(A_3 \mid I_2) > P(A_1 \mid I_2)$. Gli eventi A_1, A_2, A_3, formano una partizione dell'evento certo Ω, cioè uno e uno solo di essi si verifica, pertanto, utilizzando la formula di Bayes si ha

$$P(A_1|I_2) = \frac{P(A_1 \wedge I_2)}{P(I_2)} =$$

$$= \frac{P(I_2|A_1)P(A_1)}{P(I_2|A_1)P(A_1)+P(I_2|A_2)P(A_2)+P(I_2|A_3)P(A_3)} .$$

Nell'ipotesi in cui il concorrente abbia scelto la scatola contenente il biglietto con premio l'automobile (evento A_1), supponiamo che il conduttore mostri il contenuto della scatola 2 con probabilità $p \in [0, 1]$, cioè $P(I_2 \mid A_1) = p$. Inoltre, poiché il conduttore conosce il contenuto delle scatole, si ha $P(I_2 \mid A_3) = 1$ e $P(I_2 \mid A_2) = 0$. Quindi $P(A_1 \mid I_2) = \frac{p \cdot \frac{1}{3}}{p \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{p}{p+1}$ e $P(A_3 \mid I_2) = 1 - P(A_1 \mid I_2) - P(A_2 \mid I_2) = 1 - 0 - \frac{p}{p+1} = \frac{1}{p+1}$. Pertanto, poiché $P(A_3 \mid I_2) \geq P(A_1 \mid I_2)$, con l'uguaglianza solo per $p = 1$, si deduce che al concorrente conviene cambiare scatola, se $p < 1$,mentre risulta indifferente, se $p = 1$. In particolare, se (come viene fatto normalmente) si suppone $p = \frac{1}{2}$ allora si ha $P(A_1 \mid I_2) = 1/3$ e $P(A_3|I_2) = 2/3$. In tal caso si ha $P(A_1 \mid I_2) = P(A_1)$, cioè l'evento A_1 viene valutato stocasticamente indipendente da I_2. La soluzione illustrata può essere facilmente estesa al caso in cui si hanno n scatole e il conduttore, che conosce il contenuto delle scatole, mostra al concorrente il contenuto di $n-2$ scatole rimanenti che contengono un biglietto con premio una capra. A questo punto al concorrente viene proposto di cambiare la scatola scelta con l'unica scatola rimasta chiusa.

Un altro problema simile a Monty Hall, noto come *il paradosso delle tre carte*, è stato illustrato da un altro gruppo di studenti di scuola superiore. *Vi sono tre carte, una è bianca su entrambi i lati, una è rossa su entrambi i lati e una è bianca da un lato e rossa dall'altro. Ogni carta è nascosta in una scatola. Il giocatore sceglie a caso una delle tre scatole, estrae la carta e la posa sul tavolo in modo che sia visibile un solo lato, diciamo il lato bianco, allora il conduttore propone al giocatore di voler scommettere che anche l'altro lato della carta sia dello stesso colore, cioè propone una scommessa in cui se entrambi i lati della carta sono dello stesso colore, allora vince il conduttore, se invece sono di colore diverso, allora vince il giocatore.* Per stabilire se al giocatore conviene accettare la scommessa, confrontiamo la probabilità p_c di vincita del conduttore, ovvero la probabilità che i lati della carta estratta siano dello stesso colore supposto che il lato visibile della carta estratta sia bianco, con la probabilità p_g di vincita del giocatore, ovvero con la probabilità che i lati della carta estratta siano di colore diverso supposto che il lato visibile della carta estratta sia bianco. Siano B, R ed M, rispettivamente, gli eventi "*la carta estratta è bianca su entrambi i lati*", "*la carta estratta è rossa su entrambi i lati*" e "*la carta estratta è rossa da un lato e bianca dall'altro*". Indicando con I_B, l'evento "*il lato visibile della carta estratta è bianco*", e osservando che gli eventi R ed I_B sono incompatibili, si ha: $p_c = P(B|I_B)$ e $p_g = P(M|I_B) = 1 - P(B|I_B)$. Applicando la formula di Bayes si ha $P(B|I_B) = P(I_B|B)P(B)/(P(I_B|B)P(B)+P(I_B|R)P(R)+P(I_B|M)P(M)) = (1\cdot 1/3)/(1\cdot 1/3+0\cdot 1/3+1/2\cdot 1/3) = 2/3$. Pertanto, essendo $p_c = \frac{2}{3} \geq \frac{1}{3} = p_g$, segue che al concorrente non conviene accettare la scommessa proposta dal conduttore. Anche in que-

[1] Vedi anche "Problema dei tre condannati" in (Scozzafava, 2001, p. 50-51).

sto gioco si può commettere l'errore di considerare come condizionante nella valutazione di p_c un evento implicato (ma diverso) da I_B. Ad esempio, se nella valutazione di p_c si sostituisse I_B con l'evento $B \vee M$ ("*la carta estratta è bianca su entrambi i lati o è rossa da un lato e bianca dall'altro*"), si avrebbe $P(B|B \vee M) = \frac{P(B)}{P(B)+P(M)} = \frac{1}{2}$ e quindi si valuterebbe come equa una scommessa che invece non lo è.

