Un delicato equilibrio tra macchine, algebra e geometria: Descartes e una possibile estensione differenziale

Pietro Milici

Ne "La Géométrie" del 1637 Descartes ha trovato un equilibrio tra costruzioni geometriche e manipolazione simbolica grazie all'introduzione di opportune macchine idealizzate. In particolare gli strumenti del metodo cartesiano erano l'algebra polinomiale (analisi) ed opportune costruzioni diagrammatiche (sintesi). La restrizione cartesiana della geometria alle curve algebriche viene superata con un metodo generale da Newton e Leibniz con l'introduzione dell'infinito nella parte analitica, mentre il punto di vista sintetico perde sempre più terreno rispetto all'approccio simbolico, relegando la geometria a mezzo di visualizzazione (non più di costruzione).

L'obbiettivo di questo intervento è esaminare come l'approccio fondazionale di Descartes (analisi senza l'infinito e sintesi con costruzioni diagrammatiche) sia stato esteso storicamente in due diversi momenti: nel tardo XVII secolo dal *movimento trazionale* per quanto riguarda la parte sintetica (oltre il canone di Descartes ma sempre come idealizzazione di macchine ideali), e nella prima metà del XX secolo per la parte analitica con l'*algebra differenziale* (attualmente una branca di *algebra computazionale*).

Il nocciolo duro del movimento trazionale è stato il fatto di poter costruire una curva date le proprietà della sua tangente (*problema inverso della tangente*): ciò è implementabile fisicamente estendendo le macchine *algebriche* con una *ruota* che, ruotando sul piano senza strisciare, non permette il movimento trasversale rispetto alla sua direzione.

Per quanto riguarda invece l'algebra differenziale, l'estensione fondamentale rispetto all'algebra polinomiale è dovuta al passaggio da variabile come numero a variabile come funzione: così facendo oltre a somma e prodotto può venire introdotta l'operazione *algebrica* di "derivata". Anche se la definizione generale delle funzioni richiede l'infinito, esse possono essere manipolate in maniera finita, esattamente come accade per l'algebra polinomiale reale in cui la manipolazione non richiede la definizione di $\mathbb{R}$.

La caratteristica del *movimento trazionale* e dell'*algebra differenziale* è che esse dovrebbero permettere di costruire la stessa classe di funzioni, quelle "algebricamente differenziali" (soluzioni di equazioni differenziali algebriche), escludendo quindi le funzioni iper-trascendenti come la Γ di Eulero e la ζ di Riemann. Pertanto si ha un nuovo equilibrio tra manipolazione algebrica e costruzioni geometriche (sempre tramite l'introduzione di macchine idealizzate ed evitando l'uso dell'infinito), un equilibrio che porta ad una classificazione delle funzioni oltre il dualismo algebriche/trascendenti.

Bibliografia

Bos, H. J. M.: *Redefining Geometrical Exactness, Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction*, Springer-Verlag, New York (2001).

Milici, P.: A constructive approach to the infinitesimal analysis: epistemologic potentials and limits of the "tractional motion". In *From Logic to Practice - Italian Studies in the Philosophy of Mathematics*, Springer (in press).

Ritt, J. F.: *Differential equations from the algebraic standpoint*, vol. 14. American Mathematical Soc. (1932).

Tournès, D.: *La construction tractionnelle des équations différentielles*. Paris: Blanchard (2009).