Intorno alla risoluzione delle equazioni algebriche di quinto grado per funzioni ellittiche in Betti e Brioschi

Tra opere a stampa e corrispondenze epistolari (1850-1860)

Anna Maria Mercurio,[1] Nicla Palladino[1]

Riassunto

Si presenta lo studio, condotto sugli articoli a stampa e sulle corrispondenze epistolari, edite e inedite, riguardante la ricerca della soluzione di un'equazione algebrica di quinto grado, secondo Betti e Brioschi e, anche, necessariamente, secondo Hermite e Kronecker, accomunati ai due matematici italiani dallo stesso tema di ricerca. Studio riferito agli anni cruciali che vanno dal 1850 al 1860. Si espongono, in profondità, le idee espresse e anche le difficoltà incontrate da questi autori che, partendo dalla *teoria di Galois*, ripresa e sviluppata da Betti, provavano a trovare, utilizzando le funzioni ellittiche, una "soluzione effettiva" per questo tipo di equazione.

Summary

We present the research for the solution of quintic algebraic equation, developed by Betti, Hermite, Kronecker and Brioschi, by support of *Galois' theory* and elliptical function, focused on the crucial years betweeen 1850 and 1860. We have worked on the epistolar relationships among these authors and the articles published by them. In this paper we remarked principally that they got into difficulties to obtain concrete solutions.

1. È recente la pubblicazione dell'ampio lavoro dal titolo *La corrispondenza epistolare Brioschi-Genocchi*,[2] comprendente sessantanove lettere di Francesco Brioschi (1824-1897) ad Angelo Genocchi (1817-1889) più quattro lettere di risposta, scritte da Genocchi. Un lavoro che documenta significativamente lo spirito risorgimentale che animò il modo di vivere e, in una certa misura, di fare scienza di molti matematici italiani, in particolare di Genocchi e Brioschi tra le figure più rappresentative della seconda metà dell'Ottocento.

---

[1] Dipartimento di Matematica e Informatica – Università degli Studi di Salerno.

Ricerca eseguita nell'ambito del "Gruppo del 60%", operante presso l'Università degli Studi di Salerno (responsabile prof. F. Palladino).

[2] Nota di L. Carbone, A. M. Mercurio, F. Palladino, N. Palladino, «Rendiconto dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli», vol. LXXIII (2006), pp. 263-386.

Con lo scorrere degli anni Cinquanta del secolo XIX, si avvertiva il bisogno di organizzare le strutture, anche culturali, del nuovo stato unitario italiano che si andava profilando; e così, la corrispondenza epistolare citata documenta le numerose iniziative dell'attivissimo Brioschi, che comprendono, per cominciare, la possibile edizione di un "*giornale matematico italiano da surrogarsi agli Annali del Tortolini* [sono gli *Annali di Scienze matematiche e fisiche* che uscivano a Roma, capitale dello Stato Pontificio, e che dal 1858 si chiameranno *Annali di matematica pura ed applicata*, n.d.r.], *quando non potesse essere la continuazione di questi*" (si legge dalla prima lettera ivi raccolta, 6 Maggio 1857), cosa che sarà compiuta procedendo secondo quest'ultima alternativa, e di un viaggio di lavoro, fatto in compagnia di Enrico Betti (1823-1892) e Felice Casorati (1835-1890), altri notevoli esponenti della "matematica risorgimentale", attraverso gli stati e le città della Germania e in Francia (partirono il 20 Settembre del 1858, ritornarono in Italia il 29 Ottobre successivo), per approfondire la conoscenza degli uomini di scienza e delle istituzioni che li vedevano organizzati. Dalla lettera posta al numero 22 della stessa raccolta, che rappresenta forse il documento più dettagliato che, al riguardo, sia stato fino ad ora pubblicato, si viene a conoscere anche l'itinerario seguito: "*[...] abbiamo tenuto questa via: Zurigo, Monaco, Lipsia, Dresda, Berlino, Gottinga, Heidelberg, Carlsruhe, Strasbourg, Parigi. [...]*".

L'esperienza fatta, nel viaggio europeo, fu senz'altro utile a Brioschi per avviare, nel 1862, l'impresa consistente nella fondazione dell'Istituto Tecnico Superiore (il celebrato Politecnico di Milano) che egli diresse a partire dall'anno di apertura dell'Istituto, 1863, e per molti anni a seguire. Ma lo stesso viaggio dovette essere, con molta probabilità, pure utile, a Brioschi, per un confronto di idee, con Kronecker ed Hermite, incontrati di persona, sul problema della risoluzione delle equazioni algebriche di quinto grado per funzioni ellittiche, un tema di ricerca che andava intensamente attraendo la sua mente dotata di notevoli capacità algebriche e calcolatorie.

Scorrendo *La corrispondenza epistolare Brioschi-Genocchi*, si vede che le lettere di Brioschi sono addensate –circa quarantasei– sostanzialmente nel periodo 1857-1865 e contengono, tra gli argomenti principali di discussione, le ricerche, da lui eseguite con l'ausilio delle funzioni ellittiche, intorno alla "*soluzione effettiva*" di una generica equazione algebrica di quinto grado in una incognita[3] e, in più, un accenno al progetto (che non verrà mai realizzato) di raccoglierle in un libro: "*Vi aggiungo anche che varj risultati sulle equazioni di quinto grado che avrei in pronto non li pubblicai prima, perché mi ero fisso di voler pubblicare un libro su questo argomento*" (ivi, lettera 42 di Brioschi a Genocchi, del 10 Luglio 1865). Questo fatto ha portato, naturalmente, ad approfondire, mediante una specifica ricerca, l'argomento espresso dall'articolo che ora si presenta.

---

[3] Una generica equazione algebrica, di grado n qualsiasi, in una sola incognita, ha la forma:

$$P(x)= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

dove n è un numero intero positivo e i coefficienti a_i ($i=0, 1, \ldots, n$) appartengono al campo dei numeri reali.

Gli anni che vanno dal 1850 al 1860 possono essere considerati cruciali per la ricerca della soluzione di un'equazione algebrica di quinto grado. Essi si aprono con gli studi condotti dall'altra notevole figura di riferimento, considerata in questo articolo, Enrico Betti (1823-1892), il quale pubblica l'importante memoria *Sulla risoluzione delle equazioni algebriche*[4] in cui, principalmente, sviluppa in forma organica le idee di Évariste Galois (1811-1832), conferendo ad esse lo *status* di *teoria*; e vedono poi apparire le fondamentali pubblicazioni, comunicate più o meno in contemporanea nel 1858 (definibile come *annus admirabilis*), di Charles Hermite (1822-1901), Leopold Kronecker (1823-1891) e Brioschi[5] (tutti quanti, questi autori, si servono di *trascendenti ellittiche*) che fanno sperare che la ricerca della "*soluzione effettiva*", dell'equazione algebrica di quinto grado, perseguita con particolare sagacia da Brioschi, possa essere rimandata ormai, per dirla con un'espressione di Betti, scritta a commento del lavoro di Kronecker del 1858,[6] ad un "*affare di calcolo*", anche se esso "*forse è assai complicato*" come Betti aggiunge però, con una certa preoccupazione, nella medesima lettera che egli invia a Brioschi (Firenze, 13 Agosto 1858; il documento, inedito, è pubblicato qui in *Appendice*).

Lo studio, i cui risultati ora si presentano, è stato condotto sulla base degli articoli a stampa e delle corrispondenze epistolari (edite ed inedite) riguardanti non soltanto Betti e Brioschi ma anche, come si potrà costatare in realtà, Hermite e Kronecker.

In particolare, l'esame delle lettere di Brioschi è risultato molto utile anche perché questi, preso da una grande quantità di occupazioni –scientifiche, istituzionali e politiche–, in un periodo in cui l'Italia si andava costituendo ed organizzando in regno unito, si vedeva frequentemente privato della possibilità di lavorare, come avrebbe desiderato, "*negli studj di matematica pura*" (così scrive a Genocchi, ancora lettera 42, prima citata); per questa ragione, egli, nel riprendere i suoi studi, redige, di volta in volta, brevi e interessanti riepiloghi concernenti lo *status quaestionis*.

Tutte le lettere consultate, però, contribuiscono efficacemente a rivelare il profondo dibattito scientifico e le tensioni che si accumulavono intorno agli ostacoli più ardui e, anche, indirettamente, a rendere noti fatti particolari di una certa

[4] «Annali di Scienze matematiche e fisiche», serie I, t. III (1852), pp. 49-115, in *Opere matematiche di Enrico Betti*, pubblicate per cura della R. Accademia de' Lincei, Milano, Hoepli, 1903-1913, 2 voll., t. I, pp. 31-80. Si parlerà più in dettaglio di questa memoria nella nota 35.

[5] I lavori di Hermite, Kronecker e Brioschi sono rispettivamente, *Sur la résolution de l'équations du cinquième degré*, «Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences», t. XLVI (1858), pp. 508-515, in *Oeuvres de Charles Hermite*, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences, par Émile Picard, Paris, Gauthier-Villars, 1908, 4 voll., t. II, pp. 5-12, *Sur la résolution de l'équation du cinquième degré; extrait d'une Lettre adressée à M. Hermite; par M. L. Kronecker*, «Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences», t. XLVI (1858), pp. 1150-1152, e riportato anche in *Leopold Kronecker's Werke*, Herausgegeben auf veranlassung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften von K. Hensel, Vierter Band, Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner, 1929, 5 voll., t. IV, pp. 43-47, *Sulla risoluzione delle equazioni di quinto grado* «Annali di matematica pura ed applicata-Rivista bibliografica», serie I, t. I (1858), pp. 256-259, in *Opere matematiche di Francesco Brioschi*, Milano, Hoepli, 1901-1909, 5 voll., t. I, pp. 335-341, appendice compresa.

[6] *Sur la résolution de l'équation du cinquième degré; extrait d'une Lettre adressée à M. Hermite; par M. L. Kronecker*, citato qui, alla nota precedente.

importanza come, per esempio, un sussistente antagonismo tra matematici germanici e francesi.

Si parte così dalla lettera che Betti scrive al suo maestro Ottaviano Fabrizio Mossotti (1791-1863), il 22 Aprile del 1851, per illustrargli il senso delle sue due prime note a stampa pubblicate su quest'argomento e per chiedergli aiuto allo scopo di ricevere in prestito le *Opere complete* di Abel, e si passa attraverso una lettera di Brioschi a Betti, 29 Marzo del 1859 (si veda qui nota 77), in cui Brioschi, nel commentare il contenuto di una missiva inviatagli da Kronecker, scrive:

"*Lo scopo principale di questa lettera di Kronecker è la censura palese dei risultati di Hermite e la censura celata dei metodi dello stesso. Noi già abbiamo avuto varie volte occasione di udire censure analoghe intorno ai lavori dei matematici francesi*";

episodio che rivela come Brioschi e gli *Annali di matematica pura e applicata* fungano, su questo tema di ricerca, da non trascurabile polo di riferimento per le argomentazioni di Hermite e Kronecker.

2. La ricerca delle soluzioni delle equazioni algebriche, di vario grado, in una incognita, rappresenta un capitolo molto interessante della storia delle matematiche, nel quale vengono strettamente ad intrecciarsi, per le equazioni di quinto grado, contributi provenienti dai settori dell'algebra (teoria dei numeri e teoria delle equazioni) e dell'analisi infinitesimale cosiddetta complessa (specificamente, funzioni ellittiche).

Per secoli, l'obiettivo dei matematici è stato quello di tentare di trovare, per l'equazioni algebriche di qualunque grado, una *formula risolutiva per radicali algebrici* (equazioni *risolubili per radicali*), vale a dire un'espressione, per le radici dell'equazione algebrica, che, a partire dai coefficienti dell'equazione stessa, fosse il risultato dell'applicazione di un numero finito di operazioni *algebriche* (somma e sottrazione, prodotto e divisione, oltre all'estrazione di radici di vario indice).

Era un dato acquisito, nella seconda metà del XVI secolo, che le equazioni algebriche di grado inferiore a cinque fossero risolubili per radicali. Si sapevano risolvere per radicali le equazioni algebriche di secondo grado, sin dai tempi della civiltà babilonese; mentre le equazioni di terzo grado (con coefficienti interi e "rotti", cioè razionali) erano state risolte, mediante radicali, proprio nel XVI secolo, da Scipione Dal Ferro (1465-1526), Nicolò Tartaglia (1466-1557) e Girolamo Cardano (1501-1576); infine, qualche anno più tardi, Lodovico Ferrari (1522-1565) risolveva, con radicali, anche le equazioni di quarto grado. Si erano poi avuti, per circa due secoli, tentativi per risolvere ancora mediante radicali le equazioni algebriche di quinto grado. Avevano tentato di farlo matematici come Leonhard Euler (1707-1783), Etienne Bézout (1730-1783), Alexandre Théophile Vandermonde (1735-1796), Joseph Louis Lagrange (1736-1813) ed altri. Sembra che nessuno, prima di Paolo Ruffini (1765-1822), abbia però pensato di provare, al contrario, l'impossibilità di risolvere per radicali le equazioni algebriche di quinto grado.

Nella seconda metà del XVIII secolo lo studio delle soluzioni di un'equazione algebrica si orientò in una nuova direzione: non più verso la scoperta di una formula risolutiva esplicita ma bensì verso la ricerca della possibile affermazione dell'esistenza di soluzioni. Il 1799 fu un anno di svolta per la teoria delle equazioni algebriche. Furono pubblicati, infatti, due importantissimi lavori, l'uno sul *Teorema fondamentale dell'algebra*, dovuto a Carl Friedrich Gauss (1777-1855), col quale si afferma che *un'equazione (algebrica) di grado n ammette sempre n soluzioni nel campo dei numeri complessi, tenuto conto che alcune soluzioni possono essere multiple*;[7] e l'altro, dal titolo *La Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazioni generali di grado superiore al quarto*,[8] dovuto a Paolo Ruffini. Il risultato, conseguito da Ruffini, asserisce, in breve, che *un'equazione algebrica di grado superiore al quarto non è, in generale, risolubile per radicali*. Ovviamente esso non afferma che *qualunque* equazione algebrica di grado superiore al quarto non sia risolubile per radicali, ma che *esistono* equazioni di grado superiore al quarto non risolubili per radicali: così, ad esempio, $x^5+x+1=0$ non è risolubile per radicali mentre lo è $x^5-x^4-x+1=0$; al riguardo si possono trovare, naturalmente, tantissimi altri esempi.

A vent'anni dalla pubblicazione della *Teoria generale delle equazioni* di Ruffini, un giovane matematico norvegese, poi diventato famoso, Niels Henrik Abel (1802-1829), tentava pure lui di risolvere per radicali le equazioni di quinto grado; e questo è probabilmente spiegabile sia per il fatto che l'opera di Ruffini era poco conosciuta dai matematici europei sia perché i ragionamenti ivi svolti erano talmente complicati da non essere facilmente comprensibili.

Ma poi lo stesso Abel pubblicò, nel 1824, un lavoro dal titolo *Mémoire sur les équations algébriques, où l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré*,[9] in cui arrivò, mettendosi nella visione di Ruffini, a

---

[7] C. F. Gauss, *Demonstratio Nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse, quam pro obtinendis summis philosophia honoribus inclito philosophorum ordini Academiae Iuliae Carolinae exhibuit Carolus Fridericus Gauss*, Helmstadii, apud C. G. Fleckeisen, 1799 (in *Carl Friedrich Gauss Werke*, herausgegeben von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 12 voll., t. III (1866), pp. 1-30). In questa sua tesi di dottorato Gauss vuole offrire una "solida dimostrazione" secondo cui data una qualsiasi equazione algebrica

$$X = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + etc. + M = 0\ ,$$

dove m è un numero intero positivo, allora: "*Quamvis functionem talem ut X semper in m factores simplices resolvi posse*, *sive hoc quod eum illo prorsus conspirat, quamvis aequationem m*[ti] *gradus revera habere m radices*".

[8] Bologna, Nella Stamperia di S. Tommaso d'Aquino, 2 voll., Parte I di pp. I-VIII e 1-206; Parte II di pp.207-516; lavoro raccolto in *Opere matematiche di Paolo Ruffini*, pubblicate sotto gli auspici del *Circolo matematico di Palermo*, a cura di Et. Bortolotti, tomo I, Palermo, Tipografia Matematica di Palermo, 1915, pp. 1-324 (mentre i tomi II e III furono pubblicati, rispettivamente nel 1953 e 1954, sotto gli auspici dell'Unione Matematica Italiana, ancora a cura di Et. Bortolotti, Roma, Cremonese). In questo primo tomo il Bortolotti vi aggiunse anche l'*Appendice alla teoria delle equazioni. Rischiarimenti e risposte alle obbiezioni*, un fascicolo manoscritto di Ruffini, composto nel 1802 circa e rimasto inedito fino al 1915.

