

# UN NUOVO ALGORITMO PER LA DETERMINAZIONE DELL'AMPIEZZA DELLA TENSIONE TANGENZIALE NEI CRITERI DI FATICA BASATI SUL PIANO CRITICO

G. Petrucci

*Università di Palermo, Dipartimento di Meccanica,  
Viale delle Scienze– 90128 Palermo, e-mail: petrucci@dima.unipa.it*

## Sommario

I criteri di fatica multiassiale ad alto numero di cicli basati sull'approccio di piano critico richiedono la determinazione dell'ampiezza delle tensioni tangenziali di fatica  $\tau_a$  agenti sui diversi piani passanti per il punto del materiale analizzato. Tipicamente la determinazione di  $\tau_a$  viene effettuata considerando il Minimo Cerchio Circoscritto alla curva descritta dalla punta del vettore  $\tau$  agente nel piano nel periodo di sollecitazione. In genere tale determinazione richiede un certo sforzo computazionale. In questo lavoro viene descritta una procedura numerica per la determinazione Minimo Cerchio Circoscritto ad una curva nota per punti caratterizzato da velocità di esecuzione superiore a quelle esistenti.

## Abstract

In multi-axial high cycle fatigue criteria based on the critical plane approach require the determination of the amplitude of the shear stresses  $\tau_a$  acting on different planes passing through the point analyzed of the material. Typically the evaluation of  $\tau_a$  requires the determination of minimum circle circumscribed to the curve described by the tip of the vector  $\tau$  acting on the plane in period of the stress. This determination requires a noticeable computational effort. This paper describes a numerical procedure for determining the minimum circle circumscribed to a curve known by points that is characterized by speed of execution over the existing ones.

**Parole chiave:** fatica multiassiale, tensione tangenziale alternata, cerchio circoscritto

## 1. INTRODUZIONE

I criteri di fatica multiassiale ad alto numero di cicli basati sull'approccio di piano critico richiedono la determinazione dell'ampiezza e del valor medio delle tensioni tangenziali ( $\tau_a$  e  $\tau_m$ ) agenti sui diversi piani passanti per il punto del materiale analizzato [1-4]. In fig.1 è mostrato il vettore tensione  $\mathbf{p}_n$  agente su un generico piano F centrato in un punto O del materiale identificato mediante il versore della direzione ad esso ortogonale  $\mathbf{n}$ . La posizione del componente di  $\mathbf{p}_n$  parallelo ad F, cioè  $\tau_n$ , può essere identificata mediante le sue componenti in un sistema di riferimento con assi  $u$ - $v$  ortogonali, disposti parallelamente ad F, centrati in O (fig.1b). In generale la lunghezza e la direzione del vettore  $\tau_n$  variano con il tempo (fig.1a) e la sua punta effettua un percorso costituito da una curva piana T, come nell'esempio di fig.1c. Anche nel caso di storie di sollecitazione periodiche, per le quali la curva T risulta chiusa, la determinazione dei valori di  $\tau_a$  e  $\tau_m$  non è immediata e può essere effettuata in base a diverse definizioni [4,5]. In particolare, la definizione più efficace è quella relativa al Minimo Cerchio Circoscritto (MCC) alla curva T [4,5], in base alla quale  $\tau_a$  è assunta pari al raggio del MCC e  $\tau_m$  pari al modulo del vettore che punta la posizione del centro del MCC, come mostrato in fig.1d. La determinazione di  $\tau_a$  e  $\tau_m$  deve essere effettuata su un insieme discreto di piani  $F_i$ , con  $i=1,2,..N_F$ .

centrati nel punto considerato. In particolare, in vari criteri di fatica multiassiale deve essere determinato il piano nel quale viene raggiunto il massimo livello della componente  $\tau_a$  o della combinazione di  $\tau_a$  con una grandezza relativa alla tensione normale agente sul piano. In questi casi dovrebbe essere analizzato un grande numero di giaciture al fine di ottenere stima sufficientemente precisa [6].

Generalmente il percorso della punta del vettore  $\tau$  agente sul  $j$ -esimo piano passante per il punto del materiale è noto in forma discreta come una sequenza di  $N$  punti  $\tau_k$  di coordinate  $u_k, v_k$ , con  $k=1,2,\dots,N$ , per cui il problema della determinazione del MCC alla curva T è equivalente a quello della determinazione del più piccolo cerchio che racchiude tutti i vertici di un poligono.

Diversi algoritmi per la determinazione del MCC ad una curva nota in forma discreta sono stati applicati o appositamente sviluppati per il caso delle curve T, al fine di ottenere la massima velocità di esecuzione e precisione [5-10]. I più importanti possono essere suddivisi nei seguenti gruppi [5]: algoritmi combinatori [6,7], algoritmi incrementali [4], algoritmi di ottimizzazione [8,9], algoritmi aleatori [10]. Una comparazione effettuata in [5] ha mostrato che, quando il numero di punti è inferiore a circa 40, i metodi proposti in [6] e [10] sono i più efficaci, in caso contrario, il metodo proposto in [10] è preferibile. Il metodo [10] è caratterizzato da tempi di esecuzione differenti in dipendenza dalla sequenza di punti da analizzare, ma il tempo medio valutato su un opportuno numero di casi è il minore tra i vari metodi [5]. La dipendenza del tempo di esecuzione dal numero di punti è approssimativamente lineare per il metodo [10] e quadratica per il metodo [6].

