UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PALERMO

Dottorato di Ricerca in Filosofia del Linguaggio, della Mente e dei Processi Formativi

Dipartimento di Scienze Umane

Settore Scientifico Disciplinare M-Fil/05

PER UNA TEORIA DEL SIGNIFICATO REALISTA

RICERCHE PER UNA *DIA-LOGICA DEI GIOCHI*

IL DOTTORE

Dott. Massimo Panzarella

IL COORDINATORE

Prof. Salvatore Tedesco

IL TUTOR

Prof. Francesco La Mantia

CICLO XXIV

ANNO CONSEGUIMENTO TITOLO 2015

SOMMARIO

Ringraziamenti

Fondamentali sono stati gli incontri e i colloqui con il prof. Gabriel Sandu il quale nel 2004 mi ha introdotto, anche con numerose lezioni mirate, alla *logica filo-indipendente*. I seminari, gli interventi ai convegni e lo scambio continuo di opinioni negli anni con il prof. Sandu sono stati per me rilevanti per la maturazione delle idee espresse nel presente lavoro. Al prof. Francesco La Mantia va il mio più sentito ringraziamento per aver seguito la mia tesi incoraggiandomi con preziosi consigli.

Desidero ringraziare il prof. Gianluigi Oliveri per aver letto alcune parti della mia tesi. Attraverso le sue osservazioni ho rivisto e reimpostato alcuni argomenti centrali.

Anche se a distanza di anni, non posso non esprimere la mia riconoscenza al prof. Ahti-Veikko Pietarinen e al dr. Tero Tulenheimo. Mediante le loro lezioni, consigli e suggerimenti hanno fatto crescere in me l'interesse per le tematiche trattate.

La frequenza, il seguire corsi e seminari di chi si occupa da decenni di logica filo-indipendente è stato per me stimolante e pertanto ringrazio il prof. Ahti-Veikko Pietarinen e il dr. Tero Tulenheimo. Sembrerà superfluo ma va ribadito che ogni omissione, imprecisione o errore è da imputare solo ed esclusivamente allo scrivente.

Numerosi sono gli amici, colleghi e alunni che hanno contribuito, anche inconsapevolmente e in modo diverso, a rivedere le mie idee. Non li elenco per il timore di dimenticarne qualcuno, ma li ringrazio singolarmente. Infine il mio pensiero va a Melania, sempre presente e paziente. Questo lavoro è a lei dedicato.

1. Giochi, informazione, significato

1.1. *Logica, ontologia e verità*

Che cosa è un linguaggio formale? E' possibile descrivere il mondo o alcune situazioni attraverso un linguaggio formale? Queste sono le domande fondamentali a cui tenterò di rispondere le quali immediatamente rimandano a problematiche ben più ampie del tipo: Che tipo di *forma* dovrebbe avere una lingua naturale? Qual è la relazione tra enunciati e mondo? Esiste una teoria del significato in grado di esplicitare tali relazioni? Che tipo di caratteristiche dovrebbe avere quest'ultima? E ancora, qual è la natura dei segni logici? Ovvero qual è il significato delle costanti logiche? E' possibile in filosofia del linguaggio ritenere sensata una semantica formale dopo le critiche mosse dal Wittgenstein delle *Ricerche filosofiche* alla logica attraverso il concetto di gioco linguistico?

Queste problematiche sono centrali in filosofia del linguaggio perché si pongono il problema di cosa sia una lingua, del suo funzionamento, delle sue peculiarità nonché i limiti. Frege, Peirce, Wittgenstein, Tarski e Carnap sono i più noti esponenti che hanno aperto il dibattito sui rapporti tra linguaggio formale e mondo ma più recentemente il problema è stato riproposto da Davidson, Chomsky, ed in particolare Dummett che continua ad alimentare il dibattito soprattutto in relazione alla problematica Realismo/antirealismo. Tale dibattito può essere sintetizzato nel modo seguente: se la realtà e gli oggetti in essa presenti sono indipendenti dai nostri schemi logici mentali, e dunque la verità di un enunciato consiste nella corrispondenza tra espressioni del linguaggio e realtà, ci troviamo in un ambito di credenze realiste; se invece assumiamo un'impostazione antirealista stiamo negando una realtà oggettiva e dunque riteniamo che la verità degli enunciati logici è la conseguenza di una dimostrazione. Per un antirealista non ha senso accettare che una proposizione debba essere *vera* o *falsa* indipendentemente da una procedura di verificabilità, perché esistono proposizioni di cui non si può dimostrare né la verità né la falsità. Invece, un realista considera che in linea di principio un enunciato debba essere vero o falso indipendentemente da una procedura che dimostri la verità o la falsità dell'enunciato in questione.

Ora, entrambe le posizioni prendono in esame il rapporto tra linguaggio e realtà a partire da una prospettiva che ignora gli ammonimenti del Wittgenstein delle *Ricerche filosofiche*; in particolare vengono eluse tutte quelle problematiche che connesse al concetto di gioco linguistico, rendono difficoltosa l'attribuzione del predicato "vero" agli enunciati.

E' possibile trattare il predicato "vero" prendendo in esame il concetto gioco linguistico? Che cosa accade se le due prospettive vengono sottoposte a critica alla luce di un linguaggio formale caratterizzato dal concetto di "gioco linguistico"? E' possibile una fondazione plausibile di un linguaggio formale che faccia del concetto di gioco il perno centrale?

1.2. Logica e Teoria dei giochi

Un'interessante trattazione del predicato 'vero' in relazione al concetto di gioco è offerto dalla Teoria dei giochi[1]. In generale La Teoria dei giochi è un'importante teorizzazione del comportamento di soggetti individuali o collettivi in situazioni di conflitto o competizione che ha avuto sin dalle sue origini rilevanti applicazioni in diversi campi: matematica, economia, finanza, politica, biologia, informatica, sociologia, ma non in logica. Tuttavia è interessante notare come la nascita della teoria dei giochi tra il 1928 (anno di pubblicazione del primo articolo ad opera di von Neumann, allievo di Hilbert) e gli anni '40 sia pressappoco contemporanea alle teorizzazioni di Wittgeinstein sui giochi linguistici. Nonostante ciò non c'è stata nessuna influenza scientifica tra le due teorizzazioni, sebbene come si vedrà si possono ottenere risultati considerevoli dalle loro interconnessioni.

L'idea base della Teoria dei giochi consiste nel descrivere il comportamento tra due *giocatori* in conflitto o in cooperazione. I soggetti in questione interagiscono tra loro ma hanno come obiettivo il massimo guadagno individuale. I giocatori eseguono le proprie scelte liberamente e in virtù dell'obiettivo secondo le proprie motivazioni, in ciò tengono in considerazione le opzioni possibili di scelta e le informazioni provenienti dalle scelte effettuate dall'altro giocatore.
Ad ogni mossa finale che porta alla conclusione di una partita viene assegnata una vincita o risultato (*pay-off*). Nel caso in cui il risultato finale non coincide con il più conveniente, il giocatore perde.

---

[1] Cfr J. von Neumann, *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, in Mathematische Annalen*, 100 (1928), pp. 295-320, tr. ingl., *On the theorie of games of strategy*, in A. W. Tucker e R. D. Luce (a cura di), *Contributions to the Theory of Games*, vol 4, Princeton U.P., Princeton 1959, pp. 13-42, e J. von Neumann e O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, John Wiley, New York 1944.

Fondamentale in teoria dei giochi è il concetto di *strategia* cioè l'insieme delle mosse che un giocatore compie all'interno di una partita per ottenere il risultato. Se la strategia di un giocatore porta sempre all'ottenimento del risultato migliore per qualunque mossa dell'avversario, si dice che essa è vincente o ottimale.

Altra nozione rilevante è quella di *informazione*, infatti le mosse dei giocatori vengono effettuate in base alle informazioni possedute sulle mosse effettuate dall'altro. In questo modo la teoria dei giochi può essere vista come una teoria delle scelte o dell'azione basata sull'informazione, nonché sulle regole di gestione di tali informazioni: cioè le regole che governano per l'appunto le mosse all'interno del gioco.

Sia la teoria dei giochi che i giochi linguistici hanno come sfondo comune la descrizione dell'*interazione* tra soggetti in situazioni di scambio di informazioni. La differenza sostanziale tra la teoria dei giochi e la teoria del linguaggio che vede il linguaggio come un insieme giochi linguistici è che il primo approccio propone una matematizzazione del comportamento il secondo, com'è noto, è decisamente contrario a qualunque tentativo di formalizzazione rigorosa delle azioni e delle regole in generale. In ogni caso la costruzione dei significati per entrambi gli approcci non può prescindere dalle interrelazioni dinamiche tra i soggetti.

Hintikka a partire dai risultati di von Neumann e dall'intuizione di Wittgenstein sull'accostamento tra significato e gioco apre alla possibilità di fondazione di un linguaggio logico basato proprio sul gioco. Nello specifico, Hintikka ritiene fondamentale l'idea di Wittgenstein di aver considerato l'attività linguistica dei soggetti come strutturata da giochi interattivi. Tuttavia Hintikka sostiene che un gioco linguistico debba essere formulato mediante un concetto rigoroso di *strategia*. Seppur viene riconosciuta a Wittgenstein l'ispirazione di una teoria del significato relata al concetto di gioco gli si imputa che il seguire una regola "ciecamente" non è un'assunzione valida che vale per qualsiasi regola. Sostiene Wittgenstein nelle *Ricerche* "When I obey a rule, I do not choose. I obey the rule *blindly*"[2]. Mentre in una teoria semantica dei giochi, come si vedrà, le regole che garantiscono il gioco sono chiare e ben articolate ed ogni giocatore deve essere *cosciente* della regola che sta seguendo. Inoltre contrariamente alla visione wittgensteiniana, in teoria dei giochi seguire una regola significa proprio *scegliere*. Ecco come in una recente intervista il finlandese espone il proprio rapporto con Wittgenstein:

> Q: You also state: "I do not hesitate to acknowledge Wittgenstein's influence on my thinking, even though I have become sharply critical of several of his main views." Which of his views are you critical of and why?
>
> A: For instance, I do not believe that semantics is inexpressible, that we in the last analysis follow rules "blindly" (Wittgenstein's expression), or that we cannot recognize directly the rule we are following. Why? See my books and papers!
>
> Q: You are the originator of the game-theory semantics, which encompasses many disciplines, including applied mathematics, biology, engineering, political science, and philosophy, among others. What part, if any, of the game-theory semantics concept is inspired by Wittgenstein?

---

[2] L. Wittgeinstein, *Philosophical Investigation*, Basil Blackwell, Oxford 1986, 3rd ed., Part I, 219, p. 85.

> A: Not any one part, but the very idea. For Wittgenstein, "language-games" constitute the semantical links between language and reality. Game-theoretical semantics can be said to arise by applying to language-games the general mathematical theory of games, especially the concept of strategy.3

La possibilità fondazionale di una *logica dei giochi* è l'idea perno di Hintikka. Ovvero che sia possibile un linguaggio formale costituito da una semantica esprimibile mediante una teoria matematica dei giochi.
In un certo senso, è come se Hintikka volesse dare continuità al Wittgenstein del *Tractatus* (in cui si sostiene che le proposizioni logiche sono immagini del reale) non perdendo di vista però le più tarde osservazioni dello stesso Wittgenstein
Tuttavia, in disaccordo con il Wittgenstein delle *Ricerche,* Hintikka propone un approccio alla logica intesa come un linguaggio in grado di *esprimere* una certa ontologia mediante il ricorso proprio al concetto di gioco linguistico che è centrale nella sua *Teoria semantica dei giochi*. A questo punto prende le mosse il problema principale della mia ricerca e cioè: se, secondo Hintikka è possibile costruire un linguaggio formale in grado di essere "immagine" (nel senso del Wittgenstein del *Tractatus*) del mondo, che natura avrà una Teoria del significato derivabile da una *Teoria semantica dei giochi*? Ovvero, quali sono le conseguenze logiche e filosofiche di una *logica dei giochi* sul dibattito Realismo/Antirealismo? Ci troviamo in un alveo radicalmente realista o ci sono spazi per un anti-realismo?

---

[3] Intervista a Jaakko Hintikka: *Wittgenstein's Groundbreaking "Language Games" are Not Child's Play*, disponibile solo on line al seguente indirizzo (Symply Wittgenstein): http://simplycharly.com/wittgenstein/jaakko_hintikka_interview.php

1.3. Significato e teoria dei giochi

All'interno del dibattito Realismo/Anti-realismo assume rilevanza centrale il ruolo fondativo di un linguaggio formale. In particolare, una Teoria logica dei giochi ha come presupposto generale la nozione di *modello*:

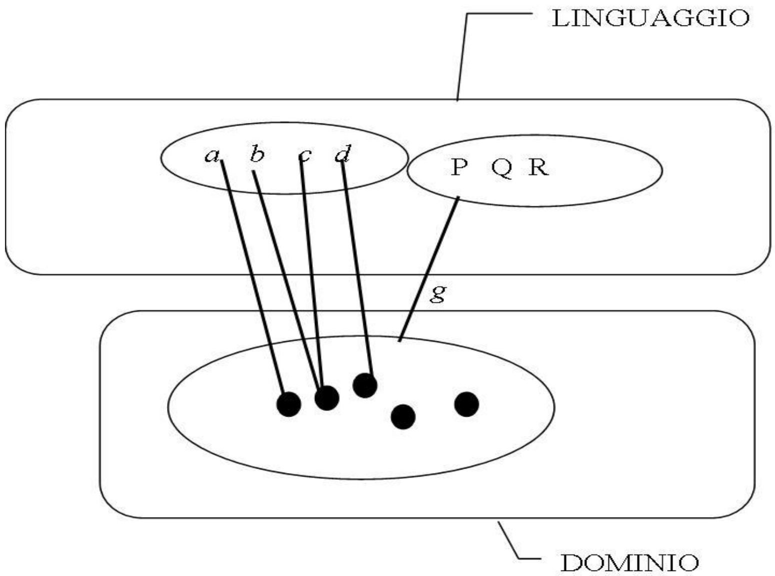


Fig. 1

Il modello o anche "struttura" è un apparato tecnico che serve ad attribuire un valore di verità ad ogni formula atomica $P(t_1, \ldots, t_n)$, - dove $(t_1, \ldots, t_n)$ è un termine generico per variabili individuali $(x, y, z, \ldots)$ o costanti individuali $(a, b, c, \ldots)$ - dopo che ogni sua variabile libera è stata rimpiazzata dal 'nome proprio' (vedi fig. 1) di un elemento del dominio (l'insieme degli 'oggetti' di cui il linguaggio

'parla'). In altri termini avere un modello significa avere un metodo che mi permette di dare *significato* ad un linguaggio del primo ordine mediante l'attribuzione di un valore di verità ai suoi enunciati.
Un linguaggio siffatto è un linguaggio formale caratterizzato da simboli di questo tipo:

0. Parentesi:), (.
1. Connettivi proposizionali: $\sim$, $\vee$, $\wedge$, $\supset$.
2. Un insieme di variabili per ogni membro di una classe o anche *variabili individuali*: x , y , z, ...
3. Quantificatori: $\forall, \exists$.
4. Simboli predicativi ad *n*-posti: P_1 , ..., P_n, Q_1 , ..., Q_n
5. Simboli per costanti individuali: a , b, c.

Avendo un Modello possiamo attribuire un valore di verità a qualsiasi enunciato del linguaggio mediante il ben noto schema-V di Tarski in cui si intersecano piano linguistico e piano ontologico

$$P(t_1, \ldots, t_n) \text{ è } vera\ sse\ \langle t_1, \ldots, t_n \rangle\ appartengono\ a\ (P) \qquad (*)$$

L'enunciato del linguaggio '$P(t_1, \ldots, t_n)$' è vero se e solo se gli individui interpretati $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle$ dall'enunciato appartengono all'*interpretazione* di *P*. Bisogna fare un'importante notazione e cioè che l'interpretazione di *P* è un insieme. Ovvero *P* è un insieme che *esiste* in virtù di un'interpretazione (*g* in Fig. 1 e 2) di un mondo.
Per gli enunciati composti da connettivi logici lo schema-V non incorre in nessuna difficoltà poiché usa le tavole di verità per interpretarli, mentre le cose si complicano se si hanno formule quantificate del tipo $(\forall x)P(x)$ o $(\exists x)P(x)$.
Il ruolo dei quantificatori $(\forall, \exists)$ è quello di circoscrivere il raggio d'azione (*scope*) delle variabili sul dominio. La questione cardine allora è: *come stabilire il valore di verità di formule quantificate*? Ovvero, *come*

interpretare le variabili individuali? La strategia più utile è quella di considerare che una formula $(\forall x)P(x)$ è vera sotto un interpretazione esattamente quando *tutte* le sostituzioni della *x* con *qualsiasi* elemento del dominio soddisfano il predicato *P*. Mentre la formula $(\exists x)P(x)$ è vera se *esiste* almeno *un* elemento *a* del dominio tale che $P(x)$ è soddisfatto.

Ma qui bisogna fare un'osservazione. In presenza di formule quantificate le sostituzioni che facciamo alle variabili individuali non sono 'nomi' degli individui, ma gli individui stessi. Ciò è dovuto al fatto che la *verifica* delle variabili individuali deve cadere sul piano ontologico, così come accade per le costanti individuali. Questo è il motivo per cui nella fig. 1 non sono presenti le variabili individuali. Inoltre se le variabili fossero inserite all'interno del linguaggio su cosa dovrebbero variare? Si potrebbero ottenere solo delle 'variabili nominali' che variano per l'appunto sui nomi degli individui ma non sugli individui. Fondamentalmente verrebbe a mancare il piano di accertamento per la verifica dell'espressione quantificata. Conseguentemente risulta impossibile stabilire il valore di verità di un enunciato in quanto non ci sarebbero elementi che siano 'prova' di quanto esso asserisce. Dunque, le espressioni quantificate, una volta rimpiazzate dagli elementi del dominio *P(a)* non sono ascrivibili all'interno del linguaggio formale (vedi *fig.2*) perché *a* non è un elemento linguistico.

Per risolvere questo problema ci sono due modi. Il primo consiste nell'aumentare il linguaggio di un livello cioè possedere un linguaggio con nuove costanti in grado di nominare gli elementi del dominio. In altri termini, bisogna avere un linguaggio L' più ampio di L in cui non ci sono variabili. Ma questo tentativo proposto dallo stesso Tarski è infruttuoso perché in presenza di variabili individuali in L' si ripresenta lo stesso problema del linguaggio L.

Il secondo modo è quello di aggiungere al modello espresso da punti 1-5 il punto 6:

6. Simboli funzionali *g*, *f* , *h*, …

Ovvero una funzione di assegnamento (*g*,*f*,…) che assegni ad ogni variabile un elemento del dominio:

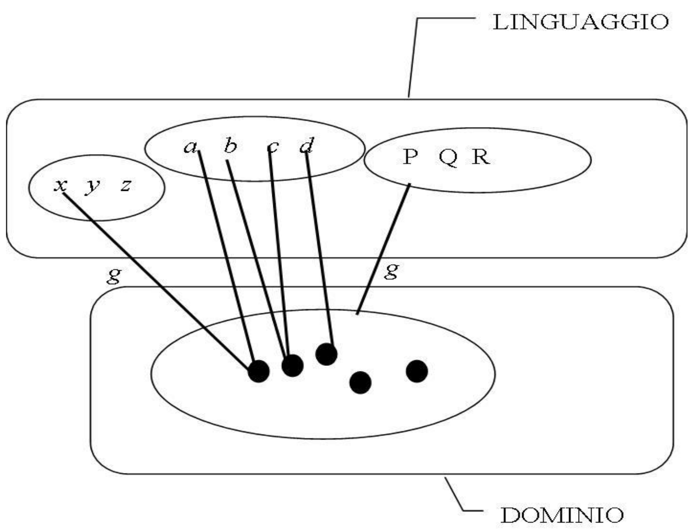


Fig. 2

In tal modo la quantificazione delle variabili individuali non è sugli elementi del dominio ma sulle interpretazioni assegnate dalla variabile di assegnamento.

Per cui, alla luce dell'integrazione 6 al modello formula (*) diventa (**)

$$P(t_1, \dots, t_n) \text{ è } vera\ sse\ \langle g(t_1), \dots, g(t_n)\rangle\ appartiene\ a\ g(P) \qquad (^{**})$$

Che in riferimento ad un enunciato $P(x)$, con P che è un predicato ad un posto, per ovvie considerazioni si ottiene

$$P(x) \text{ è } vera\ sse\ \langle g(x)\rangle\ appartiene\ a\ g(P) \qquad (^{***})$$

In logica l'interpretazione che noi abbiamo espresso con $g(P)$ spesso si trova con una notazione del tipo P^M cioè P è una proprietà o l'insieme delle proprietà che può assumere x all'interno del dominio D del modello M, in simboli ($P^M \subseteq D$). Cioè P è l'insieme di tutte le proprietà degli individui del dominio D, ovvero il predicato è sempre un sottoinsieme anche uguale al dominio D.
Dunque dato un modello M e un'interpretazione g, un enunciato $P(x)$ è vero (|=) in M se e sole se l'interpretazione di g di x appartiene (∈) all'interpretazione di g di P in M. In una notazione formale rivista si ottiene (1)

$$M, g \mid = P(x)\ se\ e\ solo\ se\ g(x) \in P^M \qquad (1)$$

che corrisponde alla (***).
In aggiunta, se l'enunciato esprime una relazione R tra due elementi x,y, cioè $R(x,y)$ l'interpretazione di R in un modello M sarà $R^M \subseteq D \times D$ e la (1) diventa

$$M, g \mid = R(x, y) \ se \ e \ solo \ se \ (g(x), g(y)) \ \in P^M \qquad (2)$$

Volendo generalizzare la (1) in presenza di una relazione $R(x_1, \dots, x_n)$, si avrà $R^M \subseteq D^n$, ovvero la (3)

$$M, g \mid = R(x_1, \dots, x_n) \ \ se \ \ e \ solo \ se \ \langle g(x_1), \dots, g(x_n) \ \rangle \in R^M) \quad (3)$$

che non è altro che una specificazione di (**).

In generale, ciò che è rilevante all'interno del modello è che la procedura di verifica di un enunciato del linguaggio è di tipo *estensionale*, cioè il significato di un enunciato è la propria estensione. In altri termini, il concetto di interpretazione che abbiamo usato (si tratta del ruolo della variabile di assegnamento) non ha la facoltà di associare ogni simbolo predicativo con una proprietà o una relazione in senso stretto, ma piuttosto con l'estensione di tale proprietà o relazione. Il predicato non è un attributo intensionale di un oggetto, ma è semmai un insieme di oggetti che configura il significato di un predicato. Per cui sia la proprietà di un oggetto che le relazioni tra più oggetti coincidono estensivamente con gli oggetti di cui sono proprietà o relazioni.

A questo punto ci si potrebbe chiedere quale sa il ruolo di un siffatto linguaggio formale. La risposta non dovrebbe essere difficile poiché in un modello il linguaggio è un'attività linguistica che esprime il valore di verità di propri enunciati mediante delle tecniche sostanzialmente referenziali al piano ontologico del modello.

1.3.1 Modellisti vs Universalisti

Come si inserisce la funzione della logica (intesa come disciplina) in questo discorso? Sostanzialmente se si apre un buon manuale di logica come ad esempio il Casari[4] ci si imbatterà in una partizione di questo tipo.

Se T è una teoria logica qualsiasi, essa in genere viene considerata come formata da quattro aree.

La prima è costituita dalla *morfologia logica* contrassegnata dal concetto di *linguaggio formale*. La morfologia si interessa di indagare le relazioni e le proprietà di questi linguaggi attraverso l'analisi dell'*alfabeto* e le specificazioni delle sue *espressioni*.

La seconda area è quella che può chiamarsi dell'*ontologia logica*: essa è prevalentemente dominata dal concetto di *mondo*, "ossia il corrispettivo ontologico dell'*universo del discorso* della teoria"[5]. Per mondo si intende un complesso organizzato di enti a cui si riferiscono i linguaggi formali quando parlano.

La terza è la *semantica* di *T*, ovvero la parte che si occupa delle relazioni tra gli elementi del linguaggio e gli oggetti a cui tale linguaggio si riferisce. Al centro di essa c'è il concetto di *realizzazione* di un linguaggio formale in un mondo. In essa si stabiliscono le *condizioni* sotto le quali un'espressione del linguaggio compie un'*asserzione vera*, ovvero *definisce* (dà significato, esprime) un oggetto di quel mondo.

La *sintassi* di T è invece la quarta ed ultima area ed è costituita dal concetto di *dimostrazione formale* nel senso che si occupa dell'imporre delle procedure rigorose di dimostrazione al linguaggio formale:

---

[4] E. Casari, *Introduzione alla logica*, UTET, Torino 1997,

[5] *Ivi*, p. 61.

"configurazione di formule di quel linguaggio costituita in conformità a uno specificato sistema di *prescrizioni*"[6].

Le aree che cospicuamente alimentano il dibattito logico-filosofico sono la terza e la quarta soprattutto per quanto riguarda i loro rapporti: come ad esempio i concetti di *conseguenza semantica* e *conseguenza sintattica*[7].

A noi non interessa addentrarci in una disamina "metalogica" sugli aspetti della logica in quanto disciplina, ma piuttosto ci interessa indagare il ruolo che la logica riveste sul piano epistemologico e non solo. Tradotto in termini più pragmatici, a nostro avviso il discorso sulla logica diventa interessante se ci occupiamo di capire a cosa essa *serva* e se siamo in grado di esplorarne, entro certi limiti, le potenzialità.

La questione sulla funzione della logica (storicamente posta da Aristotele) è stata ripresa in una contemporaneità recente da Hintikka e, come non poteva accadere altrimenti, ha avuto un notevole impatto in ambito logico e filosofico[8].

Hintikka propone la distinzione tra due diverse tradizioni Universalisti e Modellisti, ovvero tra coloro che considerano la logica come un indagine sulla fondazione di un *linguaggio universale* in grado di stabilire delle procedure di ragionamento effettivo e coloro i quali

---

[6] Ivi, p. 63

[7] Tuttavia il Casari non tralascia una centrale considerazione e cioè che ogni teoria logico-deduttiva deve avere una semantica e una sintassi: "il concetto di teoria deduttiva risulta dalla compresenza su un linguaggio formale di un meccanismo dimostrativo da un lato e di un concetto semantico di teoria dall'altro; la determinazione del modo in cui si rapportano fra loro gli aspetti semantici e quelli sintattici costituisce uno dei temi fondamentali dell'intera teorizzazione", Ibidem.

[8] Sulla questione si vedano: J. Hintikka, *Lingua Universalis vs. Calculus Ratiocinator. An ultimate presupposition of Twentieth-century philosophy*. Kluwer, Dordrecht 1997; J. Hintikka, On the development of the model-theoretic viewpoint in logical theory, in Synthese 77: 1-36 (1988); J. Van Heijenoort, Logic as calculus and logic as language, in *Synthese* 17: 324-330 (1967); V., Peckhaus, *Calculus ratiocinator versus characteristica universalis? The two traditions in logic, revisited*, in History and Philosophy of Logic 25: 3-14 (2004); M. Carapezza e M. D'Agostino, *Logic and the Myth of the Perfect Language*, L&PS – Logic & Philosophy of Science, Vol. VIII, No. 1, 2010, pp. 1-29.

invece considerano la logica come un *calcolo* fondato sulla teoria dei modelli.

Il primo approccio enfatizza l'aspetto *deduttivo* della logica mentre il secondo focalizza l'attenzione sul *potere espressivo* del linguaggio. La ricerca degli Universalisti è indirizzata verso le procedure dimostrative del linguaggio formale mentre i Modellisti si occupano di aumentare la portata espressiva o anche *descrittiva* (Hintikka preferisce usare questo termine) del linguaggio formale. Alla base dei modellisti c'è dunque il concetto di *modello* mentre per gli universalisti le *regole di inferenza* costituiscono il nocciolo duro della loro teorizzazione:

> "The sistematic study of *the deductive function* of logic is known as proof theory. The sistematic study of the *descriptive function* of logic is known as model theory or logical semantics [...] The crucial concept in any such theory is, unsuprisingly, the concept of model. The idea is to discuss what a sentence *S* says by associating with it a class of structures, also known as models, scenarios, systems, possible world, or what not. [...] the question is to when a model, *M* is a model of *S*. Here a partial answer is obvious. In the basic sense of model, *M* is a model of *S* if and only if *S* is *true* in *M*. And the conditions of a sentence being true in a model is what truth definitions codify. Hence the specification of the all-important relations of *being a model of* is essentially a matter of *truth definitions*"[9].

Hintikka si auto inserisce nella tradizione dei modellisti assieme a Peirce, Schröder, Löwenheim, Gödel e il Tarski che ha dato avvio alla *teoria dei modelli,* ma non quello che considera la semantica del linguaggio naturale come pervasivo e di cui tutti siamo prigionieri. La

---

[9] J. Hintikka, *The Principles of Mathematics Revisited* (d'ora in poi *PMR*), Cambridge University Press, New York 1996, pp. 11-13.

tradizione degli Universalisti che è alternativa a quest'ultima è rappresentata da Frege, Russell, Wittgenstein, Quine[10] e noi aggiungiamo Gentzen e Dummett. Ovviamente non possiamo essere d'accordo con una così rigida partizione, ma grossomodo è accettabile.
Alla base della logica c'è sicuramente la visione modellistica poiché tutti i logici devono convenire che sotto ogni rappresentazione simbolica del linguaggio formale c'è un piano ontologico. In buona sostanza si tratta del rapporto basilare tra la prima e la seconda area di esposte dal Casari, ossia il rapporto tra *morfologia logica* e *ontologia logica*. Se si volesse rigettare l'aspetto ontologico che ogni teoria deve pur sempre avere potremmo avanzare, sensatamente e senza troppe difficoltà, l'idea dell'inutilità del linguaggio in questione.
In altri termini *the core area* della logica è la semantica estensiva basata sul concetto di modello e che in virtù di una relazione tra linguaggio formale ed ontologia apre ad una visione realista del mondo.

1.4. Presupposti filosofici

In una prospettiva come la nostra in cui ci si occupa di ampliare il potere espressivo della logica diventa fondamentale avanzare alcuni punti nodali:

- esistono oggetti (dati) descrivibili (definibili) mediante un linguaggio formale;

---

[10] Per questa classificazione si veda J. Hintikka, *Is Truth Ineffable?*, in N. Incardona, (a cura di), Les formes actuelles du vrai, Enchiridion, Palermo 1989, pp. 89-120, in particolare p. 101.

- la logica ha una funzione descrittiva e non prescrittiva: la logica non ci impone regole sintattiche che spiegano l'andamento del mondo ma ci permette di esprimerlo;
- ciò che recepiamo dal mondo è informazione: gli oggetti hanno contenuto informativo;
- Per il realista in linea di principio un'espressione è vera o falsa, indipendentemente dalla capacità di determinare quale delle due sia vera o falsa.

Proprio per la sua struttura fortemente realista una *Teoria logica dei giochi* si inserisce all'interno del dibattito come contrapposta al costruttivismo e alle logiche da esso derivanti *Teoria della dimostrazione* e *Logica intuizionista* in primis. Per i costruttivisti in genere, il significato di un'espressione è dato dal *criterio* di verificabilità ovvero dalle procedure dimostrativo-sintattiche che ne provano il valore di verità, per cui non posso asserire la verità o la falsità di una espressione se non possiedo una dimostrazione che ne provi la verità o la falsità. Dunque, per i costruttivisti risulta impossibile stabilire che ogni espressione cade sotto le condizioni di verificabilità poiché esistono delle congetture che non sono, ad un tempo determinato *t*, né *dimostrate* né *confutate*. In generale, una siffatta impostazione è di tipo *antirealista*: non c'è una realtà che fissa il valore di verità di un'espressione. E' solo la capacità costruttiva che determina il valore di verità dell'asserzione.

In una logica dei giochi invece la verità di un'espressione dipende dalle *condizioni* di verificabilità dell'enunciato in questione che coincidono con le strategie di due ipotetici giocatori; nei giochi a somma zero[11] (scacchi, dama, etc.) deve esserci la vincita di un giocatore nel senso che alla perdita di uno corrisponde la vincita dell'altro. Tuttavia esistono giochi che, prevedendo il pareggio, non attribuiscono la vincita a nessuno dei due. La conseguenza di siffatta impostazione, mi induce dunque a rifiutare una Teoria del significato basata sulla sintassi del linguaggio (forse il più noto esponente che tenta di fondare il significato delle espressioni logiche mediante costrutti sintattici è Dummett)[12], come accade per un linguaggio logico espresso dalla teoria della dimostrazione secondo l'impostazione Dummett-Prawitz.

Il mio lavoro propone una Teoria del significato basata su una logica dei giochi in cui, pur rifiutando la validità del terzo escluso (non di ogni proposizione possiamo dire a principio che essa è vera o falsa), si rimane in una dimensione classica della logica, o meglio in termini hintikkiani *iperclassica*. Si tratta di una logica classica ampliata, in cui il significato delle espressioni logiche non è dato da costrutti sintattici ma da una semantica con un potere espressivo potenziato (cioè in grado di esprimere attraverso forme opportune di giochi i casi in cui il principio del terzo escluso non è valido).

---

[11] Sommando i risultati di due giocatori ad. Es. Vincita = 1 e Perdita =-1 il risultato deve essere 0: 1+(-1)=0.

[12] Su questo punto Dummett sembra categorico, tanto più perché si riferisce alla giustificazione delle costanti logiche in termini d'uso e non di condizioni di verità. Il significato delle costanti logiche secondo Dummett è di costruttivo e non stipulativo, ma ecco come esprime la sua posizione: "le leggi della logica intuizionista sembrano passibili di giustificazione dimostrativo-teoretica mediante una qualsiasi delle procedure qui discusse [il riferimento è alle regole d'introduzione e di eliminazione]; e questo indica che i significati delle costanti logiche intuizionistiche possono essere spiegati in modo assai diretto, s*enza alcun apparato di teoria semantica* nei termini dell'*uso* che ne facciamo in pratica", e ancora più avanti rimarca "le leggi logiche possono essere accolte *senza far appello ad alcuna teoria semantica*", M. Dummett, *La base logica della metafisica* (d'ora in poi LBM), a cura di Eva Picardi, il Mulino, Bologna 1996, pp. 415-416 (corsivi miei).

1.5. Interrogazione e informazione

Nella prima parte della tesi è opportuno affrontare le questioni sul rapporto tra linguaggio formale e ontologia: bisogna considerare la semanticità del linguaggio formale e mostrare gli sviluppi e le applicazioni che portano al linguaggio formale di una teoria dei giochi.
Ma prima di passare direttamente alle questioni relative ad un linguaggio logico dei giochi bisogna centrare bene le questioni relative ai rapporti tra logica e teoria del significato sottolineando soprattutto come le questioni fondamentali vertano e/o derivino dalla più generale problematica Realismo/Antirealismo.
In particolare bisogna mettere in evidenza come il significato delle espressioni logiche sia notevolmente differente se si prendono in considerazione le due posizioni dominanti (quella classica e quella costruttivista) e notare come queste differenze si assottiglino notevolmente in relazione al concetto gioco logico.
Fatto ciò bisogna concentrarsi sulla relazione tra giochi linguistici e linguaggio logico prendendo soprattutto le distanze dagli esisti del Wittgenstein delle *Ricerche*. A questo punto, avendo tracciato il retroterra filosofico, verrà esposto un *linguaggio logico dei giochi*.

La *teoria semantica dei giochi* (TSG) di Hintikka[13] è sicuramente l'ambito di ricerca che offre maggiori spunti sia per la trattazione di un linguaggio logico dei giochi sia per un'analisi tra teoria dei giochi e significato. Infatti essa è connotata dall'idea base che la logica è costituita da enunciati interrogativi che chiedono il loro valore di verità. Per cui il linguaggio della teoria semantica dei giochi non è costituito da enunciati dichiarativi del tipo "la neve è bianca", ma da enunciati interrogativi del tipo "la neve è bianca è vero?". L'*interrogazione* che viene posta sul valore di verità dell'enunciato ha come campo di ricerca per la *risposta* un dominio di un modello al cui interno è possibile trovare la *prova* del valore di verità assegnato. In breve il noto schema-V tarskiano:

"*p*" è vera se e solo se *p*

in teoria semantica dei giochi diventa uno schema a *domanda-risposta* del tipo

"*p*" è vera? se e solo se *p*, Si!

Se la precedente asserzione è vera, (oppure se il suo valore di verità è una risposta affermativa) la sua verità può essere *difesa contro un*

---

[13] La GTS usata da Hintikka per promuovere il programma dei suoi *Principles,* storicamente è comparsa limitatamente ai quantificatori in J. Hintikka, *Language games for quantifiers*, in N. Resher, (a cura di) Studies in Logical Theory, Blackwell, Oxford 1968, pp. 46-72, e più sistematicamente in J. Hintikka, *Logic, Language Games and Information*, Oxford U.P., Oxford 1973, e in J. Hintikka e J. Kulas, *The game of Language: Studies in Game-Theoretical Semanics and its Applications*, D. Reidel, Dordrecht 1983 e successivamente in J. Hintikka, *Game-Theoretical Semantics as a Synthesis of Truth-Conditional and Verificationist Theories of Meaning,* in E. Le Pore, (a cura di), New Directions in Semantics, Academic Press, London 1987, in cui già dal titolo si evince una chiara e precisa direzione nel presentare la teoria come sintesi tra l'impostazione tarskiana volta a stabilire *condizioni* di verità e quella affidata alla GTS indirizzata piuttosto verso la fondazione di un *criterio* di verità. La definizione di verità hintikkiana vuole stabilire da un lato le *condizioni di verificabilità* e dall'altro fornire un *criterio di verificabilità* [cfr. *ibidem*]. Sulla differenza tra condizione e criterio di verità cfr. C. Mangione e S. Bozzi, *Storia della logica*, cit. pp. 575-576.

oppositore che ne dubita o che sostiene un valore di verità opposto (la falsità dell'enunciato), mediante una strategia argomentativa che verte sull'ispezione del dominio D di un modello.

La verità viene dunque definita *esistenzialmente* nel senso che l'enunciato "p" è vero sse *esiste una strategia vincente per un giocatore contro un oppositore*.

Sulla base delle precedenti considerazioni sarà esposta la logica teoria semantica dei giochi con un'attenzione particolare al concetto di interpretazione (scelta di individui) e a quello di strategia.

Risulterà altresì rilevante far notare come una primitiva teoria semantica dei giochi sia presente nella trattazione dei grafi esistenziali di Peirce.

C.S. Peirce, anche per ammissione di Hintikka stesso, è stato l'antesignano della *Teoria semantica dei giochi* mediante i suoi fortunati grafi esistenziali. Secondo Peirce la verità di una proposizione è data da una partita (che è uno scambio di informazioni) giocata tra un enunciatore (*Utterer*) ed un interprete (*Interpreter*). Ciò è dovuto al fatto che il significato dei due quantificatori *Universale* ed *Esistenziale* è definito mediante interazioni tra un enunciatore ed un interprete che hanno rispettivamente la capacità di selezionare esistenzialmente o universalmente gli individui da un dominio:

> "Nell'enunciato "tutti gli uomini sono mortali", "tutti gli uomini" implica che l'interprete ha la libertà di selezionare un uomo e considerare la proposizione applicabile a lui"[14].