[9] Brochure imprimée chez Grøndahl, Christiania [oggi Oslo], 1824. Inserita in N. H. Abel, *Oeuvres complètes*, Christiania, Grøndahl & Son, 1881, 2 voll., t. I, pp. 28-33.

dimostrare l'impossibilità di trovare una soluzione per radicali dell'equazione algebrica generale di quinto grado:

"*Il est impossible de résoudre par des radicaux l'équation générale du cinquième degré*";

e trovando anche modo di aggiungere:

"*Il suit immédiatement de ce théorème qu'il est de même impossible de résoudre par des radicaux les équations générale des degrés supérieurs au cinquième*",[10]

espressione con cui chiude la memoria.

È probabile che solo qualche anno dopo Abel si accorse che il risultato a cui era pervenuto era stato già dimostrato in precedenza da Ruffini.

Due anni più tardi, nel 1826, Abel pubblicò, in aggiunta, un articolo molto ampio dal titolo: *Démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales qui passent le quatrième degré*,[11] dove conclude con l'affermazione:

"*Donc les équations des quatre premiers degrés sont les seules qui puissent être résolues algébriquement d'une manière générale*".[12]

Il riferimento ad Abel porta a ricordare che egli, insieme al matematico tedesco Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851), è stato l'ideatore della *teoria delle funzioni ellittiche*, settore dell'analisi complessa che oltre ad essere indispensabile in svariati e attualissimi campi di ricerca, è legato alla risoluzione delle equazioni algebriche di grado superiore al quarto.

Si vuole ora richiamare qualche punto di quest'ultima teoria, per rendere più agevole l'esposizione di alcuni peculiari contenuti delle ricerche di Betti e Brioschi, e anche degli altri matematici che intervengono nel dibattito scientifico che si viene a descrivere, sulla risoluzione delle equazioni algebriche di quinto grado, effettuate utilizzando, quale strumento, le funzioni ellittiche.

3. Le prime nozioni intorno alla teoria delle funzioni ellittiche emergono nel diciottesimo secolo e sono legate all'impossibilità di integrare in termini finiti, con il solo uso delle trascendenti elementari, funzioni irrazionali anche molto semplici che spesso s'incontrano in svariati problemi di matematica. Al riguardo, si pensi, per fare degli esempi, alla rettificazione dell'ellisse, affrontata già nel Seicento da John Wallis (1616-1703) nell'*Arithmetica infinitorum*, che è del 1655, alla rettificazione, poi, della lemniscata[13] intrapresa da Giulio Carlo de' Toschi di Fagnano (1682-1766)[14] nel

---

[10] Per i passi citati si veda la pag. 33 delle *Oeuvres complètes* di Abel, cit. in nt. 9.

[11] Pubblicato in «Journal für die reine und angewandte Mathematik», Bd. 1, Berlin, 1826 in *Oeuvres complètes* di Abel, cit. in nt. 9, t. I, pp. 66-87. Questa memoria è accompagnata nelle *Oeuvres* da un'appendice dal titolo *Analyse du mémoire précédent*.

[12] *Oeuvres complètes* di Abel, cit. in nt. 9, p. 87.

[13] Si ricorda che la *lemniscata* è una curva piana, che in coordinate cartesiane ha equazione $(x^2+y^2)^2-a^2x^2+a^2y^2=0$ (*a* è una costante positiva) mentre in coordinate polari ha equazione $r^2=a^2cos^2\vartheta$. L'integrale che esprime la lunghezza di tale curva è del tipo:

$$\int\frac{a\,dz}{\sqrt{a^2-z^2}}.$$

Settecento, e successivamente, nello stesso secolo, a vari studi di Eulero e di altri autori condotti ancora su questo tipo di argomento.

L'integrale che fornisce la lunghezza di un generico arco di un'ellisse di semiassi *a* e *b*, posto $x=asen\varphi$ e $y=bcos\varphi$, è dato da $a\int\sqrt{1-k^2sen^2\varphi}\,d\varphi$ (con $k^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$); integrale che non si può esprimere mediante trascendenti elementari. In generale, le funzioni razionali del tipo $R(x,\sqrt{a_4x^4+4a_3x^3+6a_2x^2+4a_1x+a_0})$, dove R rappresenta una funzione razionale dei due argomenti dati, non sono sempre integrabili in termini finiti mediante trascendenti elementari, pertanto è stato necessario introdurre delle nuove funzioni, le cosiddette *funzioni ellittiche* o *trascendenti ellittiche*, delle quali tra breve si ricorderà qui la loro definizione.

Tra i matematici che hanno studiato gli integrali delle funzioni razionali del tipo sopra riportato, ha un ruolo di particolare evidenza Adrien-Marie Legendre (1752-1833),[15] il quale ha dimostrato che tali integrali possono ricondursi, mediante procedimenti razionali, ai seguenti tre tipi:

$$F(\varphi,k)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2sen^2\varphi}}$$

$$E(\varphi,k)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2sen^2\varphi}\,d\varphi$$

$$\Pi(\varphi,n,k)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1+n\,sen^2\varphi)\sqrt{1-k^2sen^2\varphi}},$$

(dove $-1\leq\varphi\leq1$, $n\neq0$, e $0\leq k\leq1$), chiamati comunemente *integrali di Legendre*, rispettivamente *di prima*, *seconda* e *terza specie*, o anche semplicemente *integrali ellittici*, i quali, posto $x = sen\varphi$, prendono la forma:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$\int\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx$$

$$\int\frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

---

[14] Cfr. G. Ferraro-F. Palladino, *Contributo alla conoscenza del matematico Giulio Carlo de' Toschi di Fagnano (con lettere a C. Galiani e G. Grandi)*, «Archivio Storico per le Provincie Napoletane», CX dell'intera collezione, Società Napoletana di Storia Patria, Napoli, 1992, pp. 153-181; in particolare si può vedere, in Appendice, la lettera 1 che Fagnano invia a Celestino Galiani il 22 Maggio 1751, dove egli ricorda i suoi lavori, sulla rettificazione della lemniscata, pubblicati per la prima volta, nel 1718, sul *Giornale de' letterati d'Italia*, edito a Venezia (lavori poi raccolti nelle *Produzioni Matematiche*, edite a Pesaro, in due tomi, nel 1750).

[15] Legendre presentò, nel 1793, all'Accademia delle Scienze di Parigi la sua *Mémoire sur les trascendantes elliptiques*, in cui egli si propose di confrontare tra loro tutte le trascendenti ellittiche, di classificarle in differenti specie, riducendole alla forma più semplice possibile e di determinare il metodo più facile e rapido per il loro calcolo approssimato.

Abel e Jacobi pongono alla base delle funzioni ellittiche, invece che gli integrali di Legendre, la funzione inversa dell'integrale di prima specie, chiamata *funzione amplitudine*. In particolare, denotando con $u(\varphi)$ l'integrale di Legendre di prima specie, la funzione amplitudine è indicata con *am u*. Le proprietà di tale funzione sono molto più interessanti e facili da studiare rispetto a quelle della corrispondente funzione integrale. Per comprendere la felice idea avuta da questi due matematici, basta osservare che nel caso in cui il valore di k è zero, l'integrale di prima specie diventa $u=\int_0^{\varphi}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, ossia $u=arcsen\varphi$, la cui funzione inversa è *sen u*, che è senza dubbio più semplice da studiare della funzione *arcoseno*.

Accanto alla funzione amplitudine sono considerate le funzioni *senam u*, e *cosam u* le quali sono rispettivamente le funzioni composte denominate *seno dell'amplitudine* e *coseno dell'amplitudine*; infine, è pure definita la funzione, *delta amplitudine*, $\Delta am\ u$, ossia $\sqrt{1-k^2sen^2am\,u}$. Tali funzioni, che spesso sono indicate, rispettivamente, con i simboli *sn u*, *cn u* e *dn u*, vengono chiamate *funzioni ellittiche generali*.

La proprietà più notevole delle funzioni ellittiche, scoperta da Abel nel 1827,[16] è che esse hanno una doppia periodicità, vale a dire esistono due numeri interi m ed n tali che:

$$sn\,(u + 4mK + 2niK') = sn\,u$$
$$cn\,[u + 4mK + 2n(K + iK')] = cn\,u$$
$$dn\,(u + 2mK + 4niK') = dn\,u,$$

dove $K = \int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2sen^2\varphi}}$, $K' = \int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2sen^2\varphi}}$ sono i periodi delle funzioni, con $k'^2=1-k^2$, ed i è l'unità immaginaria.

L'ideazione della funzione amplitudine porta, di conseguenza, a ricorrere a strumenti dell'analisi complessa per integrare funzioni a variabili reali.

Jacobi aveva dimostrato nello scritto *Demonstratio theorematis ad theoriam functionum ellipticarum spectantis*,[17] del 1827, che l'espressione differenziale $\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}}$, con λ numero reale compreso tra 0 ed 1, e y variabile complessa,

---

[16] Tra la fine del 1827 e l'inizio del 1828, Abel pubblicò sul «Journal für die reine und angewandte Mathematik», Bd. 2, 3 (1827-1828), la famosa memoria dal titolo *Recherches sur les fonctions elliptiques*, inserita nelle *Oeuvres complètes* di Abel, citate nella nt. 9, t. I, pp. 263-388, che così incomincia: "*Depuis longtemps les fonctions logarithmiques, et les fonctions exponentielles et circulaires, on été les seules fonctions transcendantes, qui ont attiré l'attention des géomètres. Ce n'est que dans ces derniers temps, qu'on a commencé à en considérer quelques autres. Parmi celles-ci il faut distinguer les fonctions nommées elliptiques, tant pour leur belles propriétés analytiques, que pour leur application dans les diverses branches des mathématiques*".

[17] «Astronomische Nachrichten» - giornale fondato da Heinrich Christian Schumacher (1780-1850) nel 1821 -, Bd. 6, Nr. 127, 1827, inserito in *C. G. J. Jacobi's gesammelte Werke*, Berlin, G. Reimer, 1881-1891, 8 voll., t. I, pp. 37-48.

si poteva trasformare, mediante la posizione $y=\frac{U(x)}{V(x)}$, con $U(x)$ e $V(x)$ opportuni polinomi di grado, rispettivamente, p e $p-1$, nell'espressione $\frac{zdx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ con k e z appropriate costanti e con il modulo di k compreso tra 0 ed 1. Inoltre, si era pure constatato che i moduli k e λ erano legati mediante un'equazione algebrica, detta *modulare*, di grado $p+1$, nelle variabili k e λ. Corrispondentemente, si era notato che anche k e z erano legati mediante un'equazione di grado $p+1$, nelle variabili k e z, e quest'equazione fu chiamata *equazione del moltiplicatore*. In questo lavoro, Jacobi aveva pure indicato le espressioni delle soluzioni dell'equazione modulare e dell'equazione del moltiplicatore in termini di funzioni ellittiche.[18]

4. Per quanto Abel si fosse dedicato, per un certo periodo, allo studio delle proprietà delle funzioni ellittiche, certamente non aveva abbandonato però lo studio delle equazioni algebriche; ciò è testimoniato dalla composizione dell'opera, *Sur la résolution algébrique des équations*,[19] scritta nel 1828 ma pubblicata dopo la sua morte, avvenuta l'anno seguente. In questo lavoro egli pone due questioni:

"*1) Trouver toutes les équations d'un degré déterminé quelconque qui soient résolubles algébriquement;*

2) Juger si une équation donnée est résoluble algébriquement, ou non".

Abel osserva che "*dans le fond, ces deux problèmes sont les mêmes*" e che in relazione a questi problemi, una risposta adeguata è quella che offra teoremi di valore generale sulla risolubilità e sulla forma delle radici di un'equazione algebrica. Egli dice che un teorema di valore generale è quello secondo cui "*il est impossibile de résoudre algébriquement les équations générales passé le quatrième degré*" e, subito poi, pone anche l'esigenza di chiarire che cosa voglia dire "*satisfaire algébriquement à une équation algébrique*".[20]

---

[18] Si vuole precisare che nella *Demonstratio theorematis ad theoriam functionum ellipticarum spectantis*, cit. nella precedente nt. 17, la costante z che compare nell'espressione differenziale è denotata da Jacobi con 1/M.

[19] Inserito nelle *Oeuvres complètes* di Abel, cit. in nt. 9, t. II, pp. 217-243. In questo lavoro vi sono anche le considerazioni di Abel sulle difficoltà, a cui si è già accennato in precedenza, che si incontravano nel comprendere la memoria sulla *Teoria generale delle equazioni algebriche*, di Ruffini, cit. in nt. 8, relativa alla risolubilità per radicali delle equazioni algebriche di grado maggiore di quattro. Al riguardo, p. 218 delle *Oeuvres complètes*, Abel dice: "*Le premier, et, si je ne me trompe, le seul qui avant moi ait cherché à démontrer l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales, est le géomètre Ruffini; mais son mémoire* [Teoria generale delle equazioni algebriche, n.d.r.] *est tellement compliqué qu'il est très difficile de juger de la justesse de son raisonnement. Il me paraît que son raisonnament n'est toujours satisfaisant. Je crois que la démonstration que j'ai donnée dans le premier cahier de ce journal* [cfr. nt. 8, n.d. r.], *ne laisse rien à désirer du côté de la rigueur; mais elle n'a pas toute la simplicité dont elle est susceptible. Je suis pervenu à une autre démonstration, fondée sur le mêmes principes, mais plus simple, en cherchant à résoudre un problème plus général.*"

[20] Per queste ultime affermazioni si veda *Oeuvres complètes* di Abel, cit. in nt. 9, p. 219.

Nel 1829, Abel si applica alla ricerca di una classe particolare di equazioni algebriche risolubili algebricamente (*Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement*[21]) individuando la classe comunemente detta delle *equazioni abeliane* le quali soddisfano il seguente teorema da lui così enunciato nel medesimo articolo:

"*Si les racines d'une équation d'un degré quelconque sont liées entre elles de telle sorte, que toutes ces racines puissent être exprimées rationnellement au moyen de l'une d'elles, que nous désignerons par x; si de plus, en désignant par θx, $\theta_1 x$ deux autres racines quelconques, on a $\theta\theta_1 x=\theta_1\theta x$, l'équation dont il s'agit sera toujours résoluble algébriquement. De même, si l'on suppose l'équation irréducible*[22] *et son degré exprimé par $\alpha_1^{\nu_1} \,.\, \alpha_2^{\nu_2} \,.\, \ldots \,.\, \alpha_\omega^{\nu_\omega}$, où α_1, α_2, ..., α_ω sont des nombres premiers différens, on pourra ramener la résolution de cette équation à celle de ν_1 équations du degré α_1, de ν_2 équations du degré α_2, de ν_3 équations du degré α_3 etc.*".[23]

(Per inciso, fu Kronecker, nello scritto *Über die algebraisch auflösbaren Gleichungen*, del 1853,[24] a chiamare abeliane l'anzidetta classe particolare di equazioni, individuata da Abel, per le quali tutte le radici sono esprimibili razionalmente in funzione di una di esse ed inoltre gli operatori di razionalità sono permutabili: il termine "abeliano" diventa così sinonimo di "commutativo"[25]).

5. La precoce morte non permise, purtroppo, ad Abel di portare a termine altre ricerche sulla risolubilità delle equazioni algebriche di grado superiore al quarto. L'eredità fu raccolta dal giovane matematico francese Évariste Galois, il quale, pur morendo, a sua volta, poco più che ventenne, fu capace di proporre concetti divenuti fondamentali per l'algebra moderna. Lo schema delle idee di Galois si trova, com'è noto, in una lettera (una sorta di testamento scientifico) che egli scrisse all'amico Auguste Chevalier, il 29 Maggio 1832,[26] la notte prima del duello con Perscheux

---

[21] «Journal für die reine und angewandte Mathematik», Bd. 4, 1829; articolo inserito in *Oeuvres complètes* di Abel, cit. in nt. 9, t. I, pp. 407-507.

[22] Circa il significato che Abel dà di equazione irriducibile si riporta quanto egli scrive nella stessa memoria, (p. 479 delle *Oeuvres complètes*, cit. in nt. 9): "*Une équation $\varphi x=0$, dont les coefficiens sont des fonctions rationnelles d'un certain nombre de quantités connues a, b, c, ... s'appelle irréductible, lorsqu'il est impossibile d'exprimer aucune de ses racines par une équation moins élevée, dont les coefficiens soient également des fonctions rationnelles de a, b, c, ...*".

[23] *Oeuvres complètes* di Abel, cit. in nt. 9, p. 479.

[24] [I. Abhandlung], (Mitgeteilt in der Akademie der Wissenschaften am 20 Juni 1853 durch G. L. Dirichlet), «Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften», 1853, pp. 365-374, in *Leopold Kronecker's Werke*, cit. in nt. 5, t. IV, pp. 1-11.

[25] Cosa che è sottolineata in L. Toti Rigatelli, *La mente algebrica. Storia dello sviluppo della Teoria di Galois nel XIX secolo*, Busto Arsizio, Bramante Editrice, 1989, p. 71.