In questo lavoro viene presentato un nuovo metodo per la determinazione del MCC ad una curva nota per punti caratterizzato da tempi di esecuzione inferiori a quelli dei metodi esistenti ed elevata precisione. Il metodo, che ha alcune operazioni in comune con il metodo proposto in [6], è anche caratterizzato da una buona semplicità di implementazione.

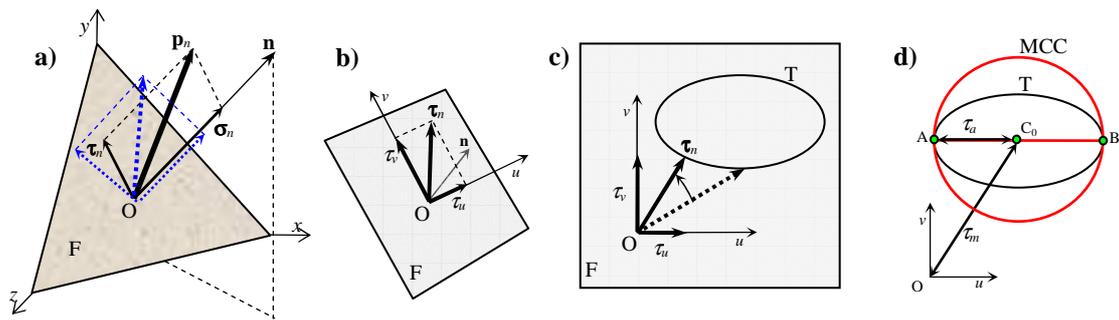


Figura 1 – a) Vettore tensione  $p_n$  sul piano F passante per il punto O, b) componenti  $\tau_n$ , c) esempio di curva T, d) il minimo cerchio circoscritto di T e componenti  $\tau_a$  e  $\tau_m$ .

## 2. IL CERCHIO CIRCOSCRITTO AD UNA CURVA NOTA PER PUNTI

### 2.1 Relazioni di base

In teoria, il centro del MCC ad una curva è il punto del piano per il quale risulta *minima* la *massima* delle distanze tra il punto stesso e i punti della curva. In accordo con le definizioni del precedente paragrafo, il problema può essere riassunto nella seguente espressione:

$$(U, V) = \min_{U_g, V_g} \left\{ \max_{k=1+N} \sqrt{(u_k - U_g)^2 + (v_k - V_g)^2} \right\} \quad (1)$$

essendo  $U_g, V_g$  le coordinate del generico punto del piano ed  $U$  e  $V$  le coordinate del centro del MCC. Le distanze dei punti della curva dal centro risultano minori o uguali al raggio  $R$  del MCC, cioè

$$D_{C,k} = \sqrt{(u_k - U)^2 + (v_k - V)^2} \leq R \quad (2)$$

e, in particolare, la massima delle distanze  $D_{C,k}$  è pari al raggio del cerchio:

$$\max_{k=1+N} \{D_{C,k}\} = R \tag{3}$$

Vari metodi per la determinazione del MCC utilizzano le relazioni (2) o (3) per verificare se i cerchi ottenuti durante le elaborazioni costituiscono la soluzione del problema, ad esempio [6,10].

### 2.2 Alcuni aspetti geometrici del problema

Nell’analisi del problema relativo alla determinazione del MCC è utile fare riferimento alla *corda più lunga* della curva stessa, cioè il segmento che unisce la *coppia di punti della curva tra i quali esiste la massima distanza relativa*. In particolare, si definiscono:

- A e B gli estremi della corda più lunga,
- $d_0$  la lunghezza della corda AB, ovvero la distanza tra i punti A e B,
- $C_0$  il punto medio della corda AB (la corda AB congiungente i 2 punti),
- $R_0$  il raggio del cerchio avente per diametro la corda AB ( $R_0=d_0/2$ ).

In generale il MCC ad una curva passa per *almeno* 2 punti della curva stessa. Se passa per 2 *solli* punti (fig.2a), essi sono certamente i punti A e B e la corda AB coincide con uno dei diametri del cerchio, il cui centro coincide con il punto  $C=C_0$  e il cui raggio è  $R=R_0$ . Quando esistono punti della curva che si trovano a distanza da  $C_0$  maggiore di  $R_0$  ( $R_U>R_0$ ), il MCC può essere identificato come il cerchio di raggio minore tra quelli che passano per *almeno* 3 dei punti della curva e verificano la condizione (3) (fig.2b). Si deve notare che, in questi casi, il raggio del cerchio risulta *maggiore* di  $R_0$  e, in generale, non è detto che i 3 punti comprendano A e/o B (fig.2b). In fig.2 sono mostrati 2 esempi di curve  $\tau$  aventi la stessa lunghezza della corda AB ( $d_0=2$ ), ruotate in modo che la corda AB risulti orizzontale: le curve  $\tau$  sono rappresentate in linea continua nera, la corda AB e il cerchio di cui AB è il diametro con linea punteggiata rossa, il MCC in linea continua blu; in fig.2a, inoltre, sono evidenziati i punti  $\tau_k$ . Essendo  $d_0$  la massima distanza tra 2 punti appartenenti alla curva, qualsiasi punto della curva si consideri, gli altri *devono trovarsi all’interno di un arco di raggio pari a  $d_0$*  centrato in esso; questo fatto implica una serie di limitazioni alla configurazione che una curva può assumere rispetto alla corda AB. Per prima cosa, tutti i punti della curva devono essere compresi tra 2 archi di raggio  $d_0$  centrati rispettivamente in A e in B, denominati  $a_A$  ed  $a_B$  che si intersecano nei punti U e D (fig.3a, in linea tratteggiata).

