Annales Mathématiques Africaines
Volume 3 (2012) pp. 27-44

Mesure invariante d'une équation integrale stochastique à coefficients périodiques et applications à un modèle d'épidémiologie

Hisao Fujita Yashima[1)], Elisabetta Tornatore[2)],
and Stefania Maria Buccellato[2)]

[1)] Université 08 Mai 1945 de Guelma, 24000 Guelma, Algérie
et Dipartimento di Matematica, Università di Torino, 10123 Torino, Italie

[2)]Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici,
Università di Palermo, 90128 Palermo, Italie

Résumé. On considère une équation intégrale stochastique, dont les coefficients sont périodiques par rapport au temps. Sous une condition convenable on démontre l'existence d'une mesure invariante pour cette équation stochastique. Cette mesure invariante est construite sur un espace de Banach de fonctions continues. On étudie aussi son application à un model épidémiologique du paludisme, qui prend en considération la population des infectés et celle de vecteurs.

Abstract : We consider a stochastic integral equation, whose coefficients are periodic in time. Under a suitable condition we prove the existence of an invariant mesure for this stochastic equation. This invariant mesure is constructed on a Banach space of continuous functions. We study also its application to an epidemiologic model of malaria, which concerns the infected population and the vector population.

Mots cles : équation intégrale stochastique, mesure invarriante, modèle épidémiologique

Classification : 60H20

1. - Introduction.

Dans [2] nous avons démontré l'existence d'une mesure invariante pour une classe d'équations intégrales stochastiques à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ à coefficients indépendants de t. Le but du présent travail est de généraliser ce résultat aux équations intégrales stochastiques à coefficients périodiques en t et d'en illustrer une application à un modèle d'épidémiologie.

Nous allons considérer l'équation intégrale stochastique pour le processus stochastique inconnu $\xi(t)$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t f(s,\xi(s))ds + \int_0^t \int_{s-L}^s \varphi(s-r)g(r,\xi(r))drds + \\ + \int_0^t \sigma(s,\xi(s))dW(s), \tag{1.1}$$

où $f(t,x)$ est une fonction définie sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, $g(t,x)$ une fonction définie sur $[-L,\infty[\,\times \mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}^l$, $\varphi(\tau)$ une fonction définie sur $[0,L]$ à valeurs dans $\mathbf{R}^{n\times l}$ ($\mathbf{R}^{n\times l}$ désigne l'ensemble des matrices du type $n \times l$), $\sigma(t,x)$ une fonction définie sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}^{n\times m}$, $W(t)$ le mouvement brownien à valeurs dans $\mathbf{R}^m$; nous supposons que $f(t,x)$, $g(t,x)$ et $\sigma(t,x)$ sont périodiques en t de période T. Si $f(t,x)$, $g(t,x)$ et $\sigma(t,x)$ ne dépendent pas de t, alors l'équation (1.1) se réduit à l'équation que nous avons examinée dans [2].

Dans la suite nous allons démontrer l'existence d'une mesure invariante pour l'équation (1.1) sous des hypothèses convenables. Le résultat peut être généralisé à des équations de type analogue sous de différentes conditions. Nous en citons un exemple pour lequel la généralisation est presque immédiate ; en effet pour l'équation

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t f(s,\xi(s))ds + \int_0^t \int_{s-L}^s \varphi(s-r)g_1(\xi(s),r,\xi(r))drds + \\ + \int_0^t \sigma(s,\xi(s))dW(s) \tag{1.2}$$

on peut démontrer le même résultat sous une hypothèse sur $g_1(x',t,x)$ similaire à celle sur $g(t,x)$ dans (1.1).

Parmi les possibles applications de ce résultat, nous examinerons celle à un modèle épidémiologique du paludisme. Pour l'étude épidémiologique de cette maladie on peut considérer la population infectée et la population de vecteurs (voir par exemple [6], [8]). Or, à cause du cycle particulier de la vie des parasites *Plasmodium*, la transmission de la maladie nécessite du temps, ce qui peut être représenté par un terme intégral dans l'équation ; d'autre part, la condition de la vie des vecteurs, moustiques du genre *Anophèles*, subit les variations périodiques (par le changement de saisons) ainsi que des variations impévisibles de conditions environnementales, ce qui nous conduit à modéliser le phénomène par un système d'équations, cas particulier de (1.2) (voir (6.1) et (6.2) dans le paragraphe 6 du présent article).

2. - Préliminaires.

Pour démontrer l'existence d'une mesure invariante pour l'équation (1.1), nous avons naturellement besoin de quelques conditions sur les fonctions qui y interviennent. En effet, dans le présent travail on suppose que $f(\cdot,\cdot)$, $g(\cdot,\cdot,\cdot)$, $\sigma(\cdot,\cdot)$ sont mesurables et satisfont aux conditions

$$\forall \alpha > 0,\ \exists L_\alpha \text{ tel que pour } |x| \le \alpha,\ |y| \le \alpha\ (x, y \in \mathbf{R}^n) \text{ on ait} \tag{2.1}$$

$$|f(t,x) - f(t,y)| \le L_\alpha |x-y|, \quad |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \le L_\alpha |x-y| \quad \forall t \ge 0,$$
$$|g(t,x) - g(t,y)| \le L_\alpha |x-y|, \quad \forall t \ge -L,$$

$$\exists \bar{C}_1 > 0 \text{ tel que } |f(t,0)| \le \bar{C}_1 \quad \forall t \ge 0, \tag{2.2}$$

$$\exists \bar{C}_2 > 0 \text{ tel que } \quad |g(t,x)| \le \bar{C}_2(1+|x|) \quad \forall (t,x) \in [-L, \infty[\, \times \mathbf{R}^n, \tag{2.3}$$
$$|\sigma(t,x)| \le \bar{C}_2(1+|x|) \quad \forall (t,x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n,$$

$$\varphi(\cdot) \in L^1(0,L), \tag{2.4}$$

$$f(t,x) = f(t+T,x), \quad \sigma(t,x) = \sigma(t+T,x) \quad \forall (t,x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n, \tag{2.5}$$
$$g(t,x) = g_1(t+T,x) \quad \forall (t,x) \in [-L,\infty[\, \times \mathbf{R}^n;$$

dans (2.5) T est une constante strictement positive.

Nous supposons en outre qu'il existe une constante $\bar{a}_1 > 0$ telle que

$$\inf_{B \in GL(n)} \left[\sup_{\substack{0 \le t \le T \\ |x| \ge \bar{a}_1}} \frac{1}{|x|^2} \left(\langle Bf(t, B^{-1}x), x \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \Big(\sum_{j=1}^n b_{ij} \sigma_{jk}(t, B^{-1}x) \Big)^2 \right) + \right.$$
$$\left. + \int_0^L \|B\varphi(\tau)\| d\tau \sup_{\substack{0 \le t \le T \\ |x| \ge \bar{a}_1}} \frac{|g(t, B^{-1}x)|}{|x|} \right] < 0, \tag{2.6}$$

où

$$B = (b_{ij}), \qquad \|B\varphi(\tau)\| = \|B\varphi(\tau)\|_{\mathcal{L}(\mathbf{R}^l, \mathbf{R}^n)} = \sup_{y \in \mathbf{R}^l, |y|=1} |B\varphi(\tau) y|.$$