---

[14] C.S. Peirce, *Collected Papers 5.542*, *c. 1902*, Belief and Judgment.

Come *opponente* dell'enunciatore l'interprete contesta l'asserzione pronunciata e può invalidarla solo se riesce a trovare un elemento di un dominio (un uomo) che non sia mortale. Ciò gli è impossibile e dunque l'asserzione proferita dall'enunciatore risulta essere vera.
Questa è a grandi linee l'impostazione che sta alla base della teoria semantica dei giochi, che sarà presa in esame anche mediante la rappresentazione dei *grafi esistenziali* di Peirce.

L'accostamento tra i grafi esistenziali di Peirce e la teoria semantica dei giochi ha molteplici obiettivi, tra cui: rintracciare alcune radici storiche della teoria semantica dei giochi, esporre i grafi esistenziali mediante i giochi secondo lo spirito fortemente dialettico di Peirce e prevalentemente tralasciato dai maggiori studiosi sui grafi esistenziali.
Nel capitolo su Peirce verranno esposte le relazioni che intercorrono tra i grafi esistenziali e la logica filo-indipendente nonché l'uso dei grafi per esprimere il linguaggio logico dei giochi. Inoltre l'uso dei grafi esistenziali, proprio in virtù della loro funzionalità rappresentativa del linguaggio in questione e del loro porre l'accento su una dimensione "esistenziale" della verità (nel senso che la verità è descrivibile se esiste un grafo che la esprime), assume una pertinenza rilevante per una Teoria del significato realista.

Si mostrerà come una teoria semantica dei giochi sia connotata da un forte realismo, proprio in virtù dell'accettazione ed esposizione di una semantica tarskiana di base. Tuttavia l'apparente realismo radicale della teoria apre anche a delle posizioni antirealiste dovute soprattutto all'impostazione, insita nel linguaggio logico dei giochi, che il valore di verità di un'espressione è il risultato della ricerca di prove, ma che non sempre vengono trovate. Le questioni filosofiche sulla teoria semantica dei giochi saranno altresì prese in esame mediante un serrato confronto con le posizioni antirealiste di Dummett e Prawitz.

In tal modo ci si chiederà quale sia il compito della logica per la filosofia ovvero qual è la funzione centrale della logica. La risposta verterà su una radicale e sicuramente non nuova ridefinizione della logica come dia-logica. La logica non è connotata dalla costruzione di dimostrazioni corrette secondo regole d'inferenza ma è piuttosto un sistema di regole utili ad ottenere una strategia di difesa contro chi dubita del valore di verità di un asserzione. Centrale diventa allora il sostenere che il dialogo tra un proponente ed un opponente sia fondato su domande e risposte: l'asserzione A è vera? Si, sostiene il proponente attraverso prove, No, risponde l'opponente se è in grado di esibire delle prove.

Nella seconda parte sarà preso in esame il problema *realismo/antirealismo* in relazione con la teoria semantica dei giochi. La teoria pur avendo uno sfondo realista si presta a considerazioni antirealiste poiché non tutti gli enunciati esprimibili mediante la semantica dei giochi hanno un valore di verità ovvero non sempre i due giocatori hanno una strategia vincente. Si possono verificare casi in cui nessuno dei due possiede validi argomenti da contrapporre a quelli dell'altro. Dunque si rifiuta in qualche modo la validità del terzo escluso, poiché *non esiste* una *strategia vincente* né per il giocatore I né per il giocatore II.

L'impossibilità di arrivare ad ottenere l'esistenza di una strategia vincente è legata all'impossibilità di conoscere sufficienti *informazioni* circa le mosse dell'avversario. Infatti, se ogni giocatore non è in grado di reperire le informazioni sulle strategie dell'altro il gioco non porta alla vincita di nessuno.

Il concetto d'*informazione* è centrale in Teoria dei giochi, infatti data una espressione del tipo $(\forall x)(\exists y)\, S(x,y)$, e assodato che verificarla significa trovare una strategia vincente per un giocatore, bisogna capire cosa significa possedere informazioni per un giocatore.

Innanzi tutto Hintikka distingue tra portata prioritaria (*priority scope*) e portata vincolante (*binding scope*), proponendo una rilettura del concetto di quantificazione, che sarà determinante per la sua logica[15].

La *portata vincolante* riguarda costitutivamente il ruolo del quantificatore che è quello di vincolare (*to bind*) le variabili del discorso. Nell'espressione $(\forall x)(\exists y)\, S(x,y)$ la variabile x è nella *portata vincolante* di $\forall$, mentre y è nella *portata vincolante* di $\exists$ oltre che nella *portata prioritaria* di $\forall$. Il *priority scope* sancisce il ruolo di un quantificatore rispetto a ciò che non viene dato nel suo *binding scope*.

Per maggiore chiarezza si veda lo schema seguente:

Vincolo

$$(\forall x)(\exists y)S(x,y)$$

Priorità

a) *Portata vincolante* (Frege): la variabile x è nella *portata vincolante* di $\forall$, la variabile y è nella *portata vincolante* di $\exists$
.

b) *Portata prioritaria* (Hintikka): la variabile y si trova anche sotto la *portata prioritaria* di $\forall$

Dipendenza: la scelta dell'individuo da sostituire alla variabile y *dipende* dall'individuo scelto per x

[15] I due concetti di portata (*scope*) vengono studiati da J. Hintikka, *No scope for scope?*, in Linguistic and Philosophy 20 (1997), pp. 514-544., in relazione alle *donkey sentences* per i linguaggi naturali, ma con l'obiettivo di rendere la distinzione tra i due tipi di portata (*binding* e *priority scope*) come esprimibile non dalla notazione logica Frege-Russell, ma dalla teoria semantica dei giochi.

In altri termini la portata prioritaria di un quantificatore si trova ad avere un potere da esercitare non solo sulla variabile da vincolare, ma anche sul *quantificatore immediatamente successivo ad esso*. Nei termini di una TSG il quantificatore che si trova ad essere *retto dalla portata* di un altro quantificatore [nel caso sopra proposto, $(\exists y)$ *dipende* da $(\forall x)$] è *informativamente* dipendente da quello. Ciò significa che la scelta della costante individuale per la y dipende dalla scelta che precedentemente si è fatta per la costante da sostituire alla x.

Banalmente se il predicato "*S*" ha il significato "=" allora $(\forall x)(\exists y)(x=y)$ risulta essere vera solo se ad y viene sostituito un numero, diciamo 3, ottenuto dalla *conoscenza* della sostituzione fatta per la variabile x, che deve essere pure 3.

Cosa accade se non si è in grado di ottenere le informazioni utili alla verifica dell'espressione logica? Ovvero cosa accade se un giocatore non conosce le scelte effettuate dall'altro? Cosa avviene in un contesto di informazione parziale? Ritornando all'esempio precedente, il giocatore con quale individuo sostituisce la y se non conosce la scelta effettuata dall'altro giocatore per la x.

La *logica filo-indipendente* (*FI*) (in inglese *independence-friendly logic* e *logique faite pour l'indépendance* in francese) interviene in aiuto dei casi in cui un giocatore non conosce le scelte effettuate dall'altro. Si tratta di una logica capace di esprimere relazioni *informativamente indipendenti* tra scelte effettuate dai giocatori.

1.6. *Verso la filo-indipendenza*

Un'estensione della teoria semantica dei giochi è la logica *FI* fondata da Hintikka e Sandu che nasce dall'incontro tra le esigenze di Hintikka relative all'aumento del potere espressivo della logica e la *Game Theory* di von Neumann, con una pervasiva concentrazione sulla quantificazione. È però a partire dalle problematiche che Hintikka e Sandu rintracciano nel cosiddetto quantificatore ramificato (*branching quantifier*) di Henkin[16], che si rilevano i principali presupposti per la fondazione della logica *FI*.

Il concetto di indipendenza informativa tra variabili quantificate è stato proposta da Leon Henkin[17], nel considerare le relazioni tra quantificatori *non allineati* del tipo

$$\begin{pmatrix} \forall x & \exists z \\ \forall y & \exists u \end{pmatrix}$$

In tal modo si esprime la dipendenza della variabile *z* da *x* e la sua indipendenza da *y* e la dipendenza della variabile *u* da *y*, ma non da *x*.

Per comprendere meglio questo concetto è utile far riferimento ad una relazione generica *R*(*x,y,u,z*) e ad un modello *M*. Una espressione (*sentence*)

$$\text{(I)} \begin{pmatrix} \forall x & \exists z \\ \forall y & \exists u \end{pmatrix} R(x, y, u, z)$$

[16] Cfr. L. Henkin, *Some remarks on infinitely long formulas,* in Infinitistic Methods. Proceedings of the Symposium on Foundations of Mathematics, Warsaw, Panswowe (2-9 September 1959), Pergamon Press, Wydawnictwo, Naukowe, New York 1961, pp. 167-183.

[17] *Ibidem.*

può essere interpretata in un modello grazie ad una "semantica a informazione imperfetta" in cui ci sono due giocatori, *Abelardo* ($\forall$) e il suo opponente *Eloisa* ($\exists$).

Questo gioco viene eseguito da *Abelardo* che sceglie *a* e *b* dall'universo $|M|$, mentre *Eloisa* sceglie *c* e *d*, ma con la restrizione che, quando sceglie *c*, lei non ha visto o ha dimenticato la scelta precedente *b* di *Abelardo*. Ha solo coscienza della scelta *a* di quest'ultimo. Mentre quando sceglie *d*, lei non ha visto la scelta *a* di *Abelardo*: in questo ultimo caso ciò di cui essa è cosciente è solamente la scelta *b* di *Abelardo*.

Ciò che viene chiamato scelta o anche mossa del giocatore è equivalente in Teoria dei Modelli all'interpretare le variabili come oggetti reali del mondo attuale (o mondi possibili). Alla luce di questa analogia il gioco termina nel momento in cui interpretiamo tutte le variabili come oggetti. In altri termini $\exists$ vince quando troviamo $R^M(a,b,c,d)$, altrimenti chi vince è *Abelardo*.

I quantificatori ramificati, o meglio il concetto di indipendenza informativa, non è esprimibile in una logica del primo ordine in quanto non sono allineati sulla stessa stringa rendendo, altresì, problematica l'interpretazione delle relazioni tra gli stessi quantificatori.

L'obiettivo primario di Hintikka e Sandu rimane comunque quello di riuscire ad impostare, mediante la stessa teoria dei giochi, un metodo che sia in grado di accertare la verità di una formula mediante la *dialettica* tra due *giocatori* in cui "*truth is defined indirectly as the existence of a winning strategy*": in tal modo Hintikka e Sandu possono legittimamente appellare la logica filo-indipendente come *rivoluzionaria*[18].

Se si considera la formula

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z / x)(\exists u / y)S(x, y, z, u)$$

Che esprime in logica filo-indipendente il quantificatore di Henkin si ha z / x che va letto come "*z* indipendente da *x*" (lo stesso vale per u / y) essa non può essere espressa in una logica del primo ordine perché in questa formula *z* è dipendente solo da *y* e *u* è dipendente solo da *x*. La logica del primo ordine non può esprimere queste formule poiché la quantificazione agisce solo secondo linearità e perciò stesso esprime solo relazioni di dipendenza tralasciando per l'appunto l'indipendenza.

Nella teoria semantica dei giochi, il principio del terzo escluso vale se esiste una strategia vincente per il verificatore o per il falsificatore per un enunciato *S* dato. Tali giochi a somma zero per il quale uno dei due giocatori possiede necessariamente una strategia vincente sono detti determinati. La determinazione deriva da un'assunzione di base, per la quale o l'uno o l'altro giocatore possiede una strategia vincente. Si tratta di un'assunzione di determinazione[19] che va associata ad ogni gioco *G*(*S*).

Se dunque la nozione di verità è definita mediante la teoria dei giochi e se si prescinde da questa assunzione, il principio del terzo escluso in generale non può valere:

---

[18] J. Hintikka e G. Sandu, *A Revolution in Logic?*, in Nordic Journal of Philosophical Logic, vol. 1, n° 2, (1996) pp. 169-183.

[19] *PMR*, pp. 32-33 e 131-133.

> ciò dovrebbe infervorare l'animo di ogni vero costruttivista, per il fatto che la legge del terzo escluso è stata per lungo tempo l'obiettivo favorito della loro critica[20].

In logica FI la negazione ha un ruolo centrale. Infatti il valore di verità di un *S* può essere definito mediante l'esistenza di una strategia vincente per il falsificatore, ma ciò non indica la falsità dell'enunciato *S*, in quanto, esistendo due tipi di negazione una forte che inverte il ruolo dei due giocatori e una debole o contraddittoria che agisce all'interno delle formule. La negazione forte sottostà al solo compito di invertire i ruoli dei due giocatori e non entra minimamente nel merito della definizione di verità.
In teoria semantica dei giochi esistono due assunzioni di base:

1) *S* **non vera** non è equivalente ad essere **falsa**
- *S* **non vera** significa che <u>non esiste</u> una strategia vincente per il *verificatore* (*Eloisa*) in ***G(S,M);***
- *S* ***falsa*** significa che <u>esiste</u> una strategia vincente per il *falsificatore* (*Abelardo*) in ***G(S,M);***

2) *S* **non falsa** non è equivalente ad essere **vera**
- S **non falsa** significa che <u>non esiste</u> una strategia vincente per il *falsificatore* (*Abelardo*) in ***G(S,M);***
- *S* ***vera*** significa che <u>esiste</u> una strategia vincente per il *verificatore* (*Eloisa*) in ***G(S,M);***

La negazione della verità di un enunciato (in relazione ad un modello) viene espressa mediante la negazione duale che concerne la relazione di opposizione tra i due giocatori. Possiamo dire che

[20] *Ivi*, p. 33.

questo tipo di negazione ha un ruolo semantico. Mentre la negazione forte o contraddittoria serve solo a negare *sintatticamente* un enunciato senza nessun legam con un ipotetico universo di discorso. La conseguenza dell'uso della negazione forte o duale comporta per Hintikka che "il tertium non datur diventa un'assunzione di determinazione nel senso della teoria dei giochi"[21].

Si tratta di evidenziare che la validità del principio del terzo escluso è una assunzione che viene determinata precedentemente alla ricerca della verità e, che vale per la logica del primo ordine GTS, in quanto per ogni enunciato uno dei due giocatori ha una strategia vincente. Tuttavia a causa del fatto che spesso vengono a mancare sufficienti informazioni per possedere una strategia vincente esso non vale per la logica *FI*, che, considera enunciati di cui né il falsificatore né il verificatore possiedono una strategia vincente.

Dalle considerazioni sopra esposte si evince che il 'significato' è fortemente legato a quello di strategia e che diventa centrale considerare una Teoria *ludica* del significato. In particolar modo ciò che è rilevante è che il significato di un enunciato coincide con l'esistenza di una strategia vincente per quell'enunciato. Dimostrare 'dialetticamente' il valore di verità di un enunciato significa darne un significato in termini di 'uso'. Il significato di un enunciato è sia il valore di verità sia il modo attraverso il quale si è arrivati a quel risultato. Quindi il significato non è soltanto una realizzazione o meno di un enunciato in mondo, ma è piuttosto l'esistenza di una procedura ludica che regge il valore di tale realizzazione.

[21] *Ivi*, p. 132.

Si potrebbe ritenere, non a torto, che l'impostazione ludica sia vicina a quella degli antirealisti come Dummett e più in generale al significato intuizionista delle costanti logiche in cui il significato degli enunciati è spiegato in termini di procedure dimostrative[22]:

la dimostrazione di una proposizione	è data da
$S_1 \wedge S_2$	una dimostrazione di S_1 e una dimostrazione di S_2
$S_1 \vee S_2$	una dimostrazione di S_1 o una dimostrazione di S_2
$S_1 \supset S_2$	un metodo per ottenere dimostrazioni di S_2 da dimostrazioni di S_1
$\perp$	niente
$\forall x \in DS(x)$	un metodo che per ogni individuale a in D fornisca una dimostrazione di $S(a)$
$\exists x \in DS(x)$	un individuale a in D e una dimostrazione di $S(a)$

In realtà il significato in termini procedurali degli antirealisti è si in termini d'uso, ma è un uso che concerne solo la struttura sintattica distanziandosi in tal modo notevolmente dai legami con la semantica. Effetto quest'ultimo che non accade in teoria semantica dei giochi.

[22] "the traditional intuitionistic criticism of classical mathematical reasoning [...] was an important source of ispiration for Dummett's anti-realist argument and it is also to intuitionism that he turns in his research for an alternative key-concept to be used in the meaning theories in place of the bivalente, recognition-trascendent truth-conditions. [...] it is the corresponding constructive "proof-table" of Heyting that offers a possibility for Dummett's positive proposal" (G. Sundholm, *Proof Theory and Meaning*, in Handbook of Philosophical Logic, a cura di D. Gabbay e D. Guenthner, Reidel Publishing Company, 1986, vol. III, pp. 471-506 in particolare pp. 485-489

2. La teoria semantica dei giochi

2.1. Giochi semantici a informazione perfetta

La GTS, *Game-Theoretical Semantics* di Hintikka[23] è connotata dall'idea di base che se una asserzione è vera, la sua verità può essere difesa contro un oppositore che ne dubita[24].

Frequentemente la GTS viene considerata come una logica del dialogo anche dallo stesso Hintikka, una logica in cui un giocatore chiede (nel senso di interrogare) ad un altro *prove* per l'accertamento della verità sostenuta dall'altro[25]. In tal modo la logica oppositoria dell'accertamento della verità viene fatta risalire storicamente sia all'epistemologia socratica, in cui la ricerca della verità, anche in logica, ha inizio proprio dal porre domande[26] sia alla prima logica aristotelica[27].

La GTS costituisce il retroterra storico e teorico che permette alla logica *FI* gli sviluppi più consistenti.

---

[23] La GTS usata da Hintikka, storicamente è comparsa, limitatamente ai quantificatori, in J. Hintikka, *Language games for quantifiers*, in N. Resher, (a cura di) Studies in Logical Theory, Blackwell, Oxford 1968, pp. 46-72, e più sistematicamente in J. Hintikka, *Logic, Language Games and Information*, Oxford U.P., Oxford 1973, e in J. Hintikka e J. Kulas, *The game of Language: Studies in Game-Theoretical Semanics and its Applications*, D. Reidel, Dordrecht 1983.

[24] Cfr. J. Väänänen, *Dependence Logic: A New Approach to Independence Friendly Logic*, Cambridge U.P., Cambridge 2007, pp. 53-59.

[25] Cfr. J. Hintikka e S. Harris, *On the Logic of Interrogative Inquiry*, in A. Fine e J. Lepkin (a cura di), Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association 1988, East Lansing, Mich. 1988, pp. 233-240.

[26] J. Hintikka, *Socratic Epistemology: Explorations of Knowledge-Seeking by Questioning*, Cambridge U.P., Cambridge 2007.

[27] Cfr. J. Hintikka, *What was Aristotle doing in his early logic, anyway?: A reply to Woods and Hanson*, in Synthese vol. 113 (1997), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 241–249; J. Hintikka, *On Aristotle's notion of existence*, in The Review of Metaphysics, vol. 52 (1999), pp. 779–805. Una breve introduzione alla logica del dialogo di Hintikka presentata dal punto di vista di una logica della ricerca argomentativa e secondo un'appropriata relazione con la teoria semantica dei giochi si trova in P. Cantù e I. Testa, *Teorie dell'argomentazione. Un'introduzione alle logiche del dialogo,* Bruno Mondadori, Milano 2006, in particolare pp. 70-80.

Il punto di partenza per la trattazione dell'argomento consiste nell'esposizione di un calcolo logico del primo ordine organicamente e ampiamente proposto da Hintikka[28], in cui viene studiata una nuova ed originale impostazione del concetto di verità.
Per potere procedere all'esposizione della *Teoria semantica dei giochi* abbiamo bisogno di due prerequisiti:

a) un linguaggio formale *L* composto da simboli atomici proposizionali con connettivi classici;
b) un modello *M* del linguaggio *L* uguale ad un sottoinsieme dell'insieme δ di simboli proposizionali di *L;* in simboli $M \subset \delta$; oppure $M : \delta\{0,1\}$.
La a) ci dice che stiamo considerando un linguaggio *L* all'interno del quale troviamo un'esposizione standard di variabili, costanti. Mentre con la b) si definisce un modello *M* del linguaggio *L* formato da tutte le proposizioni suscettibili di essere 0 o 1, ovvero vere o false.

Alla luce di queste acquisizioni l'obiettivo di un gioco semantico *G*(*M,S*), con *S* e *M*, che sono rispettivamente una qualsiasi formula proposizionale e un qualsiasi modello, è quello di *descrivere*, nel senso di rappresentare la verità e la falsità di *S* in *M*. La descrizione operata dal gioco consiste, dunque, nel verificare o falsificare una formula.
La costruzione del quadro descrittivo viene affidata a due giocatori, il verificatore e il falsificatore, che all'interno di un sistema di regole operano in tal senso, cioè rispettivamente verificano o falsificano gli enunciati. I movimenti dei due giocatori vengono prescritti da regole che scaturiscono dal *significato* delle costanti logiche .

---

[28] Cfr. J. Hintikka, *The Principles of Mathematics Revisited*, Cambridge U. P., Cambridge 1996,(d'ora in poi *PMR)* § 2. *The Game of Logic*.

Il verificare $(\exists x)F(x)$ consiste nel trovare un individuo b tale che $F(b)$ sia vera, come verificare $S_1 \vee S_2$ significa scegliere almeno uno dei disgiunti e trovare un elemento sostituibile alla variabile S. Questo è ciò che avviene per formule elementari. Se si considerano formule più complesse come per esempio $(\forall x)(\exists y)S(x,y)$, possiamo verificarla se, dato un qualsiasi valore di x, diciamo a, *possiamo* trovare un valore di y, ad es. b, tale che $S[a,b]$. Ciò che comporta una differenza sostanziale tra quest'ultima formula e le due precedenti scaturisce da quel "possiamo" che ha il compito di sancire una relazione tra x e y, tale che l'individuale cercato b dipenda dall'individuo dato a. A questo punto il problema riguarda la necessità di fondare un metodo di ricerca per gli individui, che assicuri con certezza che l'individuale da sostituire a y sia quello esatto per la verifica della formula $(\forall x)(\exists y)S(x,y)$.

La GTS è principalmente basata su un gioco a due persone o agenti, il *verificatore* e il *falsificatore* che rispettano le seguenti Regole per le costanti logiche del linguaggio L[29]:

i) **R0**: Se S_i è un simbolo proposizionale (p del Linguaggio L), non ci sono movimenti, nessuno effettua delle scelte. Dunque, se $M \models S_i$ (o $M \models p$) allora chi vince è il *verificatore*, invece se $M \not\models S_i$, allora sarà il *falsificatore* a vincere;

ii) **R**$\vee$: $(S_1 \vee S_2)$. Il verificatore inizia con la scelta di S_i (i= 1 o 2). E il gioco continua come in S_i, cioè se il verificatore arriva a $M \models S_i$ vince, altrimenti perde [Bisogna trovare almeno un elemento vero per verificare $(S_1 \vee S_2)$];

[29] Una trattazione di queste regole si trova in *PMR*, p. 25, mentre altre varianti con integrazioni e particolari esplicitazioni sono in G. Sandu, *On the Logic of Informational Independence*, in Journal of Philosophical Logic, Kluwer Academic Publisher, The Netherlands, n. 22 (1993) pp. 29-60, in particolare pp. 35-36..

iii) **R$\wedge$:** $(S_1 \wedge S_2)$. In questo caso è il falsificatore che inizia a scegliere S_i (i= 1 o 2), continuando il gioco come in S_i. [Si falsifica $(S_1 \wedge S_2)$ se si trova almeno un elemento falso];
iv) **R. E.**: $(\exists x)\, S(x)$. Inizia il verificatore con la scelta di un membro di δ (o anche, ma è la stessa cosa, con la scelta di un individuo dal dominio di *M dom*(*M*)). Se l'individuale scelto è *b*, allora il resto del gioco prosegue con *S*(*b*), cioè il verificatore vince se si dà $M \models b \in S$;
v) **R. U.**: $(\forall x)\, S(x)$. Funziona come R. E. solo che questa volta è il falsificatore ad operare per primo;
vi) **R¬:** Se $\neg S_i$ il gioco è come in S_i, tranne per il fatto che si interscambiano i ruoli dei due giocatori. Infatti, se $\neg S_i$ è come $\neg p$ non esistono movimenti, ma chi vince è il falsificatore, poiché si dà $\neg p$ se $M \models \neg p$, quindi per $\neg S_i$ vince il falsificatore se $M \models \neg S_i$, altrimenti, se $M \not\models \neg S_i$ sarà il verificatore a vincere.

Le relazioni tra gli oppositori e la relativa esposizione delle regole possono essere viste come fondate su un "dubbio"[30] che l'avversario insinua sull'affermazione del proponente.
Un oppositore può mettere in dubbio la verità di una congiunzione $S_1 \wedge S_2$, dubitando in tal senso della verità, ad esempio, di S_2. Può altresì dubitare della verità di una disgiunzione $S_1 \vee S_2$, chiedendo quale delle due tra S_1 e S_2 sia vera. Può dubitare della verità di una negazione $\neg S$ asserendo che S_1 è vera al posto di $\neg S$.
L'interazione tra il *proponente* e l'*opponente* può essere formulata in termini di un *gioco* in cui i nomi attributi ai due giocatori possono essere di qualunque tipo, I e II, Io e gli altri, Io e Natura, *Abelardo* ed

[30] Cfr. J. Väänänen, *Dependence Logic: A New Approach to Independence Friendly Logic*, cit., pp. 54-55.

Eloisa, Verificatore e Falsificatore, ma di fondamentale importanza è che essi siano entrambi opponenti.

Se S è $(p \vee q) \wedge r$, con p,q,r atomiche, cosa significa allora verificare questa formula in un modello $M=\{p,r\}$? Il gioco $G(M,S)$ inizia con la scelta del falsificatore che sceglie $(p \vee q)$ o r. Se sceglie il secondo allora il gioco finisce e vince il verificatore. Se sceglie il primo allora è il turno del verificatore che può scegliere p o q. Se il verificatore vuole vincere, allora deve scegliere p. La strategia del verificatore è dunque: scegli p, se $p \vee q$ è stato scelto precedentemente; non fare niente, se è stato scelto r. Un esame del modello M mostra che questa strategia è vincente.

Se invece S è $(p \vee q) \wedge (r \wedge s)$, e $M=\{p,s\}$,il gioco $G(M,S)$ inizia con falsificatore che sceglie uno dei congiunti. Se viene scelto $(p \vee q)$, allora il verificatore deve scegliere tra p o q. Se il congiunto scelto è $(r \wedge s)$, allora è il turno del falsificatore che sceglie r o s. Il falsificatore ha una strategia vincente: sceglie $(r \wedge s)$ e dopo r. Dunque il falsificatore riesce a concludere riuscendo a falsificare S in M.

Va notato, altresì, che quando si usa la strategia vincente non tutti i nodi in cui i giocatori si possono muovere devono necessariamente essere considerati. In questo caso ad esempio $(p \vee q)$.

Se neghiamo la proposizione precedente $\neg[(p \vee q) \wedge (r \wedge s)]$, con M come nel caso precedente, il gioco $G(M,S)$ è identico, eccetto il fatto che in virtù della negazione i ruoli dei due giocatori sono invertiti. Se il verificatore sceglie $(r \wedge s)$, è sempre lui che continua a scegliere r o s; se il verificatore sceglie $(p \vee q)$, il falsificatore dopo sceglie p o q. Questa volta, dunque, è il verificatore che ha una strategia vincente uguale alla strategia vincente del falsificatore nel caso precedente. Si noti che quando il verificatore sceglie r, essendo invertite le regole del vincere e del perdere, egli vince mentre il falsificatore perde.

Verificare la formula $(\forall x)(\exists y)S(x,y)$ significa applicare le regole di GTS, interpretando le variabili con individui che appartengono ad un dominio di M.
La sequenza di questa partita (*play*), alla cui destra figurano le applicazioni delle regole del gioco, ne chiarisce meglio il senso:

1. $(\forall x)(\exists y)S(x,y)$
2. $(\exists y)S(a,y)$ R.U., 1.
3. $S(a,b)$ R.E., 2.

La partita finisce con la vittoria del verificatore se $a,b \in S^M, [M \models aSb]$; diversamente a vincere sarà il falsificatore, cosicché la formula non verrà verificata, bensì falsificata.

Bisogna evidenziare che fino ad ora abbiamo considerato la vincita di un giocatore all'interno di una partita, ma non all'interno del gioco (*game*) che è l'insieme di tutte le partite disputabili per i due giocatori in relazione ad una formula. La totalità delle partite viene espressa brevemente da $G(M,S)$. Se la verificazione della formula richiede un rimando alla descrizione della verità all'interno del dominio, con tutti i valori che possono assumere le variabili, il requisito che va richiesto al verificatore consiste nel possedere una strategia vincente per quel gioco. Nel caso della formula precedente chi possiede la strategia vincente è il verificatore, il quale vince (cioè verifica) qualunque sia il movimento del falsificatore. In altri termini, qualunque sia la scelta di $\forall$ per vincolare la variabile x, il verificatore riesce a trovare sempre un elemento che soddisfi la relazione (xSy).

2.2. Definizione di verità in GTS

Una considerazione superficiale potrebbe condurci all'idea che R0, essendo tutte le regole ad essa ridotte, stia a fondamento dell'intera impalcatura della GTS. Ciò potrebbe essere assai plausibile se non fosse che la regola R0 manifesta un'apparente circolarità dovuta alla stipulazione della verità o falsità degli enunciati atomici (*atomic sentences*) già in principio; cosicché il metodo esposto in questi termini potrebbe essere portatore di una *petitio principii* capace ad inficiare in maniera drastica lo scopo delle regole, ovvero la verificazione di un enunciato.

Contro tale possibile lettura non bisogna trascurare che il concetto di verità di un qualsiasi enunciato atomico, così come di tutte le costanti non logiche (variabili ed individui), deve sempre e comunque essere interpretato in un dato modello M in cui sia possibile valutare la falsità o la verità di un enunciato S tramite un gioco $G(S)$.

All'interno di una semantica dei giochi bisogna, dunque, dare per acquisito che si conduce un'analisi della verità in un linguaggio del prim'ordine interpretato, cioè in un linguaggio in cui il *significato* delle costanti non logiche è sempre relato ad un modello. In questa maniera il gioco semantico è strettamente connesso al significato di un enunciato in termini di verità.

Il ruolo della verità verrà esplicato in seguito come *definizione di verità* all'interno di un gioco. Ma ciò che nell'immediato va sottolineato, per quanto concerne la verità, è che le regole non sono governate da un principio regolativo esterno ad esse, ma da un fondamento in termini di principio-regola (*rule*) che, nell'ambito della teoria semantica dei giochi, è preservatore del valore di verità (*truth-preserving*) per il giocatore iniziale.

Tale principio è talmente interno alla semantica che viene espresso da due distinte regole per la verità e la falsità in un gioco:

RV - *S* è vera in *M* se e solo se esiste una strategia vincente (*winning strategy*) per il verificatore iniziale nel gioco *G*(*S*), quando viene effettuato il gioco in riferimento al modello *M*;

RF - *S* è falsa in *M* se e solo se esiste una strategia vincente in *G*(*S*) per il falsificatore iniziale nel gioco *G*(*S*), quando viene effettuato il gioco in riferimento al modello *M*.

Le due regole, oltre ad essere il principio guida dell'intera trattazione, sono anche strettamente connesse al concetto di *strategia vincente* che risulterà essere il fulcro centrale attorno a cui ruota la definizione di verità per la *GTS*.

Ecco come Hintikka si esprime sul rapporto tra regole e preservazione delle verità:

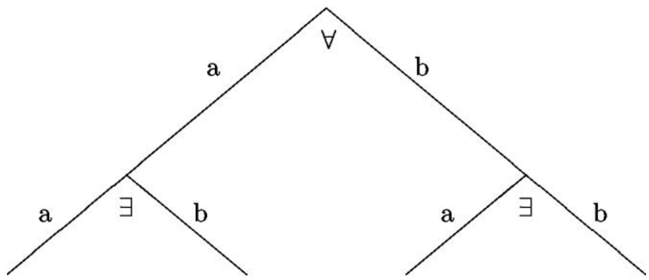
> Solo ad un livello euristico potrebbe essere detto che la loro [= della semantica dei giochi] idea guida sia che S è vera se e solo se le applicazioni delle regole del gioco possono essere sempre scelte dal verificatore iniziale così da essere *preservatrici di verità*[31].

Ciò che muove, dunque, l'applicazione delle regole è l'idea di ottenere una congruenza tra l'applicazione della regola e il risultato finale di

[31] *PMR*, p. 26 (corsivo mio).

una formula verificata. Hintikka pone una distinzione tra il principio che garantisce la preservazione della verità e le regole che invece risultano essere lo strumento per raggiungere il fine, cioè la verificabilità.
Le considerazioni sulla semantica ci portano ad applicare le regole alla formula precedente $(\forall x)(\exists y)S(x,y)$, mantenendo come piano di lavoro un modello M, un dominio D e una relazione R, secondo il seguente schema:

$M=(D,R)$
$D=\{a,b\}$
$\mathrm{R}=\{\langle a,b\rangle\}$



(1,-1) (-1,1) (-1,1) (1,-1)
(F, V) (F, V) (F, V) (F,V)

Fig. 1
Lo schema ad albero ci permette di comprendere meglio in cosa consista il gioco e che cosa sia una strategia vincente. Infatti nella *fig. 1* la partita inizia con il falsificatore che ha la possibilità di scegliere tra i due elementi del dominio *a* e *b*. Scegliere significa per l'appunto *interpretare* le variabili individuali (*x,y,* etc.) con costanti individuali (*a,b,* etc.). Poniamo che scelga *a*, immediatamente dopo questa scelta è il turno del verificatore, il quale *conoscendo* la scelta *a* del falsificatore, sceglierà *b* per poter vincere la partita e in tal modo la vince. La

relazione R è data da una coppia ordinata $\{\langle a,b\rangle\}$ come si evince dal modello M e quindi vince il verificatore in quanto è riuscito a concludere la partita a seguito della scelta operata dal falsificatore (a) e dell'informazione che questo gli ha trasmesso. In altri termini il verificatore, scegliendo b, vince la partita poiché *interpreta* la scelta degli individui per le variabili della formula rispettando la relazione $\{\langle a,b\rangle\}$, mentre il falsificatore non riesce a produrre nessuna interpretazione che rispetti la relazione R.

Tuttavia vincere una partita non significa *vincere il gioco*, che è l'insieme di tutte le partite possibili. Bisogna dunque fare una distinzione tra partita (*play*) e gioco (*game*). La partita è identificata da un ramo dell'albero della fig. 1 mentre il gioco è l'albero stesso. Cosa occorre allora per poter vincere un gioco? Bisogna che un giocatore abbia una *strategia vincente*, ovvero è necessario che ci sia un giocatore in grado di interpretare le variabili individuali in un modo opposto rispetto all'interpretazione dell'altro. Se tale giocatore è in grado di opporsi all'altro sempre a partire anche dalla *radice* dell'albero e continuando ad ogni *nodo* fino alla fine allora si dice che tale giocatore possiede una strategia vincente.

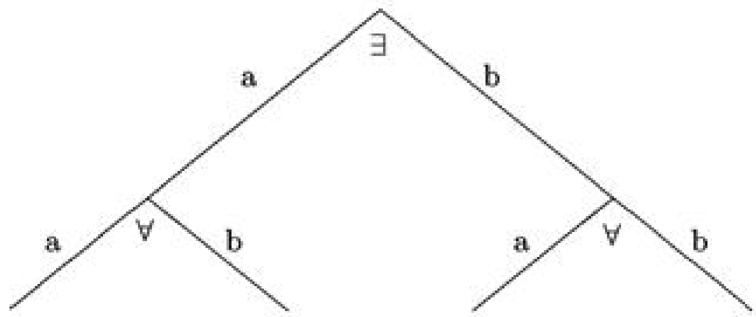
Nella fig. 1 è il falsificatore che possiede una strategia vincente poiché interpreta la x immediatamente come b, conseguentemente passando al turno del verificatore egli può interpretare la y come a o b. In entrambi i casi il falsificatore perde poiché tale interpretazione non verifica l'enunciato. La relazione deve essere $\mathrm{R}=\{\langle a,b\rangle\}$ e non $\langle b,a\rangle$ o $\langle b,b\rangle\}$ come risulta dai due rami di destra dell'albero.

Sia $(\exists x)(\forall y)S(x,y)$ l'enunciato da verificare avente come modello:

$M=(D,R)$

$D=\{a,b\}$

$\mathrm{R}=\{\langle a,b\rangle, \langle b,b\rangle\}$



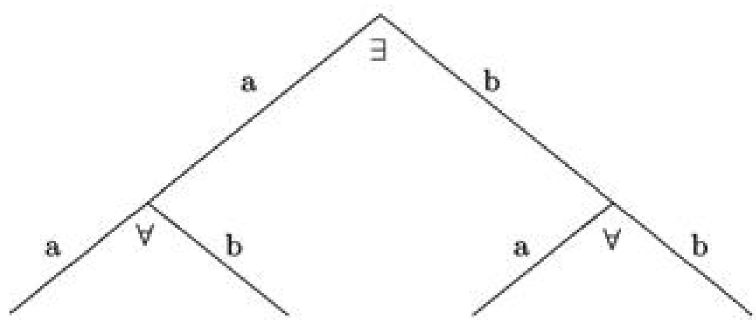
(1,-1) (-1,1) (1,-1) (-1,1)

(F, V) (F, V) (F, V) (F,V)

* *

Fig. 2

Anche in questo caso la strategia vincente (*) appartiene al falsificatore. Mentre se avessimo lo stesso enunciato e un modello con una relazione R={⟨*a*,*a*⟩, ⟨*a*,*b*⟩} il verificatore avrebbe avuto una strategia vincente come si evince dalla fig. 3.



(-1,1) (-1,1) (1,-1) (1,-1)

(F, V) (F, V) (F, V) (F,V)

* *

Fig. 3

In Teoria dei modelli un enunciato S esprime un significato (un valore di verità) per una classe di modelli $M(S)$[32].

Dire che S è vero in un modello M_n equivale ad asserire che $M_n \in M(S)$. Così come dire che S è logicamente vero consiste nel considerare che S è vero in ogni modello di S, ovvero $M(S)$ è la totalità dei possibili modelli di S[33].

Le definizioni assumono, dunque, il compito di esprimere le *condizioni* necessarie di relazione tra enunciato e modello, le quali per la loro intrinseca connessione con il concetto tarskiano di verità diventano condizioni di verità e falsità anche per la GTS.