[26] La *Lettre de Galois à M. Auguste Chevalier*, inserita, nell'anno 1832, nella «Revue encyclopédique», numero di Settembre, p. 568, fu pure inclusa alle pp. 408-415 delle *Oeuvres mathématiques* di Évariste Galois, pubblicate, nel «Journal de mathématiques pures et appliquées», serie I, t. XI (1846) pp. 381-444, su iniziativa di J. Liouville. In questa lettera, Galois fa un riepilogo delle sue ricerche scientifiche, dei possibili sviluppi a cui esse possano portare e sostiene che "*on pourra faire avec tout cela trois Mémoires*" (p. 408 delle *Oeuvres mathématiques*). La prima

d'Herbinville, durante il quale Galois rimase gravemente ferito, cosa che lo portò alla morte il 31 Maggio successivo quando non aveva ancora compiuto i 21 anni. Copie dell'insieme degli scritti da lui redatti fino allora, compilate dal fratello minore Alfred e dall'amico Chevalier, furono spedite a Gauss, Jacobi, Joseph Liouville (1809-1882) e forse ad altri famosi matematici del tempo, i quali però non si accorsero immediatamente del patrimonio d'idee che egli aveva lasciato. I concetti delineati dal giovane francese segnavano il passaggio da un'algebra computazionale ad una astratta, con la quale pochi avevano dimestichezza; s'intuisce, pertanto, il possibile motivo per il quale gli studiosi, contemporanei di Galois, non avessero compreso a pieno il valore delle sue tesi scientifiche le quali, sviluppate, sono oggi note, nelle matematiche, come *Teoria di Galois*.

Va detto che soltanto dopo quattordici anni dalla scomparsa di Galois, venivano pubblicati, nel 1846 (come si è dato notizia nella nota 26), sulla rivista "Journal de mathématiques pures et appliquées" (diretta da Liouville che l'aveva fondata nel 1836), i suoi lavori, ivi compresa la memoria *Sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux*[27] –quella respinta dall'Accademia delle Scienze di Parigi– nella quale erano inseriti i risultati sulla risolubilità delle equazioni algebriche. Nella breve prefazione a quest'ultima memoria, scritta da Galois e che l'amico Auguste Chevalier aveva avuto cura di inserire nell'edizione fattane nel "Journal de Liouville",[28] si legge:

"*Le Mémoire ci-joint est extrait d'un ouvrage que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie il y a un an. Cet ouvrage n'ayant pas été compris, les propositions qu'il renferme ayant été révoquées en doute, j'ai dû me contenter de donner, sous forme synthétique, les principes généraux, et une* seule *application de ma théorie. Je supplie mes juges de lire du moins avec attention ce peu de pages.*

On trouvera ici une condition *générale à la quelle satisfait* toute équation soluble par radicaux, *et qui réciproquement assure leur résolubilité. On en fait l'application seulement aux équations dont le degré est un nombre premier. Voici le théorème donné par notre analyse:*

---

memoria, che riguarda *une condition générale à la quelle satisfait toute équation soluble par radicaux*, già completata, Galois l'aveva presentata all'Accademia delle Scienze di Parigi, il 17 Gennaio del 1831, ma la commissione formata da S. F. Lacroix e S. D. Poisson l'aveva respinta perché considerata "*inintelligible aux commissaires chargés de examiner*". La seconda memoria contiene delle applicazioni della teoria delle equazioni. In particolare Galois sostiene, contrariamente a quanto aveva precedentemente annunciato, nel 1830, nell'articolo pubblicato nel «Bulletin des Sciences mathématiques» di M. Férussac, *Analyse d'un Mémoire sur la résolution algébrique des équation* (inserito nelle *Oeuvres mathématiques* di Évariste Galois, pp. 395-398), che "*pour les cas p=5, 7, 11, l'équation modulare s'abaisse au degré p. En toute rigueur, cette réduction n'est pas possible dans les cas plus élevés*" (p. 412 delle *Oeuvres mathématiques*). Infine, la terza memoria, detto a titolo informativo, riguarda l'integrazione.

L'edizione italiana delle *Oeuvres mathématiques* di Galois, pubblicate nel 1846, nel *Journal de Liouville*, è stata curata da L. Toti Rigatelli per l'editrice Bollati Boringhieri, Torino, 2000, ed è apparsa sotto il titolo *Évariste Galois. Scritti matematici*.

[27] In *Oeuvres mathématiques* di Galois, citate nella precedente nt. 26, pp. 417-433.

[28] In nota, posta a pie' di pag. 417, Chevalier precisa: "*J'ai jugé convenable de placer en tête de ce Memoire la préface qu'on va lire, bien que je l'aie trouvée bissée dans le manuscrit*".

«Pour qu'une équation de degré premier, qui n'a pas de diviseurs commensurables, soit soluble par radicaux, il faut et il suffit que toutes les racines soient des fonctions rationnelles de deux quelconques d'entre elles».

Les autres applications de la théorie sont elles-mêmes autant de théorie particulières. Elles nécessitent d'ailleurs l'emploi de la théorie des nombres, et d'un algorithme particulier: nous les réservons pour une autre occasion. Elles sont en partie relatives aux équations modulaires de la théorie des fonctions elliptiques, que nous démontrons ne pouvoir se résoudre par radicaux.

Ce 16 janvier 1831

E. Galois"

Con Galois la ricerca intorno alla risolubilità delle equazioni algebriche procede secondo una prospettiva nuova consistente nello studio, "astratto", delle proprietà di un gruppo associato all'equazione, il *gruppo di Galois*, che, con linguaggio attuale, è definito come il gruppo degli automorfismi del "campo di spezzamento" del polinomio associato all'equazione; automorfismi che fissano gli elementi del campo a cui appartengono i coefficienti del polinomio. Infatti, Galois giunse a formulare una condizione necessaria e sufficiente per la risolubilità, mediante radicali, di una generica equazione algebrica di grado n, oggi così enunciata: *un'equazione algebrica di grado n è risolubile per radicali se e soltanto se il gruppo di Galois associato all'equazione è risolubile*, vale a dire se e soltanto se il *gruppo di Galois* associato all'equazione ammette una catena di sottogruppi $1=H_0\subset H_1\subset\ldots\subset H_r=G$ tale che H_i è normale in H_{i+1} e il quoziente H_{i+1} / H_i è abeliano, per ogni i che varia da 0 ad $r-1$. Ora, essendo il *gruppo di Galois* della generica equazione algebrica di grado n isomorfo ad un gruppo di S_n (oppure ad un suo sottogruppo proprio) delle permutazioni su n oggetti (che sono le radici dell'equazione), si ha che una generica equazione algebrica di grado n è risolubile per radicali se e soltanto se S_n (oppure, rispettivamente, il suo sottogruppo) è risolubile come gruppo. Ma, per n maggiore di quattro, il gruppo S_n non è risolubile, quindi, in generale, un'equazione algebrica di grado n, con n maggiore di quattro, non è risolubile per radicali, come già Ruffini ed Abel avevano osservato. Volendo ricorrere ad un esempio di equazione non risolubile per radicali, si può pensare ad un'equazione il cui polinomio associato sia irriducibile, di grado p, con p primo, a coefficienti razionali e possegga $p-2$ radici reali e 2 radici complesse coniugate; in tal caso il *gruppo di Galois* del polinomio, quindi dell'equazione, rispetto al campo dei numeri razionali Q, è isomorfo a S_p che nel caso in cui $p\geq 5$ non è risolubile e perciò una siffatta equazione non è risolubile per radicali.

Di conseguenza, a partire da questo livello di evoluzione in poi, una volta data data l'equazione algebrica, il problema veniva ad essere riportato alla costruzione del *gruppo di Galois* ad essa associato e a stabilire la risolubilità di tale gruppo. Il criterio proposto da Galois, sulla risolubilità per radicali di un'equazione algebrica, pur essendo chiaro nel suo enunciato, non era però semplice da applicare nel concreto (oltre al fatto che esso non indicava nessun metodo di risoluzione effettivo per le equazioni algebriche), come lo stesso Galois osservava nel *Discours Préliminaire*:[29]

"*Si maintenant vous me donnez une équation que vous aurez choisie à votre gré et que vous desiriez connaitre si elle est ou non solubile par radicaux, je n'aurai rien à y fair eque de vous indiquer le moyen de répondre à votre question, sans vouloir charter ni moi ni persone de le faire. En un mot les calculus sont impraticables*".

Con tale premessa, sembrava, allora, che fosse vano ogni sforzo, anche se solo volto a indagare, in concreto, la risolubilità per radicali delle equazioni algebriche. Ma Galois esortava ad aver fiducia in un possibile sbocco poiché, il più delle volte, analizzando le proprietà delle equazioni algebriche era possibile rispondere alla questione, concernente la loro risolubilità, ricorrendo, come egli scrive, a regole di "ordine metafisico" il cui valore era tale da non aver bisogno di eseguire calcoli computistici, tanto spesso impraticabili; infatti, egli proseguiva, nello stesso *Discours Préliminaire*, dicendo:

"*[…] la plupart du tems, dans les applications de l'analyse algébrique, ont est conduit à des équations dont on connait d'avance toutes les propriétés: propriétés au moyen desquelles il sera toujours aisé de répondre à la question par les règles que nous exposerons. Il existe, en effet, pour ces sortes d'équations, un certain ordre de considérations Métaphysiques qui planent sur touts les calculus, et qui souvent les rendent inutiles*".

Accanto ad un criterio di risolubilità per radicali, come poc'anzi si è citato alla nota 26, Galois indicava, inoltre, nel suo testamento scientifico, la possibilità che la risoluzione dell'equazione modulare potesse ricondursi alla soluzione di un'equazione di grado più basso, aggiungendo l'informazione che ciò era possibile solo per $p=5$, 7, 11. Perciò nel caso in cui $p=5$, che è quello che interessa ai fini di questa trattazione, l'equazione modulare, che è di sesto grado (si ricordi che il suo grado era denotato con $p+1$), ammette un'equazione risolvente di quinto grado.

I matematici che in epoca successiva vennero a studiare gli scritti di Galois, osservarono che se p è un numero primo dispari, il *gruppo di Galois* dell'*equazione modulare* ha ordine $(p+1)p(p-1)$ ed è isomorfo al *gruppo delle sostituzioni lineari fratte*

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \ (\alpha \delta - \beta \gamma \neq 0)$$

con α, β, γ, δ elementi del campo Z_p, di ordine p. Tale gruppo, oggi indicato con PGL(2, p) –*gruppo proiettivo lineare su* Z_p –, possiede, nell'ipotesi che p sia uguale a 5 o 7, oppure 11, un sottogruppo H di indice p, ossia esiste un sottogruppo H di PGL(2, p) tale che l'indice di H in PGL(2, p) (che coincide, trattandosi di gruppi finiti, con l'ordine di PGL(2, p) diviso l'ordine di H) è p.

[29] Inserito in *Manuscrits de Évariste Galois, publiés par J. Tannery*, Paris, Gauthier-Villars, 1908, pp. 21-22.

Con notazione moderna, si può scrivere $\exists \mathrm{H} \leq \mathrm{PGL}(2,p)$ tale che $\left|\mathrm{PGL}(2,p):\mathrm{H}\right| = \frac{\left|\mathrm{PGL}(2,p)\right|}{\left|\mathrm{H}\right|} = p$.

In quest'ipotesi, si può dimostrare che l'equazione modulare ammette una risolvente di grado *p*, il cui gruppo di Galois coincide con quello dell'equazione modulare. Nel caso particolare $p=5$, tale gruppo di Galois ha ordine *120* (infatti, si è detto che se *p* è un numero primo dispari, l'ordine del gruppo di Galois dell'equazione modulare è $(p+1)p(p-1)$), ma *120* è pure l'ordine del gruppo S_5 delle permutazioni su *5* oggetti, e poiché il gruppo di Galois di un'equazione algebrica di grado *n* è isomorfo ad un sottogruppo di S_n, allora, in questo caso particolare, il gruppo di Galois dell'equazione modulare, quindi della risolvente, è isomorfo a S_5, in quanto hanno lo stesso ordine. Dunque, si è giunti ad affermare che l'equazione modulare, da cui si è partiti, nel caso particolare $p=5$, ammette una risolvente di grado *5*, il cui gruppo di Galois si può identificare in S_5. Ciò vuol dire che la risolvente, della quale se n'è indicata l'esistenza, può essere rivista come un'equazione algebrica di quinto grado, di tipo generale.

Da ciò nasce l'idea di trasformare, "per radicali", un'equazione generale algebrica di quinto grado in un'equazione, sempre di quinto grado, che sia però la risolvente dell'equazione modulare che viene a determinarsi nel caso $p=5$. E poiché le radici dell'equazione modulare sono esprimibili mediante funzioni ellittiche, allora ci si aspetta che anche le radici della generale equazione algebrica di quinto grado si possano esprimere attraverso funzioni ellittiche.[30]

Con questa descrizione, si è quindi tracciato, sulla base dell'indicazione, o annuncio, di Galois, uno schema arricchito grazie agli sviluppi che i matematici successivi ne diedero, poiché, delle profonde intuizioni di Galois, non si possedevano che degli esili frammenti scritti, come avverte, per esempio, Betti. Questi, infatti, nella sua memoria *Sulla risoluzione delle equazioni algebriche*, del 1852, già citata in nota 4, ma di cui si riparlerà tra breve, faceva presente che, a causa della precoce morte, sia Galois che Abel, "*[...] non poterono lasciare altro che poche traccie della via tenuta per raggiunger lo scopo, e molti dei più importanti teoremi, ma privi in gran parte delle loro dimostrazioni*". Anche Hermite faceva osservare, in *Sur la résolution de l'équations du cinquième degré* –un'importante lavoro del 1858, già menzionato in nota 5, ma che più avanti si verrà a considerare con maggiore approfondimento–, "*nous ne possédions que quelques fragments de ses* [di Galois, n.d.r] *travaux sur cette question*".

6. Nel 1851, Enrico Betti, amico e diretto interlocutore scientifico di Brioschi, tra gli studiosi di punta applicati su questi argomenti, pubblicava il lavoro *Sopra la*

[30] Al riguardo si veda anche G. Zappa, *Francesco Brioschi e la risoluzione delle equazioni di quinto grado*, in *Francesco Brioschi (1824-1897). Convegno di studi matematici*, Milano, Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, 1999, pp. 95-108 e specificamente pp. 96-97.

risolubilità per radicali delle equazioni algebriche irriduttibili di grado primo,[31] cioè delle equazioni irriducibili il cui grado era dato da un numero primo, allo scopo di dimostrare quel "*il faut et il suffit* (vale a dire la «necessità e sufficienza») *que toutes les racines soient des fonctions rationnelles de deux quelconques d'entre elles*) che si trovava affermato nella memoria di Galois (già vista) dal titolo *Sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux*; un'affermazione che si rifaceva al surriferito teorema di Abel (dove vi era messo l'accento solo sulla "necessità") contenuto in *Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement*. Sullo stesso argomento e nello stesso anno, 1851, Betti pubblicava ancora una breve nota dal titolo *Un Teorema sulle risolventi delle equazioni risolubili per radicali*.[32]

È Betti medesimo che in una lettera (Pistoia, 22 Aprile 1851), indirizzata a Mossotti, espone il quadro comprendente le proprie conoscenze, le ricerche che andava conducendo e ciò che, al riguardo, aveva già dato alle stampe:

"*Nelle due Note che ho pubblicato ho dimostrato le condizioni che debbono verificarsi affinché una equazione di grado primo sia risolubile per radicali: ora ho, come le dissi, ritrovata anche la dimostrazione delle condizioni necessarie e sufficienti alla risolubilità per radicali delle equazioni, il grado delle quali è un numero divisibile per dei fattori primi differenti tra loro. Queste condizioni le annunziò Abel e le ha annunziate Galois, ma delle dimostrazioni trovate sì dall'uno che dall'altro, non si son potute rinvenire tra i loro scritti che dei frammenti, dai quali (anche a giudizio di* Liouville *per quelli di* Galois*, e di* Malmsten *per quelli di* Abel*) non si può ricavar niente senza rifare tutto da sé. I frammenti del* Galois *io gli ho nel Giornale di* Liouville*, ed ho potuto ricostruire la dimostrazione del Teorema, sviluppando i punti accennati, colmando le molte lacune ed aggiungendo alcun che di nuovo. Da alcune memorie di* Malmsten *e di* Luther *che ho letto nel* Crelle[33] *ho ricavato il metodo generale tracciato dall'*Abel *nel trattare queste materie; onde penserei di preporre alla dimostrazione del teorema alcune riflessioni comparative sui due metodi seguiti dai due insigni geometri per ottenere lo stesso risultato; lo che, oltre a far conoscere queste due Teorie poco note (anche quella del Galois ancora può dirsi punto nota), credo potrebbe servire a meglio approfondire e rischiarare questo Soggetto. Ma avrei perciò ché bisogno di vedere i lavori di Abel stesso cioè i*

[31] «Annali di Scienze matematiche e fisiche», serie I, t. II (1851), pp. 5-19. Questo lavoro fu raccolto nelle *Opere matematiche di Enrico Betti*, cit. in nt. 4, t. I, pp 17-27.

[32] «Annali di Scienze matematiche e fisiche», serie I, t. II (1851), pp. 102-103, in *Opere matematiche di Enrico Betti*, cit. in nt. 4, t. I, pp 28-29.