Pour démontrer l'existence d'une mesure invariante pour l'équation (1.2), nous admettons les condition (2.1)–(2.6), en y remplaçant simplement les conditions concernant la fonction g dans (2.1), (2.3), (2.5) et (2.6) par

$$|g_1(x',t,x) - g(x',t,y)| \le L_\alpha |x-y|, \quad |g_1(x',t,x) - g(y',t,x)| \le L_\alpha |x'-y'| \tag{2.7}$$

$$\text{pour} \quad \max(|x|, |y|, |x'|, |y'|) \leq \alpha \quad (x, y, x', y' \in \mathbf{R}^n), \quad t \geq -L,$$

(2.8)
$$\exists \bar{C}_2 > 0 \;\text{ tel que } \quad |g_1(x', t, x)| \leq \bar{C}_2(1 + |x|) \quad \forall (x', t, x) \in \mathbf{R}^n \times [-L, \infty[\, \times \mathbf{R}^n,$$

$$g_1(x', t, x) = g_1(x', t + T, x) \quad \forall t \geq -L, \tag{2.9}$$

(2.10)
$$\inf_{B \in GL(n)} \left[\sup_{\substack{0 \leq t \leq T \\ |x| \geq \bar{a}_1}} \frac{1}{|x|^2} \left(\langle Bf(t, B^{-1}x), x \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} b_{ij} \sigma_{jk}(t, B^{-1}x) \Big)^2 \right) + \right.$$
$$\left. + \int_0^L \|B\varphi(\tau)\| d\tau \sup_{\substack{x' \in \mathbf{R}^n \\ 0 \leq t \leq T,\, |x| \geq \bar{a}_1}} \frac{|g_1(x', t, B^{-1}x)|}{|x|} \right] < 0.$$

Pour résoudre l'équation (1.1) ou (1.2) avec une condition initiale, nous avons besoin de la donnée initiale sur l'intervalle $[-L, 0]$, c'est-à-dire que $\xi(t)$ est donnée pour $-L \leq t \leq 0$. Pour cette donnée nous supposons

$$\xi(\cdot) \in C([-L, 0]; \mathbf{R}^n) \quad \text{p.s..} \tag{2.11}$$

En ce qui concerne l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (1.1) avec la condition initiale (2.11), si les fonctions $f(t, x)$, $g(t, x)$ et $\sigma(t, x)$ dans (1.1) sont lipschitziennes par rapport à $x \in \mathbf{R}^n$ et satisfont uniformément à l'inégalité $|f(t, x)| + |g(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|)$ avec une constante C, il n'est pas difficile de démontrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (1.1) (voir par exemple [5]). Comme on le sait bien, ce Théorème d'existence et d'unicité peut être généralisé au cas où f, g, σ sont mesurables et localement lipschitziennes par rapport à $x \in \mathbf{R}^n$ avec $|f(t, 0)| + |g(t, 0)| + |\sigma(t, 0)| \leq C$, C étant une constante, et où il existe une suite $\{D_k, f_k, g_k, \sigma_k\}_{k=1}^{\infty}$ telle que

i) $\quad D_k$: ouverts, $\quad \cup_{k=1}^{\infty} D_k = \mathbf{R}^n, \quad D_k \subset D_{k+1},$

ii) $\quad f_k\big|_{D_k} = f\big|_{D_k}, \quad g_k\big|_{D_k} = g\big|_{D_k}, \quad \sigma_k\big|_{D_k} = \sigma\big|_{D_k},$

iii) $\quad f_k$, g_k, σ_k satisfont à la condition de Lipschitz en x,

iv) si $\xi_k(t)$ est la solution de l'équation obtenue en substituant les fonctions f_k,

g_k, σ_k au lieu de f, g, σ dans (1.1) avec la même condition initiale, on a

$$\mathbf{P}(\{\xi_k(s) \in D_k \ \forall s \in [0,t]\}) \to 1 \quad \text{pour} \quad k \to \infty \qquad \forall t \geq 0.$$

On voit aisément que le Théorème d'existence et d'unicité peut être généralisé à l'équation (1.2) sous les conditions tout analogues (c'est-à-dire, en substituant simplement g_1 à g dans les conditions qu'on vient de mentionner).

On remarque que, si on estime les solutions approchées $\xi_k(t)$ de manière analogue à l'estimation de $\xi(t)$ que nous verrons dans la suite, il n'est pas difficile de voir que les conditions (2.1)–(2.6) entraînent l'existence de la suite $\{D_k, f_k, g_k, \sigma_k\}_{k=1}^{\infty}$ satisfaisant aux conditions i)–iv) pour l'équation (1.1).

Analoguement, pour l'équation (1.2) les conditions avec les modifications indiquées ci-dessus entraînent l'existence de la suite $\{D_k, f_k, g_{1,k}, \sigma_k\}_{k=1}^{\infty}$ ayant les propriétés analogues à $\{D_k, f_k, g_k, \sigma_k\}_{k=1}^{\infty}$.

3. - Estimations de la solution.

Dans ce paragraphe on va établir des estimations de la solution de l'équation (1.1) avec la condition initiale (2.11), estimations qui seront utilisées dans les prochains paragraphes pour démontrer l'existence d'une mesure invariante pour l'équation (1.1). On remarquera que les conditions (2.1)–(2.6), (2.11) avec la substitution des relations concernant la fonctions g par les relations (2.7)–(2.10) concernant la fonctions g_1 ne modifieront pas la démonstration des propositions qui suivent.

En effet, dans les conditions (2.8) et (2.10) les inégalités ne dépendent pas de x', de sorte que la même démonstration avec les modifications purement formelles sera valable également pour la solution $\xi(t)$ de l'équation (1.2).

Pour ne pas alourdir l'exposé, nous écrivons seulement la démonstration des propositions pour l'équation (1.1).

Proposition 3.1. *On suppose que les conditions* (2.1)–(2.6), (2.11) *sont vérifiées. Alors il existe deux constantes h et M telles que $h > 0$ et que la solution $\xi(t)$ de l'équation* (1.1) *avec la condition* (2.11) *satisfasse à*

$$\mathbf{E}\left(|\xi(t)|^{2+h}\right) \leq M \qquad \forall t \geq 0. \tag{3.1}$$

Démonstration. En vertu de (2.6) et de (2.3) il existe une matrice B et deux nombres $\alpha > 0$, $h > 0$ tels que

$$\sup_{0 \leq t \leq T,\, |x| \geq \bar{a}_1} \frac{1}{|x|^2}\Big(\langle Bf(t, B^{-1}x), x\rangle + \tag{3.2}$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i,j,q,l=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left(\delta_{ij} + h\frac{x_i x_j}{|x|^2}\right) b_{iq}\sigma_{qk}(t, B^{-1}x) b_{jl}\sigma_{lk}(t, B^{-1}x)\Big) +$$

$$+ \int_0^L \|B\varphi(\tau)\| d\tau \sup_{0\le t\le T,\, |x|\ge \bar a_1} \frac{|g(t,B^{-1}x)|}{|x|} \le -\alpha.$$

Étant choisi B vérifiant (3.2), on pose

$$c_\varphi = \int_0^L \|B\varphi(\tau)\| d\tau, \qquad c_g = \sup_{0\le t\le T,\, |x|\ge \bar a_1} \frac{|g(t,B^{-1}x)|}{|x|}. \tag{3.3}$$