Ulteriori limitazioni nella configurazione della curva possono essere osservate se si identificano i 2 punti più distanti dal centro  $C_0$  da parti opposte rispetto alla corda AB. Ad esempio, con riferimento alla fig.3b, sia  $P_1$  il punto della curva più distante dal centro  $C_0$ : in tal caso i punti della curva, oltre ad essere compresi tra gli archi  $a_A$  ed  $a_B$ , devono trovarsi all’interno di un cerchio di raggio pari alla distanza  $C_0P_1=R_U$ , nonché all’interno dell’arco  $a_1$ , di raggio  $d_0$  e centrato in  $P_1$ . Il punto  $P_2$  che si trova all’intersezione tra l’arco  $a_1$  e l’arco  $a_B$  (fig.3c) coincide con la *posizione più distante da  $C_0$* , dalla parte opposta di  $P_1$  rispetto alla corda AB, al quale si *potrebbe* trovare un punto di una curva cui

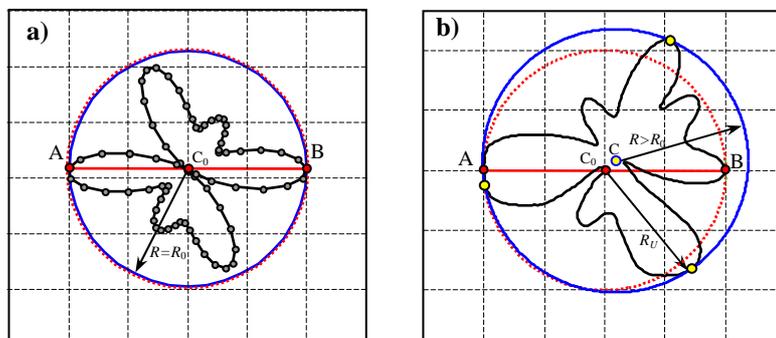


Figura 2 - Esempi di curva  $\tau$  (linea continua nera): a) caso in cui il MCC (linea blu) coincide con quello di diametro  $d_0$  (punteggiata rossa); b) caso di MCC passante per 3 punti della curva.

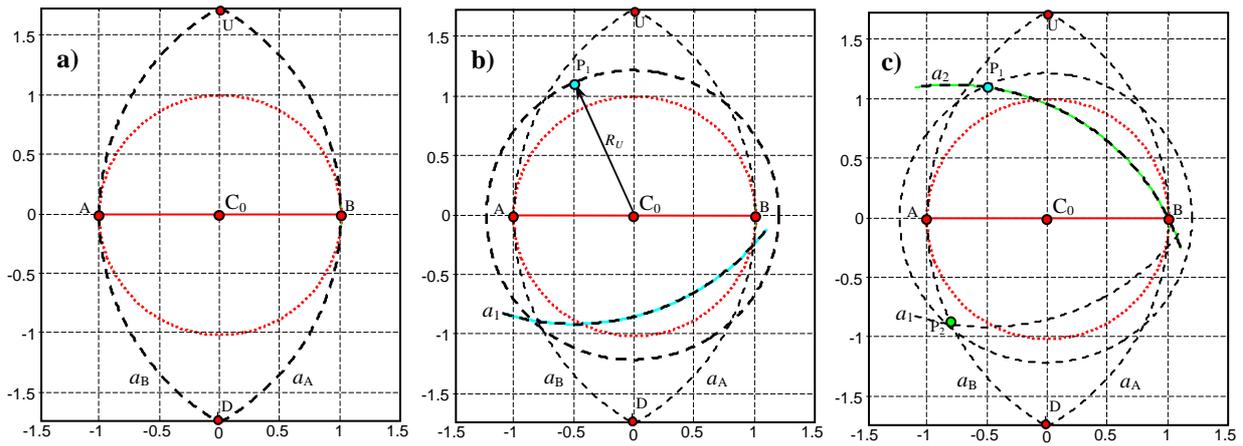


Figura 3 - Limiti di configurazione delle curve  $\tau$ . a) rispetto alla corda AB, b) rispetto al punto  $P_1$ , c) rispetto a  $P_2$ .

appartengano i punti A, B e  $P_1$ . Nel caso in cui tale punto appartenga effettivamente alla curva, gli altri punti della stessa devono risultare all'interno dell'arco  $a_2$ , di raggio  $d_0$  centrato in  $P_2$ . Riassumendo, in fig.4a sono mostrate in linea tratto punto le linee entro cui devono giacere i punti di una curva cui appartengano anche i punti A, B,  $P_1$  e  $P_2$ .

Il caso più estremo si ha se la curva passa dal punto D o dal punto U. Se passa da U, ad esempio, l'arco di raggio  $d_0$  centrato in U ( $a_U$ ) risulta passante per i punti A e B (fig.4b). In questo caso la circonferenza circoscritta passa per i punti U, A e B.