4 Perdere è facile

Particolare attenzione è stata dedicata anche ai giochi d'azzardo. Un poster interessante, realizzato dagli studenti del corso di laurea in Matematica di Palermo, illustrava le probabilità relative ad una particolare lotteria istantanea della cosiddetta categoria "Gratta e Vinci". Per la realizzazione del poster si è preso spunto da un video dal titolo "Fate il nostro gioco" (Rizzuto et al., 2013) prodotto da un'iniziativa nata in Piemonte per sensibilizzare i giovani e sconfiggere il gioco d'azzardo patologico. La lotteria considerata è quella denominata "Nuovo Miliardario". In tale lotteria (Magistro, 2013):

- il prezzo di ciascun biglietto è di €5,00;
- il primo lotto di biglietti è stato fissato nel numero complessivo di 142.560.000 ;
- la massa premi corrispondente al quantitativo di 142.560.000 biglietti ammonta a €513.418.500, 00;
- la struttura dei premi è illustrata in Tabella 1.

Supponendo di acquistare il primo biglietto della lotteria (o di non conoscere i risultati di eventuali altri biglietti acquistati) e che tale biglietto sia stato scelto a caso tra i biglietti messi disponibili, si ha che:

- il valore atteso della vincita aleatoria è pari a €3,60 (a fronte di un costo del biglietto di €5,00);
- la probabilità p_0 di una vincita nulla è pari a $p_0 = 83.466.423/142.560.000$ (circa 58,55%);
- la probabilità p_+ di vincere un premio superiore al costo del biglietto è $p_+ = 16.325.577/142.560.000$ (circa 11,45%);

Importo dei premi in euro	**Numero premi nel lotto**	**N. Premi/Totale Biglietti**
0	83.466.423	58,548277%
5	42.768.000	30,000000%
10	11.790.900	8,270833%
15	1.425.600	1,000000%
20	1.544.400	1,083333%
25	392.040	0,275000%
50	733.590	0,514583%
100	403.920	0,283333%
500	26.730	0,018750%
1.000	8.100	0,005682%
10.000	216	0,000152%
100.000	54	0,000038%
500.000	27	0,000019%

Tabella 1: Tabella 1: Struttura premi in un lotto di 142.560.000 biglietti del gioco "Nuovo Miliardario

- la probabilità p_M di vincere uno dei 27 premi massimi di 500 mila euro è $p_M = 27/142.560.000$ (circa 0,000019%).

Per avere un ordine di grandezza di quest'ultimo valore di probabilità proviamo a fattorizzarlo nel prodotto di sei probabilità relative ad eventi valutati stocasticamente indipendenti. Consideriamo, rivolgendoci ad un giocatore, i seguenti eventi e le rispettive probabilità:

1. E_1="*ottieni un tre non di spade estraendo a caso una carta da un mazzo di 40 carte napoletane*", $P(E_1) = 3/40$;
2. E_2="*ottieni testa nel lancio di una moneta*", $P(E_2) = 1/2$;
3. E_3="*ottieni 4 come somma dei due risultati nel lancio di due dadi*", $P(E_3) = 1/12$;
4. E_4="*il primo numero estratto, giocando a tombola, coincide con il tuo giorno di nascita*", $P(E_4) = 1/90$;
5. E_5="*ottieni una figura estraendo a caso una carta da un mazzo di 40 carte siciliane*", $P(E_5) = 12/40 = 3/10$;
6. E_6="*il primo numero estratto in una fissata estrazione della lotteria Grandlotto delle Filip-*

pine (numeri da 1 a 55) coincide con il numero 10”, $P(E_6) = 1/55$;

Se gli eventi $E_1, E_2, \ldots, E_6$ sono valutati stocasticamente indipendenti si ha $P(E_1 \wedge \cdots \wedge E_6) = P(E_1) \cdot \cdots \cdot P(E_6) = 27/142.560.000 = p_M$. Cioè, la probabilità p_M di vincere uno dei premi massimi nella lotteria “Nuovo Miliardario” coincide con il valore di probabilità che (di norma) si attribuisce al verificarsi *congiuntamente* di tutti e sei gli eventi $E_1, E_2, \ldots, E_6$.
Un’ultima analisi riguarda il calcolo del *guadagno relativo atteso del giocatore*. Ricordando che il costo del biglietto è di €5,00 e che il valore atteso della vincita aleatoria è di €3,60 si ha che la vincita relativa attesa del giocatore (rendimento atteso) è pari a $v = \frac{3{,}60}{5{,}00}$ =0,72, ovvero il guadagno relativo atteso g_r del giocatore è $g_r = \frac{3{,}60-5{,}00}{5{,}00} = v - 1 = -0,28$. In altri termini, *acquistando il primo biglietto della lotteria si prevede di perdere 28 centesimi per ogni euro pagato*. A tal proposito è opportuno un confronto con il guadagno relativo atteso in qualche altro gioco classico. Ad esempio, ricordiamo che giocando al rosso/nero nella roulette francese (quella con i numeri da 0 a 36, in cui lo zero è verde) si riceve, in caso di vincita, il doppio di quanto pagato. Pertanto, giocando al rosso/nero il rendimento atteso del giocatore è $v' = \frac{18}{37} \cdot 2 \simeq 0,973$, ovvero il guadagno relativo atteso del giocatore è $g'_r = v' - 1 \simeq -0,027$. In tal caso, il giocatore prevede di perdere soltanto 0,27 centesimi (circa) per ogni euro pagato (Dall’Aglio, 1996).