2.2.1 Condizioni di verità e falsità

Per gli enunciati del primo ordine verità e falsità vengono definite dalle regole RV e RF che hanno il compito di verificare se su un piano di gioco esista una strategia vincente per il giocatore in questione. Le regole RV e RF possono essere trascritte come *conseguenza semantica* ($\models$) se si verificano le seguenti condizioni per i due giocatori:

RV: $M \models^{+}_{GTS} S$ sse esiste una strategia vincente per il *verificatore* in $G(M,S)$;

[32] Per Hintikka l'espressione dell'enunciato S rispetto al modello si traduce nell'atto proprio del "dire": "Ciò che un enunciato S dice (*says*) lo dice specificando una classe di Modelli $M(S)$", [J. Hintikka, *On the Development of the Model-Theoretic Viewpoint in Logical Theory*, in Synthese 77 (1998), pp. 1-36, p. 4]. Il dire diventa, dunque, il medio tra l'enunciato e il modello, determinando proprio la relazione tra l'espressione dell'enunciato e i suoi modelli.

[33] *Ibidem*.

RF: $M \models^{-}_{GTS} S$ sse esiste una strategia vincente per il *falsificatore* in $G(M,S)$.

Il gioco del tipo $G(M,S)$ è un gioco *determinato* nel senso che sottostà al cosiddetto *principio di determinazione dei giochi*[34], che esprime la condizione dell'esistenza necessaria di un vincitore in $G(M,S)$. Così diventa facilmente deducibile che:

a) il *verificatore* ha una s.v. (strategia vincente) in $G(M,S)$ sse il *falsificatore* ha una s.v. in $G(M,\neg S)$;
b) il *falsificatore* ha un s.v. in $G(M,S)$ sse il *verificatore* ha una s.v. in $G(M,\neg S)$.

Si possono dimostrare (a) e (b) mediante una doppia induzione [da chiarire] sulla complessità di S. Per S atomica in (a), assunto che il verificatore ha una strategia vincente in $G(M,S)$, si ha $M|=S$. Ma nel gioco $G(M,\neg S)$, le regole della perdita e della vincita sono invertite. Dunque chi vince è il falsificatore. La conversa può essere dimostrata similarmente e lo stesso si può fare per (b).

Se S è $\neg R$, si assume che (a) e (b) valgono per R. Supposto che il verificatore ha una strategia vincente in $G(M,\neg R)$, ne consegue per (b), che il falsificatore ha una strategia vincente in $G(M,R)$. Ma ovviamente ne possiede una per $G(M,\neg\neg R)$. La conversa di (a) può essere dimostrata allo stesso modo e così anche (b).

---

[34] *PMR*, pp. 32-33, e A.-V. Pietarinen e T. Tulenheimo, *An Introduction to IF logic*, dispensa redatta per il 16th European Summer School in Logic, Language and Information, 9-20 Agosto 2004 Nancy, Francia, pp. 7-8.

La conseguenza di a) e b) si traduce in una forte analogia, come spesso viene enfatizzato[35], tra la *determinazione* della GTS e il principio del terzo escluso nella logica del prim'ordine, a voler sancire una certa fondazione della GTS sulla logica classica. Per ogni proposizione S e un modello M, viene stipulato che

$$M \models^{+}_{GTS} S \vee \neg S$$

se e sole se il verificatore ha una strategia vincente $G(M, S \vee \neg S)$. Essa vale se e solo se il verificatore ha una strategia vincente in $G(M,S)$ o in $G(M,\neg S)$, che sulla base di (a) risulta essere equivalente a:

o il verificatore ha una strategia vincente $G(M,S)$ o il falsificatore ha una strategia vincente in $G(M,S)$.

Infatti, le condizioni di verità della GTS sono equivalenti a quelle della logica classica,

$$M \models^{+}_{GTS} S \Leftrightarrow M \models_{Tarski} S$$

$$M \models^{-}_{GTS} S \Leftrightarrow M \not\models_{Tarski} S$$

da cui per ovvie considerazioni derivano anche

$$M \models^{+}_{GTS} \neg S \Leftrightarrow M \models_{Tarski} \neg S$$

$$M \models^{-}_{GTS} \neg S \Leftrightarrow M \not\models_{Tarski} \neg S$$

[35] *PMR*, pp. 33 e 217.

È il requisito di *soddisfacibilità* [passaggio da chiarire] che esprime l'equivalenza tra l'esistenza di un'interpretazione del modello per S e l'esistenza della s.v. per il verificatore, mentre l'*insoddisfacibilità* (la non esistenza di un'interpretazione che sia modello di S) di un enunciato è equivalente all'esistenza di una s.v. per il falsificatore.

2.3. Presentazione dei giochi semantici in forma estensiva

La teoria semantica dei giochi è poi presentata in *forma estensiva*. Si fa ciò fissando un insieme di azioni A che rappresenta l'insieme delle possibili scelte dei giocatori nel gioco G.

Definizione: Un gioco estensivo G_A di informazione perfetta è costituito da

$$G_A = (N, H, Z, P, (u_i)_{i \in N})$$

tale che

(i) N è l'insieme dei due giocatori;

(ii) H sta per l'insieme delle azioni A che vengono chiamate *storie* (h) o *partite* del gioco. Va precisato che:

(a) se $h \in H$, allora ogni segmento iniziale di h si trova pure in H;

(b) esiste una storia h_0, cioè la radice del gioco, che è il segmento iniziale per ogni $h \in H$;

(iii) Z è l'insieme delle storie massime o finali in G_A;

(iv) $P: H \setminus Z \to N$ è una funzione del giocatore tale che assegna ad ogni partita non terminata H e fino al termine delle storie, cioè Z, il giocatore che possiede il turno per compiere un movimento;

(v) ogni u_i sta per la funzione premio (*payoff function*) per il giocatore $i \in N$. Si tratta di una funzione che specifica per ciascuna storia massimale di Z quale sia il premio per il giocatore i.

Il gioco è formato dalle partite giocate da due opponenti che hanno l'obiettivo di ottenere una vincita. In tal modo ad ogni vittoria di un giocatore corrisponde la perdita dell'altro. Ovvero, un giocatore vince se e solo se l'altro perde. Secondo questa logica si dice che il gioco estensivo della GTS è composto da giochi a *somma zero* (*vince - perde*).
I protagonisti[36] di questi giochi sono due, cioè $N=\{\exists$ (*Eloisa)*, $\forall$ (*Abelardo)*$\}$, tali che:

- $u_{\exists}(h)=-u_{\forall}(h)$ (il gioco è competitivo)[37], per tutte le storie finali h;
- $u_{\exists}(h)=1$ o $u_{\exists}(h)=-1$ (ovvero, $\exists$ ha la possibilità o di vincere o di perdere), per tutte le storie finali $h \in Z$;
- $u_{\forall}(h)=1$ o $u_{\forall}(h)=-1$, per tutte le storie finali $h \in Z$:

Per ogni storia non terminale $h \in H$ sia $A(h)$ l'insieme delle azioni disponibili per un giocatore alla storia h, cioè.

$A(h)=\{x \in A : h \text{ a } x \in H\}$ $A(h)$.

---

[36] I nomi dati a questi due giocatori sembrerebbero puramente arbitrari, se non fosse che effettivamente il ruolo di *Abelardo* è quello del falsificatore nella GTS e quello di *Eloisa* quello del verificatore. Inoltre nella letteratura specifica spesso si indicano i due giocatori mediante i simboli quantificazionali $\forall$ e $\exists$ (come qui di seguito) rispettivamente per *Abelardo* ed *Eloisa*. Ciò sembrerebbe derivare dalla constatazione che le due regole per i quantificatori della GTS [a)Regola Esistenziale: $(\exists x)S(x)$. *Inizia il verificatore* con la scelta di un membro di τ (o anche, ma è la stessa cosa, con la scelta di un individuo dal dominio di M, *dom*(M). Se l'individuale è b allora il resto del gioco è come un $S(b)$, cioè $M \models b \in S(b)$. Regola Universale: $(\forall x)S(x)$. Funziona come R. E. solo che questa volta è il falsificatore ad operare per primo] operano, verificando per $\exists$ e falsificando per $\forall$. Ciò induce a ritenere che proprio i nomi scelti per i due opponenti deriva dalla stipulazione delle due regole quantificazionali. Infatti è alquanto intuitivo osservare che l'opposizione sussiste tra $\forall$belardo ed $\exists$loisa. Ovviamente è solo una questione di senso e non di denotazione*:* infatti nella struttura generale non cambia nulla se al posto di *Abelardo* o *Eloisa* sostituissimo i nomi *giocatore I* e *giocatore II*. Ciò che è particolarmente rilevante è la *denotazione del ruolo* sempre costante dei due giocatori, che è rispettivamente quella del falsificatore e quella del verificatore.

[37] Il termine "somma-zero" sta ad indicare che per tutte le storie $h \in Z$, la somma di tali storie è zero, nel nostro caso $u_{\exists}(h)+u_{\forall}(h)=0$.

Sia P^{-1} ({i}) l'insieme delle storie di *H* in cui è il turno per *i* di muoversi, come specificato dalla funzione *P*.

Una *strategia* per un giocatore *i* viene definita dalla funzione

$$f_i : P^{-1}(\{i\} \rightarrow A)$$

tale che $f_i : (h) \in A(h)$. In altri termini, una strategia per un giocatore nel gioco fornisce esattamente una scelta per ogni posizione verso cui il giocatore deve muoversi.

Il giocatore *i* usa la strategia f_i se, quando inizia dalla radice dell'albero, ogni qual volta che è il suo, sceglie l'azione dettata da f_i fino a che la storia finale *h* non sia raggiunta. *h* è una partita vincente per il giocatore *i* se $u_{\exists}(h) = 1$; altrimenti è una partita vincente per l'opponente di *i*. f_i è una strategia vincente per il giocatore *i* se essa conduce *i* a vincere per ogni scelta fatta dall'opponente di *i*.

Esempio: Il gioco *password* a informazione perfetta illustra i meccanismi presi in esame fino ad ora.

Se si considera la mossa come il frutto di una scelta che segue ad una informazione, lo schema della seguente *fig. 4* esprime che: *Abelardo* comunica ad *Eloisa* una password *R* o *L*. Se *Eloisa* è in grado di ripeterla successivamente, lei vince e *Abelardo* perde. Diversamente a vincere sarà *Abelardo*, mentre *Eloisa* perde.

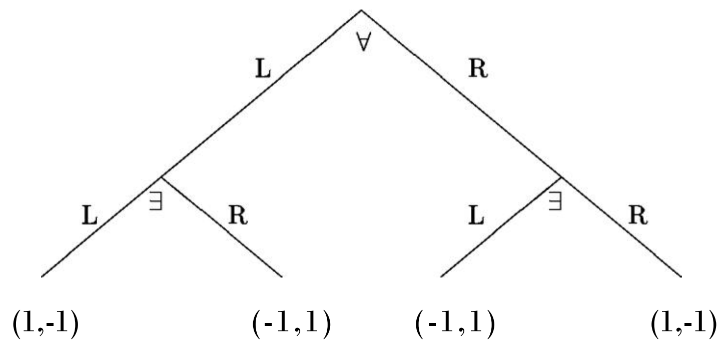


Fig. 4

La strategia vincente di *Eloisa* è:

$f_{\exists}(L) = L, f_{\exists}(R) = R$.

Ogni gioco semantico $G(M,S)$ a informazione perfetta può essere riformulato come un gioco estensivo a somma zero $G_A = (N, H, Z, P, (u_i)_{i \in N})$: si assume per semplicità che ogni formula si trova in una forma normale negativa, ovvero il segno di negazione è prenesso solo a simboli proposizionali atomici. La riformulazione è utile perché ci permette di formulare più chiaramente la nozione di strategia, mostrandoci la differenza tra una partita (*play*) di un gioco semantico e il gioco in sé.

Il gioco in forma estensiva è connotato dall'insieme $A, N, H, Z, P, (u_i)_{i \in N}$:

- $A=\{S_1 : S_1$ è una sottoformula di $S\}$;
- $N=\{\exists, \forall\}$;
- H è formato induttivamente:

(i) (S) è in H. ((S) è la radice h_0 dell'albero-gioco).

Per ogni n>0:

(ii) Se h è in H, $h=(h_0,...,h_{n-1})$ e $h_{n-1}=S_1 \vee S_2$, allora si danno insieme $(h_0,...,h_{n-1},S_1)$ e $(h_0,...,h_{n-1},S_2)$ che sono in H. Inoltre si avrà, $P(h)=\exists$.

(iii) Se h è in H, $h=(h_0,...,h_{n-1})$ e $h_{n-1}=S_1 \wedge S_2$, allora si danno insieme $(h_0,...,h_{n-1},S_1)$ e $(h_0,...,h_{n-1},S_2)$ che sono in H. Inoltre, $P(h)=\forall$.

- $Z \subseteq H$ è l'insieme delle storie massime o terminali del gioco. Ovviamente ogni storia finale $h \in H$ avrà la forma $h=(h_0,...,h_{n-1})$, dove $h_0=S$, e h_{n-1} è una sottoformula atomica o una negazione di una sottoformula atomica di S.
- Per ogni storia massima $h=(h_0,...,h_{n-1})$:

  (a) se $M \models h_{n-1}$, allora $u_\exists(h)=1$ e $u_\forall(h)=-1$.

  (b) se non $M \models h_{n-1}$, allora $u_\exists(h)=-1$ e $u_\forall(h)=1$.

Le regole sopra menzionate dicono in un modo preciso ciò che precedentemente è stato espresso in un modo più informale: la disgiunzione (congiunzione) provoca un movimento per *Eloisa* (o rispettivamente per *Abelardo*) che sceglie la parte sinistra o destra dei disgiunti (congiunti). Il gioco termina con un enunciato atomico o la sua negazione.

Esempio: Riprendendo il gioco precedente con S che è l'enunciato $(p \vee q) \wedge (r \wedge s)$, $M=\{p,s\}$, esso può essere presentato in forma estensiva nella forma $G_A=(N,H,Z,P,(u_i)_{i\in N})$,

$$A=\{(p \vee q) \wedge (r \wedge s), p \vee q, r \wedge s, p, q, r, s,\}$$

$$H=\{(S),(S, p \vee q),(S, p \vee q, p),(S, p \vee q, q),$$
$$(S, r \wedge s),(S, r \wedge s, r),(S, r \wedge s, s)\}$$

$$Z=\{(S, p \vee q, p),(S, p \vee q, q),(S, r \wedge s, r),(S, r \wedge s, s))\}$$

$P(S) = \forall,\ (S, p \vee q) = \exists,\ (S, r \wedge s) = \forall$

$u_{\exists}(S, p \vee q, p) = u_{\exists}(S, r \wedge s, s) = 1,$

$u_{\exists}(S, p \vee q, q) = u_{\exists}(S, r \wedge s, r) = -1$

$u_{\forall}(S, p \vee q, p) = u_{\forall}(S, r \wedge s, s) = -1,$

$u_{\forall}(S, p \vee q, q) = u_{\forall}(S, r \wedge s, r) = 1$

La riformulazione dei giochi semantici in forma estensiva ci permette di definire la nozione di strategia in termini molto precisi.

3. Significato e informazione imperfetta: La logica filo-indipendente (IF Logic)

3. 1. Dalle regole costitutive ai principi strategci

Secondo Michael Dummett una Teoria del significato in ambito logico deve mettere al centro delle proprie indagini il *significato delle costanti logiche*[38]. Ciò è rilevante perché alla base della scelta di una logica c'è sempre una teoria del significato che si occupa in primo luogo proprio del significato delle costanti logiche. Non è un caso dunque che recentemente ci si è occupati di Teoria del significato e teoria dei giochi[39], dedicando tra l'altro un intero capitolo alla teoria semantica dei giochi[40].

Inoltre, la più recente introduzione alla *logica filo-indipendente*[41] – che è una estensione della teoria semantica dei giochi - si apre con alcune considerazioni sul significato delle costanti logiche. Com'è noto le costanti logiche possono essere considerate come regole di formazione o di trasformazione degli enunciati. Secondo questa considerazione in teoria semantica dei giochi viene fatta una distinzione tra *regole*

---

[38] *LBM*, p. 35.

[39] R. Clark, *Meaningful Games: Exploring Language with Game Theory*, The MIT Press, Cambridge MA 2012.

[40] *Ivi*, cap. 5, *A Game Logic for Natural Language*, pp. 125-180.

[41] A. L. Mann, G. Sandu, M. Sevenster, *Independence-Friendly Logic: A Game-Theoretic Approach*, Cambridge University Press, 2011.

costitutive e *principi strategici*[42]. Le regole semantiche del gioco che abbiamo fornito in 2.1. sono per l'appunto regole costitutive nel senso che si applicano a mosse individuali con l'obiettivo di *stabilire* quando una mossa è corretta. In altri termini le regole costitutive determinano tutte le mosse che possono essere compiute durante un *gioco*, ovvero l'insieme di tutte le *partite* che posso essere giocate. E' chiaro che le regole costitutive sono 'cieche' poiché non effettuano alcuna selezione delle partite che portano ad una possibile vincita. Operano per l'appunto delle scelte alla cieca. I principi strategici invece riguardano il comportamento dei giocatori sulla base di molte partite del gioco. In sintesi: "choosing blindly is one thing, following a strategy is another."[43] Una strategia è una regola che comunica al giocatore come muoversi in ogni situazione quando è il suo turno. Una strategia è *vincente* quando un giocatore riesce a portare sempre al termine una vincita nei confronti dell'avversario. Le regole costitutive ci dicono come giocare i principi strategici come giocare bene.

Questa distinzione oltre ad essere basilare è centrale anche per una teoria del significato basata sulla teoria semantica dei giochi. Ma prima di procedere su tale percorso risulta pertinente esporre l'estensione della teoria semantica dei giochi e cioè la logica filo-indipendente.

La *IF logic*, fondata da Jaakko Hintikka e Gabriel Sandu, muove dall'esigenza di colmare un vuoto riscontrato all'interno del sistema classico della logica fregeana e precisamente appare nel panorama scientifico con l'*intentio* di chiarire le relazioni di dipendenza e indipendenza tra quantificatori universali ($\forall$) ed esistenziali ($\exists$).

---

[42] *Ivi*, pp. 1-3.
[43] *Ivi*, p. 2.

Nei sistemi tradizionali di logica è fondamentale e peculiare l'attenzione alla trattazione dei quantificatori, a partire dalla funzione propria della quantificazione che consiste nel delimitare le variabili del linguaggio logico secondo l'universalità o la particolarità.

Frege, avendo considerato i quantificatori come "quantificatori per sé" e privando la logica di una possibile trattazione che investa le relazioni tra i quantificatori, ha condizionato la logica contemporanea già rendendola sin dalle origini deficitaria (*handicapped*) su questo punto[44]: infatti secondo Hintikka la logica storicamente ha considerato il concetto di quantificatore nel senso di "quantificatore per sé" e non come "quantificatore dipendente".

Le ragioni che hanno spinto Hintikka a correggere l'errore (*mistake*) di Frege sono molteplici, ma tutte riconducibili allo scopo di accrescere il potere espressivo della logica. Tale aumento secondo Hintikka si ottiene attraverso la formalizzazione dei concetti di dipendenza e indipendenza tra universale e particolare. Oppure, per quanto riguarda il fenomeno della dipendenza, si tratta di rileggere la logica formalizzata da Frege-Russell come logica ad informazione perfetta e poi, in un secondo momento, integrare quest'ultima con una logica ad informazione imperfetta.

Inoltre, poiché sul piano ontologico esistono numerosi esempi di indipendenza informativa – ovvero non tutte le scelte vengono effettuate avendo a disposizione un quadro informativo completo – tradurre l'argomento in un linguaggio sintattico diventa il compito

[44] Cfr. *PMR*, in particolare § 3, Frege's fallacy foiled: Independence-friendly logic, p. 46 e sg.

primario della ricerca logica che, conseguentemente, arricchisce la propria *funzione descrittiva*[45].

Il considerare la ricerca logica come un progressivo arricchimento dell'espressività è il tratto distintivo dell'impostazione hintikkiana che considera la logica connotata da una forte componente realista. In altri termini la logica filo-indipendente formalizza il fenomeno *reale* di indipendenza informativa.

Sono queste le motivazioni principali che, a mio avviso, hanno spinto il logico finlandese a definire la *IF logic* come *Hyperclassical Logic*[46], a voler cioè sancire che si tratta più che altro di un'estensione della logica classica. Tutto ciò, allo scopo di ottenere un perfezionamento teorico e tecnico dei risultati storicamente raggiunti dalla logica in generale.

Richiamando il gioco *password*, l'indipendenza d'informazione può essere metaforicamente espressa come la supposizione che *Eloisa* "dimentica" o "non sente" la password data da *Abelardo*. Ciò esprime il fatto che le storie L e R sono indistinguibili o equivalenti per *Eloisa*, $L \sim_{\exists} R$ e la perdita d'informazione annulla le differenze fra le due possibili scelte per il giocatore in questione. Così la mancanza

---

45 Sulle differenti funzioni della logica, cfr. *PMR*, pp. 7-12, in cui distingue le due funzioni della logica ossia quella descrittiva e quella deduttiva. Lo studio della prima è affidato alla *proof-theory* mentre quello della seconda alla *model theory*. In particolare la funzione deduttiva della logica è costituita dallo "studio delle relazioni di conseguenza logica, cioè delle relazioni di implicazione o *entailment*" [*Ivi*, p. 4]. A tal proposito la deduzione secondo Hintikka è caratterizzata dalla effettiva abilità di operare inferenze logiche volte ad ottenere conclusioni. Tutte le inferenze logiche che da S_1 portano ad S_2 sono modelli (*patterns*) del corrispondente condizionale $S_1 \supset S_2$ [*Ivi*, p. 5]. Sostiene Hintikka che l'appellativo "regole d'inferenza" per tali forme (*patterns*) risulta essere errato (*ill-named*), poiché esse servono solo ad enumerare le *verità logiche* e non le *verità materiali* [*ibidem*.]. In altri termini il ruolo delle figure inferenziali sarebbe quello di preservare la verità, ma non è necessario che esse preservino anche la verità materiale. Da questo punto di vista, se l'obiettivo – nel senso tarskiano della questione sulla definibilità – è quello di definire la verità, esso pertiene l'adeguazione materiale della stessa definizione. Hintikka dunque afferma che la funzione basilare della logica sia quella descrittiva: infatti, se gli enunciati non vengono primariamente descritti non è possibile esprime o usare le loro relazioni inferenziali [*Ivi*, p. 9].

46 Cfr. J. Hintikka, *Hyperclassical Logic (A.K.A. IF Logic) and its Implications for Logical Theory*, in The Bulletin of Symbolic Logic, vol. 8 (2002), n. 3.

d'informazione per una mossa di un giocatore si traduce in una equivalenza di scelte.

In relazione al gioco *password* questa circostanza viene marcata da una linea orizzontale che collega i due nodi sui quali le scelte sono equivalenti.

Questo fatto viene espresso dalla seguente *fig. 1*:

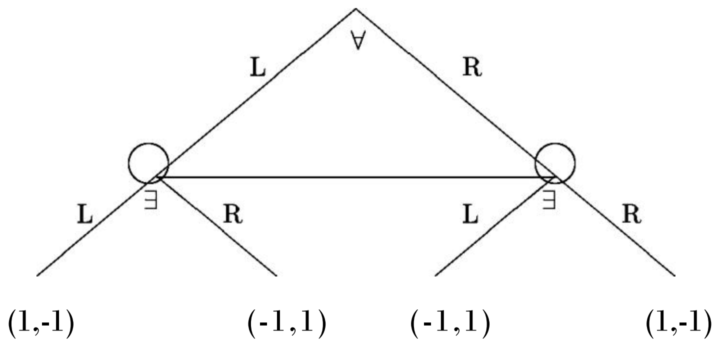


Fig. 1

Viene anche considerato che ogni storia è equivalente a se stessa. Le storie equivalenti che specificano l'informazione è resa possibile sempre dalla forma estensiva del gioco G_A di *informazione imperfetta*

$$G_A = (N, H, Z, P, (I_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$$

tale che gli insiemi $(N, H, Z, P, (u_i)_{i \in N})$ sono esattamente come in precedenza e, per ogni giocatore $i \in N$, l'insieme I_i, viene chiamato ***l'insieme di informazione*** del giocatore *i*, che è una partizione dell'insieme delle storie all'interno della quale il giocatore *i* si muove, ovvero una partizione dell'insieme $\{h \in H : P(h) = i\}$. Le storie *h,h′* sono *equivalenti* per *i*, cioè $h \sim_i h'$, se esiste $K \in I_i$ tale che $h, h' \in K$. Ciò che distingue i giochi imperfetti da quelli perfetti è che nei primi esistono membri degli insiemi $(I_i)_{i \in N}$ che non sono singoli, come accade nell'esempio della figura 3 sopra dove $I_\exists = \{L, R\}$.

La principale novità nei giochi di informazione imperfetta si trova nella nozione di strategia. In particolare la strategia per ciascun giocatore deve essere una *funzione uniforme*, cioè deve possedere valori costanti per tutte le storie equivalenti.

L'informazione imperfetta provoca tra l'altro due fenomeni:

- introduce l'*indeterminatezza* nel gioco;
- permette l'espressione di un fenomeno conosciuto in teoria dei giochi come *segnalazione* (*signaling*).

Il gioco password nella *fig. 3* fornisce un esempio di indeterminatezza: né *Eloisa* né *Abelardo* possiedono una strategia vincente. Se ce ne fosse una per *Eloisa*, allora dovrebbe esistere una funzione uniforme $f_\exists$ tale che $f_\exists(L) = f_\exists(R)$ con l'aggiunta di $u_\exists(L, f_\exists(L)) = u_\exists(R, f_\exists(R)) = 1$, ma ciò è impossibile; mentre se ci fosse una strategia vincente per *Abelardo*, dovrebbe esserci $K \in \{L, R\}$ tale che $u_\forall(K, L) = u_\forall(K, R) = -1$, che risulta essere ancora una volta impossibile.

Un esempio di segnalazione è dato dal gioco seguente.

Esempio: Il gioco password ampliato qui presentato è una semplice variante del gioco password con informazione imperfetta della *fig. 1*. Ad esso partecipano due squadre, la squadra di *Abelardo*, composta da un giocatore, $\forall = \{\forall_1\}$ e la squadra di *Eloisa* composta da due giocatori, $\exists = \{\exists_1, \exists_2\}$. Il gioco consiste nelle seguenti mosse: $\forall_1$ comunica a $\exists_1$ una password *L* o *R* (senza che il giocatore $\exists_2$ la ascolti), che $\exists_1$ riferisce a $\exists_2$. Se $\exists_2$ è capace di ripetere la password detta da $\forall_1$ la squadra $\exists$ vince; diversamente vince la squadra $\forall$.

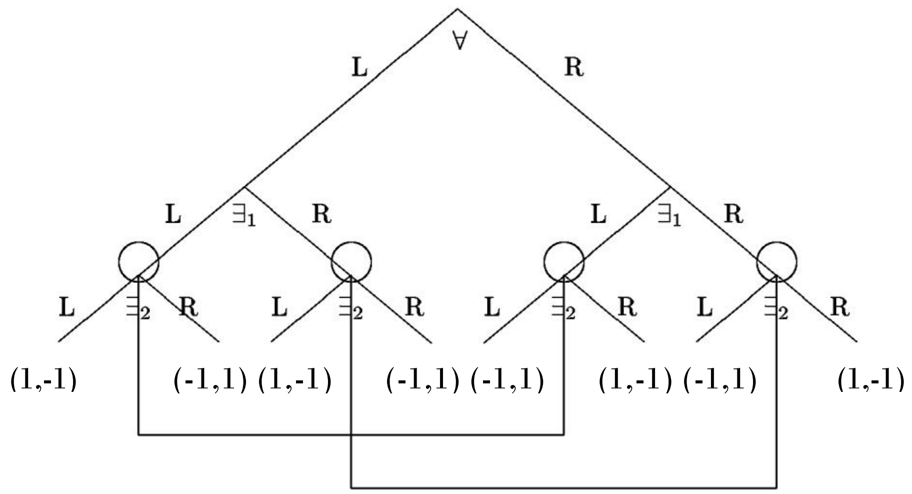


Fig. 2

In questo caso ogni squadra viene considerata come un giocatore. Gli insiemi di informazione per ogni squadra sono

$I_\exists = \{\{L\},\{R\},\{(L,L),(R,L)\},\{(R,R),(L,R)\}\}$

e

$I_\forall = \{\{\varnothing\}\}$

Ciò che accade qui è che sebbene $\exists_2$ non "ascolti" la scelta compiuta da $\forall_1$, il giocatore $\exists_1$ la riferisce ad $\exists_2$. Ciò fornisce la squadra $\exists$ di una strategia vincente $f_\exists$:

$f_\exists(L) = L,\ f_\exists(R) = R$

$f_\exists(L,L) = f_\exists(R,L) = L,\ f_\exists(L,R) = f_\exists(R,R) = R.$

3. 2. Connettivi informativamente indipendenti

Nel capitolo precedente abbiamo visto come i giochi semantici per la logica proposizionale siano stati formulati come subspecie dei giochi classici a informazione perfetta. In questo paragrafo ci si chiede se esistano giochi semantici per la logica proposizionale che siano giochi classici di informazione imperfetta. A tal proposito viene introdotto un linguaggio proposizionale chiamato linguaggio proposizionale *filo-indipendente* (*FI*), nel quale le formule vengono interpretate come giochi semantici a informazione imperfetta.

Più esattamente la sintassi della logica proposizionale *FI* è data dalle seguenti regole di formazione:

- Atomi e loro negazioni.
- Se S_1 e S_2 sono *FI*-formule, lo sono anche $S_1 \vee S_2$ e $S_1 \wedge S_2$.
- Se $S_1, S_2, S_3, \text{e } S_4$ sono *FI*-formule, allora lo sono anche $(S_1(\vee/\wedge)S_2) \wedge (S_3(\vee/\wedge)S_4)$ e $(S_1(\wedge/\vee)S_2) \vee (S_3(\wedge/\vee)S_4)$.

Dato un modello *M*, l'idea centrale nel gioco semantico a informazione imperfetta $G(M,(S_1(\vee/\wedge)S_2) \wedge (S_3(\vee/\wedge)S_4))$ è che *Abelardo* primariamente sceglie uno dei congiunti, e che dopo ciò, a sua volta *Eloisa* sceglie un congiunto senza "conoscere" il congiunto scelto in precedenza. La mancanza di conoscenza del giocatore viene catturata tecnicamente dalle storie indistinguibili (equivalenti). L'indifferenza di scelta per mancanza di informazione fornisce, per l'appunto, una scelta indipendente da informazione. L'indipendenza d'informazione si esprime attraverso un *taglio* (*slash*) '/', ovvero le storie

$$h = ((S_1(\vee/\wedge)S_2) \wedge (S_3(\vee/\wedge)S_4), (S_1(\vee/\wedge)S_2))$$

$$h' = ((S_1(\vee/\wedge)S_2) \wedge (S_3(\vee/\wedge)S_4),(S_3(\vee/\wedge)S_4))$$

sono equivalenti per *Eloisa*, i.e. $h \sim_\exists h'$.

Similmente nel gioco $G(M,(S_1(\wedge/\vee)S_2) \vee (S_3(\wedge/\vee)S_4))$, le storie

$$h_1 = ((S_1(\wedge/\vee)S_2) \vee (S_3(\wedge/\vee)S_4),(S_1(\wedge/\vee)S_2)$$
$$h_2 = ((S_1(\vee/\wedge)S_2) \wedge (S_3(\vee/\wedge)S_4),(S_3(\vee/\wedge)S_4)$$

sono equivalenti per *Abelardo*, i.e. $h_1 \sim_\forall h_2$.

In analogia con i giochi semantici di informazione perfetta bisogna dare due nozioni di strategia.

Una (*non deterministica*) *strategia* (*piano d'azione*) $K_\exists$ per *Eloisa* viene definita esattamente come analoga alla definizione di 2.4.1. con una aggiunta: $K_\exists$ deve essere chiusa sotto storie equivalenti,

se $h \sim_\exists h'$, allora per ogni $a \in A$: $h\,\mathrm{a}\,a \in K_\exists$ se e solo se $h'\,\mathrm{a}\,a \in K_\exists$. [*]

Analogamente, la nozione di una strategia deterministica $K_\exists$ e la corrispondente *funzione di strategia* $f_\exists$ viene definita esattamente come la funzione nella definizione di strategia deterministica di 2.4.1, inoltre deve soddisfare la *condizione di uniformità*:

$$h \sim_\exists h' \Rightarrow f_\exists(h) = f_\exists(h').$$ [**]

Lo stesso vale per le varianti della nozione di strategia per *Abelardo* che sono definite in maniera analoga.

Il precedente risultato circa l'equivalenza tra strategia non deterministica e deterministica viene trasferita ai giochi qui analizzati.

Infatti, viene mostrato che per ogni enunciato S di FI e un modello M, *Eloisa* possiede una strategia vincente $G(M,S)$ se e solo se ha una strategia vincente deterministica in $G(M,S)$ e lo stesso vale per *Abelardo.*

I nuovi requisiti (*) e (**) introducono alcune considerazioni sintattiche per quanto riguarda la nozione di strategia. Così la verità e la falsità viene interpretata per $S = (S_1(\vee/\wedge)S_2)\wedge(S_3(\vee/\wedge)S_4)$ come

$$M \models^{+}_{GTS} S \Leftrightarrow \exists S_5(S_5 \in \{S_1,S_2\}\cap\{S_3,S_4\} \text{ e } M \models^{+} S_5) \qquad [1]$$

e, rispettivamente per la falsità come

$$M \models^{-}_{GTS} S \Leftrightarrow M \models^{+} (\neg S_1 \wedge \neg S_2)\vee(\neg S_3 \wedge \neg S_4). \qquad [2]$$

In tal modo affinché possa esistere una strategia vincente per *Eloisa*, l'intersezione degli insiemi $\{S_1,S_2\}$ e $\{S_3,S_4\}$ non deve essere vuota e lo stesso viene richiesto per l'esistenza di una strategia vincente per *Abelardo* nel gioco $G(M,(S_1(\wedge/\vee)S_2)\vee(S_3(\wedge/\vee)S_4))$. Quando gli insiemi di formule $\{S_1,S_2\}$ e $\{S_3,S_4\}$ sono disgiunti il lato destro della clausola (1) non rimane. Ciò significa che *Eloisa* non possiede una strategia vincente nel gioco. Questo fatto potrebbe risultare paradossale nel senso che per ogni modello M, si potrebbe stabilire che un enunciato non è vero in M semplicemente considerando la sua sintassi. Tuttavia bisogna menzionare che il non essere vero è differente dall'essere falso.

3. 3. I connettivi come restrizione sui quantificatori

Sia S uguale a $(S_1(\vee/\wedge)S_2)\wedge(S_3(\vee/\wedge)S_4)$ e si fissi un modello arbitrario *M*. Se *Eloisa* non ha informazioni sui congiunti scelti da *Abelardo* nel gioco G(M,), allora quando è il suo turno, ci si potrebbe chiedere come faccia essa a conoscere le scelte disponibili che potrebbe compiere, cioè se le sue scelte siano $S_1 \text{ e } S_2, \text{o } S_3 \text{ e } S_4$. Se essa conoscesse le scelte disponibili, diciamo, $S_1 \text{ e } S_2$, allora essa deve essere in grado di inferire che *Abelardo* ha scelto il congiunto di sinistra; analogamente, se essa conoscesse le altre scelte disponibili che sono $S_3 \text{ e } S_4$, allora essa sarebbe in grado di inferire che *Abelardo* ha scelto il congiunto di destra. In entrambi i casi sembra che l'indipendenza informativa dei movimenti di *Eloisa* contraddica il requisito che i giocatori conoscano la loro posizione ad ogni stadio del gioco! Ci si potrebbe, dunque, chiedere: questo gioco semantico è veramente un caso autentico di gioco con informazione imperfetta?

Nella letteratura specifica sulla teoria dei giochi si possono trovare molti esempi circa i '*contenuti*' da riporre nell'alveo degli insiemi di informazione per i giocatori che poi utilizzano nei giochi a informazione imperfetta. Ne vengono presi in considerazione due:

- la *Condizione di consistenza*[47]: per ogni $h,h' \in H \text{ e } i \in N$,

$$h \sim_i h' \Rightarrow A(h) = A(h').$$

L'idea che sta dietro questa condizione è molto semplice: se un giocatore non distingue due storie h e h', allora le scelte disponibili per lui dopo h devono essere le stesse di quelle disponibili per lui dopo

[47] M. J. Osborne e A. Rubinstein, *A Course in Game Theory*, MIT U.P., Cambridge, Massachusetts 1994, p. 200.

avere scelto h'. Se non è così, cioè, se $A(h) \neq A(h')$, allora il giocatore potrebbe usare questa informazione per distinguere *h* e *h*', contrariamente all'assunzione. In altre parole, *a storie indistinguibili devono corrispondere futuri indistinguibili nelle scelte*.

- La *condizione di von Neumann e Morgenstern* limita il passato ponendo restrizioni alle storie equivalenti[48]: *a storie indistinguibili devono corrispondere passati indistinguibili*, cioè

$$h \sim_i h' \Rightarrow lunghezza(h) = lunghezza(h').$$

Questa condizione esclude i giochi di informazione imperfetta come il seguente:

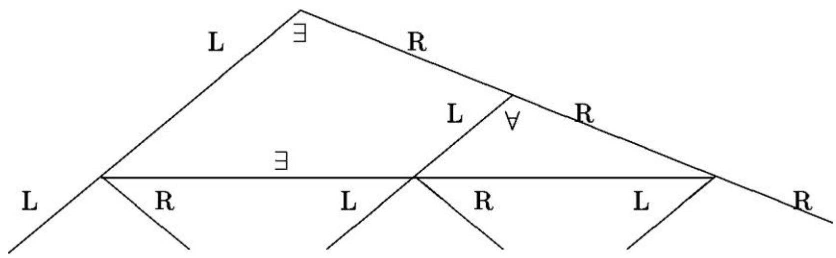


Fig. 3

In questo esempio, L,(R,L), e (R,R) appartengono tutte allo stesso insieme di informazione, ma *lunghezza*(L)≠*lunghezza*(R,L).

La condizione di von Neumann e Morgenstern esclude anche il gioco del *conducente distratto* (*absent-minded driver*), che non viene escluso dalla condizione di consistenza. In questo gioco espresso dalla *fig. 4*, il

[48] G. Bonanno e P. Battigalli, *Synchronic Information, Knowledge and Common Knowledge in Extensive Games*, in M. O. L. Bacharach, L.-A. Gerard-Varet, P. Mongin e H. S. Shin, (a cura di), Epistemic Logic and the Theory of Games and Decisions, Kluwer, Dordrecht 1997, pp. 235-263.

conducente (*driver*) d_1 per andare a casa deve prendere l'autostrada e uscire alla seconda uscita E. Girando alla prima uscita ottiene il premio (*payoff*) 0 perché arriva vicino alla sua casa, girando invece alla seconda uscita ottiene il massimo del premio 4 in quanto è la sua casa. Egli quando si trova in C 'dimentica' di aver superato la prima uscita E (quella che porta a 0) e non imbocca la seconda poiché la considera come prima: il conducente distratto considera ogni uscita E sempre come la prima. In tal modo continua dopo la seconda uscita e si troverà in autostrada e vi rimarrà fino a quando non sarà in grado di tornare indietro per casa (premio 1). Ma il conducente è distratto nel senso che quando entra in una intersezione, egli non ricorda quante intersezioni ha lasciato dietro e si ritroverà a girare continuamente in autostrada riconoscendo ogni uscita E sempre come la prima[49].