[33] Le memorie sono: C. J. Malmsten, *In solutionem aequationum algebraicarum disquisitio* e E. Luther, *De criteriis quibus cognoscatur an aequatio quinti gradus irreductibilis algebraice resolvi possit*, entrambe pubblicate sul «Journal für die reine und angewandte Mathematik», Bd. 34 (1847), rispettivamente alle pp. 46-74 e 244-254. La memoria di Malmsten è citata da Betti nel suo lavoro *Sopra la risolubilità per radicali delle equazioni algebriche irriduttibili di grado primo*, per il quale cfr. nt. 31, mentre quella di Luther è citata da Betti nel lavoro *Un Teorema sulle risolventi delle equazioni risolubili per radicali*, per il quale cfr. nt. 32.

frammenti da esso lasciati; e questi sono nelle Opere complete*, le quali ho in mente che Ella una volta mi dicesse che le possiede il Prof.* Lavagna".[34]

Come si vede, le fonti di Betti intorno alle ricerche di Abel non sono immediatamente dirette, ma mediate dagli scritti di Carl Johann Malmsten (1814-1886) e di Eduard Luther (1816-1887).

Pochi giorni dopo (4 Maggio 1851) Betti manifesta a Tortolini, in forma molto aperta, il programma di ricerca, di ampio raggio, che si è venuto a delineare nella sua mente:

"*Ora sto scrivendo una memoria*: «Sulla risoluzione delle equazioni algebriche» [verrà pubblicata nel 1852, n.d.r.].[35] *I problemi che ne fanno soggetto sono i seguenti*: *«*Determinare in generale le condizioni necessarie e sufficienti affinché una equazione irriduttibile qualunque sia risolubile 1° per radicali; 2° per radici di equazioni di grado inferiore; 3° quando una equazione non sia risolubile né per radicali, né per radici di equazioni di grado inferiore, determinare le equazioni che definiscono i più semplici irrazionali, per i quali possano esprimersi le radici della proposta*». […] ho risolto completamente il primo […]. Già Abel era giunto in parte per altra via alla soluzione di questo importante problema; ma si è trovato ne' suoi scritti poco più che l'enunciato de' teoremi; la morte avendo rapito anche lui troppo presto alle scienze. Ho risoluto anche il secondo problema. Ma quanto al terzo, l'ho soltanto toccato un poco. Bisogna però riflettere che esso contiene in sé, direi quasi, tutta una scienza nuova, e la sua completa soluzione attende probabilmente nuove scoperte nella* Teoria de' numeri*, e specialmente nella* Teoria della riduzione delle forme".[36]

Questa lettera di Betti verrà pubblicata, in estratto, sugli *Annali di Tortolini*, cosa che suscita la soddisfazione dell'autore, il quale confida a Mossotti (lettera del successivo 15 Maggio):

---

[34] La lettera, che si trova presso la Biblioteca Universitaria di Pisa, in seguito BUP, *ms*. 427.6, *cc.* 188-189, è pubblicata in I. Nagliati, *Le prime ricerche di Enrico Betti nel carteggio con Mossotti*, «Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche», vol. XX (2000), pp. 3-86, in seguito *Nagliati, 2000*.

[35] Trattasi di una lunga nota, già citata in nt. 4, sostanzialmente divisa in due parti di circa trenta pagine ciascuna: "Ho divisa –egli scrive (p. 32)– la Memoria in due parti. Nella prima parte ho esposta la teoria delle sostituzioni: nella seconda la determinazione delle condizioni di risolubilità per radicali delle equazioni algebriche". Questa nota di Betti fu considerata da Camille Jordan (1838-1922), nel suo monumentale trattato C. Jordan, *Traité des substitutions et des équations algébriques*, Paris, Gauthier-Villars, 1870, come importante e tale che la completa successione dei teoremi costituenti la *teoria di Galois* veniva ad essere stabilita rigorosamente; giudizio che è fatto proprio da B. L. van der Waerden al cap. 7 della sua *A History of Algebra*, Berlin – Heidelberg, Springer-Verlag, 1985, mentre L. Toti Rigatelli, in *La mente algebrica. Storia dello sviluppo della Teoria di Galois nel XIX secolo*, cit. in nt. 25, pone in rilievo (pagine 58-66) che Betti, nell'interpretare, nella parte prima della sua nota, la *teoria di Galois* con l'intento di descriverla organicamente anche con l'aggiunta di "qualche novità", come egli stesso dichiara, cade, specialmente agli occhi del moderno lettore, in alcuni equivoci.

[36] *Estratto di una lettera al Prof. B. Tortolini*, «Annali di Scienze matematiche e fisiche», serie I, t. II (1851), pp. 246-247, in *Opere matematiche di Enrico Betti*, cit. in nt. 4, t. I, p. 30.

"*Ciò mi fa piacere, perché assicurandomi la priorità mi lascia maggior agio a dare più perfezione al lavoro*".[37]

Nella nota, *Sulla risoluzione delle equazioni algebriche*, che Betti preannuncia nella lettera a Tortolini, sopra citata, viene asserito per prima cosa che "*[...] Le condizioni di risolubilità per radicali delle equazioni di grado primo possono pertanto ritenersi determinate e dimostrate con ambedue i metodi dei due sommi geometri [Abel e Galois]*" e viene aggiunto che "*rimanevano, però, fin ora da determinarsi quelle relative alle equazioni di grado non primo, molte delle quali trovansi annunziate da essi sotto forme differenti, può dirsi senza dimostrazione, nei frammenti postumi*", per cui, sottolineava Betti, "*riempire questa lacuna è l'oggetto principale del mio lavoro*".

Dopo di ciò, egli tiene, in più, ad evidenziare il seguente aspetto, estensivo, della sua trattazione:

"*Le condizioni generali necessarie e sufficienti alla risolubilità di una equazione di grado qualunque non le ho date soltanto per il caso in cui vogliasi una risoluzione per radicali ma anche per quello in cui ci contentiamo di averla con radici di altre equazioni algebriche*".

Ancora oltre, nella seconda parte della medesima memoria, Betti continua su questo tema, affermando:

"*Non sempre sono date immediatamente le relazioni razionali che passano tra le diverse radici di una equazione irriducibile da risolversi, e quindi non sempre se ne conoscono i loro gruppi direttamente, come nelle equazioni che danno la divisione delle funzioni circolari ed ellittiche. Perciò non basta conoscere le condizioni di risolubilità per radicali da verificarsi sui gruppi; ma è necessario di trasformar quelle in altre facili a verificarsi direttamente sui coefficienti. Galois ebbe in vista più specialmente le condizioni relative ai gruppi, Abel ai coefficienti. Io ho sviluppato prima quelle, e poi le ho trasformate in queste*".[38]

Una volta che si venga ad esaminare questa nota, *Sulla risoluzione delle equazioni algebriche*, si può vedere che Betti ha però maggiore fortuna nel riprendere gli scritti, pubblicati, di Galois e dare, per primo, alla *Teoria di Galois* organicità, un maggior grado di esplicazione e un certo arricchimento, piuttosto che nel compiere decisivi passi in avanti nella ricerca della risoluzione dei problemi, enunciati nella lettera a Mossotti del 4 Maggio 1851, che pure si era proposto di affrontare.

Nell'illustrare gli studi di Betti sulle equazioni algebriche, vi è da dire che egli verrà pure ad occuparsi della dimostrazione del teorema enunciato da Galois relativo all'abbassamento del grado di alcune equazioni modulari ("*pour les cas p=5, 7, 11, l'équation modulare s'abaisse au degré p. En toute rigueur, cette réduction n'est pas possible dans les cas plus élevés*"), di cui si è fatto cenno precedentemente, come testimoniano i seguenti passi di lettere. Il primo di questi si trova in una lettera, del 17 Giugno 1852, che Placido Tardy (1816-1914) scrive a Betti:

---

[37] BUP, *ms*. 427.6, *cc.* 186-187, pubblicata in *Nagliati, 2000*, cit. in nt. 34.

[38] *Ibidem*, p. 70.

"*Da quanto mi aveva scritto [Giovanni] Novi io avea capito che voi vi occupaste delle equazioni modulari per dimostrare il Teorema di Galois intorno all'abbassamento dal grado p+1 al grado p per i soli casi di p=5, 7, 11. Il lavoro che Hermite annuncia sul proposito in una lettera a Jacobi*[39] *non è stato ancora pubblicato a quanto io sappia*";[40]

il secondo è del 29 Novembre 1852, e con esso Betti comunica a Mossotti:

"*Io aveva già da qualche tempo veduta la dimostrazione che si poteva fare* [intorno a] *ciò che aveva annunziato Galois nell'ultima sua lettera a Chevalier rispetto a questa equazione* [modulare, n. d. r.], *cioè che essa non è risolubile per radicali, ma che si può abbassare di un grado quando p = 5, 7, 11*".[41]

I risultati delle riflessioni di Betti intorno a questo teorema, appariranno, nel 1853, in una memoria avente per titolo *Sopra l'abbassamento delle equazioni modulari delle funzioni ellittiche*.[42]

È proprio quest'ultima memoria a suggerire a Betti la possibilità di utilizzare le funzioni ellittiche come strumento utile a trovare la "soluzione effettiva" (o, per usare l'espressione di Mossotti, la "*soluzione pratica*" –lettera a Betti, Pisa, 14 Dicembre 1853[43]–) delle equazioni algebriche di quinto grado. A conferma di ciò, si riporta un passo di lettera inviata da Betti a Mossotti (Pistoia, 28 Gennaio 1853):

"*Quando fui tornato a Pistoia dopo averla veduta a Pisa nelle ultime vacanze di Natale, mi venne alla mente una idea, la quale mi ha fatto considerare sotto un punto di vista affatto nuovo il problema della determinazione delle funzioni le più atte alla risoluzione delle equazioni generali algebriche di grado > 4.*

Nell'ultima Memoria [Sopra l'abbassamento delle equazioni modulari delle funzioni ellittiche, n. d. r.] *che ho mandato al Tortolini e che sarà pubblicata nel fascicolo di Marzo, ho dimostrata la esistenza di una equazione di 5^o grado la quale ha per radici delle espressioni molto semplici di seni le coamplitudini dei quali sono quinte parti dei due periodi* $4K$ *e* $4K'\sqrt{-1}$. *Questa equazione ha un Gruppo simile a*

---

[39] "*[...] je désirerais surtout pouvoir vous soumettre un Travail sur les équations modulaires, dans lequel j'ai établi une proposition énoncée dans les* Oeuvres posthumes de Galois, *imprimées dans le* Journal de Mathématiques, *et qui consiste en ce que les équations modulaires du sixième, huitième et douzième degré peuvent être abaissées respectivement au cinquième, septième et onzième degré*", in *Lettres de M. Hermite a M. Jacobi sur différents objets de la Théorie des nombres*, inserite originariamente in *Opuscula mathematica de Jacobi*, t. II e poi in in *Oeuvres de Charles Hermite*, cit. in nt. 5, t. II, pp. 100-163 (il brano citato è a p. 135).

[40] Biblioteca della Scuola Normale Superiore, in seguito BSNS, "Archivio Betti", *ms*. 1315, 2, I. Questa lettera, insieme a tutte le altre inviate da Placido Tardy e, ancora, a quelle mandate da Francesco Brioschi ad Enrico Betti, si trova trascritta nella Tesi di Laurea in Matematica, redatta da M. D. Picchinenna, matr. 54/01302, relatore F. Palladino, dal titolo *Documenti per una ricostruzione della ricerca matematica nell'Italia postunitaria*, Università degli Studi di Salerno, anno accademico 2002-2003.

[41] BUP, *ms*. 427.6, *cc*. 192-193, pubblicata in *Nagliati, 2000*, cit. in nt. 34.

[42] «Annali di Scienze matematiche e fisiche», serie I, t. IV (1853), pp. 81-100, in *Opere matematiche di Enrico Betti*, cit. in nt. 4, t. I, pp. 81-95.

[43] BSNS, "Archivio Betti", senza indicazione della collocazione, pubblicata in *Nagliati, 2000*, cit. in nt. 34.

quello delle equazioni le più generali di 5º grado, cioè le funzioni delle radici della medesima sono razionali soltanto quando sono simmetriche. Quindi la probabilità che essa possa divenire la risolvente delle equazioni generali di 5º grado [...]. Queste considerazioni mi hanno fatto concepire la speranza di poter risolvere le equazioni di 5º grado per mezzo delle funzioni ellittiche. [...] La prima cosa da farsi è la determinazione effettiva di quella equazione di 5º grado che ha per radici quelle funzioni ellittiche, della quale io finora non aveva dimostrato altro, fuori che la esistenza. Questa determinazione però fatta coi metodi diretti esige calcoli laboriosissimi [...] in ogni caso non sarà difficile la trasformazione che la ridurrà alla forma di Jerrard $y^5+y=\lambda$ *che è la più semplice a cui possiamo ridurre tutto.*[44] *Ma* λ *è una funzione del modulo k, e per risolvere tutte le equazioni di 5º grado colle funzioni ellittiche bisognerà che sia risolubile algebricamente la equazione in k che nascerà, eguagliando questa funzione a una quantità qualunque*”.[45]

Come appare da quest’ultima lettera, Betti si attiene, inizialmente, allo schema che ha per fondamenta le ispirazioni di Galois, ma ricorre alla trasformazione di Jerrard per legare la risolvente dell’equazione modulare ad una generica equazione algebrica di quinto grado. Egli pensa di risolvere una data equazione algebrica di quinto grado, utilizzando un’altra equazione algebrica di quinto grado (risolvente dell’equazione modulare) che ammette radici esprimibili mediante funzioni ellittiche e della quale egli ha indicato la possibile esistenza nella memoria *Sopra l’abbassamento delle equazione modulari delle funzioni ellittiche*. Una volta costruita una siffatta equazione, Betti intende riportarla alla forma di Jerrard del tipo $y^5+y=\lambda$, dove λ è funzione del modulo *k*. Poiché, d’altra parte, l’equazione algebrica di quinto grado, data in partenza, si può ricondurre allo stesso tipo, e cioè a $y^5+y=a$, per effetto della trasformazione di Jerrard, allora ponendo $\lambda=a$ si ottiene una nuova equazione in *k*. Se quest’ultima è risolubile per radicali algebrici, allora è possibile risolvere la generica equazione algebrica di quinto grado, data, per mezzo delle funzioni ellittiche.

Le ricerche di Betti, volte ad attuare questo proposito, proseguono con lentezza, come egli stesso confida a Mossotti nella stessa lettera

“*Per ora nonostante il desiderio grandissimo di venire a capo di una così bella ricerca, la ho poco avanzata, perché le lezioni pubbliche ed alcune private non mi lasciano molto tempo disponibile*”.[46]

E, addirittura, il suo proponimento non vedrà alcuna attuazione, anzi egli sembra attratto da un altro possibile sbocco, spinto dal suggerimento[47] che la risoluzione di

[44] Si ricorda che, nel 1786, Erland Samuel Bring (1736-1798) aveva ricondotto una generica equazione algebrica di quinto grado ad un’equazione algebrica di quinto grado mancante dei termini in x^4, in x^3 e in x^2. Successivamente, George Birch Jerrard (1804-1863) aveva generalizzato tale metodo per rimuovere i termini in x^{n-1}, in x^{n-2} e in x^{n-3} da una generica equazione algebrica di grado *n*. Per il caso particolare $n=5$, Jerrard aveva trovato altre equazioni a cui la generica equazione di quinto grado poteva ricondursi. Si può vedere, a riguardo, W. R. Hamilton, *Inquiry into the validity of a method recently proposed by George B. Jerrard, esq., for transforming and resolving equations of elevated degrees*, «Reports of the British Associtation», Bristol, t. VI (1836).

[45] BUP, *ms*. 427.6, *cc.* 194-195, pubblicata in *Nagliati, 2000*, cit. in nt. 34.

[46] *Ibidem*.

un'equazione algebrica, questa volta di grado qualsiasi, si possa far dipendere da un'equazione differenziale che, integrata, fornisce delle funzioni ellittiche. Su questa linea, Betti darà alle stampe, l'anno seguente (1854), una memoria dal titolo *Un Teorema sulla risoluzione analitica delle equazioni algebriche*, nella quale enuncia il seguente teorema che egli qualifica come "fondamentale":

"*Le radici di ogni equazione algebrica, se si riguardano i coefficienti di essa, come funzioni lineari intiere di una variabile y, soddisfano sempre una equazione differenziale della forma* $\frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}}=\frac{\theta(x)dx}{\sqrt{\psi(x)}}$ *dove* $\varphi(y)$ *è la funzione che deve annullarsi affinché la proposta abbia radici eguali e* $\theta(x)$ *e* $\psi(x)$ *sono funzioni razionali ed intiere di* x *che non contengono* y".[48]

Il problema di determinare l'effettiva soluzione di un'equazione algebrica, di grado qualunque, sulla base di tale teorema, si indirizza verso la costruzione di un'equazione differenziale, associata all'equazione algebrica, e nella ricerca, poi, delle funzioni ellittiche che rappresentino il suo integrale generale. Betti considera, in particolare, il caso in cui l'equazione algebrica è di quinto grado, proponendosi di riportare la stessa equazione algebrica ad una delle forme di Jerrard, di costruire successivamente l'equazione differenziale associata e di ricercare, infine, le funzioni ellittiche che la soddisfano, quindi di determinare quelle funzioni che esprimono le radici dell'equazione algebrica di quinto grado, da cui si è partiti.

