UN SOLUTORE MESHFREE PER M/EEG

Guido Ala[1]*, Gregory Fasshauer*[2]*, Elisa Francomano*[3]*, Salvatore Ganci*[1]*, Michael McCourt*[4]

[1]DEIM, [3]DICGIM
Università degli Studi di Palermo
Palermo (Italia)

[2]Department of Applied Mathematics
Illinois Institute of Technology
Chicago (USA)

[4]Department of Mathematical and Statistical Sciences
University of Colorado
Denver (USA)

Parole chiave: metodi numerici mesh-free, MEG, EEG

La ricerca, avviata nell'ultimo biennio, riguarda la messa a punto di un metodo numerico *mesh-free* nell'ambito delle tecniche di elettroencefalografia (EEG) e magnetoencefalografia (MEG), con l'obiettivo di gestire la complessità fisico-geometrica del problema in modo più efficiente rispetto a quanto attualmente in uso. Infatti, l'approccio *state-of-the-art* è basato su metodi numerici *mesh-based* che richiedono una reticolazione preliminare bidimensionale (boundary element method - BEM) o tridimensionale (finite element method - FEM) del dominio di interesse; inoltre il BEM necessita di procedure di integrazione numerica dal costo computazionale elevato e può introdurre artefatti nella ricostruzione del *pattern* di attivazione neuronale. Il problema della localizzazione delle sorgenti dell'attività neuronale tramite M/EEG riveste un importante interesse scientifico nella ricerca medica. L'attività cerebrale genera potenziali elettrici e campi magnetici che possono essere rilevati attraverso appositi elettrodi esterni (EEG) e mediante SQUID posti in tutta prossimità della testa (MEG). Dal rilievo delle suddette grandezze, risolvendo un problema inverso, è possibile stimare le sorgenti neuronali: il punto cruciale è allora rappresentato dalla soluzione accurata e rapida del problema diretto. A tal fine, viene proposto il metodo delle soluzioni fondamentali (MFS) come alternativa *mesh-free* ai metodi tradizionali. La soluzione del problema diretto viene ottenuta tramite il metodo delle soluzioni particolari (MPS), risolvendo numericamente un problema ai valori al contorno nel potenziale elettrico scalare. Infatti, in relazione alle caratteristiche dei tessuti biologici e delle più elevate frequenze relative all'attività elettrica cerebrale, è accettabile l'approssimazione quasi-stazionaria delle equazioni di Maxwell.

È stato inoltre dimostrato che le sorgenti elettriche cerebrali possono essere rappresentate mediante dipoli di corrente. La testa può essere rappresentata mediante un dominio conduttore costituito da M gusci annidati ed elettricamente omogeni, posizionati in un mezzo a conducibilità nulla. Sia σ_i la conducibilità dell'i-esimo guscio delimitato dal contorno $\partial\Omega_i$. Comunemente, si considerano tre gusci per rappresentare encefalo, cranio e scalpo. Sulla base di tali assunzioni, il problema del potenziale scalare elettrico ϕ dovuto ad un dipolo di corrente posto in $\mathbf{r}'\in\Omega$ può essere formulato in modo tale che risulti $\phi=\varphi_F+\varphi$, dove φ_F è il potenziale, la cui espressione analitica è nota, dovuto al dipolo di corrente posizionato in $\mathbf{r}'$ in un mezzo omogeneo e indefinito di conducibilità pari a quella del mezzo in cui il dipolo è effettivamente posto, mentre φ è dato dalla soluzione del seguente problema di Laplace:

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi(\mathbf{r})=0 & \mathbf{r}\in\Omega \\ \varphi(\mathbf{r}^-)=\varphi(\mathbf{r}^+) & \mathbf{r}\in\partial\Omega_i \\ \sigma_i\mathbf{n}(\mathbf{r})\cdot\nabla\varphi(\mathbf{r}^-)-\sigma_{i+1}\mathbf{n}(\mathbf{r})\cdot\nabla\varphi(\mathbf{r}^+)=(\sigma_{i+1}-\sigma_i)\mathbf{n}(\mathbf{r})\cdot\nabla\varphi_F(\mathbf{r}) & \mathbf{r}\in\partial\Omega_i \end{cases} \quad (1)$$

in cui $\mathbf{n}$ denota il versore normale al contorno $\partial\Omega_i$ mentre $\mathbf{r}^-$ e $\mathbf{r}^+$ rappresentano i punti limite di due successioni che tendono al punto $\mathbf{r}$ su $\partial\Omega_i$, provenendo dal mezzo all'interno del contorno e dal mezzo all'esterno del contorno, rispettivamente [2].

Il *metodo delle soluzioni fondamentali* [3] è basato sull'espansione della funzione incognita mediante un *set* di funzioni di base radiali (RBF), anche dette *kernel*:

$$\varphi(\mathbf{r}) \cong \hat{\varphi}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N} c_j K(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) \tag{2}$$

dove $\{\mathbf{r}_j\}_{j=1}^{N}$ sono i *centri* delle funzioni di base K e $\{c_j\}_{j=1}^{N}$ i coefficienti dell'espansione.

In particolare il metodo prevede che vengano impiegate funzioni di base che siano le soluzioni fondamentali dell'equazione differenziale (di Laplace) che descrive il problema, sicché è possibile operare la collocazione esclusivamente sui contorni. Ne risultano solutori particolarmente efficienti dal punto di vista computazionale e a convergenza spettrale.
Noti il potenziale elettrico e la permeabilità magnetica μ del mezzo, l'induzione magnetica è calcolabile per integrazione a partire della nota relazione di Ampere-Laplace:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu}{4\pi} \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{r}^*) \nabla \phi(\mathbf{r}^*) \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}^*}{\left\| \mathbf{r} - \mathbf{r}^* \right\|^3} d\Omega^* \tag{3}$$

A titolo di esempio, per un dipolo posto nello strato più interno di una sfera a tre strati (dati in Tab. 1), si riporta il confronto tra i risultati inerenti al potenziale scalare forniti da un solutore basato sulla formulazione BEM simmetrica e quelli ottenuti tramite il solutore MFS proposto (Tab. 2).

Tabella 1 – Dati simulazione esemplificativa

Raggi degli strati	R_1=8,7 cm, R_2=9,2 cm, R_3=10 cm
Posizione del dipolo	(0, 0, 5.22) [cm]
Momento di dipolo	(1, 0, 0) [A·m]
Conducibilità strati	σ_1=0,33 S/m, σ_2=0,125 S/m, σ_3=0,33 S/m

Tabella 2 – Confronto tra MFS e BEM al variare del numero N di punti di collocazione/di triangoli.

	Errore relativo in norma 2 sul potenziale scalare in superficie	
N	**MFS**	**BEM**
900	3,184e-02	2,399e-02
1598	7,408e-03	1,075e-02
2842	1,672e-03	6,694e-03
5058	4,775e-05	3,661e-03
8994	4,853e-07	1,771e-03

In Fig. 1, con riferimento al problema diretto MEG relativo ad una geometria reale, è riportato il confronto tra le distribuzioni dell'induzione magnetica su una superficie esterna alla testa, calcolate tramite MFS e tramite BEM, e dovute a 1000 dipoli di corrente unitari.

(a) **(b)**

Figura 1 – Induzione magnetica [T] in prossimità della testa calcolata tramite (a) MFS e (b) BEM.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Fasshauer, *"Meshfree approximation methods with MATLAB.,* World Scientific Publishing Company, 2007.
[2] G. Ala, G. Di Blasi, E. Francomano, "A numerical meshless particle method in solving the MEG forward problem". *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields,* vol. 25, pp. 428-440, 2012.
[3] G. Fairweather, A. Karageorghis, "The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems". *Advances in Computational Mathematics,* vol. 9 (1), pp. 69–95, 1998.