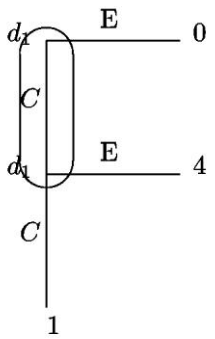


Fig. 4

Ovviamente i connettivi informativamente indipendenti *soddisfano* la condizione di von Neumann e Morgenstern, ma *violano* la condizione di consistenza. Ciò mette in luce che i giochi semantici considerati rsultano essere casi autentici di giochi di informazione imperfetta.
Esistono due modi di soddisfare la condizione di Consistenza.

[49] Cfr. A. Rubinstein, *Modelling bounded rationality*, MIT U.P., Cambridge, Massachusetts 1988, pp. 68-70.

Un modo è quello di porre delle restrizioni sulla sintassi del linguaggio, così da avere solo formule del tipo $(S_1(\vee/\wedge)S_2)\wedge(S_3(\vee/\wedge)S_4)$ come formule ben formate (FBF). Inoltre la restrizione sul linguaggio renderà $(S_1(\vee/\wedge)S_2)\wedge(S_3(\vee/\wedge)S_4)$ equivalente ad $(S_1\vee S_2)$ grazie al fatto che, in entrambe le interpretazioni, sia quella non deterministica che quella deterministica, si ha:

$$M \models^{+}_{GTS} (S_1(\vee/\wedge)S_2)\wedge(S_3(\vee/\wedge)S_4) \Leftrightarrow M \models^{+}_{GTS} S_1 \vee S_2 \qquad (1)$$

$$M \models^{-}_{GTS} (S_1(\vee/\wedge)S_2)\wedge(S_3(\vee/\wedge)S_4) \Leftrightarrow M \models^{+}_{GTS} \neg S_1 \wedge \neg S_2 \qquad (2)$$

L'altro modo di soddisfare la condizione di consistenza è di formulare i connettivi proposizionali come *quantificatori ristretti*. In questo modo dovremmo riformulare il linguaggio proposizionale *FI* in un modo differente, aggiungendo una nuova clausola:

- Se S_1, S_2, S_3 e S_4 sono formule *FI*, allora lo sono anche $(\wedge_{i\in\{1,2\}}(\vee_{j\in\{1,2\}}/\{\wedge\}))S_{\{ij\}}$, dove i e j variano nell'insieme $\{1,2\}$, $S_{11}=S_1, S_{12}=S_2, S_{21}=S_3,$ e $S_{22}=S_4$.

Il concetto che sta dietro questa integrazione è che nel gioco semantico, $\wedge_{i\in\{1,2\}}$ e $\vee_{i\in\{1,2\}}$ le scelte perpetrate rispettivamente da *Abelardo* e *Eloisa*, nell'insieme $\{1,2\}$ sono tali che la seconda scelta è informativamente indipendente dalla prima. Ciò comporta la riformulazione del gioco in forma estensiva nonché la ridefinizione di strategia vincente sempre in termini di funzione uniforme. È dunque ovvio che sia la condizione *di von Neumann e Morgestern* sia la *condizione di consistenza* vengono soddisfatte. Infatti le corrispondenti condizioni sono [sia $S = (\wedge_{i\in\{1,2\}}(\vee_{j\in\{1,2\}}/\{\wedge\}))S_{\{ij\}}$:

$$M \models^{+}_{GTS} S \Leftrightarrow M \models^{+}_{GTS} (S_{11} \wedge S_{12}) \vee (S_{21} \wedge S_{22}) \qquad (\#)$$

$$M \models^{-}_{GTS} S \Leftrightarrow M \models^{+}_{GTS} (\neg S_{11} \wedge \neg S_{12}) \vee (\neg S_{21} \wedge \neg S_{22}) \qquad (**)$$

Confrontando queste condizioni di verità con le vecchie (i.e. (1) e (2)), si nota che le condizioni (2) e (**) per la falsità coincidono, ma la condizione di verità (1) è più potente rispetto a (#), i.e.

$$M \models^{+}_{GTS_1} (S_{11}(\vee/\wedge)S_{12}) \vee (S_{21}(\vee/\wedge)S_{22}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow M \models^{+}_{GTS_2} (\wedge_{i\in\{1,2\}}(\vee_{j\in\{1,2\}}/\{\wedge\}))S_{ij}$$

dove GTS_1 denota l'interpretazione iperintensionale e GTS_2 denota l'interpretazione dei quantificatori ristretti. Entrambe le interpretazioni appartengono ad un sistema logico più forte rispetto ad una logica proposizionale classica, dato che tutte e due generano intervalli (***gaps***) nei valori di verità di un enunciato. In altri termini, i valori di verità non sono due ma ne esiste un altro indeterminato. Come caso, considerando la prima interpretazione, nel modello $M=\{p,r\}$ l'enunciato

$$(p(\vee/\wedge)q) \wedge (r(\vee/\wedge)s)$$

non è né vero né falso. Lo stesso avviene per la seconda interpretazione, il modello $M=\{p,s\}$ e l'enunciato $(\wedge_{i\in\{1,2\}}(\vee_{j\in\{1,2\}}/\{\wedge\}))S_{ij}$, dove $S_{11}=p, S_{12}=q, S_{21}=r, \text{e } S_{22}=s$.

In termini di potere espressivo, tuttavia, le due interpretazioni sono equivalenti. Ciò avviene per ogni enunciato Φ del linguaggio L_2 di FI, dove esiste un enunciato Θ del linguaggio L_1 che per ogni modello M, ha esattamente lo stesso valore semantico in M uguale a Φ. Ciò viene provato mediante induzione sulla complessità di Φ. L'unico apporto rilevante si ha per Φ nella forma $(\wedge_{i\in\{1,2\}}(\vee_{j\in\{1,2\}}/\{\wedge\}))S_{ij}$. In questo caso Φ è:

$$\{[(S_{11}\wedge S_{21})\vee(S_{12}\wedge S_{22})](\vee/\wedge)[(S_{12}\wedge S_{21})\vee(S_{11}\wedge S_{22})]\wedge$$
$$[(S_{11}\wedge S_{21})\vee(S_{12}\wedge S_{22})](\vee/\wedge)[(S_{12}\wedge S_{21})\vee(S_{11}\wedge S_{22})]\}.$$

Il lettore può verificare che per ogni M:

$$M\models^{+}_{GTS_1}\Theta\Leftrightarrow M\models^{+}_{GTS_2}(S_{11}\wedge S_{21})\vee(S_{12}\wedge S_{22})$$
$$M\models^{-}_{GTS_1}\Theta\Leftrightarrow M\models^{-}_{GTS_2}(\neg S_{11}\wedge\neg S_{12})\vee(\neg S_{21}\wedge\neg S_{22}).$$

Ciò che è rilevante risulta dal fatto che per le formule FI indeterminate non esiste una traduzione R in una logica proposizionale ordinaria che soddisfi simultaneamente

$$M\models^{+}S\Leftrightarrow M\models^{+}R \text{ e } M\models^{-}S\Leftrightarrow M\models^{-}R,$$

così come non esistono formule proposizionali indeterminate! Ciò, circa il potere espressivo della logica proposizionale FI, è alquanto trascurabile. In generale con le logiche che ammettono l'indeterminatezza, le questioni sul potere espressivo sono imperniate attorno alle questioni se una logica L distingue modelli che un'altra logica L' non distingue: se esiste una formula di L vera in un modello M, ma non in un modello N, mentre tutte le formule di L' vengono ammesse per i modelli M e N così come i loro valori di verità. Questa questione, in genere, non viene impostata, come se esistessero formule indeterminate di L, e, dunque, con la logica proposizionale diventa insensata la ricerca sulla questione originaria sul potere espressivo. Nominando, arbitrariamente i modelli $M{:}\delta \rightarrow \{0,1\}$, $N{:}\delta \rightarrow \{0,1\}$ della logica proposizionale essi sono indistinguibili per una logica proposizionale ordinaria precisamente quando M e N sono identici.

3. 4. Giochi a informazione imperfetta ovvero Logica FI

La nozione di informazione perfetta è speculare alla trattazione della GTS, anche come metodo di operare sulla verità alternativo alla logica del primo ordine. Si è, dunque, al cospetto di un metodo alquanto significativo per il problema della verità in logica. Tuttavia il concetto di verità nell'ambito dell'informazione perfetta in GTS, nonostante l'originale espressività dialogica, non è in grado di arginare quello che da Hintikka viene considerato *l'errore di Frege*[50]. Frege, pur essendo stato insieme a Peirce il capostipite dell'introduzione dei quantificatori, non ha considerato che

> la reale fonte (*source*) del potere espressivo della logica del primo ordine non sta nella nozione di quantificatore per sé, ma nell'idea di quantificatore dipendente[51].

Necessario diventa a questo punto il compito della teoria semantica dei giochi: "spiegare la natura della dipendenza" che, legata al concetto di portata, si configura come *dipendenza d'informazione*. Questo significa che quando un giocatore compie un movimento suggerito da un quantificatore dipendente, egli *conosce* i movimenti

50 *PMR*, pp. 46-47.
51 *Ivi*, p. 47.

precedentemente operati dal quantificatore da cui dipende. In teoria dei giochi questo fenomeno si traduce tecnicamente nell'istanza che i movimenti precedenti sono contenuti nell'*insieme di informazioni* dei successivi movimenti.
Se si prende come caso la formula

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\exists u)S(x,y,z,u),$$

si trova, tramite il procedimento di skolemizzazione (come visto nel paragrafo 2.5.1), che essa è equivalente a

$$(\exists f)(\exists g)(\forall x)(\forall y)S(x,f(x,y),y,g(x,y))$$

in cui, sia $\exists z$ che $\exists u$ risultano essere entrambi informativamente dipendenti da $(\forall x)(\forall y)$.
Se si volesse esprimere la dipendenza di $\exists z$ solo ed esclusivamente da $(\forall x)$ e quella di $\exists u$ solo ed esclusivamente da $(\forall y)$ si otterrebbe una formula al second'ordine del tipo

$$(\exists f)(\exists g)(\forall x)(\forall y)S(x,f(x),y,g(y)), \qquad (*)$$

che dal punto di vista della GTS risulterebbe perfettamente esprimibile. Infatti, applicando appropriatamente le regole, inizia il falsificatore che sceglie due individui *a* e *b* da sostituire alle variabili individuali *x* e *y*. Segue, dunque, il verificatore che sceglie un valore[52] di *z*, diciamo *c*, conoscendo solo il valore di *x* e un valore di *u*, diciamo *d*, conoscendo solo il valore di *y*.

[52] Si presuppone che le variabili della eventuale formula del primo ordine siano ordinate come in *S(x,z,y,u)* con il raggio di azione del quantificatore esistenziale che verte su *z* e *u*.

Quindi il verificatore possiede una strategia vincente se riesce a trovare $S(a,c,b,d)$, altrimenti a vincere sarà il falsificatore.

Ciò che in questo caso suscita particolare interesse riguarda la non esistenza, in logica del primo ordine, di una formula capace di esprimere la (*). Ovvero, mentre in GTS riusciamo ad esprimere le condizioni di verità di (*), non abbiamo nessuna possibilità di trovare una equivalenza tra la funzione skolemizzata (*) e una formula del prim'ordine[53].

Come Hintikka argomenta, se si considera il concetto di portata prioritaria[54], in una espressione del primo ordine che dovrebbe rimpiazzare (*) si ha $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\exists u)$. Esprimendo la portata prioritaria con > si ottengono le 2 formule

a) $(\forall x) > (\exists z) > (\forall y)$ [con $z=f(x)$ che dipende solo da x e che è informativamente indipendente da y];

b) $(\forall y) > (\exists u) > (\forall x)$ [con $u=g(y)$ che dipende solo da y e che è informativamente indipendente da x],

che non sono compatibili nella espressività della logica del primo ordine.

Infatti si otterrebbe un'espressione

$$(\forall y) > (\exists z) > (\forall y) > (\exists u) > (\forall x)$$

[53] Sulla non esistenza dell'equivalenza tra funzioni di Skolem e formule della logica del primo ordine, cfr. *PMR*, p. 48-50.

[54] *Ivi*, p. 50. In realtà per questo caso specifico Hintikka non considera il concetto di portata tra quantificatori, ma si esprime in termini di ordine dei quantificatori, enfatizzandone così la proprietà della sequenzialità, a voler cioè manifestare una sorta di legame inscindibile tra il concetto di portata, ordine e informazione.

in forma lineare, che per la circolarità (per cui governa e nello stesso tempo non governa) di $(\forall x)$, sarebbe semplicemente una non FBF (formula ben formata), del tipo

$$(\forall y)(\exists z)(\forall y)(\exists u)(\forall x)$$

in quanto non rispetta l'ordine informativo.

È come se la nozione di dipendenza e indipendenza facesse rilevare la contraddittorietà espressiva della logica al primo ordine. In questo caso sarebbe proprio la mancanza di potere espressivo a manifestare la contraddizione delle formule di prim'ordine.

Ma storicamente la nozione di dipendenza e indipendenza tra variabili quantificate è stata proposta da Leon Henkin[55], che considera le relazioni tra quantificatori

$$\begin{pmatrix} \forall x & \exists z \\ \forall y & \exists u \end{pmatrix},$$

esprimendo la dipendenza della variabile z da x e la sua indipendenza da y e la dipendenza della variabile u da y, ma non da x.

Per comprendere meglio questo concetto è utile far riferimento ad una relazione generica $S(x,y,u,z)$ e ad un modello M. Una espressione (*sentence*)

$$\text{(I)} \begin{pmatrix} \forall x & \exists z \\ \forall y & \exists u \end{pmatrix} R(x,y,u,z)$$

[55] Cfr. L. Henkin, *Some remarks on infinitely long formulas*, cit., pp. 167-183.

può essere interpretata in un modello grazie ad una “semantica a informazione imperfetta” in cui ci sono due giocatori, *Abelardo* ($\forall$) e il suo opponente *Eloisa* ($\exists$).

Questo gioco viene eseguito da *Abelardo* che sceglie *a* e *b* dall'universo $|M|$, mentre *Eloisa* sceglie *c* e *d*, ma con la restrizione che, quando sceglie *c*, lei non ha conosciuto la scelta precedente *b* di *Abelardo*, ma solo la scelta *a* di quest'ultimo e, quando sceglie *d*, lei non ha conosciuto la scelta *a* di *Abelardo*; in questo ultimo caso ciò che essa ha conosciuto è solo la scelta *b* di *Abelardo*. Ciò che viene chiamato scelta o anche mossa del giocatore è equivalente in Teoria dei Modelli all'interpretare le variabili come oggetti reali del mondo attuale (o mondi possibili). Alla luce di questa analogia il gioco termina nel momento in cui interpretiamo tutte le variabili come oggetti. In altri termini $\exists$ vince quando troviamo $S^M(a,b,c,d)$, altrimenti chi vince è *Abelardo*.

Esiste una differenza tra vincere una partita e possedere una strategia vincente in un gioco. Vincere una partita consiste semplicemente nel trovare oggetti nell'universo $|M|$ e avere una strategia vincente per $\exists$ secondo le seguenti funzioni:

$$f: |M| \rightarrow |M|,\ g: |M| \rightarrow |M|.$$

La strategia di *Eloisa* è vincente se

$$S^M(a,b,f(a),g(b))$$

per ogni scelta *a* e *b* di *Abelardo*. Ciò significa in riferimento alle due funzioni *f* e *g*, che ogni scelta di *Abelardo* implica una mossa di *Eloisa* e dunque la strategia del gioco è definita solo da chi compie i primi movimenti, in questo caso *Abelardo.*

Come ha evidenziato Hintikka[56], il quantificatore di Henkin, essendo una "formula a due dimensioni" restituisce il senso della priorità logica tra quantificatori di una espressione del tipo (*) che può essere trascritta in una formula lineare (I) al prim'ordine

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z/\forall y)(\exists u/\forall x)S(x,y,z,u)\,, \tag{I}$$

ottenendo in tal modo una equivalenza tra l'espressione al prim'ordine (I) e quella al second'ordine (*), per cui

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z/\forall y)(\exists u/\forall x)S(x,y,z,u)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\exists f)(\exists g)(\forall x)(\forall y)S(x,y,f(x),g(y)).$$

Ciò che materialmente viene proposto da Hintikka e Sandu per la fondazione della logica filo-indipendente è l'introduzione di un nuovo simbolo "/" che esprime l'indipendenza semantica tra quantificatori e connettivi[57], un'operazione quest'ultima che si propone l'obiettivo di andare ad integrare la notazione Frege-Russell.

Per definizione $(\exists z/\forall y)$ esprime l'indipendenza del quantificatore $\exists z$ dal quantificatore $\forall y$. Così l'equivalenza tra la formula al second'ordine (*) e l'ordinamento non lineare della (I) viene mediato da una formula al prim'ordine in cui risulta ben evidente che $\exists z$ dipende solo dalla scelta di $\forall x$ e la scelta di $\exists u$ dipende esclusivamente dalla scelta di $\forall y$ [58].

---

[56] *PMR*, p. 50.

[57] Cfr. *Ivi*, p. 51 e G. Sandu, *On the Logic of Informational Independence and its Applications*, in Journal of Philosophical Logic, n. 22 (1993), pp. 29-60, in particolare p. 31.

[58] Cfr. G. Sandu e T. Hyttinen, *IF logic and foundations of mathematics*, in Synthese n. 126 (2001), pp. 37-47, in particolare il primo capitolo dedicato ai linguaggi *IF* a pp. 37-40.

Ecco, dunque come l'equivalenza

$$\begin{pmatrix}\forall x & \exists z\\ \forall y & \exists u\end{pmatrix} R(x,y,u,z) \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\exists z/\forall y)(\exists u/\forall x)S(x,y,z,u) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\exists f)(\exists g)(\forall x)(\forall y)S(x,y,f(x),g(y)),$$

ottenuta dall'uso del simbolo "/", riesca a mediare tra una espressione non lineare e una di second'ordine.

Inoltre risulta abbastanza chiaro come la strategia vincente di *Eloisa* sia un modo per definire la verità in un modello *M*: "truth is defined inderectly as the existence of a winning strategy"[59].

L'impalcatura che regge questa definizione di verità è l'anima della logica *FI*, che risulta essere un crocevia di concetti teorico-pratici tra la logica classica, la GTS e la verità in senso tarskiano. Ecco come lo stesso Hintikka si esprime a proposito della nascita della logica *FI*:

> Dobbiamo estendere la nostra logica del prim'ordine tradizionalmente familiare in una logica più forte che ci permetta di esprimere l'indipendenza di informazione, laddove la notazione Frege-Russell lo proibisce. Il risultato è una logica che sarà chiamata logica filo-indipendente (*independence-friendly logic*, in breve *FI*) del primo ordine[60].

Esistono però dei casi particolari in cui si riesce ad esprime l'indipendenza anche con la notazione tradizionale e che hanno il pregio di chiarire ancora meglio il concetto di indipendenza di cui la tradizione è completamente priva. Infatti, nella formula seguente

---

[59] *PMR*, p. 37.
[60] *Ivi*, p. 50.

$(\forall x)(\exists y/\forall x)S(x,y)$

la scelta del valore y deve essere fatta senza conoscere la scelta del valore x, ovvero tramite una “completa ignoranza” di x. In altri termini, ciò significa che temporalmente la scelta di y avviene prima di quella di x, ovvero la formula precedente è equivalente a

$(\exists y)(\forall x)S(x,y)$.

Ciò mostra come in questo caso particolare la nozione di indipendenza possa essere espressa anche omettendo il simbolo “/”, e quindi esprimibile con la notazione Frege-Russell.

A proposito della skolemizzazione delle formule FI, non va omessa una precisazione che chiarisce ulteriormente: in particolare nella formula $(\forall x)(\forall y)(\exists z/\forall y)(\exists u/\forall x)S(x,y,z,u)$ considerata sopra si può ben osservare che $\exists u$ si trova sotto la portata prioritaria di $\exists z$. Ciò porta ad una dipendenza del quantificatore $\exists u$ dal quantificatore $\exists z$ che nella traduzione al second’ordine verrebbe espressa da

$(\exists f)(\exists h)(\forall x)(\forall y)S(x,f(x),y,h(y,f(x)))$

in cui l’ultima funzione $h(y,f(x))$ esprime la dipendenza di $\exists u$ sia da $\forall y$ che da $\exists z$.

Ovviamente non esiste una relazione di equivalenza tra le due forme al second’ordine

$(\exists f)(\exists g)(\forall x)(\forall y)S(x,y,f(x),g(y))\_$

$\_(f)(\exists h)(\forall x)(\forall y)S(x,f(x),y,h(y,f(x)))$, semplicemente per il fatto che $g(y) = h(y, f(x))$. Occorre stipulare, dunque, una convezione per le relazioni tra quantificatori esistenziali secondo la quale, "i movimenti connessi con i quantificatori esistenziali sono sempre indipendenti dai movimenti commessi da altri quantificatori esistenziali precedenti"[61].

Dunque in logica *FI* è lecita l'equivalenza

$$(\exists x_1)...(\exists x_m)(\exists y_1)...(\exists y_n) \Leftrightarrow (\exists y_1 /(\exists x_1)...(\exists x_m))...(\exists y_n /(\exists x_1)...(\exists x_m))$$

per cui in tutte le formule *FI* va omessa l'indipendenza tra quantificatori esistenziali che risulta implicitamente espressa.

Alla luce di queste considerazioni, risulta evidente che il linguaggio *FI* è una estensione del linguaggio del primo ordine e che come tale può essere trattato anche in termini di una teoria semantica dei giochi, alla condizione di possedere una semantica e una sintassi da implementare in GTS. Ma prima di passare alla sintassi e alla semantica di *FI*, dobbiamo considerare alcune proprietà che si aggiungono a GTS, al fine di poterla integrare col potere espressivo dell'indipendenza.

3. 5. *Strategie, uniformità, condizioni di verità e indeterminatezza in FI*

In Hintikka e Sandu[62], i linguaggi di informazione imperfetta vengono introdotti con il proposito di fornire una base generale per esprimere in una notazione lineare la dipendenza e l'indipendenza tra i

[61] *PMR*, p. 63.

[62] J. Hintikka e G. Sandu, *Informational Independence as a Semantical Phenomenon*, in J. E. Fenstad et alii, (a cura di), Logic, Methodology and Philosophy of Science VIII, cit., 571-589.

quantificatori considerati da Henkin. In quei linguaggi, i quantificatori hanno la forma generale

$$(\exists y/\{Q_1x_1,...,Q_kx_k\}),(\forall y/\{Q_1x_1,...,Q_kx_k\}),(Q_i \in \{\exists,\forall\})$$

così da esprimere l'indipendenza semantica del quantificatore $\exists y$, e rispettivamente di $\forall y$, dal quantificatore $\{Q_1x_1,...,Q_kx_k\}$, dove ciascun Q_i è o $\exists$ o $\forall$.

Ancora più generalmente, si possono considerare i quantificatori *FI* che abbiano la forma

$$(\exists y/V),(\forall y/V)$$

dove *V* è un insieme finito di quantificatori tale che $\exists \notin V$ (rispettivamente $\forall \notin V$), ovvero ogni quantificatore è indipendente da un insieme di quantificatori *V* ai quali non appartiene.

Nel caso in cui $V=\emptyset$, si è in presenza dei quantificatori standard del prim'ordine, così da esprimere i *significati* dei tradizionali quantificatori fregeani come informativamente indipendenti da un'insieme vuoto di quantificatori tali che $(\exists y/\emptyset)$ per $\exists y$ e $(\forall y/\emptyset)$ per $\forall y$.

Ciò che abbiamo detto sopra per i quantificatori si applica *mutatis mutandis* ai connettivi indipendenti. In altre parole, si hanno i connettivi del linguaggio nella forma

$$(\vee/V),(\wedge/V)$$

dove *V* è un insieme di quantificatori.

L'unico nuovo elemento nel gioco estensivo

$$G(M,S)=(\{\exists,\forall\},H,Z,P,(I)_{i\in\{\exists,\forall\}}(u_i)_{i\in\{\exists,\forall\}})$$

di un enunciato *FI - S*, è la considerazione degli insiemi di informazione $(I)_{i\in\{\exists,\forall\}}$ che sono determinati in un modo chiaro dalla sintassi di *S*. Più concretamente il taglio (/) introduce una equivalenza nell'insieme delle storie *H*.

In particolare i giochi semantici filo-indipendenti sono definiti mediante un insieme *A* di azioni il quale rappresenta l'insieme delle possibili scelte dei due giocatori. Il gioco a informazione imperfetta G_A è costituito da

$$G_A=(\{\exists,\forall\},H,Z,P,(I)_{i\in\{\exists,\forall\}}(u_i)_{i\in\{\exists,\forall\}})$$

dove[63],

a) $\{\exists,\forall\}$ è l'insieme dei due giocatori;

b) *H* sta per l'insieme delle azioni *A* che vengono chiamate storie o partite del gioco;

c) *Z* è l'insieme delle storie massime in G_A;

d) *P* è una funzione del giocatore che assegna ad ogni partita non terminata il giocatore che possiede il turno per compiere il movimento;

e) I_i è l'insieme di informazioni dei due giocatori $\{\exists,\forall\}$ con $i\in\{\exists,\forall\}$;

f) u_i sta per la *payoff function* per un giocatore $i\in\{\exists,\forall\}$. Si tratta di una funzione che specifica per ciascuna storia massimale di *Z* quale sia il *payoff* (premio) per il giocatore *i*.

[63] Per queste definizioni cfr. G. Sandu, *Logic with incomplete information*, University of Helsinki 2004.

I giochi semantici per formule *FI* sono come i giochi per la GTS, ma contengono un nuovo elemento: le partizioni di informazione per i due giocatori $I_\exists$ e $I_\forall$. La partizione di informazione per il verificatore è l'insieme delle partite nelle quali è il turno di muoversi per il verificatore e lo stesso vale anche per le partizioni di informazione per il falsificatore. Tale insieme si esprime mediante una funzione $P^{-1}(\{\exists\})$, dove P^{-1} indica semplicemente che *P* può essere 0: è il caso in cui l'insieme delle azioni *H* fosse 1 in cui esiste solo il turno per il primo giocatore e non vi è quindi la necessità di assegnare turni a giocatori successivi. Dato che un giocatore ha raggiunto il livello di una partita o storia *h*, che appartiene all'insieme di informazioni *I* nelle partizioni di informazione di *V*, per tutte le storie che il verificatore conosce la storia in cui si trova potrebbe essere $h' \in I$. Ciò significa che dal punto di vista dell'informazione imperfetta il verificatore *perde traccia* che la storia in cui si trova è realmente *h* e la sua imprecisa (imperfetta) conoscenza è rappresentata dall'insieme di storie a cui esso può giungere. Ovviamente vale lo stesso per il falsificatore[64].

Le partizioni di informazione sono determinate mediante una sintassi dell'enunciato (*sentence*) *S* e la formazione sintattica di tali partizioni viene spiegata a partire dal segno di indipendenza "/". In particolare questo segno introduce le seguenti relazioni $\sim_\exists$ e $\sim_\forall$ sull'insieme delle storie *H*. Si può dire che le storie $h = h_0,\ldots,h_{m-1}$ e $h' = h'_0,\ldots,h'_{m-1}$ sono *W*-equivalenti per il verificatore, dove *W* sta per i quantificatori (rispettivamente i connettivi) da cui le scelte del verificatore sono indipendenti in quanto sono storie indistinguibili quindi equivalenti dal suo punto di vista. Simbolicamente la *W*-equivalenza (indistinguibilità del verificatore rispetto alle storie precedenti) si

[64] Cfr. A.-V. Pietarinen e T. Tulenheimo, *An introduction to IF Logic*, cit., p. 37-38.

esprime con $h \sim_{\exists} h'$, se vengono soddisfatte le seguenti *condizioni di uniformità*:

i) l'ultima posizione delle storie *h* e h' ha la stessa sottoformula: $h_{m-1} = ((\exists x_p/W)S, g_1)$ e $h'_{m-1} = ((\exists x_p/W)S, g_2)$ per qualche *S*, oppure $h_{m-1} = (S_1(\vee/W)S_2, g_1)$ e $h'_{m-1} = (S_1(\vee/W)S_2, g_2)$ per qualche $S_1 \vee S_2$;

ii) nel corso di entrambe le storie è stata interpretata esattamente la stessa variabile, cioè ***dom***(g_1)=***dom***(g_2);

iii) Gli assegnamenti g_1 e g_2 possono differire al più per variabili dell'insieme *W*: per ogni $x \in dom(g_1) - W : g_1(x) = g_2(x)$.

La relazione per $\sim_{\forall}$ viene definita analogamente. La sola differenza consiste nella clausola i), dove $(\exists x_p/W)$ e $(\vee/W)$ vengono rimpiazzati da $(\forall x_p/W)$ e $(\wedge/W)$.

Le partizioni di informazione risultano utili dunque da un lato per mantenere la traccia delle storie di un singolo giocatore e dall'altro per far da criterio di uguaglianza per storie equivalenti. In altri termini due storie possono essere trattate come equivalenti se appartengono allo stesso insieme di partizione di informazione, ma, per garantire che tale condizione sia valida per tutte le mosse del giocatore ovvero per la strategia che il giocatore adotta, bisogna esplicitare formalmente un ulteriore requisito.

Il concetto di strategia è identico a quello della logica di informazione dipendente, mentre quello di strategia vincente per uno dei due giocatori $\{\exists, \forall\}$ va integrato, per le ragioni di cui sopra, con il *requisito di uniformità*. Infatti, nella logica *FI* una strategia per un giocatore *i* è vincente non solo quando ne esiste una per il verificatore o il falsificatore, ma quando viene soddisfatto anche il requisito di uniformità. Questo requisito specifica che le storie mutualmente equivalenti (storie che appartengono allo stesso insieme di informazione) devono essere continuate nella medesima maniera, cioè le scelte devono essere costanti. Le condizioni di uniformità vengono espresse dalla due clausole U1 e U2:

(U1) a storie *W*-equivalenti corrispondono scelte identiche di individui: se **h**, **h´** sono storie con $h \sim_{\exists} h'$, delle quali gli ultimi membri hanno la forma $((\exists x_p/W)S,g))$ e $((\exists x_p/W)S,g'))$ e con **k** e **k´** che sono un qualsiasi assegnamento di individuale, si ottiene una funzione:

$f_v(h) = (S,k)$ e $f_v(h') = (S,k') \rightarrow k - g = k' - g'$;

(U2) a storie *W*-equivalenti corrispondono scelte identiche di disgiunti: se h, h' sono storie con $h \sim_{\exists} h'$ delle quali gli ultimi membri hanno la forma $((S_1(\vee/W)S_2,g))$ e $((S_1(\vee/W)S_2,g'))$ e con A e $A' \in \{S_1, S_2\} A$ che sono disgiunti qualsiasi, allora:
$f_v(h) = (A,k)$ e $f_v(h') = (A',g') \rightarrow A = A'$.

I requisiti U1 e U2 si applicano analogamente al falsificatore, con i dovuti riferimenti al quantificatore universale per U1 e alla congiunzione per U2.
Verità e falsità per formule *FI* sono definite sempre mediante l'esistenza di una strategia vincente per un qualsiasi appropriato giocatore, come avviene per formule del primo ordine con informazione perfetta. Ma nell'ambito dell'informazione imperfetta la nozione di strategia vincente è più complessa. Infatti per vincere

bisogna avere non solo una strategia vincente, ma essa deve essere anche uniforme. Si osservano dunque le seguenti definizioni:

- Verità: $M \models^{+} S$ sse esiste una strategia vincente per *Eloisa* in $G(M,S)$;

- Falsità: $M \models^{-} S$ sse esiste una strategia vincente per il giocatore *Abelardo* in $G(M,S)$;

- Indeterminatezza: $M \models^{0} S$ sse $M \not\models^{+} S$ e $M \not\models^{-} S$. Ovvero, non esiste nessuna strategia vincente né per *Eloisa* né per *Abelardo* in $G(M,S)$.

Inoltre un gioco è detto indeterminato, quando nessuno dei due giocatori ha una strategia vincente e una formula S è detta indeterminata in riferimento al valore di verità nel modello M, precisamente quando il gioco $G(M,S)$ è indeterminato.

3. 6. Negazione in logica FI

Le condizioni di verità enunciate sopra sono prive della trattazione della negazione, ovvero sono espresse solo in relazione al verificare e al falsificare. In particolare le definizioni di verità implicitamente utilizzano una nozione duale del concetto di negazione. Infatti nell'ambito della GTS si può definire la negazione per ogni formula *FI-S* e un modello M come

$$M \models^{+}_{GTS} \neg S \Leftrightarrow M \models^{-}_{GTS} S$$

$$M \models^{-}_{GTS} \neg S \Leftrightarrow M \models^{+}_{GTS} S$$

La negazione di un enunciato S da verificare è equivalente allo stesso enunciato da falsificare e per conversione la negazione di un enunciato da falsificare è equivalente ad un enunciato da verificare. Il simbolo $\neg$ in questo caso esprime che S è falso in M, da cui $\neg S$, *dunque* S *vero in* M. Il significato della *negazione duale* o *forte* viene evidenziato dall'interscambio dei ruoli dei due giocatori ed è pienamente catturato dalle regole semantiche del gioco in GTS per la negazione (R$\neg$)[65].
Da questa definizione si può notare che nella logica *FI* '*essere non vero*' *non è equivalente ad* '*essere falso*': '$\neg S$' ≠ 'falso S'. Infatti, in base alle regole del gioco 'non vero S' è equivalente a 'non esiste una strategia vincente per il verificatore (*Eloisa*) in $G(M,S)$'. Mentre, '*essere non falso*' *non è equivalente ad* '*essere vero*': 'non falso S' ≠ 'vero S', ma è la non esistenza di una strategia vincente per il falsificatore (*Abelardo*) ad essere equivalente all'essere non falso S. La negazione duale ha il compito di esprimere la contrapposizione dei due giocatori mediante l'interscambio di ruoli espresso dalla esistenza o non esistenza di una strategia vincente per uno dei due. Che cosa accadrebbe invece se volessimo esprimere l'esistenza o la non esistenza di un modello M? Dobbiamo introdurre un concetto di negazione diverso da quello duale e soprattutto che non sottostia alle regole di GTS. Si tratta della *negazione contraddittoria* o *debole* ($\neg_D$) che vale in genere per tutte le formule della logica del primo ordine[66]

$\neg_D$ esprime che S è non vera in $M : \neg_D S$

[65] Si noti che questo tipo di negazione sottostà ad una delle regole usate nel paragrafo 2.6, a cui si rimanda. Tale regola esprime il funzionamento dell'interscambio tra i giocatori mediante R$\neg$ per l'appunto che è già una negazione duale.

[66] Cfr. *PMR*, p. 147 e sg.

Se nella logica *FI* 'non vero' non equivale ad 'essere falso', allora per una formula *S* di *FI* non essere vero significa che non esiste una strategia vincente per *Eloisa* in *G*(*M*,*S*). Mentre l'essere falso di una formula *S* significa che esiste una strategia vincente per *Abelardo*. Inoltre, una formula non falsa non è equivalente all'essere vera: '*S* non falsa' significa che non esiste una strategia vincente per *Abelardo* in *G*(*M*,*S*).

Si possono distinguere, dunque, le due negazioni[67]:

- *la negazione forte* (*duale*) esprime che *S* è falsa in $M : \neg_F S$. Il significato è da rintracciare nello scambio dei ruoli al livello delle regole del gioco;
- *la negazione debole* (*contraddittoria o classica*) $\neg_D \mathrm{S}$ esprime che *S* non è vera in *M*: $\neg_D S$. Il significato va rintracciato nel ruolo classico della negazione in cui la contrapposta di un'asserzione vera non può essere vera, ma falsa.

Il significato di $\neg_D S$, se posto in relazione con il concetto di modello e con quello di *conseguenza*, può essere definito come

(a) $M \models^{+} \neg_D \mathrm{S} \Leftrightarrow \mathrm{non}\, M \models^{+} S$

(b) $M \models^{-} \neg_D \mathrm{S} \Leftrightarrow \mathrm{non}\, M \models^{-} S$

In (a) $\neg_D S$ è considerata come una *conseguenza vera* di *M*, in cui l'enunciato non negato *S* non può essere *verificato*; in (b) mediante $\neg_D S$ si esprime una *conseguenza falsa* di *M* dove l'enunciato *S* non può essere *falsificato*. Da notare che all'azione del verificatore di un conseguente negato corrisponde una conseguenza vera e che la

[67] Cfr. A.-V. Pietarinen e T. Tulenheimo, *An introduction to IF logic*, cit. p. 59.

conseguenza falsa deriva dall'azione del falsificatore sull'enunciato negato. Con questo fatto è come se si sottolineasse che anche la conseguenza è definita mediante le regole semantiche di GTS. Ma ciò non avviene, perché ad una negazione debole di un enunciato non corrisponde un interscambio di ruoli tra opponenti contrapposti.

3. 7. Sintassi della logica FI

Al linguaggio *L* presentato nel paragrafo 2.2 va aggiunto un linguaggio *L´* in grado di esprimere l'indipendenza informativa tra operatori logici e connettivi. Per quanto riguarda la sintassi basta aggiungere a quella di *L* le *FBF* che esprimono tutti i possibili casi di indipendenza tra le costanti logiche. La sintassi[68] per L´ va espressa nel modo seguente:

a) $(\exists x)$, se si trova nella portata prioritaria di $(\forall y_1),\ldots,(\forall y_k)$, per esprimerne l'indipendenza informativa dal quantificatore universale va rimpiazzato da

$$(\exists x / \forall y_1,\ldots,\forall y_k).$$

b) $(\exists x)$, se si trova nella portata prioritaria di $\wedge_1,\ldots,\wedge_k$, per esprimerne l'indipendenza informativa dalla congiunzione va rimpiazzato da

$$(\exists x / \wedge_1,\ldots,\wedge_k).$$

c) $\vee$, se si trova nella portata prioritaria di $(\forall y_1),\ldots,(\forall y_k)$, per esprimere l'indipendenza informativa della disgiunzione dal quantificatore universale va rimpiazzato da

[68] Per l'impostazione sintattica dei linguaggi *FI*, cfr. G. Sandu, *On the Logic of Informational Independence*, cit., pp. 33-34.

$$(\vee / \forall y_1, \ldots, \forall y_k).$$

d) $(\forall x)$, se si trova nella portata prioritaria di $(\exists y_1), \ldots, (\exists y_k)$, per esprimerne l'indipendenza informativa dal quantificatore esistenziale va rimpiazzato da

$$(\forall x / \exists y_1, \ldots, \exists y_k).$$

e) $(\forall x)$, se si trova nella portata prioritaria di $\vee_1, \ldots, \vee_k$ per esprimerne l'indipendenza informativa dalla disgiunzione va rimpiazzato da

$$(\forall x / \vee_1, \ldots, \vee_k).$$

f) $\wedge$, se si trova nella portata prioritaria di $(\exists y_1), \ldots, (\exists y_k)$, per esprimerne l'indipendenza informativa dal quantificatore esistenziale va rimpiazzato da

$$(\wedge / \exists y_1, \ldots, \exists y_k).$$

g) Ogni negazione $\neg$ dovrebbe essere rimpiazzata da una[69] $\neg_F$.

h) $(\forall x)$, se si trova nella portata prioritaria di $\neg_F$, per esprimerne l'indipendenza informativa dalla negazione forte bisogna rimpiazzarlo con

$$((\forall x) / \neg_F).$$

a) $(\exists x)$, se si trova nella portata prioritaria di $\neg_F$, per esprimerne l'indipendenza informativa dalla negazione forte bisogna rimpiazzarlo con

---

[69] Con $\neg_F$, come si è visto, si intende la negazione forte o duale. Alcuni testi per questo tipo di negazione riportano il simbolo "~" mentre indicano la negazione debole con $\neg$.

$$((\exists x)/\neg_F).$$

Mediante la sintassi si perviene dunque ad una capacità espressiva che concerne l'indipendenza tra gli operatori con lo scopo di aumentare il potere espressivo di una logica basata comunque su una semantica classica. Ma ciò verrà chiarito nel paragrafo successivo dedicato alla semantica per la logica filo-indipendente.