È importante osservare che, determinati A e B, il MCC risulta massimo se punti della curva coincidono con punti di intersezione degli archi limite come quelli indicati con  $P_u$  e  $P_d$  in fig.4a. Per quanto detto è possibile verificare che *il più grande MCC possibile per una curva la cui distanza tra i punti A e B è pari a  $d_0=2R_0$*  ha raggio  $R=1.1547 R_0$ . Ciò significa che il raggio R del MCC alla curva  $\tau$  rispetta sempre la condizione  $R_0 \leq R \leq 1.1547 R_0$ . Questa caratteristica ha un certo rilievo nei casi in cui si ricerca la *giacitura soggetta alla massima tensione tangenziale alternata* o al valore massimo di una combinazione della tensione tangenziale alternata con una grandezza legata alla tensione normale. In questo caso, infatti, è possibile ridurre il numero di giaciture rispetto alle quali determinare il MCC [11]. A tale fine è sufficiente determinare la distanza  $d_0$  e il corrispondente valore  $R_0$  per tutte le giaciture di interesse, indicate con l'indice  $i$ , valutarne il massimo valore  $R_{0,max}$  e, successivamente, determinare il MCC *solo* nelle giaciture per le quali si verifica

$$R_{0,i} \geq \frac{R_{0,max}}{1.1547} = 0.866 R_{0,max} \quad (4)$$

dato che, per le altre, il cerchio più grande possibile risulterà minore o al più uguale ad  $R_{0,max}$ .

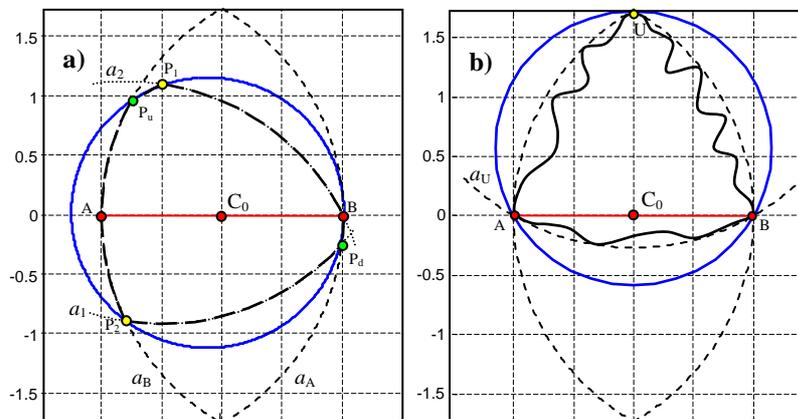


Figura 4 - Limiti di configurazione delle curve  $\tau$ .

### 3. LA PROCEDURA DI DETERMINAZIONE DEL MCC

Il metodo proposto, può essere considerato un'evoluzione di quello presentato in [6]. Come nel metodo [6], per prima cosa viene determinata la corda AB e viene verificato se la circonferenza di diametro AB rispetta la condizione (2), in quanto, in tal caso essa è il MCC e non sono necessarie ulteriori elaborazioni. In caso contrario vengono considerate delle circonferenze passanti per terne di punti appartenenti alla curva opportunamente selezionate, verificando di volta in volta se rispettano la condizione (3). Il metodo proposto si differenzia da [6] sia per la tecnica di determinazione del segmento AB, che risulta molto più veloce, che per la procedura di selezione delle terne di punti, che permette di limitare il numero di terne analizzate. Il fatto che il primo passo dell'algoritmo proposto sia costituito dalla determinazione della corda AB (e della lunghezza  $R_0$ ) consente inoltre di sfruttare la relazione (4) nel modo descritto nel paragrafo precedente.

#### 3.1 Determinazione del cerchio passante per i punti A e B

Per determinare il punto alla massima distanza dal generico punto di coordinate  $u_k, v_k$  è necessario determinare la sua distanza da ciascuno degli altri punti  $j$  e selezionarne la massima  $d_k$ :

$$d_k = \max_{j=1+N} \left\{ \sqrt{(u_k - u_j)^2 + (v_k - v_j)^2} \right\} \quad (5)$$

L'indice  $j$  del punto in corrispondenza del quale  $d_k$  è stato ottenuto,  $j_k$ , è l'indice del punto della curva più distante dal punto  $k$ . Un modo semplice, ma molto oneroso dal punto di vista computazionale, per determinare i punti A e B consiste nell'applicare la (5) a *tutti* gli  $N$  punti della curva, memorizzare gli indici  $j_k$  in un vettore  $J$ , quindi determinare il massimo tra i valori  $d_k$ , cioè  $d_0$ , e il corrispondente indice  $K$  [6]

$$d_0 = d_K = \max_{k=1+N} \{d_k\} \quad (6)$$

Ovviamente i punti di indice  $K$  e  $J_K$  sono i punti A e B, cioè i punti sulla curva  $\tau$  che si trovano alla massima distanza relativa:

$$A = K \quad B = J_K \quad (7,8)$$

In questo lavoro viene proposta una procedura che consente di applicare la (5) ad un numero di punti molto minore di  $N$ , con notevole risparmio del tempo di calcolo. In pratica viene determinata in modo opportuno una coppia di punti  $a$  e  $b$ , il loro centro relativo e la loro distanza da detto centro mediante le seguenti espressioni