Comme les fonctions $f(\cdot,\cdot)$ et $\sigma(\cdot,\cdot)$ satisfont à (2.1)–(2.3), de (3.2) (à l'aide de (3.3)) on déduit qu'il existe une constante C_1 telle que

(3.4)

$$\langle Bf(t,B^{-1}x),x\rangle + \frac{1}{2}\sum_{i,j,q,l=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\Big(\delta_{ij} + h\frac{x_i x_j}{|x|^2}\Big) b_{iq}\sigma_{qk}(t,B^{-1}x) b_{jl}\sigma_{lk}(t,B^{-1}x) \le$$

$$\le -(\alpha + c_\varphi c_g)|x|^2 + C_1 \qquad \forall (t,x)\in \mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^n.$$

Soit $\xi(t)$ la solution de l'équation (1.1) avec la condition (2.11). On pose

$$\tilde\xi(t) = B\xi(t). \tag{3.5}$$

En appliquant la formule d'Ito à $|\tilde\xi(t)|^{2+h}$, on obtient

$$|\tilde\xi(t)|^{2+h} = |\tilde\xi(0)|^{2+h} + (2+h)\int_0^t |\tilde\xi(s)|^h \tilde\xi(s)\cdot Bf(s,B^{-1}\tilde\xi(s))ds + \tag{3.6}$$

$$+ (2+h)\int_0^t |\tilde\xi(s)|^h\tilde\xi(s)\cdot \int_{s-L}^s B\varphi(s-r)g(r,B^{-1}\tilde\xi(r))drds +$$

$$+ (2+h)\int_0^t \beta(s)ds + (2+h)\int_0^t |\tilde\xi(s)|^h\tilde\xi(s)\cdot B\sigma(s,B^{-1}\tilde\xi(s))dW(s),$$

où

$$\beta(s) = \frac{1}{2}\sum_{i,j,l,q=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\Big(|\tilde\xi(s)|^h\delta_{ij} + h|\tilde\xi(s)|^{h-2}\tilde\xi_i(s)\tilde\xi_j(s)\Big) \times$$

$$\times\, b_{il}\sigma_{lk}(s,B^{-1}\tilde\xi(s))\; b_{jq}\sigma_{qk}(s,B^{-1}\tilde\xi(s)).$$

De (3.6) on déduit que

$$\mathbf{E}(|\tilde\xi(t)|^{2+h}) = \mathbf{E}(|\tilde\xi(0)|^{2+h}) + (2+h)\int_0^t \mathbf{E}\Big[|\tilde\xi(s)|^h\tilde\xi(s)\cdot Bf(t,B^{-1}\tilde\xi(s)) + \beta(s)\Big]ds +$$

$$+ (2+h)\int_0^t \mathbf{E}\Big[|\tilde\xi(s)|^h\tilde\xi(s)\cdot\int_{s-L}^s B\varphi(s-r)g(r,B^{-1}\tilde\xi(r))dr\Big]ds,$$

ou

$$\frac{d}{dt}\mathbf{E}\Big(|\tilde\xi(t)|^{2+h}\Big) = (2+h)\mathbf{E}\Big[|\tilde\xi(t)|^h\tilde\xi(t)\cdot Bf(t,B^{-1}\tilde\xi(t)) + \beta(t)\Big] + \tag{3.7}$$

$$+ (2+h)\mathbf{E}\Big[|\tilde\xi(t)|^h\tilde\xi(t)\cdot\int_{t-L}^t B\varphi(t-s)g(s,B^{-1}\tilde\xi(s))ds\Big].$$

De (3.4) et de la définition de $\beta(s)$ on déduit que

$$\mathbf{E}\Big[|\tilde\xi(t)|^h\tilde\xi(t)\cdot Bf(t,B^{-1}\tilde\xi(t)) + \beta(t)\Big] \le \tag{3.8}$$

$$\leq \ -(\alpha + c_g c_\varphi)\mathbf{E}\left(|\tilde{\xi}(t)|^{2+h}\right) + C_1 \mathbf{E}\left(|\tilde{\xi}(t)|^{h}\right).$$

D'autre part, grâce à la condition (2.3) (et en utilisant la définition (3.3)) on a

$$|g(t, B^{-1}x)| \leq c_g|x| + c_{g,0} \tag{3.9}$$

avec une constante $c_{g,0}$. On a donc

$$\mathbf{E}\left(\Big|\int_{t-L}^{t} B\varphi(t-s)g(s, B^{-1}\tilde{\xi}(s))ds\Big|^{2+h}\right) \ \leq$$

$$\leq \ \left(\int_0^L \|B\varphi(\tau)\|d\tau\right)^{1+h} \int_{t-L}^{t} \|B\varphi(t-s)\|\mathbf{E}\left[(c_g|\tilde{\xi}(s)| + c_{g,0})^{2+h}\right] ds,$$

d'où on déduit que

$$\mathbf{E}\left[|\tilde{\xi}(t)|^h\tilde{\xi}(t)\cdot\int_{t-L}^{t} B\varphi(t-s)g(s, B^{-1}\tilde{\xi}(s))ds\right] \leq \frac{1+h}{2+h}(\alpha + c_\varphi c_g)\mathbf{E}\left(|\tilde{\xi}(t)|^{2+h}\right) \ +$$

$$+ \ \frac{1}{2+h}\frac{c_\varphi^{1+h}}{(\alpha + c_\varphi c_g)^{1+h}}\int_{t-L}^{t} \|B\varphi(t-s)\| \left((1+\delta)c_g^{2+h}\mathbf{E}\left(|\tilde{\xi}(s)|^{2+h}\right) + C_\delta\right) ds,$$

où δ est une constante arbitraire et C_δ est une constante déterminée par δ. Donc, en choisissant

$$\delta = \frac{(\alpha + c_\varphi c_g)^{1+h}}{c_\varphi^{1+h} c_g^{1+h}} - 1,$$

on a

$$\mathbf{E}\left[|\tilde{\xi}(t)|^{h)}\tilde{\xi}(t)\cdot\int_{t-L}^{t} B\varphi(t-s)g(s, B^{-1}\tilde{\xi}(s))ds\right] \ \leq \tag{3.10}$$

$$\leq \ \frac{1+h}{2+h}(\alpha + c_\varphi c_g)\mathbf{E}\left(|\tilde{\xi}(t)|^{2+h}\right) + \frac{c_g}{2+h}\int_{t-L}^{t} \|B\varphi(t-s)\|\mathbf{E}\left(|\tilde{\xi}(s)|^{2+h}\right) ds + R_1$$

avec une constante R_1.

Ainsi, si on pose

$$y_1(t) = \mathbf{E}\left(|\tilde{\xi}(t)|^{2+h}\right),$$

compte tenu de la relation

$$(2+h)C_1\mathbf{E}\left(|\tilde{\xi}(t)|^{h}\right) \leq \frac{\alpha}{2}\mathbf{E}\left(|\tilde{\xi}(t)|^{2+h}\right) + R_2,$$

R_2 étant une constante déterminée, de (3.7), de (3.8) et de (3.10) on obtient

$$y_1'(t) \leq -\left(\frac{\alpha}{2} + c_\varphi c_g\right) y_1(t) + c_g\int_{t-L}^{t} \|B\varphi(t-s)\|y_1(s)ds + R \tag{3.11}$$

avec une constante R.