3. 8. Semantica della logica FI

Come per la sintassi abbiamo aggiunto nuove espressioni ad *L*, così per avere una semantica *L´* bisogna avere delle regole che sulla base della GTS diano la possibilità di esprimere i movimenti in situazioni di indipendenza informativa.

i) R0: Se S_i è un simbolo proposizionale *p* del Linguaggio *L´*, [o la sua negazione forte $\neg_F p$] non ci sono movimenti, perché nessuno effettua delle scelte. Dunque, se $M \models S_i$ (o $M \models p$), allora chi vince è il verificatore ***Eloisa***; invece se $M \not\models S_i$, allora sarà il falsificatore ***Abelardo*** a vincere;

ii) R$\vee$: $(S_1(\vee/\forall y_1,...,\forall y_k)S_2)$. Il verificatore inizia con la scelta di S_i (*i*= 1 o 2). E il gioco continua come in S_i, cioè se il verificatore arriva a $M \models S_i$ vince, altrimenti perde [bisogna trovare almeno un elemento vero per verificare $(S_1 \vee S_2)$, indipendentemente dal valore $(y_1,...,y_k)$];

iii) R$\wedge$: $(S_1(\wedge/\exists y_1,...,\exists y_k)S_2)$. In questo caso è il falsificatore che inizia a scegliere S_i (*i*= 1 o 2), continuando il gioco come in S_i [si falsifica

$(S_1 \wedge S_2)$, se si trova almeno un elemento falso indipendentemente dal valore $(y_1,...,y_k)$];

iv) R. E.: $(\exists x / \forall y_1,...,\forall y_k)S(x)$. Inizia il verificatore con la scelta di un membro dal dominio δ (o anche, ma è la stessa cosa, con la scelta di un individuo dal dominio di *M*, *dom*(*M*)). Se l'individuale è *b*, allora il resto del gioco è come un *S*(*b*), cioè $M \models b \in S$, con *b* scelto indipendentemente dal valore $(y_1,...,y_k)$;

v) R. U.: $(\forall x / \exists y_1,...,\exists y_k)S(x)$. Funziona come R.E., solo che questa volta è il falsificatore ad agire per primo;

vi) R$\neg_F$: Se $\neg_F S_i$, il gioco è come in $\neg S_i$ tranne per il fatto che si interscambiano i ruoli dei due giocatori. Infatti, se $\neg_F S_i$ è come $\neg_F p$, non esistono movimenti, ma chi vince è il falsificatore, poiché si dà $\neg_F p$, se $M \models \neg_F p$: quindi per $\neg_F S_i$, vince il falsificatore se $M \models \neg_F S_i$; altrimenti, se $M \not\models \neg_F S_i$ sarà il verificatore a vincere;

vii) Le regole per quantificatori indipendenti dalla negazione forte $(\forall x)/\neg_F$ e $(\exists x)/\neg_F$ sono rispettivamente uguali a v) e a iv) della GTS[70]. I quantificatori non invertono i ruoli di movimento. Ciò sta ad indicare che l'indipendenza dalla negazione equivale ad esprimere la non negazione della variabile quantificata. In altri termini, il movimento connesso al quantificatore avviene come se il giocatore avesse dimenticato l'informazione proveniente da $\neg_F$, ovvero la portata prioritaria $\neg_F$ non agisce sul quantificatore.

[70] Per le regole della GTS si rimanda al paragrafo 2.1.

4. Il significato in gioco: oltre la deduzione

4.1. Decostruzione del costruttivismo

La *logica filo-indipendente* rappresenta una buona alternativa alle logiche non classiche con le quali entra direttamente in polemica, come per esempio, la logica costruttivista o intuizionista che, nella sua evoluzione storica, è sommariamente racchiudibile nell'ambito della *Proof-Theory*. Hintikka propone una rilettura del costruttivismo in chiave verificazionista, definendolo così *constructivism reconstructed*. Infatti nella dimensione intuizionista verificare un enunciato consiste nel trovare una prova (*proof*) che lo renda valido. La logica filo-indipendente, che in termini di verificazione fa uso della ricerca di elementi (*a*,*b*,*c*, etc…) in un universo di un modello, costituisce nella prospettiva hintikkiana la controparte pratica della Teoria della dimostrazione, ovvero l'ambito in cui l'approccio intuizionista trova il massimo di applicabilità rimanendo però in una dimensione classica o meglio *iperclassica*. Il senso di questa aggettivazione è da rintracciare nell'idea che la logica in questione non rifiuta *tout court* la visione classica (es. la non validità del terzo escluso) della logica. Anzi ritiene che la base sia proprio l'impostazione classica che attraverso opportuni accorgimenti può anche ritenere sensato e ammissibile il fallimento del terzo escluso. Ecco come Hintikka, alla luce dell'acquisizione della *logica filo-indipendente*, introduce la sua proposta di revisione del costruttivismo:

> It might seem that the results reached in the earlier chapters of this book [= *The Pinciples of Mathematics Revisited*] entail a virtual

> *Aufhebung* of all constructivistic approaches to the foundations of mathematics. This loaded Hegelian term is appropriate because it almost looks as if I had perhaps vindicated the constructivistic approach to logic and mathematics by refuting it[71].

Hintikka oltre a considerare la teoria semantica dei giochi come il tentativo di giustificare (*to vindicate*) il costruttivismo è come se avallasse la possibilità di ritenere il costruttivismo stesso come *logica giusta à la* Dummett. E' del tutto evidente però che il punto di partenza è completamente opposto al costruttivismo dummettiano:

> We took notice of the problem [= attribuire significato in termini di uso] what metalanguage is to be used in giving a semantic explanation of a logic to one whose logic is different. A metalanguage whose underlying logic is intuitionistc now appears a good candidate for the role, since its logical constants can be understood, and its logical laws acknowledged, without appeal to any semantic theory and with only a very general meaning-theoretical background. If that is not the *right* logic, at least it may serve as a medium by means of which to discuss other logics[72].

Infatti Dummett, appartenete alla schiera degli universalisti, ritiene centrale l'individuazione e la ricerca di un linguaggio universale. Qualora ciò no fosse possibile o il linguaggio stesso ancora non disponibile la logica intuizionista diventerebbe il tramite per arrivare alla fondazione di una logica giusta.

Sostenendo la giustezza o la capacità di mediazione dell'intuizionismo per la fondazione di una logica munita di una giustificazione delle

---

[71] *PMR*, p. 211.

[72] M. Dummett, *The Logical Basis of Methaphysics*, (d'ora in poi *LBM*), Harvard U.P., Cambridge, Mass. 1991, p. 300; tr. it., *La base logica della metafisica*, a cura di E. Picardi, Il Mulino, Bologna 1996, p. 416.

costanti e delle leggi, Dummett promuove la "giustezza" di una logica priva di apparato semantico. Ed è con una notevole forza che in questo contesto viene indicato l'intuizionismo come momento fondante di tale logica. Hintikka non accetta tale *base* ed anzi, fondando la logica filo-indipendente proprio su una semantica, si pone sul fronte opposto a quello indicato da Dummett e non può fare a meno di contestare l'approccio intuizionista in ogni suo aspetto. Si apre dunque un dibattito tra Dummett e Hintikka che coinvolge primariamente il concetto di verità e tutte le conseguenze che ne derivano in ambito logico. Infatti significato, giustificazione, dimostrazione, negazione e terzo escluso sono al centro delle questioni sulla fondazione sia della logica filo-indipendente sia dell'intuizionismo e, più in generale, di tutto il costruttivismo. Queste sono dunque le tematiche che veicolano il dibattito sulla teoria del significato che, in ultima analisi, è da assimilare alla più fondante questione tra approccio realista o antirealista alla logica. Al fine di entrare nel merito di tale questione è utile partire e soffermarsi sulle tematiche inerenti l'approccio antirealista di Dummett che a nostro avviso riteniamo uno dei più validi interlocutori sulle tematiche in oggetto.

4.2. Significato e legge logica

La Teoria del significato in logica diventa centrale a partire dal significato delle costanti logiche. Dummett ritiene opportuno precisare tutti i significati delle parole di una teoria del significato (*a meaning-theory*) prendendo con ciò le distanze dalla Teoria del significato (*the* *theory of meaning*) considerata come teoria della conoscenza[73]. Ciò che preme indagare in un linguaggio logico come tale non è tanto il problema della conoscenza ma il significato dei propri simboli e il loro uso. Sul problema del significato di una costante logica, ritenuto la base d'indagine per una teoria del significato[74], Michael Dummett inizia col porsi due questioni sulla giustificazione[75] di una legge logica :

a)Is it possible to justify a logical law?
b)Is it possible to show it to be devoid of justification? [76]

Il chiarimento delle due domande viene affidato al concetto di *legge logica*, prendendo come punto di riferimento una delle leggi più controverse nella storia della logica. Si tratta di considerare il concetto di legge logica classica appellandosi (non casualmente) alla legge del terzo escluso o *tertium non datur*. Nelle considerazioni preliminari di Dummett la legge stipula la verità degli asserti che hanno la forma $p \vee \neg p$, formalmente,

$$\mathrm{V}(p \vee \neg p)$$

precisando che l'interesse per una legge logica non risiede nella constatazione che essa stipuli la falsità o la verità come nel caso sopra formalizzato.
Secondo questa visione l'analisi di una legge logica nell'ambito di un qualsiasi processo deduttivo dunque non si concentra su ciò che essa

---

[73] Ivi, tr. it., p. 41.
[74] Ivi, p. 84-86.
[75] Tutta la pratica dimostrativa, specialmente quella matematica, può essere ritenuta - secondo Gabriele Lolli - come una ricerca della giustificazione delle asserzioni [cfr. G. Lolli, *La dimostrazione in matematica: miti ed equivoci millenari*, in V. Andò e G. Nicolaci, *Processo alla prova, Carocci*, Roma 2007, pp.77-90].
[76] *LBM*, p. 184. (tr. it. p. 259).

asserisce o esprime in termini di verità o falsità. Se in tale processo tenessimo conto del valore semantico della legge inevitabilmente orienteremmo l'analisi verso la capacità espressiva di quella legge. In altri termini la legge esprimerebbe il proprio contenuto in termini di verità, mentre la legge è da ritenersi utile e funzionale solo in un processo inferenziale; "dobbiamo intendere il termine <<legge logica>>... in relazione a un principio d'inferenza"[77] chiarisce Dummett. Invece il potere espressivo di una proposizione formulato in termini di "esistenza di strategia vincente" è il "paradigma" dell'impostazione che Hintikka usa per la logica filo-indipendente. Così questo tipo di analisi ricade nell'ambito di una teoria semantica della logica, mentre l'interesse che Dummett ha per una legge logica riguarda l'approccio alla legge mediante l'esclusione di una teoria semantica a favore di una teoria sintattica della legge, che andremo a chiarire nel sottoparagrafo successivo.

4.3. Sintassi e semantica

Comprendere meglio la distinzione tra teoria sintattica e teoria semantica risulta utile per una possibile distinzione, almeno nelle linee generali, tra i concetti di sintassi e semantica in riferimento ad una teoria. Se T è una teoria qualsiasi, essa in genere viene considerata come formata da un linguaggio L (insieme di elementi teorici razionalmente collegati tra di loro), il quale si riferisce ad una realtà di oggetti O. Detto ciò, possiamo affrontare l'analisi della teoria T sotto due aspetti distinti: il primo consiste nell'analizzare i rapporti, i nessi,

---

[77] *Ibidem.*

le relazioni, tra gli elementi che costituiscono il linguaggio L della teoria T, indipendentemente dal fatto che gli elementi appartenenti ad L abbiano la proprietà di esprimere qualcosa riferendosi alla realtà degli oggetti O; il secondo aspetto, invece, consiste nell'analizzare il linguaggio L di T, tenendo presente che esistono delle relazioni tra L e gli oggetti O. Il primo punto di vista, cioè l'analisi delle relazioni tra gli elementi che appartengono al linguaggio della teoria, costituisce la sintassi di T, mentre il secondo punto di vista, che considera le relazioni tra gli elementi del linguaggio e gli oggetti a cui tale linguaggio si riferisce, viene a costituire la semantica di T. Possiamo riassumere gli ambiti di sintassi e semantica di una teoria T come segue:

T = L sintassi

T = L, O semantica.

Come nota Evandro Agazzi, entrambi gli ambiti fanno parte della cosiddetta metateoria[78]. Allora diventa lecito chiedersi quale sia la teoria di cui la sintassi e la semantica costituiscono la metateoria, e questo per coglierne la differenza. La comprensione della differenza tra teoria e metateoria è possibile considerando la teoria deduttiva come composta da quattro fondamentali aree. La prima è costituita dalla *morfologia logica* contrassegnata dal concetto di linguaggio formale. La morfologia si interessa di indagare le relazioni e le proprietà di questi linguaggi attraverso l'analisi dell'alfabeto e le specificazioni delle sue espressioni. La seconda area è quella che può chiamarsi dell'*ontologia logica*: essa è dominata prevalentemente dal concetto di mondo. Per mondo si intende un complesso organizzato di enti a cui si riferiscono i

[78] E. Agazzi, *Introduzione ai problemi dell'assiomatica*, Vita e Pensiero, Milano 1961, p. 6.

linguaggi formali quando parlano. La terza e la quarta area sono costituite dai già considerati concetti di *semantica* e *sintassi*. Al centro della semantica logica sta il concetto di realizzazione di un linguaggio formale in un mondo. Per realizzazione qui intendiamo ciò che abbiamo prima evidenziato parlando di teoria semantica, riferendoci ai nessi tra linguaggio L e mondo O. In altri termini si potrebbe dire che il concetto di realizzazione concerne il concetto di "interpretazione", poiché i nessi tra linguaggio formale e mondo si possono esprimere mediante un'interpretazione. Si potrebbe dire che la differenza tra realizzazione e interpretazione consiste in una differente posizione del punto di vista. È possibile precisare ulteriormente il concetto di teoria semantica considerandola come l'ambito che si interessa dei rapporti tra morfologia logica e ontologia logica. La sintassi logica è caratterizzata dal concetto di sistema formale. La nozione fondamentale di un sistema formale è data dal concetto di dimostrazione formale e più precisamente dall'imporre un concetto di dimostrazione al linguaggio formale. Quest'ultimo ambito è quello che si presta in maniera naturale ad essere considerato il paradigma di ricerca della *Proof-Theory* e in particolar modo è il concetto in sé di dimostrazione il perno su cui ruota l'intera teoria. Una più articolata e puntuale distinzione dei quattro ambiti che caratterizzano la teoria deduttiva vengono esposti da Casari[79] il quale, dopo avere chiarito le differenze tra sintassi e semantica, conclude sottolineando che uno dei fondamentali compiti della teoria deduttiva è quello di trovare i nessi tra sintassi e semantica: "il concetto di teoria deduttiva risulta dalla compresenza su un linguaggio formale di un meccanismo dimostrativo da un lato e di un concetto semantico di teoria dall'altro; la determinazione del modo in cui si rapportano fra loro gli aspetti

[79] E. Casari, *Introduzione alla logica*, UTET, Torino 1997 p. 61-63.

semantici e quelli sintattici costituisce uno dei temi fondamentali dell'intera teorizzazione". La conclusione di Casari è come se in qualche modo rimettesse in discussione le schematizzazioni precedentemente costruite, quasi a voler sottolineare quanto sia precario ogni tentativo di semplificazione.

Gli Universalisti sono più propensi ad occuparsi della sintattica e delle procedure formali dimostrazione mentre i Modellisti della semantica.

4.4. Significato, dimostrazione e armonia

Poste le differenze sostanziali tra sintassi e semantica nell'ambito della teoria deduttiva, si può tentare di precisare meglio il ruolo della verità logica in una deduzione. In particolare Dummett sottolinea che la *verità logica* nell'ambito di una teoria deduttiva si pone come mezzo di legittimazione di altre leggi.

> The interest of a logical truth lies wholly in the fact that it can be appealed to in the course of deductive reasoning; that is to say, in the presence of one rule of inference, it will license another[80].

La relazione della verità logica con altre verità deve però essere garantita dalle regole d'inferenza che ne giustificano la correttezza formale o validità. Notiamo che il concetto di verità logica è qui considerato rispetto alla proprietà che essa ha di mettere in relazione altre verità. La verità logica quindi nell'ambito di una teoria sintattica viene considerata in base alla sua funzione relazionale. Tale funzione, come abbiamo detto sopra, è regolata da alcuni principi: l'importanza di una verità logica dipende dunque dalla analisi previa di quei

[80] *LBM*, p. 184., tr. it. p. 259.

principi che regolano le relazioni tra verità. A partire da queste assunzioni la ricerca dello stesso Dummett non può che indirizzarsi verso questioni concernenti la natura e il ruolo delle regole d'inferenza. Ecco perché il momento fondante dell'approccio ad una logica, sia per la *logica filo-indipendente* sia per l'intuizionismo non può che derivare da considerazioni fondazionali sulle regole per le costanti logiche. Questo compito è svolto da Hintikka nel momento della stipulazione delle regole per la *teoria semantica dei giochi* e conseguentemente anche per la *logica filo-indipendente*, che sono state trattate nel cap. 2 e qui brevemente richiamate:

La teoria semantica dei giochi si basa su un tipo di gioco a due persone o agenti, il *verificatore* e il *falsificatore* che rispettano le seguenti Regole per le costanti logiche del linguaggio:

i) **R0**: Se S_i è un simbolo proposizionale (p del Linguaggio L), non ci sono movimenti, nessuno effettua delle scelte. Dunque, se $M \models S_i$ (o $M \models p$) allora chi vince è il *verificatore*, invece se $M \not\models S_i$, allora sarà il *falsificatore* a vincere;

ii) $\mathbf{R}\vee$: ($S_1 \vee S_2$). Il verificatore inizia con la scelta di S_i (i= 1 o 2). E il gioco continua come in S_i, cioè se il verificatore arriva a $M \models S_i$ vince, altrimenti perde [Bisogna trovare almeno un elemento vero per verificare ($S_1 \vee S_2$)];

iii) $\mathbf{R}\wedge$ **:** ($S_1 \wedge S_2$). In questo caso è il falsificatore che inizia a scegliere S_i (i= 1 o 2), continuando il gioco come in S_i. [Si falsifica ($S_1 \wedge S_2$) se si trova almeno un elemento falso];

iv) **R. E.**: $(\exists x)S(x)$. Inizia il verificatore con la scelta di un membro di δ (o anche, ma è la stessa cosa, con la scelta di un individuo dal dominio di M $dom(M)$). Se l'individuale scelto è b, allora il resto del gioco prosegue con $S(b)$, cioè il verificatore vince se si dà $M \models b \in S$;

v) **R. U.**: $(\forall x)\, S(x)$. Funziona come R. E. solo che questa volta è il falsificatore ad operare per primo;

vi) **R¬:** Se $\neg S_i$ il gioco è come in S_i, tranne per il fatto che si interscambiano i ruoli dei due giocatori. Infatti, se $\neg S_i$ è come $\neg p$ non esistono movimenti, ma chi vince è il falsificatore, poiché si dà $\neg p$ se $M \models \neg p$, quindi per $\neg S_i$ vince il falsificatore se $M \models \neg S_i$, altrimenti, se $M \not\models \neg S_i$ sarà il verificatore a vincere.

Le relazioni tra gli oppositori e la relativa esposizione delle regole possono essere viste come fondate su un "dubbio" che l'avversario insinua sull'affermazione del proponente.

Un oppositore può mettere in dubbio la verità di una congiunzione $S_1 \wedge S_2$, dubitando in tal senso della verità, ad esempio, di S_2. Può altresì dubitare della verità di una disgiunzione $S_1 \vee S_2$, chiedendo quale delle due tra S_1 e S_2 sia vera. Può dubitare della verità di una negazione $\neg S$ asserendo che S_1 è vera al posto di $\neg S$.

Per l'intuizionismo Dummett non può che rifarsi alle "tavole dimostrative" che Arendt Heyting espone nel suo celebre *Intuitionism: an introduction*[81], schematizzate nel modo seguente:

---

[81] A. Heyting, *Intuitionism: An Introduction, North-Holland*, Amsterdam 1956, 1966 2ed. p. 92 e sg. Come nota Göran Sundholm [cfr. G. Sundholm, *Proof Theory and Meaning*, in Handbook of Philosophical Logic, a cura di D. Gabbay e D. Guenthner, Reidel Publishing Company, 1986, vol. III, pp. 471-506 in particolare pp. 485-489], il legame tra le costanti logiche e il concetto di dimostrazione impostato da Heyting diventa risorsa ispiratrice per i propositi di Dummett, cioè, al fine di stipulare una teoria costruttivista del significato: "it is the corresponding constructive "proof-table" of Heyting that offers a possibility for Dummett's positive proposal" [*Ivi*, p. 485], che qui viene esposta.

la dimostrazione di una proposizione	è data da
$S_1 \wedge S_2$	una dimostrazione di S_1 e una dimostrazione di S_2
$S_1 \vee S_2$	una dimostrazione di S_1 o una dimostrazione di S_2
$S_1 \supset S_2$	un metodo per ottenere dimostrazioni di S_2 da dimostrazioni di S_1
$\perp$	niente
$\forall x \in DS(x)$	un metodo che per ogni individuo *a* in *D* fornisca una dimostrazione di $S(a)$
$\exists x \in DS(x)$	un individuo *a* in *D* e una dimostrazione di $S(a)$

Questo quadro espositivo sulle costanti manifesta il carattere costruttivista dell'intuizionismo, derivante principalmente dalla considerazione che il *significato* delle costanti logiche proviene dalla possibilità di *costruire* dimostrazioni per gli enunciati nella congiunzione e nella disgiunzione; mentre, per le altre costanti il significato si restringe alla ricerca della costruzione di metodi per ottenere dimostrazioni per gli enunciati in questione. Considerare l'intuizionismo come una teoria costruttivista del significato deriva dalle definizioni che lo stesso Heyting esplicita: "a proposition *p* always demands a *construction* with certain given properties; it can be asserted as soon as such a *construction* has been carried out. We say in this case that the *construction proves the proposition p and call it a proof* *of p*"[82]. Il carattere costruttivista è talmente interno all'intuizionismo da risultarne per certi versi paradigmatico come ha sottolineato Troelstra .[83]

Risulta utile notare che per definire i quantificatori bisogna possedere un metodo di ricerca che *rintracci* un certo individuo da un dominio *D*. Ed è forse su questo punto che la posizione dummettiana, e in generale quella intuizionista, sul significato delle costanti logiche può essere messa in crisi dall'approccio *gamico*.

Prima di passare però al confronto tra logica filo-indipendente e intuizionismo bisogna entrare più in dettaglio sul significato delle costanti logiche secondo l'approccio di Dummett.

In particolar modo essendo la posizione di Dummett molto vicina a quella di Dag Prawitz[84], risulta abbastanza proficuo interpretare i lavori del primo mediante i risultati e gli studi condotti dal secondo che tra l'altro, com'è noto, trae spunti dalle importanti ricerche di Gentzen sulla deduzione naturale.

Quindi diventa necessario indirizzare l'indagine sul significato verso quell'ambito della logica che ha come fulcro la nozione di dimostrazione, propriamente detta *Teoria della dimostrazione*.

---

[82] A. Heyting, Intuitionism, cit. p. 92 (corsivi miei)

[83] "logic represents [...] a reflection on general principles about constructions and constructive proofs" [A. S. Troelstra, *Principles of Intuitionism*, Springer-Verlag Berlin 1969, p. 5]. Heyting sottolinea inoltre come l'asserzione $p \vee q$ possa essere asserita solo se possiamo asserire una delle due proposizioni: o p o q. In altri termini per dimostrazione costruttiva bisogna intendere che per la disgiunzione è possibile costruire la dimostrazione per p o quella per q. Infatti una proposizione può essere asserita solo se è stato possibile produrre una costruzione di essa. La costruzione della dimostrazione che prova (*proves*) la proposizione *p* può legittimamente chiamarsi dimostrazione di *p* (*proof of p)*. In sintesi, per la logica intuizionista il significato della disgiunzione $p \vee q$, ma anche della congiunzione, risiede interamente nel concetto di *costruzione di una dimostrazione*.

[84] È abbastanza noto come Dummett abbia dichiarato apertamente l'utilizzo delle ricerche del logico svedese. Ecco come si esprime nel 1991 a tal proposito su Dag Prawitz: "I owe a great deal to his [Prawitz] pioneering research into natural deduction and into relation between theories of meaning and logical systems so formalised, and regard him as one of the few colleagues with whose ideas I am in nearly perfect sympathy". [M. Dummett, *Reply to Prawitz*, in The Philosophy of Michael Dummett, a cura di B. McGuinness e G. Oliveri, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1993, p. 292.].

Un'analisi del concetto di significato in *Teoria della dimostrazione*[85] non può prescindere da uno studio sulle regole d'inferenza, anzi, per buona parte è proprio l'analisi delle regole che alimenta le questioni e il dibattito sul significato. Per completezza d'esposizione è opportuno offrire un quadro delle regole d'inferenza usate per la deduzione naturale, perché la deduzione naturale, così come è presentata da Gentzen, costituisce il retroterra storico di ogni futura trattazione delle regole in *Teoria della dimostrazione* ed è dall'impostazione delle regole per la deduzione che bisogna prendere le mosse per una corretta analisi[86].

---

[85] Una preziosa antologia introduttiva alla teoria della dimostrazione è il libro, *Teoria della dimostrazione*, a cura di D. Cagnoni, Feltrinelli, Milano 1981. Per una introduzione agli elementi tecnici di base si veda D. van Dalen, *Logic and Structure*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1980, 1994 3ed. Introduzione più poderosa e corredata di ampi apparati tecnici, nonché dei maggiori risultati raggiunti negli ultimi anni è, A. S. Troelstra e H. Schwichtenberg, *Basic Proof Theory*, Cambridge U.P. 2000, 2ed e S. Negri, e J. von Plato, *Structural Proof Theory*, Cambridge U.P. 2001. Per un approccio storico alle problematiche sul significato, si veda G. Sundholm, *Proof Theory and Meaning*, in Handbook of Philosophical Logic, cit., pp. 471-506 e, per una introduzione sull'origine storica della teoria, si veda F. J. Pelletier, *A Brief History of Natural Deduction*, in History and Philosophy of Logic, 20 (1999) pp. 1-31, ed. Taylor & Francis LTD, London. Su significato e teoria della dimostrazione, E. Moriconi, *Dimostrazioni e significato. Michael Dummett - Dag Prawitz - Per Martin-Löf*, FrancoAngeli, Milano 1993. Le due opere fondamentali su cui poggia l'intera teoria rimangono comunque D. Prawitz, *Natural Deduction: A Proof-Theoretical Study*, Almqvist & Wiksell, Stockholm 1965 e G. Gentzen, *Untersuchugen über das logische Schliessen*, in Mathematische Zeitschrift, vol. 39, (1935), pp. 176-210; tr. ingl. *Investigations into Logical Deduction*, in The Collected Papers of Gerhard Gentzen, a cura di M. E. Szabo, North-Holland, Amsterdam 1969, pp. 68-103; tr. it. *Ricerche sulla deduzione logica*, in D. Cagnoni, (a cura di) Teoria della dimostrazione, cit. pp. 77-116.

[86] Cfr. G. Gentzen, *Untersuchugen über das logische Schliessen*, cit., p. 186; tr. ingl., *Investigations into Logical Deduction*, cit., p. 77, tr. it., *Ricerche sulla deduzione logica*, cit., p. 88. Il quadro delle regole d'inferenza per la logica minimale è preso da D. Prawitz, *Ideas and Results in Proof Theory*, in J. E. Fenstad, Proceedings of the second Scandinavian Logic Symposium, North-Holland, Amsterdam 1971, pp. 235-307; tr it., *Idee e risultati nella teoria della dimostrazione*, in D. Cagnoni, (a cura di), Teoria della dimostrazione, cit., pp. 127-20, tr. it. p. 133. Un'altra esposizione di tali regole si può trovare in D. Prawitz, *Natural Deduction*, cit., p. 20. Non esistono sostanziali differenze tra i due schemi di regole, sennonché quello che si trova in *Natural Deduction* presenta le regole per l'assurdità la logica intuizionista $\bot$i e per la logica classica $\bot$c nello stesso schema iniziale, mentre nella trattazione presente in *Ideas and Results in Proof Theory*, Prawitz aggiunge allo schema iniziale M le due regole per l'assurdità in un secondo tempo, mettendo meglio in luce le differenze fra i tre sistemi. Un approfondimento delle relazioni tra i sistemi di logica minimale, intuizionista e classica, *M*, *I* e *C* si trova in A. S. Troelstra e H. Schwichtenberg, *Basic Proof Theory*, cit., pp. 48-50.

$$\frac{A \quad \mathrm{B}}{(A \wedge B)} \wedge I \qquad \frac{(A \wedge B)}{A} \wedge E_d \qquad \frac{(A \wedge B)}{B} \vee E_s$$

$$\frac{A}{(A \vee B)} \vee I_d \qquad \frac{B}{(A \vee B)} \vee I_s \qquad \frac{(A \vee B) \quad \begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B] \\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C} \vee E$$

$$\frac{\begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ B\end{matrix}}{(A \supset B)} \supset I \qquad \frac{A \qquad (A \supset B)}{B} \supset E$$

$$\frac{\begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg A} \neg I \qquad \frac{A \qquad \neg A}{\bot} \neg E \qquad \frac{\bot}{D}$$

Lo schema di regole per la deduzione è costituito da *I*-regole ed *E*-regole per le varie costanti logiche del linguaggio L_d. Il segno $\bot$ indica una proposizione costantemente falsa e da ciò deriva l'assunzione che $\neg A = A \supset \bot$. In altri termini la negazione di una proposizione può essere espressa mediante un'implicazione.

Ciò che comporta la caratterizzazione delle regole per i propositi di Dummett è la possibilità di giustificare la regola in questione mediante alcuni requisiti che scaturiscono dalle relazioni tra introduzioni ed eliminazioni per le costanti. Le condizioni che Dummett propone per *giustificare* sono l'*unicità* e l'*armonia*.

La funzione generale che hanno questi due requisiti è quella di giustificare una costante logica, perché è la possibilità di stabilire completamente il suo significato che la giustifica. Giustificando una costante le si attribuisce infatti un significato; ma specularmente attribuendole un significato si compie anche l'operazione di giustificarla. Si tratta di una circolarità tra giustificazione e significato, che a prima vista porterebbe a considerare i due elementi come caratterizzati dalla stessa funzione, cosicché si perverrebbe all'immediata conclusione che entrambi i termini possano essere sinonimi. Tuttavia la sovrapposizione dei due termini viene ostacolata dalla stessa regola che mediante i requisiti giustifica e nell'*atto* del giustificare le attribuisce significato. In questo senso la significatività è conseguente alla giustificazione, poiché non avviene mai un percorso inverso che va dal significato alla giustificazione. Infatti giustificare una costante logica equivale ad avere un modo canonico per attribuirle un significato, cosicché il significato è fortemente conseguente alla giustificazione. Questi *modi canonici* che aiutano la stipulazione del significato sono leggi che necessariamente si autogiustificano non facendo ricorso né ad altro al di fuori dell'ambito dimostrativo-teoretico né ad altre leggi o regole:

> If, then, there is to be a general proof-theoretic procedure for justifying logical laws, uncontaminated by any ideas foreign to proof theory, there must be some logical laws that can be stipulated outright *initially* without the need for justification, *to serve as a base* for the proof-theoretic justification of other laws. Although it is not true of logical laws generally that we are entailed simply to stipulate that they shall be treated as valid, there must be certain laws or systems of laws of which this holds good. Such laws will be "*self-justifying*": we are entailed simply to stipulate that they shall be regarded as holding, because *by so doing we fix, wholly or partly, the meanings of the logical constants* that they govern, without thereby

> risking any conflict with the already given meaning of other expressions[87].

Mentre nell'ambito di una teoria semantica dei giochi (GTS) il significato delle costanti è attribuito mediante una semantica per movimenti; Dummett invece non può fare altro che rinunciare a qualsiasi tipo di semantica, poiché l'autogiustificazione richiede una *stipulazione di principio* che, ricadendo nell'ambito delle stesse regole d'inferenza, preclude l'accesso ad una nozione di significato che consideri la verità semantica di una regola. In altri termini fissare il significato equivale a ritenere che la regola sia giustificata mediante la *canonicità di un modo che la renda valida*. Il primo passo da compiere è dunque quello di stipulare tali modi canonici per le varie costanti logiche che si autogiustificano. Sulla linea di Gentzen l'autogiustificazione viene presentata da Dummett mediante le regole d'introduzione[88] per le costanti logiche, che Prawitz, tramite un'operazione di assemblamento con la funzione costruttiva delle tavole dimostrative dell'intuizionismo, chiama "inferenze canoniche". Dice, infatti, Gentzen che

> to every logical symbol $\wedge, \vee, \forall, \exists, \supset, \neg$, belongs precisely one inference figure which "introduces" the symbol - as the terminal symbol of a formula - and one which "eliminates" it [...]. The introductions represent, as it were, the "definitions" of the symbols concerned, and the eliminations are no more, in the final analysis, than the consequences of these definitions[89]

[87] *LBM*, p. 245-246, (corsivi miei).
[88] Cfr. G. Gentzen, *Investigations into Logical Deduction*, cit., pp. 80-81.
[89] *Ibidem*, p. 80.

Le figure d'inferenza giustificano le regole attribuendole un significato mediante un *atto introduttivo* che le definisce. Prawitz, in "perfetta simpatia" con Dummett, secondo il quale

> i modi canonici di stabilire un asserto (*statement*) A * B come vero devono armonizzarsi (*match*) con le conseguenze che l'accettazione dell'asserto come vero canonicamente comporta e viceversa i modi canonici di stabilire l'asserto devono essere armonizzati dalle conseguenze.[90]

Dunque le regole d'inferenza (regole d'introduzione) assumono la seguente forma:

$$\dfrac{\overset{D}{S_1 \quad S_2}}{(S_1 \wedge S_2)} \wedge I \qquad \dfrac{\overset{D}{S_1}}{(S_1 \vee S_2)} \vee I \qquad \dfrac{\overset{\overset{[S_1]}{D}}{S_2}}{(S_1 \supset S_2)} \supset I$$

$$\dfrac{\overset{D(a)}{S(a)}}{\forall x S(x)} \forall I \qquad \dfrac{\overset{D}{S(t)}}{\exists x S(x)} \exists I,$$

dove *D* sta per un contesto di derivazione. Ora, le regole d'inferenza, anche se definite mediante introduzioni, non possono in alcun modo essere giustificate poiché il significato della costante introdotta è *parziale*. In altri termini i modi canonici d'inferenza, non considerando il valore consequenziale dell'introduzione, non possono attribuire un completo significato alle costanti.

---

[90] *LBM*, p. 247.

Come Gentzen mette in luce, alle definizioni deve necessariamente seguire una *conseguenza* che sintatticamente non può che manifestarsi nelle regole di eliminazione per le costanti. Dummett, sulla scorta di tali acquisizioni, ritiene che la giustificazione delle regole si ottiene mediante una precisa relazione tra introduzioni ed eliminazioni[91]. Ed è nell'atto di verifica di questa relazione che viene espresso completamente il significato di una costante logica. Già nello stesso Gentzen è possibile rintracciare l'importanza della relazione tra "definizioni" e "conseguenze": infatti Prawitz tiene a ribadire che

> what makes Gentzen's systems especially interesting is the discovery of a certain symmetry between the atomic inferences, which may be indicated by saying that the corresponding introductions and eliminations are inverses of each others[92]

La simmetria di cui si sta parlando emerge dalla considerazione che regole d'inferenza corrispondenti stanno in una relazione d'inversione. Ma in che senso si può ad esempio dire che la regola per una costante qualsiasi *c*-I sia l'inversa di *c*-E? Il senso è determinabile all'interno della considerazione secondi cui, in accordo con le definizioni delle regole d'inferenza date da Gentzen, la regola d'introduzione dia la definizione del connettivo, mentre la regola di eliminazione sia la conseguenza della corrispondente regola d'introduzione.

Ne consegue, sia per Prawitz che per Gentzen, che una regola di eliminazione sia di fatto l'eliminazione del connettivo della corrispondente regola d'introduzione. Ciò è possibile solo presupponendo che la premessa maggiore (la premessa che contiene il

---

[91] *Ivi*, pp. 246-251.

[92] D. Prawitz, *Ideas and Results in Proof Theory*, in J. E. Fenstad, (a cura di), Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium, cit., pp. 235-307, p. 246; tr. it in D. Cagnoni, (a cura di),*Teoria della dimostrazione*, cit., pp. 128-204, p. 139).

connettivo da eliminare) della regola di eliminazione sia la conclusione di una regola d'introduzione.

In linea generale il senso dell'inversione può essere esprimibile nei termini secondo i quali una regola di eliminazione sia la conclusione (e qui riceve spiegazione anche il senso del modo in cui, secondo Gentzen, una regola di eliminazione sia la conseguenza di una regola d'introduzione) della corrispondente regola d'introduzione.

Gentzen, anche se non formula esplicitamente il principio d'inversione[93] e mai parla nei suoi scritti di inversione o principio d'inversione, ha il merito di porre le basi teoriche che faranno da sfondo ai risultati ottenuti da Dummett e Prawitz.

Il tipo di relazione tra introduzioni ed eliminazioni, ovvero la considerazione che la regola di eliminazione sia la conclusione della corrispondente regola di introduzione, esprime il senso in cui diciamo che regole d'inferenza corrispondenti sono inverse.