Nella lettera a Mossoti, del 12 Dicembre 1853, Betti sostiene di aver costruito l'equazione differenziale, nel caso in cui l'equazione algebrica, di quinto grado, si riduce alla forma di Jerrard del tipo $x^5+5Ax^3=y$. Non nasconde, però, qualche dubbio sull'importanza del risultato a cui è giunto e invita il diretto interlocutore a dare il suo parere:

---

[47] Stando a quanto emerge dal carteggio Betti-Mossotti (si veda la lettera datata Pistoia, 11 Marzo 1853), si ha motivo di credere che il nuovo percorso di Betti sia suggerito da un teorema di Wilhelm Ludwig Christmann (1780-1835):

"*Scrissi al Tortolini delle mie ricerche intorno alla risoluzione delle equazioni di 5º grado per le funzioni ellittiche, ed Egli subito mi spedì per la posta un Opuscolo latino* [*Cabbala algebraica*, Stuttgardiae, 1827, n.d.r.] *di un Geometra di Stutdgarda il D. G. L. si trovano varj metodi per risolvere le equazioni applicando il calcolo differenziale ed è esposto il seguente Teorema:*

La risoluzione di una equazione generale $x^m=ax^{m-2}+bx^{m-1}+\ldots+y$ *si riduce alla integrazione della equazione differenziale* $\frac{dy}{\sqrt{Y}}=\frac{dx}{\sqrt{X}}$ *dove Y è un polinomio di grado m-1, X di grado (m-1)(m-2). Da questo si dedurrebbe che la risoluzione di una equazione generale di 5º grado dipenderebbe da un integrale ellittico e da uno ultraellittico di ordine assai elevato*". BUP, *ms.* 427.6, *cc.* 196-197, pubblicata in *Nagliati, 2000*, cit. in nt. 34.

[48] Si veda «Annali di Scienze matematiche e fisiche», t. V (1854), pp. 10-17, in *Opere matematiche di Enrico Betti*, cit. in nt. 4, t. I, pp. 96-101. A conferma di quanto osservato nella nota precedente, Betti in questa memoria informa, appunto, che il metodo da lui seguito per dimostrare l'anzidetto teorema, qualificato come "fondamentale", era quello utilizzato da Christmann, nell'opuscolo *Cabbala algebrica*, per alcuni casi particolari.

"*[...] ho creduto bene di costruire l'equazione differenziale per la (2)* [ossia per l'equazione $x^5+5Ax^3=y$, n.d.r.], *e con mia grandissima soddisfazione ho trovato che è la seguente*

$$\frac{dy}{\sqrt[5]{y^2+\frac{2^2 3^3 A^3}{5^2}}}=\frac{xdx}{\sqrt{x^6+4Ax^4-8A^2x^2+12A^3}}$$

la quale, integrata, con alcune considerazioni mi dà le 5 radici [dell'equazione algebrica] *per mezzo della formula*

$$x_t=\sqrt{\frac{\mu\Theta(u+\frac{t\pi i}{5})+\lambda H(u+\frac{t\pi i}{5})}{\Theta(u+\frac{t\pi i}{5})+\mu H(u+\frac{t\pi i}{5})}}$$

dove u è l'integrale del 1º membro [dell'equazione differenziale], λ *e* μ *due costanti indipendenti da y* [Θ e H sono funzioni ellittiche, n.d.r.], *t uno dei numeri 0, 1, 2, 3, 4.*

Questo risultato vorrei pubblicarlo subito, senza aspettare di avere in ordine tutto il lavoro sulla risoluzione delle equazioni per funzioni ellittiche e ultraellittiche [...] ma il risultato è veramente di quella importanza, come pare a me che l'ho trovato dopo molte ricerche? Si potrà contare che sia stampato subito? Prima di prendere una decisione mi trovo ad aver bisogno di pregarla a darmi il suo parere in proposito".[49]

Mossotti esamina quanto Betti gli espone per lettera e, nella risposta del 14 Dicembre 1853, gli chiede qualche chiarimento:

"*Da quanto mi riferite vi sareste accostato alla soluzione pratica delle equazioni di 5*^{to} *grado servendovi del Teorema di Jerrard.*

Io non conosco il lavoro di questo geometra. Ha egli in realtà espresse le radici dell'equazione generale di 5to *grado in funzione di quelle di una delle equazioni*

$$(1)\ x^5+5Ax^4=y,\quad (2)\ x^5+5Ax^3=y,\quad (3)\ x^5+5Ax^2=y,\quad (4)\ x^5+5Ax=y$$

o ne ha soltanto dimostrato la possibilità? In questo secondo caso la parte più importante della soluzione pratica resterebbe ancora da farsi [...]. Una seconda domanda avrei a farvi. Sono sempre sufficienti le radici di una sola qualunque delle quattro citate equazioni per esprimere algebricamente quelle della generale di 5to *grado, o bisogna ricorrere all'una piuttosto che all'altra secondo i diversi casi? Dal vostro foglio accontentandovi voi della sola (2) augurerei che basta una*".[50]

La risposta di Betti è immediata, lettera del 15 Dicembre 1853:

"Jerrard *ha dimostrato soltanto la possibilità di esprimere algebricamente le radici di una equazione generale di 5º grado per mezzo di quelle di* una sola *delle 4 trinomie che le citai.* Hamilton *nel 1836 fece una Memoria su questo soggetto, verificò il Teorema di Jerrard, e parlò della costruzione di tavole, le quali, nonostante che l'argomento si possa ridurre un solo, perché il coefficiente 5A può rendersi con una semplice trasformazione eguale a un numero qualunque ci piaccia,*

---

[49] BUP, *ms*. 427.6, *cc*. 212-213, pubblicata in *Nagliati, 2000*, cit. in nt. 34.
[50] Cfr. nt. 43.

pure dovrebbero essere a doppia entrata perché l'argomento in generale è immaginario, cioè si ha

$$x^5+5x^3=r(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\varphi)$$

e bisognerebbe avere i 5 valori di x che corrispondono a tutte le combinazioni di valori di r e di φ.

Le tavole però che si richiedono per la mia soluzione sono a una sola entrata, e basta che diano un sol valore della variabile per ogni valore dell'argomento [...]. Per raggiungere una vera utilità pratica resterebbe solo ad eseguire la trasformazione del Jerrard, la quale è certamente oltremodo laboriosa".[51]

Le ricerche di Betti, su questo tema, proseguono e, nella lettera del 8 Gennaio 1854, egli comunica a Mossotti la prossima pubblicazione del suo teorema a cui, si è detto, conferisce l'attributo di "fondamentale":

"*La mattina del 3 mandai a Roma a Tortolini per la Posta il Teorema, e spero che sarà giunto in tempo perché possa essere pubblicato nel fascicolo di questo mese. Ho promesso al medesimo una breve prefazione dove espongo il preciso oggetto di queste ricerche. Ora sto preparando un altro Articolo sulla discussione delle formule di risoluzione*".[52]

Come già precisato, Betti pubblica la memoria, *Un Teorema sulla risoluzione analitica delle equazioni algebriche*,[53] anticipando, nella stessa, l'intenzione di dare alle stampe un nuovo lavoro, più dettagliato, in cui sarebbero andate a confluire le sue ricerche intorno alla "*[...] determinazione delle specie di trascendenti che occorrono per le equazioni dei differenti gradi [...]*" (così scrive in questa memoria). Ma, probabilmente, trovando "laboriosa" la strada che stava seguendo, per giungere alla determinazione delle "formule di risoluzione", espresse mediante funzioni ellittiche, per una generica equazione algebrica di quinto grado, e forse spinto anche dalle ricerche di Leopold Kronecker (1823-1891), da questi comunicategli, al tempo, con una lettera,[54] Betti imprime, ancora una volta, una variazione di rotta ai suoi studi

---

[51] BUP, *ms*. 427.6, *cc.* 214-215, pubblicata in *Nagliati, 2000*, cit. in nt. 34.
[52] BUP, *ms*. 427.6, *cc.* 218-219, pubblicata in *Nagliati, 2000*, cit. in nt. 34.
[53] Cfr. nt. 48.
[54] Da una lettera di Betti a Mossotti del 19 Gennaio 1854 (BUP, *ms*. 427.6, *cc.* 220-221, pubblicata in *Nagliati, 2000*, cit. in nt. 34):

"*Ricevetti in questi giorni una lettera del Sig.ᵉ Kronecker [...]. Nel lavoro di cui mi manda l'estratto si propone di determinare effettivamente le funzioni algebriche che sono radici di equazioni algebriche di grado >4.*

Finora si erano determinati soltanto i criteri per riconoscere se una equazione di grado qualsivoglia era o no risolubile algebricamente; e anch'io nella mia Memoria Sulla risoluzione delle equazioni *mi era contentato di determinare questi criteri per tutti i casi: però aveva terminato la Memoria accennando che rimaneva a determinare la forma effettiva delle radici delle equazioni risolubili [...]. Ora Kronecker ha realizzato la mia congettura per le equazioni di grado primo. Egli dà senza dimostrazione per la forma delle funzioni algebriche che sono radici di un'equazione di grado primo risolubile per radicali*

$$x_k = p_0 + \sum F(r_k)\sqrt[\mu]{r_k^{\gamma-1} r_{k+1}^{\gamma-2} \dots r_{k+\mu-2}}$$

dove p_0 è una funzione razionale come pure F [...]".

intorno alle equazioni algebriche e procedendo secondo questa diversa direzione egli raggiunge un nuovo risultato che comunica a Mossotti, appellandolo col titolo di "Maestro", in una lettera del 15 marzo 1855:

"*In questi giorni sono arrivato ad un risultato nuovo che mi sembra importante, e non posso ritenermi dal comunicarlo subito al mio Maestro […].*

Abel aveva posto il problema principale relativo alla risoluzione algebrica delle equazioni in due modi. 1º trovare le condizioni necessarie e sufficienti affinché una equazione sia risolubile per radicali; 2º trovare la funzione algebrica più generale che possa soddisfare una equazione di grado qualunque dato. Il 1º Problema fu il soggetto della Memoria [Sulla risoluzione delle equazioni algebriche] *che pubblicai nel 1852. Il 2º Abel non lo risolvette che per le equazioni di 5º grado. Kronecker se lo è proposto nuovamente e lo ha risoluto maestrevolmente per le equazioni di grado primo* [si veda qui nota 54, n.d.r.].

Io ora l'ho risoluto per le equazioni il grado delle quali è potenza di un numero primo".[55]

Nello stesso giorno, 15 Marzo 1855, Betti scrive, per dare la stessa comunicazione, anche a James Joseph Sylvester (1804-1851):

"*Mr. Kronecker, dans une communication faite par Mr. Dirichlet à l'Académie de Berlin le 20 Juin 1853* [*Über die algebraisch auflösbaren gleichungen*, citato in nota 24, n.d.r.], *s'est proposé de nouveau le probléme d'Abel:* «Trouver la fonction algébrique ls plus générale qui puisse satisfaire à une équation de degré donné»*, et l'a résolu complétement dans le cas que le degré soit un nombre premier. J'ai poussé un peu plus loin la solution du problème général, en l'etendant au degré puissance quelconque d'un nombre premier. Voici en peu de mots l'enoncé du problème et sa*

Il contenuto di questo passo di lettera, riferisce, indirettamente, che Kronecker aveva ripreso gli argomenti legati alla teoria di Galois, trattati da Betti, ed era venuto ad affrontare il problema, sollevato da Abel, e di cui Betti aveva fatto cenno alla fine della memoria *Sulla risoluzione delle equazioni* del 1852, consistente nel determinare la forma effettiva delle radici delle equazioni risolubili per radicali. Al riguardo, Betti comunica a Mossotti, in questa lettera, che Kronecker aveva esplicitato (senza dimostrazione però) anche la forma delle funzioni algebriche, ora riportata, che sono radici di una equazione di grado primo risolubile per radicali e che si trova nell'articolo di Kronecker (da questi inviato in estratto a Betti) *Über die algebraisch auflösbaren gleichungen* [I. Abhandlung], cit. in nt. 24.

Infatti, si è ritrovato, presso l' "Archivio Betti" (BSNS, *ms.*, 834, 1, I), un frammento di lettera, qui pubblicato per intero in *Appendice*, di Kronecker a Betti, risalente a qualche giorno prima, 8 Gennaio 1854, che dice:

"*Après avoir lu avec le plus grand intérêt vos excellents mémoires algébriques, je ne me prends la liberté de vous envoyer un petit extrait de mes travaux* [Über die algebraisch auflösbaren gleichungen, n.d.r.]*, que pour vous exprimer mon admiration pour votre talent et pour vous assurer de la considération la plus haute […]*".

[55] BUP, *ms.* 427.6, *cc.* 222-223, pubblicata in *Nagliati, 2000*, cit. in nt. 34. I risultati di queste nuove ricerche saranno pubblicate da Betti nella memoria dal titolo: *Sopra la più generale funzione algebrica che può soddisfare una equazione il grado della quale è potenza di un numero primo*, «Annali di Scienze matematiche e fisiche», t. VI (1855), pp. 260-272, in *Opere matematiche di Enrico Betti*, cit. in nt. 4, t. I, pp. 126-135.

solution. La démonstation sera publié prochainement dans les Annali di Scienze matematiche e fisiche *de Mr. Tortolini [...]*".[56]

Negli anni successivi, le ricerche di Betti sulle equazioni algebriche portarono all'accumulazione d'altri risultati ancora, tant'è che nel 1859 viene pubblicato il lavoro *Sur la résolution par radicaux des équations dont le degré est une puissance d'un nombre premier.*[57]

Va osservato ancora che su questo tema di ricerca si era applicato anche Hermite, negli anni precedenti, come si ricava da una lettera (Paris, 17 Marzo, 1859) inviata a Betti:

"*[...] j'espère que vous me pardonnerez si je ne suis pas encore en mesure de traiter avec vous à fond des recherches si importantes contenues dans la lettre dont vous m'avez honoré. Mais l'interêt que je preuve à ces recherches n'est qu'ajourné, et s'il m'eut été permis de mieux profiter de votre passage à Paris, en m'entretenant avec vous de nos communes études j'aurais pu vous montrer un mémoire anciennement redigé, et où je traitais (mais dans un cas particulier) de la recherche de l'expression des racines d'une équation soluble par radicaux le degré étant une puissance d'un nombre premier. Vos études persévérantes et approfondies sur cette matière seront pour moi l'objet du travail le plus attentif quand j'essayerai de donner suite à ce que j'avais entrepris à une autre époque. [...]*".[58]

7. Andando indietro di un anno, si vede che, mentre Betti è impegnato nei suoi tentativi di giungere alla "soluzione effettiva" dell'equazione algebrica generale di quinto grado (inizialmente per mezzo dell'equazione modulare, poi con l'utilizzo di un'equazione differenziale, ma in ogni caso servendosi di funzioni ellittiche), Hermite e Kronecker annunciano alla comunità scientifica (è il 1858) di aver trovato la strada per pervenire a questa meta: pubblicano, infatti, i loro individuali studi sulla risoluzione delle equazioni algebriche di quinto grado esposti, rispettivamente, negli articoli *Sur la résolution de l'équations du cinquième degré*,[59] seguito dalla *Théorie des équations modulaires et la résolution de l'équation du cinquième degré*[60] dello stesso Hermite e *Sur la résolution de l'équation du cinquième degré; extrait d'une Lettre adressée à M. Hermite; par M. L. Kronecker*[61] redatto da Kronecker sulla spinta della prima di queste due pubblicazioni di Hermite.

---

[56] *Estratto di una lettera al Prof. J. J. Sylvester*, «Quarterly Journal of pure and applied Mathematics», t. I (1857), pp. 91-92, in *Opere matematiche di Enrico Betti*, cit. in nt. 4, t. I, pp. 124-125.

[57] «Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences», t. XLVIII (1859), pp. 182-186, in *Opere matematiche di Enrico Betti*, cit. in nt. 4, t. I, pp. 183-187.

[58] BSNS, "Archivio Betti", pubblicata in *Nagliati, 2000*, cit. in nt. 34.

[59] Cfr. nt. 5. Tale lavoro comparve, si è detto, nel tomo LXVI –Janvier-Juin 1858– dei *Comptes Rendus*.

[60] Paris, Mallet-Bachelier, 1859.

[61] Cfr. nt. 5. Per completezza d'informazione, la lettera di Kronecker ad Hermite reca la data del 6 Giugno 1858 (e spedita da Berlino); essa viene comunicata, da Hermite, all'Académie des Sciences de Paris il successivo 14 Giugno.