$$U_{ab} = \frac{1}{2}(u_a + u_b) \quad V_{ab} = \frac{1}{2}(v_a + v_b) \quad r_{ab} = \frac{1}{2}\sqrt{(u_a - u_b)^2 + (v_a - v_b)^2} \quad (9-11)$$

quindi viene determinato l'insieme di punti  $i$  la cui distanza da  $U_{ab}, V_{ab}$ , risulta maggiore o eguale ad  $r_{ab}$ , per i quali risulta cioè:

$$r_i = \frac{1}{2}\sqrt{(U_{ab} - u_i)^2 + (V_{ab} - v_i)^2} \geq r_{ab} \quad (12)$$

infine la (5) viene applicata solo ai punti che verificano la (12). Affinché questi punti siano in numero  $N'$  contenuto, cioè  $N' \ll N$ , è opportuno che  $a$  e  $b$  siano posti alla maggiore distanza possibile. Ovviamente è anche necessario che i punti  $a$  e  $b$  vengano identificati in tempi molto rapidi. Nella procedura proposta, la loro determinazione viene effettuata utilizzando recursivamente la (5) introducendo inizialmente il punto che presenta il valore minimo (o massimo) dell'ascissa  $u$  e il punto

che presenta il valore minimo (o massimo) dell'ordinata  $v$ . Partendo da uno dei suddetti punti, ad ogni iterazione il punto  $j_k$  determinato viene introdotto nella (5) come punto  $k$  per determinare il corrispondente  $j_k$ . L'iterazione si interrompe quando il nuovo punto  $j_k$  assume lo stesso valore del precedente. Al termine delle due iterazioni, si ottengono, in generale, due coppie di punti  $a$  e  $b$ , delle quali viene presa in considerazione quella per la quale risulta maggiore la distanza  $r_{ab}$ . Quindi vengono determinati i punti  $i$  come precedentemente spiegato ed applicate su di essi le (5-6) per determinare A e B. Da notare che se l'insieme  $i$  risulta vuoto, i punti  $a$  e  $b$  coincidono con A e B,  $d_0=2R_0=d$  e il MCC ha raggio  $R=R_0$ , come nel caso di fig.2a. In caso contrario, cioè se esistono punti  $P_i$  esterni a tale cerchio (fig.2b), sono necessarie ulteriori elaborazioni.

Una volta determinati A e B, le coordinate del centro e il raggio del cerchio avente per diametro la corda AB possono poi essere ottenuti con le seguenti relazioni:

$$U_0 = \frac{1}{2}(u_A + u_B) \quad V_0 = \frac{1}{2}(v_A + v_B) \quad R_0 = d_0/2 \quad (13-15)$$

### 3.2 Determinazione dei cerchi passanti per 3 punti

Come detto, se esistono punti esterni al cerchio di diametro  $d_0$ , il MCC può essere identificato come il cerchio di raggio minore tra quelli che passano per almeno 3 dei punti della curva e verificano la condizione (3). In tal caso la procedura di elaborazione comprende 4 operazioni che devono essere ripetute fino al raggiungimento della soluzione:

1. determinazione della terna di punti da elaborare (la fase caratteristica del metodo proposto),
2. determinazione del centro e del raggio del cerchio passante per i punti della terna ottenuta al passo 1,
3. determinazione del punto della curva a maggiore distanza dal centro del cerchio ottenuto al passo 2,
4. verifica della condizione (3).

Se la condizione (3) non è verificata la procedura deve essere reiterata.

Nel metodo [6] la prima terna analizzata è costituita dai punti A e B e dal punto più lontano da  $C_0$ , mentre le altre vengono ottenute effettuando tutte le combinazioni tra 2 dei punti della terna precedente e il punto esterno al cerchio passante per la terna precedente che si trova alla massima distanza dal suo centro. Operando in questo modo il numero massimo di terne analizzate per risolvere il problema è pari a 10, mentre nei casi più semplici possono ridursi rispettivamente ad 1, 4 o 7.

Nel procedimento proposto, in particolare, le 4 operazioni vengono effettuate con tre modalità differenti: due specifiche per la prima e la seconda terna e una terza per tutte le terne successive. In tutte le prove effettuate, considerando curve generate in modo da avere la massima complessità geometrica, rispettando i vincoli descritti nel paragrafo precedente, utilizzando il metodo proposto, la procedura per le terne dalla terza in poi non è mai stata eseguita più di due volte per ottenere il risultato finale, per cui, nella peggiore delle ipotesi, il problema viene risolto mediante l'analisi 4 terne di punti.