Il principio d'inversione dunque esprimerà anche la relazione che esiste tra regole d'inferenza. Dummett ne dà una peculiare connotazione

---

[93] L'espressione *principio d'inversione* è stata introdotta da Paul Lorenzen per la prima volta nel 1950 [cfr. D. Prawitz, *Natural Deduction*, cit., p. 33 e A. S. Troelstra e H. Schwichtenberg, *Basic Proof Theory*, cit., p. 90] e appare nell'articolo, P. Lorenzen, *Konstruktive Begrundung der Mathematik, in Mathematische Zeitschrift*, vol. 53, (1950), pp. 162-201, soprattutto in analogia con quanto asserisce Gentzen sulle regole d'inferenza.

mediante il concetto di *armonia* che trova il suo compito più immediato nell'atto stesso del giustificare[94].

L'esistenza di armonia tra I-regole ed E-regole deve essere aderente al concetto generale di armonia che, come abbiamo visto sopra, è dato dalla relazione "armoniosa" tra i modi canonici di stabilire come una proposizione sia vera (l'applicazione di I-regole) e le conseguenze a cui va incontro l'avere stabilito tale proposizione come vera (l'applicazione di E-regole).

Il requisito dell'armonia, per una costante logica *c* è soddisfatto quando, nel corso di una deduzione, dopo avere applicato una regola d'introduzione per una generica costante *c-I*, possiamo fare seguire immediatamente ad essa *c-E*. Dummett chiama questa procedura che avviene nel corso di una deduzione, *picco locale* (*local peack*) per *c*.

Nel calcolo della deduzione naturale le *I*-regole e le *E*-regole standard per $\wedge$ sono in armonia se nel corso di una deduzione facciamo seguire immediatamente all'applicazione di I-$\wedge$ una delle due E-$\wedge$.

L'argomento diventa più chiaro mediante l'esempio di picco locale per una costante logica, come proposto dallo stesso Dummett[95]:

---

94 "An introduction rule gives, so to say a definition of the constant in question [...] an elimination rule is only a consequence of the corresponding introduction rule, which may be expressed somewhat as follows: at an inference by an elimination rule, we are allowed to 'use' only what the principal sign of the major premiss 'means' according to the introduction rule for this sign" Questa è una traduzione di G. Gentzen, *Untersuchugen über das logische Schliessen, in Mathematische Zeitschrift*, vol. 39 (1935) p. 189, parafrasata dallo stesso Prawitz, che spesso ricorre nei suoi scritti con l'intento di far guadagnare una forte connotazione storica e teoretica ai suoi risultati in *Teoria della dimostrazione* [cfr. D. Prawitz, *Towards a Foundation of a General Proof Theory*, in P. Suppes et alii (a cura di), *Logic, Methodology and Philosophy of Science IV: Proceedings of the Fourth International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science*, Bucharest, 1971, North-Holland, Amsterdam 1973, pp. 225-250 in particolare pp. 232-235]. Inoltre, sempre la medesima traduzione dello stesso passo di Gentzen appare nel `65 in D. Prawitz, *Natural Deduction*, cit., p. 33, inserita in una nota in seguito ad una definizione informale del principio d'inversione, per sottolineare in questo modo come il principio di inversione sia stato "intuito" dallo stesso Gentzen.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix} D & D \\ S_1 & S_2 \end{matrix}}{(S_1 \wedge S_2)} \wedge I}{S_1} \wedge E.$$

In questo tipo di inferenze vengono usate soltanto *I*-regole ed *E*-regole, cosicché dunque anche le due premesse iniziali S_1 e S_2 devono essere considerate come conclusioni dell'applicazione di *E*-regole, le quali in questo caso sono rispettivamente E_d per S_1 e E_s per S_2. Infatti nel caso che seguente,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix} D \\ S_1 \wedge S_2 \end{matrix}}{S_1} \quad \dfrac{\begin{matrix} D \\ S_1 \wedge S_2 \end{matrix}}{S_2}}{(S_1 \wedge S_2)}}{S_1}$$

che si evince essere una "complicazione" del precedente esempio, è evidente come le due premesse S_1 e S_2 di $\wedge I$ derivino da regole di eliminazione, le quali per definizione sono *conseguenze* della previa applicazione di regole d'introduzione.

Il concetto sostanziale di questa puntualizzazione è che anche le premesse S_1 e S_2 dell'esempio che propone Dummett sono conclusioni dell'applicazione di un picco locale.

Com'è possibile vedere siamo di fronte ad un procedimento circolare tra introduzioni ed eliminazioni a cui Prawitz dà il nome di *espansione*

---

[95] Cfr. *LBM*, p. 248, (tr. it. 346 e sg). Bisogna notare che Dummett non usa le regole d'inferenza delle costanti logiche nella notazione dei sequenti ma limita l'uso delle regole d'introduzione e di eliminazione all'ambito della sola deduzione naturale. Questo implica che nelle inferenze non avremo sequenti, ma enunciati singoli denotati da lettere A, B, C, etc. Per le regole d'inferenza nella notazione dei sequenti, vedi il cap. *Natural Deduction in Sequents Style*, in A. S. Troelstra e H. Schwichtenberg, *Basic Proof Theory*, cit., pp. 41-42, oppure dello stesso Dummett, *Elements of Intuitionism*, Oxford U.P. 1977, 2ed. 2000, pp. 122-124.

immediata[96]. Il tipo di espansione in questione nel corso della deduzione si ripete continuamente se facciamo seguire regole di eliminazione a regole d'introduzione per una stessa costante.

La circolarità o ridondanza che ricorre in questo caso particolare d'inferenza può essere livellata poiché è chiaro che l'applicazione delle regole di eliminazione, immediatamente dopo quelle d'introduzione "annulla", nel senso che rende *inutile*, la stipulazione di queste ultime. Infatti anche nell'inferenza del primo caso si era già arrivati alla conclusione senza bisogno di ricorrere alla deviazione (*detour*) di $\wedge E_d$. Dunque quando non è necessario applicare la regola di eliminazione, ovvero quando diventa inutile ricorrere alla deviazione per arrivare alla conclusione, è possibile livellare il picco per la costante logica in considerazione.

Se facciamo un altro esempio di picco locale per la costante $\supset$, le leggi di introduzione e di eliminazione di questa costante saranno in armonia come segue:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[S_1]\\ D\\ S_2\end{matrix}}{(S_1 \supset S_2)} \quad \dfrac{D}{S_1}}{S_2}$$

La regola di eliminazione come nei casi precedenti segue la regola d'introduzione. È chiaro che se lo scopo è arrivare alla conclusione S_2 si può arrivare ad essa anche tralasciando l'applicazione delle regole d'introduzione e di eliminazione.

[96]Cfr. D. Prawitz, *Idee e risultati in teoria della dimostrazione*, in D. Cagnoni, (a cura di), Teoria della dimostrazione, cit., p. 148.

Il cosiddetto livellamento dei picchi locali consiste nell'arrivare ad una conclusione di un'inferenza omettendo l'uso delle regole d'introduzione e di eliminazione che governano la costante logica in questione.

Così applicando il livellamento al picco locale per $\supset$ si avrà il seguente tipo di deduzione

$$\begin{array}{l} [S_1] \\ D \\ S_2 \end{array}$$

tramite la quale siamo arrivati alla conclusione S_2 facendo a meno dell'uso delle regole d'introduzione e di eliminazione. Le parentesi quadre indicano che S_1 sottostà ad uno scaricamento d'ipotesi. La procedura di livellamento viene anche notoriamente chiamata *normalizzazione* ed è stata introdotta, come sottolinea lo stesso Dummett, da Prawitz[97].

L'applicazione della procedura di normalizzazione è dunque nell'ambito di una *Teoria della dimostrazione* il requisito fondamentale che un connettivo deve possedere nel caso in cui venisse richiesta una giustificazione.

La normalizzazione per una costante logica garantisce sia il significato sia la giustificazione della stessa costante. In questo modo giustificazione e significato possono essere considerati come la medesima proprietà appartenente alla costante in esame.

Le regole di introduzione e di eliminazione per una costante sono in armonia se, e solo se, il picco locale per quella costante può essere

[97] Cfr. *LBM*, p. 250, (tr. it. p. 347): "Questa procedura [= il livellamento dei picchi locali] è il tipo fondamentale di passo di riduzione usato nel procedimento di normalizzazione delle dimostrazioni nella deduzione naturale. Questo procedimento è stato introdotto da Prawitz in analogia con l'operazione di Gentzen consistente nell'eliminare le applicazioni della regola del taglio nel calcolo dei sequenti".

livellato. In questo modo risulta abbastanza evidente che la dimostrazione di validità dell'inferenza dipende dal soddisfacimento di tale requisito. Ed è chiaro altresì che con la procedura di normalizzazione ci si limita soltanto ad asserire la validità formale dell'inferenza.

Se questa è la posizione assunta da Dummett in merito all'uso della procedura di normalizzazione, il suo approccio validista, in merito all'uso della normalizzazione, può ritenersi condivisibile solo se consideriamo che la proprietà principale dell'inferenza sia quella di essere valida:

> the canonical grounds for the truth of A * B will be given by the introduction rules governing it, and its canonical consequences will be drawn by means of the elimination rules governing it: it is therefore these that *must be in harmony*[98]

Il requisito dell'armonia per le regole d'inferenza dipende dalla verità che viene stabilita in primo luogo con le regole d'introduzione. L'atto di stabilire la verità di una proposizione (*to establish a statement as true)* espresso da Dummett è da intendersi nel senso di una ripresa del concetto di "definizione di una regola d'introduzione" che Gentzen aveva già usato nel 1935, sottolineando anche la relazione tra regole d'introduzione e di eliminazione.

Come già notato sia per Prawitz che per Gentzen le regole di introduzione definiscono un significato parziale della costante logica poiché vengono escluse le conseguenze delle definizioni introduttive per la costante. Tuttavia tali conseguenze vengono rese manifeste dalle regole di eliminazione.

---

[98] *Ibidem*, p. 247, (tr. it. p. 344), (corsivo mio).

Dummett con l'atto di stabilire la verità non fa altro che dare una definizione di una regola d'introduzione in termini di verità, cosicché il significato viene attribuito al connettivo in termini di asserzioni di verità. In Dummett la definizione in termini di verità del connettivo è riscontrabile sia nella definizione generale di armonia (a) sia in quella di *armonia intrinseca* (b)[99], ed è proprio mediante quest'ultimo concetto che recupera la relazione tra definizioni e conseguenze.
Attraverso il requisito di armonia intriseca emerge il carattere fortemente sintattico del significato delle costanti logiche che facendo perno sulla dialettica *definizione-conseguenza* tralascia il continuo riferimento al "dominio" a cui le variabili individuali dovrebbero fare appello. In altri termini il significato costruttivista delle costanti logiche si impernia sulle procedure di trasformazione sintattica degli enunciati tralasciando per l'appunto il ruolo del Modello.

4.4.1 Unicità

L'altro requisito atto a giustificare le leggi della logica è quello dell'*unicità*. A tal proposito Dummett usa come caso specifico un connettivo binario *, sottolineando comunque che si tratta di una nozione molto più generale. Siano i due insiemi L ed L' definiti come,

L = insieme di leggi logiche che governano un connettivo *;

---

[99] Dummett considera due diverse definizioni di armonia: (a) una definizione *generale* di armonia e (b) una definizione di armonia che concorda strettamente con le regole d'inferenza, o *armonia intrinseca*. Dummett definisce l'armonia del tipo (a) come "The canonical ways of establishing a statement A * B as true should match, and be matched by, the consequences which accepting that statement as true is canonically treated as having" [*LBM*, p. 247, (tr. it. p. 344)]. Il tipo (b) non è altro che il tipo di armonia che si evince dai riferimenti della precedente nota: " the canonical grounds for the truth of A * B will be given by the introduction rules governing it, and its canonical consequences will be drawn by means of the elimination rules governing it: it is therefore these that must be in harmony".

L' = insieme di leggi logiche ottenuto rimpiazzando in L il connettivo * con un nuovo connettivo #.

Da queste assunzioni si ottiene la definizione di unicità come segue:
*se da L e da L′ è derivabile l'equivalenza tra A * B e A # B, allora L garantisce l'unicità.*

L'unicità non è altro che l'equivalenza di due connettivi logici, se ciascuno può essere derivato dall'altro. Con il requisito dell'unicità riusciamo a stabilire un significato delle costanti logiche poiché l'insieme di leggi L che governa il connettivo *, in seguito alla garanzia dell'unicità, governerà mediante la derivabilità di L' anche il connettivo #.

Si è autorizzati dunque a stipulare un insieme di leggi logiche per una costante se si fissano mediante l'unicità i significati delle costanti[100].

Se l'insieme L invece non garantisse l'unicità avremmo da una parte * governato dalle leggi di L e dall'altra # governato dalle medesime leggi. Tuttavia poiché le due costanti non sono equivalenti secondo l'unicità potrebbero avere significati diversi.

Siamo dunque al cospetto di un altro caso in cui il significato di una legge è stipulato parzialmente, poiché L non garantisce completamente il significato della costante *, in quanto potrebbe esistere un altro connettivo governato dalle medesime leggi ma con un significato diverso.

> Lo scopo intuitivo di questo requisito [dell'unicità] è ovvio: siamo autorizzati a stipulare un insieme di leggi logiche solo se in questo modo fissiamo i significati delle costanti logiche che esse governano[101].

---

[100] *Ivi*, tr. it. p. 343.
[101] *Ibidem*.

Esiste una certa analogia tra i modi canonici delle leggi che si autogiustificano e il requisito dell'unicità che scaturisce dall'atto stesso di stabilire il significato a principio. Quindi sia per il caso dei modi canonici introduttivi sia per il requisito di unicità si ottiene solo una parzialità di significato.

Dummett tiene particolarmente a sottolineare che l'unicità non è un requisito sufficiente a stabilire completamente il significato della costante logica, poiché antecedentemente all'unicità vi è il requisito dell'armonia, il quale considera le relazioni strette tra regole d'introduzione e di eliminazione per una costante.

In altri termini non si assiste solo ad una stipulazione di significato a principio, ma sussiste una relazione tra definizioni di principio e conseguenze delle stesse definizioni. Inoltre il requisito dell'armonia sembra avere un certo primato rispetto all'unicità per il fatto che, contestualmente ad un sistema deduttivo, tratta le relazioni tra le regole d'inferenza per una qualsiasi costante prima ancora che vengano considerate le relazioni tra le costanti logiche stesse. Le regole d'inferenza secondo Dummett devono aderire, in rapporto al significato che Belnap attribuisce al connettivo "plonk", ad una forma particolare di "consistenza" che coinvolgerà le regole stesse per la costante in questione.

Un esempio classico di definizione è costituito dall'introduzione di un connettivo binario *tonk* che è governato dalle regole d'introduzione per $\vee$ e dalle regole di eliminazione per $\wedge$, avendo così le seguenti regole d'inferenza per *tonk*:

$\frac{A}{A \,\mathrm{tonk}\, B}$; $\frac{B}{A \,\mathrm{tonk}\, B}$ per le regole d'introduzione e

$\frac{A\,\text{tonk}\,B}{A}$; $\frac{A\,\text{tonk}\,B}{B}$ per le regole di eliminazione.

Il connettivo ***tonk***[102], o meglio le regole d'inferenza per tale connettivo sono contraddittorie in quanto da *A*, secondo la regola d'introduzione di sinistra, si può derivare *A tonk B* con *B* che è un enunciato qualsiasi, derivato anche dalla regola di eliminazione di destra *A tonk B/B*. La contraddizione viene manifestata dalla procedura di introdurre l'enunciato *B* tramite la regola d'introduzione e di derivarlo dopo mediante la regola di eliminazione. Ovviamente tale discorso vale anche per l'enunciato *A*, considerando come contraddittori la regola d'introduzione di destra e la regola di eliminazione di sinistra.

Per Belnap le regole d'inferenza di un connettivo all'interno di un sistema deduttivo riguardano solo ed esclusivamente quel connettivo. La proprietà che il connettivo deve soddisfare all'interno del contesto di deducibilità è l'unicità. Considerando l'unicità riferita al connettivo *plonk*, Belnap afferma che "con la caratterizzazione di plonk [cioè

---

[102] In *Analysis* vol. 21 (1960), Blackwell, pp. 38-39 apparve un articolo di poche pagine di A. N. Prior, divenuto celebre, *The Runabout Inference-Ticket*, ristampato in Philosophical Logic, a cura di P. F. Strawson, Oxford U.P., 1967; tr. it., con una nota introduttiva di Gabriele Usberti, *Il passepartout inferenziale*, in Significato e teorie del linguaggio, a cura di A. Bottani e C. Penco, FrancoAngeli, Milano 1991, pp. 253-257]. Questo lavoro è stato interpretato come un tentativo di contrastare l'uso delle inferenze per la definizione delle costanti logiche, contro ogni tentativo che non facesse uso "in principio" delle tavole di verità e che ne desse il significato in termini di vero-funzionalità. In realtà l'autore smentirà qualche anno dopo tale interpretazione [Una breve introduzione storica sulle questioni che ha sollevato l'articolo di Prior è stata pubblicata da G. Usberti, in *Significato e teorie del linguaggio*, cit., pp. 253-254]. La ricezione dell'articolo, che sembra scagliarsi contro i sostenitori dell'opinione che il significato delle costanti logiche sia dato tramite l'uso delle regole d'inferenza, è stata fruttuosa, se non altro per il fatto che si è cercato di porre rimedio ad una obiezione che potrebbe essere mossa in qualunque momento. Ma cerchiamo di vedere dettagliatamente di cosa si tratta.

L'interpretazione più utile ai nostri scopi è stata quella fatta da Nuel Belnap nel '62 [N. D. Belnap, *Tonk, Plonk and Plink*, in Analysis, vol. 22, Blackwell, 1962; ristampato in Philosophical Logic, a cura di P. F Strawson, cit.; tr. it., con una nota introduttiva di G. Usberti, in Significato e teorie del linguaggio, cit., pp. 259-266]. Una breve e chiara introduzione alla polemica tra Prior e Belnap si trova nel paragrafo 5.4 pp. 156 - 159 del libro di M. Mondadori e M. D'Agostino, *Logica*, Mondadori, Milano 1997, essa sostanzialmente pone il discorso sul fatto che, se riteniamo che il significato di una costante logica sia dato dalle regole che la governano, siamo autorizzati ad introdurre qualsiasi connettivo a nostro piacere governato da regole del tutto arbitrarie.

definito da plonk-regole] sia permesso al massimo un ruolo inferenziale; cioè che non vi possano essere due connettivi che condividono la caratterizzazione data a plonk"[103]. La proprietà dell'unicità indica che le regole d'inferenza per un connettivo appartengono solo ed esclusivamente a quel connettivo e qualora vi fosse un connettivo diverso *plink* che avesse le stesse regole d'inferenza di *plonk*, non sarebbe altro che il medesimo connettivo. Alla luce dell'unicità diventa dunque illecito stipulare un connettivo come *tonk*, il quale all'interno di un sistema deducibile non rappresenta un'estensione conservativa del sistema stesso.

Come rispondere dunque all'obiezione fatta da Prior contro la pretesa di definire il significato delle costanti logiche in termini di regole d'inferenza, se la stipulazione di tali regole è del tutto arbitraria e in alcuni casi, come il connettivo *tonk*, addirittura contraddittoria?

Belnap risponde sottolineando in primo luogo che è possibile definire i connettivi in termini d'inferenza o, come egli dice, "in terms of an antecedently given *context of deducibility*"[104].

Il significato attribuito alle costanti mediante l'uso di regole d'inferenza dipende dall'aver definito primariamente un sistema deduttivo composto da assiomi e regole strutturali. Dato un contesto di deducibilità l'insieme di regole che si possono stipulare per un connettivo, ad esempio *plonk*, risulterà essere in primo luogo un'estensione del sistema deduttivo. Considerare le leggi di *plonk* un'estensione del sistema significa secondo Belnap dare semplicemente le regole di *plonk* in base al ruolo che esse giocano nell'inferenza. In altri termini, significa dare le regole d'inferenza per il connettivo *plonk*. Tale estensione deve essere anche conservativa, deve cioè essere

[103] N. Belnap, *Tonk, Plonk and Plink*, tr. it., in A. Bottani e C. Penco, (a cura di), Significato e teorie del linguaggio, cit., p. 265.

[104] N. Belnap, *Tonk, Plonk and Plink*, cit., p. 133 (corsivo mio).

richiesta la consistenza o non-contraddittorietà all'interno del sistema deduttivo. Le *plonk*-regole devono essere considerate consistenti e nel sistema deduttivo non deve esserci spazio per l'inserimento di alcun connettivo speciale (è il caso di *tonk*, il quale, essendo governato da regole d'inferenza di due connettivi diversi, inevitabilmente manifestava un'immediata contraddizione), che non sia una estensione conservativa del sistema.

Il primato del requisito dell'armonia trova fondamento nell'obiettivo di contrastare chi, come Prior, può pensare che sia possibile stipulare arbitrariamente un connettivo governato da regole contraddittorie in partenza.

Per Dummett in altre parole la preoccupazione principale nella trattazione della giustificazione delle regole d'inferenza è di evitare che vi siano regole contraddittorie per una costante logica.

Diventa dunque altresì lecito per Dummett concentrare la ricerca verso le forme a cui le regole d'inferenza devono sottostare per evitare l'inconsistenza.

Il nostro scopo però non è trovare il modo di stabilire il significato di una costante logica che, com'è noto, è uno degli obiettivi della teoria del significato di Dummett, ma è invece quello di cercare di determinare il ruolo che hanno la verità e la validità all'interno di una regola d'inferenza, sapendo che in un ben determinato modo può stabilire anche il significato di una costante logica.

Il requisito dell'unicità non considera le relazioni tra le regole d'inferenza, ma si limita piuttosto a considerare le relazioni tra connettivi all'interno di un sistema, dando per scontato che vi sia un qualche altro requisito che governi il modo di mettere in relazione le regole d'inferenza di un connettivo.

Per questo motivo in relazione al problema della verità il requisito dell'armonia ci sembra molto più pertinente alla comprensione del modo in cui si possa stipulare il significato di una costante.

Come si è accennato in precedenza, il requisito dell'unicità non riesce a dare il significato completo delle costanti logiche, mentre quello dell'armonia riuscirebbe a soddisfare questa richiesta. Dummett, allora, può a ragione asserire che il significato di una costante *c* è "determinato dalla stipulazione delle leggi logiche fondamentali che la governano"[105].

Le leggi fondamentali che governano una costante logica *c* sono regole di *c*-introduzione e regole di *c*-eliminazione. Il requisito essenziale che una costante logica deve possedere per potere manifestare il proprio significato deve essere dato dall'armonia tra le sue regole d'introduzione e le sue regole di eliminazione in un contesto di deduzione.

Le conclusioni dummettiane metterebbero in crisi l'approccio "iperclassico" di Hintikka, se non fosse che nell'ambito della logica filo-indipendente vengono prese in considerazioni le questioni sul significato a partire dal problema verificazionista.

È la trattazione della verità mediante i diversi passaggi informativi per la GTS e per la logica filo-indipendente che contribuisce secondo Hintikka ad un "ripensamento" delle regole d'inferenza tramite le regole di un gioco per i vari connettivi. Anche se su questo punto le posizioni sembrano divergere ampiamente, ciò che potrebbe ridurre la distanza al fine di mediare tra un approccio sintattico ed uno semantico è il concetto di esistenza. In particolare possiamo ritenere che sussiste un comune denominatore tra il problema della dimostrazione e del significato per il costruttivismo e la definizione di

[105] *LBM*, p. 247 (tr. it. p. 344).

verità per la logica filo-indipendente. Questo elemento comune è dato proprio dal concetto di esistenza che per entrambi gli approcci si concretizza nel concetto di *esistenza di una dimostrazione*.

4.5. Verità come uso e significato costruttivista

È noto come, nell'ambito di una teoria classica della verità come quella del *Tractatus* di Wittgenstein, il compito di definire il significato di una costante logica venga affidato all'uso delle tavole di verità per la costante in questione.

Il significato della proposizione molecolare $S_1 \wedge S_2$ è dato dalla seguente tavola:

$S_1 \quad S_2$	$S_1 \wedge S_2$
V V	V
V F	F
F V	F
F F	F

Il significato della costante $\wedge$ è espresso in termini di funzioni di verità: infatti, la proposizione molecolare $S_1 \wedge S_2$ è vera quando sono veri entrambi gli enunciati atomici congiunti, cioè $VS_1 \text{ e } VS_2$, mentre in tutti gli altri casi essa è falsa.

Con il metodo delle tavole di verità si può definire il significato di tutte le costanti della logica proposizionale, $\wedge, \vee$, $\forall, \exists, \supset, \neg$ in termini di vero-funzionalità[106].

L'operazione di Gentzen di usare le regole d'inferenza si inscrive nell'*intentio* di produrre un metodo alternativo a quello vero-funzionale. Il sistema di introduzioni ed eliminazioni assicura il significato delle costanti logiche, non già ricorrendo alle tavole di verità, ma mediante regole d'inferenza che esprimono la loro portata significativa mediante l'uso.

Entrambi i modi definiscono il significato delle costanti logiche, ma quello vero-funzionale affonda le radici in una logica assiomatica come la logica classica, mentre il sistema gentzeniano trova terreno fertile nei sistemi logici non assiomatizzati come la logica intuizionista.

La formalizzazione classica consiste nell'enunciare degli assiomi generali come punto di partenza e nel derivare da essi teoremi o leggi che vengono giustificati o dimostrati in base agli assiomi stessi. La logica intuizionista invece viene formalizzata dando solo un insieme di regole strutturali e d'inferenza prescindendo dalla enunciazione di qualsiasi assioma primitivo.

Come ha sottolineato Carlo Penco[107], sia le tavole di verità alla Wittgenstein sia le regole d'inferenza di Gentzen costituiscono una procedura di decisione per il calcolo proposizionale, perché ricorrendo all'uso di questi due procedimenti si può decidere se un insieme finito di enunciati sia contraddittorio o meno.

Sempre secondo Penco, entrambi i modi hanno la proprietà di definire il significato di una costante logica in termini d'uso, esplicitando in un

---

[106] Cfr. L. Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus*, Einaudi, Torino 1995, p. 58 e sg., in particolare Proposizioni 4.31 e 4.442.

[107] Cfr. C. Penco, *Significato, uso, procedure*, in Lingua e stile, n. 27 (1992), pp. 87-99, p. 89.

senso molto chiaro il significato del motto del Wittgenstein maturo: "il significato è l'uso"[108].

Se le tavole di verità definiscono il significato in base alle condizioni di vero-funzionalità (nel caso di $S_1 \wedge S_2$, il significato della costante è dato dalla funzione, cioè (VV,V) (VF,F) (FV,F) (FF,F)), per Gentzen il significato della congiunzione viene affidato all'uso delle regole d'inferenza sopra enunciate. Penco pone l'attenzione sul fatto che l'uso definitorio di tipo vero-funzionale rappresenta solo un "uso in linea di principio" delle costanti logiche, mentre il secondo metodo, che definisce il significato delle costanti solo nella pratica inferenziale secondo i modi d'uso tipici del calcolo della deduzione naturale introdotto dallo stesso Gentzen, può essere considerato come un metodo di "uso effettivo" delle costanti logiche.

Se si ritiene con Wittgenstein che il significato sia l'uso, per una qualsiasi costante logica avremo però un significato in linea di principio e un significato effettivo, usando rispettivamente o le tavole di verità o le regole d'inferenza. L'uso delle regole d'inferenza ha il pregio di esplicitare al meglio la tesi "*il significato è l'uso*", poiché nella deduzione naturale il significato dei connettivi si comprende nell'esercizio dell'uso delle regole stesse. Gli studi condotti da Michael Dummett e Dag Prawitz si sono indirizzati verso una sempre maggiore esplicitazione della tesi wittgeinstaniana e volti alla ricerca di metodi che abbiano la funzione di provare che sia possibile definire il significato delle costanti logiche mediante delle procedure d'uso effettive. In tal senso diventa addirittura necessario prescindere da

[108] Ibidem.

qualsiasi metodo - come le tavole di verità - che abbia la funzione di stabilire il significato di principio[109].

Per Göran Sundholm l'interpretazione dummettiana della tesi "il significato è l'uso", consiste nel ritenere che il significato di una costante logica sia manifestato completamente (*fully*) dall'uso di essa, non tenendo conto così di nessuna definizione iniziale che ne programmi le condizioni d'uso (caratteristica quest'ultima tipica delle tavole vero-funzionali)[110].

Dummett aderisce pienamente al progetto volto a dar conto di come sia possibile comprendere il significato di una costante logica esclusivamente tramite l'uso di essa, cosicché le procedure di normalizzazione di Dag Prawitz, nonché il requisito di armonia, contribuiscono fortemente ad esplicitare l'idea di Gentzen[111].

L'operazione di stabilire la verità può essere considerata come un ottimo punto di partenza per trovare i nessi tra sintassi e semantica in una regola d'inferenza. Sembra corretto dunque per un verso ritenere l'inferenza legata alla proprietà formale della validità, ma per altro verso tentare anche di considerare il problema del "contenuto" di essa espresso in termini di verità.

---

109 Per un'introduzione all'interpretazione dummettiana della tesi "il significato è l'uso" vedi la nota introduttiva di Carlo Penco all'articolo di Michael Dummett, *Che cosa comporta il richiamo all'uso per la teoria del significato*, in C. Penco e A. Bottani, (a cura di), *Significato e teorie del linguaggio*, FrancoAngeli, Milano 1991, pp. 135-139. Sempre dello stesso Penco nel medesimo volume è interessante la nota introduttiva all'articolo di Prawitz, *Logica intuizionista: una sfida filosofica*, pp. 173-175. Un altro studio dell'interpretazione di Dummett della tesi wittgensteiniana si trova in E. Moriconi, *Dimostrazioni e significato. Michael Dummett-Dag Prawitz-Per Martin-Löf*, FrancoAngeli, Milano 1993, p. 11 e sg.

110 Cfr. G. Sundholm, *Proof Theory and Meaning*, in Handbook of Philosophical Logic, cit., p. 480: "Furthermore, this implicit knowledge of meaning, or more precisely, of the condition for applying the key concept to individual sentences, must be fully manifested in use. *This is Dummett's transformation of Wittgenstein's dictum that meaning is use*."(corsivo mio).

111 Il senso più profondo, in cui si sono visti confluire i risultati di più ampio respiro condotti da Dummett e Prawitz, scaturiscono secondo Penco dal merito di aver "collegato il punto di vista del secondo Wittgenstein al punto di vista che il logico Gentzen andava sviluppando negli anni '30, contemporaneamente alle riflessioni di Wittgenstein" [C. Penco, *Significato, uso, procedure*, cit. p. 88].

Abbiamo già visto come l'armonia intrinseca di Dummett non sia altro che il teorema di normalizzazione scoperto da Dag Prawitz nel 1965 e pubblicato per la prima volta nel suo *Natural Deduction*.

Come lo stesso Dummett dichiara, il livellamento dei picchi locali è infatti la procedura che il logico svedese utilizza nelle dimostrazioni di normalizzazione per la deduzione naturale.

In merito alle relazioni tra livellamento dei picchi locali e normalizzazione Dummett scrive:

> We may thus provisionally identify harmony between the introduction and elimination rules for a given logical constant with the possibility of carrying out this procedure, which we have called the levelling of local peaks. The procedure is the fundamental type of reduction step used in the process of normalizing natural deduction proofs. This process was introduced by Dag Prawitz as an analogue of Gentzen's operation of eliminating applications of the cut rule in the sequent calculus [*Hauptsatz* di Gentzen]. A normalized natural deduction proof is defined simply as one to which no further reduction step can be applied[112].

Dummett apre verso due direzioni fondamentali di ricerca riguardo alla teorizzazione di Dag Prawitz. La prima è orientata alla trattazione del teorema di normalizzazione: la chiarezza e la precisione con cui Prawitz affronta l'analisi delle procedure di normalizzazione ha comportato per noi un alto grado di rigore che scaturisce dalla trattazione del teorema di normalizzazione. Affrontare il teorema di normalizzazione, seguendo gli scritti di Prawitz, ha avuto come obiettivo quello di guadagnare attraverso un'esposizione rigorosa del

---

[112] *LBM*, p. 250, (tr. it. p. 347).

teorema la possibilità di una comprensione più profonda ed analitica dell'armonia intrinseca o livellamento dei picchi locali di Dummett.

La seconda direzione, a cui apre la stessa citazione di Dummett, è orientata ad un'analisi dei presupposti storici e delle idee che hanno portato Prawitz alla formulazione del teorema di normalizzazione e che traggono "ispirazione" da Gentzen. Il riferimento è al principio d'inversione che, come si è visto, "Gentzen aveva certamente intravisto, ma che non era in grado di formulare"[113].

E ancora il principio d'inversione, oltre ad asserire l'esistenza dell'invertibilità tra regole d'inferenza, enuncia anche che, in una inferenza, regole inverse non dicono nulla. Se in una deduzione abbiamo una conclusione ottenuta mediante un'eliminazione preceduta dalla corrispondente introduzione non si ottiene nulla di più di quello che già si era ottenuto con l'introduzione. L'esempio del dummettiano picco locale per la costante $\wedge$ sembra aderire abbastanza bene al senso in cui regole d'inferenza invertibili non dicono nulla. La conclusione del picco locale per $\wedge$ è preceduta dalle regole d'inferenza per $\wedge$ le quali ovviamente sono invertibili. La conclusione della regola $\wedge E$ non ottiene nulla di più di ciò che già si era ottenuto con la $\wedge I$.

Ecco come Prawitz esprime questo concetto:

> La conclusione ottenuta da una eliminazione non asserisce niente di più di ciò che essa ha già dovuto ottenere se la premessa maggiore dell'eliminazione è stata inferita da un'introduzione [corrispondente][114].

E ancora:

[113] Cfr. C. Mangione e S. Bozzi, *Storia della logica da Boole ai nostri giorni*, cit., p. 706.
[114] D. Prawitz, *Ideas and Results in Proof Theory*, cit. p. 246.

> Una dimostrazione della conclusione di una eliminazione è già "contenuta" nelle dimostrazioni delle premesse, quando la premessa maggiore è inferita mediante una introduzione[115].

La prima citazione sottolinea come non si ottenga nulla di più in una conclusione che derivi da regole inverse, mentre la seconda fa esplicito riferimento al contenuto di dimostrazioni.

L'ultima citazione, infatti, esprime la proprietà secondo cui, in un'inferenza, le regole che si trovano in uno stato d'invertibilità non ottengono nulla in termini di contenuto, in quanto la conclusione di tale inferenza è contenuta nelle premesse della regola di eliminazione ovvero nella regola d'introduzione. Diventa così opportuno porre una questione riguardo alle regole d'introduzione, e più in generale riguardo all'inferenza nell'ambito di una teoria sintattica: l'inferenza esprime contenuto? Si potrebbe porre meglio la questione ricorrendo al cosiddetto paradosso dell'inferenza formulato nel 1934 da Cohen e Nagel. Tale paradosso nasce dall'attribuire all'inferenza due proprietà tra loro incompatibili:

a) l'applicazione di una inferenza logicamente valida sembra presupporre che la verità della conclusione sia sempre contenuta nella verità delle premesse;

b) l'applicazione di un'inferenza logica è un metodo utile a guadagnare nuova conoscenza.

L'aporia consiste nel chiedersi come l'inferenza possa guadagnare nuova conoscenza, se il contenuto della conclusione espresso in termini di verità è già contenuto nelle premesse. La paradossalità dell'inferenza viene fuori se si considerano incongruenti validità (l'inferenza è valida se la conclusione deriva dalle premesse) e utilità.

---

115 *Ibidem.*

Il paradosso dell'inferenza risulta essere più chiaro, riguardo all'aporeticità tra validità e utilità, nella formulazione degli stessi Nagel e Cohen:

> If in an inference the conclusion is not contained in the premise, it cannot be valid; and if the conclusion is not different from the premises, it is useless; but the conclusion cannot be contained in the premises and also posses novelty; hence inferences cannot be both valid and useful[116]

Il problema sostanziale dunque è: un'inferenza valida ha la possibilità di guadagnare nuova conoscenza? La risposta a tale domanda non è del tutto facile, ma è anche su questo punto che si evidenziano le differenze sostanziali tra la logica *IF* di Hintikka e il costruttivismo. Ed in particolar modo sembra che, se ci si muove solo a partire da un ambito sintattico di approccio alla logica, tale risposta non può che essere negativa, mentre una apertura verso la semantica non può che provare a darne una risposta in chiave positiva.

Risulta quindi abbastanza netta la posizione di Prawitz: infatti, le regole d'inferenza che rispondono al principio d'inversione non sono utili all'acquisizione di nuova conoscenza, restringendo così la proprietà delle regole d'inferenza ad essere considerate solo come *valide*

---

[116] M. R. Cohen e E. Nagel, *An introduction to logic and Scientific Method*, Routledge and Kegan Paul, London 1934, pp. 173-176. Sul paradosso dell'inferenza vedi G. Sundholm, *Proof Theory and Meaning*, cit., in particolare p. 487 e sg. Un tentativo di superare la paradossalità inferenziale è stata proposta da Marcello D'Agostino. Il quale facendo leva anche sullo "Scandalo della deduzione", argomentazione questa avanzata da Hintikka, propone una nuova "visione informativa" della deduzione logica mediante un concetto di "semantica informativa" per gli operatori logici [M. D'Agostino, *Depth-Bounded Logic for Realistic Agents*, L&PS – Logic & Philosophy of Science, Vol. XI, No. 1, 2013, pp. 3-57]. In sintesi viene proposta una teoria della dimostrazione non standard per la logica classica al fine di giustificare il sintetico a priori kantiano. E' il tentativo di considerare il concetto di 'informazione nuova' all'interno delle strettoie della teoria della dimostrazione mediante una "profondità" (*depht*) informativa opportunamente indicata come *depht-boundend*, in cui gli operatori logici hanno un significato sia "operativo" che informativo [ivi. p. 39].

e prive di contenuto informativo. In particolare per Prawitz l'inutilità informativa di un'inferenza scaturisce dal suo sottostare al principio d'inversione. Se dunque da regole d'inferenza inverse non si ottiene nulla di nuovo, qual è la conseguenza a cui va incontro l'inutilità espressa dal principio d'inversione? Prawitz sostiene:

> I shall consider a more direct way of making the inversion principle precise. Since it says that nothing new is obtained by an elimination immediately following an introduction, it suggest that such sequences of inferences can be dispensed with[117].

Il principio d'inversione secondo Prawitz sembrerebbe autorizzare l'eliminazione di regole inverse, sostenendo in tal modo che il teorema di normalizzazione si fonda proprio sul principio d'inversione che garantisce la normalizzazione. Ed è proprio su questo punto che si raggiunge la convergenza maggiore tra l'*Hauptsatz* di Gentzen e la *normalizzazione* di Prawitz.

L'*Hauptsatz* per Gentzen è la riduzione di tutte le derivazioni in una forma normale:

> Der Hauptsatz besagt, daß sich jeder rein logische Beweis auf eine bestimmte, übrigens keineswegs eideutige, Normalform bringen läßt. Die wesentlichsten Eigenschaften eines solchen Normalbeweises lassen sich etwa so ausdrücken: Er macht keine Umwege[118]

---

[117] D. Prawitz, *Ideas and Results in Proof Theory*, cit., p. 246.