Mentre Betti ritiene le ricerche, specialmente dopo la pubblicazione della lettera inviata da Kronecker a Hermite il 6 Giugno del 1858, per trovare la soluzione dell'equazione algebrica generale di quinto grado, ormai concluse ("Il rimanente è affare di calcolo", egli commenta nella lettera inedita, del 13 Agosto 1858, qui riportata in *Appendice*), Brioschi invece, negli stessi mesi, intorno all'estate del 1858, si rapporta subito a questi scritti, forse, all'inizio, solo per stilare eventualmente delle semplici recensioni da inserire nella *Rivista Bibliografica*, sezione degli *Annali di matematica pura ed applicata*, e ne viene attratto, tanto da assumerli come solida base di partenza per elaborare i propri contributi riguardanti la ricerca delle soluzioni di un'equazione algebrica di quinto grado.

I frutti dello studio di Brioschi sono, dapprima, il lavoro, già citato in nota 5, *Sulla risoluzione delle equazioni di quinto grado*, che sviluppa e amplia il metodo indicato da Hermite (pur considerando, Brioschi, diversamente da Hermite, l'equazione del moltiplicatore invece che quella modulare, come si vedrà), spingendo il ragionamento verso l'effettiva calcolabilità delle radici dell'equazione mediante delle funzioni ellittiche; e poi l'articolo *Sul metodo di Kronecker per la risoluzione delle equazioni di quinto grado*,[62] nel quale Brioschi espone risultati più generali rispetto a quelli che Kronecker aveva comunicato ad Hermite mediante la lettera del 6 Giugno 1858. In questo lavoro, infatti, Brioschi prende in considerazione alcune particolari equazioni di sesto grado (che egli chiama *jacobiane*[63]), risolubili per funzioni ellittiche, e dimostra che queste equazioni sono risolventi di un'equazione qualunque di quinto grado; pertanto, risolvere un'equazione algebrica di quinto grado, significa costruire per essa un'*equazione jacobiana* e trovarne le soluzioni, che sono esprimibili tramite funzioni ellittiche. Come caso particolare di *equazioni jacobiane*, Brioschi ritrova quella del moltiplicatore e quella indicata da Kronecker nel proprio lavoro. (È da sottolineare che qualche anno più tardi, nel 1861, Kronecker pubblicherà un nuovo articolo, *Mitteilung über algebraische arbeiten*,[64] con il quale, tra l'altro, tenta di approfondire il metodo che egli aveva proposto nel lavoro del 1858; ma è Brioschi che, successivamente, nel 1867, con lo scritto recante per titolo *La soluzione più generale delle equazioni del quinto grado*, fornisce una trattazione ampia e dettagliata delle *equazioni jacobiane*, a cui si può ricondurre un'equazione algebrica di quinto grado).

---

[62] «Atti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere», t. I (1858), pp. 275-282, in *Opere matematiche di Francesco Brioschi*, cit. in nt. 5, t. III, pp. 177-188.

[63] Sono particolari equazioni di sesto grado, le cui radici $z_1, z_2, \dots, z_6$ sono legate dalle relazioni seguenti:

$$\sqrt{z_2} + \sqrt{z_3} + \sqrt{z_4} + \sqrt{z_5} + \sqrt{z_6} = \sqrt{5z_1}$$
$$\sqrt{z_2} + \alpha^2\sqrt{z_3} + \alpha^4\sqrt{z_4} + \alpha\sqrt{z_5} + \alpha^3\sqrt{z_6} = 0$$
$$\sqrt{z_2} + \alpha^3\sqrt{z_3} + \alpha\sqrt{z_4} + \alpha^4\sqrt{z_5} + \alpha^2\sqrt{z_6} = 0$$

con α radice quinta immaginaria dell'unità.

[64] «Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin», 1861, pp. 609-617, in *Leopold Kronecker's Werke*, cit. in nt. 5, t. IV, pp. 53-62.

Si vogliono, ora, esaminare, in questi punti **7**, **8**, e **9**, più nel dettaglio i citati lavori, del 1858, di Hermite e Kronecker, e gli sviluppi ad essi dati da Brioschi mediante i propri scritti.

Dall'analisi del primo articolo di Hermite (*Sur la résolution de l'équations du cinquième degré*) si vede che egli riconduce la forma dell'equazione generale di quinto grado alla ridotta $x^5-x-a=0$ (*equazione di Bring-Jerrard*), "*par une substitution dont les coefficients se déterminent sans employer d'autres irrationalité que des radicaux carrés et cubiques*", egli scrive, dove il coefficiente a assume un valore ben preciso, che ovviamente dipende dall'equazione di partenza.

Effettuata la trasformazione ora descritta, Hermite introduce nella $x^5-x-a=0$ delle variabili ausiliarie, invece di cercare le soluzioni mediante "*une formule radicale*", analogamente a come si fa, stando all'esempio che egli porta, per l'equazione di terzo grado $x^3-3x+2a=0$ dove è sufficiente rappresentare il coefficiente a per mezzo della funzione ausiliaria *seno* di un arco α per avere le radici espresse dalle distinte funzioni:

$$2\sin \alpha/3, \quad 2\sin (\alpha+2\pi)/3, \quad 2\sin (\alpha+4\pi)/3.$$

Per l'equazione, ridotta, di quinto grado, da cui parte, e cioè per la $x^5-x-a=0$, Hermite prende in considerazione, quali funzioni ausiliarie, le *trascendenti ellittiche* e cerca di giungere ad una relazione tra il coefficiente a e tali trascendenti. A tale scopo, dato l'integrale ellittico

$$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 sen^2\varphi}},$$

egli, considera i periodi K e K' (i quali, come si è detto, sono dati rispettivamente dagli integrali $\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 sen^2\varphi}}$ e $\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2 sen^2\varphi}}$) e pone:

$$q=e^{-\pi\cdot\frac{K'}{K}}.$$

Dice poi che le radici quarte r_i ed r'_i, con $1\leq i\leq 4$, dei moduli k e k' si esprimono in funzione di q mediante queste "*fonction dont Jacobi a fait la découverte*":

$$r_1=\sqrt[4]{k}=\sqrt{2}\cdot\sqrt[8]{q}\cdot\frac{1-q^4-q^8+q^{20}+\ldots}{1+q-q^2-q^5-\ldots}$$

$$r_2=\sqrt[4]{k}=\sqrt{2}\cdot\sqrt[8]{q}\cdot\frac{1+q^2-q^6+q^{12}+\ldots}{1+q+q^3+q^6+\ldots}$$

ecc. ecc.

ecc. ecc.

$$r'_1=\sqrt[4]{k'}=\frac{1-q-q^2+q^3+q^7-q^{12}-\ldots}{1+q-q^2-q^5-q^7-q^{12}+\ldots}$$

$$r'_2=\sqrt[4]{k'}=\frac{1-q-q^3+q^6+q^{10}+\ldots}{1+q+q^3+q^6+q^{10}+\ldots}$$

ecc. ecc.

ecc. ecc.

Premesso che egli pone $\omega = i\frac{K'}{K}$, per cui viene ad essere $q=e^{i\pi\omega}$, Hermite designa $\sqrt[4]{k}$ con $\varphi(\omega)$ e $\sqrt[4]{k'}$ con $\psi(\omega)$ (la variabile ω permette di avere delle funzioni "*affranchir de l'ambiguité qui tient au facteur* $\sqrt[8]{q}$") e, di questa stessa variabile ω, dà le proprietà fondamentali, evidenziando una di esse, e cioè che preso n, numero intero primo, e fissato

$$v=\varphi(n\omega) \quad \text{e} \quad u=\varphi(\omega)????$$

v e u sono legate da un'equazione algebrica di grado $n+1$ (equazione modulare) le cui $n+1$ radici u saranno:

$$\varepsilon\varphi(n\omega) \text{ e } \varphi\left(\frac{\omega+16m}{n}\right),$$

con m numero intero preso secondo il modulo n.

A questo punto, Hermite evoca il "*fait si important annoncé par Galois*", vale a dire il fatto che l'equazione modulare si può abbassare di un grado nei casi in cui n sia uguale a 5 o a 7 o a 11. E, dopo aver chiarito che "*nous ne possédions que quelques fragments de ses travaux sur cette question*" e che non è difficile trovare la dimostrazione di questa bella proprietà enunciata da Galois, egli avverte che bisogna ora spingere oltre la questione riguardante la ricerca delle radici, fino a trovarle effettivamente ("*pousser la question jusq'à son dernier terme*", sono le sue parole). E, ancora, in una postilla, a pie' della pagina 512, trova l'occasione per annotare:

"*Postérieurement à mes premières recherches restées inédites, mais dont les résultats avaient été annoncés (*Oeuvres de Jacobi, [*sic*, ma leggasi *Opuscula mathematica* di Jacobi, n.d.r.], t. II, p. 249*),*[65] *un géomètre italien distingué, M. Betti, a publié un travail sur la même sujet* [Sopra la risolubilità per radicali delle equazioni algebriche irriduttibili di grado primo, del 1851, n.d.r] *dans les* Annales *de M. Tortolini*".

Ora, Hermite scrive che nel caso dell'equazione modulare del sesto grado, che presenta al lettore in questi termini

$$u^6 - v^6 + 5u^2 v^2(u^2 - v^2) + 4u\,v\,(1-u^4 v^4)=0,$$

si può, in conseguenza di tentativi da lui fatti in un'epoca stimabile come già lontana, facilmente pervenire a considerare la funzione

$$\Phi(\omega)=\left[\varphi(5\omega)+\varphi\left(\frac{\omega}{5}\right)\right]\left[\varphi\left(\frac{\omega+16}{5}\right)-\varphi\left(\frac{\omega+4\cdot 16}{5}\right)\right]\left[\varphi\left(\frac{\omega+2\cdot 16}{5}\right)-\varphi\left(\frac{\omega+3\cdot 16}{5}\right)\right],$$

tale che le quantità

$$\Phi(\omega),\ \Phi(\omega+16),\ \Phi(\omega+2\cdot 16),\ \Phi(\omega+3\cdot 16),\ \Phi(\omega+4\cdot 16)$$

sono le radici di un'equazione, incompleta (che ha la stessa forma dell'*equazione di Bring-Jerrard*) di quinto grado in Φ nella quale compare, espresso razionalmente, $\varphi(\omega)$:

$$\Phi^5 - 2^4\cdot 5^3\Phi\varphi^4(\omega)\psi^{16}(\omega) - 2^6\sqrt{5^5}\,\varphi^3(\omega)\psi^{16}(\omega)[1+\varphi^8(\omega)] = 0,$$

(equazione risolvente dell'equazione modulare presentata)

[65] Su questo punto si veda nt. 39.

dove, si ricordi, φ e ψ sono funzioni, rispettivamente, dei moduli k e k'. Quest'ultima equazione, ponendo

$$\Phi=\sqrt[4]{2^4 5^3}\,\varphi(\omega)\psi^4(\omega)x,$$

si riconduce a quella di *Bring-Jerrard* (cioè allo stesso tipo a cui si è riportata l'equazione algebrica di partenza):

$$x^5-x-\frac{2}{\sqrt[4]{5^5}}\frac{1+\varphi^8(\omega)}{\varphi^2(\omega)\psi^4(\omega)}=0.$$

Dunque, argomenta Hermite, per giungere alle espressioni delle radici dell'equazione algebrica di quinto grado (ridotta alla forma di *Bring-Jerrard* del tipo x^5-x-$a=0$), mediante la funzione $\Phi(\omega)$, non resta da fare altro, che determinare ω o piuttosto $\varphi(\omega)$ in corrispondenza al valore del termine noto che si trova nell'*equazione di Bring-Jerrard* ora costruita, ossia risolvere l'equazione $\frac{2}{\sqrt[4]{5^5}}\frac{1+\varphi^8(\omega)}{\varphi^2(\omega)\psi^4(\omega)}=a$, la quale, si può osservare, è, per le posizioni prima stabilite, un'equazione, in k, di quarto grado quindi risolubile per radicali.

In forma schematica, si può dire che Hermite costruisce l'equazione modulare, di sesto grado, le cui radici possono esprimersi mediante funzioni ellittiche, e, stimolato dalle indicazioni date da Galois, determina una risolvente, dell'equazione modulare stessa, che viene ad essere di quinto grado e le cui radici si possono esprimere attraverso le radici dell'equazione modulare, ovvero ancora mediante funzioni ellittiche. Hermite dà poi alla risolvente, di quinto grado, dell'equazione modulare, la forma dell'equazione di *Bring-Jerrard*, con il termine noto funzione del modulo k; attribuendo a k un valore tale che il termine noto della risolvente dell'equazione modulare sia uguale al termine noto della risolvente dell'equazione algebrica di quinto grado (sempre della forma di *Bring-Jerrard*), le radici della generica equazione di quinto grado si possono esprimere attraverso funzioni ellittiche.

8. Nell'estate del 1858 (tra Giugno e Settembre), Brioschi redige la citata nota, elogiata da Hermite[66], dal titolo *Sulla risoluzione delle equazioni di quinto grado*.[67]

Brioschi parte dall'equazione del moltiplicatore che egli, nel caso $p=5$, presenta sotto l'espressione:

$$z^6 - 10\,z^5 + 35\,z^4 - 60\,z^3 + 55\,z^2 - 2\,(13 - 2^7 k^2 k'^2)\,z + 5 = 0$$

(dove k' è tale da soddisfare la relazione $k^2 + k'^2 = 1$), al fine di esprimere le radici di un'equazione algebrica di quinto grado mediante funzioni ellittiche.

Esposto il procedimento un poco più in dettaglio, Brioschi scrive l'equazione del moltiplicatore, che nel caso $p=5$ è di sesto grado, e indica con z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6 le sue soluzioni, le quali si possono esprimere mediante funzioni ellittiche. Infatti, avendo

[66] Ecco quanto scrive Hermite a Betti (lettera del 17 marzo 1859, BSNS "Archivio Betti", pubblicata in *Nagliati, 2000*, cit. in nt. 34): "*[...] et à cette occasion je prenderai le plus grand plaisir à témoigner publiquement toute mon admiration pour les derniers travaux de Mr Brioschi sur l'équation du 5e degré [...].*"

[67] Cfr. nt. 5.

posto $\omega = i\frac{K'}{K}$, dove K e K' hanno lo stesso significato fissato qui in precedenza, ed $f(\omega) = (\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i\pi m^2\omega})^2$, si ha che:

$$z_1 = \frac{5}{f(\omega)} f(5\omega)$$
$$z_2 = \frac{1}{f(\omega)} f(\frac{\omega}{5})$$
$$z_3 = \frac{1}{f(\omega)} f(\frac{\omega+2}{5})$$
$$z_4 = \frac{1}{f(\omega)} f(\frac{\omega+4}{5})$$
$$z_5 = \frac{1}{f(\omega)} f(\frac{\omega+6}{5})$$
$$z_6 = \frac{1}{f(\omega)} f(\frac{\omega+8}{5}).$$ [68]

Servendosi delle radici dell'equazione modulare, Brioschi costruisce poi le quantità:

$$x_1 = (z_2-z_1)(z_3-z_6)(z_4-z_5);$$
$$x_2 = (z_3-z_1)(z_4-z_2)(z_5-z_6);$$
$$x_3 = (z_4-z_1)(z_5-z_3)(z_6-z_2);$$
$$x_4 = (z_5-z_1)(z_6-z_4)(z_2-z_3);$$
$$x_5 = (z_6-z_1)(z_2-z_5)(z_3-z_4)$$

le quali si scrivono, tenendo presente il modo con cui le z_i erano espresse per mezzo delle funzioni ellittiche, nel seguente modo:

$$x_1 = \frac{1}{f^3(\omega)} F(\omega)$$
$$x_2 = \frac{1}{f^3(\omega)} F(\omega+2)$$
$$x_3 = \frac{1}{f^3(\omega)} F(\omega+4)$$
$$x_4 = \frac{1}{f^3(\omega)} F(\omega+6)$$
$$x_5 = \frac{1}{f^3(\omega)} F(\omega+8),$$

---

[68] Si vuole far notare che la funzione $f(\omega) = (\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i\pi m^2\omega})^2$ rappresenta la serie:

$$1+4q+4q^2+4q^4+8q^5+4q^8+4q^9+8q^{10}+8q^{13}+4q^{16}+8q^{17}+4q^{18}+\ldots \quad (\text{dove } q=e^{-\pi\cdot\frac{K'}{K}}),$$

che converge al valore $\frac{2K}{\pi}$. Per questo fatto si veda C. G. J. Jacobi, *Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum* auctore D. Carolo Gustavo Jacobo Jacobi, Regiomonti [cioè Königsberg, poi Kaliningrad], sumptibus fratrum Bornträger, 1829; in *C. G. J. Jacobi's gesammelte Werke*, cit. in nt. 17, t. I, pp. 155-170, e precisamente all'interno di quest'opera, sotto il titolo *Evolutio Functionum Ellipticarum in Series Secundum Sinus vel Cosinus Multiplorum Argumenti Progredientes*.

dove $F(\omega) = [f(\frac{\omega}{5})-5f(5\omega)][f(\frac{\omega+2}{5})-f(\frac{\omega+8}{5})][f(\frac{\omega+4}{5})-f(\frac{\omega+6}{5})]$.