Comme $\frac{\alpha}{2} + c_\varphi c_g > c_\varphi c_g$, (3.11) se réduit à

$$y_1'(t) \leq -\tilde{a}_1 y_1(t) + \tilde{b}_1\int_{t-L}^{t} \|B\varphi(t-s)\|y_1(s)ds + \tilde{R}, \tag{3.12}$$

avec des constantes positives $\tilde{a}_1$, $\tilde{b}_1$, $\tilde{R}$ telles que

$$\tilde{a}_1 > \tilde{b}_1 c_\varphi. \tag{3.13}$$

Comme on le sait bien, sous la condition (3.13) il n'est pas difficile de démontrer, à l'aide du Théorème de Paley-Wiener (voir [7]), qu'il existe une constante $\tilde{M}_p$ telle que la fonction $y_1(t)$ satisfaisant à (3.12) vérifie $y_1(t) \leq \tilde{M}$ $\forall t \geq 0$ (pour les détails, voir par exemple la déduction de (2.16) à partir de (2.9) de [2]). Cela étant, compte tenu de (3.5), on en déduit qu'il existe une constante M telle que l'inégalité (3.1) soit vérifiée. □

Proposition 3.2. *Soit ν_1 une constante positive. Sous les mêmes hypothèses de la Proposition 3.1 on a*

$$\mathbf{E} \sup_{t \leq \tau \leq t+\nu_1} |\xi(\tau)| \leq C_{\nu_1} \qquad \forall t \geq 0, \tag{3.14}$$

où C_{ν_1} est une constante qui ne dépend que de ν_1.

Démonstration. On considère la fonction

$$\psi(x) = \sqrt{1+|x|^2}, \quad x \in \mathbf{R}^n. \tag{3.15}$$

Comme on a

$$\nabla\psi(x) = \frac{x}{\psi(x)}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\psi(x) = \frac{\delta_{ij}}{\psi(x)} - \frac{x_i x_j}{\psi(x)^3},$$

la formule d'Ito appliquée à $\psi(\tilde{\xi}(t))$ avec $\tilde{\xi}(t) = B\xi(t)$ introduit dans (3.5) nous donne, pour $0 \leq t \leq \tau \leq t+\nu_1$,

$$\begin{aligned}\psi(\tilde{\xi}(\tau)) = \psi(\tilde{\xi}(t)) &+ \int_t^\tau \frac{\tilde{\xi}(s)}{\psi(\tilde{\xi}(s))} \cdot Bf(s, B^{-1}\tilde{\xi}(s))ds + \\ &+ \int_t^\tau \frac{\tilde{\xi}(t)}{\psi(\tilde{\xi}(s))} \cdot \int_{s-L}^s B\varphi(s-r)g(r, B^{-1}\tilde{\xi}(r))drds + \\ &+ \int_t^\tau \beta_1(s)ds + \int_t^\tau \frac{\tilde{\xi}(s)}{\psi(\tilde{\xi}(s))} \cdot B\sigma(s, B^{-1}\tilde{\xi}(s))dW(s),\end{aligned} \tag{3.16}$$

où

$$\beta_1(s) = \frac{1}{2}\sum_{i,j,l,q=1}^n \sum_{k=1}^m \left(\frac{\delta_{ij}}{\psi(\tilde{\xi}(s))} - \frac{\tilde{\xi}_i(s)\tilde{\xi}_j(s)}{\psi(\tilde{\xi}(s))^3}\right) b_{il}\sigma_{lk}(s, B^{-1}\tilde{\xi}(s))b_{jq}\sigma_{qk}(s, B^{-1}\tilde{\xi}(s)).$$

Or, en vertu de (2.6) (voir aussi (2.1)–(2.4)) il y a une constante $\tilde{C}_1 \geq 0$ telle que

$$\begin{aligned}&\frac{\tilde{\xi}(s)}{\psi(\tilde{\xi}(s))} \cdot Bf(s, B^{-1}\tilde{\xi}(s)) + \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i,j,l,q=1}^n \sum_{k=1}^m \frac{\delta_{ij}}{\psi(\tilde{\xi}(s))} b_{il}\sigma_{lk}(s, B^{-1}\tilde{\xi}(s))b_{jq}\sigma_{qk}(s, B^{-1}\tilde{\xi}(s)) \leq \tilde{C}_1.\end{aligned}$$

Donc, en rappelant (3.9), de (3.16) on déduit que

$$\sup_{t\le\tau\le t+\nu_1}\psi(\tilde\xi(\tau))\le\psi(\tilde\xi(t))+\int_t^{t+\nu_1}\int_{s-L}^{s}\|B\varphi(s-r)\|(c_g|\tilde\xi(r)|+c_{g,0})drds+ \tag{3.17}$$

$$+\int_t^{t+\nu_1}\frac12\sum_{i,j,l,q=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\frac{|\tilde\xi_i(s)\tilde\xi_j(s)|}{\psi(\tilde\xi(s))^3}\Big|b_{il}\sigma_{lk}(s,B^{-1}\tilde\xi(s))b_{jq}\sigma_{qk}(s,B^{-1}\tilde\xi(s))\Big|ds+$$

$$+\sup_{t\le\tau\le t+\nu_1}\int_t^{\tau}\frac{\tilde\xi(s)}{\psi(\tilde\xi(s))}\cdot B\sigma(s,B^{-1}\tilde\xi(s))dW(s)+\nu_1\tilde C_1.$$

Or, compte tenu de (2.4) et de (3.15) et en utilisant (3.1), on a

$$\mathbf E\int_t^{t+\nu_1}\frac12\sum_{i,j,l,q=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\frac{|\tilde\xi_i(s)\tilde\xi_j(s)|}{\psi(\tilde\xi(s))^3}\Big|b_{il}\sigma_{lk}(s,B^{-1}\tilde\xi(s))b_{jq}\sigma_{qk}(s,B^{-1}\tilde\xi(s))\Big|ds\ \le$$

$$\le\ \mathbf E\int_t^{t+\nu_1}\tilde C_2|\tilde\xi(s)|ds+\nu_1\tilde C_2\le\nu_1\tilde C_2\left(M^{\frac{1}{2+h}}+1\right)$$

avec une constante $\tilde C_2>0$. En outre, grâce encore à (3.1), on a

$$\mathbf E\int_t^{t+\nu_1}\int_{s-L}^{s}\|B\varphi(s-r)\|(c_g|\tilde\xi(r)|+c_{g,0})drds\ \le$$

$$\le\ \nu_1\int_{s-L}^{s}\|B\varphi(s-r)\|dr\left(c_g\|B\|_{\mathcal L(\mathbf R^n,\mathbf R^n)}M^{\frac{1}{2+h}}+c_{g,0}\right).$$

D'autre part, en vertu de l'inégalité de Doob, de (2.3) et de (3.1), on a

$$\mathbf E\left(\sup_{t\le\tau\le t+\nu_1}\int_t^{\tau}\frac{\tilde\xi(s)}{\psi(\tilde\xi(s))}\cdot B\sigma(s,B^{-1}\tilde\xi(s))dW(s)\right)\ \le$$

$$\le\ \left[\mathbf E\Big(\sup_{t\le\tau\le t+\nu_1}\Big|\int_t^{\tau}\frac{\tilde\xi(s)}{\psi(\tilde\xi(s))}\cdot B\sigma(s,B^{-1}\tilde\xi(s))dW(s)\Big|^2\Big)\right]^{1/2}\ \le$$

$$\le\ 2\left[\mathbf E\Big(\Big|\int_t^{t+\nu_1}\frac{\tilde\xi(s)}{\psi(\tilde\xi(s))}\cdot B\sigma(s,B^{-1}\tilde\xi(s))dW(s)\Big|^2\Big)\right]^{1/2}\ \le$$

$$\le\ 2\left[\mathbf E\Big(\int_t^{t+\nu_1}\Big|\frac{\tilde\xi(s)}{\psi(\tilde\xi(s))}\cdot B\sigma(s,B^{-1}\tilde\xi(s))\Big|^2ds\Big)\right]^{1/2}\le 2\left(\nu_1\tilde C_3(1+M^{\frac{2}{2+h}})\right)^{1/2}$$

avec une constante $\tilde C_3$.