5 Conclusione

Nel corso della manifestazione si è potuto constatare che molti visitatori non avevano affatto idea di quali fossero le probabilità e i guadagni nelle lotterie e sono rimasti profondamente colpiti dalle precedenti considerazioni. Ovviamente uno studio simile si può estendere a tutte le lotterie “Gratta e Vinci” (e non solo) attualmente attive in Italia e i risultati potrebbe essere analizzati in qualche progetto futuro dedicato al “gioco responsabile”. Per concludere, ricordiamo che in (Conte et al., 2014; Giambalvo, 2014) è possibile trovare una descrizione più dettagliata della manifestazione e che nello stesso numero della rivista *Induzioni* (Mignani *(Dir.)*, 2014) alcuni insegnanti e organizzatori hanno illustrato in che modo gli espositori hanno analizzato, raccontato e spiegato i diversi problemi di probabilità . . . e considerato che *la probabilità non esiste* (de Finetti, 1974) ne hanno considerato sicuramente tanti.

Riferimenti bibliografici

M. Barra. La probabilità è nata in Italia. *Induzioni*, 31: 21–47, 2005.

A. Conte, and V. Greco. Certo. . . è probabile: quando la scienza lascia un Segno. *Induzioni*, 49:39–44, 2014.

G. Dall’Aglio. Che cosa dice il calcolo delle probabilità. In & P. Monari D. Costantini, editor, *Probabilità e giochi d’azzardo: perchè il banco non perde mai*, pages 102–128. 1996.

G. Dall’Aglio. *Calcolo delle Probabilità*. Zanichelli, 2000.

F.N. David. *Games, Gods and Gambling: The Origins and History of Probability and Statistical Ideas from the Earliest Times to the Newtonian Era*. Charles Griffin Co, London, 1962.

B. de Finetti. *Theory of Probability vol.1*. Wiley, New York, 1974.

F. de Finetti and L. Nicotra. *Bruno de Finetti, un matematico scomodo*. Belforte, Livorno, 2008.

K. Devlin. *La lettera di Pascal*. Storia dell’equazione che ha fondato la teoria della probabilità. Rizzoli, 2008.

R. Franci. Una soluzione esatta del problema delle parti in un manoscritto della prima metà del Quattrocento. *Bollettino di storia delle scienze matematiche XXII/2*, pages 253–266, 2002.

M. Gardner. *Mathematical Games*. Scientific American, 1959.

O. Giambalvo. L’insegnamento della probabilità a scuola: l’esperienza di Esperienza InSegna. *Induzioni*, 49: 35–38, 2014.

P. Grasso. *“Esperienza inSegna”, ecco come si articola*. “Tratto da Younipa, 2014. URL `http://www.younipa.it/2014/02/19/esperienza-insegna-ecco-come-si-articola/12053/`.

C. M. Grinstead and J. L. Snell. *Grinstead and Snell’s Introduction to Probability*. 2006. URL `http://www.math.dartmouth.edu/~prob/prob/prob.pdf`.

L. Magistro. *Tratto da Agenzia delle Dogane e dei Monopoli*. 2013. URL `http://www.agenziadoganemonopoli.gov.it/wps/wcm/connect/Internet/ed/Monopoli/Giochi/Lotterie/Lotterie_istantanee/lot_ist_attive/LI+Nuovo+Miliardario`.

C. Marchini. *Appunti di Matematiche Complementari I*. 2010. URL http://www.unipr.it/arpa/urdidmat/MC10_11/.

S. Mignani *(Dir.)*. *Induzioni*, 49, 2014.

PALERMOSCIENZA. Esperienza insegna. 2014. URL http://www.palermoscienza.it/esperienza-insegna-2014.

D. Rizzuto, P. Canova, and D. Migliardi. La matematica spiega la logica dei Gratta&vinci. 2013. URL http://www.lastampa.it/2013/01/28/multimedia/cronaca/gratta-vinci-le-probabilita-di-vincita-reali-EX0iGshVFfSuL10OqSGmbN/pagina.html.

M. Savant. Game show problem. *Parade Magazine*, September 9, 1990. URL http://marilynvossavant.com/game-show-problem/.

R. Scozzafava. *Incertezza e Probabilità*. Zanichelli, 2001.

G. Székely. *Paradoxes in probability theory and mathematical statistics*. Amsterdam: East European Series, D. Reidel, 1986.

L. Toti Rigatelli. Il “problema delle parti” in manoscritti del XIV e XV secolo. In M. Folkerts and U. Lindgren, editors, *Mathemata*, pages 229–236. Franz Steiner Verlag, Stuttgart, 1985.

Wikipedia. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall_problem.