Inoltre, Brioschi considera l'equazione algebrica di quinto grado

$$x^5 + p_1x^4 + p_2x^3 + p_3x^2 + p_4x + p_5 =0$$

avente le precedenti quantità x_s (s=1,…,5) come soluzioni. Ciò comporta che i coefficienti di quest'ultima equazione devono soddisfare alle seguenti relazioni, ricavate mediante opportune procedure:

$$p_1 = p_3 =0$$
$$p_2 = 2^9\, 5^2\, k^2\, k'^2$$
$$p_4 = 2^{16}\, 5^4\, k^4\, k'^4$$
$$p_5 = -5^2 \sqrt{5}\, 2^{22}\, k^4\, k'^4(1-4k^2k'^2).$$

Sostituendo i coefficienti ottenuti, l'equazione di quinto grado avente come soluzioni le x_s viene ad essere, pertanto, la seguente:

$$x(x^2+5^2\, 2^8\, k^2\, k'^2)^2 = 5^2 \sqrt{5}\, 2^{22}\, k^4\, k'^4(1-4k^2k'^2),$$

la quale può anche essere scritta così:

$$x[(5^2\, 2^8\, k^2\, k'^2)(1+\frac{x^2}{5^2 2^8 k^2 k'^2})]^2 = 5^2 \sqrt{5}\, 2^{22}\, k^4\, k'^4(1-4k^2k'^2).$$

Essa, una volta posto

$$1+\frac{x^2}{5^2 2^8 k^2 k'^2}=\frac{2}{5}\,\theta,$$

è riconducibile alla forma

$$\theta^5-\frac{5}{2}\theta^4-\frac{(1-4k^2k'^2)^2}{2k^2k'^2}=0,$$

le cui soluzioni si esprimono attraverso le funzioni ellittiche al modo seguente:

$$\theta_s=\frac{5}{2}\,\{1+\frac{1}{5^2 2^8 k^2 k'^2}\,\frac{F^2[\omega+2(s-1)]}{f^6(\omega)}\}\ (s=1,\ldots,5).$$

D'altra parte, poiché una generica equazione algebrica di quinto grado può ridursi ad una delle forme trinomie, proposte da Jerrard, in particolare alla forma $y^5-\frac{5}{2}y^4-a=0$ (che in senso esteso si può ancora denominare come equazione di *Bring-Jerrard*),[69] allora mediante una scelta di k tale da verificare la relazione

$$\frac{(1-4k^2k'^2)^2}{2k^2k'^2}=a,$$

le soluzioni dell'equazione algebrica di quinto grado vengono ad esprimersi, per conseguenza, mediante funzioni ellittiche. Si può osservare, infine, che l'equazione in k, a cui si giunge, è una particolare forma di equazione di sesto grado, che facilmente si può risolvere effettuando la sostituzione $k^2k'^2 = t$.

Per completezza, si vuole ulteriormente precisare che il lavoro *Sulla risoluzione delle equazioni di quinto grado*, redatto da Brioschi, non è esclusivamente conseguenza della lettura dell'articolo di Hermite, poiché egli aveva già concentrato

[69] Cfr. nt. 44.

l'attenzione sulle equazioni del moltiplicatore[70] venendo a pubblicare, nel Maggio del 1858 (più o meno in contemporanea col lavoro di Hermite, *Sur la résolution de l'équations du cinquième degré* che, si è detto in nota 59, comparve nel tomo LXVI – Janvier-Juin 1858– dei *Comptes Rendus*), la nota *Sulle equazioni del moltiplicatore per la trasformazione delle funzioni ellittiche*;[71] al riguardo, nella lettera dell'11 Maggio 1858, egli scrive a Genocchi:

"*[...] del Betti si conoscerà quel che ha fatto intorno alle nuove ricerche dell'Hermite.*

Io ho pure lavorato intorno a questo argomento; ma trovai utile l'abbandonare almeno in parte la strada dell'Hermite, cioè di far uso in luogo delle equazioni modulari di altre equazioni che denominerei del Moltiplicatore. La proprietà principale delle radici di esse fu già enunciata dal Jacobi (Crelle T. 3° pag. 308) non credo che alcuno l'abbia dimostrata; anzi l'Hermite a torto la chiama assai astrusa (Jacobi Opere [anche qui per *Opere di Jacobi* va inteso, come si è detto, *Opuscula matemathica*, n.d.r.] *T. 2° pag. 249-250). Ecco i valori delle quantità indicate dal Jacobi con A_0, A_1, A_2, ...*

$$A_0 = \frac{\sum_{m=\infty}^{m=-\infty} q^{n\,m^2}}{\sum_m q^{m^2}}, \ldots, A_1 = 2q^{\frac{1}{n}} \frac{\sum_m q^{n\,m^2+2m}}{\sum_m q^{m^2}}, \ldots, A_r = 2q^{\frac{r^2}{n}} \frac{\sum_m q^{n\,m^2+2m}}{\sum_m q^{m^2}}.$$

Da questa prima proprietà se ne ricavano altre di molto interesse, e tra esse una risoluz.[ione] delle equazioni del quinto grado analoga a quella dell'Hermite. Se il Betti non intende per ora pubblicare le sue ricerche sulle equazioni modulari io potrei pubblicare queste".[72]

Con ciò, Brioschi sembra far riferimento, nell'immediato, alla sua nota *Sulle equazioni del moltiplicatore per la trasformazione delle funzioni ellittiche*, dove ritrova e approfondisce quanto considerato da Jacobi in *Notices sur les fonctions*

---

[70] Probabilmente Brioschi avrà pensato, per un breve periodo, alla possibilità di ridurre la forma dell'equazione modulare a quella del moltiplicatore, nel caso p=5, come si evince da un passo di lettera che egli scrive a Betti il 5 Giugno 1858:

"*[...] Vi sono delle singolarità in queste equazioni modulari e del moltiplicatore che sembrano assai complicate. Una per esempio è questa. Nella trasformazione del terzo ordine l'equazione modulare è (1)* $v^4+2u^3v^3-2uv-u^4=0$ *e quella del moltiplicatore è* $z^4-6z^2+8(1-2k^2)z-3=0$. *Ora quando* $z=2u^3\theta+1$ *questa riducesi alla:* $\theta^4+2\frac{\theta^3}{u^3}-2\frac{\theta}{u}-\frac{1}{u^4}=0$, *che è la (1) nella quale siasi posto* $\frac{1}{k}$ *in luogo di* k. *Così nella trasformazione di questo ordine* [quinto, n.d.r.] *le due equazioni sono:* $v^6+4u^6v^5+5u^2v^4-5u^4v^2-4uv-u^6=0$; $z^6-10z^5+35z^4-60z^3+55z^2-2(13-2^7kk'^2)z+5=0$ *e quando in quest'ultima* $z=2\theta+3$ *si ottiene* $\theta^6+4\theta^5+5\theta^4-5\theta^2-4(1-2kk'^2)=0$ *questa ha in parte la forma della prima, ma non sono ancora riuscito a farle coincidere*". BSNS, "Archivio Betti", *ms.* 311, 47, I, in *Documenti per una ricostruzione della ricerca matematica nell'Italia post unitaria*, cit. in nt. 40.

[71] «Annali di matematica pura ed applicata», serie I, t. I (1858), pp. 175-177, in *Opere matematiche di Francesco Brioschi*, cit. in nt. 5, t. I, pp. 321-324.

[72] In *La corrispondenza epistolare Brioschi-Genocchi*, cit. in nt. 2, lettera 14.

elliptiques:[73] il *modulo k* e il *moltiplicatore z* sono legati da un'equazione di grado *p+1*, nelle variabili *k* e *z*, mediante la quale a un dato valore di *k* corrispondono *p+1* valori di *z* che verificano le seguenti relazioni:

$$\sqrt{z_1} = \sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\, n}\quad A_0,$$
$$\sqrt{z_2} = A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_{\frac{n-1}{2}},$$
$$\sqrt{z_3} = A_0 + \alpha\, A_1 + \alpha^4 A_2 + \ldots + \alpha^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} A_{\frac{n-1}{2}},$$

e –scrive pure Brioschi– valgono "*analoghe espressioni per* $\sqrt{z_4}$, $\sqrt{z_5}$, *... ponendo in quest'ultima* α^2, α^3, *... in luogo di* α", con α radice n-sima dell'unità. Inoltre, Brioschi sembra alludere, nel passo precedentemente riportato, anche alla stesura dell'altra nota, *Sulla risoluzione delle equazioni di quinto grado*,[74] di cui si è parlato precedentemente. In quest'ultimo lavoro, riprendendo la nota, pubblicata poco prima, *Sulle equazioni del moltiplicatore per la trasformazione delle funzioni ellittiche*, nella quale –Brioschi ricorda– "*abbiamo dimostrato che le radici quadrate delle radici dell'equazione del moltiplicatore, corrispondenti ad una trasformazione di ordine n primo, si ponno esprimere linearmente per* $\frac{n+1}{2}$ *quantità* $A_0, A_1, \ldots, A_{\frac{n-1}{2}}$", egli aggiunge che "*considerando per ora in particolare l'equazione di sesto grado*

$$z^6 + a_1 z^5 + a_2 z^4 + \ldots + a_5 z + a_6 = 0$$

corrispondente alla trasformazione del quinto ordine, ed indicando con $z_1, z_2, \ldots, z_6$ *le radici della medesima, si avranno le [relazioni]*

$$\sqrt{z_1} = \sqrt{5}\, A_0$$
$$\sqrt{z_2} = A_0 + A_1 + A_2$$
$$\sqrt{z_3} = A_0 + \alpha A_1 + \alpha^4 A_2$$
$$\sqrt{z_4} = A_0 + \alpha^2 A_1 + \alpha^3 A_2$$
$$\sqrt{z_5} = A_0 + \alpha^3 A_1 + \alpha^2 A_2$$
$$\sqrt{z_6} = A_0 + \alpha^4 A_1 + \alpha A_2,$$

[che Brioschi contrassegna con (2), n.d.r.] *nelle quali* α *è una radice immaginaria dell'equazione* $\alpha^5 - 1 = 0$, *e le* A_0, A_1, A_2 *hanno i valori trovati nella Nota citata* [Sulle equazioni del moltiplicatore per la trasformazione delle funzioni ellittiche, nd.r.]".

9. Anche Kronecker, per giungere alla soluzione effettiva delle equazioni algebriche di quinto grado, pensa di utilizzare le funzioni ellittiche, ma a differenza di

[73] «Journal für die reine und angewandte Mathematik», Bd. 3 (1828), pp. 192-195, 303-310, 403-404; Bd. 4, pp. 185-193; in *C. G. J. Jacobi's gesammelte Werke*, cit. nt. 17, t. I, pp. 249-275.
[74] Cfr. nt. 5.

Hermite e di quanto farà dopo Brioschi, che ricorrono alla trasformazione di Jerrard, egli agisce direttamente sulla generica equazione algebrica di quinto grado.

Ecco, qui di seguito, quanto Kronecker espone nel suo lavoro *Sur la résolution de l'équation du cinquième degré; extrait d'une Lettre adressée à M. Hermite*.

Dopo aver denotato con X=0 un'equazione algebrica qualunque, di quinto grado, e con x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 le sue soluzioni, Kronecker definisce la seguente funzione:

$$f(\upsilon,x_0,x_1,x_2,x_3,x_4)=\sum_{m=0}^{m=4}\sum_{n=1}^{n=4}\left(x_m\, x_{m+n}^2\, x_{m+2n}^2+\upsilon\, x_m^3\, x_{m+n}x_{m+2n}\right)\sin\frac{2n\pi}{5}$$

dove υ è una quantità variabile e le quantità del tipo x_m, x_{m+n} e x_{m+2n} sono permutazioni sulle radici x_0, x_1, x_2, x_3, x_4. Poi pone

$$f_r=f(\upsilon,x_r,x_{r+3},x_{r+4},x_{r+1},x_{r+2})$$

con $r=0$, 1, 2, 3, 4. Poiché, così definite, tutte le funzioni f_r, come pure f, sono cicliche,[75] ne viene -come si sapeva- che è possibile, noti i loro valori, esprimere le radici dell'equazione algebrica mediante funzioni algebriche esplicite delle quantità f_r e f: lo scopo, dunque, è ricercare questi valori. Per realizzare ciò la variabile υ deve soddisfare la seguente relazione:

$$f^2+f_0^2+f_1^2+f_2^2+f_3^2+f_4^2=0,$$

inoltre, imponendo sui coefficienti di quest'ultima equazione un'ulteriore condizione, allora sarà possibile esprimere υ tramite radici quadrate dei coefficienti dell'equazione algebrica di partenza e per questo valore di υ trovato, le funzioni $f, f_0, f_1, f_2, f_3, f_4$ soddisfano un' equazione del tipo

$$f^{12}-10\varphi f^6+5\psi^2=\psi f^2,$$

dove φ e ψ sono funzioni razionali di υ, x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, invariabili per tutte le permutazioni circolari delle x_i. Poiché questa equazione ammette soluzioni esprimibili tramite funzioni ellittiche, allora i valori $f, f_0, f_1, f_2, f_3, f_4$ saranno esprimibili attraverso funzioni ellittiche. Di conseguenza, visto che le radici dell'equazione algebrica di partenza possono esprimersi mediante le $f, f_0, f_1, f_2, f_3, f_4$, le soluzioni dell'equazione algebrica di quinto grado saranno esprimibili mediante funzioni ellittiche.

Brioschi, dal canto suo, al ritorno dal viaggio, attraverso Germania e Francia, del 1858 (dove incontra sia Kronecker che Hermite), riprende immediatamente i suoi studi sulla risoluzione delle equazioni algebriche,[76] ponendo l'attenzione, stavolta, al citato lavoro di Kronecker, nel quale è esposto, come si è visto, un procedimento non

---

[75] Kronecker specifica il significato di funzione ciclica dicendo che, ad esempio $f(\upsilon,x_0,x_1,x_2,x_3,x_4)$ è ciclica quando, effettuando una permutazione del tipo $\begin{pmatrix} x_i \\ x_{i+m} \end{pmatrix}$, il valore di questa funzione non viene alterato, ma cambia per tutti gli altri tipi di permutazioni.

[76] "*Ritornato a casa* [dal "grande viaggio", n.d.r.] *col fermo proposito di applicarmi allo studio della risoluzione dell'equazione di quinto grado, mi attenni talmente a questo proposito da trascurare qualunque altra lettura*", da una lettera di Brioschi a Betti del 21 Dicembre 1858. BSNS, "Archivio Betti", *ms*. 275, 11, I, in *Documenti per una ricostruzione della ricerca matematica nell'Italia post unitaria*, cit. in nt. 40.

dettagliato della ricerca delle soluzioni algebriche di quinto grado, tanto da risultare oscuro persino ad Hermite;[77] e questa valutazione del matematico francese è riferita da Brioschi in una lettera a Genocchi del 15 Dicembre 1858 (scritta quindi circa un mese dopo il ritorno in Italia):

"*In questo tempo fui sempre occupato intorno al problema della risoluzione dell'equazione di quinto grado. Il mio scopo era di dimostrare i risultati comunicati dal Kronecker all'Hermite e da questi all'Accademia Francese* [sotto il titolo: *Sur la résolution de l'équation du cinquième degré; extrait d'une Lettre adressée à M. Hermite*, n.d.r.].

L'Hermite medesimo mi aveva spinto a ciò, essendo quella soluzione oscura anche per lui."[78]

Nella stessa lettera del 15 Dicembre, Brioschi comunica a Genocchi i risultati più generali a cui è giunto, e quelli che aspira ad ottenere con la ripresa dei suoi studi:

"*[…] avendo considerata la quistione forse sotto un punto di vista più generale di Kronecker giunsi a trovare una classe di risolventi (del sesto grado) dell'equaz.[ioni] di quinto grado, una delle quali è appunto quella di Kronecker. Tutte queste risolventi hanno la proprietà che io denomino di Jacobi e sulla quale già mi appoggiai per dimostrare i risultati di Hermite. Cioè indicando con z_1, z_2, ..., z_6 le radici di una qualunque di esse, ed α una radice immaginaria dell'equaz. $x^5=1$, si hanno le tre relazioni:*

$$\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}+\ldots+\sqrt{z_6}=\sqrt{5z_1}\ ,$$
$$\sqrt{z_2}+\alpha^2\sqrt{z_3}+\alpha^4\sqrt{z_4}+\alpha\sqrt{z_5}+\alpha^3\sqrt{z_6}=0\,,$$
$$\sqrt{z_2}+\alpha^3\sqrt{z_3}+\alpha\sqrt{z_4}+\alpha^4\sqrt{z_5}+\alpha^2\sqrt{z_6}=0.$$

Esse si deducono dalle (2) [si veda qui in alto, n.d.r.] *del mio articolo 'Sulla risoluz.[ione] delle equazioni del quinto grado' nel fascicolo 4° del giornale.*

---

[77] La delicatezza di questi argomenti trattati da Hermite e Kronecker (e da Brioschi) è qualche volta causa di incomprensione se non di polemiche scientifiche tra i primi due matematici citati, mentre Brioschi, e gli *Annali di matematica pura e applicata*, fungono, in questi casi, da centro di riferimento per le argomentazioni portate dall'uno e dall'altro. Una testimonianza è offerta da una lettera di Brioschi a Betti del 29 Marzo 1859, BSNS, "Archivio Betti", *ms*. 277, 3, I, in *Documenti per una ricostruzione della ricerca matematica nell'Italia post unitaria*, cit. in nt. 40, in cui è scritto:

"*Il Kronecker mi ha scritto una lunga lettera* [verrà pubblicata in estratto, agli inizi del 1859, con il titolo *Sur la théorie des substitution*, t. II degli *Annali*, in *Kronecker's Werke*, cit. in nt. 5, t. IV, pp. 51-52, n.d.r.] *intorno al mio ultimo lavoro* [*Sul metodo di Kronecker per la risoluzione delle equazioni di quinto grado*, cit. in nt. 62, n.d.r.] *ed intorno alla lettera di Hermite pubblicata nell'ultimo fascicolo* [degli *Annali*: *Sur l'abaissement de l'équation modulare du huitième degré*, t. II, in *Oeuvres de Charles Hermite*, cit. in nt. 5, t. II, pp. 83-86, n.d.r.]. *Lo scopo principale di questa lettera di Kronecker è la censura palese dei risultati di Hermite e la censura celata dei metodi dello stesso. Noi già abbiamo avuto varie volte occasione di udire censure analoghe intorno ai lavori dei matematici francesi*".