Donc, en utilisant encore une fois (3.1), on déduit de (3.17) qu'il existe une constante $C'(M,\nu_1)$ déterminée par M et ν_1 et telle que

$$\mathbf E\sup_{t\le\tau\le t+\nu_1}\psi(\tilde\xi(\tau))\le C'(M,\nu_1),$$

d'où, compte tenu de la définition (3.15) de $\psi(x)$, on obtient (3.14). □

4. - Compacité à ε près dans un espace de Banach.

On pose

$$\nu = \max(T, L), \tag{4.1}$$

$$\eta(k) = \{\, \xi((k+m_0)T+\tau) \mid -\nu \le \tau \le 0\,\}, \qquad k \in \mathbf{N}\backslash\{0\}, \tag{4.2}$$

où $\xi(t)$ est la solution de l'équation (1.1) avec la condition (2.11), tandis que m_0 est le plus grand entier m tel que $m \le \frac{L}{T}$ (c'est-à-dire $m_0 = [\frac{L}{T}]$) ; on rappelle que $(k+m_0)T - \nu \ge 0$ pour $k \ge 1$. Comme $\eta(k)$ est la restriction de la solution de l'équation stochastique (1.1) sur l'intervalle $[(k+m_0)T-\nu,\, (k+m_0)T]$, on a $\eta(k) \in C^0([-\nu, 0]; \mathbf{R}^n)$ presque surement pour tout $k \in \mathbf{N}\backslash\{0\}$.

On choisit un nombre δ tel que $0 < \delta < \frac{h}{2(2+h)}$ et on pose pour tout $\gamma > 0$

$$A_\gamma = \left\{ u \in C^0([-\nu,0];\mathbf{R}^n)) \,\Big|\, \sup_{\tau_1,\tau_2\in[-\nu,0],\, \tau_1\neq\tau_2} \frac{|u(\tau_1)-u(\tau_2)|}{|\tau_1-\tau_2|^\delta} \le \gamma \right\}. \tag{4.3}$$

On a le

Lemme 4.1. *Quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe une constante $\gamma_\varepsilon > 0$ telle que*

$$\mathbf{P}\{\, \eta(k) \in A_{\gamma_\varepsilon} \,\} \ge 1 - \varepsilon \qquad \forall k \in \mathbf{N}\backslash\{0\}. \tag{4.4}$$

Démonstration. Soient $I_k = [(k+m_0)T-\nu, (k+m_0)T]$, $\tau_1, \tau_2 \in I_k$, $\tau_1 < \tau_2$; on rappelle que $(k+m_0)T - \nu \ge 0$ et donc $0 \le \tau_1 < \tau_2$. On a alors

$$\xi(\tau_2) - \xi(\tau_1) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(s,\xi(s))ds + \tag{4.5}$$
$$+ \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{s-L}^{s} \varphi(s-r)g(r,\xi(r))drds + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sigma(s,\xi(s))dW(s).$$

En vertu de la Proposition 3.2, quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe une constante α_ε telle que

$$\mathbf{P}\left\{ \sup_{\tau\in I_k} |\xi(\tau)| \le \alpha_\varepsilon \right\} \ge 1 - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.6}$$

Or, en vertu de (2.1)–(2.3) on a

$$\sup_{s\in I_k,\, |x|\le\alpha_\varepsilon} |f(s,x)| \equiv \bar{C}_{f,\alpha_\varepsilon} < \infty, \qquad \sup_{r\in I_{\nu,k},\, |x|\le\alpha_\varepsilon} |g(r,x)| \equiv \bar{C}_{g,\alpha_\varepsilon} < \infty,$$

où $I_{\nu,k} = [(k+m_0)T-\nu-L, (k+m_0)T]$. Donc, si on pose

$$\Phi(s) = f(s,\xi(s)) + \int_{s-L}^{s} \varphi(s-r)g(r,\xi(r))dr, \quad \bar{C}_{\alpha_\varepsilon} = \bar{C}_{f,\alpha_\varepsilon} + \|\varphi\|_{L^1(0,L)}\bar{C}_{g,\alpha_\varepsilon},$$

on a

$$\mathbf{P}\left\{ \Big| \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Phi(s)ds \Big| \le (\tau_1 - \tau_1)\bar{C}_{\alpha_\varepsilon} \right\} \ge 1 - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.7}$$

D'autre part, on considère $\tau_0 \geq 0$ et on pose

$$\zeta(t) = \int_{\tau_0}^{t} \sigma(s, \xi(s)) dW(s), \qquad t \geq \tau_0.$$

En appliquant la formule d'Ito à $|\zeta(t)|^{2+h}$ on a

$$|\zeta(t)|^{2+h} = (2+h) \int_{\tau_0}^{t} |\zeta(s)|^h \zeta(s) \cdot \sigma(s, \xi(s)) dW(s) +$$

$$+ \frac{2+h}{2} \int_{\tau_0}^{t} \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} [|\zeta(s)|^h \delta_{ij} + h|\zeta(s)|^{h-2} \zeta_i(s)\zeta_j(s)] \sigma_{ik}(s, \xi(s)) \sigma_{jk}(s, \xi(s)) ds,$$

d'où, compte tenu de (2.3), on obtient

$$\mathbf{E}[\, |\zeta(t)|^{2+h}\,] \leq C\mathbf{E} \int_{\tau_0}^{t} |\zeta(s)|^h (1 + |\xi(s)|^2) ds \leq$$

$$\leq C\Big(\mathbf{E}\int_{\tau_0}^{t} |\zeta(s)|^{2+h} ds\Big)^{\frac{h}{2+h}} \Big(\mathbf{E}\int_{\tau_0}^{t} (1 + |\xi(s)|^2)^{\frac{2+h}{2}} ds\Big)^{\frac{2}{2+h}}$$

avec une constante $C > 0$. Donc, compte tenu de (3.1), on a

$$\mathbf{E}[\, |\zeta(t)|^{2+h}\,] \leq C'(t-\tau_0)^{\frac{2}{2+h}} \Big(\mathbf{E}\int_{\tau_0}^{t} |\zeta(s)|^{2+h} ds\Big)^{\frac{h}{2+h}}$$

avec une constante $C' > 0$. De cette inégalité, à l'aide du Théorème de comparaison pour les équations différentielles ordinaires, on déduit qu'il existe une constante C'' telle que

$$\mathbf{E}[\, |\zeta(t)|^{2+h}\,] \leq C''(t-\tau_0)^{1+\frac{h}{2}} \qquad \text{pour tout} \;\; t \geq \tau_0,$$

ce qui signifie que

$$\mathbf{E}\left[\, \Big| \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sigma(s, \xi(s)) dW(s) \Big|^{2+h} \,\right] \leq C''(\tau_2 - \tau_0)^{1+\frac{h}{2}} \qquad \text{pour tout} \;\; 0 \leq \tau_1 \leq \tau_2.$$

Donc en vertu du Théorème de Kolmogorov de la continuité des processus stochastiques (voir par exemple [1]), le processus $\int_0^t \sigma(s, \xi(s)) dW(s)$est presque surement hölder-continu avec le parametre δ, $0 < \delta < \frac{h}{2(2+h)}$.