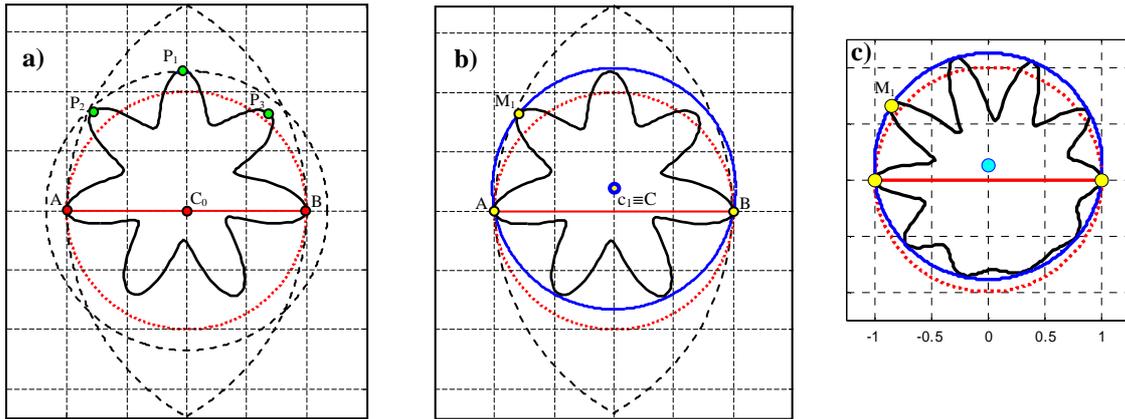
Per semplificare i calcoli è opportuno effettuare una trasformazione d'assi in modo che il punto  $U_0, V_0$  risulti coincidente con l'origine e la corda AB risulti orizzontale. A tal fine, per prima cosa la curva  $\tau$  viene traslata utilizzando le seguenti relazioni:

$$u'_{0,k} = u_k - U_0 \quad v'_{0,k} = v_k - V_0 \quad (16-17)$$

quindi ruotata dell'angolo  $\beta_B$  formato dal segmento OB e l'asse  $u$  mediante le seguenti relazioni

$$\beta_B = \tan^{-1} \frac{v'_{0,B}}{u'_{0,B}} \quad \begin{bmatrix} u_{0,k} \\ v_{0,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta_B & \sin \beta_B \\ -\sin \beta_B & \cos \beta_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_{0,k} \\ v'_{0,k} \end{bmatrix} \quad (18,19)$$

Nel nuovo sistema le coordinate dei punti A e B risultano rispettivamente  $(-R_0, 0), (R_0, 0)$ .


 Figura 5 - Determinazione del punto  $M_1$  in 2 casi.

### 3.2.1 Procedura per la prima terna

La prima terna da analizzare deve essere costituita dai punti A e B e da un opportuno punto  $M_1$  selezionato tra gli  $n$  punti  $P_i$  che risultano *esterni al cerchio di diametro  $d_0$* . Nel metodo proposto in [6] il punto  $M_1$  viene selezionato come *il più distante* da  $C_0$ , mentre nel metodo proposto come quello da cui si origina il *cerchio di raggio maggiore*. Effettuando tale scelta, il cerchio passante dalla terna  $T_1 = \{A, B, M_1\}$  ha la caratteristica di includere *tutti* i punti esterni al cerchio di diametro  $d_0$  che si trovano *dalla stessa parte* di  $M_1$  rispetto al segmento AB. Dovendo passare per A e B, inoltre, il cerchio risulta simmetrico rispetto all'asse  $u_0$ .

Ad esempio, in fig.5a è mostrato il caso di una curva con 3 punti  $P_i$  esterni al cerchio di diametro  $d_0$ , con l'indice crescente in base alla distanza da  $C_0$ . Il punto più distante è  $P_1$ , ma il punto dal quale passa il cerchio che comprende tutti i punti  $P_i$  coincide con  $P_2$ , come si osserva in fig.5b.

Dopo avere effettuato la trasformazione d'assi, le coordinate dei centri dei cerchi passanti per le terne costituite dai punti  $T_i = \{A, B, P_i\}$ , aventi coordinate  $(-R_0, 0)$ ,  $(R_0, 0)$  e  $(u_{0,i}, v_{0,i})$ , possono essere ottenute con le seguenti relazioni facilmente desumibili dalle relazioni che permettono di determinare il cerchio passante per 3 punti:

$$U_1 = \bar{U}_i = 0 \quad \bar{V}_i = \frac{1}{2} \left( v_{0,i} + \frac{u_{0,i}^2 - R_0^2}{v_{0,i}} \right) \quad (20,21)$$

Il cerchio più grande tra quelli ottenuti coincide con quello *il cui centro risulta più distante dall'origine*, cioè

$$V_1 = V_{M_1} \rightarrow \max_{i=1+n} \{|\bar{V}_i|\} \quad (22)$$

Dopo avere determinato l'ordinata del centro del cerchio, il raggio può essere facilmente calcolato come distanza tra il centro e il punto A  $(-R_0, 0)$  o il punto B  $(R_0, 0)$  mediante la seguente relazione:

$$R_1 = \sqrt{V_1^2 + R_0^2} \quad (23)$$

Quindi si determina il punto avente distanza massima dal centro  $c_1$ , indicato con  $M_2$ :

$$D_{M_2} = \max_{k=1+N} \left\{ \sqrt{u_{0,k}^2 + (v_{0,k} - V_1)^2} \right\} \quad (24)$$

Infine si effettua la verifica della condizione (3): se  $D_{M_2} = R_1$ , il cerchio determinato è quello circoscritto, in caso contrario si deve eseguire nuovamente la procedura, sia pure con una modalità

leggermente diversa da quella descritta per la prima terna di punti. Nei 2 casi di fig.5 non esistono punti esterni al primo cerchio e la procedura si interrompe, viceversa, in fig.6a è mostrato il caso in cui esistono punti esterni al primo cerchio.