[118] G. Gentzen, *Untersuchugen über das logische Schliessen, in Mathematische Zeitschrift*, vol 39 (1935), p. 177, tr. It., in D. Cagnoni, (a cura di) *Teoria della dimostrazione*, cit., p. 78 "L'Hauptsatz afferma che ogni dimostrazione puramente logica si può ridurre ad una determinata, anche se non unica, forma normale. Possiamo forse esprimere le proprietà essenziali di una tale dimostrazione normale dicendo: non è ridondante"

L'obiettivo di Gentzen è quello di costruire un sistema deduttivo in cui tutte le dimostrazioni possano essere ridotte in una forma normale, ma è un obiettivo raggiungibile solo se si presuppone un sistema di regole d'inferenza fondato su quello che Prawitz chiamerà principio d'inversione. Un sistema di tal genere è ad esempio la logica minimale *M* usata da Prawitz, perché essa risulta essere l'unica logica che abbia tutte le regole d'inferenza corrispondenti in una relazione di perfetta inversione. Quest'ultima proprietà non appartiene invece né alla logica intuizionista *I* né a quella classica *C*. Per Prawitz insomma solo la logica minimale[119] si fonda propriamente sul principio d'inversione.

---

[119]La logica minimale, isolata da Johansson nel 1936 [cfr. C. Mangione e S. Bozzi, Storia della logica da Boole ai nostri giorni, cit., p. 702 e segg.], presenta i connettivi per le regole d'inferenza: ∧,∨, ∀,∃,⊃, e ⊥ Il simbolo ⊥ sta per una proposizione assurda costante o falsa e sostanzialmente il simbolo ⊥ sottolinea che la falsità in questi sistemi va intesa come assurdità. Da questa ulteriore precisazione è possibile definire la negazione di una proposizione come equivalente all'implicazione dell'assurdità ⊥: "we assume that first order languages contain a constant ⊥ for absurdity (or falsehood) and that ¬A is understood as shorthand for A⊃ ⊥" [D. Prawitz, Ideas and Results in Proof Theory, cit., p. 241, (tr. It. p.134).]. In logica minimale infatti vale dunque l'equivalenza:¬A = A⊃⊥. Le regole d'introduzione e di eliminazione per la negazione diventano allora casi particolari delle regole d'inferenza per ⊃. La riduzione delle regole per la negazione a quelle per l'implicazione è possibile solo assumendo l'equivalenza iniziale ¬A = A⊃⊥. Le regole d'inferenza per la negazione avrebbero avuto tutt'altra forma se non si fosse postulata l'equivalenza tra la negazione di A e l'implicazione dell'assurdità. Infatti se si omette l'equivalenza ¬A = A⊃⊥ dal sistema M, si ottengono le regole d'introduzione e di eliminazione per NJ (deduzione naturale per la logica intuizionista dei predicati) introdotto da Gentzen nel 1935. In NJ le regole d'inferenza per la negazione sono: la reductio ad absurdum per la regola d'introduzione, ([A]…⊥/¬A) e per la regola di eliminazione (A ¬A/⊥), cioè l'ex falso quodlibet. Gentzen definisce il significato di ¬E sottolineando che, "(A ¬A/⊥) indica una contraddizione e come tale non può essere vera (legge di contraddizione). Ciò si esprime formalmente con la figura di inferenza ¬E, dove ⊥ designa 'la contraddizione', 'il falso'" [Gentzen, G. Ricerche sulla deduzione naturale, in Teoria della dimostrazione, a cura di D. Cagnoni, cit. p. 89. È Dummett che chiama la regola di eliminazione della negazione intuizionista ex falso quod libet: "The intuitionistic elimination rule [for negation] is the ex falso quodlibet", LBM, p. 291, (tr. it. p. 403)]. L'opportunità di richiamare l'attenzione verso le regole d'inferenza per la negazione in NJ nasce dal fatto che esse sono, per così dire, la "matrice" delle regole d'inferenza per la negazione in M. Come si noterà, infatti, se si rimpiazza il ¬A, che occorre nelle due regole, con A⊃⊥, si ottengono le regole d'inferenza per la negazione in M che diventano casi particolari dell'implicazione. Prawitz in Natural Deduction in poche battute mette in evidenza le differenze sostanziali tra M, I e C: "The differences between classical, intuitionistic, and minimal logic have a simple and illuminating characterization in the systems of natural deduction. For deductions in minimal logic, we may use only the introduction and elimination rules for sentential connectives and quantifiers. For deductions in intuitionistic logic, we may use all these rules and in addition the ⊥i-rule. For deductions in classical logic, we may use all the inference rules including the ⊥c-rule (note that the ⊥i-rule is a special case of the ⊥c-rule)" [D. Prawitz, *Natural Deduction*, cit., p. 21]. Se si vuole estendere il sistema M a quello per il calcolo della deduzione naturale I bisogna aggiungere alle regole d'inferenza di M la regola

Ciò non vieta di pensare che anche Gentzen, pur non conoscendo la logica minimale (la logica minimale è stata isolata da Johansson nel 1936, mentre l'articolo di Gentzen, *Untersuchugen über das logische Schliessen*, è del '35), abbia potuto fondare il suo *Hauptsatz* su quello che sarà chiamato principio d'inversione.

La lettura del gentzeniano *Hauptsatz* fatta da Prawitz orienta verso l'idea che il fondamento delle procedure di normalizzazione non possa essere che il principio d'inversione. Sostiene infatti Prawitz:

> [Il principio d'inversione] is fundamental for the sequel and gives a result for system of natural deduction that is equivalent to the Gentzen's Hauptsatz for the calculus of sequents. The central idea of Gentzen's proof of the Hauptsatz can be said also to be based on the inversion principle[120].

intuizionista dell'assurdità $\perp$i ($\perp$/A) [cfr. ibid., p. 20, e *Ideas and Results in Proof Theory*, cit., p. 242, "By adding the rule $\perp$i (intuitionistic absurdity rule) $\perp$/A where A is to be atomic and different from $\perp$, we get the system of natural deduction for (first order) intuitionistic logic I"]. Come riporta il Casari [cfr. E. Casari, *Introduzione alla logica*, UTET, Torino 1997, p. 249] la regola intuizionista dell'assurdità è classicamente riconosciuta come la "regola di Duns Scoto" che diventa l'unica regola necessaria per differenziare il sistema di regole della logica classica da quello intuizionista. Inoltre, la regola $\perp$i, sempre secondo il Casari, può essere considerata come una regola di eliminazione per $\perp$, brevemente $\perp$E, sottolineando così che la negazione in I gode soltanto della eliminazione e non della introduzione. In tale regola è possibile derivare la proposizione atomica A da un asserto assurdo (falso) costante, ponendo la restrizione che A sia diverso da $\perp$.

Il passaggio dalla logica M a quella classica C si ottiene eliminando $\perp$i da I ed aggiungendo ad esso la regola classica dell'assurdità $\perp$c:([¬A]…$\perp$)/A). Va messo in evidenza che per il passaggio da I a C, la regola $\perp$i potrebbe anche non essere omessa se la si considera come un caso particolare di $\perp$c [Per una panoramica sul ruolo della negazione cfr. S. Galvan, *Non contraddizione e terzo escluso. Le regole della negazione nella logica classica, intuizionistica e minimale*, FrancoAngeli, Milano 1997]. Un'altra operazione non deve essere tralasciata nel passaggio dal sistema I a quello C. Per ottenere C bisogna omettere le regole d'inferenza per $\vee$ ed $\exists$ che possono essere definiti facendo ricorso rispettivamente ai connettivi $\neg$ ed $\wedge$, per definire la disgiunzione $\vee$, e $\neg$ e $\forall$ per definire il quantificatore esistenziale $\exists$. Si tratta della nota procedura di definizione contestuale per logica classica del primo ordine in cui valgono le due equivalenze $A \vee B =_{df} \neg(\neg A \wedge \neg B)$ per la disgiunzione e $\exists x A =_{df} \neg\forall\neg A$ per il quantificatore esistenziale $\exists$ [cfr., C. Mangione e S. Bozzi, *Storia della logica da Boole ai nostri giorni*, cit., p.705].

[120] D. Prawitz, Natural Deduction: A Proof Theoretical Study, cit., p. 34.

Il principio d'inversione dunque riveste un ruolo di particolare importanza in una teoria della dimostrazione e questo acquisterà maggiore evidenza grazie all'analisi delle conseguenze applicative di questo principio. In particolare Prawitz associa il concetto di dimostrazione a quello di derivazione.

> It is suitable to represent the proofs as derivations written in tree form. The top formulas of the tree are then the assumption, and the other formulas of the tree are to follow from the one(s) immediately above by one of the inference rules that formalizes the atomic inferences [...]. A formula A in the tree is said *depend* on the assumptions standing above A that have not been closed by some inference preceding A. The open assumptions of a derivation are the assumptions on which the last formula *depends*[121].

Prawitz considera la dimostrazione una derivazione a forma d'albero in cui le formule alla sommità dell'albero vengono chiamate assunzioni, mentre le restanti formule dipendenti dalle assunzioni sono legate ad esse tramite regole d'inferenza. La differenza tra Prawitz e Dummett sta nel fatto che il primo chiama formule ciò che il secondo chiama verità logiche.

In definitiva il punto essenziale di contatto tra i due risulta evidente se si considera il concetto di dimostrazione. Sia per Prawitz che per Dummett nella dimostrazione bisogna mantenere una distinzione tra gli elementi (formule in Prawitz e verità logiche in Dummett) che sono

---

[121] D. Prawitz, *Ideas and Results in Proof Theory*, in Proceedings of the second Scandinavian Logic Symposium, cit., p. 240, (tr. it., p. 132): "È opportuno rappresentare le dimostrazioni come derivazioni scritte in forma d'albero. Le formule alla sommità dell'albero sono allora le assunzioni e ogni altra formula dell'albero deve seguire da quella (o quelle) immediatamente sopra mediante una delle regole d'inferenza che formalizzano le inferenze [...]. Una formula A in un albero è detta *dipendere* dalle assunzioni che stanno sopra A e che non sono state chiuse da qualche inferenza che precede A. Le assunzioni aperte di una derivazione sono le assunzioni da cui *dipende* l'ultima formula" (corsivi miei).

legati tra di loro e i principi (regole d'inferenza) che hanno la proprietà di mettere in relazione tali elementi. In particolare *tale relazione si esplicita in una dipendenza* che sembrerebbe escludere qualsiasi passaggio informativo proprio a vantaggio di un legame tra assunzioni e conclusioni che viene garantito da una procedura prettamente sintattica.

L'importanza della distinzione su menzionata emerge dal considerare il concetto di validità di una verità logica. La validità può essere definita solo se si mantiene la distinzione tra regole d'inferenza e legge logica. In una deduzione una qualsiasi legge logica è valida se e solo se essa è legata, in base alle regole d'inferenza, a leggi precedenti che figurano nella stessa deduzione. Se nel corso di una deduzione le relazioni che intercorrono tra leggi logiche sono giustificate da regole d'inferenza, allora le leggi vengono considerate come valide. Il modo in cui le leggi vengono relazionate e quindi il concetto stesso di validità dipendono pesantemente dalle regole d'inferenza.

Mantenendo tutti gli accorgimenti sopra menzionati, si profilano due possibilità di studio distinte: la prima possibilità consiste nel comprendere come una regola d'inferenza possa riuscire a validare una legge logica; la seconda, a mio avviso più impegnativa, suggerisce il tentativo di indagare in che modo una regola d'inferenza, indipendentemente dal fatto che abbia la proprietà di validare una legge, sia essa stessa valida. Ponendo la seconda possibilità nei termini di una domanda ci si chiederebbe: in che modo la regola d'inferenza, tenendo presente la funzione dimostrativa, può essa stessa essere dimostrata? Ci si troverebbe di fronte ad una *petitio principii*, la cui circolarità consisterebbe nel chiedersi come le regole d'inferenza possano essere dimostrate essendo esse stesse strumento di dimostrazione. Le caratteristiche della circolarità e della dipendenza delle leggi logiche (secondo quanto è stato detto sul significato di validità) dalle regole d'inferenza spinge verso l'abbandono della prima possibilità di approccio a favore piuttosto dell'analisi delle regole d'inferenza in se stesse: le leggi infatti dipendono dalle regole d'inferenza nel senso specificato, cosicché l'attenzione si dovrà concentrare su queste ultime.

Le due domande di apertura: (a) "è possibile giustificare una legge logica?" e (b) "è possibile mostrare che essa è priva di giustificazione?" hanno quindi bisogno di un'ulteriore precisazione. Se le leggi logiche dipendono dalle regole d'inferenza allora le domande possono essere riformulate come segue:

(a) È possibile giustificare una regola d'inferenza?

(b) È possibile mostrare che essa è priva di giustificazione?

La questione sul significato delle costanti logiche cade dunque nell'ambito della *giustificazione della deduzione* come tentativo di trovare una risposta a queste due domande. L'idea generale è quella di trovare un metodo che possa legittimare o giustificare le regole d'inferenza, prescindendo da qualsiasi analisi che consideri il significato contenuto nella regola che si sta cercando di dimostrare.

L'obiettivo è comunque quello di giustificare le regole d'inferenza da un punto di vista sintattico senza tener conto di una teoria semantica, per cui diventa ancora più chiara la ragione che spinge Dummett ad interessarsi solo della validità di una legge logica e non del suo contenuto:

> the laws of intuitionistic logic appear capable of being justified proof-theoretically and this means that the meanings of the intuitionistic logical constants can be explained in a very direct way *without any apparatus of semantic theory* [...] its [il riferimento è

> all'intuizionismo] logical laws acknowledged *without appeal to any semantic theory*[122].

Sembrerebbe a questo punto che si assista ad un ritorno al punto di partenza e precisamente alla stipulazione del significato delle costanti logiche: un percorso che parte dalle costanti e ritorna alle costanti stesse mediante l'acquisizione di canoni deduttivi con l'obiettivo volto a rinforzare il carattere sintattico che si vorrebbe attribuire alle costanti logiche.

In particolare una possibilità di analisi costruttivista analizza il significato delle costanti logiche a partire dalla relazione che sussiste tra dimostrazione e proposizione (*sentence)*. Si tratta dell' approccio al problema della giustificazione mediante la *Type Theory*[123] di cui il maggior esponente è Per Martin-Löf.

Il punto di partenza per la costruzione della sua *Type Theory* è costituito dalla stipulazione di due regole I) e II) della forma:

I) $S_1 \, vera, \ldots., S_n \, vera \Rightarrow Sprop$

II) $S_1 \, vera, \ldots., S_n \, vera \Rightarrow Svera.$

La I) asserisce che *S* è una proposizione, la II) che essa è vera. La relazione sostanziale tra I) e II) è che per poter asserire la verità *S* di II), dobbiamo primariamente avere la possibilità di riconoscere che *S* sia una proposizione; solo dopo aver inferito *Sprop* mediante I) possiamo stabilire *Svera*.

---

[122] *LBM*, pp. 299-300, (corsivi miei), (tr. it., pp. 415-416).

[123] Per una esposizione della sua *Type Theory* si veda P. Martin-Löf, *On the Meanings of the Logical Constants and the Justification of the Logical Laws*, in Atti degli incontri di logica Matematica, (1985), vol. 2, Dipartimento di matematica, Università di Siena, ristampato in Nordic Journal of philosophical Logic, vol. 1, Scandinavian U.P., Stockholm 1996, pp. 11-60. Il programma di Martin-Löf consiste nel trovare dei metodi che abbiano la proprietà di stabilire il significato delle costanti logiche e giustificare le regole inferenziali che governano le costanti in questione.

Tale relazione, che potremmo chiamare di dipendenza di II) da I), è caratterizzata dalla nozione più generale che, per arrivare a stabilire la verità di un enunciato dobbiamo darne anche la stipulazione come proposizione.

Se si segue questa generale impostazione la costruzione delle regole d'inferenza dovrà avere due procedure distinte: una che segua il principio espresso da I) e l'altra che segua quello espresso da II).

Tutte le regole d'introduzione e di eliminazione standard (nel caso di Martin-Löf della logica intuizionista) dovranno essere composte da enunciati primariamente asseriti come proposizioni. Ogni *I*-regola ed *E*-regola, per un qualsiasi connettivo *c*, è conseguente all'avere stabilito che tutti gli enunciati che formano *c*-*I* ed *c*-*E* siano stati stipulati come proposizioni.

Il primo passo da fare quindi per potere costruire le *I*-regole e le E-regole per un connettivo, è quello di applicare il principio I) a tutti i suoi enunciati. Applicando I) agli enunciati avremo costruito le cosiddette regole di formazione. Esse hanno la funzione di stabilire ad esempio che gli enunciati S_1 e S_2, che serviranno successivamente alla formulazione di *I*-regole ed *E*-regole, sono proposizioni. Per ogni connettivo *c* si avrà dunque una regola di *c*-formazione che precede la *c*-introduzione e la c-eliminazione.

Martin-Löf sostiene che le regole di formazione sono necessarie per la trattazione delle regole d'inferenza e di prioritaria importanza rispetto a queste ultime.

È del tutto evidente dunque che le proprietà che assume una costante logica generica *c* sono:

a) di essere riconosciuta come proposizione mediante la regola di formazione;

b) di essere asserita come vera tramite la regola d'introduzione.

Queste due procedure distinte che considerano una costante logica, prima come applicazione del principio espresso da regole di formazione per la costante e poi come applicazione delle regole d'inferenza, hanno come conseguenza che il significato della costante viene espresso dalle sue regole di formazione, mentre la sua giustificazione o validità viene data dalle regole d'introduzione e di eliminazione.
A tal proposito Martin-Löf sul significato e sulla giustificazione delle costanti logiche conclude:

> The meanings of logical constants are precisely the explanations belonging to the formation rules. And the justification of the logical constants are explanations belonging to the introduction and elimination rules[124].

Se il metodo che Martin-Löf usa per impostare la sua teoria è di considerare una costante logica sotto due procedure diverse, per quale ragione si devono accettare queste due regole come principi da cui iniziare a costruire le procedure per trattare le costanti logiche?
Un tentativo di risposta può essere formulato a partire dalla relazione tra *dimostrazione e proposizione*[125] che può venir così espressa:

a è una dimostrazione di *S*.

Tale proposizione (*sentence*) asserisce che *a* è una dimostrazione (nel senso che è un oggetto che prova l'asserzione) della proposizione *S*:

---

[124] *Ivi*, p. 18.
[125] Per uno studio costruttivista sul rapporto tra proposizione e dimostrazione si veda G. Sundholm, *Implicit Epistemic Aspects of Constructive Logic*, in Journal of Logic, Language, and Information, n 6 (1997) pp. 191-212, in particolare p. 196 e sg. "In order to understand a proposition A, one must know what its proof-objects are, that is, one must know when one has got the right to assert that [a is a proof of A]"

questo in termini di logica intuizionista equivale a dire che noi conosciamo, o comprendiamo, la proposizione S se c'è (*exists*) una dimostrazione di essa che sia un oggetto di dimostrazione (*proof-object*). Tuttavia per comprendere la proposizione S non è necessario che esista una dimostrazione di essa, ma che ci sia almeno un criterio primario che ci assicuri il riconoscimento di S come proposizione. Solo dopo essere sicuri di avere di fronte una proposizione possiamo costruire una dimostrazione a di essa.

Tale criterio che ci permette di stabilire l'enunciato S come proposizione viene individuato da Sundholm nelle condizioni d'identità (*Identity Conditions*)[126].

S è una proposizione se e solo se $a=b$, dove a e b sono dimostrazioni (*proof-objects*) di S. Questa è l'enunciazione della condizione d'identità che potremo anche formalizzare mediante le regole di formazione

$$a=b \Rightarrow S prop.$$

La formalizzazione della condizione d'identità come regola di formazione potrebbe essere una giustificazione plausibile di I) che sappiamo già avere la forma $S_1 \, vera, \ldots, S_n \, vera \Rightarrow S prop$.

La condizione d'identità ha la funzione di esprimere la caratteristica principale (quella dell'identità tra due dimostrazioni) che deve avere una dimostrazione per essere considerata dimostrazione di una proposizione. Se ci sono due dimostrazioni equivalenti ($a=b$) di un enunciato possiamo legittimamente concludere che essi dimostrano ($\Rightarrow$) l'enunciato S come proposizione (*Sprop*).

Stabilire S come proposizione non è sufficiente però ad asserire la verità di essa, perché la condizione d'identità non ci dice nulla sul

[126] Ibidem.

valore semantico della proposizione. Il compito per le costruzioni delle regole d'inferenza, che è affidato da Martin-Löf a II), può essere caratterizzato in termini di *esistenza* e più precisamente di *esistenza di dimostrazione*. La proposizione S è vera se e solo se esiste una dimostrazione di essa, cosicché il suo valore semantico dipende dalla sua dimostrabilità:

S è vera = esiste una dimostrazione (S).

Ovvero S è vera se e solo se esiste una dimostrazione. L'avere stabilito la verità di S come conseguente dall'esistenza della propria dimostrazione sottolinea la *dipendenza della verità dal concetto di esistenza*.

Il concetto di verità è dunque precedente sia allo stabilire la verità di una proposizione (*Svera*) sia all'averla stabilita come proposizione (*Sprop*).

Da questo punto di vista la priorità dell'esistenza della dimostrazione potrebbe finire per essere una buona giustificazione sia per le regole di formazione che per quelle d'inferenza. Infatti I) e II), oltre ad asserire le rispettive conclusioni, sono anche portatrici intrinseche del concetto di esistenza.

L'intrinseca "portata esistenziale" diventa manifesta se si considera la loro conclusione dopo la freccia ($\Rightarrow$) come *dipendente sempre dall'esistenza dell'antecedente*. Risulta pertinente a questo punto l'accostamento tra verità e definizione in chiave esistenziale che si avvicina alla definizione di verità in logica filo-indipendente : questa definizione, come ampiamente discusso nei capitoli 2 e 3, non può prescindere da una precisa funzione esistenziale (*funzioni di Skolem*).

Allora la logica del primo ordine sia nell'approccio costruttivista sia in quello classico diventerebbe una logica che ruota attorno al quantificatore esistenziale:

> the first order semantical games seem to be language games for quantifiers, and not for the concept of truth. This is apparently in keeping with the nature of these games of seeking and finding. The conceptual connection between quantifiers and the activities of seeking and finding is easy to appreciate, but there does not seem to be any equally natural link between semantical games and the notion of truth in general[127].

Cercare e trovare (*seeking and finding*) per Hintikka non sono altro che requisiti fondamentali della GTS, che però sono inevitabilmente inerenti al costruttivismo, proprio nella ricerca di un elemento (*object*) *a* che dimostri (*proves*) la proposizione *S*.
In particolare sul rapporto tra GTS e costruttivismo Hintikka nota che

> the rules of semantical games should likewise be acceptable to a constructivist. In order to verify an existential sentence $\exists x S(x)$ I have to find an individual *b* such that I can verify (win in the game played with) $S(b)$. *What could be a more constructivistic requirement than that?* Likewise, in the verification game $G((S_1 \vee S_2))$ connected with a disjunction $(S_1 \vee S_2)$, the verifier must choose S_1 or S_2 such that the game connected with it (i.e. $G(S_1)$ or $G(S_2)$) can be won by the verifier. *Again, there does not seem to be anything to alienate a constructivist*[128].

---

[127] *PMR*, pp. 31-32.
[128] Cfr., *Ivi*, p. 212-213, (corsivi miei).

In questo contesto si tratta di cercare e trovare un individuale che verifichi esistenzialmente la proposizione in questione. Ed è proprio questo il motivo che sembrerebbe legittimare l'attacco di Hintikka a Dummett, tanto da fargli ritenere che il costruttivismo, in virtù di forti *analogie*, derivi proprio dalla teoria dei giochi:

> There is an apparently small but in reality most consequential difference between the ideas represented here [sulla GTS e sulla IF] and those of constructivists like Dummett. They are not averse to using notions from strategic games in explaining their ideas but they give the game *analogy* a wrong, or perhaps a far too simplicistic, turn. For instance Dummett writes: <<The comparison between the notion of truth and that of winning a game still seems to me a good one>> [1978, p.19]. But this specific analogy is a bad one. The interesting *analogy* is between the notion of truth and the existence of a winning strategy[129].

Hintikka rimprovera a Dummett l'aver confuso verità e vincita di una partita, dimenticando proprio l'accostamento tra esistenza e verità che invece risulta essere il punto centrale su cui insiste la teoria semantica dei giochi. Ed in particolare sulla definibilità della verità mediante strategie vincenti, in polemica con il costruttivismo Hintikka sostiene:

> ordinary deductive logic does not present an alternative to semantical games for the process of verification and falsification. The rules of deductive logic are themselves parasitic on the rules for semantical games[130].

---

[129] *Ivi*, pp. 26-27.
[130] *Ivi*, p. 34.

Dunque l'attività del *seeking and finding*, mediante le condizioni di una semantica dei giochi, giustifica in senso dummettiano le regole d'inferenza che però secondo Hintikka dipendono dalle regole per le varie costanti della GTS. Ed è proprio sul "parassitismo" delle regole d'inferenza costruttive che "le basi di questa linea di pensiero costruttivista svaniscono"[131].

Ma a questo punto più che lanciarsi in un attacco al costruttivismo Hintikka apre verso un ripensamento delle regole d'inferenza:

> Thus in a very real sense IF logic does not only force us to rethink the semantics of our basic logic; it forces us to also reconsider our rules of logical inference[132].

Il ripensamento delle regole non può prescindere quindi da una semantica che faccia i conti con la verità, che, in ultima analisi, prenda in considerazione, anche per una critica più perspicua al costruttivismo, il principio del terzo escluso.

In particolare ciò che avviene in logica filo-indipendente, ovvero trovare un individuale che verifichi una formula, è assai vicino all'approccio costruttivista proprio a partire dalla fondazione delle costanti logiche. Su questo punto Hintikka sostiene un superamento del costruttivismo pur conservandolo[133], ad esempio nel rifiuto del terzo escluso.

---

[131] *Ivi*, p. 37.

[132] *Ivi*, p. 71, (corsivi miei).

[133] Cfr. J. Hintikka, *Hyperclassical Logic (A.K.A. IF Logic) and its Implications for Logical Theory*, The Bulletin of Symbolic Logic, vol. 8, (2002), n°3.

4.6. *Tertium datur: costruttivismo e indipendenza*

Hintikka sostiene che a partire dalle regole RF e RV della GTS, il p.t.e. (principio del terzo escluso) vale (*holds*) se esiste una strategia vincente per il verificatore o per il falsificatore per un dato enunciato S in G(S). Tali giochi a somma zero per il quale uno dei due giocatori possiede necessariamente una strategia vincente sono detti determinati. La determinazione deriva da una assunzione di base, per la quale o l'uno o l'altro giocatore possiede una strategia vincente. Si tratta di un'*assunzione di determinazione*[134] che va associata ad ogni gioco $G(S)$.

Se dunque la nozione di verità è definita mediante la teoria dei giochi e se si prescinde da questa assunzione, il p.t.e. in generale non può valere:

> ciò dovrebbe infervorare l'animo di ogni vero costruttivista, per il fatto che la legge del terzo escluso è stata per lungo tempo l'obiettivo favorito della loro critica[135].

In logica filo-indipendente un enunciato del primo ordine e la sua traduzione al secondo ordine mediante le funzioni di Skolem risultano "veri negli stessi modelli, ma non sono falsi negli stessi modelli"[136].

Ciò accade perché il *tertium non datur* vale solo per la logica al secondo ordine e non per quella logica filo-indipendente. Se consideriamo il terzo escluso in relazione al concetto di modello, esso ci costringe ad associare ad ogni enunciato (*sentence*) S non solo la classe di tutti i modelli in cui esso è vero $M(S)$, ma anche la classe di tutti i modelli in

---

[134] *PMR*, pp. 32-33 e 131-133.
[135] *Ivi*, p. 33.
[136] *Ivi*, p. 65.

cui esso è falso $M(S)$. Questo comporta una domanda: due formule sono logicamente equivalenti ($\Leftrightarrow$) quando sono vere negli stessi modelli o piuttosto quando sono vere e false negli stessi modelli? Per le ragioni concernenti le condizioni di verità della logica filo-indipendente Hintikka adotta esplicitamente la prima opzione[137] e non potrebbe far altrimenti, poiché è *l'esistenza di una strategia vincente per un giocatore che garantisce l'appartenenza di un enunciato al modello e non il converso.*

In altri termini, è la negazione che gioca un ruolo centrale. Infatti il valore di verità di un S può essere definito mediante l'esistenza di una strategia vincente per il falsificatore, ma ciò non indica la falsità dell'enunciato S, in quanto la negazione forte sottostà al solo compito di invertire i ruoli dei due giocatori e non entra minimamente nel merito della definizione di verità. A partire dalla negazione forte $\neg_F$, la *definizione di verità* non subisce nessun cambiamento se si pone $G(\neg_F S)=G(S)$. Ciò è dovuto al fatto che è vero $G(S)$ se esiste una strategia vincente per il verificatore ed è altrettanto vero $G(\neg_F S)$ se esiste una strategia vincente per il falsificatore. La conseguenza dell'uso della *negazione forte o duale* comporta per Hintikka che "il *tertium non datur* diventa *un'assunzione di determinazione nel senso della teoria dei giochi*"[138].

Si tratta di evidenziare che la validità del p.t.e. è una assunzione che viene determinata precedentemente alla ricerca della verità e, anche se vale per la logica del primo ordine GTS, non vale per la logica filo-indipendente , che considera enunciati di cui né il falsificatore né il verificatore possiedono una strategia vincente.

---

[137] *Ibidem.*
[138] *Ivi*, p. 132.

Tuttavia alcuni teoremi che valgono per la logica del primo ordine valgono per la logica filo-indipendente, come ad esempio il teorema di separazione.[139] Esso dice che:

due insiemi di formule di un linguaggio FI del prim'ordine, congiuntamente inconsistenti ma separatamente consistenti, chiamati σ *e* τ*, possono essere sempre separati da una singola formula F del prim'ordine, singola nel senso che* $\sigma \vdash F$ *e* $\tau \vdash \neg_F F$ *.*

Se si assume la negazione contraddittoria per una formula del prim'ordine S_2, in cui tale negazione può essere espressa nel medesimo linguaggio da un'altra formula ad esempio S_1, applicando il teorema di separazione all'insieme di tutte le proposizioni $\{S_2\}$ e all'insieme delle negazioni contraddittorie $\{S_1\}$ - considerati come insiemi di formule della logica ordinaria del primo ordine - esiste per loro una formula di separazione S_0 che appartiene al linguaggio ordinario del prim'ordine tale che,

$S_1 \vdash S_0$

$S_2 \vdash \neg_F S_0$.

Poiché $\vdash (S_2 \Leftrightarrow \neg_F S_1)$, ne segue che S_1 è equivalente a S_0 e S_2 a $\neg_F S_0$. Ciò mostra che le sole formule del primo ordine della logica filo-indipendente, delle quali la negazione contraddittoria è esprimibile nei linguaggi filo-indipendenti, sono precisamente le formule del primo ordine. Ne consegue che la legge del terzo escluso vale solo per il

[139]Cfr. *Ivi*, 133 e A.-V. Pietarinen e T. Tulenheimo, *An Introduction to IF Logic*, cit., p. 60.

frammento di un linguaggio della logica filo-indipendente composto da un linguaggio ordinario del prim'ordine[140].

Il fallimento del terzo escluso nella logica filo-indipendente è da attribuire solo ed esclusivamente alla negazione forte e viene inoltre sottolineato da Hintikka che nella logica filo-indipendente non si assume "nessun fallimento (*breakdown*) del terzo escluso, né intervalli nei valori di verità né un terzo valore di verità",[141] mentre la negazione classica o contraddittoria è valida solo per le interconnessioni tra le costanti logiche che vengono rese note dalle leggi della doppia negazione, dalle leggi di De Morgan e dalla interdefinibilità dei due quantificatori. Il differente uso del concetto di negazione (contraddittoria e duale) produce una tensione per quanto riguarda la validità del terzo escluso fino al punto da far emergere che "la legge del terzo escluso è intrinsecamente e inevitabilmente *ambigua* tra le due negazioni"[142].

Al contrario della logica intuizionista, e in generale dell'approccio costruttivista, il fallimento di p.t.e. non comporta l'introduzione di nuove regole d'inferenza per la negazione o un uso epistemologico del concetto di dimostrazione, ma

> le regole del gioco per i giochi semantici connessi con gli enunciati (*sentences*) FI del prim'ordine sono precisamente le stesse di quelle per i linguaggi ordinari del prim'ordine, *eccetto che certi movimenti sono prodotti dal verificatore iniziale nell'ignoranza di certi movimenti precedenti*.[143]

[140] *PMR*, p. 132.
[141] *Ivi*, p. 133.
[142] *Ivi*, p. 161, (corsivo mio).
[143] *Ivi*, p. 134-135, (corsivo mio).

Dunque, il terzo escluso fallisce perché l'ignoranza dei movimenti da parte del giocatore elimina qualsiasi principio di determinazione che potrebbe garantire una vincita sicura, cosa quest'ultima che invece accade per la GTS.

Inoltre la *tensione ambigua* tra le negazioni proprio sulle questioni della validità del p.t.e. investe il problema della definizione di verità per gli enunciati che hanno una referenza empirica. Il terzo escluso cioè fallisce perché non si possiede sufficiente informazione per decidere il valore di verità dell'enunciato. Ora la mancanza d'informazione deriva dall'ontologia stessa degli individui del modello che non sempre sono interpretabili mediante gli enunciati formali.

5. Quantificazione e semantica realista

5.1. *Quantificazione e realismo*

In una funzione proposizionale Fx, possiamo pervenire alla verità se operiamo un' esemplificazione di tale enunciato, cioè se sostituiamo la variabile individuale x con la costante individuale a. Attraverso la quantificazione invece è possibile stabilire la verità di un enunciato premettendo all'enunciato stesso il quantificatore universale o esistenziale così da ottenere rispettivamente $\forall xFx$ e $\exists xFx$. Il dato peculiare è che questi due modi non sono alternativi tra di loro, ma si integrano secondo una ben nota relazione. Infatti $\forall xFx$ è vera se e solo se sono vere tutte le sue esemplificazioni, mentre $\exists xFx$ risulta vera se e solo se è vera almeno una delle sue esemplificazioni. Il movimento che va dalla quantificazione alla esemplificazione e dunque alla verità richiede uno strumento che ne assicuri la correttezza formale. Il discorso si sposta sulla necessità di individuare un metodo che giustifichi la validità di un argomento composto da enunciati quantificati. In altri termini la struttura premesse-conclusioni in cui gli enunciati vengono espressi in un modo quantificato ha la necessità di essere giustificata in virtù di una metodologia che preservi il passaggio di verità da premesse a conclusioni. Come abbiamo visto la *deduzione naturale* di Gentzen offre questa propspettiva . In particolar modo i metodi introdotti da Gentzen sono risultati pertinenti alla questione proprio per l'impostazione fortemente giustificativa. Se così non fosse non si spiegherebbe l'attenzione della logica filosofica contemporanea che ha notevolmente insistito su tali strumenti tanto da renderli imprescindibili e fondanti di una più generale *giustificazione della deduzione avanzta* da Dummett[144] .

Più specificamente nei lavori di Gentzen il concetto di esemplificazione è restituito dalle cosiddette regole di eliminazione per il quantificatore universale $\forall E$ e per quello esistenziale $\exists E$. L'obiettivo di tali regole è quello di garantire la preservazione della verità ed è in quest'ottica che la regola $\forall E$

$$\frac{\forall x F(x)}{F(t)} \forall E$$

dice che dalla totalità degli individui per cui sta la variabile x e che hanno la proprietà F è possibile inferire (esemplificare) un caso "arbitrario" t che abbia la proprietà F. Se l'enunciato $\forall x F(x)$ è vero lo sarà anche l'enunciato composto da una qualunque costante individuale, o a, o b, o c, etc... La costante individuale viene formalizzata dal simbolo t, che è una variabile diversa da x e che sta per una qualunque costante individuale.

Lo stesso discorso va mantenuto per l'esemplificazione esistenziale, restituita dalla regola di eliminazione $\exists E$

---

[144]Cfr., Dummet, M., Il problema della giustificazione prende avvio dall'articolo, *la giustificazione della deduzione (1973*), in *Truth and Other Enigmas*, Gerald Duckworth, Londra1978, pp. 290-318, tr.it. (parziale) a cura di Santambrogio, M., *La verità e altri enigmi,* Il saggiatore, Milano 1986, pp. 153-183, in cui il problema è impostato a partire dallo iato tra utilità e correttezza dell'inferenza. Il capitolo ottavo, *La giustificazione della deduzione*, in Dummett,M., *The Logical Basis of Metaphysics*, Harward University Press 1991, tr. It., *La base logica della metafisica*, a cura di Eva Picardi, il Mulino 1996. pp. 259-279 riprende la questione e la imposta in una più profonda giustificazione delle leggi logiche mediante i risultati di Gentzen [cfr, *Le giustificazioni delle leggi logiche nel quadro della teoria della dimostrazione,* in ibidem, tr.it. pp. 341-367. Sull'idea di una giustificazione della deduzione nell'abito di una generale teoria della dimostrazione e per una rilettura intepretativa dei risultati di Gentzen come punto di partenza della giustificazione orientata verso il teorema di normalizzazione, cfr., Prawitz, D., *On the Idea of a General Proof Theory*, in Synthese, vol. 27 (1974), pp. 63-77, tr.it. in Cagnoni, D., *Teoria della dimostrazione*, op. cit., pp. 205-220.

$$\frac{\exists x F(x/a)}{F(t)} \exists E$$

Questa regole dice che se ci troviamo di fronte ad un argomento in cui compaiono delle premesse esistenziali possiamo inferire una conclusione vera se l'elemento t che inferiamo ha la proprietà F, ma non appartiene all'insieme delle variabili vincolate da $\exists$, cioè x.

Le regole di eliminazione sono dunque dei metodi che giustificano la verità della conclusione per singoli casi a partire da *una scelta qualunque all'interno del dominio delle variabili*.

Il procedimento che invece giustifica il percorso inverso, cioè da singoli casi a generalizzazioni, è restituito dalle regole di introduzione per i quantificatori, $\forall I$ per l'universale e $\exists I$ per l'esistenziale.