Donc, quelque soit $\varepsilon > 0$ il existe une constante C_ε telle que

$$\mathbf{P}\left\{ \Big| \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sigma(s, \xi(s)) dW(s) \Big| \leq C_\varepsilon (\tau_2 - \tau_1)^\delta \right\} \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.8}$$

De (4.5), (4.7) et (4.8) on déduit (4.4). □

Désignons par λ_k la loi de la variable aléatoire $\eta(k)$ sur Y. On a alors la proposition suivante.

Proposition 4.1. *Soit $\xi(t)$ la solution de l'équation (1.1) avec les conditions (2.1)–(2.6), (2.11). Quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe un compact K_ε de l'espace de Banach $C^0([-\nu, 0]; \mathbf{R}^n)$ tel que*

$$\lambda_k(K_\varepsilon) = \mathbf{P}\Big\{ \eta(k) \in K_\varepsilon \Big\} \geq 1 - \varepsilon \qquad \forall k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \tag{4.9}$$

où $\eta(k)$ sont les variables aléatoires définies dans (4.2).

Démonstration. On pose

$$B_\alpha = \Big\{ u \in C^0([-\nu, 0]; \mathbf{R}^n)) \mid \sup_{-\nu \leq \tau \leq 0} |u(\tau)| \leq \alpha \Big\}.$$

De (4.6) et du Lemme 4.1 on déduit que, quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe un couple de nombres positifs $(\alpha_\varepsilon, \gamma_\varepsilon)$ tel que

$$\mathbf{P}\Big\{ \eta(k) \in B_{\alpha_\varepsilon} \cap A_{\gamma_\varepsilon} \Big\} = \lambda_k(B_{\alpha_\varepsilon} \cap A_{\gamma_\varepsilon}) \geq 1 - \varepsilon \qquad \forall k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}.$$

D'autre part, d'après le Théorème d'Ascoli-Arzelà l'ensemble $B_{\alpha_\varepsilon} \cap A_{\gamma_\varepsilon}$ est relativement compact dans $C^0([-\nu, 0]; \mathbf{R}^n))$, d'où découle la proposition. $\square$

Corollaire. *Pour $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, on pose*

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.$$

Alors, quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe un compact K_ε de l'espace de Banach $C^0([-\nu, 0]; \mathbf{R}^n)$ tel que

$$\mu_n(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}. \tag{4.10}$$

Démonstration. Il résulte immédiatement de la Proposition 4.1 et de la définition de μ_n. $\square$

5. - Existence d'une mesure invariante.

Considérons l'espace de Banach

$$Y = C^0([-\nu, 0]; \mathbf{R}^n). \tag{5.1}$$

Soit $y \in Y$. L'équation (1.1) avec la donnée initiale $\xi(t) = y(t)$ pour $-\nu \leq t \leq 0$ admet la solution $\xi(t)$ pour $0 \leq t$, ce qui nous permet de définir la fonction $P(y, \cdot) : \mathcal{B}(Y) \to [0, 1]$ par la relation

$$P(y, A) = \mathbf{P}\{ y_1(\cdot) = \xi(\cdot + T) \in A \}, \qquad A \in \mathcal{B}(Y) \tag{5.2}$$

($\mathcal{B}(Y)$ désigne la tribu borélienne de Y).

D'autre part, pour $\eta(k)$ définie dans (4.2) pour la solution $\xi(t)$ de l'équation (1.1) avec la condition initiale (2.11), comme nous l'avons remarqué dans le paragraphe 4, on a

$$\mathbf{P}\{\,\eta(k) \in Y\,\} = 1 \qquad \forall k \in \mathbf{N}\backslash\{0\}.$$

En outre, par la construction de la solution $\xi(t)$ de l'équation (1.1) on voit que

$$P(\eta(k)(\omega), A) = \mathbf{E}(\,\chi_A(\eta(k+1))\,|\,\eta(k)^{-1}(\mathcal{B}(Y))\,)(\omega) \quad \text{p.s.,} \tag{5.3}$$

où $\eta(k)^{-1}(\mathcal{B}(Y))$ est la tribu induite par $\eta(k)$ en correspondance à $\mathcal{B}(Y)$.

Comme les coefficients de (1.1) vérifient la condition (2.5), la relation (5.3) nous permet de constater que la fonction $P(y, A)$ définie dans (5.2) est la probabilité de transition de la chaîne de Markov $\{\eta(k)\}_{k=1}^{\infty}$.

Pour la probabilité de transition $P(y, A)$ on démontre l'existence d'une mesure invariante.

Théorème 5.1. *Soit Y l'espace de Banach défini dans (5.1).*
Soit $P(y, A)$ la probabilité de transition sur Y définie dans (5.2).
Alors la probabilité de transition $P(y, A)$ admet une mesure invariante.

Démonstration. Il est clair que la suite $\{\eta(k)\}_{k=1}^{\infty}$ définie dans (4.2) peut être identifiée avec la chaîne de Markov à valeurs dans Y et ayant pour probabilité de transition $P(y, A)$ définie dans (5.2) et pour donnée initiale $\eta(1)$ définie par (4.2) avec $k = 1$. Comme l'espace de Banach $Y = C^0([-\nu, 0]; \mathbf{R}^n)$ est séparable, d'après le critère de Prokhorov (voir par exemple [4], chap. IX, § 1, Th. 1.), on déduit du corollaire de la Proposition 4.1 qu'il existe une sous-suite $\{\mu_{n_q}\}_{q=1}^{\infty}$ de $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$, qui converge faiblement vers une mesure μ sur Y. Donc pour une fonction bornée et continue ψ sur Y on a

$$\int_Y \psi(y)\mu(dy) = \lim_{q\to\infty} \int_Y \psi(y)\mu_{n_q}(dy) = \lim_{q\to\infty} \frac{1}{n_q} \sum_{k=1}^{n_q} \int_Y \psi(y)\lambda_k(dy) =$$

$$= \lim_{q\to\infty} \frac{1}{n_q} \Big[\sum_{k=1}^{n_q} \int_Y \psi(y)\lambda_{k+1}(dy) + \int_Y \psi(y)\lambda_1(dy) - \int_Y \psi(y)\lambda_{n_q+1}(dy) \Big] =$$

$$= \lim_{q\to\infty} \frac{1}{n_q} \sum_{k=1}^{n_q} \int_Y \psi(y)P(z, dy)\lambda_k(dz) = \lim_{q\to\infty} \int_Y \psi(y)P(z, dy)\mu_{n_q}(dz) =$$

$$= \int_Y \psi(y)P(z, dy)\mu(dz),$$

ce qui signifie que μ est une mesure invariante pour la probabilité de transition $P(y, A)$. Le Théorème est démontré. □

6. - Modèle épidémiologique du paludisme avec une perturbation stochastique et des variations saisonnières.