### 3.2.2 Procedura per la seconda terna

Notando che, per quanto detto, il punto  $M_2$  si deve trovare certamente dalla parte opposta di  $M_1$  rispetto al segmento AB, la seconda terna da elaborare  $T_2$  deve essere ottenuta dalla  $T_1$  sostituendo uno dei punti A o B con  $M_2$ , cioè  $T_2=\{A, M_2, M_1\}$  o  $T_2=\{M_2, B, M_1\}$ . In particolare, tra A e B deve essere selezionato il punto che si trova *più vicino* alla coppia di punti  $M_1 - M_2$ , cioè quello la cui distanza dal punto medio del segmento congiungente i punti  $M_1M_2$  è minore:

$$d_{M_{1,2}} = \min_{j=A,B} \left\{ \frac{u_{0,M_1} + u_{0,M_2} - u_{0,j}}{2} \right\} \quad (25)$$

Dopo aver determinato la terna  $T_2$  si determinano il centro  $C_2 (U_2, V_2)$  ed il raggio  $R_2$  del cerchio passante per i punti di  $T_2$  mediante le classiche relazioni del cerchio passante per 3 punti. Quindi, il punto più distante dal centro può essere determinato mediante la seguente espressione:

$$D_M = \max_{k=1+N} \left\{ \sqrt{(u_{0,k} - U_2)^2 + (v_{0,k} - V_2)^2} \right\} \quad (26)$$

Infine si effettua la verifica della condizione (3): se  $D_M=R_2$ , il cerchio determinato è quello circoscritto, viceversa si deve eseguire nuovamente la procedura, sia pure con una modalità leggermente diversa da quella descritta, introducendo il punto  $M$  nella nuova terna. In fig.6b è mostrato il caso in cui il punto  $M_2$  ha sostituito il punto B ed esistono punti esterni al secondo cerchio.

### 3.2.3 Procedura per le terne successive

La nuova terna da elaborare  $T$  si ottiene dalla precedente sostituendo il punto avente minore distanza da  $M$  con  $M$  stesso. La minima tra le distanze dei punti della terna con il punto  $M$  può essere ottenuta con la seguente relazione:

$$d_M = \min_{j=1+3} \left\{ \sqrt{(u_{0,j} - u_{0,M})^2 + (v_{0,j} - v_{0,M})^2} \right\} \quad (27)$$

Dopo aver determinato la terna  $T$  si determinano il centro  $C (U, V)$  ed il raggio  $R$  del cerchio passante per i punti di  $T$  mediante le classiche relazioni del cerchio passante per 3 punti. Quindi, il punto più distante dal centro, può essere determinato mediante la seguente espressione

$$D_M = \max_{k=1+N} \left\{ \sqrt{(u_{0,k} - U)^2 + (v_{0,k} - V)^2} \right\} \quad (28)$$

Infine si effettua la verifica della condizione (3): se  $D_M=R$ , il cerchio determinato è quello circoscritto, viceversa si eseguono nuovamente i 4 passi appena descritti utilizzando il nuovo punto  $M$ .

Solitamente la seconda iterazione di questa procedura provoca una piccola variazione del MCC e, come detto, in tutte le prove effettuate, non si è mai verificata la necessità di effettuarne una terza. In fig.6c è mostrato il caso in cui, alla prima iterazione, il punto  $M$  sostituisce il punto A e viene trovato un ulteriore punto M esterno al terzo cerchio. La seconda iterazione viene effettuata sostituendo il punto B con il nuovo punto M, ottenendo la soluzione del problema, mostrata in fig.6d.

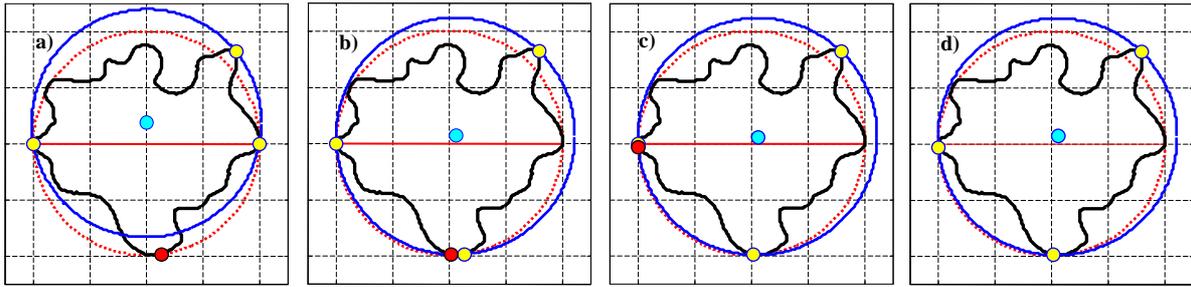


Figura 6 – Determinazione del cerchio circoscritto mediante l’analisi di 4 terne di punti: in giallo i punti della terna, in rosso i punti esterni al cerchio. a) 1° terna  $T_1=\{A, B, M_1\}$ , b) 2° terna  $T_2=\{A, M_2, M_1\}$ , c) 3° terna  $T_3=\{A, M, M_1\}$ , d) 4° terna.

#### 4. APPLICAZIONI E DISCUSSIONE

La velocità di esecuzione delle procedure è stata testata utilizzando 64 curve di forme differenti di cui alcune prese dalla letteratura [5-6] e altre create in modo da simulare casi di differente complessità, in base alle caratteristiche descritte nel paragrafo 2.2, ad esempio, quelle mostrate nelle fig.2,5 e 6.