Rispettivamente le regole assumono questa forma

$$\frac{F(t)}{\forall x F(x)} \forall I \quad \text{e} \quad \frac{F(a)}{\exists x F(x)} \exists I$$

L'argomento in cui possiamo usare $\exists I$ è un argomento in cui la verità della conclusione è garantita dalla esemplificazione di almeno una funzione proposizionale e ciò non comporta nessuna difficoltà. Ma va precisato che, in contesto deduttivo $F(t)$ ed $F(a)$ sono il risultato di una esemplificazione precedente. Per cui la $\forall I$ è una regola che possiamo usare in un argomento in cui dobbiamo esemplificare *tutte* le funzioni proposizionali. Nel fare ciò bisogna partire dall'assunzione che *qualsiasi* funzione proposizionale, cioè $F(t)$, è vera e dedurre che ciò vale per tutti. Le regole dei quantificatori sembrano, dunque, sottostare al principio di esemplificazione o induzione per le regole di eliminazione e al principio di generalizzazione per le regole d'introduzione. Sulla scia dell'impostazione gentzeniana, dunque, la regola d'introduzione del quantificatore universale è lo strumento mediante il quale *definire* il quantificatore stesso nell'ambito deduttivo[145]. Questo tipo di impostazione vale per tutte le regole d'inferenza che si trovano in uno stato d'inversione, cioè per quelle costanti logiche che hanno regole d'inferenza inverse. Non tutte le regole della deduzione naturale però hanno questo privilegio e, dunque, il calcolo risulta essere non privo di difficoltà. L'introduzione del quantificatore universale, infatti, comporta una difficoltà di fondo ritenuta centrale da Dummett:

> il quantificatore universale, per come generalmente viene inteso, non sembra attagliarsi affatto all'assunto, che in questo caso afferma che siamo autorizzati a dire qualcosa che vale per *tutto* solo se possiamo dimostrare che vale per *qualsiasi* cosa. E' altamente dubbio che si possa individuare un senso genuino in cui chiunque fosse autorizzato ad asserire un enunciato universalmente quantificato avrebbe potuto farlo a partire dall'asserto

[145]Cfr., G. Gentzen, *Investigations into logical deduction*, op. cit. p. 80: "Ad ogni simbolo logico $\wedge, \vee, \supset, , \forall, \exists$, appartiene precisamente una figura d'inferenza che *introduce* il simbolo - come simbolo terminale di una formula - e una che lo *elimina* [...]. Le introduzioni rappresentano le *definizioni* dei simboli considerati e le eliminiazioni, in ultima analisi, non sono nient'altro che le conseguenze di queste definizioni". I concetti di introduzione ed eliminazione indicano che le regole d'inferenza corrispondenti ad uno stessa costante logica stanno in una relazione d'inversione. Ciò viene chiarito meglio se si considera che la regola gola di eliminazione è di fatto l'eliminazione del connettivo della corrispondente regola d'introduzione: in ciò consiste la proprietà d'inversione tra due regole. Ciò è possibile solo presupponendo che la premessa maggiore (la premessa che contiene il connettivo da eliminare) della regola di eliminazione sia la conclusione di una regola d'introduzione.

corrispondente con una variabile libera. Gli intuizionisti concorderebbero[146].

In un argomento l'introduzione del quantificatore universale preserva la verità anche a partire da una premessa qualsiasi non quantificata. In altri termini Dummett sta polemizzando sul significato strettamente deduttivo della regola $\forall I$, sottolineando l'impossibilità per l'intuizionismo di derivare il *tutto* dal *qualsiasi*[147]. In effetti tale operazione è possibile solo mediante la caratterizzazione di *un concetto di modello.*

> Per i contesti generali, l'idea più naturale è che la nostra comprensione originaria di "tutti" è relativa a una totalità finita e ispezionabile [...] In altre parole, qualcosa ci serve come base per asserire un asserto quantificato universalmente solo se possiamo ritenere che ci autorizzi a fare tale asserzione per un elemento arbitrario del dominio[148].

L'uso della regola richiede fortemente un campo di indagine che sia per l'appunto ispezionabile. Si tratta di considerare l'uso delle variabili mediante un dominio che ne assicuri la controllabilità.

---

[146]*LBM*, tr. it. p. 381.

[147]Cfr., Heyting, *H. Intuitionism: An Introduction,* North-Holland, Amsterdam 1956, 1966 2ed. p. 92 e ssg. Come nota Göran Sundholm (cfr., Sundholm, G., *Proof Theory and Meaning*, in *Handbook of Philosophical Logic*, a cura di Gabbay, D. e Guenthner, D., Reidel Publishing Company, 1986, vol. III, pp. 471-506 in particolare pp. 485-489), il legame tra le costanti logiche e il concetto di dimostrazione impostato da Heyting diventa risorsa ispiratrice per i propositi di Dummett. Nello specifico, al fine di stipulare una teoria costruttivista del significato, "it is the corresponding constructive "proof-table" of Heyting that offers a possibility for Dummett's positive proposal" (*ibidem.* p. 485)] In particolare Sundholm espone il significato dei quantificatori mediante il seguente schema:

a) La dimostrazione di una proposizione $\forall x \in D\ S(x)$ è data da: un metodo che per ogni individuale a in D fornisca una dimostrazione di $S(a)$;

b) la dimostrazione di una proposizione $\exists x \in D\ S(x)$ è data da: un individuale a in D e una dimostrazione di $S(a)$.

[148]LBM, tr. it p.381-382, (corsivi miei).

Diventa, dunque, necessario riconsiderare il quantificatore universale a partire da un principio originario che restituisca un significato più ampio della definizione di quantificatore, come anche del condizionale "se" (*if*):

> nell'applicare l'assunto fondamentale al condizionale e al quantificatore universale, abbiamo dovuto concedere che non è letteralmente vero. Né il significato di "se", né quello del quantificatore universale è completamente determinato dalla regola d'introduzione che lo governa: in ciascun caso *la regola è piuttosto una specializzazione al regno della logica di un principio più generale*[149]
> .

Per Dummet tale principio è dichiaratamente *non deduttivo* e come tale non va espresso in "termini puramente logici". In un percorso giustificativo della deduzione naturale si insiste, dunque, sulla richiesta di un principio extradeduttivo che legittimi l'uso del condizionale e del quantificatore universale[150] .

---

[149]Ibidem, tr. it. p. 386. (corsivi miei).

[150]Ibidem, tr. it. pp. 386-388. I rimandi ad Aristotele sono forti e ben evidenti. In particolare proprio sulla richiesta di un principio della dimostrazione (αποδειξις), che sia esterno alla dimostrazione stessa, è pertinente richiamare le conclusioni del cap 19 degli *Analitici secondi:* "Dato che i princìpi risultano più evidenti delle dimostrazioni e che, d'altro canto, ogni scienza si presenta congiunta alla ragione discorsiva, in tal caso i princìpi non saranno oggetto di scienza; e poiché non può sussistere nulla di più verace della scienza, se non l'intuizione, sarà invece l'intuizione ad avere come oggetto i prìncipi. Tutto ciò risulta provato, tanto se si considerano gli argomenti che precedono, tanto dal fatto che il principio della dimostrazione non è una dimostrazione", [Aristotele, *Secondi Analitici*, in Aristotele, *Opere,* vol.1, Laterza, Bari 1973, 100b, 9-13, p. 373]. Va però precisato che la dimostrazione di cui parla Aristotele è quella sillogistica che parte da premesse vere in un mondo o evidenti: conseguentemente, l'obiettivo è quello di estrapolare da queste premesse una conclusione vera. In teoria della dimostrazione il percorso è diverso: infatti, si parte da premesse che sono assunte come tali, cioè da semplici assunzioni e poi bisogna giustificare (tramite le regole d'inferenza) che la conclusione consegua logicamente (conseguenza sintattica) dalle assunzioni. A questo punto, mentre sembra quasi ovvio affermare per la cosiddetta conseguenza aristotelica che il principio della dimostrazione non sia una dimostrazione, lo sembra meno per la conseguenza sintattica. Dummett trasferisce, quindi, forse inconsapevolmente, la problematica della dimostrazione aristotelica sul piano sintattico, rivedendone, dunque, le problematiche alla luce della teoria della dimostrazione. Mentre sarebbe più opportuno prendere in considerazione concetti come Mondo, Universo o totalità ispezionabile.

Attraverso il riferimento ad un principio non deduttivo assistiamo a delle forti limitazioni delle procedure dimostrative-teoretiche sul piano semantico, in quanto appare evidentemente impossibile attribuire significato alle costanti logiche solo in virtù della sintatticità della teoria della dimostrazione. Tuttavia ravvediamo anche una certa apertura della deduzione naturale e più in generale della teoria della dimostrazione all "*extra-sintattico*". Tale apertura risulta essere del tutto originale poiché la *Teoria della dimostrazione* è fortemente connotata dall'*assunzione fondamentale* che sia possibile costruire argomenti validi solo se si è già inseriti in un contesto effettivo di deduzione. Ciò comporta che in una deduzione gli enunciati iniziali siano dipendenti solo ed esclusivamente da se stessi. L'"assunzione fondamentale" di cui parla Dummett [151] è da considerarsi come una procedura caratterizzante una *effettiva* deduzione che opera per l'appunto mediante un *inizio* affidato ad *assunzioni* di enunciati[152] . Ed è proprio per queste assunzioni iniziali che si sgretola l'idea di una definizione onnicomprensiva affidata alla regola d'introduzione del quantificatore universale. La teoria del significato dummettiana proprio nel trattare il quantificatore mediante un principio che assolvendo il compito di reggere l'apparato sintattico, getta uno sguardo, almeno nella fase di inizio, sul valore semantico degli enunciati che costituiscono la deduzione naturale[153] . Tuttavia la propensione del significato delle costanti logiche che regge l'intera *base metafisica* risulta essere ancora una volta indirizzata verso le procedure sintattiche a scapito dell'impostazione *modellistica*. Aderendo dunque alla visione *universalista*, viene meno il presupposto che fonda una semantica realista che non può prescindere dal concetto di Modello.

---

[151] *LBM*, tr. it. pp. 353-355 e più sistematicamente tutto il capitolo 12, pp. 369-388.
[152] *Ivi*, tr.it. p. 353.
[153] *Ivi*, tr. it. pp. 44-46.

5.2. Ricchezza semantica

Il nostro lavoro è stato indirizzato a sostenere una giustificazione delle costanti logiche e più in generale della logica stessa, senza far perno sulla correttezza formale e "senza apparato semantico". Piuttosto è stata proposta una *revisione* o ripensamento della semantica volta a dar conto di alcuni presupposti intuizionistici da inserire all'interno del progresso della logica classica. In altri termini la logica *filo-indipendente*, definita per l'appunto *iperclassica*[154], aumenta il potere espressivo della logica poiché il punto di partenza è l'inesauribilità delle risorse semantiche.

Dummett è fortemente convinto del percorso che va dalla semantica alla metafisica[155]. Ad esempio la metafisica antirealista è giustificata da una maggiore plausibilità dell'intuizionismo rispetto alla logica classica. Il risultato è che le giustificazioni delle costanti logiche sono relative al concetto di dimostrazione nella sua totale sintatticità. Scrive Dummett:

> Dato il resoconto [dell'accettazione di una semantica "senza adottare nessun primario giudizio metafisico"], fermo restando che può essere costruito sulle basi di quella teoria semantica, deve essere comprensibile come possiamo acquisire una tale comprensione (an understanding) del nostro linguaggio.[…] La nostra metafisica è dunque determinata dalla nostra teoria semantica. In ogni teoria

---

[154] Cfr. J. Hintikka, *Hyperclassical Logic (A.K.A. IF Logic) and its Implications for Logical Theory*, cit..

[155] M. Dummett, *Thought and Reality*, Clarendon Press, Oxford 2006, § 2, *Semantics and Metaphysics*.

> semantica, gli elementi linguistici di un qualche genere saranno trattati dalla teoria come le sue unità di base[156].

Comprendere il nostro linguaggio significa comprendere la nostra semantica. Ma la domanda pertinente è: E' possibile avere una giustificazione delle *unità di base*, ovvero le costanti logiche solo in virtù dei criteri procedurali? A nostro avviso la risposta è negativa e la proposta che ci sembra più adeguata nel giustificare le costanti logiche mediante una semantica realista che però non escluda alcuni assunti intuizionistici (il rifiuto del terzo escluso che a questo punto non dovrebbe essere più un'assunzione) è una Teoria dei Giochi in cui è fondamentale il ruolo del Modello.

La logica filo-indipendente, correggendo l'errore di Frege (*Frege's mistake*), attraverso l'uso dello slash "/", contribuisce all'aumento dell'espressività della semantica. Inoltre, una peculiarità della logica filo-indipendente risulta dal fallimento del principio del terzo escluso che non è relativo ad assunzioni metafisiche, ma alla mancanza di informazione dei due giocatori e all'impossibilità di procedere nella ricerca di un valore di verità da attribuire ad un dato enunciato. Dunque il fallimento è immanente alla logica non è né un presupposto gnoseologico-metafisico né un risultato determinato da tali assunzioni.

5.3. Realismo semantico

La questione del rapporto tra semantica e realismo che partendo proprio dalle tematiche provenienti dalla deduzione naturale per poi

[156] *Ivi*, p. 15.

arrivare alla teoria dei giochi offre lo sfondo per una critica del sia dell'anti-realismo che dell'intuizionismo.

E' possibile ripensare una teoria del significato a partire da una *semantica dei giochi*.

Il filo rosso che lega tutte le ricerche di Dummett concerne l'esigenza di rintracciare le basi che giustifichino il discorso metafisico, a partire però dall'accettazione o meno di una teoria semantica che ha inevitabilmente, ma in un secondo tempo, anche ripercussioni metafische:

> Ciò che io sostengo è che le teorie del significato [= teorie della conoscenza] hanno conseguenze metafisiche, sia che accordiamo loro lo status di tesi, sia che le trattiamo alla stregua di semplici immagini, ma che dobbiamo prima porre mano alla teoria-del-significato [= teoria semantica] e costruire la metafisica in accordo con essa, anziché enunciare prima assunti metafisici cercando poi di derivarne conclusioni riguardo alla teoria del significato [= teoria della conoscenza][157] .

157 LBM, tr. It, p. 423. Dummett distingue la teoria del significato (the theory of meaning), intesa come teoria della conoscenza, e una teoria-del-significato connotata dalla semantica: "Impiego qui l'espressione <<la teoria del significato>> (the theory of meaning) come coordinata all'espressione <<la teoria della conoscenza>>, per indicare un ramo della filosofia, altrimenti meno felicemente noto come 'la filosofia del linguaggio'. Per distinguere questa teoria da quella che Davidson e altri chiamano <<una teoria del significato>>, ossia una specificazione completa [cfr. teorema di completezza] dei significati di tutte le parole ed espressioni di una lingua particolare, chiamerò quest'ultima <<una teoria -del -significato>> (a meaning-theory)" (ibidem. p. 41). Avendo posto le precisazioni terminologiche sui termini, si può più esplicitamente aggiungere e precisare che "una teoria semantica può talvolta avere ripercussioni sorprendenti sulle questioni: gli interrogativi intorno alla natura della realtà dipendono in modo decisivo dalle risposte che diamo alla domanda su com'è possibile parlare della realtà, e dunque sulla natura del nostro pensiero intorno ad essa. Personalmente credo, e ho sostenuto in più occasioni, che le controversie riguardanti l'interpretazione realista o antirealista di vari tipi di proposizione dipendono in ultima istanza dal tipo di analisi

Le assunzioni non sono, dunque, di carattere metafisico, ma concernono la sfera della teoria semantica ed è solo a partire dall'impostazione di una teoria semantica e deduttiva che si può *ripensare* una metafisica. Dummettianamente la teoria della dimostrazione offre lo sfondo per una teoria semantica con conseguenze metafisiche mentre una logica fondata sul gioco non pone nessun percorso consequenziale.

Questo schema offre meglio l'idea:

Teoria della dimostrazione → Antirealismo

Teoria semantica dei giochi = Realismo

---

semantica che forniamo per esse" (Dummett, M., *La natura e il futuro della filosofia*, il melangolo, Genova 2001, p. 22). Le conseguenze metafische dipendono pesantemente da una teoria della conoscenza e quest'ultima non può esimersi dal fare i conti con una teoria semantica che fornisca una teoria adeguata del concetto di verità. Sul rapporto tra metafisica e verità si veda anche Dummett, M., *La giustificazione della deduzione*, in M. Dummett, *La verità e altri enigmi*, tr. it., op. cit. in particolare pp. 178-179, in cui viene posto il rapporto tra verità e riconoscimento della verità come problema fondamentale della metafisica. Il percorso che però porta ad identificare nell'ambito della giustificazione della deduzione il riferimento alla metafisica proviene dall'aver impostato un percorso di ricerca segnato dalla tensione interna (paradosso dell'inferenza o dell'analisi) dell'inferenza deduttiva: "ciò che deve essere in grado di dimostrare una semantica per una teoria logica è, in primo luogo, che le regole d'inferenza che adoperiamo normalmente sono in realtà valide, e cioè che esse sono giustificate nel senso che nel passaggio dalle premessa alla conclusione si conserva la verità. Che cosa esattamente comporti questo requisito dipenderà dalla semantica impiegata e, più precisamente, dalla nozione di verità appropriata per quella semantica. Naturalmente, questo è ciò che fa una dimostrazione di validità. Ma l'altro requisito, indispensabile a qualunque spiegazione soddisfacente dell'inferenza deduttiva, e cioè che essa ne riveli l'utilità oltre che la legittimità, deve anch'esso essere soddisfatto dalla semantica usata, anche se normalmente la dimostrazione di questo fatto non viene considerata compito della logica" [*Ivi*, p. 176, (corsivi miei)].

In logica filo-indipendente non c'è una base semantica che in un secondo momento da le coordinate metafisiche. Il Realismo è metafisicamente e logicamente interno al linguaggio (logico) stesso.

Questo risultato è dovuto principalmente all'impossibilità di bloccare la semantica in schemi inferenziali. Piuttosto la semantica è spesso indefinibile e suscettibile sempre di nuovi accorgimenti e strutture espressive come ad esempio lo *slash* e l'uso della *duplice negazione.*

L'approccio gamico è stato condotto nel definire i limiti di una semantica realista per la giustificazione delle costanti logiche e sulla ineffabilità della semantica, nonché in una impossibilità di definire la verità attraverso modi inferenziali.

Ad esempio la definizione stessa di verità in teoria dei giochi nella lettura di Dummett, offre i presupposti per aderire ad una semantica realista. Dice infatti Dummett:

> Il valore semantico di un enunciato è qui [il riferimento è all'intuizionismo di Heyting] un principio di classificazione delle costruzioni in quelle che dimostrano un enunciato e in quelle che non lo dimostrano; *alla nozione di verità si deve giungere quindi per quantificazione esistenziale*: un enunciato è vero *se esiste* una costruzione che lo dimostra...[Per Hintikka] il valore semantico di un enunciato è, *di fatto*, la classe di tutte le partite (successioni di mosse) successive alla mossa consistente nel produrre l'enunciato in questione. *La nozione di verità è anche qui ottenuta per quantificazione esistenziale*: *un enunciato è vero se esiste* una strategia vincente di cui la prima mossa è la produzione dell'enunciato[158].

[158] *LBM,* tr. it. p. 58, (corsivi miei).

Dunque anche Dummett cede inevitabilmente ad una definizione di verità esistenziale che prescinde da qualsiasi teoria della conoscenza ("la teoria del significato"). E sottolinea che ciò e rilevante anche per l'antirealismo del costruttivismo, il quale propone un significato delle costanti logiche mediante l'*esistenza* di costruzioni di dimostrazioni. E' chiaro che si tratta di una definizione di verità per *quantificazione esistenziale.*

La questione su *esistenza* e semantica è rilevante nel dibattito contemporaneo della *metafisica analitica*[159] che considera questi due concetti come centrali [160]. Dunque a nostro avviso la questione dell'esistenza e conseguentemente la semantica non possono prescindere dai riferimenti ai modelli. Ogni tentativo di esclusione del rapporto tra linguaggio e realtà ci sembra non proficuo. Tanto più se un enunciato possiede un valore di verità solo se l'oggetto a cui si riferisce è accessibile alle nostre capacità cognitive. In prima istanza, a nostro avviso, qualcosa può essere vero o falso a prescindere dalla nostra forza dimostrativa. Semmai è la mancanza di informazioni provenienti dal mondo che *giustifica* il fallimento delle nostre capacità dimostrative ovvero delle nostre strategie.

---

[159] Per una bibliografia ragionata sulla *metafisica analitica* si veda A. Varzi, *Ontologia e metafisica*, in F. D'Agostini e N. Vassallo (a cura di), *Storia della Filosofia Analitica*, Einaudi, Torino 2002, pp. 81-117, 521-526.

[160] Franca D'Agostini in *Metafisica analitica?*, Giornale di Metafisica 30 (2008) n. 2, p. 243-270, ha rimarcato che la filosofia analitica costituisce una "opportunità di usare alcuni strumenti per una disciplina [la metafisica] che a rigore è unica" [*Ivi*, p. 269] e che la *teoria della quantificazione* sia "l'artificio metodologico primario" della metafisica analitica [cfr. *ivi*, p. 260]. Inoltre Achille Varzi, noto fautore della metafisica analitica, individua nel concetto di *esistenza* il *topos* primario del discorso metafisico, [cfr. A. Varzi, *Ontologia e metafisica*, cit. e più recentemente il suo intervento, *La metafisica analitica oggi tra realismo e convenzionalismo*, tenuto in occasione della conferenza *Metafisica classica e metafisica analitica*, Università Cattolica di Milano 27 Novembre 2007, filmati degli interventi disponibili nel sito www.cattedrarosmini.org]. Nel presente volume, e in quest'ottica, si è voluto porre l'accento sul binomio *esistenza* e *quantificazione* e in più sulla definizione di *verità*, questioni già da me affrontate in forma embrionale e in relazione proprio al discorso metafisico, in M. Panzarella, *Principio e quantificazione: argomentazione o metafisica?* volume monografico del Giornale di Metafisica, 28 (2006) n. 2, *Forme dell'argomentazione metafisica,* a cura di E. Caramuta e G. Nicolaci, pp. 365-382.

In questa tesi è stata posta l'attenzione anche sul concetto di semantica trattandola in relazione alla nozione di *giustificazione*. Quest'ultima che trova la ragione ultima della sua connotazione nel requisito di armonia per Dummett va *ripensata* all'interno dell'attività del *seeking and finding* della teoria dei giochi. Infatti proprio sulla giustificazione la teoria dei giochi è alquanto lacunosa su questo punto[161].

In altri termini, mentre in teoria dei giochi la nozione di verità di un enunciato trova una piena legittimazione nel cercare gli individui che verificano la formula, per Dummett l'intrinseca sintatticità tra le regole giustifica "la verità" delle regole d'inferenza restituendo una semantica sintattico-procedurale delle costanti logiche.
Considerare la nozione di giustificazione come poco radicate in teoria dei giochi è la principale obiezione si potrebbe porre. Tuttavia ciò è dovuto all'dea che nella logica filo-indipendente non esiste un contesto universale di giustificazione o una esplicita teoria del significato[162]. Ciò è dovuto all'assunzione fregeana secondo cui "la struttura logica dell'asserzione (giudizio) è basata né più e né meno che sul riconoscimento della verità"[163] in ciò che già esiste e va solo 'evidenziato'. La logica filo-indipendente e più in generale ogni logica basata sulla nozione di gioco è strutturata da una semantica in un *contesto intersoggettivo* volta alla scoperta e alla persuasione. È

[161] Cfr. J. Floyd, *On the Use and the Abuse of Logic in Philosophy: Kant, Frege, and Hintikka on the Verb "To Be"*, in R. E. Auxier e L. E. Hahn, (a cura di), *The Philosophy of Jaakko Hintikka. Hintikka's Intellectual Autobiography*, 27 *Critical Essays, Hintikka's Replies to His Critics*, Hintikka Bibliography, The Library of Living Philosophers vol. 30, Open Court, Chicago 2006, pp. 137-187. In particolare a p. 142 si legge: "Dummett's (Fregean) concern is that the notions of truth and justification are not deeply and directly enough embedded in Hintikka's philosophy of logic".

[162] Cfr. *ibidem*.

[163] *Ibidem*.

facilmente intuibile come in un tale contesto il flusso informativo possa essere ora perfetto (completo) ora imperfetto (incompleto); motivazione ontologica che ci spinge a ripensare la semantica della logica come un gioco ad informazione.

Bibliografia

E. Agazzi, *Introduzione ai problemi dell'assiomatica*, Vita e Pensiero, Milano 1961.

Aristotele, *Analitici secondi*, Laterza, Bari 1992.

Aristotele, *De interpretatione*, BUR, Milano 1996.

R. E. Auxier e L. E. Hahn, (a cura di), *The Philosophy of Jaakko Hintikka, Hintikka's Intellectual Autobiography, 27 Critical Essays, Hintikka's Replies to His Critics, Hintikka Bibliography*, The Library of Living Philosophers vol. 30, Open Court, Chicago 2006.

N. D. Belnap, *Tonk, Plonk and Plink*, in Analysis, vol. 22, Blackwell, 1962. Ristampato in Philosophical Logic, a cura di P. F. Strawson, Oxford U. P., 1967; tr. it., con una nota introduttiva di G. Usberti, in Significato e teorie del linguaggio, a cura di A. Bottani e C. Penco, FrancoAngeli, Milano 1991, pp. 259-266.

J. Bradfield, *Independence logics and concurrency,* lecture notes in Computer Science, in www.dcs.ed.ac.uk./homejcb/Research/cs100.ps.gz.

J. Bradfield e S. Froschle, *Independence-friendly modal logic and true concurrency*, in Nordic Journal of Computing, 2002, pp. 102-117.

D. Cagnoni, (a cura di), *Teoria della dimostrazione*, Feltrinelli, Milano 1981.

P. Cantù e I. Testa, *Teorie dell'argomentazione. Un'introduzione alle logiche del dialogo*, Bruno Mondadori, Milano 2006.

M. Carapezza e M. D'Agostino, *Logic and the Myth of the Perfect Language*, L&PS – Logic & Philosophy of Science, Vol. VIII, No. 1, 2010, pp. 1-29.

E. Casari, *Introduzione alla logica*, UTET, Torino 1997.

C. Cellucci, *Teoria della dimostrazione*, Boringhieri, Torino 1978.

R. Clark, *Meaningful Games: Exploring Language with Game Theory*, The MIT Press, Cambridge MA 2012.

C. Cozzo, *Teoria del significato e filosofia della logica*, Clueb, Bologna 1994.

M. D'Agostino, *Depth-Bounded Logic for Realistic Agents*, L&PS – Logic & Philosophy of Science, Vol. XI, No. 1, 2013, pp. 3-57.

D. van Dalen, *Logic and Structure*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1980, 1994 3ed.

M. Dummett, *Comments on Professor Prawitz's Paper*, in G. H. von Wright (a cura di), Logic and Philosophy, Martinus Nijhoff Publisher, The Hague 1980, pp.11-18.

M. Dummett, *Truth and other Enigmas*, Duckworth, London 1978; tr. it. parziale: *La verità e altri eningmi*, a cura di M. Santambrogio, Il Saggiatore, Milano 1986.

M. Dummett, *Is the concept of truth needed for semantics?*, in Truth in Perspective: Recent Issues in Logic, Representation and Ontology, a cura di C. Martinez et alii, Ashgate, Aldershot, England 1998, pp. 3-22.

M. Dummett, *Elements of Intuitionism*, Oxford University Press 1977, 2000[2].

M. Dummett, *The Logical Basis of Metaphysics*, Harvard U. P., Cambridge, Mass. 1991, tr. it: *La base logica della metafisica*, a cura di E. Picardi, il Mulino, Bologna 1996.

M. Dummett, *Coimbra Lecture: Meaning and Justification*, in B. McGuinness, (a cura di), Language, Logic and Formalization of Knowledge: Coimbra Lecture and Proceedings of a Symposium held in Siena in September 1997, BIBLIOTHECA, Gaeta 1998, pp.11-3.

M. Dummett, *La natura e il futuro della filosofia*, il melangolo, Genova 2001.

G. Fernandez Diez, *Five Observations Concerning the Intended Meaning of the Intuitionistic Logical Constants*, in Journal of Philosophical Logic 29 (4) August 2000, pp. 409-424.

G. Gentzen, *Untersuchugen über das logische Schliessen*, in Mathematische Zeitschrift, vol. 39, 1935 pp 176-210, tr. ing., *Investigations into Logical Deduction*, in The Collected Papers of Gerhard Gentzen, a cura di, M.E. SzaboNorth-Holland, Amsterdam 1969, pp. 68-103, tr. it., *Ricerche sulla deduzione logica*, in Teoria della dimostrazione, a cura di D. Cagnoni, Feltrinelli, Milano 198, pp. 77-116.

G. Gentzen, *Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie*, in Mathematische Annalen, 112, 1936, pp.493-565; tr. ingl., in The Collected Papers of Gerhard Gentzen, a cura di M. E. Szabo, North-Holland, Amsterdam 1969, pp. 132-201.

A. Heyting, *Intuitionism. An Introduction,* North-Holland, Amsterdam 1966, 2ed.

L. Henkin, *Some remarks on infinitely long formulas,* in Infinitistic Methods. Proceedings of the Symposium on Foundations of Mathematics, Warsaw, Panswowe (2-9 September 1959), Pergamon Press, Wydawnictwo, Naukowe, New York 1961, pp. 167-183.

J. Hintikka, *On The Development of The Model-Theoretic Viewpoint in Logical Theory*, in Synthese 77 (1988), pp. 1-36.

J. Hintikka e G. Sandu, *Informational Independence as a Semantical Phenomenon*, in J. E. Fenstad, et alii (a cura di), Logic, Methodology and Philosophy of Science VIII, Elsevier, Amsterdam 1989, pp. 571-589.

J. Hintikka e G. Sandu, *A Revolution in Logic?*, in Nordic Journal of Philosophical Logic, vol. 1, n° 2, (1996) pp. 169-183.

J. Hintikka, *What was Aristotle doing in his early logic, anyway?: A reply to Woods and Hanson*, in Synthese vol. 113 (1997), pp. 241–249.

J. Hintikka e G. Sandu, *Aspects of Compositionality*, in Journal of Logic, Language and Information n° 10, (2001) pp.49-61.

J. Hintikka, *The Principles of Mathematics Revisited*, Cambridge U. P., Cambridge 1996; tr. fr. a cura di M. Rebuschi, *Les principes des mathématiques revisités,* Vrin, Paris 2007 (edizione rivista e corretta).

J. Hintikka, *Lingua Universalis vs. Calculus Ratiocinator: An ultimate Presupposition of Twentieth-Century of Philosophy*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht 1997.

J. Hintikka, *No Scope for Scope?*, in Linguistic and Philosophy n. 20 (1997), pp. 514-544.

J. Hintikka, *Game-theoretical Semantics as a Challenge to Proof Theory*, in Nordic Journal of Philosophical Logic, vol. 4 (2000), pp. 127-141.

J. Hintikka, *Hyperclassical Logic (A.K.A. IF Logic) and its Implications for Logical Theory*, The Bulletin of Symbolic Logic, vol. 8, n°3 (2002), pp. 404-423.

J. Hintikka, *Socratic Epistemology: Explorations of Knowledge-Seeking by Questioning*, Cambridge University Press, Cambridge 2007.

N. Incardona (a cura di), *Les formes actuelles du vrai*, Enchiridion, Palermo 1989.

Mann A.L., Sandu G., Sevenster M., *Independence-Friendly Logic: A Game-Theoretic Approach*, Cambridge Universtity Press, Cambridge 2011.

P. Martin-Löf, *On the Meanings of the Logical Constants and the Justification of the Logical Laws*, in Atti degli incontri di logica Matematica vol. 2, Dipartimento di matematica, Università di Siena 1985. Ristampato in Nordic Journal of Philosophical Logic, 1 (1996).

P. Martin-Löf, *A path from logic to metaphysics*, in Atti del congresso Nuovi problemi della logica e della filosofia della scienza, Viareggio, 1990, Clueb, Bologna 1991, pp.141-149.

P. Martin-Löf, *Truth and knowability: on the principles C an K of Michael Dummett*, in Truth in Mathematics: Proceedings of the conference in Mussomeli, 13-20 september 1995, a cura di H. G Dales, e G. Olivieri, Clarendon Press, Oxford 1998, pp. 105-114.

C. Mangione e S. Bozzi, *Storia della logica: da Boole ai nostri giorni*, Garzanti, Milano 1993.

M. Mondadori e M. D'Agostino, *Logica*, Mondadori, Milano 1997.

E. Moriconi, *Dimostrazioni e significato. Michael Dummett – Dag Prawitz – Per Martin-Löf*, FrancoAngeli, Milano 1993.

A. Nieuwendijk, *On Logic: Inquiries into the Justification of Deduction*, (Ph.D. thesis), ILLC publications, Universiteit van Amsterdam 1997.

M. Panzarella, *Principio e quantificazione: argomentazione o metafisica?* volume monografico del Giornale di Metafisica, 28 (2006) n. 2, *Forme dell'argomentazione metafisica,* a cura di E. Caramuta e G. Nicolaci, pp. 365-382.

V. Peckhaus, *Calculus ratiocinator versus characteristica universalis? The two traditions in logic, revisited*, in History and Philosophy of Logic 25: 3-14 (2004).

A-V. Pietarinen e T. Tulenheimo, *An introduction to IF logic*, ESSLLI 2004 (dispense del corso).

D. Prawitz, *Natural Deduction: A Proof-Theoretical Study*, Almqvist & Wiksell, Stockholm 1965.

D. Prawitz *Ideas and Results in Proof Theory*, in Procceedings of the second Scandinavian Logic Symposium, a cura di J. E. Fenstad, North-Holland, Amsterdam 1971, pp. 235-307; tr it., *Idee e risultati nella teoria della dimostrazione*, in D. Cagnoni, (a cura di), Teoria della dimostrazione, Feltrinelli, Milano 1981, pp.127-204.

D. Prawitz, *Towards a Foundation of a General Proof Theory*, in Logic, Methodology and Philosophy of Science IV: Proceedings of the Fourth International Congress for Logic, Methodology and Phylosophy of Science, Bucharest, 1971, a cura di P. Suppes et alii, North-Holland, Amsterdam 1973, pp. 225-250.

D. Prawitz, *On the Idea of a General Proof Theory*, in Synthese 27, 1974, Ristampato in, A Philosophical Companion to the First-Order Logic, a cura di Hughes, R. I. G., Hackett Publishing Company, Indianapolis, Cambridge 1993, pp. 212-224. Tr. it. in Teoria della dimostrazione, a cura di D. Cagnoni, Feltrinelli, Milano 1981, pp. 205-220.

D. Prawitz, *Proofs and Meaning and Completeness of the Logical Constants*, in J. Hintikka et alii (a cura di), Essays on Mathematical and Philosophical Logic, Reidel, Dordrecht, Holland 1978, pp. 25-40, Proceedings of the Fourth Scandinavian Logic Symposium and of the First Soviet-Finnish Logic Conference, Finland 1976.

D. Prawitz, *Intuitionistic Logic: a Philosophical Challenge*, in Logic and Philosophy, a cura di G. H von Wright, Martinus Nijhoff Publisher, The Hague 1980, pp. 1-10. Tr. it., con una nota introduttiva di Carlo Penco, *Logica intuizionista. Una sfida filosofica*, in Significato e teorie del linguaggio, a cura di A. Bottani e C. Penco, Franco Angeli, Milano 1991, pp. 173 -187.

D. Prawitz, *Truth and objectivity from a verificationist point of view*, in Truth in Mathematics: Proceedings of the conference in Mussomeli, 13-20 September 1995, a cura di H. G. Dales e G. Olivieri, Clarendon Press, Oxford 1998, pp. 41-51.

D. Prawitz, *Truth from a constructive perspective*, in Truth in Perspective: Recent Issues in Logic, Representation and Ontology, a cura di C. Martinez et alii, Ashgate, Aldershot, England 1998, pp. 23-35.

F. J. Pelletier, *A Brief History of Natural Deduction*, in History and Philosophy of Logic, 20 (1999) pp. 1-31, Taylor & Francis LTD, London.

C. Penco, *Significato, uso, procedure*, in Lingua e stile 27 (1992), pp. 87-99.

A. N. Prior, *Logic and the Basis of Ethics*, Clarendon Press, Oxford 1949.

A. N. Prior, *The Runabout Inference-Ticket*, in Analysis, vol. 21, Blackwell, 1960. Ristampato in Philosophical Logic, a cura di P. F. Strawson, Oxford U. P., 1967; tr. it., con una nota introduttiva di G. Usberti, *Il passepartout inferenziale*, in Significato e teorie del linguaggio, a cura di A. Bottani e C. Penco, FrancoAngeli, Milano 1991, pp. 253-257.

S. Read, *Harmony and Autonomy in classical Logic*, in Journal of Philosophical Logic. 29 (2), April 2000, pp. 123-154.

G. Sandu, *Games and Logic*, in The Baltic International Yearbook of Cognition, Logic and Communication, Vol. 8: *Games, Game Theory and Game Semantics,* Riga 2013.

G. Sandu, *On the Logic of Informational Independence and its Applications*, Journal of Philosophical Logic n° 22 (1993), pp. 29-60.

G. Sandu e T. Hittinen, *IF logic and Foundations of Mathematics*, in Synthese, n° 126 (2001), pp. 37-47.

G. Sandu e T. Tulenheimo, *Games of Imperfect Information and Modal Logic*, The University of Helsinki 2002.

G. Sundholm, *Costructions, Proofs and the Meaning of Logical Constants*, in Journal of Philosophical Logic, 12 (1983), pp. 151-172.

G. Sundholm, *Inference, Consequence, Implication*, in Philosophia Mathematica, 6 (1998), pp. 178-194.

G. Sundholm, *Vestiges of Realism*, in B. McGuinness e G. Oliveri, (a cura di), The Philosophy of Michael Dummett, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1993.

G. Sundholm, *Existence, Proof and Truth-Making*, in Topoi, 13 (1994), pp. 117-126.

G. Sundholm, *Implicit Epistemic Aspects of Constructive Logic*, in Journal of Logic, Language, and Information, 6 (1997), pp. 191-212.

G. Sundholm, *A Century of Inference*, (text of an invited lecture delivered at LMPS 11, Section 16, on August 23, 1999).

A. Tarski, *Der Wahreitsbegriff in den formalisierten Sprachen*, in Studia filosofica 1 (1935-36), pp. 261-405; tr. ingl. in A. Tarski, *Logic, Semantics, Metamathematics*, Clarendon Press, Oxford 1956; tr. it. in F. Rivetti Barbò, *L'antinomia del mentitore nel pensiero contemporaneo*, Vita e Pensiero, Milano 1961, pp. 391-675.

A. Tarski, *The Semantic Conception of Truth*, in Philosophy and Phenomenological Research 4 (1944).

A. S. Troelstra, *Principles of Intuitionism*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1969.

A. S. Troelstra e D. van Dalen, *Constructivism in Mathematics*, North-Holland, Amsterdam 1988, 2 voll.

G. Usberti, *On the Intuitive Notion of Justification*, in B. McGuinness, (a cura di), Language, Logic and Formalization of Knowledge: Coimbra Lecture and Proceedings of a Symposium held in Siena in September 1997, BIBLIOTHECA, Gaeta 1998, pp. 223-235.

A. S. Troelstra e H. Schwichtenberg, *Basic Proof Theory*, Cambridge University Press 2000, 2ed.

J. Väänänen, *Dependence Logic: A New Approach to Independence Friendly Logic*, Cambridge University Press, Cambridge 2007.

L. Wittgeinstein, *Philosophical Investigation*, Basil Blackwell, Oxford 1986, 3° ed.

L. Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus*, Einaudi, Torino 1995.