Considérons maintenant un modèle épidémiologique du paludisme, qui prend en considération la population infectée $I(t)$ exprimée comme portion de la population totale 1 et la population de vecteurs $V(t)$. Pour que la maladie soit transmise d'une personne infectée à une autre personne, les parasites *Plasmodium* doivent passer un certain temps dans le corps d'un vecteur, moustique du gerne *Anophèles*. Un modèle bien détaillé, utilisant un terme intégral représentant le retard dans la transmission de la maladie, est proposé dans [8]. Dans le présent travail nous considérons un modèle quelque peu simplifié, plus préciément, un système d'équations pour la variation de la population infectée $I(t)$

$$dI(t) = \left[(1-I(t))\int_{t-L}^{t}\varphi_1(t-s)V(s)I(s)ds - \gamma I(t)\right]dt + \tag{6.1}$$

$$+\ \sigma_1(t)I(t)(1-I(t))dW^{[1]}(t),$$

et pour la variation de la population de vecteurs $V(t)$

$$dV(t) = (\alpha(t)V(t) - \beta(t)V(t)^2)dt + \sigma_2(t)V(t)dW^{[2]}(t), \tag{6.2}$$

où $\varphi_1(t-s)V(s)I(s)$ représente la probabilité de transmettre la maladie à une personne saine à l'instant t, ayant transmis les parasites à un vecteur à l'instant s ($s \leq t$), et γ le coefficient de guérison, tandis que $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ sont les coefficients de la croissance logistique de la population de vecteurs $V(t)$ et les perturbations stochastiques $\sigma_1(t)I(t)(1-I(t))dW^{[1]}(t)$ et $\sigma_2(t)V(t)dW^{[2]}(t)$ représentent la fluctuation imprévisible de la population infectée et l'effet des variations imprévisibles de conditions environnementales sur la population de vecteurs. La présence des facteurs $I(t)(1-I(t))$ et $V(t)$ dans les perturbations stochastiques est motivée par le fait que la proportion de la population infectée $I(t)$ doit avoir les valeurs dans $[0,1]$ et que la variation des conditions environnementales intéresse chaque individu de la population de vecteurs. Nous supposons que les coefficients $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\sigma_1(t)$ et $\sigma_2(t)$ sont des fonctions périodiques de sorte qu'ils peuvent représenter l'effet de la variation saisonnière.

Pour les coefficients des équations (6.1)–(6.2), nous supposons que

$$\alpha(\cdot), \sigma_1(\cdot), \sigma_2(\cdot) \in L^\infty(\mathbf{R}_+), \qquad \varphi(\cdot) \in L^1(0,L), \tag{6.3}$$

$$\alpha(t) - \frac{\sigma_2(t)^2}{2} \geq c_0 > 0, \qquad 0 < c_1 \leq \beta(t) \leq c_2 < \infty \quad \forall t \geq 0, \tag{6.4}$$

(6.5)

$$\alpha(t+T) = \alpha(t), \quad \beta(t+T) = \beta(t), \quad \sigma_1(t+T) = \sigma_1(t) \quad \sigma_2(t+T) = \sigma_2(t) \quad \forall t \geq 0.$$

On remarque que l'équation (6.2) ne contient pas $I(t)$ et que donc on peut l'envisager séparément. Or, si on pose

$$U(t) = \log V(t)$$

et si on applique la formule d'Ito à $U(t)$, on a

$$dU(t) = (\alpha(t) - \frac{\sigma_2(t)^2}{2} - \beta(t)e^{U(t)})dt + \sigma_2(t)dW^{[2]}(t). \tag{6.6}$$

On peut alors appliquer le Théorème 5.1 à l'équation (6.6).

Lemme 6.1. *Sous les conditions* (6.3)–(6.5) *il existe une mesure invariante* $\bar{\mu}_U$ *sur l'espace* $Y = C^0([-\nu, 0]; \mathbf{R})$ ($\nu = \max(T, L)$) *pour la probabilité de transition* $P(y, A)$ *définie par la relation*

$$P(y, A) = \mathbf{P}\{\, y_1(\cdot) = U(\cdot + T) \in A\,\}, \qquad y \in Y, \quad A \in \mathcal{B}(Y),$$

où $U(t)$ *est la solution de l'équation* (6.6) *avec la donnée initiale* $U(t) = y(t)$ *pour* $-\nu \le t \le 0$ *(c'est-à-dire* $U(0) = y(0)$*).*

Démonstration. Si on considère (6.6) comme équation (1.1) avec

$$f(t, U) = \alpha(t) - \frac{\sigma_2(t)^2}{2} - \beta(t)e^U, \qquad \varphi(\tau) = 0, \qquad \sigma(t, U) = \sigma_2(t),$$

alors on voit aisément que, en vertu des conditions (6.3)–(6.5), les conditions (2.1)–(2.6) sont vérifiées.

Donc, le Lemme 6.1 résulte immédiatement du Théorème 5.1. □

Comme l'équation (6.6) ne contient pas de terme de retard (sous la forme d'une intégrale), on pourrait démontrer le Lemme 6.1 de manière différente (voir par exemple [3], [9]). Mais pour ne pas allonger l'écriture de la démonstration, nous utilisons le Théorème 5.1, que nous avons démontré ci-dessus.

En retournant au système d'équations (6.1)–(6.2), on voit immédiatement que $I(t) \equiv 0$, $V(t) \equiv 0$ constituent une mesure invariante pour les équations (6.1)–(6.2). Donc nous nous intéressons à l'existence d'une mesure invariante qui ne se réduit pas à la solution nulle. Ceci dit, comme l'objectif de ce paragraphe est d'illustrer un exemple auquel on peut appliquer le raisonnement du Théorème 5.1, dans le présent travail nous nous limitons à démontrer l'existence d'une mesure invariante avec la condtion $V(t) > 0$, en renvoyant à un futur travail l'étude du comportement de $I(t)$ en présence de population de vecteur ; en effet c'est une question très importante du point de vue épidémiologique et méritera une étude détaillée et approfondie.

Comme on devra démontrer que $0 \le I(t) \le 1$ et $V(t) \ge 0$ p.s. pour tout $t > 0$, en supposant ces relations, on peut prolonger facilement à $\{I \notin [0, 1], V < 0\}$ les fonctions intervenant dans les équations (6.1)–(6.2), de manière que l'on puisse appliquer le raisonnement de la démonstration du Théorème 5.1. Plus précisément, en posant

$$\vartheta_1(I) = [\min(1-I,\, 1+I)]^+,\ \vartheta_2(I) = [\min(I,\, 2-I)]^+,\ \vartheta_3(I) = [I(1-I)]^+ \tag{6.7}$$

(ici $[x]^+$ désigne la partie positive de x), on considère les équations modifiées

$$dI(t) = \left[\vartheta_1(I(t))\int_{t-L}^{t}\varphi_1(t-s)V(s)\vartheta_2(I(s))ds - \gamma I(t)\right]dt + \sigma_1(t)\vartheta_3(I(t))dW^{[1]}(t), \tag{6.8}$$

$$dV(t) = (\alpha(t)V(t) - \beta(t)|V(t)|V(t))dt + \sigma_2(t)V(t)dW^{[2]}(t). \tag{6.9}$$

On voit aisément que, si $0 \le I(t) \le 1$ et $V(t) \ge 0$, alors les équations (6.8)–(6.9) coïncident avec (6.1)–(6.2).