In fig.7a è mostrato un confronto tra i tempi di esecuzione  $t$  (normalizzati rispetto al tempo di esecuzione minore) della procedura proposta (punti in verde) e della procedura descritta in [6] (punti in giallo), al variare del numero di punti  $N$  delle curve analizzate, considerando 3 curve utilizzate come *benchmark* in letteratura [5-6]. Un esempio di tali curve è mostrato in fig.7b, dove sono mostrate le due terne di punti con le quali il metodo proposto risolve il problema. Il confronto evidenzia come la velocità di esecuzione della procedura proposta sia notevolmente superiore e i tempi di esecuzione crescano in modo *meno che lineare* al crescere del numero dei punti delle curve.

La velocità di esecuzione della sola procedura di determinazione della corda AB sulle 64 curve considerate, aventi numero medio di punti pari a circa 200, è risultata più di 3.7 volte maggiore della procedura classica.

Come detto nel paragrafo 3.2, una misura della maggiore efficacia del metodo proposto è anche data dal minor numero di terne analizzate per giungere alla soluzione rispetto al metodo di confronto. Nel caso mostrato in fig.5a,b, nel quale il punto  $M_1$  non coincide con il punto più distante da  $C_0$ , il metodo proposto risolve il problema alla prima terna. Nello stesso caso il metodo descritto in [6] ha analizzato 3 terne in più. Il caso di fig.5c è analogo e il metodo [6] analizza 6 terne in più.

In fig.6 è mostrato il caso più complesso nel quale il metodo proposto è giunto alla soluzione analizzando 4 terne, mentre il metodo [6] ne ha analizzate 9.

In definitiva le applicazioni pratiche, effettuate su un campione di curve molto vario, hanno messo in luce le ottime prestazioni del metodo proposto.

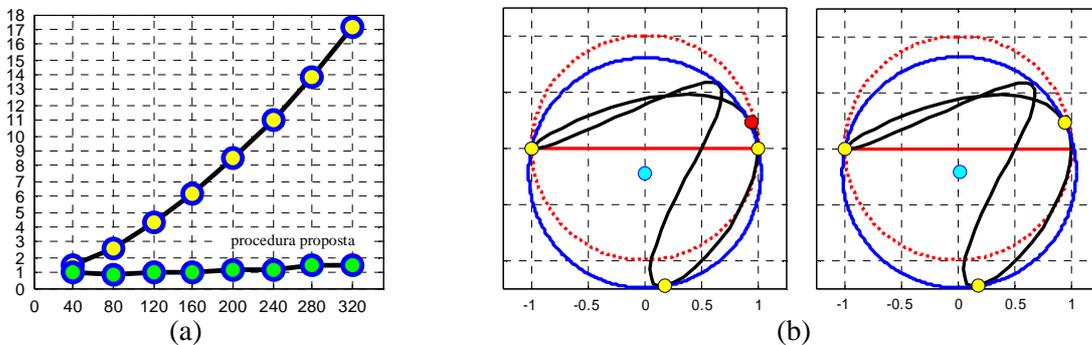


Figura 7 – a) confronto tra i tempi esecuzione della procedura proposta (punti in verde) e della procedura [6] (punti in giallo) nell’analisi di 3 curve di riferimento al variare del numero di punti delle curve; b) una delle 3 curve analizzate e le 2 terne considerate dal metodo proposto per la determinazione del MCC.

**BIBLIOGRAFIA**

- [1] W.N. Findley, A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending, *J. Eng. Ind.-Trans. ASME*, 81 (1959), 301-306.
- [2] D.L. McDiarmid, A general criterion for high cycle multiaxial fatigue failure, *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, 14, 429-453, 1991.
- [3] K. Dang Van, B. Griveau, O. Message, On a new multiaxial fatigue limit criterion: theory and applications, in: M.W. Brown, K.J. Miller (Eds.), *Biaxial and Multiaxial Fatigue*, EGF 3, Mechanical Engineering Publications, London, 479-496, 1989.
- [4] I.V. Papadopoulos, Critical plane approaches in high-cycle fatigue: on the definition of the amplitude and mean value of the shear stress acting on the critical plane, *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, 21, 269-285, 1998.
- [5] A. Bernasconi, I.V. Papadopoulos, Efficiency of algorithms for shear stress amplitude calculation in critical plane class fatigue criteria, *Computational Materials Science*, Vol. 34, N.4, 2005
- [6] B. Weber, B. Keunmeugne, J.C. Clement, J.L. Robert, Improvements of multiaxial fatigue criteria computation for a strong reduction of calculation duration, *Comp. Mater. Sci.*, 15, 381-399, 1999.
- [7] D. Elzinga, D.W. Hearn, Geometrical solutions for some minimax location problems, *Transport. Sci.*, 6, 96-104, 1972.
- [8] J.L. Zhou, A.L. Tits, Nonmonotone line search for minimax problems, *J. Optimiz. Theory App* , 76, 455-475, 1993.
- [9] Kuntsevich, A., Kappel, F., SolvOpt, the solver for local nonlinear optimization problems, Institute for Mathematics Karl-Franzens, University of Graz, 1997.
- [10] M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars, O. Schwarzkopf, *Computational Geometry: Algorithms and Applications*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1998.
- [11] G. Petrucci, Improvements in the algorithms for the determination of the shear stress components in critical plane class fatigue criteria, ICMFF9, Parma, 2010