[78] In *La corrispondenza epistolare Brioschi-Genocchi*, cit. in nt. 2, lettera 23.

Ciò che a me pare di maggior importanza si è la semplicità colla quale giunsi a questi risultati; giacché essi hanno origine da un modo particolare di considerare le 120 permutazioni fra cinque quantità radici dell'equaz.[ioni] di quinto grado.

Un altro passo a farsi è la ***calcolazione effettiva*** [il grassetto è aggiunto, n.d.r.]*, di una almeno di queste risolventi, ma ciò in parte è ancora un desiderio. Mi spiego meglio. Affinché una risolvente di questa classe sia risolvibile per funzioni ellittiche è d'uopo che nei coefficienti della medesima entri una quantità indeterminata, della quale si possa disporre in modo da annullare il coefficiente del secondo termine. (Questa è la condizione più semplice se non l'unica). Ora non ho potuto trovare ancora sei funzioni* $z_1, z_2, \ldots, z_6$ *delle radici dell'equaz.[ione] di quinto grado e di una quantità indeterminata, tali che i coefficienti dell'equazione di sesto grado che ha per valori le* $z_1, z_2, \ldots, z_6$ *siano funzioni degli invarianti di quella di quinto. Le forme proposte da Kronecker ed anche altre più semplici di cui potrebbesi far uso sono di calcolazione sì lunga e difficile che non v'è a pensarvi.*

Quando non si abbia riguardo a quella indeterminata la quistione è assai più facile; ed io credo non priva d'interesse una risolvente che ho calcolato, almeno come primo esempio di risolvente dell'equaz.[ione] di quinto grado. Primo esempio però giovandosi della teoria delle forme, giacché scopersi in questi giorni che il Malfatti fino dal 1771 nel Tomo IV degli atti dell'Accademia di Siena aveva calcolato una risolvente con molta finezza. Le conseguenze che egli ne deduce sono però erronee come ha mostrato il Ruffini".

In forma succinta, in una lettera del 21 Dicembre 1858 (la stessa citata qui in nota 76), Brioschi descrive questi fatti anche a Betti:

"*I miei lavori diretti dapprima a dimostrare il risultato del Kronecker si ampliarono strada facendo, e posso dire di aver con molta semplicità stabilita una teoria di una classe di risolventi delle equazioni di quinto grado. Questa classe di risolventi, alla quale appartiene come caso particolare quella del Kronecker, è definita dalla proprietà scoperta da Jacobi per l'equazione del moltiplicatore nella trasformazione di quinto ordine. Non entro in dettagli giacché spero mandarti fra non molto una nota sull'argomento che feci pubblicare negli Atti dell'Istituto Lombardo*[79] *[...]*".

È interessante, infine, considerare il commento fatto da Brioschi, nel riepilogare, qualche anno dopo, a beneficio di Genocchi (lettera del 21 Settembre 1865), gli aspetti essenziali dei metodi di Kronecker e di Hermite, e i tratti significativi dei propri studi pubblicati a partire dal 1858, intorno al medesimo argomento:

"*In questo momento sono occupato di matematiche [...]. L'argomento è sempre la risoluzione delle equazioni del quinto grado, e precisamente la* effettiva soluzione. *Voi sapete che l'Hermite diede questa risoluzione supponendo l'equazione di quinto grado trasformata secondo Jerrard; il Kronecker propose un altro metodo, superiore al primo perché diretto, ma nel quale la soluzione è piuttosto indicata che effettuata; io allegai quest'ultimo metodo nella prima memoria del 58* [Sul metodo di Kronecker

[79] Si tratta del lavoro *Sul metodo di Kronecker per la risoluzione delle equazioni di quinto grado*, cit. in nt. 62.

per la risoluzione delle equazioni di quinto grado,[80] n.d.r.], *poi accennai alla soluzione effettiva nella memoria sulla risolvente di Malfatti* [Sulla risolvente di Malfatti per le equazioni di quinto grado,[81] n.d.r.]; *ed ora sono occupato ad eseguire i calcoli dietro quel concetto*".[82]

Qualche anno dopo, nel 1867, Brioschi pubblicherà, appunto, il lavoro *La soluzione più generale delle equazioni del quinto grado*, a cui si è accennato.

10. Quanto esposto in questo articolo è lo *status quaestionis*, considerato nella dovuta profondità e relativamente agli anni critici che vanno dal 1850 al 1860, intorno alla risoluzione delle equazioni algebriche di quinto grado; un tema di ricerca che si rivela non privo di difficoltà anche per studiosi della portata di Hermite, Kronecker, Betti e Brioschi. E, viene da pensare, forse proprio per quest'ultima ragione Brioschi, che più di tutti vi si applica, pur essendosi "*fisso di voler pubblicare un libro su questo argomento*" non lo fa.

Dall'indagine effettuata, dove si è proceduto mediante l'analisi degli articoli a stampa e di un cospicuo gruppo di lettere, edite ed inedite, si può dedurre che gli autori coinvolti espongono prevalentemente, nel ricercare la soluzione dell'equazione algebrica di quinto grado, per funzioni ellittiche, una sequenza concatenata di affermazioni di esistenza, non sempre corredate da adeguata evidenza. La "soluzione effettiva", intesa come "effettiva calcolazione" ("*pousser la question jusq'à son dernier terme*", è l'espressione usata da Hermite) sembra una meta scrutabile ma in realtà non raggiungibile. La ragione è la notevole complessità dei calcoli da eseguirsi per ottenere l'agognata "soluzione effettiva". Betti, che pure aveva iniziato col dare fondamentali contributi su questo argomento di ricerca, è il primo a rinunciarvi, esprimendo il seguente convincimento, maturato con l'uscita, nel 1858, dei lavori di Hermite e, specialmente, di Kronecker: "*Il rimanente è affare di calcolo forse assai complicato; io non ho cercato ancora di effettuarlo*". Neppure Brioschi, particolarmente dotato di abilità calcolatoria, si può dire che vi riesca, ma è l'autore che più degli altri riesce a dare una struttura di formula alla procedura di risoluzione esposta. Nel caso di Brioschi sembra di poter dire che le maggiori difficoltà gli vengano dall'impossibilità di potersi dedicare per lunghi periodi allo studio di questo argomento, preso com'è da un gran turbine di affari istituzionali, politici, organizzativi e didattici. Ad ogni modo, i suoi lavori, prodotti in questi anni, risultano essere tra i più chiari e più utili.

[80] Cfr. nt. 62.

[81] «Memorie dell'Istituto Lombardo di Scienze, Lettere ed Arti », t. IX (1863), pp. 215-231, in *Opere matematiche di Francesco Brioschi*, cit. in nt. 5, t. II, pp. 39-56.

[82] In *La corrispondenza epistolare Brioschi-Genocchi*, cit. in nt. 2, lettera 43.

APPENDICE

1
[LETTERA[1]]
ENRICO BETTI a FRANCESCO BRIOSCHI

Firenze, 13 Agosto 1858

Amico carissimo,

Mi pare che il filo dei ragionamenti che hanno condotto il Kronecker al suo bel lavoro sopra l'equazioni di 5° grado sia il seguente:

L'equazioni di 6° grado che hanno per radici funzioni ellittiche di $\frac{K+rK'}{5}$ hanno tutte un gruppo di 60 permutazioni. L'equazioni di 5° grado hanno invece in generale un gruppo di 120. Ma questo è decomponibile in più modi in due gruppi eguali *G* di 60. Per trasformare queste in quelle bisogna dunque: 1° aggiungere una quantità irrazionale di 2° grado invariabile per le sostituzioni di G; 2° Decomporre il gruppo G in 6 gruppi H, H_0, H_1, H_2, H_3, H_4, simili; 3° Costruire l'equazione di 6° grado che ha per radici i 6 valori di una funzione invariabile per le sostituzioni di H.

1° La decomposizione del gruppo generale dell'equazioni di 5° grado in due gruppi *G* è la seguente.

Tutte le sostituzioni sopra 5 lettere sono, come ben sai (Annali di Tortolini 1851):

$$\begin{pmatrix} ax+b \\ x \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (cx+d)^3+e \\ x \end{pmatrix}$$

i gruppi G hanno le sole sostituzioni, nelle quali *a* è un residuo e *c* un residuo di 5.

2° La decomposizione di G in 6 gruppi simili, Kronecker l'ha fatta prendendo il gruppo H a cui appartengono le sostituzioni

$$\begin{pmatrix} ax+b \\ x \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \left(\frac{x}{5}\right)=1$$

e applicando ad esso le sostituzioni

$$\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (2x)^3 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (2x)^3+1 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (2x)^3+2 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (2x)^3+3 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (2x)^3+4 \\ x \end{pmatrix}$$

3° La funzione invariabile per le sostituzioni del gruppo H, che deve contenere un irrazionale di 2° grado, invariabile per le sostituzioni di G è:

$$F^2=\left(\left\{\varphi(m,1)-\varphi(m,4)\right\}sen\frac{2\pi}{5}+\left\{\varphi(m,2)-\varphi(m,3)\right\}sen\frac{4\pi}{5}\right)^2$$

$$\text{dove } \varphi(m,n)=\sum_0^4\left(x_m\, x_{m+n}^2\, x_{m+2n}^2+\upsilon\, x_m^2\, x_{m+n}x_{m+2n}\right)$$ [*][2]

Per assoggettare υ ad essere invariabile per le sostituzioni di G ha posto

$$f^2+f_0^2+f_1^2+f_2^2+f_3^2+f_4^2=0$$

essendo f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 i valori di *f* dopo le sostituzioni $(2x)^3$, $(2x)^3+1$, … .

Il rimanente è affare di calcolo forse assai complicato; io non ho cercato ancora di effettuarlo.

Che cosa vi è nell'ultimo articolo di Kronecker sopra l'equazioni di 7° grado?

Quanto alla Monografia sopra a gli invarianti, possiamo fare come mi proponi. Sarà bene che comparisse nel prossimo fascicolo, perché già s'incomincia a domandare conto della promessa fatta nell'annunzio del giornale.

Faà de Bruno mi ha mandato i primi fogli del suo libro *sopra l'Eliminazione*. È una Monografia. Per ora non vi è quasi nulla di nuovo. Vi è la costruzione della risultante di due equazioni per mezzo della separazione dei termini in gruppi omogenei in indice, resa semplice da varie relazioni di simmetria tra i coefficienti numerici. È dovuta a *Cayley*. *Faà de Bruno* ne ha data una specie di dimostrazione assai complicata. Ma se ne può fare a meno. Come gli ho scritto, è una conseguenza quasi immediata dei teoremi di Cayley che io aveva dimostrati nell'articolo bibliografico che non è stato pubblicato.

Mossotti, il quale ancora non è partito di Toscana ti manderà probabilmente un articolo per i nostri Annali. Vorrebbe che prima lo vedesse *Cattaneo*, perché è stato mosso da alcune operazioni giuste dello stesso *Cattaneo*.

Sono rimasto meravigliato di quanto mi hai scritto di *Minich*. Avendo potuto con molte fatiche, come mi diceva *Meneghini*, arrivare a fondare le società filodrammatica e filarmonica di Padova, crederà che la parola impossibile deve togliersi dai dizionari.

Pensiamo ora al nostro viaggio. Io che sto qua oziando, e non trovo modo di applicarmi seriamente vorrei affrettare l'epoca della partenza. Quando dobbiamo partire? Si deve anticipare del tempo che si era fissato? Nella gita si deve lasciar fuori affatto Parigi, riservandolo a un altro anno, essendo il tempo ristretto? Nell'andare a Berlino si deve prendere la via che mi pare più breve cioè da Cairo, lago di Costanza, Augsbourg, Nurnberga, Lipsia, oppure Zurigo, Basilea, lungo il Reno? Nel tornare non converrà Egli procedere da Vienna, se non si vuol passare da Parigi?

Nonostante le tue occupazioni, spero che mi scriverai presto. Ritorna i miei saluti alla tua signora e alla tua bimba, e ama

il tuo amico
E. Betti

P.S. Se non ti servi dei Monatsberichte,
dov'è l'ultimo lavoro di Kronecker,
potresti mandarmelo?

---

[1] Biblioteca Centrale della Facoltà di Ingegneria del Politecnico di Milano, "Archivio Francesco Brioschi", segnatura: 71/D III 122/14/1.

[2] Dalla consultazione del lavoro di Kronecker, *Sur la résolution de l'équation du cinquième degré; extrait d'une Lettre adressée à M. Hermite*, cit. in nt. 5, si vede che la funzione, da Betti indicata con F, è definita al modo seguente:

$$f(\upsilon,x_0,x_1,x_2,x_3,x_4)=\sum_{m=0}^{m=4}\sum_{n=1}^{n=4}\left(x_m\, x_{m+n}^2\, x_{m+2n}^2+\upsilon\, x_m^3\, x_{m+n}x_{m+2n}\right)\sin\frac{2n\pi}{5}.$$

2

[FRAMMENTO DI LETTERA[1]]

LEOPOLD KRONECKER ad ENRICO BETTI

Après avoir lu avec le plus grand intérêt vos excellents mémoires algébriques, je ne me prends la liberté de vous envoyer un petit extrait de mes travaux [*Über die algebraisch auflösbaren gleichungen*, n.d.r.], que pour vous exprimer mon admiration pour votre talent et pour vous assurer de la considération la plus haute, avec laquelle j'ai l'honneur d'être

votre
très humble
Leopold Kronecker

Liegnitz (Silésie Prussienne)
le 8 Janvier 1854

[1] Biblioteca della Scuola Normale Superiore di Pisa, "Archivio Betti", *ms*. 834, 1, I.

Bibliografia*

- M. Barile e S. De Nuccio, *Lezioni di Matematica dagli scritti di Évariste Galois*, vol. 1, Trieste, Edizioni Goliardiche, 2004.
- R. Franci - L. Toti Rigatelli, *Storia della teoria delle equazioni algebriche*, Milano, Mursia, 1979.
- Chr. Houzel, *Fonctions elliptiques et intégrales abéliennes*, in J. Dieudonné, *Abrégé d'histoire des mathématiques*, Paris, Hermann, 1978, due tomi, II, cap. VII.
- C. Jordan, *Traité des substitutions et des équations algébriques*, Paris, Gauthier-Villars, 1870.
- I. Nagliati, *Le prime ricerche di Enrico Betti nel carteggio con Mossotti*, «Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche», vol. XX (2000), pp. 3-86.
- Tesi di Laurea in Matematica, redatta da M. D. Picchinenna, matr. 54/01302, relatore F. Palladino, dal titolo *Documenti per una ricostruzione della ricerca matematica nell'Italia post unitaria. (Con trascrizione delle lettere di Francesco Brioschi a Enrico Betti e di Placido Tardy a Enrico Betti)*, Università degli Studi di Salerno, anno accademico 2002-2003.
- L. Toti Rigatelli, *La mente algebrica. Storia dello sviluppo della Teoria di Galois nel XIX secolo*, Busto Arsizio, Bramante Editrice, 1989.
- F. Tricomi, *Funzioni ellittiche*, Bologna, Zanichelli, 1951[2].
- B. L. van der Waerden, *A History of Algebra*, Berlin - Heidelberg, Springer-Verlag, 1985.
- G. Zappa, *Francesco Brioschi e la risoluzione delle equazioni di quinto grado*, in *Francesco Brioschi (1824-1897). Convegno di studi matematici*, Milano, Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, 1999, pp. 95-108.

*- Le edizioni concernenti le "opere matematiche", quando edite, degli autori citati, appaiono, all'occorrenza, nelle specifiche note redatte a pie' di pagina.