Pour appliquer le raisonnement du Théorème 5.1 au système d'équations (6.8)–(6.9), on rappelle d'abord la variante du Théorème 5.1 pour l'équation (1.2).

Proposition 6.1. *Soit $\nu = \max(T, L)$, $Y = C^0([-\nu, 0]; \mathbf{R}^n)$. Soit $P(y, A)$ la probabilté de transition définie par la relation*

$$P(y, A) = \mathbf{P}\{\, y_1(\cdot) = \xi(\cdot + T) \in A\,\}, \qquad y \in Y, \quad A \in \mathcal{B}(Y),$$

où $\xi(t)$ est la solution de l'équation (1.2) avec la donnée initiale $\xi(t) = y(t)$ pour $-\nu \le t \le 0$. Alors la probabilité de transition $P(y, A)$ admet une mesure invariante.

Démonstration. Comme nous l'avons mentionné au début du paragraphe 3, la démonstration des Propositions 3.1, 3.2, le Lemme 4.1, la Proposition 4.1 et son corollaire, avec des modifications purement formelles, reste valable même pour l'équation (1.2). On peut donc démontrer la proposition de la même manière que le Théorème 5.1. □

La proposition étant établie, on démontre l'existence d'une mesure invariante pour le système d'équations (6.8)–(6.9).

Proposition 6.2. *Soit $\nu = \max(T, L)$, $\tilde{Y} = C^0([-\nu, 0]; \mathbf{R}^2)$. Soit $\tilde{P}(y, A)$ la probabilté de transition définie par la relation*

$$\tilde{P}(\tilde{y}, A) = \mathbf{P}\{\, \tilde{y}_1(\cdot) = (I(\cdot + T), V(\cdot + T)) \in A\,\}, \qquad \tilde{y} \in \tilde{Y}, \quad A \in \mathcal{B}(\tilde{Y}),$$

où $(I(t), V(t))$ est la solution du système d'équations (6.8)–(6.9) avec la donnée initiale $(I(t), V(t)) = y(t)$ pour $-\nu \le t \le 0$. Alors la probabilité de transition $\tilde{P}(y, A)$ admet une mesure invariante.

Démonstration. On voit que les relations (6.7) impliquent que les coefficients des équations (6.8)–(6.9) avec les conditions (6.3)–(6.5) vérifient les conditions (2.1)–(2.6) avec la substitution des relations concernant la fonctions g par les relations (2.7)–(2.10) concernant la fonctions g_1. La Proposition 6.2 résulte alors immédiatement de la Proposition 6.1. □

PROPOSITION 6.3. *Sous les conditions* (6.3)–(6.5) *il existe une mesure invariante* $\bar{\mu}$ *pour le système d'équations* (6.8)–(6.9) *telle que*

$$\bar{\mu}(\{0 \leq I(t) \leq 1, V(t) > 0\}) = 1. \tag{6.10}$$

Démonstration. En vertu du Lemme 6.1 et de la Proposition 6.2 il existe une mesure invariante $\bar{\mu}$ pour le système d'équations (6.8)–(6.9) telle que

$$\bar{\mu}(\{V > 0\}) = 1. \tag{6.11}$$

D'autre part, pour démontrer

$$\bar{\mu}(\{0 \leq I(t) \leq 1\}) = 1, \tag{6.12}$$

en supposant que $0 < I(t) < 1$, on pose

$$J(t) = \log I(t) - \log(1 - I(t))$$

et on applique la formule d'Ito à $J(t)$. Comme, pour $0 < I(t) < 1$, (6.8) coïncide avec (6.1), compte tenu de la relation

$$\frac{dJ(I)}{dI} = \frac{1}{I(1-I)}, \qquad \frac{d^2J(I)}{dI^2} = \frac{2I-1}{I^2(1-I)^2},$$

on a

$$dJ(t) = \left[\frac{1}{I(t)} \int_{t-L}^{t} \varphi_1(t-s)V(s)I(s)ds - \gamma + \frac{1}{2}\sigma_1(t)^2(2I-1)\right] dt + \sigma_1(t)dW^{[1]}(t) \tag{6.13}$$

avec $I = \dfrac{e^J}{1+e^J}$.

Comme $V(t)$ est déterminée par (6.2) indépendamment de $I(t)$ et que d'après le Lemme 6.1 il y a une mesure invariante non triviale (c'est-à-dire $V(t) > 0$ p.s.) pour (6.2), on considère le processus stochastique $V(t)$ réalisant cette mesure invariante. On considère en outre une condition initiale

$$I(\cdot) \in C^{0,\delta_0}([-\nu, 0]; \mathbf{R}) \quad \text{p.s.}, \qquad 0 < I(t) < 1 \quad \forall t \in [-\nu, 0],$$

où $\nu = \max(T, L)$ et $0 < \delta_0 < 1$. Alors on voit aisément que l'équation (6.13) admet une solution $J(t)$, ce qui signifie que

$$J(t) = \log I(t) - \log(1 - I(t)) \in \mathbf{R} \quad \text{p.s.},$$

c'est-à-dire

$$0 < I(t) < 1 \quad \text{p.s.}.$$

Comme la mesure invariante obtenue dans la Proposition 6.3 est la limite des mesures définies par la somme de ce processus $I(t)$, on en déduit la condition (6.12), ce qui achève la démonstration. □

En récapitulant les résultats obtenus dans les Propositions 6.2 et 6.3, on peut dire que le modèle stochqstique du paludisme (6.1)–(6.2) avec les conditions (6.3)–(6.5) admet une mesure invariante telle que la population de vecteurs $V(t)$ reste strictement positive.

Références

[1] P. Baldi : *Equazioni differenziali stocastiche e applicazioni.* Pitagora Ed., Bologna, 1984.

[2] H. Fujita Yashima, A. Gianesini : *Comportement asymptotique de la solution d'une sorte d'équation intégrale stochastique dans* $\mathbf{R}^n$. Acta Math. Vietnamica, vol. 31 (2006), pp. 115–129.

[3] I. I. Gihman (Gikhman), A. V. Skorohod (Skorokhod) : *Stochastic differential equations*, en russe, Naukova Dumka, Kiev , 1968 ; traduction anglaise, Springer, 1972.

[4] I. I. Guikhman (Gikhman), A. V. Skorokhod : *Introduction à la théorie des processus aléatoires*, en russe, Nauka, 1977 ; traduction française, Mir, 1980.

[5] I. Ito : *On the existence and uniqueness of solutions of stochastic integral equations of Volterra type.* Kodai Math. J. vol. 2 (1979), pp. 158–170.

[6] G. A. Ngwa, W. S. Shu : *A mathematical model for endemic malaria with variable human and mosquito population.* Math. Comput. Modelling, vol. 32 (2000), pp. 747–763.

[7] R. E. A. C. Paley, N. Wiener : *Fourier transforms in the complex domain.* Amer. Math. Soc. 1934.

[8] E. Tornatore, S. M. Buccellato : *Parasite population delay model of malaria type with stochastic perturbation and environmental criterion for limitation of disease.* J. Math. Anal. Appl., vol. 360 (2009), pp. 624–630.

[9] E. Tornatore, L. Manca, H. Fujita Yashima : *Comportamento asintotico della soluzione del sistema di equazioni stocastiche per due specie in competizione.* Rendiconti Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. A. vol. 136/137 (2002/2003), pp. 151–183.